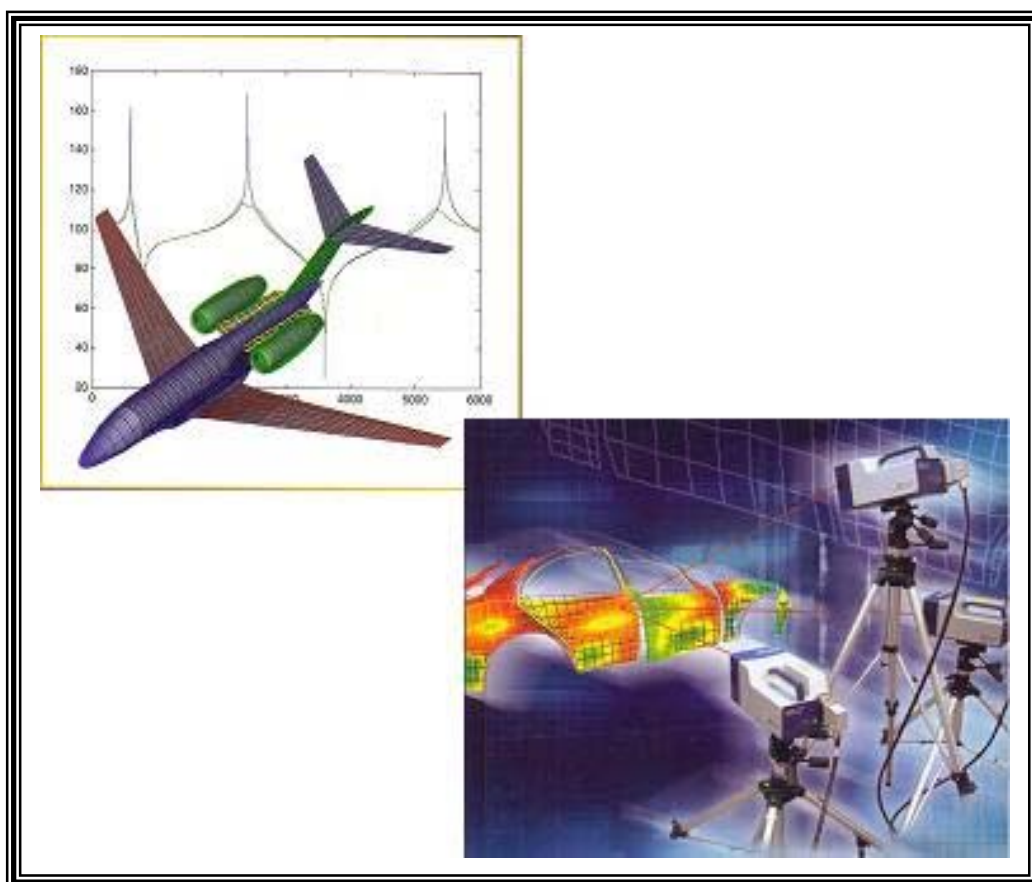




Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia - ITEC
Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM
Grupo de Vibrações e Acústica – GVA
CEP: 66.075-095 Belém – PA
Tel: (0xx91) 3201-7961 Fax: (0xx91) 3201-7325
Prof. Dr. Newton Sure Soeiro – Coordenador
E-Mail: nsoeiro@ufpa.br



CURSO DE FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÕES E BALANCEAMENTO DE ROTORES



Prof. Dr. NEWTON SURE SOEIRO

**BELÉM – PARÁ
AGOSTO - 2008**



Centrais Elétricas do Norte do Brasil S/A

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	1
<u>Capítulo I - FUNDAMERTOS DE VIBRAÇÃO</u>	
1.1. Breve Histórico das Vibrações	2
1.2. A Importância do Estudo das Vibrações	4
1.3. Conceitos Básicos sobre Vibração	6
1.4. Componentes Elementares de um Sistema Vibratório	9
1.5. Etapas da Análise Dinâmica	12
1.5.1. Mola	15
1.5.2. Massa e/ou Inércia Rotativa	20
1.5.3. Amortecedores	22
1.6. Movimento Harmônico	25
1.7. Representações Vetorial e Complexa	27
1.8. Exercícios de Aplicação	28
<u>CAPÍTULO II – MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS</u>	
2.1. Introdução	34
2.2. Método de Newton	35
2.3. Método do Sistema Equivalente	39
2.4. Método de Energia	40
2.5. Exercícios de Aplicação	41
<u>CAPÍTULO III – TEORIA DOS SISTEMAS COM 1 GDL</u>	
3.1. Introdução	45
3.2. Vibrações Livres Não Amortecidas	45
3.3. Método de Rayleigh para a determinação de Frequências Naturais	50
3.4. Vibração Livre Amortecida (Amortecimento Viscoso)	51
3.4.1. Sistemas sub-amortecido, criticamente amortecido e super-amortecido	52
3.4.2 – Decremento Logarítmico	57
3.5. Vibrações Forçadas Amortecidas – Excitação Harmônica	60
3.5.1. Excitação Harmônica	60
3.5.2. Equação Diferencial do Movimento	61
3.5.3. Sistema Não Amortecido Sob Força Harmônica	63
3.5.4. Fenômeno do Batimento	68
3.5.5. Sistema Amortecido sob Força Harmônica	69
3.6. Exercícios de Aplicação	74

CAPÍTULO IV – MEDIÇÃO DE VIBRAÇÕES

4.1.	Introdução	82
4.2.	Escolha do Instrumento de Medição	83
4.3.	Transdutores	84
4.3.1.	Transdutores Piezelétricos	85
4.3.2.	Transdutores Eletrodinâmicos	86
4.3.3.	Transformador Diferencial Linear Variável (LVDT)	86
4.4.	Sensores de Vibração (Pickups)	88
4.4.1.	Vibrômetro	89
4.4.2.	Acelerômetro	91
4.4.3.	Sensor de Velocidade	93
4.5.	Medidores de Frequência	93
4.5.1.	Estroboscópio	94
4.6.	Excitadores de Vibrações	94
4.6.1.	Excitadores Mecânicos	95
4.6.2.	Excitador Eletrodinâmico	96

CAPÍTULO V – BALANCEAMENTO DE ROTORES

5.1.	Introdução	98
5.2.	Efeitos e Tipos de Desbalanceamento	99
5.3.	Rotores Rígidos e Rotores Flexíveis	101
5.4.	Fundamentos Teóricos	102
5.5.	Balanceamento de Campo (Estático e Dinâmico)	104
5.5.1.	Balanceamento Estático de Campo	105
5.5.1.1.	Balanceamento Estático com Medição de Fase	105
5.5.1.2.	Balanceamento Estático sem Medição de Fase	108
5.5.2.	Balanceamento Dinâmico de Campo	110
5.6.	Avaliação do Desbalanceamento	115
5.7.	Exemplos de Cálculos	116

<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:</u>	122
---	-----



APRESENTAÇÃO

Neste texto vamos encontrar uma síntese de assuntos que compõem o módulo de **Fundamentos de Vibração e Balanceamento de Rotores**, do Curso promovido para a **Centrais Elétricas do Norte do Brasil S/A – ELETRONORTE**, como parte integrante das atividades do Projeto de Pesquisa intitulado ***“Implementação de Sistemas de Monitoramento e Identificação de Falhas em Máquinas Rotativas Utilizando Sinais Reais e Complexos de Vibração”*** – Contrato No. 4500057510 ELETRONORTE/UFP/FADESP, fruto das ações de P&D da ELETRONORTE, tal que sirva como fonte de consulta e apoio ao desenvolvimento do curso.

Por outro lado, é importante destacar que os assuntos aqui apresentados foram retirados das obras citadas na Bibliografia e, portanto, não foram produzidos pelo instrutor, cabendo a ele somente a organização e sistematização dos textos em acordo com os objetivos do Curso acima mencionado.

Neste módulo, constituído de 20 horas, você terá oportunidade de ingressar no mundo das vibrações mecânicas, adquirindo informações históricas sobre o desenvolvimento do conhecimento afeto à área das vibrações, a importância do estudo das vibrações, conceitos básicos sobre vibração e técnicas de modelagem, medição de vibração e identificação e correção de desbalanceamento estático e dinâmico, entre outros assuntos relevantes, numa linguagem simples, porém rigorosa em termos conceituais.

Leia cada página atentamente, sublinhe os conceitos importantes, faça os exercícios e assista a todas as aulas. Este é o caminho para você ampliar seus conhecimentos e poder participar, conscientemente, de discussões a respeito de vibração e sua aplicação e controle com seus colegas e chefes de fábrica, caso esteja trabalhando em alguma, melhorar a sua própria cultura, ou conseguir realizar algum plano pessoal.

O nosso objetivo é o seu sucesso crescente! Bom curso!

CAPÍTULO I – FUNDAMERNTOS DE VIBRAÇÃO

1.1 – Breve Histórico das Vibrações

A vibração está presente já nos primeiros tempos da História da Humanidade. Instrumentos rudimentares, como apitos e tambores, têm no seu princípio de funcionamento, um problema vibratório como essência. Estes instrumentos tiveram muita importância entre os povos primitivos como meios de comunicação. Mais tarde uma série de instrumentos musicais (percussão, cordas, metais, etc.) foram concebidos aproveitando movimentos vibratórios, geradores de ondas sonoras.

O desenvolvimento da teoria da vibração resultou dos avanços das ciências básicas das quais deriva: matemática e mecânica geral. A origem, em termos históricos, encontra-se nos antigos filósofos gregos do primeiro milênio antes de Cristo. O primeiro filósofo grego a se envolver com um problema de natureza vibratória foi Pitágoras de Samos (cerca de 570-497 AC). A partir da percepção de que havia uma certa harmonia entre os diversos sons produzidos pelos martelos em uma forjaria, Pitágoras estabeleceu um método racional de medir frequências sonoras (origem do diapasão) podendo ser considerado como o fundador da acústica, tendo realizado experiências com martelos, cordas, tubos e placas criando o primeiro laboratório de pesquisas em vibrações conhecido. O fato que para um sistema linear existem frequências que podem produzir movimento harmônico já era conhecido por músicos quando foi estabelecido como uma lei natural por Pitágoras. Além disso, ele provou com suas experiências com martelos que as frequências naturais são propriedades dos sistemas e não dependem da magnitude da força atuante.

Nos tempos de Aristófanos (450-388 AC), teve origem nas culturas grega e chinesa as pesquisas sobre o movimento do pêndulo, como medidor de tempo, portanto sendo conhecido o seu isocronismo (período constante).

Heródoto (cerca de 484 a 425 AC) registra a existência de um transdutor de vibração, constituído de um escudo coberto com uma fina camada de bronze, que era

encostado ao solo produzindo som quando este apresentava qualquer movimento vibratório. Era utilizado no sexto século AC para detectar a escavação de túneis subterrâneos em Barca, norte da África, atual Líbia, então sob dominação persa.

Por volta do ano de 132 DC merece destaque a construção de um sismógrafo na China, pelo cientista e matemático Zhang Heng, o qual teve como objetivo informar à corte antecipadamente quando ocorria um terremoto, indicando a direção da área atingida.

Já nos primórdios da era moderna **Galileu** estabeleceu formalmente a relação entre o comprimento do pêndulo e o seu **período de oscilação** e, também, observou a ressonância entre dois corpos, conectados por algum meio de transferência de energia e sintonizados em uma mesma **frequência natural**.

Wallis e **Sauveur** observaram, independentemente, o fenômeno das formas modais (com pontos estacionários, chamados **nós**) ao estudarem cordas vibratórias. Também descobriram que a frequência do segundo modo é o dobro da frequência do primeiro, a do terceiro é o triplo, etc. A Sauveur são creditados os termos **fundamental** para a frequência do primeiro modo e **harmônicas** para as outras.

Bernoulli foi o primeiro a propor o princípio da superposição linear de harmônicas: qualquer configuração da vibração livre é construída a partir das configurações das harmônicas individuais, agindo independentemente, com pesos variados.

Após o enunciado da Lei da Elasticidade por Hooke em 1676, **Euler** (1744) e **Bernoulli** (1751) determinaram a equação diferencial que governa a vibração lateral de barras prismáticas e investigaram a sua solução para o caso de pequenas deformações.

Na década de 70, merece destaque o método de determinação da frequência fundamental de vibração de um sistema conservativo utilizando o princípio da conservação da energia, proposto por **Lord Rayleigh**, o qual ficou conhecido como **Método de Rayleigh**.

Frahm, em 1909, propôs a adição de um sistema massa-mola (sistema secundário) para eliminar as vibrações de um outro sistema (sistema principal) que apresentava níveis altos de vibração, o sistema massa-mola foi denominado de absorvedor dinâmico de vibração.

Atualmente, o estudo de vibrações está sendo altamente influenciado pelo advento

dos computadores digitais que proporcionaram a realização de grandes quantidades de cálculos em tempos pequenos. Isto permitiu o desenvolvimento de métodos numéricos de análise de sistemas de vários graus de liberdade, permitindo a criação de modelos matemáticos para representar o comportamento de sistemas de grande porte e com grande precisão.

Instrumentos de medição de alta tecnologia (lasers, por exemplo) também permitiram o desenvolvimento de métodos experimentais que, associados aos métodos computacionais, proporcionaram extraordinários avanços no estudo de problemas vibratórios.

1.2 – A Importância do Estudo das Vibrações

A maioria das atividades humanas envolve alguma forma de vibração. Nós ouvimos porque o tímpano vibra, nós vemos porque ondas luminosas se propagam. A respiração está associada à vibração dos pulmões, os batimentos cardíacos são movimentos vibratórios do coração, a fala se fundamenta na vibração das cordas vocais e os movimentos humanos envolvem oscilações de braços e pernas. Em muitos outros campos da atividade humana, fenômenos apresentam variáveis cujo comportamento é oscilatório (economia, biologia, química, física, etc.). No campo tecnológico, as aplicações de vibrações na engenharia são de grande importância nos tempos atuais. Projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas, sistemas de controle, e outros, exigem que questões relacionadas a vibrações sejam levadas em conta.

Os primeiros estudos de vibrações em engenharia foram motivados pelo problema de balanceamento em motores. O desbalanceamento pode ser tanto devido a problemas de projeto como fabricação e manutenção. As rodas de locomotivas podem sair até um centímetro dos trilhos devido a desbalanceamento. As estruturas projetadas para suportar máquinas centrífugas pesadas (motores, turbinas, bombas, compressores, etc.) também estão sujeitas à vibração. A vibração também causa desgaste mais rápido de mancais e engrenagens provocando ruído excessivo e nos processos de usinagem pode causar trepidação, conduzindo a um pobre acabamento superficial, por exemplo.

Sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincide com a frequência da força externa atuante, ocorre um fenômeno conhecido como **ressonância**, que leva a grandes deformações e falhas mecânicas. A literatura é rica de exemplos de falhas em sistemas causados por vibrações excessivas em virtude de ressonância. Um destes exemplos é o da ponte de Tacoma Narrows (Fig. 1.1), nos Estados Unidos, inaugurada em julho de 1940, colapsou em 7 de novembro do mesmo ano quando entrou em ressonância induzida pelo vento.



Figura 1.1 – Ponte de Tacoma Narrows durante vibração induzida pelo vento (Reproduzido de Rao, S., Mechanical Vibrations, 4th ed., PEARSON - Prentice Hall, 2003).

Em muitos sistemas de engenharia, o ser humano atua como parte integrante do mesmo. A transmissão de vibração para o ser humano resulta em desconforto e perda de eficiência. Vibrações de painéis de instrumentos podem produzir mal funcionamento ou dificuldade de leitura de medidores. Portanto um dos propósitos importantes do estudo de vibração é a redução dos níveis vibratórios através de projeto e montagem adequados de máquinas. Nesta interface, o engenheiro mecânico tenta projetar a máquina para que a mesma apresente níveis vibratórios pequenos enquanto o engenheiro estrutural tenta projetar a base da máquina de forma a assegurar que o efeito da vibração não se transmita.

A vibração pode ser utilizada com proveito em várias aplicações industriais, testes de materiais, processos de usinagem e soldagem. Nas aplicações industriais destacam-se as

esteiras transportadoras, as peneiras, os compactadores, os misturadores, as máquinas de lavar, que utilizam a vibração em seu princípio de funcionamento. A Fig. 1.2 mostra uma gama de situações onde a presença da vibração é um fato.



Figura 1.2 – Situações do cotidiano em que há a presença de vibrações.

1.3 – Conceitos Básicos sobre Vibração

Vibração ou oscilação é qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente, depois de um intervalo de tempo. Assim, para o perfeito entendimento deste tipo de movimento, torna-se necessário o estudo do movimento de oscilação de um corpo em torno de uma posição de equilíbrio, bem como das forças e/ou momentos a ele associadas. Em engenharia estes movimentos ocorrem em elementos de máquinas e nas estruturas em geral, quando submetidas a ações dinâmicas.

As vibrações podem ser classificadas das seguintes formas:

a) Quanto à Existência ou Não de Excitação:

- **Vibrações Livres (ou naturais):** são causadas por condições iniciais de movimento, ou seja, deslocamento inicial e/ou velocidade inicial.
- **Vibrações Forçadas:** são causadas por uma força ou torque externos; as oscilações persistem durante a aplicação dos mesmos e, uma vez cessadas essas excitações, o sistema entra em vibração livre.

b) Quanto à Existência ou Não de Amortecimento:

- **Vibrações não Amortecidas:** não há perda de energia. Se a vibração for livre, não haverá diminuição da amplitude da vibração e o sistema vibrará indefinidamente. Se a vibração for forçada, a excitação reporá energia no sistema, podendo ocorrer até aumento da amplitude da vibração.
- **Vibrações Amortecidas:** há perda de energia por atrito. Se a vibração for livre, haverá sempre diminuição da amplitude da vibração e o sistema tenderá a parar na posição de equilíbrio. Se a vibração for forçada, poderá haver ou não diminuição da amplitude da vibração, porque a excitação repõe energia no sistema.

c) Quanto à Linearidade:

- **Vibrações Lineares:** obedecem ao Princípio da Superposição dos Efeitos, ou seja, existe uma proporcionalidade entre excitação e resposta.
- **Vibrações Não-Lineares:** não obedecem ao Princípio da Superposição.

No sistema linear existe proporcionalidade entre causa (excitação) e efeito (resposta). Se todos os componentes do sistema elástico comportarem-se linearmente, dizemos que a vibração é linear e o problema pode ser atacado com o procedimento indicado na Fig. 1.3. No caso de vibração linear, o modelo matemático é composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, EDOL's, de fácil solução analítica. Já no caso de vibração não-linear, o modelo matemático é composto por um sistema de EDO não-L, de difícil ou mesmo impossível solução analítica. No caso não-linear, podemos atacar

o problema de acordo com o procedimento ilustrado na Fig. 1.4.

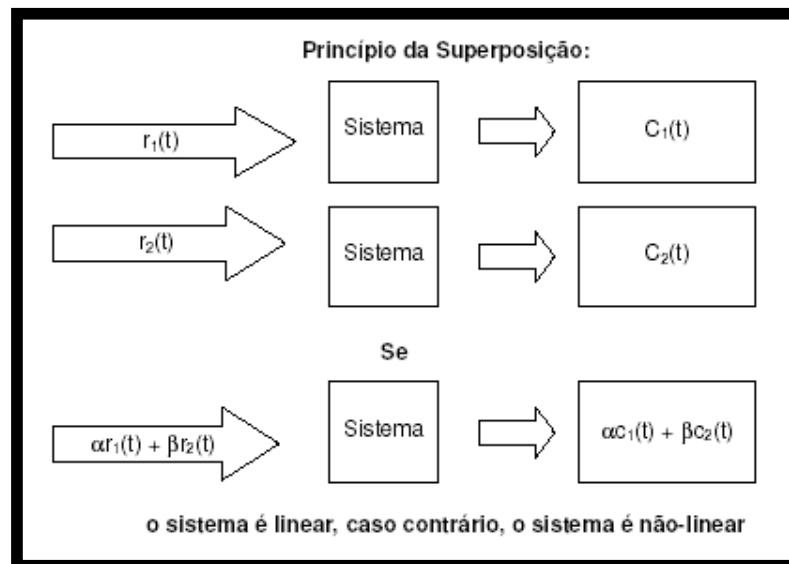


Figura 1.3 – Princípio da superposição dos efeitos.

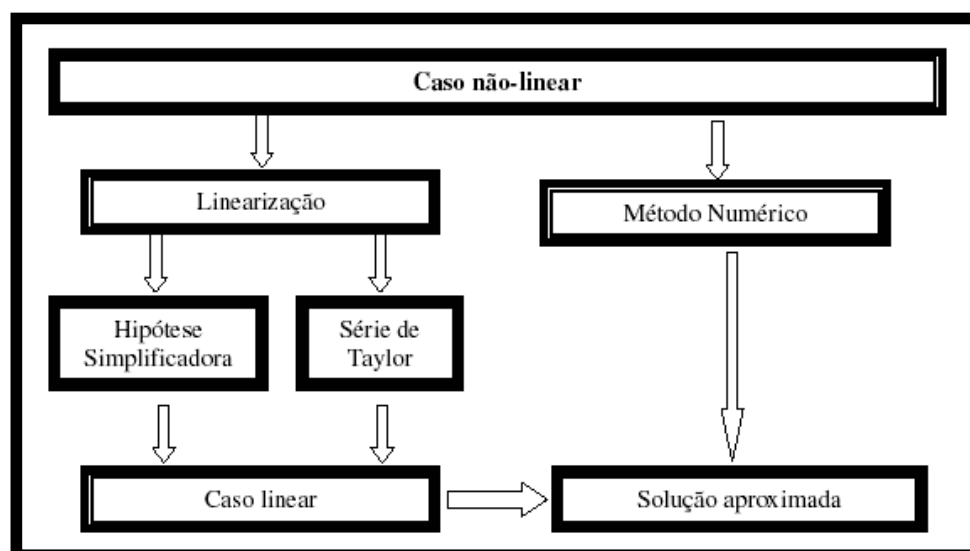
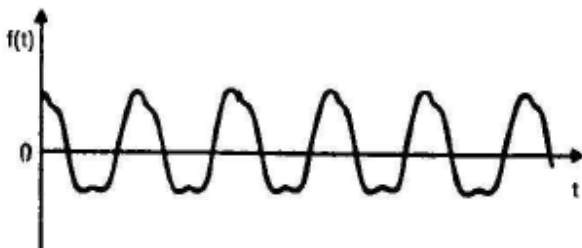
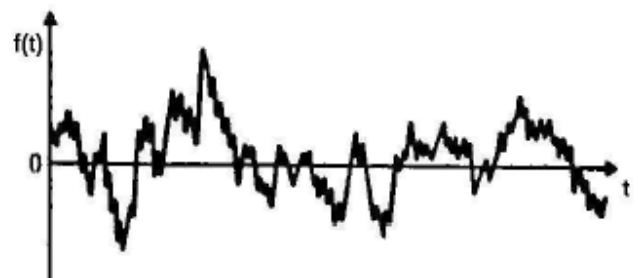


Figura 1.4 – Procedimento de análise para o caso não-linear.

c) Quanto à Previsibilidade de Ocorrência:

- **Vibrações Determinísticas:** a magnitude da excitação é conhecida para qualquer tempo dado, então, a resposta é previsível e denominada determinística (Fig. 1.5).
- **Vibrações Aleatórias:** a magnitude da excitação em um dado tempo não pode ser determinada e, neste caso, a resposta é aleatória, ou seja, ela somente pode ser descrita em termos de quantidades estatísticas (Fig. 1.6).

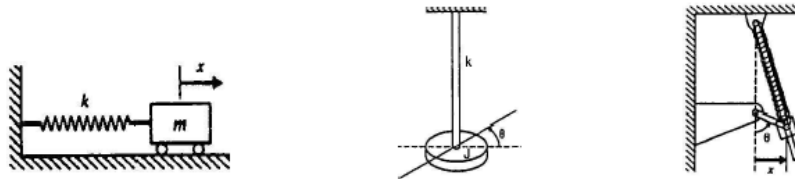
**Figura 1.5 – Excitação determinística.****Figura 1.6 – Excitação Aleatória.****1.4 – Componentes Elementares de um Sistema Vibratório**

Os sistemas vibratórios podem ser agrupados em discretos e contínuos. Os **sistemas discretos** são aqueles que podem ser subdivididos em partes de forma que cada uma delas possua um determinado número de graus de liberdade, levando a um número finito de graus de liberdade do sistema global, sendo também chamados de **sistemas com parâmetros concentrados**. Os **sistemas contínuos** não podem ser divididos, possuindo um **número infinito de graus de liberdade** sendo também conhecidos como **sistemas com parâmetros distribuídos**.

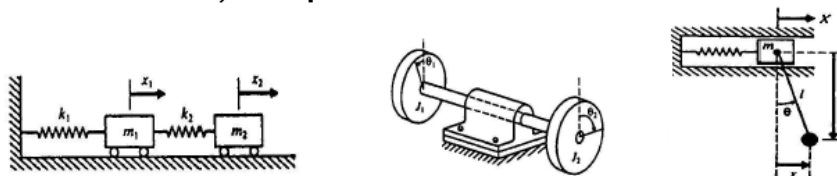
Para que o movimento vibratório de um sistema seja perfeitamente descrito (posição, velocidade, aceleração) torna-se necessário que se escolha um sistema de coordenadas. Então, em relação a este sistema de referência, escolhido de forma arbitrária, o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever

completamente o movimento de todas as partes que compõem o sistema vibratório é denominado de **Graus de Liberdade**. A Fig. 1.7 mostra exemplos esquemáticos de sistemas com um, dois e três graus de liberdade.

a) Exemplos de Sistemas com 1 GDL



b) Exemplos de Sistemas com 2 GDL



c) Exemplos de Sistemas com 3 GDL

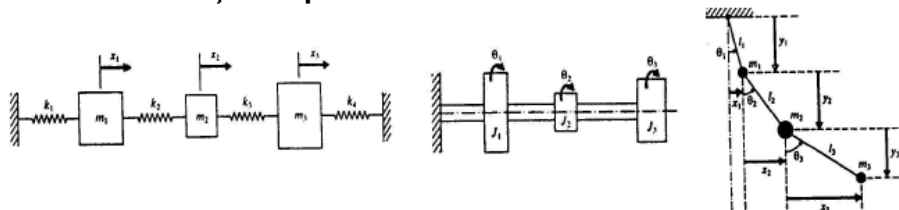


Figura 1.7 – Sistemas com um, dois e três graus de liberdade.

As propriedades mais importantes dos sistemas mecânicos sob o aspecto da vibração são a elasticidade, a inércia e o amortecimento. Isso porque a vibração é, em essência, um processo de troca de energia mecânica, nas formas de energia cinética (associada à velocidade) e energia potencial (associada à deformação e à gravidade). A elasticidade é uma característica que se relaciona com a capacidade do sistema de armazenar energia potencial elástica. A inércia, por sua vez, se liga à capacidade de armazenamento de energia cinética e, também, energia potencial gravitacional. O amortecimento, finalmente, provoca as perdas de energia em função das resistências passivas provocadas pelo atrito. Resumindo, em um sistema vibratório de parâmetros concentrados podemos classificar os elementos que o compõem segundo a forma com que

manipulam a energia mecânica:

- **massas ou inércias:** armazenam energia potencial gravitacional (associada à posição) e energia cinética (associada à velocidade), sendo que esta última pode ser de translação e/ou de rotação; em muitos casos a energia potencial gravitacional pode ser desprezada em comparação com a energia cinética;
- **molas:** armazenam energia potencial elástica, associada à deformação elástica que o corpo sofre;
- **amortecedores:** dissipam energia mecânica sob forma de calor e/ou som.

A vibração de um sistema envolve a conversão de energia potencial em energia cinética e vice-versa. Se o sistema for amortecido, alguma energia é dissipada em cada ciclo de vibração, a qual deve ser repostada por uma fonte externa se um estado de vibração permanente deva ser mantido.

Na Fig. 1.8 o movimento do pêndulo é representado por dois sistemas de coordenadas. No primeiro, são necessárias duas coordenadas para determinar exatamente a posição do pêndulo (x e y), sua velocidade e sua aceleração. No segundo sistema apenas a coordenada θ , representa completamente a posição do pêndulo, sua velocidade e sua aceleração. Nada impede que o sistema xy seja utilizado. Apenas o mesmo apresentará um número de equações maior que o sistema mais simples. Nele deve ser incluída a equação de restrição (condição de contorno) $x^2 + y^2 = l^2$. Já com a utilização de θ , apenas uma equação descreverá o movimento do sistema. Este sistema apresenta um número mínimo de coordenadas, igual ao número de graus de liberdade, necessárias a representar completamente o movimento do sistema. É, por isto, chamado de **sistema de coordenadas generalizadas**. O número de graus de liberdade é sempre igual ao número de coordenadas utilizado menos o número de equações de restrição. Assim sendo, um movimento descrito em um sistema de coordenadas generalizadas não apresenta equações de restrição.

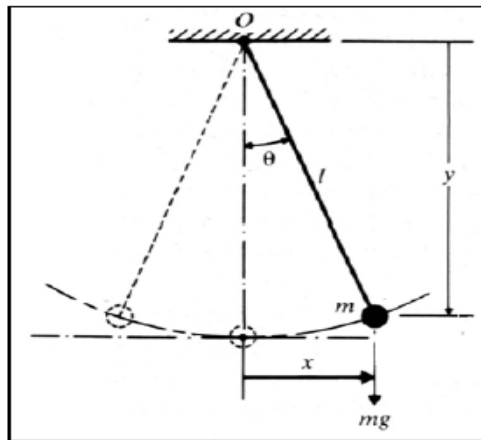


Figura 1.8 – Sistemas de coordenadas no movimento do pêndulo.

1.5 – Etapas da Análise Dinâmica

A Fig. 1.9 apresenta, de forma esquemática o ciclo de etapas que são desenvolvidas para a realização da análise dinâmica. Nesta análise destaca-se as 4 etapas seguintes: modelagem física, modelagem matemática, solução do modelo matemático e interpretação dos resultados.

a) Modelagem física: o objetivo da modelagem física é representar esquematicamente todas as características importantes do sistema, visando deduzir as equações que descrevem o seu comportamento. Deve haver um compromisso entre simplicidade do modelo e a precisão obtida, ou seja, o modelo deve ser o mais simples possível, porém mantendo as características principais do sistema.

b) Modelagem Matemática: nesta etapa é feita a dedução do conjunto de equações diferenciais que constituem o modelo matemático do sistema mecânico. Para isso, utilizamos técnicas apresentadas em dinâmica dos corpos rígidos: 2a Lei de Newton, Princípio de D'Alembert, Conservação da Energia e Equações de Lagrange.

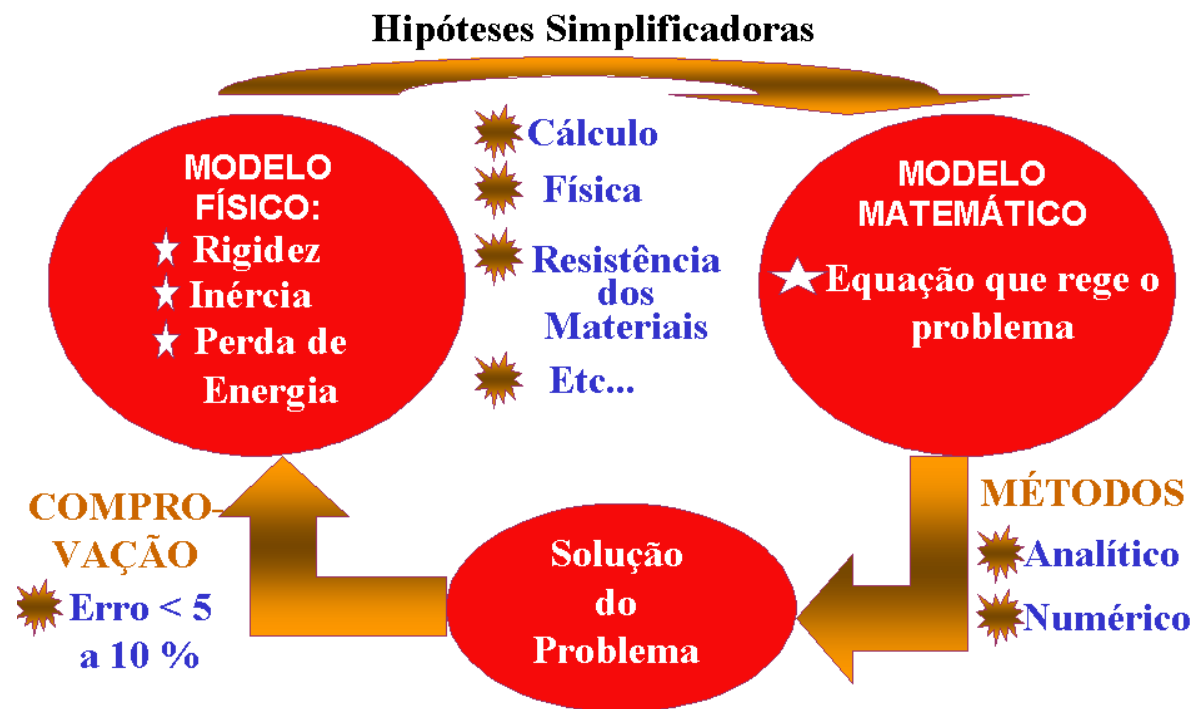


Figura 1.9 – Esquema simplificado das etapas de análise do problema.

c) **Solução do Modelo Matemático:** esta é uma etapa puramente matemática. Consiste em resolver o sistema de equações diferenciais que compõem o modelo matemático. Em geral, as equações diferenciais são ordinárias lineares de 2ª ordem e estão acopladas entre si, ou seja, as variáveis dependentes e suas derivadas aparecem em mais de uma equação. Os métodos utilizados são: Clássico, Transformada de Laplace e Numérico.

d) **Interpretação dos Resultados:** a interpretação dos resultados consiste em comparar as soluções obtidas teoricamente com dados obtidos a partir da observação experimental. Tal interpretação é facilitada através da simulação numérica em computador, quando podemos alterar dados do sistema e repetir várias vezes a solução do modelo matemático até encontrar um modelo que esteja mais próximo da realidade. Assim, se os resultados forem bons, podemos aceitar o modelo. Se não forem próximos da realidade, devemos voltar à etapa (a) e refazer todo o procedimento.

A título de exemplo, a Fig. 1.10 mostra três modelos físicos para um mesmo sistema, ou seja, motocicleta + motociclista. Na Fig. 1.10 (a) temos um modelo físico bastante simplificado com apenas 1 GDL, o deslocamento vertical da massa equivalente, a qual representa às massas das rodas, da motocicleta e do motociclista; na fig. 1.10 (b) a quantidade de GDL aumentou para 4: os deslocamentos verticais das massas e a rotação da massa que engloba a moto + motociclista em torno de um eixo horizontal perpendicular ao plano do papel e passando pelo centro de massa do conjunto; finalmente, na fig. 1.10 (c), temos acrescentado, em relação ao modelo da fig. 1.10 (b), mais 1 GDL, que é o deslocamento vertical do corpo do motociclista, perfazendo um total de 5 GDL. Esse último modelo está mais próximo da realidade do que os anteriores.

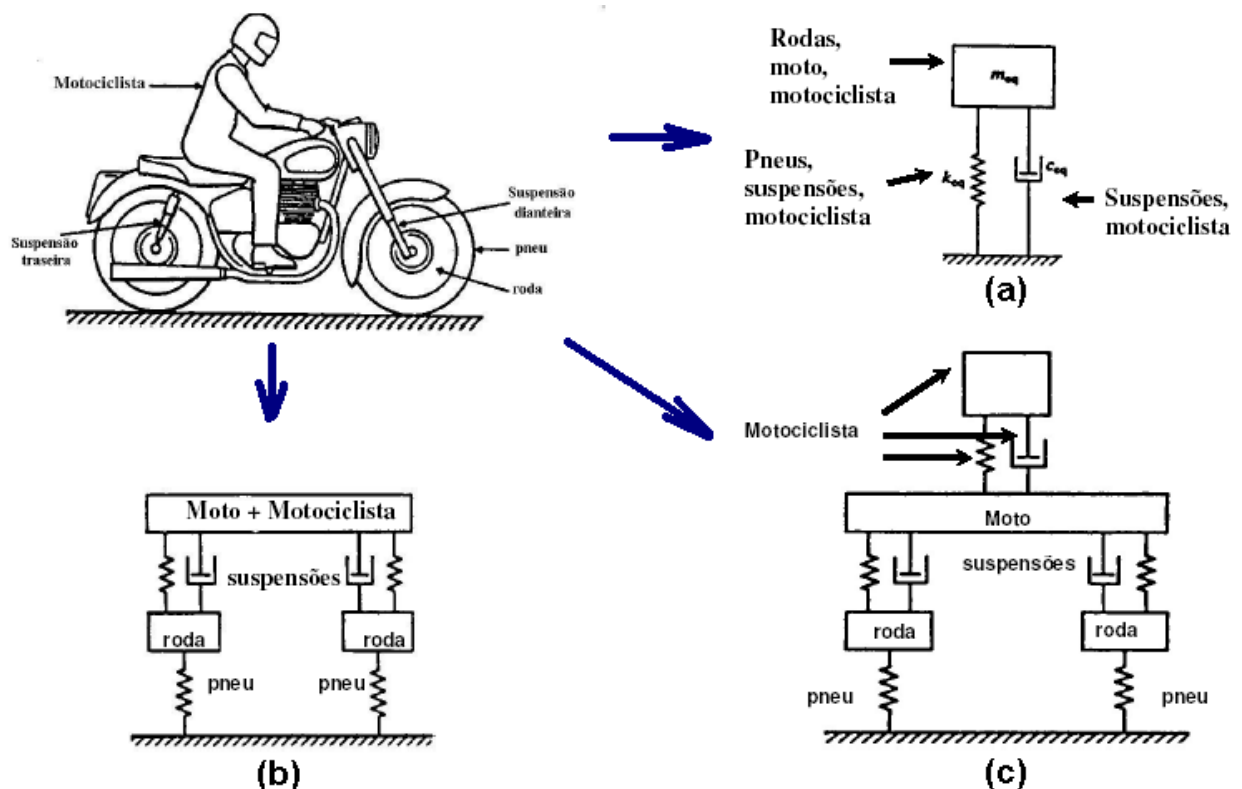


Figura 1.10 - Modelagem física de um sistema motocicleta + motociclista.

Nos modelos físicos dos sistemas mecânicos, como visto anteriormente, as

propriedades são representadas por elementos de parâmetros concentrados. Assim, visando dar informações necessárias para a obtenção do modelo matemático, cada um desses elementos será detalhadamente discutido a seguir.

1.5.1 - Mola

Em sistemas com parâmetros concentrados, considera-se que a mola não possui nenhum mecanismo de dissipação de energia e nem massa. Trata-se, portanto, de uma representação física que nada tem a ver com o elemento mecânico mola, pois este por si só pode ser representado pelos três elementos básicos usados no modelo físico do sistema, ou seja, mola, amortecedor e massa. As molas podem ser translacionais ou torcionais.

Mola translacional: opõe-se ao deslocamento relativo translacional. O deslocamento relativo, mostrado na Fig. 1.11, provoca na mola uma força de restauração e uma energia potencial elástica dadas por:

$$F = k \cdot x = k(x_1 - x_2) \quad e \quad U_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \quad (1.1)$$

Mola torcional: opõe-se ao deslocamento relativo angular. O deslocamento relativo angular, mostrado na Fig. 1.11 (b), provoca na mola um torque de restauração e uma energia potencial elástica dados por:

$$M = k_t \cdot \theta = k_t(\theta_1 - \theta_2) \quad e \quad U_p = \frac{1}{2} \cdot k_t \cdot \theta^2 \quad (1.2)$$

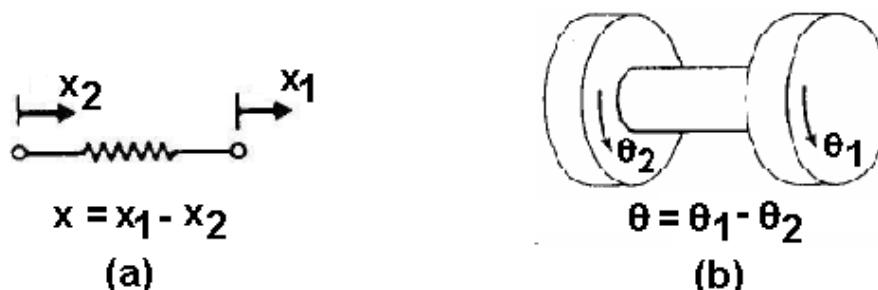


Figura 1.11 - Deformação de um elemento de mola translacional (a) e rotacional (b).

As molas podem ser *lineares* ou *não-lineares*. As primeiras obedecem à Lei de Hooke, ou seja, apresentam uma deformação proporcional ao carregamento que sofrem. Já as molas não-lineares não apresentam tais características. O coeficiente de rigidez de uma mola seja ela linear ou não linear é determinado através da seguinte equação:

$$k = \frac{dF}{dx} \quad e \quad k_t = \frac{dT}{d\theta} \quad (1.3)$$

Na mola *linear* o coeficiente de rigidez é constante e na mola *não-linear* ele varia com a intensidade da força, ou do torque, aplicado. A Fig. 1.12 mostra o comportamento das molas *linear* e *não-linear*.

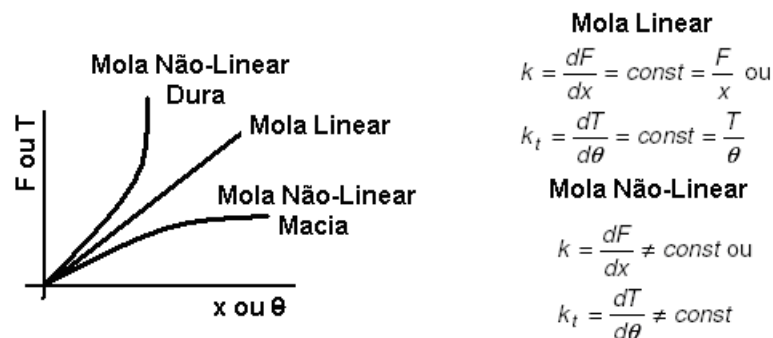


Figura 1.12 – Rigidez de molas.

Para determinar as expressões que quantificam a rigidez dos sistemas torna-se necessário um bom conhecimento de estática e resistência dos materiais. A seguir, é apresentado um conjunto de tabelas que listam uma série de expressões deduzidas com base nos conhecimentos referidos, quando aplicados para cada um dos sistemas mostrados, bem como as propriedades pertinentes dos materiais mais usados na engenharia.

É muito comum, na prática, encontrarmos duas ou mais molas associadas em um sistema mecânico. Como o sistema mecânico padrão com 1 GDL possui apenas uma mola, há necessidade de encontrarmos uma mola fictícia cuja rigidez seja equivalente à da associação dada. A tabela 1.4 apresenta uma série de arranjos comuns na prática, sendo as expressões correspondentes, apresentadas para molas translacionais, também válidas para molas rotacionais, bastando substituir k por k_t .

Tabela 1.1 – Rigidezes de Mola (Rao, S. – Mechanical Vibrations, 4th ed.)

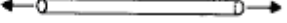



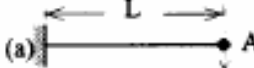
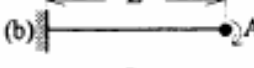
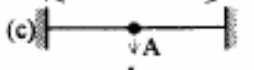
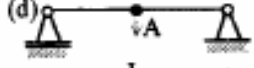
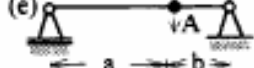
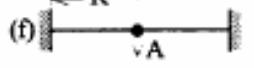
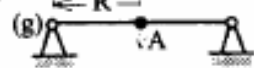
	Rod under axial load (l = length, A = cross sectional area)	$k_{eq} = \frac{EA}{l}$
	Tapered rod under axial load (D, d = end diameters)	$k_{eq} = \frac{\pi EDd}{4l}$
	Helical spring under axial load (d = wire diameter, D = mean coil diameter, n = number of active turns)	$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$
	Hollow shaft under torsion (l = length, D = outer diameter, d = inner diameter)	$k_{eq} = \frac{\pi G}{32l} (D^4 - d^4)$

Tabela 1.2 – Rigidezes de Mola (Groehs – Mechanical Vibrations, 1^a ed.)

(a) 	Viga engastada com carga concentrada : $k = 3 EI / L^3$
(b) 	Viga engastada com momento concentrado : $k = 2 EI / L^2$
(c) 	Viga biengastada com carga concentrada no centro : $k = 192 EI / L^3$
(d) 	Viga em biapoia com carga concentrada no centro : $k = 48 EI / L^3$
(e) 	Viga em biapoia com carga concentrada não centrada : $k = 3 EI L / (a b)^2$
(f) 	Placa circular engastada com carga concentrada no centro : $k = 16\pi D / R^2$
(g) 	Placa circular apoiada com carga concentrada no centro : $k = 16\pi D (1 + \nu) / [R^2(3 + \nu)]$

Nas fórmulas acima tem-se : E = módulo de elasticidade longitudinal do material
 I = momento de inércia da viga
 ν = coeficiente de Poisson do material
 $D = E t^3 / [12(1 - \nu^2)]$

**Tabela 1.3 – Módulos de Elasticidade e Coeficiente de Poisson
(Groehs – Mechanical Vibrations, 1ª ed.)**

MÓDULOS DE ELASTICIDADE

(extraídos de Groehs, primeira edição)

E = módulo de elasticidade longitudinal (Módulo de Young)

G = módulo de elasticidade transversal

ν = coeficiente de Poisson

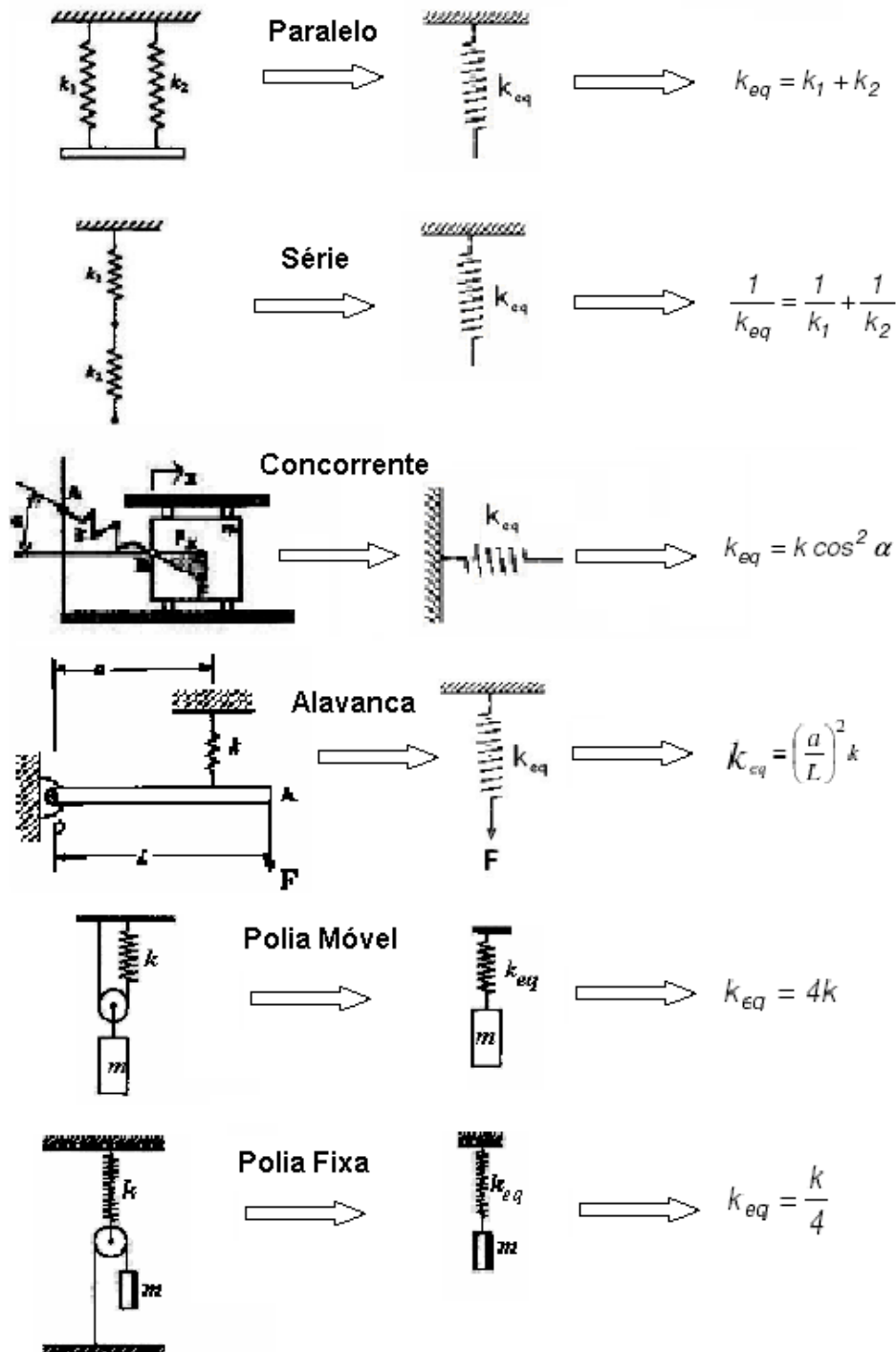
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Material	E (N/m ²)	G (N/m ²)	ν
Aço(valor médio)	2,0685E11	7,8603E10	0,316
Aço forjado	1,9306E11	7,5845E10	0,272
Aço para molas	2,0685E11	7,9292E10	0,304
Aço inoxidável	1,9306E11	7,3687E10	0,310
Alumínio	6,8950E10	2,5727E10	0,340
Bronze	1,1034E11	4,1370E10	0,333
Ferro fundido ASTM - 20	7,9982E10	3,1993E10	0,250
Ferro fundido ASTM - 25	9,7909E10	3,9164E10	0,250
Ferro fundido ASTM - 30	9,9977E10	3,9991E10	0,250
Ferro fundido ASTM - 35	1,1032E11	4,4128E10	0,250
Ferro fundido ASTM - 40	1,1721E11	4,6886E10	0,250
Ferro fundido ASTM - 50	1,2411E11	4,9644E10	0,250
Ferro fundido ASTM - 60	1,3721E11	5,4884E10	0,250
Ferro fundido maleável	1,7237E11	6,6298E10	0,300
Ferro fundido nodular	1,6000E11	6,1538E10	0,300
Latão	9,6530E10	3,6289E10	0,330
Ligas de alumínio (ex.: duralumínio)	7,2470E10	2,7041E10	0,340
Ligas de Magnésio (ex.: elektron)	4,4817E10	1,6848E10	0,330
Liga de níquel para fundição (ex.: monel, inconel etc.)	1,7927E11	6,8950E10	0,300
Liga de níquel para molas(ex.: K-monel, duraniquel etc.)	2,0685E11	7,9558E10	0,300
Ligas de titânio	1,1721E11	4,3735E10	0,340
Ligas de tungstênio	2,2064E11	8,9635E10	0,231
Ligas de zinco	8,2700E10	3,1092E10	0,330

No caso de sistemas mais complexos, é conveniente reduzi-los a sistemas mais simples contendo apenas uma mola (fictícia), a qual tem rigidez equivalente às rigidezes de todas as molas do sistema original. Para calcular a rigidez k_{eq} , aplicamos o princípio da conservação da energia potencial elástica, ou seja, a energia potencial do sistema é igual a energia potencial do sistema equivalente:

$$U_{eq} = U_{sistema} \quad (1.4)$$

Tabela 1.4 – Arranjos de molas e expressões para a Rigidez Equivalente



A título de exemplo vamos aplicar a Eq. (1.4) ao sistema da Fig. 1.13, para calcular a rigidez equivalente na direção da coordenada $x(t)$, onde $y(t)$ é a coordenada vertical ao longo da qual trabalha a mola de rigidez $2k$.

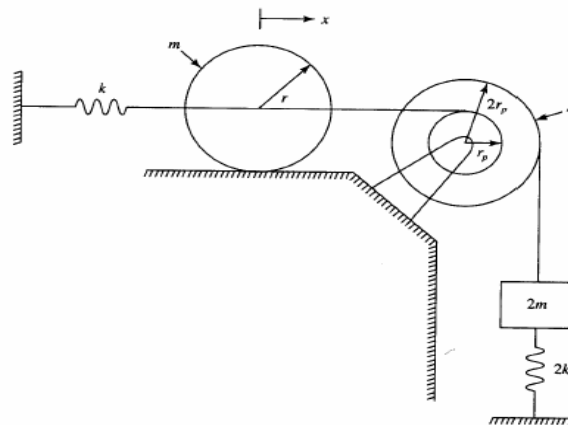


Figura 1.13 – Sistema para o cálculo da rigidez equivalente.

Assim, temos:

$$U_{eq} = U_{sistema}$$

$$\frac{1}{2} k_{eq} x^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} 2k y^2$$

Então, após achar a relação entre x e y para substituir na equação acima e posteriormente simplificar, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{2r_p}{r_p} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \frac{1}{2} k_{eq} x^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} 2k (2x)^2 \Rightarrow k_{eq} = 9k$$

1.5.2 – Massa e/ou Inércia Rotativa

Em sistemas com parâmetros concentrados, considera-se que a massa ou a inércia rotativa não possui nenhum mecanismo de dissipação de energia e nem deforma, ou seja, comporta-se como um corpo rígido. Trata-se, portanto, de uma representação física somente, tal que simplifique a abordagem matemática do problema.

A força aplicada à massa é igual ao produto dela pela aceleração (2ª. Lei de Newton) e o trabalho feito sobre a mesma (força multiplicada pelo deslocamento na direção da força), é armazenado na forma de energia cinética. Assim, para deslocamentos de translação x e de rotação θ , tem-se:

$$F = m\ddot{x} \quad e \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1.5)$$

$$M = J\ddot{\theta} \quad e \quad T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1.6)$$

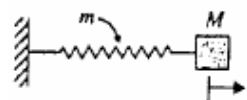
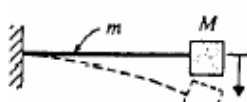
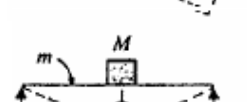
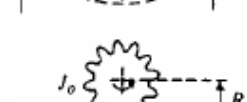

É muito comum existirem duas ou mais massas e/ou inércias associadas em um sistema. O sistema mecânico padrão com 1 GDL possui apenas uma massa e/ou inércia, logo, há necessidade de encontrarmos uma massa e/ou inércia fictícias equivalentes às dadas. Para isso, usamos o Princípio da Conservação da Energia Cinética:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 \quad ou \quad T_{eq} = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 \quad (1.7)$$

$$T_{eq} = T_{sistema}$$

A tabela 1.5 apresenta uma relação de sistemas com as respectivas massas equivalentes.

Tabela 1.5 – Relação de massas e inércias equivalentes

	Mass (M) attached at end of spring of mass m	$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$
	Cantilever beam of mass m carrying an end mass M	$m_{eq} = M + 0.23 m$
	Simply supported beam of mass m carrying a mass M at the middle	$m_{eq} = M + 0.5 m$
	Coupled translational and rotational masses	$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$ $J_{eq} = J_0 + mR^2$
	Masses on a hinged bar	$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3$

1.5.3 – Amortecedores

É o componente do sistema elástico que opõe resistência ao movimento vibratório, dissipando energia. Sua concepção é tal que não possui massa nem rigidez. Na prática, existem formas distintas de se dissipar energia (amortecimento) dos sistemas sob forma de calor e/ou som e conforme isto ocorra teremos modelos distintos de amortecimento, conforme a seguir descrito:

Amortecimento Viscoso: é o que mais ocorre na prática da Engenharia, caracteriza-se pelo atrito entre um sólido (uma peça) e um fluido (óleo lubrificante) interposto entre as peças móveis do sistema. O fluido apresenta alta viscosidade, sendo que a força de atrito viscoso é proporcional à velocidade relativa entre o sólido e o fluido:

$$F = c\dot{x} \quad \text{ou} \quad M = c_t\dot{\theta} \quad (1.8)$$

em que c e c_t são os coeficientes de amortecimento viscoso, cujas unidades no SI são, respectivamente, [N.s/m] e [N.m.s/rad].

Amortecimento Seco ou de Coulomb: resulta do atrito entre dois sólidos sem lubrificação ou com muito pouca lubrificação. A força de amortecimento é igual a força de atrito entre as superfícies, ou seja:

$$F = \mu N (\text{constante}) \quad (1.9)$$

μ (adimensional) é o **coeficiente de atrito dinâmico** entre as superfícies em contato e N é a força normal entre as superfícies.

Amortecimento Estrutural ou Material ou Histerético: ocorre pelo atrito interno entre moléculas quando o sólido é deformado, fazendo com que a energia seja dissipada pelo material sob forma de calor e/ou som. A medida do amortecimento estrutural é dada pela amplitude X da tensão reinante durante a deformação (Fig. 1.14).

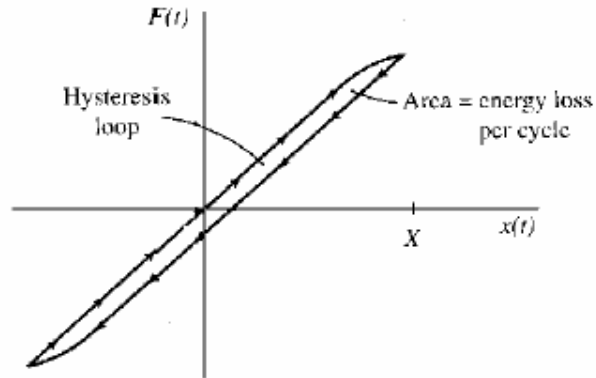


Figura 1.14 – Amortecimento histerético.

O amortecimento mais importante em Engenharia é o amortecimento viscoso, o qual apresenta a vantagem de linearizar a equação do movimento. Na tabela 1.6 são apresentados alguns casos comuns de amortecimento viscoso.

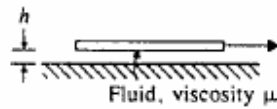
É muito comum, na prática, encontrarmos dois ou mais amortecedores viscosos em um sistema mecânico com um GDL. O sistema mecânico padrão com 1 GDL possui apenas um amortecedor viscoso, logo há necessidade de encontrarmos um amortecedor viscoso fictício equivalente aos dados. Por outro lado, haverá necessidade mais tarde de se calcular um coeficiente de amortecimento viscoso fictício, equivalente a um amortecimento não-viscoso conhecido. Isso é de suma importância, já que as equações que serão desenvolvidas levarão em conta apenas o amortecimento viscoso. Para isso, consideramos o trabalho executado pela força de amortecimento viscosa entre duas posições x_1 e x_2 (ou θ_1 e θ_2) como sendo:

$$W_{eq} = \int_{x_1}^{x_2} c_{eq} \dot{x} dx \quad \text{ou} \quad W_{eq} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} c_{t eq} \dot{\theta} d\theta \quad (1.10)$$

$$W_{eq} = W_{sistema}$$

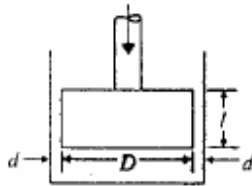
A título de exemplo, da utilização de sistemas equivalentes na modelagem, seja o esquema apresentado na Fig. 1.15 (a) o qual deverá ser substituído pelo equivalente torcional da Fig. 1.15 (b).

Tabela 1.5 – Coeficientes de amortecimento viscoso



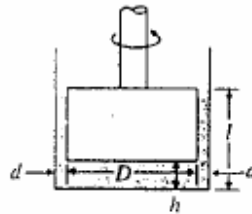
Relative motion between parallel surfaces
(A = area of smaller plate)

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$



Dashpot (axial motion of a piston in a cylinder)

$$c_{eq} = \mu \frac{3\pi D^3 l}{4d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$



Torsional damper

$$c_{eq} = \frac{\pi \mu D^3 (l - h)}{2d} + \frac{\pi \mu D^3}{32h}$$



Dry friction (Coulomb damping)
(fN = friction force,
 ω = frequency, X = amplitude
of vibration)

$$c_{eq} = \frac{4fN}{\pi \omega X}$$

A inércia equivalente do sistema da Fig. 1.15 (a) será obtida da seguinte forma:

$$T_{eq} = T_{sistema}$$

$$\frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

$$J_{eq} = \frac{7ml^2}{48}$$

A rigidez equivalente por: $U_{eq} = U_{sistema}$

$$\frac{1}{2} k_{req} \theta^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{4} \theta \right)^2 \Rightarrow k_{req} = k \left(\frac{L}{4} \right)^2 \Rightarrow k_{req} = \frac{kL^2}{16}$$

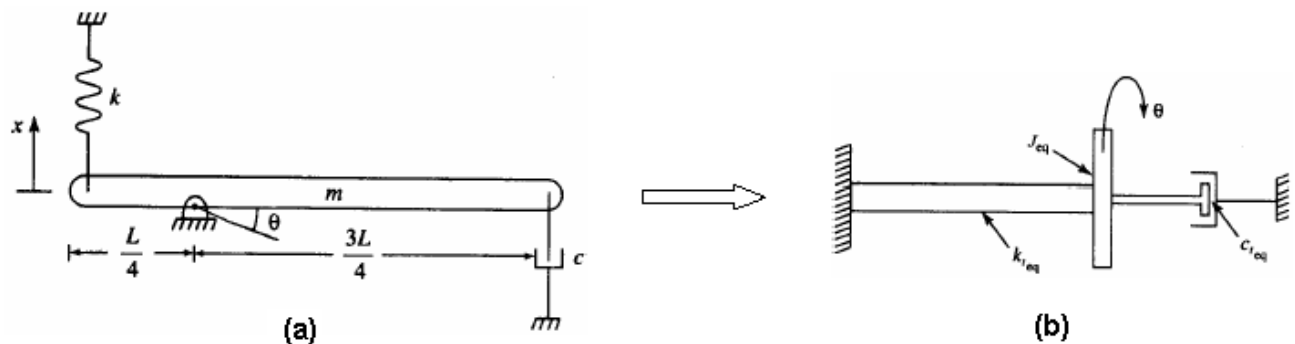


Figura 1.15 – Sistema real (a) e o seu equivalente torcional (b).

Finalmente, o amortecimento equivalente é obtido por:

$$W_{eq} = W_{sistema} \Rightarrow - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c_{teq} \dot{\theta} d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c \left(\frac{3L}{4} \dot{\theta} \right) d \left(\frac{3L}{4} \theta \right)$$

$$- \int_{\theta_1}^{\theta_2} c_{teq} \dot{\theta} d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{9}{16} cL^2 \dot{\theta} d\theta \Rightarrow c_{teq} = \frac{9}{16} cL^2$$

1.6 – Movimento Harmônico

Movimento harmônico é um movimento que se repete em todos os particulares após certo intervalo de tempo, chamado de **período**, usualmente designado pelo símbolo T . É a forma mais simples com que uma vibração se apresenta. Um diagrama do deslocamento x em relação ao tempo t pode ser apresentado de uma maneira bem simples, representando um movimento harmônico, de acordo com a Fig. 1.16.

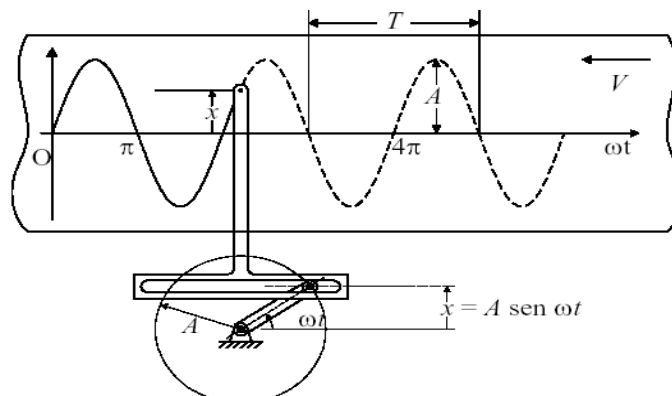


Figura 1.16 - Mecanismo de Scotch Yoke gerando um movimento harmônico

O movimento representado na Fig. 1.16 é expresso pela seguinte equação:

$$x = A \sin(\omega t) \quad (1.11)$$

ou, se a origem do movimento não coincidir com $\sin(\omega t) = 0$

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.12)$$

nas equações acima **A** é a amplitude de oscilação, medida a partir da posição de equilíbrio da massa, **ω** a velocidade angular (ou frequência circular) expressa em rd/s e **ϕ** o ângulo de fase medido em rd. O ângulo de fase começa a se tornar importante quando se compara dois movimentos harmônicos não coincidentes no tempo. Ao se estabelecer um movimento como básico, uma escolha adequada do início da observação do movimento fará com que o ângulo de fase represente o quanto um movimento está adiantado ou atrasado em relação ao outro.

O período **T** é medido em segundos e o seu inverso é a frequência de vibração **f**, expressa em Hz. Estes três últimos parâmetros estão relacionados, de acordo com equação abaixo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad (1.13)$$

A velocidade e a aceleração de um movimento harmônico são obtidas derivando-se a expressão matemática do deslocamento. Tomando-se como referência a Eq. (1.11), chega-se a:

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t) = \omega A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (1.14)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t) = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) \quad (1.15)$$

A Fig. 1.17 mostra uma representação das três variáveis que descrevem o movimento harmônico, o qual corresponde ao movimento vertical da haste do mecanismo da Fig. 1.16.

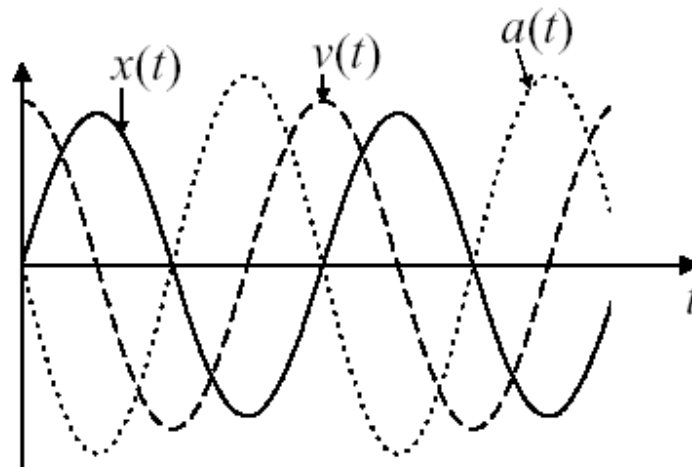


Figura 1.17 – Deslocamento, velocidade e aceleração.

Então podemos constatar que a velocidade e a aceleração também são harmônicas, com a mesma frequência de oscilação do deslocamento, porém defasados de $\pi/2$ e π respectivamente (Fig. 1.17).

Perceba que quanto maior for o ω (velocidade angular que é proporcional à frequência), maior serão os valores de amplitude de vibração em velocidade e aceleração (pois as mesmas sofrem multiplicação). Se pretendemos trabalhar com aceleração, então as frequências mais altas evidenciarão mais os seus níveis de vibração e, conseqüentemente, “esconderão” os níveis de vibração de frequências mais baixas.

1.7 - Representações Vetorial e Complexa

A vibração gerada pelo Mecanismo de Scotch Yoke pode ser interpretada como um vetor de módulo A cuja direção muda constantemente segundo o ângulo ωt . As projeções horizontal e vertical do vetor são movimentos harmônicos, dados por (Fig. 1.18):

$$x = A \cos(\omega t) \quad (1.16)$$

$$y = A \sin(\omega t) \quad (1.17)$$

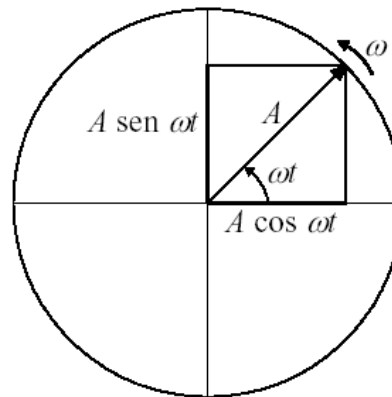


Figura 1.18 – Vetor girante e frequência circular.

A mesma representação vetorial pode ser expressa na forma de números complexos. O plano complexo é então utilizado para descrever o movimento. No mesmo movimento representado na Fig. 1.18 o vetor girante é representado por um **fasor**, que é uma quantidade complexa, com os eixos x e y sendo substituídos pelos eixos real e imaginário. Os fasores que representam o deslocamento, a velocidade e a aceleração são expressos por:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= Ae^{i\omega t} = A[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] \\ \dot{\bar{X}} &= i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega \bar{X} = \omega A[i\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \\ \ddot{\bar{X}} &= -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2 \bar{X} = -\omega^2 A[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]\end{aligned}\tag{1.18}$$

onde as componentes real e imaginária são movimentos harmônicos na forma de seno e cosseno.

1.8 – Exercícios de Aplicação

Exemplo 1.1 - A lança AB do guindaste mostrado na Fig. 1.19 é uma barra de aço uniforme de comprimento 10 m e área da seção transversal $2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. A massa de 1000 kg, suspensa pelo guindaste está parada. O cabo CDEBF é de aço e tem área da seção

transversal de $0,1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Desprezando o efeito do segmento do cabo CDEB, determinar a constante de mola equivalente do sistema na direção vertical. O módulo de elasticidade do aço é $2,07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Solução: A Fig. 1.19 (a) mostra a combinação de molas, assumindo que tanto a lança quanto o cabo estão submetidos exclusivamente a carregamento axial, o que é válido uma vez que a lança é articulada na base do guindaste e o cabo trabalha sob tração. Como não está evidente a associação das molas em série ou em paralelo, deve-se usar a equivalência de energia potencial para determinar a constante de mola equivalente. Um deslocamento vertical x do ponto B causará uma deformação $x_2 = x \cos 45^\circ$ na lança (constante k_2). O cabo se deformará $x_1 = x \cos(90^\circ - \theta)$.

Pela Lei dos Cossenos, o comprimento do cabo FB, l_1 é obtido por:

$$l_1^2 = \overline{FA}^2 + l_2^2 - 2\overline{FA}l_2 \cos(\text{ângulo } \overline{FA}l_2) = 3^2 + 10^2 - 2 \times 3 \times 10 \times \cos 135^\circ = 151 \text{ m}^2$$

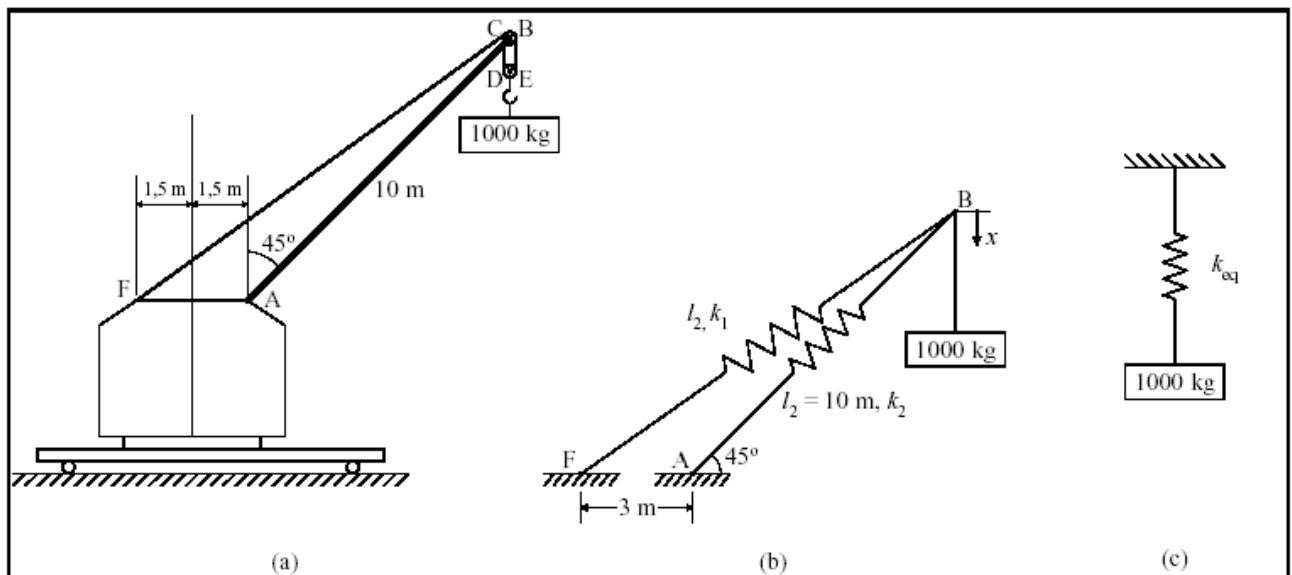


Figura 1.19 – Guindaste com carga.

A mesma Lei dos Cossenos, aplicada para determinar o ângulo θ resultará em:

$$l_2^2 = l_1^2 + \overline{FA}^2 - 2l_1 \overline{FA} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{l_1^2 - l_2^2 + \overline{FA}^2}{2l_1 \overline{FA}} = \frac{12,306^2 - 10^2 + 3^2}{2 \times 12,306 \times 3} = 0,819$$

Então, $\theta = 35,061^\circ$ e $l_1 = 12,306$ m. Portanto, a energia potencial total U armazenada nas molas é obtida por:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 = \frac{1}{2} k_1 [x \cos(90^\circ - \theta)]^2 + \frac{1}{2} k_2 (x \cos 45^\circ)^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left[k_1 (\cos(90^\circ - \theta))^2 + k_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] x^2$$

onde

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} = \frac{2,07 \times 10^{11} \times 0,1 \times 10^{-3}}{12,306} = 1,682 \times 10^6 \text{ N/m}$$

e

$$k_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} = \frac{2,07 \times 10^{11} \times 2,5 \times 10^{-3}}{10} = 51,750 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Como a mola equivalente na direção vertical sofre uma deformação x , a energia potencial desta mola equivalente é dada por:

$$U_{eq} = \frac{1}{2} k_{eq} x^2$$

Fazendo $U = U_{eq}$, obtém-se a constante de mola equivalente como:

$$k_{eq} = (\cos(90^\circ - \theta))^2 k_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 k_2 = (\cos(90^\circ - 35,061^\circ))^2 \times 1,682 \times 10^6 + \frac{1}{2} \times 51,750 \times 10^6$$

$$k_{eq} = 26,430 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Exemplo 1.2 - Um mecanismo came-seguidor, mostrado na Fig. 1.20, é utilizado para converter movimento de rotação de um eixo no movimento alternativo de uma válvula. O sistema consiste de uma haste de massa m_p , um balancim de massa m_r e momento de

inércia J_r em relação ao seu centro de gravidade C.G., uma válvula de massa m_v , e uma mola de massa desprezível. Determinar a massa equivalente m_{eq} deste sistema came-seguidor assumindo a localização de m_{eq} como (a) ponto A, (b) ponto B. O deslocamento linear da haste é x_p e da válvula é x_v .

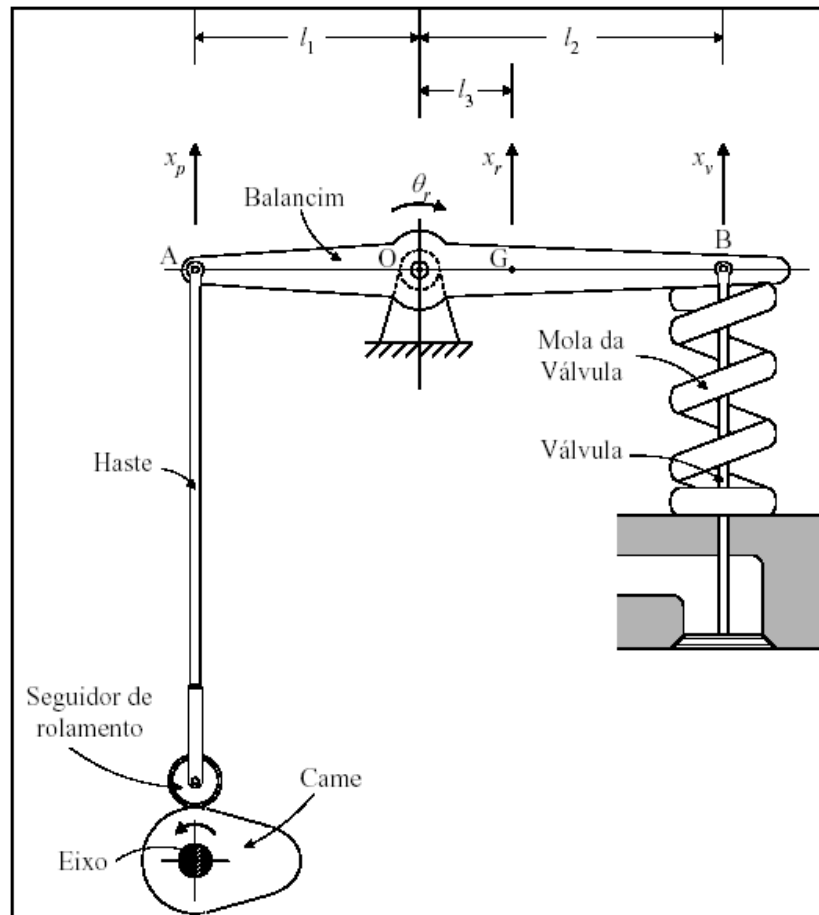


Figura 1.20 – Sistema came-seguidor.

Solução: Devido ao deslocamento vertical da haste, x_p , o balancim gira um ângulo $\theta_r = \frac{x_p}{l_1}$ em relação ao ponto de pivotamento, a válvula se move para baixo $x_v = \theta_r l_2 = \frac{x_p l_2}{l_1}$ e o C.G. do balancim se move para baixo $x_r = \theta_r l_3 = \frac{x_p l_3}{l_1}$. A energia cinética do sistema é igual à soma das energias cinéticas de cada elemento:

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2$$

em que $\dot{x}_p, \dot{x}_r, \dot{x}_v$ são as velocidades lineares da haste, C.G. do balancim e da válvula, respectivamente, e $\dot{\theta}_r$ é a velocidade angular do balancim.

(a) Se m_{eq} é a massa equivalente do sistema, localizada no ponto A, com $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_p$, a energia cinética total do sistema equivalente T_{eq} é dada por:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_p^2$$

e como $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_p$; $\dot{x}_v = \frac{\dot{x}_{eq} \ell_2}{\ell_1}$, $\dot{x}_r = \frac{\dot{x}_{eq} \ell_3}{\ell_1}$ e $\dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}_{eq}}{\ell_1}$, a expressão da energia do sistema pode ser reescrita como:

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2} m_v \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} \dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2} m_r \frac{\ell_3^2}{\ell_1^2} \dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{\ell_1^2} \dot{x}_{eq}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(m_p + m_v \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} + m_r \frac{\ell_3^2}{\ell_1^2} + \frac{J_r}{\ell_1^2} \right) \dot{x}_{eq}^2$$

Portanto, aplicando a Eq. (1.7) tem-se:

$$m_{eq} = m_p + m_v \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} + m_r \frac{\ell_3^2}{\ell_1^2} + \frac{J_r}{\ell_1^2}$$

(b) Da mesma forma, se a massa equivalente do sistema está localizada no ponto B, com $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_v$, a energia cinética total do sistema equivalente T_{eq} é dada por:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_v^2$$

e como $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_v$; $\dot{x}_p = \frac{\dot{x}_{eq} \ell_1}{\ell_2}$, $\dot{x}_r = \frac{\dot{x}_{eq} \ell_3}{\ell_2}$ e $\dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}_{eq}}{\ell_2}$, a expressão da energia do sistema pode ser reescrita como:

$$T = \frac{1}{2} m_v \dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2} m_p \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2} m_r \frac{\ell_3^2}{\ell_2^2} \dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{\ell_2^2} \dot{x}_{eq}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(m_v + m_p \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} + m_r \frac{\ell_3^2}{\ell_2^2} + \frac{J_r}{\ell_2^2} \right) \dot{x}_{eq}^2$$

Portanto, novamente aplicando a Eq. (1.7) tem-se:

$$m_{eq} = m_v + m_p \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} + m_r \frac{\ell_3^2}{\ell_2^2} + \frac{J_r}{\ell_2^2}$$

CAPÍTULO II – MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS

2.1 – Introdução

Um sistema vibratório é um sistema dinâmico para o qual as variáveis tais como as excitações (causas, entradas, inputs) e respostas (efeitos, saídas, outputs) são dependentes do tempo. A resposta de um sistema vibratório depende, geralmente, das condições iniciais e das ações externas. Isto faz com que seja necessário estabelecer um procedimento de análise que permita o entendimento das influências de cada um dos fatores. O procedimento geral é o que começa com o estabelecimento de um modelo físico, determinação das equações diferenciais que governam o movimento (modelo matemático), solução destas equações e interpretação dos resultados.

A partir do estabelecimento do modelo físico, são utilizados os princípios da dinâmica para determinar as equações diferenciais do movimento. Estas são geralmente na forma de um conjunto de equações diferenciais ordinárias para sistemas discretos e equações diferenciais parciais para sistemas contínuos. As equações podem ser lineares ou não lineares, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Entre os métodos utilizados para determinar as equações do movimento, os mais freqüentemente encontrados são: Método de Newton (2ª. Lei de Newton), Método do Sistema Equivalente e Método da Energia (Princípio da Conservação da Energia).

Dependendo da natureza do problema, uma determinada técnica deverá ser usada para resolver as equações do movimento. As técnicas mais freqüentemente utilizadas são as seguintes: métodos de solução de equações diferenciais, método da Transformada de Laplace, métodos matriciais e métodos numéricos.

A solução das equações do movimento apresenta os deslocamentos, velocidades e acelerações das várias massas do sistema. Estes resultados devem ser interpretados segundo o propósito da análise que está sendo realizada e as possíveis implicações dos

resultados. É nesta etapa que se inclui, por exemplo, o diagnóstico de vibrações em máquinas ou equipamentos industriais. A comparação entre as características das vibrações medidas com as soluções das equações diferenciais permite importantes conclusões sobre as causas das vibrações. Nesta etapa a utilização das Transformadas de Fourier é fundamental para a identificação de características nas vibrações medidas.

2.2 – Método de Newton

Baseia-se na aplicação da 2ª Lei de Newton:

“A taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear (angular) de uma massa é igual à força resultante (ao momento resultante) atuando sobre ela”.

No nosso estudo trataremos apenas do **movimento plano de um corpo rígido**, para o qual as equações fundamentais da dinâmica newtoniana são:

- Translação

$$F = m \cdot \ddot{x} \quad (2.1)$$

- Rotação em torno de um eixo que passa no centro de massa C

$$M_C = J_C \cdot \ddot{\theta} \quad (2.2)$$

- Rotação em torno de um eixo que passando por um ponto fixo O que não seja o centro de massa C

$$M_O = J_O \cdot \ddot{\theta} \quad (2.3)$$

- Rotação em torno de um eixo passando por um ponto S, móvel, paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa C

$$M_S = J_S \cdot \ddot{\theta} + m r_{S/C} \times \ddot{R}_S \quad (2.4)$$

em que, de acordo com o Teorema de Steiner, ou seja, $J_S = J_C + m r_{S/C}^2$.

Procedimento do Método:

1. Selecionar coordenadas generalizadas adequadas: lineares para a descrição das translações dos centros de massa dos corpos rígidos ou angulares para a descrição das rotações dos mesmos;
2. Definir as posições de equilíbrio estático do sistema e usá-las como origens das coordenadas escolhidas;
3. Desenhar os Diagramas de Corpo Livre (DCL) dos corpos rígidos para posições de deslocamentos, velocidades e acelerações positivas, representando todas as forças e momentos externos que atuam sobre os corpos;
4. Aplicar a 2a Lei de Newton a cada corpo rígido.

Como exemplo de aplicação do método, tomemos o sistema mostrado na Fig. 2.1, denominado de sistema m-k-c com um grau de liberdade, para o qual será selecionada a coordenada generalizada $x(t)$ para representar o movimento de translação horizontal do corpo rígido, a qual tem como referência a posição da mola k não deformada.

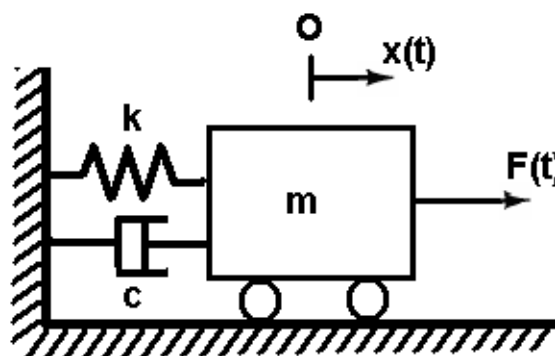


Figura 2.1 – Movimento horizontal do sistema massa-mola-amortecedor com 1GDL.

O diagrama de corpo livre correspondente está mostrado na Fig. 2.2, onde estão representadas todas as forças externas atuando sobre a massa m , na direção x .

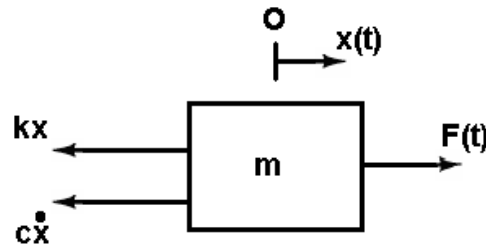


Figura 2.2 – Diagrama de corpo livre do sistema da Fig. 2.1.

Aplicando a 2ª Lei de Newton, Eq. (2.1):

$$F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.5)$$

O modelo matemático ilustrado pela Eq. (2.5) será largamente usado nos capítulos seguintes e caracteriza as vibrações forçadas, amortecidas, de um grau de liberdade.

Objetivando generalizar a abordagem para sistemas de um número maior de graus de liberdade, tomemos o sistema da Fig. 2.3 que é o mais completo sistema acoplado por molas e amortecedores. Assim sendo, podemos deduzir um modelo matemático para ele, o qual poderá ser aproveitado para sistemas mais simples, desde que tenha a mesma configuração acima. Um sistema real que pode ser modelado conforme a figura acima é a composição ferroviária, onde as massas representam os vagões e as molas e amortecedores representam os engates.

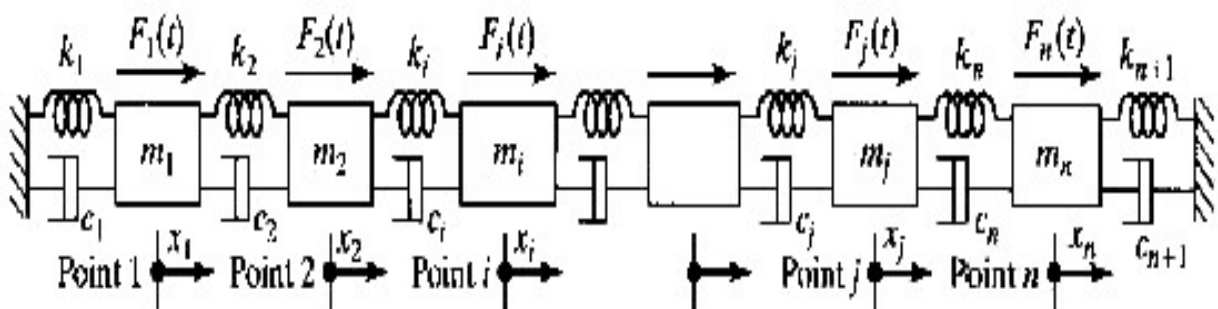


Figura 2.3 – Sistema com N GDL, acoplados por molas e amortecedores.

Vamos usar o Método de Newton, considerando uma massa genérica m_i , cujo DCL é apresentado abaixo:

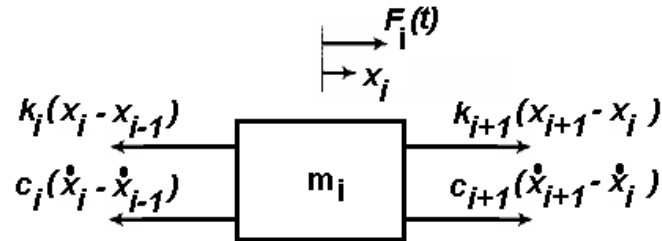


Figura 2.4 – DCL para a i-ésima massa.

Aplicando a 2ª Lei de Newton à i-ésima massa m_i :

$$F_i(t) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) - k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = m_i \ddot{x}_i \quad (2.6)$$

Ordenando a Eq. (2.6), chegamos ao modelo matemático para a massa m_i :

$$m_i \ddot{x}_i - c_i \dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) \dot{x}_i - c_{i+1} \dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) x_i - k_{i+1} x_{i+1} = F_i(t) \quad (2.7)$$

A Eq. (2.7) é válida para a massa m_i . Podemos fazer $i = 1, 2, \dots, n$ para obter o sistema de n Equações Diferenciais Ordinárias Lineares - EDOL's que constituem o modelo matemático. Tal sistema de EDOL's, pode ser colocado sob a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_n & (c_n + c_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

a qual, pode ser escrita na forma compacta como:

$$[m]_{n \times n} \{\ddot{x}\}_{n \times 1} + [c]_{n \times n} \{\dot{x}\}_{n \times 1} + [k]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} = \{F(t)\}_{n \times 1} \quad (2.9)$$

na qual $[m]$ é a matriz inercial ou matriz de massa, $[c]$ é a matriz de amortecimento, $[k]$ é a matriz de rigidez, $\{x\}$ é o vetor de deslocamento, $\{\dot{x}\}$ é o vetor de velocidade, $\{\ddot{x}\}$ é o vetor de aceleração e $\{F(t)\}$ é o vetor de excitação.

A visualização das matrizes na Eq. (2.8) sugere um método para a **montagem da equação matricial** sem necessidade de aplicar o Método de Newton, ou seja, bastando aplicar as seguintes regras válidas somente para sistemas acoplados por molas e amortecedores:

- **Vetores:** vetores colunas com os elementos colocados em seqüência, de cima para baixo;
- **Matriz $[m]$:** matriz diagonal, com as massas ocupando a diagonal principal em seqüência, do elemento m_{11} ao elemento m_{nn} ;
- **Matrizes $[c]$ e $[k]$:** matrizes simétricas, com os elementos da diagonal principal sendo constituídos, respectivamente, pela soma dos coeficientes de amortecimento ou das rigidezes existentes antes e depois das massas que ocupam aquela mesma posição na matriz $[m]$; para os elementos fora da diagonal principal (posição genérica c_{ij} ou k_{ij}), colocar o coeficiente de amortecimento ou a rigidez que conecta as massas m_i e m_j , porém com o sinal negativo.

2.3 – Método do Sistema Equivalente

De um modo geral, um sistema com um GDL pode ser representado conforme as Fig's 2.5 (a), pra translação, e 2.5 (b), para rotação, onde a origem O denota a posição de equilíbrio estático, sendo os seus modelos matemáticos dados pelas EDOL's de 2ª ordem:

$$m_{eq} \ddot{x} + c_{eq} \dot{x} + k_{eq} x = F_{eq}(t) \quad (2.10)$$

$$J_{eq} \ddot{\theta} + c_{t eq} \dot{\theta} + k_{t eq} \theta = M_{eq}(t) \quad (2.11)$$

onde m_{eq} , c_{eq} , k_{eq} e J_{eq} , c_{teq} , k_{teq} serão obtidos pelos procedimentos já estudados anteriormente. A determinação de $F_{eq}(t)$ e $M_{eq}(t)$ deverá ser feita de acordo com os princípios da mecânica. Portanto, através deste método, podemos economizar o trabalho de dedução da EDOL do sistema, bastando encontrar os parâmetros do mesmo (inércia equivalente, coeficiente de amortecimento equivalente e rigidez equivalente).

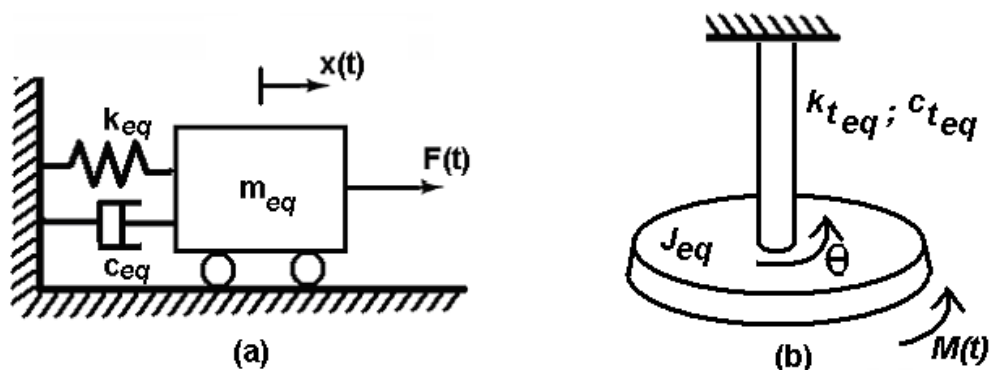


Figura 2.5 – Sistemas equivalentes com um GDL.

2.4 – Método de Energia

Baseia-se na aplicação do Princípio da Conservação da Energia. Em consequência, **aplica-se somente a sistemas conservativos**, ou seja, aqueles em que não há acréscimo e nem perda de energia por atrito, logo admitimos que a energia permaneça constante:

$$T + U = \text{constante} \quad (2.12)$$

em que T representa a energia cinética e U a energia potencial. Então, pode-se escrever que:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.13)$$

Portanto, basta apenas determinar as expressões de energia cinética e potencial do sistema e aplicar a Eq. (2.13) para se obter a EDOL do sistema.

2.5 – Exercícios de Aplicação

Exemplo 2.1 – Desenvolver, através do método de Newton, o modelo matemático para o sistema simplificado da suspensão independente de um carro, onde é considerado apenas o movimento de uma das rodas do veículo, conforme ilustra a Fig. 2.6. A rigidez do pneu é modelada pela mola k_1 . As massas do pneu, da roda e do eixo dianteiro, bem como das demais peças não suspensas distribuídas a essa roda, são modeladas pela massa m_1 . O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2 . Já a massa suspensa distribuída para $\frac{1}{4}$ de suspensão é modelada pela massa m_2 .

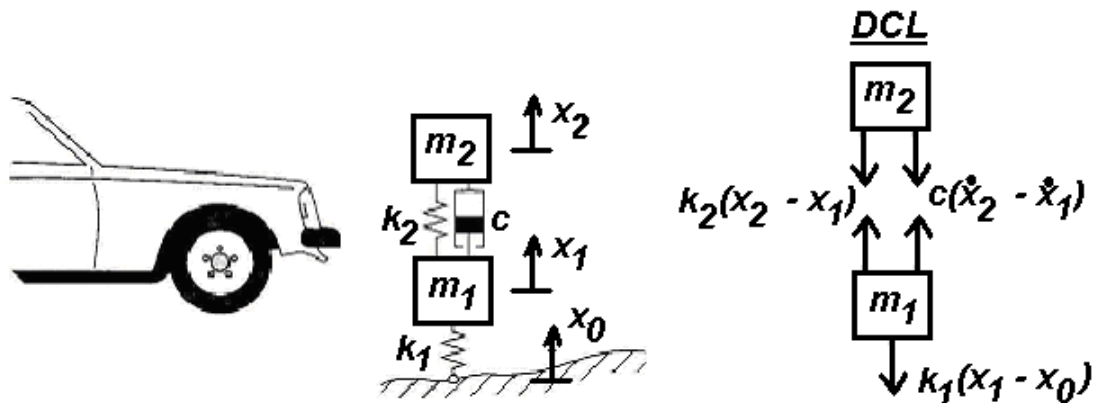


Figura 2.6 – Suspensão veicular simplificada e DCL correspondente.

O diagrama de corpo livre do sistema mostrado na Fig. 2.6 foi elaborado a partir da seguinte consideração, sem perda de generalidade: $x_2 > x_1 > x_0$.

Aplicando a 2ª Lei de Newton a cada corpo rígido, tem-se:

$$-k_1(x_1 - x_0) + k_2(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1$$

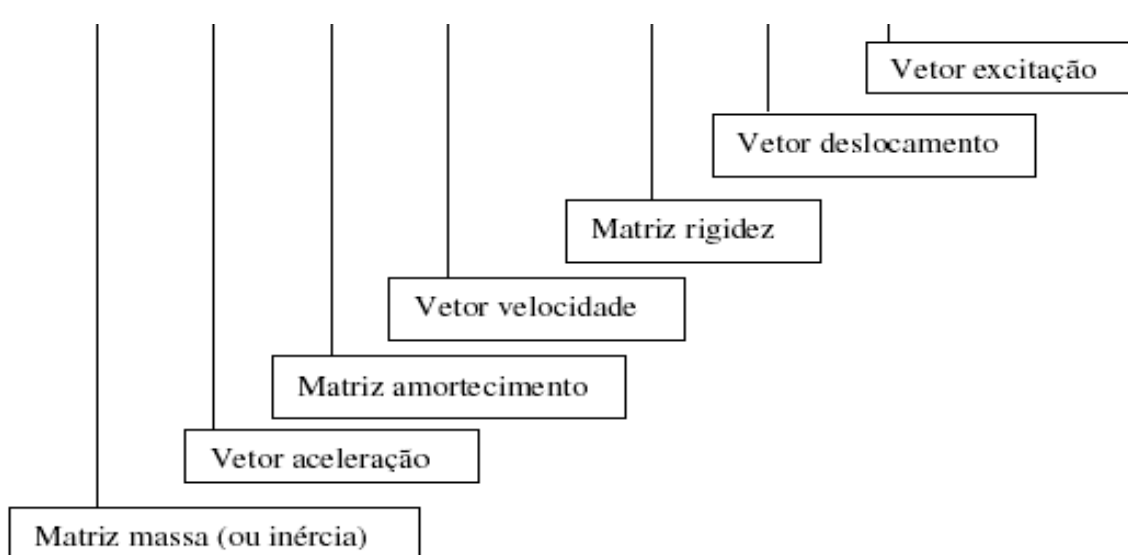
$$-k_2(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2$$

Ordenando as EDOL's, obtemos o seguinte modelo matemático do sistema com dois graus de liberdade:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 - c \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = k_1 x_0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c \dot{x}_1 + c \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

o qual pode ser colocado na forma matricial, permitindo a identificação dos vetores e matrizes:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 x_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$


Exemplo 2.2 – Determinar, pelo método do sistema equivalente, o modelo matemático para o sistema da Fig. 2.7, usando como coordenada generalizada o deslocamento do centro do disco, $x(t)$. Desprezar a massa da polia. Dado: momento de inércia do disco = $\frac{1}{2}mr^2$.

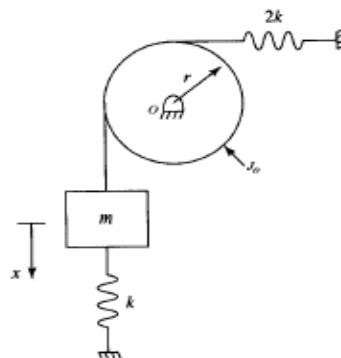


Figura 2.7 – Sistema constituído de disco, polia, mola e amortecedor.

Determinação de m_{eq} :

$$T_{eq} = T_{sistema}$$

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2$$

$$m_{eq} = m + \frac{1}{2} m \Rightarrow m_{eq} = \frac{3}{2} m$$

Determinação de k_{eq} :

$$U_{eq} = U_{sistema}$$

$$\frac{1}{2} k_{eq} x^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} (2k) x^2$$

$$k_{eq} = 3k$$

Determinação de c_{eq} :

$$c_{eq} = 0$$

Determinação de F_{eq} :

$$F_{eq} = 0$$

Substituindo na Eq. (2.10), fornece o modelo matemático do sistema, expresso pela seguinte EDOL:

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 3kx = 0$$

Exemplo 1.3 – Deduzir o modelo matemático para o instrumento da Fig. 2.8, usando o método de energia.

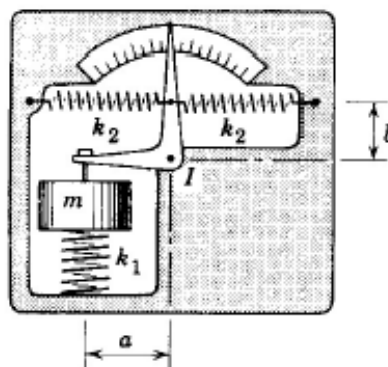


Figura 2.8 – Instrumento de medição de vibração.

Determinamos as energias cinética e potencial elástica do sistema, conforme as seguintes expressões:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (a \dot{\theta})^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (a \theta)^2 + 2 \frac{1}{2} k_2 (b \theta)^2$$

Então, usamos as Eq.'s (2.12) e (2.13) para escrever:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k_1 (a \theta)^2 + 2 \frac{1}{2} k_2 (b \theta)^2 \right] = 0$$

$$m a^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + k_1 a^2 \theta \dot{\theta} + 2 k_2 b^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\left(m a^2 \ddot{\theta} + k_1 a^2 \theta + 2 k_2 b^2 \theta \right) \dot{\theta} = 0$$

$$m a^2 \ddot{\theta} + \left(k_1 a^2 + 2 k_2 b^2 \right) \theta = 0$$

CAPÍTULO III – TEORIA DOS SISTEMAS COM 1 GDL

3.1 – Introdução

O estudo de sistemas vibratórios deve começar por sistemas simples que apresentem características básicas capazes de permitir a análise de uma série de fenômenos presentes em sistemas mais complexos. Sistemas de **um grau de liberdade** são sistemas ideais, capazes de representar uma reduzida parte dos sistemas reais presentes no mundo físico, assim mesmo com grande simplificação. Por outro lado, entretanto, estes mesmos sistemas apresentam características que fundamentam o entendimento da maioria dos aspectos básicos que estão presentes em sistemas mais complicados. Problemas como ressonância, transmissibilidade, balanceamento e isolamento podem ser devidamente equacionados em sistemas de um grau de liberdade com posterior extensão dos conceitos para problemas de ordem maior. Por outro lado estimativas de comportamento podem ser estabelecidas com relativa facilidade e simplicidade matemática quando se cria um modelo simples para um sistema complexo. Razões como estas justificam a introdução do estudo de sistemas de um grau de liberdade em cursos de vibrações em engenharia.

3.2 - Vibrações Livres Não Amortecidas

A **vibração livre**, como já foi conceituada no Capítulo 1, ocorre quando o movimento resulta apenas de condições iniciais, não havendo nenhuma causa externa atuando durante o mesmo. A Fig. 3.1 (a) mostra um modelo simples de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento, o conhecido sistema massa-mola.

A partir da elaboração do DCL da massa m_{eq} mostrado na Fig. 3.1 (b), pode-se aplicar a Segunda Lei de Newton e obter a equação do movimento como:

$$m_{eq}\ddot{x} = -k_{eq}(x + \Delta_{est}) + m_{eq}g$$

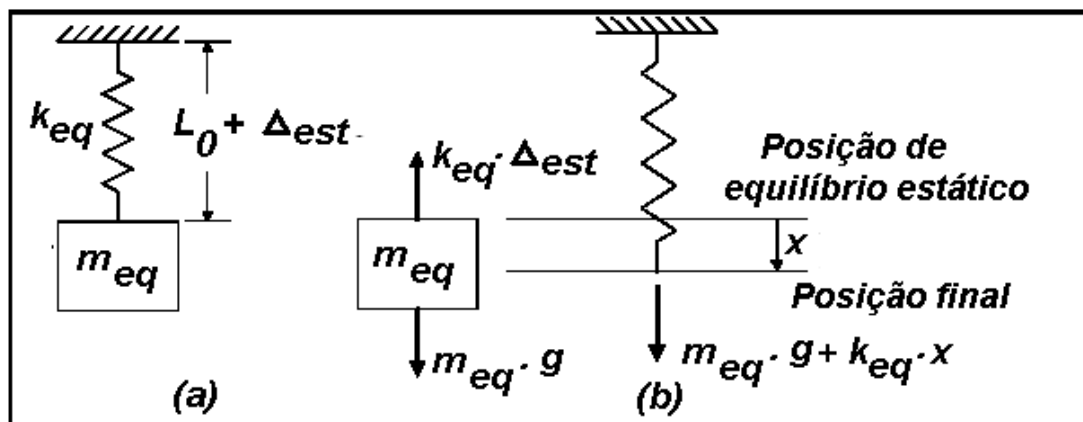


Figura 3.1 – Sistema massa-mola em posição vertical.

Por outro lado, pela condição de equilíbrio estático quando o movimento não existe, sabe-se que $m_{eq}g = k_{eq}\Delta_{est}$, podendo-se escrever a equação diferencial do movimento em sua forma conhecida, ou seja:

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{com} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{est}}} \quad (3.1)$$

A equação 3.1 é uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem (derivada de maior ordem), linear (todos os termos estão linearmente relacionados com x e suas derivadas), de coeficientes constantes (m_{eq} e k_{eq} não variam com o tempo) e homogênea (o termo independente é igual a 0). A solução desta equação é dada por:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \quad (3.2)$$

As constantes A_1 e A_2 dependem das condições iniciais do movimento, ou seja, dos valores do deslocamento e da velocidade da massa m_{eq} no instante de tempo em que se começa a quantificar o movimento ($t = 0$), em relação à posição de equilíbrio estático. Se os valores iniciais do deslocamento e da velocidade (que representam a energia total introduzida para gerar o movimento livre), são conhecidos e dados por x_0 e v_0 , respectivamente, tem-se:

$$x(t=0) = x_0 = A_1$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = w_n A_2$$

de forma que a Eq. (3.2) torna-se:

$$x(t) = x_0 \cos(w_n t) + \frac{v_0}{w_n} \text{sen}(w_n t) \quad (3.3)$$

O movimento representado em (3.3) é um movimento harmônico de frequência igual a w_n . Esta é a frequência com que o sistema oscila quando está livre sem amortecimento. Por este motivo é chamada de *frequência natural* de oscilação. Esta frequência natural terá muita importância quando se estudar a vibração forçada sendo ela uma das características mais importantes de um sistema do ponto de vista dinâmico.

Tratando-se de uma oscilação harmônica, é importante representar a expressão (3.3) em uma forma mais simples, contendo um seno ou cosseno apenas. Com o auxílio de relações trigonométricas (3.3) pode ser escrita como:

(a) **Forma Senoidal** - $x(t) = X \text{sen}(w_n t + \varphi)$ (3.4)

em que $X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w_n}\right)^2}$ e $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{x_0 w_n}{v_0}\right)$

(a) **Forma Cossenoidal** - $x(t) = X \cos(w_n t - \varphi)$ (3.5)

em que $X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w_n}\right)^2}$ e $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{v_0}{x_0 w_n}\right)$

A Fig. 3.2 ilustra as duas formas de onda para os mesmos dados. Notemos que a diferença reside no ângulo de fase φ , sendo a amplitude X e a frequência w_n as mesmas para as duas formas de onda descritas pelas Eq.'s (3.4) e (3.5).

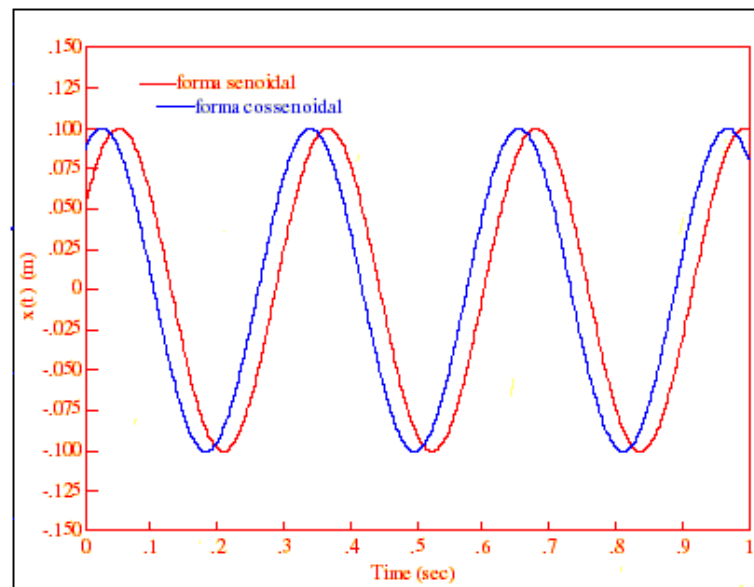


Figura 3.2 – Formas senoidal e cossenoidal da Eq. (3.3).

Para o caso em que o sistema de um GDL seja melhor representado por um modelo físico, que expresse a vibração como sendo um movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo, a coordenada generalizada usada para descrever o movimento é um ângulo de rotação $\theta(t)$. Assim, o movimento é provocado por um deslocamento angular inicial e/ou uma velocidade angular inicial, sendo o momento restaurador fornecido pela energia potencial elástica armazenada em uma mola de torção. Este modelo físico está mostrado na Fig. 3.3.

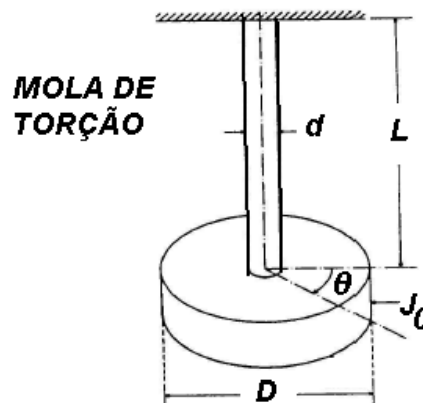


Figura 3.3 – Sistema torsional de um GDL.

A rigidez da mola torcional é dada por: $k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{L}$ sendo $I_0 = \frac{\pi l^4}{32}$.

Aplicando a 2ª Lei de Newton, a partir da elaboração de um DCL, fica fácil obter o modelo matemático como:

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + w_n^2 \theta = 0 \quad \text{com} \quad w_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (3.6)$$

Podemos perceber que o modelo matemático para o sistema rotacional, estabelecido pela Eq. (3.6), é idêntico àquele para o sistema translacional, o qual ficou estabelecido pela Eq. (3.1). Portanto, matematicamente, constituem a mesma EDOL. Logo, podemos aproveitar todos os desenvolvimentos já feitos para o sistema translacional e adaptá-los para o sistema rotacional, usando a equivalência apresentada na tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Equivalência entre os sistemas translacional e rotacional.

SISTEMA TRANSLACIONAL	SISTEMA ROTACIONAL
Massa m_{eq}	Momento de inércia de massa J_0
Rigidez k_{eq}	Rigidez k_t
Deslocamento $x(t)$	Deslocamento $\theta(t)$
Velocidade $\dot{x}(t)$	Velocidade $\dot{\theta}(t)$
Aceleração $\ddot{x}(t)$	Aceleração $\ddot{\theta}(t)$

$$\theta(t=0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(w_n t) + \frac{\dot{\theta}_0}{w_n} \sin(w_n t) \quad \text{com} \quad w_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (3.7)$$

(a) Forma Senoidal - $\theta(t) = \Theta \sin(w_n t + \varphi)$ (3.8)

em que $\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{w_n}\right)^2}$ e $\varphi = \arctg\left(\frac{\theta_0 w_n}{\dot{\theta}_0}\right)$

(a) **Forma Cossenoidal** - $\theta(t) = \Theta \cos(\omega_n t - \varphi)$ (3.5)

em que $\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}\right)^2}$ e $\varphi = \arctg\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0 \omega_n}\right)$

3.3 – Método de Rayleigh para a determinação de Freqüências Naturais

Uma informação importante para a análise dinâmica de um sistema é a sua freqüência natural e ao longo deste texto foram mostradas duas formas possíveis de se obter esta informação para um sistema de um GDL, ou seja, o uso do método do sistema equivalente e o da Segunda Lei de Newton, aplicando-se a ambos a definição de freqüência natural.

Um outro modo alternativo de determinar a freqüência natural é a partir do **Método de Rayleigh**, o qual apresenta a vantagem de dispensar a dedução do modelo matemático. O método baseia-se no Princípio da Conservação da Energia, válido para todos os instantes de tempo:

$$T + U = \text{constante} \quad (3.6)$$

Tendo em vista que a Eq. (3.6) é válida para todos os instantes, podemos, por conveniência, reescrevê-la para as situações seguintes:

1. instante em que a massa passa pela posição de equilíbrio estático, ou seja, $x = 0$:

$$T_{\max} + 0 = \text{constante}$$

2. instante em que a massa passa por uma posição extrema, ou seja, $x = x_{\max}$:

$$0 + U_{\max} = \text{constante}$$

Comparando essas duas últimas equações, podemos concluir que:

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (3.7)$$

A Eq. (3.7) constitui o Método de Rayleigh, o qual permite obter diretamente a frequência natural do sistema, conforme veremos, posteriormente, através de exemplo. O método de Rayleigh é especialmente útil nos casos em que a dedução do modelo matemático é complicada.

3.4 – Vibração Livre Amortecida (Amortecimento Viscoso)

O amortecimento representa a capacidade do sistema em dissipar energia. Como modelo mais simples de amortecimento se apresenta o **amortecimento viscoso**, assim chamado por representar a força dissipativa proporcionada por um fluido viscoso. Esta força tem como característica principal ser proporcional à velocidade relativa entre as superfícies em movimento quando existe um fluido separando-as. Esta proporcionalidade garante que a equação diferencial do movimento seja uma EDOL.

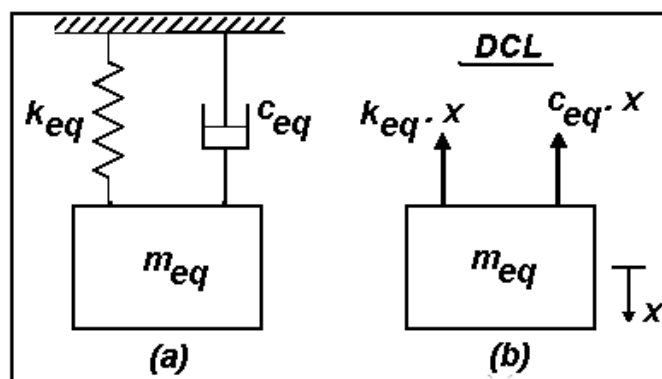


Figura 3.4 – Sistema amortecido de 1 GDL (amortecimento viscoso).

A Fig. 3.4 (a) mostra o esquema de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento. Se a força de amortecimento for de natureza viscosa, o diagrama de corpo livre da Fig. 3.4 (b), ao se aplicar a 2ª Lei de Newton, permite que se escreva a equação:

$$m_{eq}\ddot{x} = -c_{eq}\dot{x} - k_{eq}x \quad \text{ou} \quad m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = 0 \quad (3.8)$$

Uma possível solução para a Eq. (3.8) é da forma $x(t) = Ce^{st}$, a qual introduzida na equação resulta:

$$(m_{eq}s^2 + c_{eq}s + k_{eq})Ce^{st} = 0$$

que tem solução não trivial quando a equação característica $m_{eq}s^2 + c_{eq}s + k_{eq} = 0$ for satisfeita, o que somente é possível se:

$$s_{1,2} = \frac{-c_{eq} \pm \sqrt{c_{eq}^2 - 4m_{eq}k_{eq}}}{2m_{eq}} = -\frac{c_{eq}}{2m_{eq}} \pm \sqrt{\Delta} \quad \text{com} \quad \Delta = \left(\frac{c_{eq}}{2m_{eq}}\right)^2 - \left(\frac{k_{eq}}{m_{eq}}\right) \quad (3.9)$$

Como as duas raízes satisfazem a Eq. (3.8), a solução resultante será uma combinação linear das mesmas na forma:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (3.10)$$

3.4.1 – Sistemas sub-amortecido, criticamente amortecido e super-amortecido

A forma funcional da Eq. (3.10) depende fundamentalmente da natureza das raízes expressas na Eq. (3.9): complexas ou reais. Para facilitar a notação, antes de estudar a influência da natureza das raízes na forma funcional, vamos definir alguns parâmetros auxiliares:

Constante de Amortecimento Crítico: a constante de amortecimento crítico c_c é definida como o valor de c_{eq} que faz com que o discriminante Δ da Eq. (3.9) se anule. Isto porque, é do sinal deste discriminante que depende a natureza das raízes: $\Delta > 0$ implica em raízes reais enquanto que para $\Delta < 0$ as raízes formarão um par complexo. $\Delta = 0$, se apresenta como o limite entre estas duas situações distintas. Tem-se então:

$$\left(\frac{c_c}{2m_{eq}}\right)^2 - \left(\frac{k_{eq}}{m_{eq}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_c = 2m_{eq}\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad \Rightarrow \quad c_c = 2m_{eq}w_n \quad (3.11)$$

Fator de Amortecimento: a constante de amortecimento c_{eq} dá uma indicação da relação entre a força de amortecimento e a velocidade relativa entre as partes em movimento. Ela, porém não proporciona uma visão da **quantidade de amortecimento** que atua sobre o sistema real, uma vez que uma força de amortecimento pode ser grande para um sistema e pequena para outro, dependendo, fundamentalmente das massas envolvidas e da rigidez. Define-se, então o **fator de amortecimento** que é uma quantidade adimensional e não depende da ordem de grandeza dos parâmetros do sistema, indicando expressamente o quanto o sistema está sendo amortecido. O **fator de amortecimento** é definido como a relação entre a constante de amortecimento do sistema e a constante de amortecimento crítica:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} \quad (3.12)$$

Com o valor de c_c dado na expressão (3.11) tem-se que:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}w_n} \quad (3.13)$$

Considerando que $w_n^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq}}$, com a Eq. (3.13), as raízes expressas na Eq.

(3.9) podem ser escritas na forma: $s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)w_n$, que sendo introduzidas na Eq.

(3.10), chega-se a:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n t} \quad (3.14)$$

A Eq. (3.14) pode ser considerada como a expressão geral para o movimento vibratório de um sistema de um grau de liberdade. Pode-se mostrar facilmente que, para $\zeta = 0$ esta equação se transforma na Eq. (3.2), que representa o movimento de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento. A forma do movimento representado pela Eq.

(3.14) depende expressamente dos expoentes presentes. A seguir serão apresentadas as possibilidades de movimento em função da natureza destes expoentes (reais, complexos ou nulos).

Caso 1: Sistema sub-amortecido - $\zeta < 1$

No primeiro caso analisado o sistema possui um fator de amortecimento menor que a unidade, o que significa que sua constante de amortecimento é menor que a constante de amortecimento crítico. Como consequência tem-se que:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}$$

que considerando a fórmula de Euler, $e^{\pm i\alpha} = \cos(\alpha) \pm i\sin(\alpha)$, pode ser modificada para:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [(C_1 + C_2)\cos(\omega_d t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega_d t)] \quad \text{com} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

e, através de relações trigonométricas, chega-se a:

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (3.15)$$

$$\text{com } X = \sqrt{(C_1 + C_2)^2 - (C_1 - C_2)^2} = 2\sqrt{C_1 C_2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{(C_1 + C_2)}{i(C_1 - C_2)}\right).$$

As constantes de integração X e φ são obtidas aplicando-se as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, diretamente na Eq. (3.15) resultando em:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta x_0 \omega_n}{\omega_d}\right)^2} \quad (3.16)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \zeta x_0 \omega_n}\right) \quad (3.17)$$

A forma do movimento representado pela Eq. (3.15) é mostrada na Fig. 3.5. Trata-se de um movimento harmônico com forma senoidal, e amplitude decrescente exponencialmente segundo a relação $Xe^{-\zeta\omega_n t}$. Observa-se que o efeito do amortecimento está presente na amplitude decrescente, representando a dissipação da energia vibratória. Para grandes valores de t o termo $Xe^{-\zeta\omega_n t} \rightarrow 0$.

A frequência de oscilação agora não é mais a frequência natural e sim a chamada **frequência da vibração livre amortecida, ou frequência natural amortecida**, dada por $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

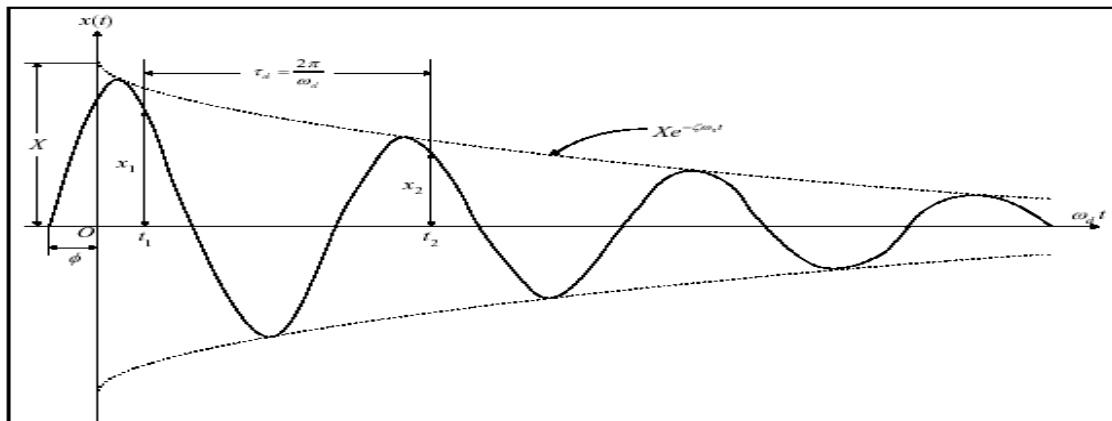


Figura 3.5 – Solução sub-amortecida ($\zeta < 1$).

Caso 2 - Sistema Criticamente Amortecido - $\zeta = 1$

Quando $\zeta = 1$, a constante de amortecimento c_{eq} é igual à constante de amortecimento crítico c_c , implicando que as raízes dadas em (2.32) são reais e iguais, a saber: $s_1 = s_2 = -\omega_n$. Neste caso, sendo as raízes repetidas, a solução da EDOL assume a forma:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{st} = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

aplicando-se as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, diretamente na equação acima, as constantes de integração são obtidas como $C_1 = x_0$ e $C_2 = v_0 + w_n x_0$, resultando, portanto, na seguinte expressão:

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \zeta x_0 w_n) t] e^{-w_n t} \quad (3.18)$$

A Fig. 3.6 mostra o movimento criticamente amortecido, juntamente com os outros tipos de movimentos amortecidos. Em função do termo exponencial negativo o movimento tende a zero com o crescimento do tempo. Como o movimento não é mais harmônico, neste tipo de sistema não ocorrem oscilações completas: a massa retorna rapidamente à sua posição de equilíbrio.

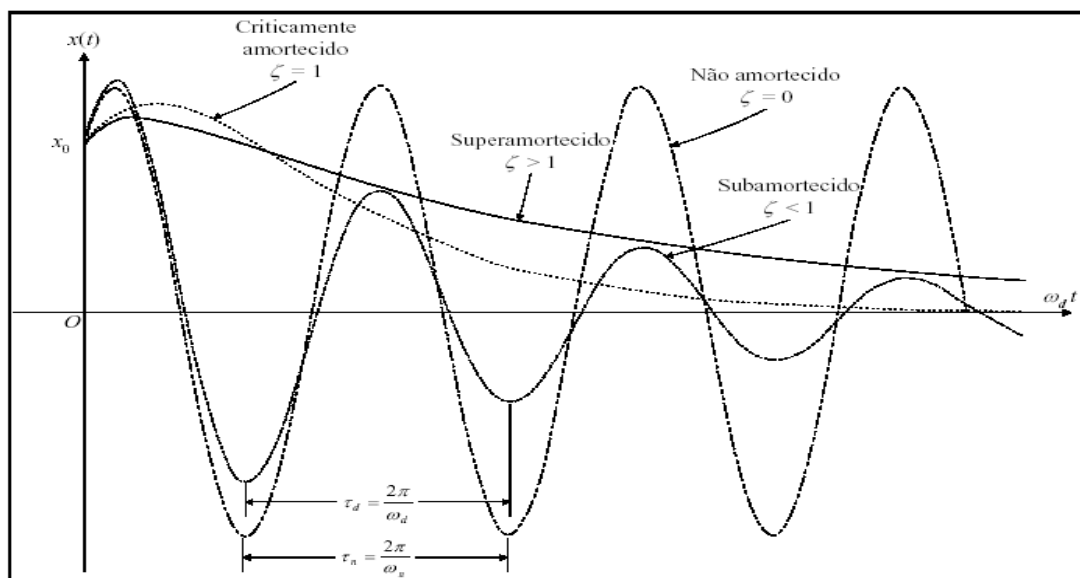


Figura 3.6 – Comparação entre movimentos com diferentes tipos de amortecimento.

Caso 3 - Sistema Super-Amortecido - $\zeta > 1$

Quando $\zeta > 1$ a constante de amortecimento c_{eq} é maior que a constante de amortecimento crítico c_c , implicando que as raízes são reais e dadas por:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) w_n$$

e a solução da equação diferencial retorna à forma dada em (3.14).

Aplicando-se as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, diretamente na Eq. (3.14), as constantes de integração são obtidas como:

$$C_1 = \frac{x_0 w_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + v_0}{2w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{x_0 w_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - v_0}{2w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.19)$$

O movimento super-amortecido também está mostrado na Fig. 3.6 e se pode ver que não é oscilatório. Se pode comparar os três casos descritos acima e concluir que movimento oscilatório só acontece em sistemas sub-amortecidos ($\zeta < 1$). Sistemas criticamente amortecidos e super-amortecidos apresentam como característica principal, o fato de que toda a energia vibratória inicial se dissipa antes que ocorra um ciclo vibratório. **Consequência: não há vibração.** Uma conclusão que se tira da observação da Fig. 3.6 é que o sistema retorna mais rapidamente à posição de equilíbrio quando está criticamente amortecido do que quando está super-amortecido. Portanto, quando se desejar fazer com que um sistema retorne rapidamente, sem vibrar, à sua posição inicial depois de deslocado dela, se deve escolher uma quantidade de amortecimento que torne o sistema criticamente amortecido. Na prática, como vai ser visto mais adiante, valores menores do que o amortecimento crítico ($\zeta = 0.7$) permitem o retorno à posição de equilíbrio mais rapidamente ainda, permitindo-se que ocorra apenas uma oscilação. Este valor é usado em amortecedores de veículos, pois os mesmos, quando submetidos às irregularidades de ruas e estradas, devem retornar o mais rapidamente à sua posição original.

3.4.2 – Decremento Logarítmico

Um problema que se apresenta normalmente para quem estuda sistemas vibratórios é estimar o fator de amortecimento ζ . Quando se possui um registro, resultado de uma medição, de um movimento vibratório, é possível observar a queda exponencial da amplitude de vibração com o tempo. O método do decremento logarítmico se fundamenta na

comparação entre duas amplitudes, consecutivas ou não, medidas de um movimento vibratório livre amortecido.

A Fig. 3.6 mostra o registro de um movimento vibratório livre, medido de um sistema de um grau de liberdade. Em se tratando de movimento oscilatório, então o sistema é sub-amortecido, e a expressão que descreve o movimento é a Eq. (3.15). Se x_1 é o deslocamento medido no tempo t_1 e x_2 é o deslocamento medido no tempo t_2 , a relação entre x_1 e x_2 é dada por:

$$\frac{x_1(t_1)}{x_2(t_2)} = \frac{Xe^{-\zeta\omega_n t_1} \text{sen}(\omega_d t_1 + \varphi)}{Xe^{-\zeta\omega_n t_2} \text{sen}(\omega_d t_2 + \varphi)}$$

Se os dois deslocamentos são medidos em tempos separados por um período inteiro, então $t_2 = t_1 + T_d$ com $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, de forma que $\text{sen}(\omega_d t_2 + \varphi) = \text{sen}(\omega_d t_1 + \varphi)$, o que faz com que a relação expressa anteriormente possa ser rescrita como:

$$\frac{x_1(t_1)}{x_2(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1 + T_d)}} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n T_d}} = e^{\zeta\omega_n T_d} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Por definição, o decremento logarítmico é expresso por:

$$\lambda = \ln\left(\frac{x_1(t_1)}{x_2(t_2)}\right) = \ln\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.20)$$

Para sistemas com amortecimento muito baixo ($\zeta \ll 1$), a Eq. (3.20) pode ser aproximada para:

$$\lambda = 2\pi\zeta \quad (3.21)$$

A Fig. 3.7 apresenta uma comparação entre as Eq.'s (3.20) e (3.21), onde se pode ver que existe uma boa estimativa do amortecimento quando $\zeta < 0,3$, usando a Eq. (3.21).

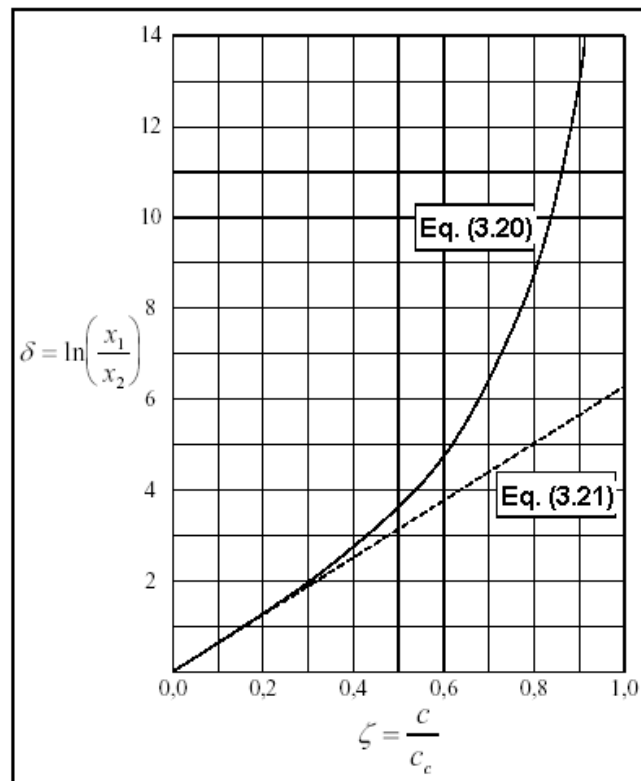


Figura 3.7 – Variação do decremento logarítmico com o amortecimento.

O método de estimativa do amortecimento através do decremento logarítmico funciona a partir da quantificação dos valores de X_1 e X_2 (amplitudes consecutivas), para o cálculo do decremento logarítmico λ , por (3.20), e a seguir, o fator de amortecimento ζ é calculado por:

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \lambda^2}} \quad (3.22)$$

Como, em uma grande quantidade de casos, é difícil distinguir entre dois deslocamentos separados por um único período, o decremento logarítmico, seguindo o mesmo raciocínio apresentado acima pode ser obtido a partir de duas medidas X_1 e X_{n+1} , tem-se:

$$\frac{X_1}{X_{n+1}} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \dots = \frac{X_{n-1}}{X_n} = e^{(\zeta \omega_n T_d)^n}$$

de onde se obtém o decremento logarítmico como:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{X_1}{X_{n+1}} \right) \quad (3.23)$$

3.5 – Vibrações Forçadas Amortecidas – Excitação Harmônica

Vibração forçada é aquela que ocorre quando o sistema sofre a ação de forças externas durante o movimento. As forças que atuam sobre o sistema podem ser **determinísticas** ou **aleatórias**, determinando uma característica do movimento vibratório. Assim, para as excitações mais comuns, temos as seguintes respostas correspondentes:

- $F(t)$ harmônica: $x(t)$ harmônica monofreqüência;
- $F(t)$ Periódica não harmônica: $x(t)$ harmônica multifreqüência;
- $F(t)$ aperiódica de curta duração: $x(t)$ transiente;
- $F(t)$ aleatória (ou Randômica): $x(t)$ aleatória.

A excitação harmônica é freqüentemente encontrada em sistemas mecânicos, como, por exemplo, em máquinas rotativas desbalanceadas, automóveis deslocando-se sobre estrada de perfil senoidal, chaminés altas submetida a vórtices, etc.

Nesta apostila estudaremos a resposta forçada de um sistema mecânico quando submetido a uma força harmônica (ou torque harmônico) que atua diretamente sobre a massa translacional (ou rotacional). Todos os conceitos e formulações que serão desenvolvidos para sistemas translacionais podem ser entendidos para sistemas rotacionais, mediante as adaptações já mencionadas anteriormente.

3.5.1 – Excitação Harmônica

Em geral, são adotadas para a excitação harmônica as formas seguintes:

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \\ F(t) &= F_0 \sin(\omega t - \varphi) \\ F(t) &= F_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que F_0 é a amplitude da força (o valor da força quando a mesma é aplicada estaticamente), ω é a frequência com que a força é aplicada (igual a zero quando de aplicação estática) e φ é o ângulo de fase medido em relação ao referencial de tempo.

3.5.2 – Equação Diferencial do Movimento

A Fig. 3.8 mostra o modelo de um sistema de um grau de liberdade, amortecido, e seu respectivo diagrama de corpo livre. O diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 3.1 (b) ilustra as forças atuantes na massa m_{eq} . Aplicando a 2ª Lei de Newton, a EDOL é obtida como sendo:

$$m_{eq} \ddot{x} + c_{eq} \dot{x} + k_{eq} x = F(t) \quad (3.25)$$

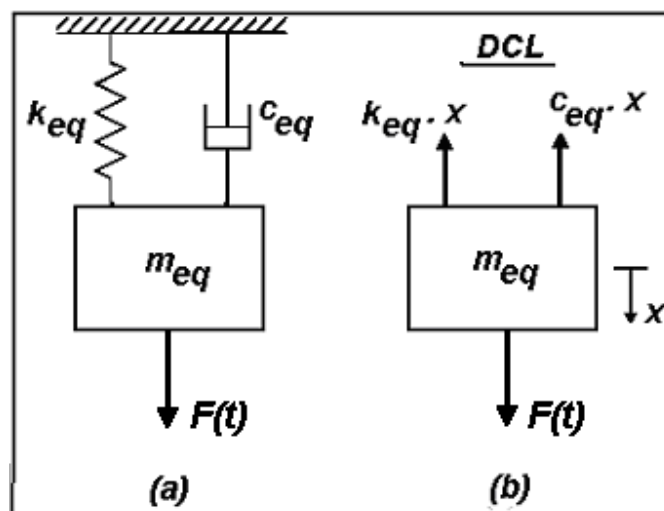


Figura 3.8 – Sistema de 1 GDL sob ação externa.

Esta equação diferencial possui uma ***solução geral*** constituída de uma ***solução homogênea*** associada a uma ***solução particular***

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.26)$$

A solução homogênea é obtida fazendo $F(t) = 0$ resultando na vibração livre (dependente das condições iniciais) que foi estudada anteriormente. A solução particular representa a **vibração de regime** do sistema, persistindo enquanto a força externa atuar. A Figura 3.9 ilustra a composição da solução da Eq. (3.25). A parcela do movimento que diminui com o tempo, devido ao amortecimento é chamada **transiente** e a rapidez com que ocorre esta diminuição depende dos parâmetros do sistema, m_{eq} , c_{eq} e k_{eq} .

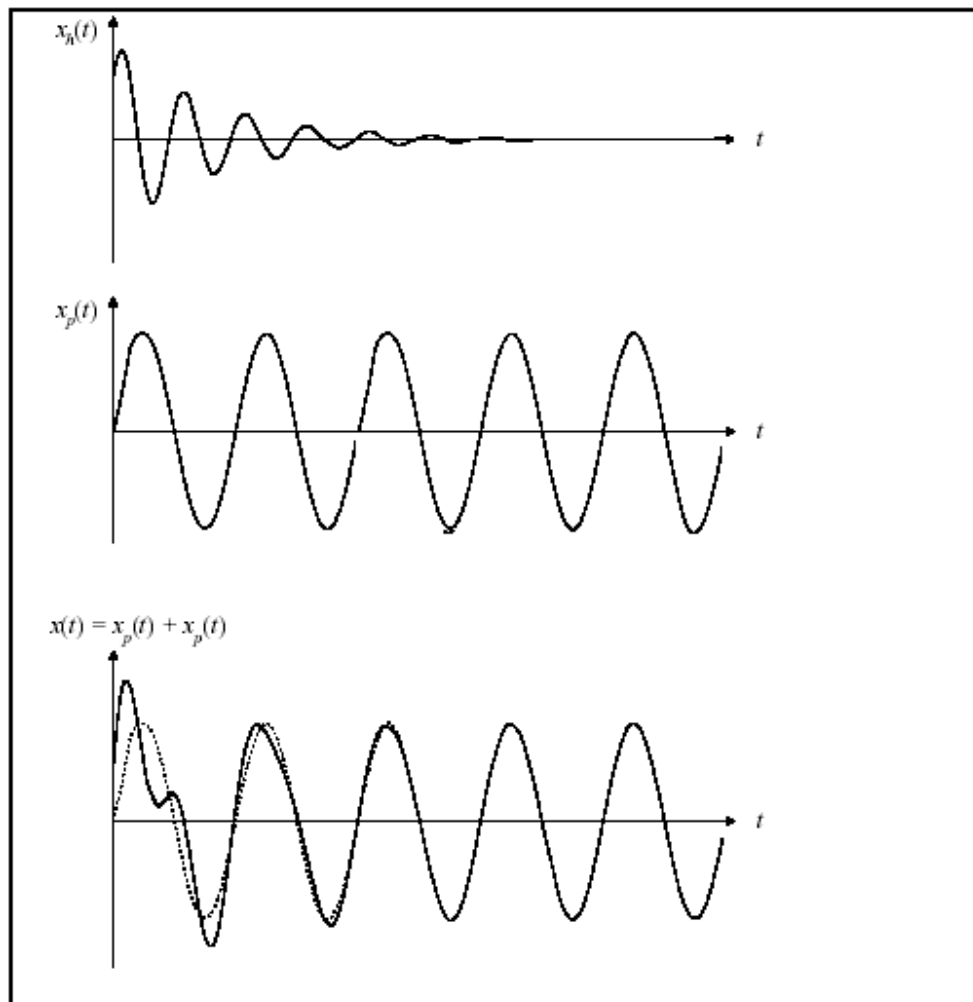


Figura 3.9 – Soluções homogênea, particular e geral.

3.5.3 - Sistema Não Amortecido Sob Força Harmônica

Por simplicidade, estudaremos inicialmente o sistema sem amortecimento ($c = 0$) e com $F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t)$. A Eq. (3.25) assume a forma:

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.27)$$

A solução homogênea desta equação, estudada anteriormente na seção 3.2, tem a forma:

$$x_h(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \text{sen}(\omega_n t) \quad (3.28)$$

A solução particular é da forma:

$$x_p(t) = X \text{sen}(\omega t) \quad (3.29)$$

Se (3.29) é solução da Eq. (3.27), pode-se aplicar a derivada para a determinação da velocidade e aceleração e substituir seus valores na Eq.(3.27), objetivando determinar o valor de X, conforme segue:

$$\dot{x}_p(t) = \omega X \cos(\omega t) \quad (3.30)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 X \text{sen}(\omega t) \quad (3.31)$$

$$-m_{eq}\omega^2 X \text{sen}(\omega t) + k_{eq}X \text{sen}(\omega t) = F_0 \text{sen}(\omega t)$$

Dividindo a equação acima por $\text{sen}(\omega t)$ e rearranjando os seus termos temos:

$$X = \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) em (3.29), a solução particular se torna:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \text{sen}(\omega.t) \quad (3.33)$$

A solução geral é obtida como a soma das Eq's (3.28) e (3.33), sendo igual a:

$$x(t) = A_1 \cos(w_n t) + A_2 \text{sen}(w_n t) + \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \text{sen}(\omega.t) \quad (3.34)$$

Introduzindo as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, as constantes de integração são calculadas, resultando em:

$$A_1 = x_0 \quad e \quad A_2 = \frac{v_0}{w_n} - \frac{\omega}{w_n} \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \quad (3.35)$$

que introduzidas em (3.34) resultam na expressão

$$x(t) = x_0 \cos(w_n t) + \left(\frac{v_0}{w_n} - \frac{\omega}{w_n} \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \right) \text{sen}(w_n t) + \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \text{sen}(\omega.t) \quad (3.36)$$

Dividindo o numerador e o denominador da Eq (3.32) por k_{eq} , sendo a *deflexão estática* $X_0 = F_0/k_{eq}$, a deformação sofrida pelo sistema quando a força é aplicada

estaticamente, e considerando que a frequência natural do sistema é dada $w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$ esta expressão pode ser rescrita na forma:

$$R = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{w_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - r^2} \quad \text{com} \quad r = \frac{\omega}{w_n} \quad (3.37)$$

que é chamado de **fator de amplificação dinâmica**.

A Fig. 3.10 mostra a função expressa na Eq. (3.37), que apresenta três domínios distintos, caracterizando comportamentos diferentes.

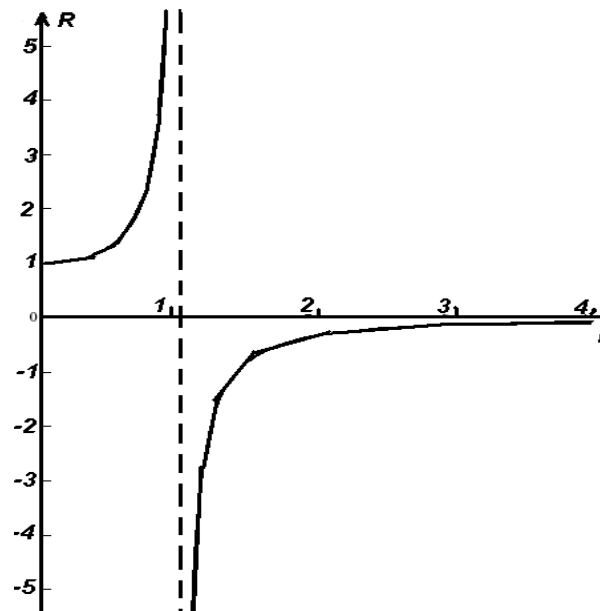


Figura 3. 10 – Fator de amplificação dinâmico.

Primeiro Domínio: Para $0 < r < 1$ o denominador da Eq. (3.37) é positivo e a resposta de regime permanente do sistema é dada pela Eq. (3.33). Diz-se que a resposta harmônica $x_p(t)$ está em *coincidência de fase* com a força externa, conforme mostra a Fig. 3.11.

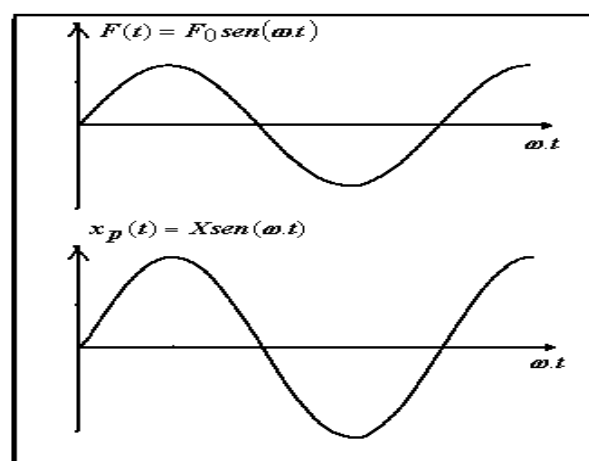


Figura 3.11 – resposta harmônica em fase com a força externa.

Segundo Domínio: Para $r > 1$ o denominador da Eq (3.37) é negativo e a resposta de regime permanente do sistema é

$$x_p(t) = -X \text{sen}(\omega t) \quad (3.38)$$

em que a amplitude do movimento é redefinida como uma quantidade positiva, ou

$$X = \frac{X_0}{r^2 - 1} \quad (3.39)$$

Neste domínio a resposta harmônica $x_p(t)$ está em *oposição de fase* com a força externa, conforme mostra a Fig. 3.12. Observa-se também, que para $r \rightarrow \infty$, a amplitude $X \rightarrow 0$, de forma que o deslocamento de um sistema sob excitação harmônica em frequências muito altas é muito pequeno.

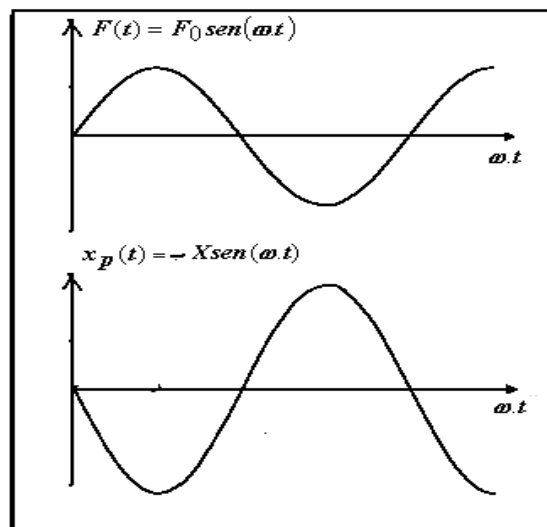


Figura 3.12 – Resposta harmônica em oposição de fase com a força externa.

Terceiro Domínio: Para $r = 1$ a amplitude dada por (3.37) ou (3.39) é infinita. Esta condição, em que a frequência com que a força é aplicada é igual à frequência natural do sistema, é chamada de **RESSONÂNCIA**. Para determinar a resposta nesta condição é necessário que a Eq. (3.36) seja escrita na forma:

$$x(t) = x_0 \cos(w_n t) + \frac{v_0}{w_n} \text{sen}(w_n t) + X_0 \left[\frac{\text{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{w_n} \text{sen}(w_n t)}{1 - \left(\frac{\omega}{w_n}\right)^2} \right] \quad (3.40)$$

O último termo desta equação vai a infinito quando $\omega = w_n$ ($r = 1$), e para avaliar a função no limite é necessário aplicar a Regra de L'Hospital, resultando

$$\lim_{\omega \rightarrow w_n} \left[\frac{\text{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{w_n} \text{sen}(w_n t)}{1 - \left(\frac{\omega}{w_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \rightarrow w_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega} \left(\text{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{w_n} \text{sen}(w_n t) \right)}{\frac{d}{d\omega} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{w_n}\right)^2 \right\}} \right]$$

Por tanto,

$$\lim_{\omega \rightarrow w_n} \left[\frac{\text{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{w_n} \text{sen}(w_n t)}{1 - \left(\frac{\omega}{w_n}\right)^2} \right] = \frac{\text{sen}(w_n t)}{2} - \frac{w_n t \cos(w_n t)}{2}$$

De forma que a Eq. (3.40), que é a resposta do sistema se torna:

$$x(t) = x_0 \cos(w_n t) + \frac{v_0}{w_n} \text{sen}(w_n t) + \frac{X_0}{2} [\text{sen}(w_n t) - w_n t \cos(w_n t)] \quad (3.41)$$

representando um movimento cuja amplitude cresce indefinidamente com o tempo devido ao termo $\frac{X_0 w_n t}{2}$ ser sempre crescente, como ilustra a Fig. 3.13.

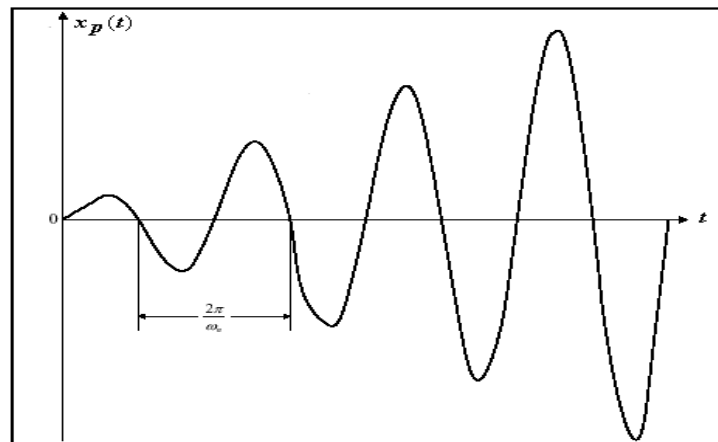


Figura 3.13 – Resposta harmônica na ressonância.

3.5.4 - Fenômeno do Batimento

Quando a frequência da força externa é muito próxima da frequência natural, ocorre uma composição de movimentos conhecida como **batimento**. Se, na Eq. (3.36) fizermos $x_0 = v_0 = 0$, e considerarmos que ω é aproximadamente igual a ω_n , a mesma se torna:

$$x(t) = \frac{F_0}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} [\text{sen}(\omega.t) - \text{sen}(\omega_n.t)] = \frac{F_0/m_{eq}}{\omega_n^2 - \omega^2} [\text{sen}(\omega.t) - \text{sen}(\omega_n.t)]$$

$$x(t) = \frac{F_0/m_{eq}}{\omega_n^2 - \omega^2} \left[2 \cos\left(\frac{\omega + \omega_n}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega - \omega_n}{2}t\right) \right] \quad (3.42)$$

Como a diferença entre as frequências é pequena, pode-se dizer que:

$$\omega - \omega_n = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \omega^2 - \omega_n^2 = 4\varepsilon\omega$$

$$\omega + \omega_n \cong 2\omega$$

e a Eq. (3.42) se torna:

$$x(t) = - \left[\frac{F_0/m_{eq}}{2\varepsilon\omega} \cos(\varepsilon)t \right] \cos(\omega)t. \quad (3.43)$$

cujo movimento está representado na Fig. 3.14.

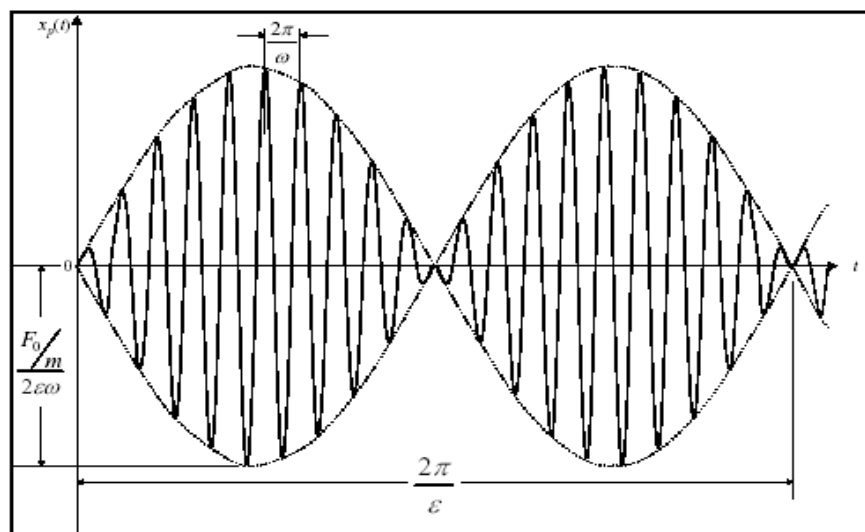


Figura 3.14 – Fenômeno de batimento.

3.5.5 – Sistema Amortecido sob Força Harmônica

Sob a atuação de uma força harmônica a equação do movimento amortecido é dada pela Eq. (3.25) aqui repetida por conveniência,:

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F(t)$$

A solução particular (resposta forçada), $x_p(t)$, que representa a resposta permanente no tempo, tomando $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, tem a forma:

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (3.44)$$

onde X é a amplitude da oscilação e Φ é o ângulo de fase que representa o atraso da resposta em relação à excitação.

Derivando 2 vezes a Eq. (3.44), substituindo x_p e suas derivadas na Eq. (3.25) e colocando todos os termos na forma de senos, obtemos:

$$m_{eq}X\omega^2 \sin(\omega.t - \phi + \pi) + c_{eq}X\omega \sin(\omega.t - \phi + \frac{\pi}{2}) + k_{eq}X \sin(\omega.t - \phi) = F_0 \sin(\omega.t)$$

onde cada um dos termos representa as forças atuantes: no membro esquerdo da equação temos, na ordem, a força de inércia, a força de amortecimento e a força restauradora (da mola); no lado direito, a força de excitação. A partir dessa última equação, podemos desenhar o diagrama vetorial da Fig. 3.15 da qual tiramos, aplicando o Teorema de Pitágoras:

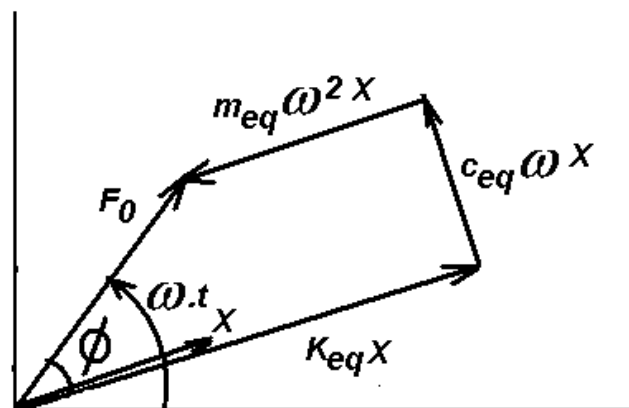


Figura 3.15 – Diagrama vetorial das forças.

$$F_0^2 = \left(k_{eq}X - m_{eq}\omega^2 X \right)^2 + (c\omega X)^2$$

donde chegamos à expressão para a amplitude da resposta permanente e do ângulo de fase:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k_{eq} - m_{eq}\omega^2 \right)^2 + (c_{eq}\omega)^2}} \quad (3.45)$$

$$\phi = \arctg \left(\frac{c_{eq}\omega}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} \right) \quad (3.46)$$

Portanto, a resposta permanente tem a mesma forma da excitação (função harmônica), a mesma frequência da excitação, ω , porém está atrasada em relação à excitação de um ângulo de fase Φ , conforme ilustra a Fig. 3.16:

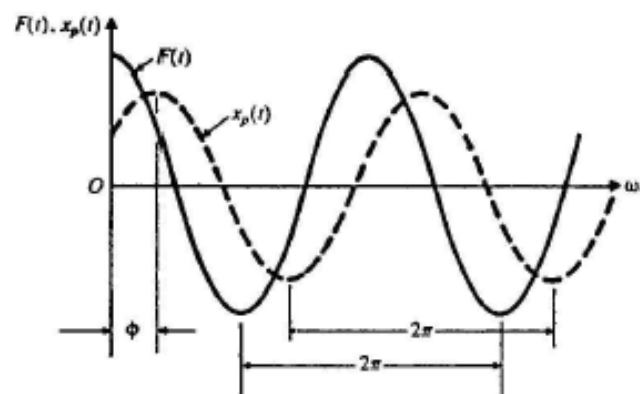


Figura 3.16 – Atraso da resposta em relação à excitação.

As Eq.'s (3.45) e (3.46) compõem a chamada **resposta em frequência**, pois a amplitude e o ângulo de fase aparecem como funções da frequência da excitação. É comum expressar essas duas equações em forma adimensional. Para isso, vamos dividir o numerador e o denominador das duas equações por k_{eq} :

$$X = \frac{\frac{F_0}{k_{eq}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m_{eq}\omega^2}{k_{eq}}\right)^2 + \left(\frac{c_{eq}\omega}{k_{eq}}\right)^2}} \quad \phi = \arctg \left(\frac{\frac{c_{eq}\omega}{k_{eq}}}{1 - \frac{m_{eq}\omega^2}{k_{eq}}} \right)$$

Recordando que:

- Relação de frequência $r = \frac{\omega}{w_n}$;
- Fator de amplificação $R = \frac{X}{X_0} = \frac{X}{F_0/k_{eq}}$;
- Frequência natural $w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow k_{eq} = m_{eq} \cdot w_n^2$;
- Fator de amortecimento $\zeta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}w_n} \Rightarrow c_{eq} = 2\zeta m_{eq}w_n$

e fazendo as devidas substituições nas equações anteriores, temos:

$$R = \frac{X}{F_0/k_{eq}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r)^2 + (2\zeta \cdot r)^2}} \quad (3.47)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\zeta \cdot r}{1-r^2}\right) \quad (3.48)$$

A Eq. (3.47) indica que o fator de amplificação é uma relação entre a amplitude da vibração no regime permanente, X , e o deslocamento devido à aplicação estática da amplitude dessa mesma força, F_0/k_{eq} . Em outras palavras, é a relação entre o **efeito dinâmico** da aplicação da força harmônica $F(t)$ e o **efeito estático** da aplicação da amplitude dessa mesma força. A Fig. 3.17 ilustra os gráficos das Eq.'s (3.47) e (3.48).

Tais curvas mostram que o fator de amortecimento tem uma grande influência na amplitude e no ângulo de fase, principalmente na zona de frequências próxima à ressonância ($r = 1$). Podemos obter uma melhor compreensão do comportamento do sistema analisando o

diagrama do fator de amplificação nas zonas onde r é, respectivamente, pequeno, igual a 1 e grande. Concluímos que na região da ressonância devemos usar grandes fatores de amortecimento para minimizar os efeitos da ressonância. Já para $r \geq 3$ o uso de amortecimento é praticamente desnecessário, pois todas as curvas tendem a coincidir nessa faixa de freqüências.

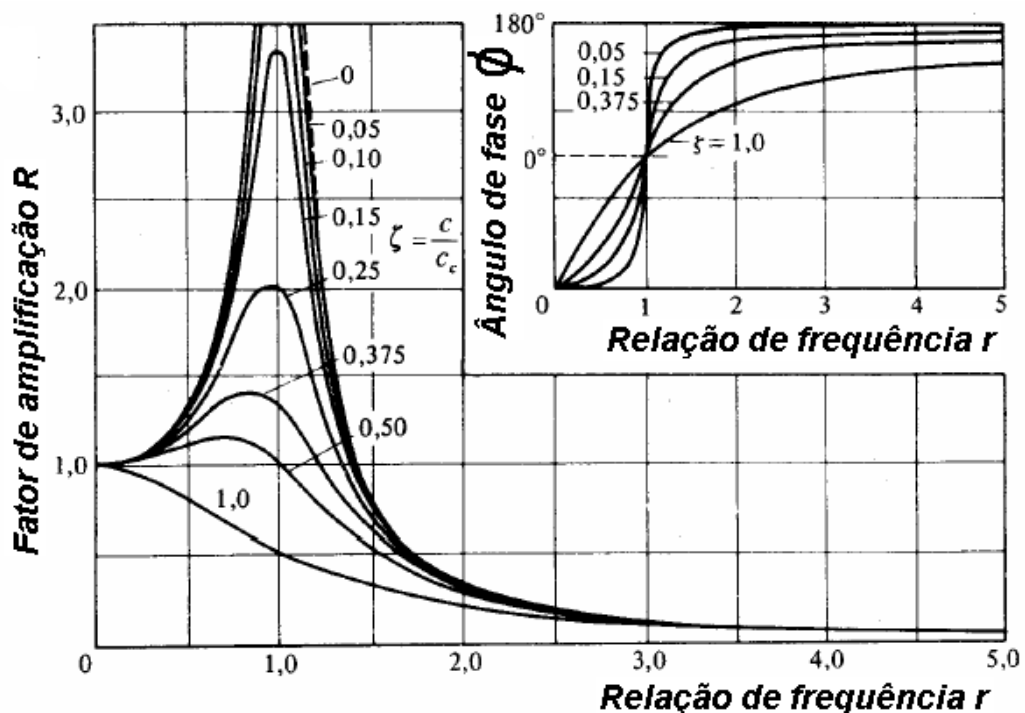


Figura 3.17 – Resposta em freqüência.

Na ressonância, ou seja, quando $r = 1$, a amplitude e o ângulo de fase:

$$X_{res} = \frac{F_0}{2\zeta k_{eq}} \quad \text{e} \quad \phi_{res} = 90^\circ$$

Examinando atentamente o gráfico da resposta em freqüência do fator de amplificação, verificamos que o máximo valor dele (e, em conseqüência, da amplitude da vibração), ocorre um pouco à esquerda da ressonância. Para determinar o valor da relação

de freqüências em que ocorre esse valor máximo, assim como seu valor, aplicamos a teoria de máximos e mínimos, ou seja, derivamos a Eq. (3.47) e a igualamos a zero obtendo, respectivamente:

$$r_{\max} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3.49)$$

$$R_{\max} = \frac{X_{\max}}{F_0 / k_{eq}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.50)$$

Vemos, na expressão de r_{\max} , que quanto maior o valor de ζ menor o valor de r_{\max} , ou seja, mais para a esquerda se localiza o valor máximo da resposta em freqüência, o que é confirmado pelo gráfico.

3.6 – Exercícios de Aplicação

Exemplo 3.1 – Um rotor de turbina de alta velocidade, mostrado na Fig. 3.18 possui massa de 60 kg e momento de inércia polar de 7 kg.m² e está conectado ao rotor do gerador, girando com uma velocidade angular constante, através de um eixo de duas seções com diâmetros 30 e 50 mm e comprimentos 500 e 400 mm respectivamente. O módulo de elasticidade torcional é $G = 1,1 \times 10^{11}$ N/m². Determinar a sua freqüência natural.

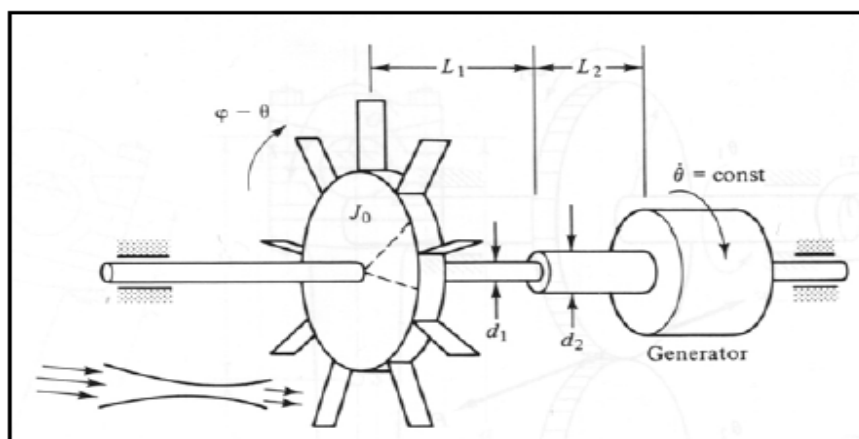


Figura 3.18 – Esquema de um hidrogenador.

Solução: As constantes de rigidez torcionais dos dois eixos são $k_T = I_p G/L$, onde o momento de inércia polar da seção é $I_p = \pi d^4/32$. Conseqüentemente, para as duas seções:

$$I_{p1} = \frac{\pi \times 0,03^4}{32} = 7,95 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{p2} = \frac{\pi \times 0,05^4}{32} = 6,14 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$k_{T1} = \frac{7,95 \times 10^{-8} \times 1,1 \times 10^{11}}{0,5} = 17500 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$k_{T2} = \frac{6,14 \times 10^{-7} \times 1,1 \times 10^{11}}{0,4} = 169000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

Os dois eixos comportam-se como duas molas torcionais combinadas em série, de forma que a rigidez resultante é:

$$k_{T12} = \frac{k_{T1} k_{T2}}{k_{T1} + k_{T2}} = \frac{17500 \times 169000}{17500 + 169000} = 15900 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

e a frequência natural torcional é:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{T12}}{J_O}} = \sqrt{\frac{15900}{7}} = 47,6 \text{ rad/s}$$

Exemplo 3.2 – Um rolo compactador de solo consiste de um cilindro de massa m e raio r , que está conectado a um trator por uma mola de constante k como mostra a Fig. 3.19. Encontrar a equação diferencial do movimento. Assumir que o rolo está livre para rolar sobre a superfície horizontal, sem deslizamento.

Solução: Aplicando a 2ª Lei de Newton ao movimento do cilindro, usando como coordenada o movimento do centro de massa do mesmo, $m\ddot{x} = \sum F$ ou $m\ddot{x} = -kx + F_f$, onde F_f é a força de atrito, ainda desconhecida.

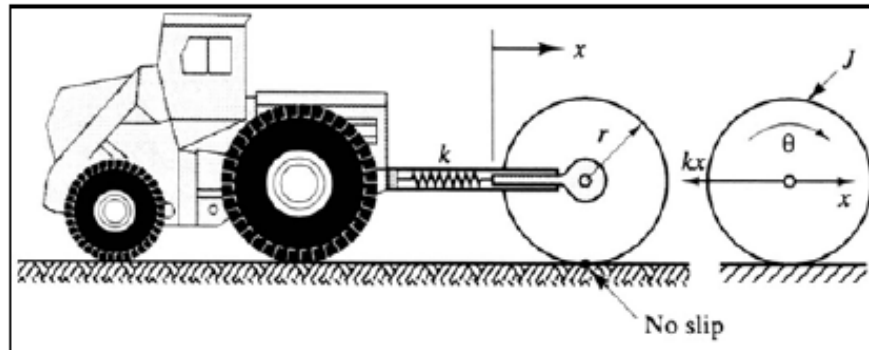


Figura 3.19 – Rolo compactador de solo.

Usando a equação $J_0 \ddot{\theta} = \sum M_0$, temos:

$$J_0 \ddot{\theta} = -F_f \cdot r \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\frac{\ddot{x}}{r} \right) = -F_f \cdot r \Rightarrow F_f = -\frac{1}{2} m \ddot{x}$$

que substituindo na EDOL acima fornece:

$$m \ddot{x} = -kx - \frac{1}{2} m \ddot{x} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} m + kx = 0$$

Exemplo 3.3 – Um absorvedor de choque é projetado para uma moto de massa igual a 200 kg (Fig. 3.20 (a)). Quando o absorvedor é submetido a uma velocidade inicial devido a uma irregularidade no caminho, a curva resultante *deslocamento x tempo* é como a mostrada na Fig. 3.20 (b). Determinar as constantes de rigidez e amortecimento necessários para o absorvedor se o período de vibração amortecida é 2 seg e a amplitude x_1 deve ser reduzida para $\frac{1}{4}$ em meio ciclo. Determinar também a velocidade inicial mínima que produz um deslocamento máximo de 250 mm.

Solução: Inicialmente deve ser determinado o fator de amortecimento ζ , que pode ser obtido a partir do decremento logarítmico λ . A constante de amortecimento pode então ser obtida. A rigidez é determinada através da frequência da vibração livre amortecida. A velocidade inicial é obtida a partir da determinação do tempo correspondente ao máximo deslocamento.

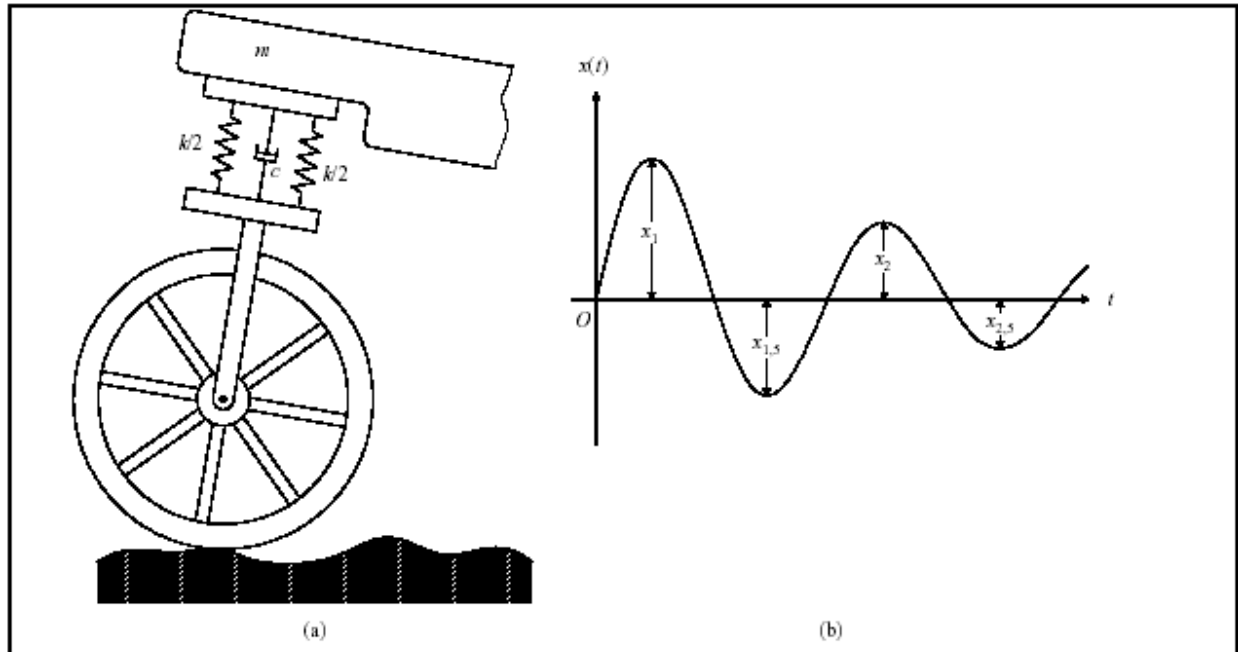


Figura 3. 20 – Absorvedor de choque de uma motocicleta.

Se $x_{1,5} = x_1/4$, então o deslocamento x_2 , correspondente a um período após x_1 será $x_2 = x_{1,5}/4 = x_1/16$. O decremento logarítmico é então:

$$\lambda = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(16) \Rightarrow \lambda = 2,773$$

Através da expressão (2.46) determina-se o fator de amortecimento por:

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \lambda^2}} = \frac{2,773}{\sqrt{(2\pi)^2 + (2,773)^2}} \Rightarrow \zeta = 0,404$$

A frequência natural é obtida a partir do período da oscilação amortecida $\tau_d = 2$ seg, através da seguinte expressão:

$$w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi/T_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi/2}{\sqrt{1-(0,404)^2}} \Rightarrow w_n = 3,434 \text{ rd/s}$$

Sendo $m_{eq} = 200 \text{ kg}$ a constante de amortecimento crítico é dada por:

$$c_c = 2m_{eq}w_n = 2 \times 200 \times 3,434 \Rightarrow c_c = 1,374 \times 10^3 \frac{N.s}{m}$$

A constante de rigidez é dada por:

$$k_{eq} = m_{eq} \cdot w_n^2 = 200 \times (3,434)^2 \Rightarrow k_{eq} = 2,358 \times 10^3 \frac{N}{m}$$

O tempo em que ocorre o máximo deslocamento é o mesmo tempo em que a velocidade se anula. A equação da velocidade é obtida diferenciando-se a Eq. (3.15) em relação ao tempo, resultando:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(X e^{-\zeta w_n t} \text{sen}(w_d t + \varphi) \right)$$

$$\dot{x}(t) = X e^{-\zeta \cdot w_n \cdot t} [-\zeta \cdot w_n \cdot \text{sen}(w_d t + \varphi) + w_d \cos(w_d t + \varphi)]$$

que será nula se o termo entre colchetes se anular. Então, temos que:

$$-\zeta \cdot w_n \cdot \text{sen}(w_d t + \varphi) + w_d \cos(w_d t + \varphi) = 0$$

$$\frac{\text{sen}(w_d t + \varphi)}{\cos(w_d t + \varphi)} = \frac{w_d}{\zeta \cdot w_n} \Rightarrow \text{tg}(w_d t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Considerando as Eq.'s (3.16) e (3.17), sendo o deslocamento inicial nulo, conseqüentemente, $\varphi = 0$, e $X = v_0/\omega_d$, logo:

$$t = \frac{1}{w_d} \arctg \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \frac{1}{\pi} \arctg \left(\frac{\sqrt{1-(0,404)^2}}{0,404} \right) \Rightarrow t = 0,37 \text{ s}$$

e, como a solução neste caso é dada por:

$$x(t) = X e^{-\zeta \cdot \omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

que atinge seu valor máximo quando $\sin \omega_d t = 1$, no tempo t_1 . Como este valor máximo é 0,25 m tem-se:

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta \cdot \omega_n t_1} \quad v_0 = \frac{x_{\max} \cdot \omega_d}{e^{-\zeta \cdot \omega_n t_1}} = \frac{0,25 \cdot \pi}{e^{-(0,404 \times 3,434 \times 0,37)}}$$

$$v_0 = 1,31 \quad \text{m/s}$$

Exemplo 3.4 – Um ciclista pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor cujos valores são, respectivamente, 81,55 kg, 50000 N/m e 1000 N.s/m, conforme ilustra a Fig. 3.21. O ciclista se encontra com uma velocidade $v = 18$ km/h quando encontra um desnível de 0,05 m entre os blocos de concreto. Determinar o deslocamento vertical do conjunto em função do tempo.

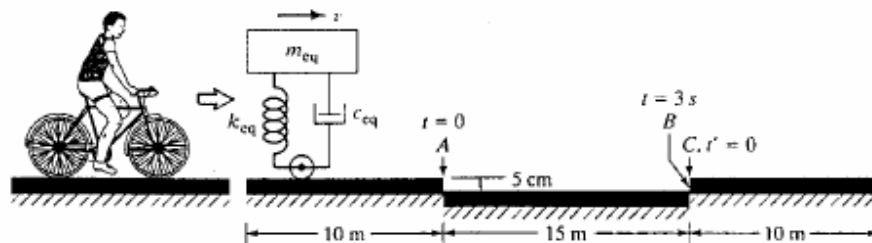


Figura 3.21 – Movimento vertical do ciclista.

Solução: Da Fig. 3.21 é possível discernir que o ciclista e a bicicleta caem 5 cm no ponto A, como um corpo rígido. Assim, a massa estará sujeita às condições iniciais $x_0 = 0,05 \text{ m}$ e $\dot{x}_0 = 0$.

A frequência natural do sistema é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{50000}{81,55}} \Rightarrow \omega_n = 24,76 \quad \text{rd/s}$$

O valor do fator de amortecimento pode ser encontrado como:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m_{eq} \cdot \omega_n} = \frac{1000}{2 \times 81,55 \times 24,76} \Rightarrow \zeta = 0,2476$$

Como $\zeta < 1$, o sistema é sub-amortecido. Logo, a equação do movimento é dada pela Eq. (3.15):

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

Portanto, devemos obter ainda ω_d , X e φ :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 24,76 \sqrt{1 - (0,2476)^2} \Rightarrow \omega_d = 23,99 \text{ rd/s}$$

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\zeta \cdot \omega_n \cdot x_0 + v_0}{\omega_d} \right)^2} = \sqrt{(0,05)^2 + \left(\frac{0,2476 \times 24,76 \times 0,05 + 0}{23,99} \right)^2}$$

$$X = 0,0516 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \zeta x_0 \omega_n} \right) = \arctg \left(\frac{x_0 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}}{0 + \zeta x_0 \omega_n} \right) = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - (0,2476)^2}}{0,2476} \right) \Rightarrow \varphi = 1,32 \text{ rd}$$

Finalmente, substituindo estes valores na equação do movimento escrita anteriormente, tem-se:

$$x(t) = 0,0516 e^{-6,13t} \sin(23,99t + 1,32)$$

Exemplo 3.5 – A Fig. 3.19 mostra uma válvula que controla a vazão de ar em uma tubulação. Como entrada, é usado ar sob pressão $p(t) = 10 \sin(8.t)$, em psi. O diafragma possui área 100 in^2 e a mola tem rigidez de 400 lbf/in . O peso da válvula e da haste é igual a 20 lbf . Considerando o peso da mola, que vale 15 lbf , achar a resposta no tempo da válvula.

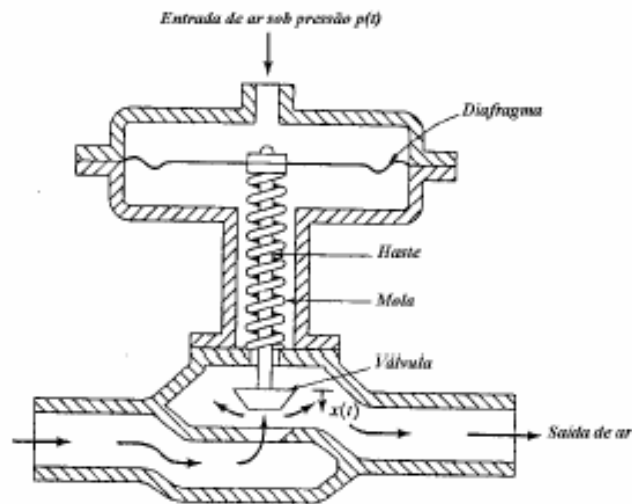


Figura 3.xx – Válvula de controle de fluxo.

Solução: Primeiramente determinaremos o valor máximo da excitação, a partir do valor da pressão e a massa equivalente do sistema como:

$$F_0 = p_0 A = (10)(100) = 1000 \text{ lbf}$$

$$m_{eq} = \frac{\text{Peso}_{\text{mola+haste}} + \frac{1}{3} \text{Peso}_{\text{mola}}}{g} = \frac{20 + \frac{1}{3}(15)}{386,4} = 0,0647 \text{ lbf.s}^2/\text{in}$$

De posse dos valores acima pode-se calcular o valor da amplitude do deslocamento como:

$$X = \frac{F_0}{k_{eq} m_{eq} \omega^2} = \frac{1000}{400 - (0,0647)(8)^2} = 2,5261 \text{ in}$$

Finalmente, a resposta do sistema pode ser então escrita como:

$$x(t) = X \sin(\omega.t) \Rightarrow x(t) = 2,5261 \cdot \sin(8.t)$$

CAPÍTULO IV – MEDIÇÃO DE VIBRAÇÕES

4.1 – Introdução

Em engenharia mecânica, uma das principais aplicações das vibrações está na manutenção de máquinas e equipamentos. A existência de vibrações em máquinas e equipamentos é, geralmente, uma indicação de mal funcionamento. A manutenção preditiva tem como um dos seus pilares a análise qualitativa e quantitativa das vibrações. Basicamente, o estudo das vibrações requer três passos básicos: a medição da vibração; a análise do sinal vibratório medido; e o controle da vibração.

A análise das vibrações exige que as mesmas sejam perfeitamente identificadas. Isto acontece por meio de um processo de medição. É extremamente importante a correta medição da vibração para que o processo de análise e a conseqüente correção não sejam comprometidos. A medição serve então para assegurar o bom funcionamento de uma máquina, confirmar suposições teóricas, auxiliar no projeto e operação de sistemas de isolamento ativos, identificação de sistemas através da medição de variáveis de entrada e saída, informação de vibrações originadas por terremotos, ação de turbulência fluida, ação de vento em estruturas, irregularidades de vias, e no acompanhamento do estado de máquinas no processo da manutenção preditiva.

O processo de medição, ilustrado na Fig. 4.1, parte da identificação de uma característica do fenômeno vibratório que possa ser medida, geralmente uma variável mecânica (deslocamento, velocidade, aceleração ou força). O elemento que entra em contato com a máquina para medir esta variável é o transdutor que cumpre a função de converter o sinal mecânico em um sinal elétrico (corrente elétrica) que é amplificado e convertido em um sinal digital ou mostrado em um display. O sinal digital pode ser armazenado em um computador. Ainda antes de sofrer a conversão para digital, o sinal pode ser gravado em um gravador especial. Após armazenados, os dados estão disponíveis para a análise.

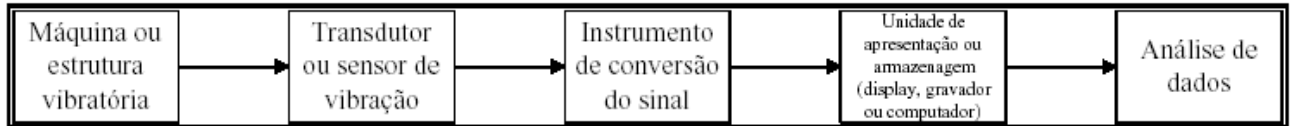


Figura 4.1 – Esquema básico de medição de vibrações.

Uma das aplicações mais freqüentes da medição de vibração se dá quando se pretende determinar as características de ressonância de um determinado sistema. A Fig. 4.2 apresenta um esquema em que se ilustra a utilização de instrumentos para determinação de características dinâmicas de uma máquina. Nela um gerador de função manda a informação para um *shaker* (vibrador eletrodinâmico ou eletrohidráulico), produzindo uma vibração com características previamente definidas. A vibração gerada é analisada através de metodologia adequada a fim de determinar as características desejadas do sistema.

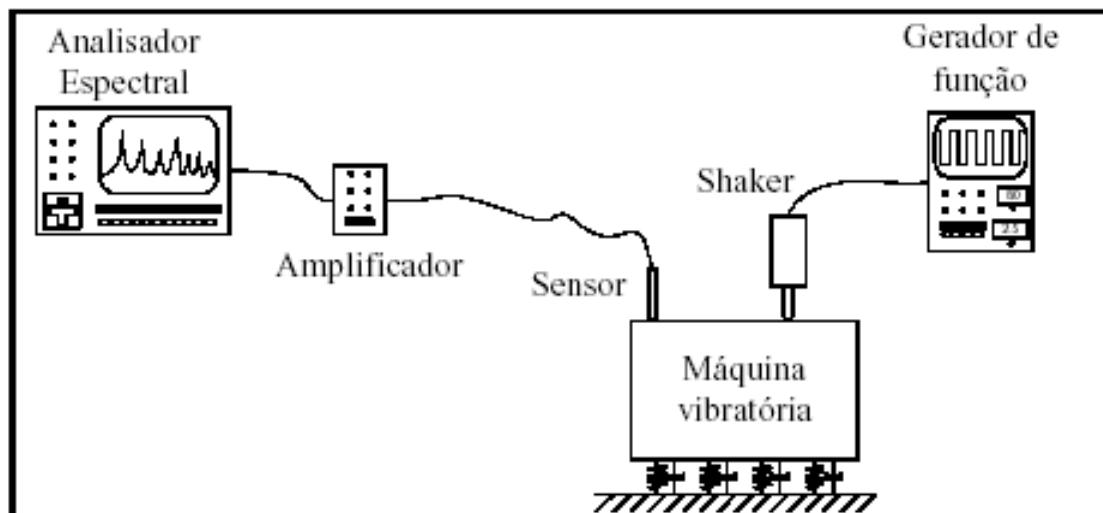


Figura 4.2 – Esquema de medição para identificação de ressonância.

4.2 – Escolha do Instrumento de Medição

Alguns aspectos devem ser considerados quando se escolhe o instrumento de medição. São eles:

1) **Faixa de frequências e amplitudes**: Um dos principais parâmetros determinantes da escolha do instrumento adequado é a faixa de frequências. Em baixas frequências a amplitude de deslocamento normalmente é alta o que faz com que os vibrômetros sejam adequados para medir as vibrações. Já em altas frequências as amplitudes de deslocamento são baixas e as amplitudes da aceleração são altas fazendo com que os acelerômetros apresentem maior sensibilidade. Os medidores de velocidade são de aplicação geral, pois apresentam desempenho razoável tanto em baixa como em alta frequência. Os medidores de velocidade são também, largamente utilizados por serem de fácil e barata construção. Cada instrumento pode ter suas características adequadas (projeto) para medir faixas específicas de amplitudes e frequências.

2) **Tamanho da máquina ou estrutura**: Os tamanhos de máquinas e estruturas são importantes, pois instrumentos que possuam grandes massas comparativamente às dos objetos de medição podem influir na medição das vibrações medidas distorcendo-as.

3) **Condição de operação da máquina**: Condições de funcionamento severas, experimentadas por máquinas que operam em ambientes corrosivos ou abrasivos, por exemplo, podem impedir que instrumentos sofisticados sejam utilizados. É importante que os instrumentos não sejam danificados no ato da medição, pois isto pode também distorcer os valores medidos.

4) **Tipo de análise dos dados**: A forma com que os dados gerados serão analisados é fundamental para a escolha do instrumento de medição. Vários detalhes no processo de medição estão condicionados pela análise que será realizada. Isto pode fazer com que determinado instrumento possa ser escolhido, preterindo-se outro mais sofisticado, por apresentar os dados de uma forma mais apropriada para a análise pretendida.

4.3 – Transdutores

Os transdutores, como foi dito acima, transformam variáveis físicas em sinais elétricos equivalentes. Os tipos de transdutores dependem, fundamentalmente, da variável

que os mesmos transformam. São apresentados nesta seção os principais tipos de transdutores e o seu princípio de funcionamento.

4.3.1 - Transdutores Piezelétricos

Transdutores piezelétricos são aqueles que utilizam materiais naturais ou artificiais, como quartzo, turmalina, sulfato de lítio e sal de Rochelle, que geram carga elétrica quando submetidos a uma deformação (esta é chamada de propriedade piezelétrica). A carga elétrica gerada no cristal devida a uma força F_x é dada por:

$$Q_x = K_p \cdot F_x = K_p \cdot A \cdot p_x \quad (4.1)$$

em que K_p é chamada de constante piezoelétrica ($2,25 \times 10^{-12}$ C/N para o quartzo, quando a maior face está ao longo do eixo x do cristal, Fig. 4.3), A é a área em que atua a força F_x , e p_x é a pressão devida à mesma força. A voltagem de saída do cristal é:

$$E = v \cdot t \cdot p_x \quad (4.2)$$

é a sensibilidade de voltagem (0,055 v-m/N para o quartzo, também quando a maior face está ao longo do eixo x do cristal, Fig. 4.3) e t a espessura do cristal.

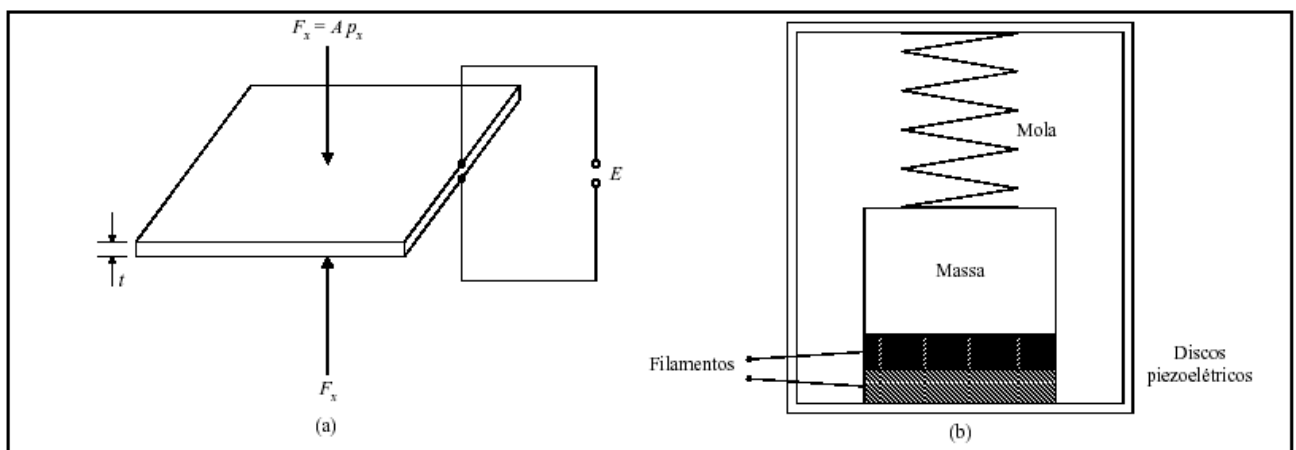


Figura 4.6 – Acelerômetro piezoelétrico.

A Fig. 4.3 (b) mostra o esquema de um acelerômetro piezelétrico. Uma pequena massa é pressionada contra um cristal piezelétrico por meio de uma mola. Quando a base vibra, a carga exercida pela massa sobre o cristal varia com a aceleração e, portanto, a voltagem de saída gerada pelo cristal será proporcional à aceleração. Os acelerômetros piezelétricos são compactos, resistentes, com alta sensibilidade e utilizáveis em altas faixas de frequência.

4.3.2 – Transdutores Eletrodinâmicos

Quando um condutor elétrico, na forma de um solenóide, se move em um campo magnético, produzido por um ímã permanente ou por um eletroímã, como mostra a Fig. 4.4, é gerada uma voltagem V neste mesmo condutor, dada por:

$$V = D l v \quad (4.3)$$

onde D é a densidade de fluxo magnético (em Teslas), l é o comprimento do condutor (em metros), e v é a velocidade do condutor em relação ao campo magnético (em m/s). Em virtude da proporcionalidade entre a velocidade relativa entre ímã e solenóide e a voltagem de saída, os transdutores eletromagnéticos são freqüentemente utilizados em sensores de velocidade. A Eq. (4.3) pode ser escrita na forma:

$$D l = \frac{V}{v} = \frac{F}{i} \quad (4.4)$$

em que F é a força que age sobre o solenóide quando pelo mesmo passa uma corrente i . Desta forma este tipo de transdutor pode também ser utilizado como um excitador de vibrações (a partir de uma corrente elétrica introduzida gera-se uma força mecânica).

4.3.3 – Transformador Diferencial Linear Variável (LVDT)

A Fig. 4.5 mostra um LVDT que é um transdutor que transforma deslocamento em voltagem elétrica. Consiste de um enrolamento primário no centro, dois enrolamentos

secundários nas extremidades, e um núcleo magnético que se move livremente dentro dos enrolamentos, na direção axial. Quando uma corrente alternada é aplicada no enrolamento primário, a voltagem de saída é igual à diferença entre as voltagens induzidas nos enrolamentos secundários. Esta voltagem depende do acoplamento magnético entre os enrolamentos e o núcleo, que, por sua vez, depende do deslocamento axial do núcleo. Os enrolamentos secundários estão conectados em oposição de fase de forma que, quando o núcleo magnético está exatamente na sua posição média, as voltagens nos dois enrolamentos serão iguais e em oposição de fase. Isto faz com que a voltagem de saída do LVDT seja zero. Quando o núcleo é movido para qualquer lado, o acoplamento magnético será aumentado em um enrolamento e diminuído no outro. A polaridade da saída depende, portanto, do sentido do movimento do núcleo magnético.

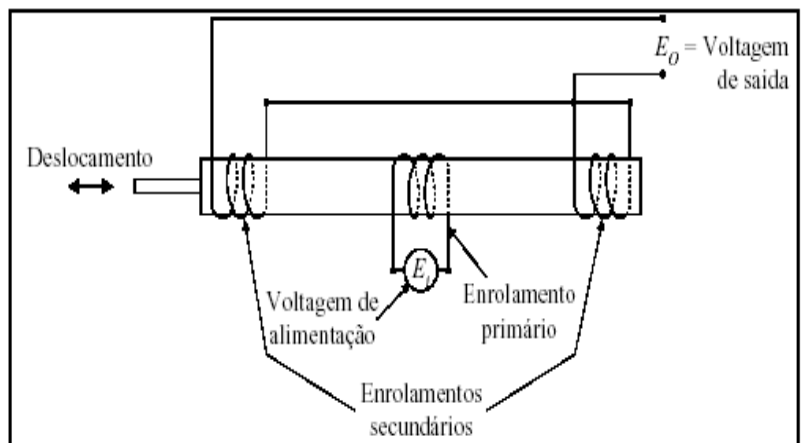
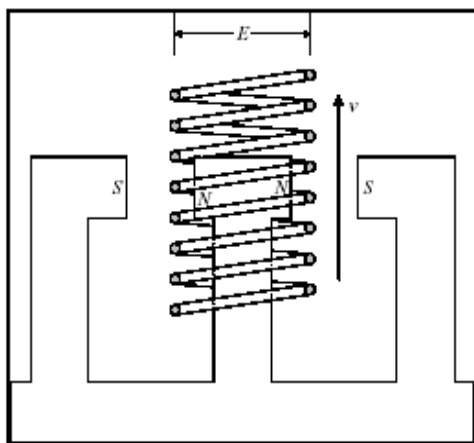


Figura 4.4 – Transdutor eletrodinâmico. Figura 4.5 – Transformador Diferencial Linear Variável (LVDT).

Os LVDTs disponíveis no mercado abrangem faixas de deslocamento entre 0,0002 cm a 40 cm, o que os torna de ampla aplicabilidade. Estes transdutores não sofrem influência de variações de temperatura, mas têm limitação em altas frequências por possuírem o núcleo magnético.

Desde que o núcleo não se mova demasiadamente do centro do enrolamento primário, a voltagem de saída varia linearmente com o deslocamento do núcleo, originando-se o nome de transformador diferencial variável linear.

4.4 – Sensores de Vibração (Pickups)

Um sensor de vibração é um instrumento constituído de um mecanismo medidor associado a um transdutor. A Fig. 6.9 apresenta um instrumento sísmico montado em um corpo vibratório. O movimento vibratório é medido achando-se o deslocamento da massa em relação à base na qual é montado.

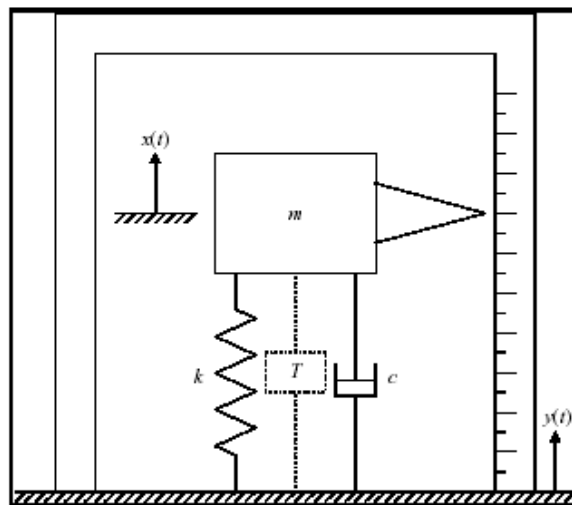


Figura 4.6 - Instrumento sísmico.

O instrumento consiste de uma massa m , uma mola de rigidez k e de um amortecedor de constante de amortecimento c , colocados dentro de uma caixa, que é ligada ao elemento vibratório. Com este arranjo, as extremidades da mola e do amortecedor executarão o mesmo movimento que a caixa (movimento y), e a sua vibração excita a massa dentro da caixa. O movimento da massa em relação à caixa é $z = x - y$, em que x é o movimento absoluto da massa m .

Assume-se que o movimento vibratório é harmônico, possuindo a forma:

$$y(t) = Y \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.5)$$

A equação do movimento da massa m pode ser escrita como:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (4.6)$$

Definindo o movimento relativo como $z = x - y$, a Eq. (4.6) é escrita como:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (4.7)$$

e as Eq.'s (4.5) e (4.7) conduzem a:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m.Y.\omega^2.\text{sen}(\omega.t) \quad (4.8)$$

Esta equação é idêntica à Eq. (3.25) e a solução de regime é:

$$z(t) = Z.\text{sen}(\omega.t - \phi) \quad (4.9)$$

onde Z e ϕ são dados por:

$$Z = \frac{Y.\omega^2}{\sqrt{(k - m.\omega^2)^2 + (c.\omega)^2}} \Rightarrow Z = \frac{Y.r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2.\zeta.r)^2}} \quad (4.10)$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{c.\omega}{k - m.\omega^2}\right) \Rightarrow \phi = \arctg\left(\frac{2.\zeta.r}{1 - r^2}\right) \quad (4.11)$$

As Figuras 4.7 e 4.8 mostram as curvas correspondentes às Eq.'s (4.10) e (4.11), respectivamente. O tipo de instrumento é determinado pela faixa mais adequada de freqüências da curva mostrada na Fig. 4.7.

4.4.1 – Vibrômetro

Um vibrômetro, também chamado de sismômetro é um instrumento que mede o deslocamento de um corpo vibratório. A Fig. 4.7 mostra que $Z/Y \cong 1$ para $\omega/\omega_n \geq 3$. Nesta faixa de freqüências a amplitude do deslocamento relativo entre a massa e a base é igual à amplitude do deslocamento da base. Este deslocamento é identificado pelo transdutor. Para uma análise exata, consideremos a Eq. (4.10). Para esta faixa de freqüências pode-se escrever:

$$z(t) = Y \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi) \quad (4.12)$$

se

$$\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta \cdot r)^2}} \cong 1 \quad (4.13)$$

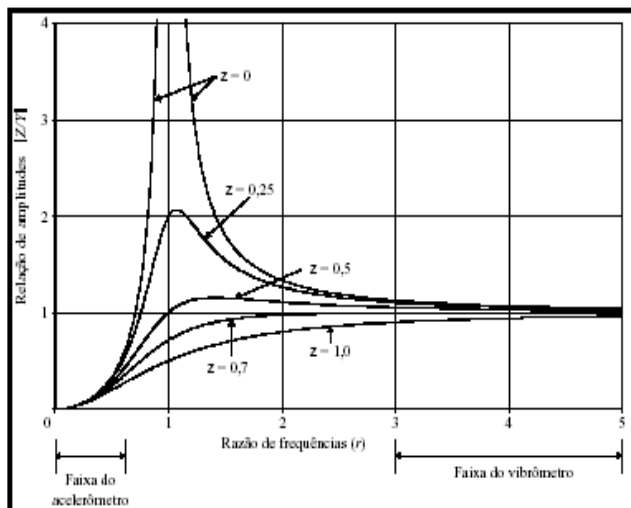


Figura 4.7 – Resposta de um instrumento sísmico.

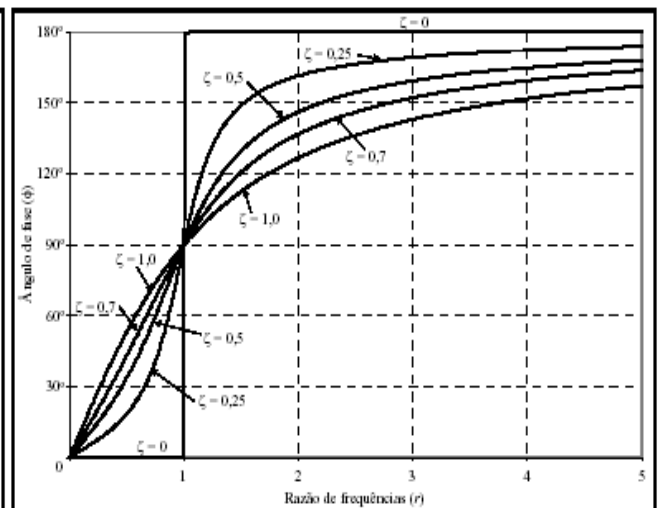


Figura 4.8 – Ângulo de fase.

Uma comparação da Eq. (4.12) com (4.5) mostra que $z(t)$ representa diretamente o deslocamento $y(t)$ com uma defasagem dada por ϕ . O deslocamento registrado $z(t)$, então está atrasado $t_\phi = \phi/\omega$ em relação ao deslocamento que deve ser medido $y(t)$. Este tempo de atraso não é importante se o deslocamento da base $y(t)$ consiste de um único componente harmônico.

Como $r = \omega/\omega_n$ deve ser grande e ω depende da vibração medida, a frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor deve ser baixa. Isto implica em que a massa deve ser grande e a mola deve possuir uma rigidez baixa. O instrumento resultante pode ser demasiado grande e pesado.

4.4.2 – Acelerômetro

Um acelerômetro é um instrumento que mede a aceleração de um corpo vibratório (Fig. 4.9). Os acelerômetros são amplamente utilizados em medições de vibrações industriais e terremotos. Uma das vantagens da medição da aceleração é que a velocidade e o deslocamento podem ser obtidos por integração, o que é computacionalmente fácil. A Eq. (4.9) combinada com (4.10), pode ser escrita na forma:

$$w_n^2 \cdot z(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \left[\omega^2 Y_{sen}(\omega.t - \phi) \right] \quad (4.14)$$

e se

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cong 1 \quad (4.15)$$

leva a:

$$w_n^2 \cdot z(t) = \omega^2 Y_{sen}(\omega.t - \phi) \quad (4.16)$$

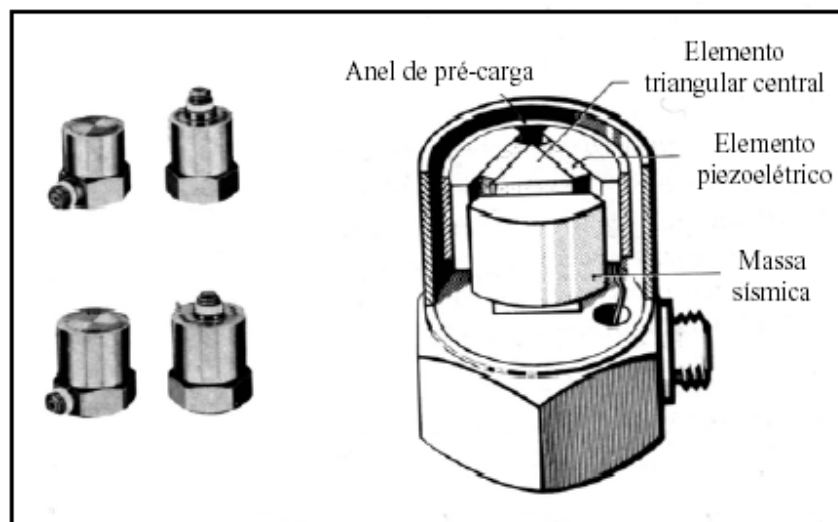


Figura 4.9 – Acelerômetros.

Como a segunda derivada em relação ao tempo de (4.5) é dada por

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \sin(\omega t - \phi) \quad (4.17)$$

a amplitude da função harmônica expressa na Eq. (4.16) é igual à da Eq. (4.17). Então, nestas condições, o deslocamento relativo $z(t)$ expressa a aceleração da base, com o sinal invertido, ou seja, com um atraso que é função do ângulo de fase ϕ , e com um fator de escala determinado pela frequência natural ao quadrado.

A Fig. 4.10 mostra o gráfico da expressão (4.15). Pode-se observar que a função assume valores entre 0,96 e 1,04 para $0 \leq r \leq 0,6$, se o fator de amortecimento é da ordem de 0,65 a 0,7, produzindo a melhor faixa linear de funcionamento do instrumento. Como a relação de frequências r é pequena, a frequência natural do instrumento deve ser grande em comparação com a frequência que deve ser medida. Desta maneira os acelerômetros devem possuir massa pequena e grande rigidez, o que permite a construção de instrumentos compactos e resistentes, com alta sensibilidade. Na prática são os melhores instrumentos para se medir vibrações, tendo contra si apenas o custo, que, em virtude da necessidade de se utilizar um elemento piezelétrico e amplificadores (além da tecnologia construtiva), é maior que o custo de outros instrumentos de construção mais simples.

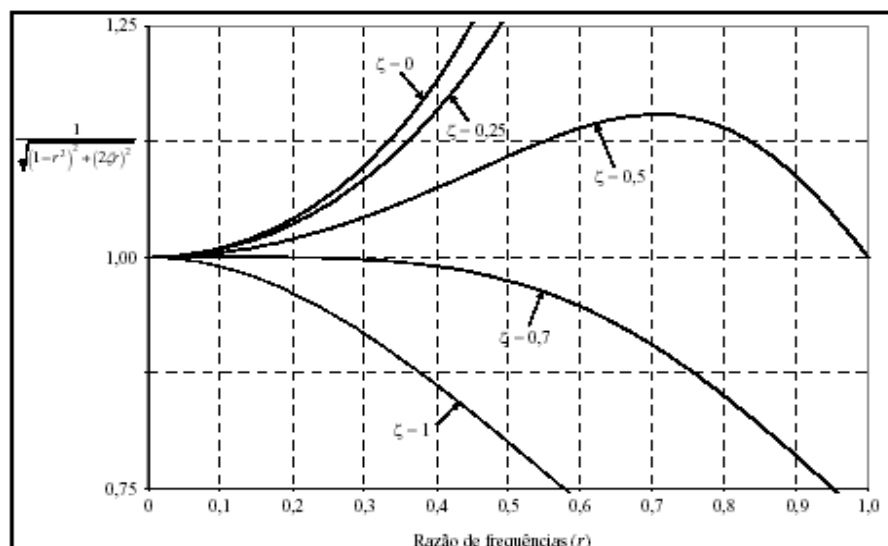


Figura 4.10 – Curvas de linearidade do acelerômetro.

4.4.3 - Sensor de Velocidade

Este sensor mede a velocidade do corpo vibratório. Derivando a Eq. (4.5) obtém-se a velocidade do corpo vibratório como:

$$\dot{y}(t) = \omega Y \cos(\omega t) \quad (4.18)$$

e a derivada da Eq. (4.9), considerando a Eq. (4.10), leva a:

$$\dot{z}(t) = \frac{\omega Y r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (4.19)$$

Se a Eq. (4.13) é satisfeita, então (4.19) torna-se:

$$\dot{z}(t) = \omega Y \cos(\omega t - \phi) \quad (4.20)$$

que, comparada com a Eq. (4.18) mostra que a velocidade do movimento relativo é igual à velocidade do movimento da base, com um atraso determinado pelo ângulo de fase. Como nesta situação o valor de r deve ser grande, o instrumento deve possuir uma frequência natural baixa.

Os sensores de velocidade são largamente utilizados em medição de vibração na manutenção em indústrias, porque são normalmente de baixo custo por serem de fácil construção (transdutores eletromagnéticos).

4.5 – Medidores de Frequência

A maior parte dos medidores de frequência são mecânicos e baseados no princípio da ressonância. Entretanto, no campo das medições de vibração é muito comum o uso do estroboscópio, principalmente no balanceamento de campo, que é um instrumento elétrico e que será apresentado a seguir.

4.5.1 - Estroboscópio

Um estroboscópio é um instrumento que produz pulsos luminosos intermitentes. A frequência com que a luz pulsa pode ser alterada e lida no instrumento. Quando um ponto específico do objeto vibratório é observado através do estroboscópio, este parece parado se a frequência dos pulsos luminosos coincidir com a frequência da vibração. O estroboscópio é especialmente indicado para corpos rotativos, uma vez que, neste caso, não é necessário o contato do instrumento com o elemento vibratório. Devido à persistência da visão, e menor frequência que pode ser medida com um estroboscópio é de aproximadamente 15 Hz. A Fig. 4.11 mostra um estroboscópio típico.



Figura 4.11 – Estroboscópio.

4.6 – Excitadores de Vibrações

Conhecidos em laboratórios como **shakers**, ou mais popularmente como **vibradores**, são, normalmente, transdutores que funcionam na forma inversa dos medidores: transformam uma grandeza elétrica em uma grandeza mecânica. São utilizados para provocar vibração em um sistema, com amplitude e frequência controladas, e com isto,

determinar as características dinâmicas dos mesmos sistemas e realizar testes de fadiga em materiais. Podem ser mecânicos, eletromagnéticos, eletrodinâmicos ou hidráulicos.

4.6.1 - Excitadores Mecânicos

A Fig. 4.12 ilustra a aplicação de transdutores mecânicos. Constitui-se de um mecanismo biela-manivela que pode ser utilizado para aplicar na estrutura uma força de inércia harmônica [Fig. 4.12 (a)] ou uma força elástica harmônica [Fig. 4.12 (b)]. São normalmente usados para produzir vibração de baixa frequência (até 30 Hz) e pequenas cargas (até 700 N).

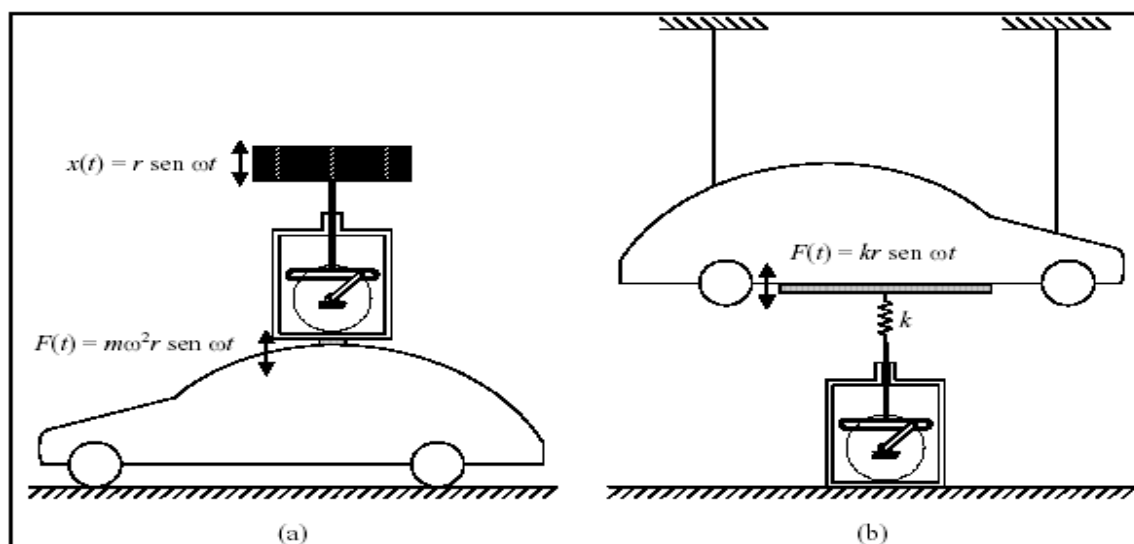


Figura 4.12 – Excitadores mecânicos.

Outro tipo de excitador mecânico, mostrado na Fig. 4.13, produz vibração originada pela força centrífuga criada por duas massas excêntricas girando com a mesma velocidade de rotação em sentidos opostos. Este tipo de excitador pode gerar cargas de 250 N a 25000 N. Se as duas massas m , girando com velocidade angular ω com uma excentricidade R , a força vertical gerada é:

$$F(t) = 2.m.R.\omega^2.\cos(\omega.t) \quad (4.21)$$

As componentes horizontais das duas massas se cancelam. A força $F(t)$ será aplicada à estrutura em que o excitador for fixado.

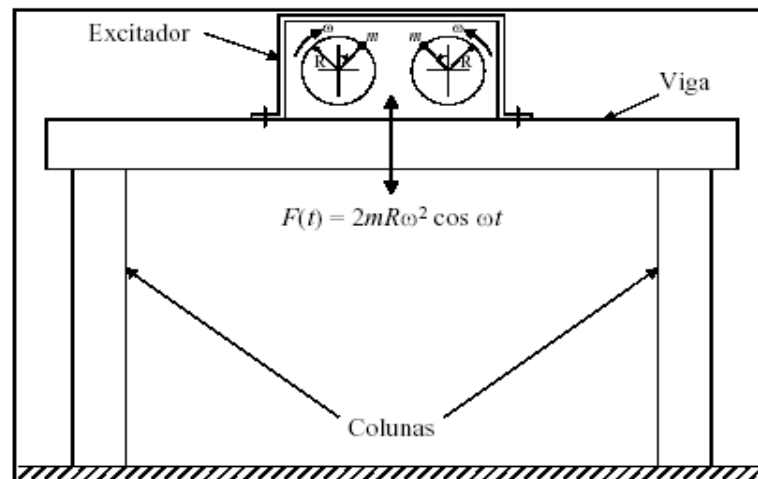


Figura 4.13 – Excitador de vibração de massas excêntricas.

4.6.2 – Excitador Eletrodinâmico

O excitador eletrodinâmico ilustrado na Fig. 4.14 funciona de forma inversa ao transdutor eletrodinâmico. Quando a corrente elétrica passa em um enrolamento de comprimento l , imerso em um campo magnético, é gerada uma força F , proporcional à corrente i e à intensidade de fluxo magnético D , acelerando a base do excitador.

$$F = D.l.i \quad (4.22)$$

O campo magnético é produzido por um ímã permanente em excitadores pequenos e por um eletroímã em grandes excitadores. A magnitude da aceleração da mesa depende da corrente máxima e das massas da mesa e do elemento móvel do excitador. Se a corrente que passa no enrolamento varia harmonicamente (corrente alternada), a força produzida também varia harmonicamente. Por outro lado, se for utilizada uma corrente contínua, será gerada uma força constante. Os excitadores eletrodinâmicos também podem ser utilizados com uma inércia ou uma mola, para fazer vibrar a estrutura, como nos casos da Fig. 4.12.

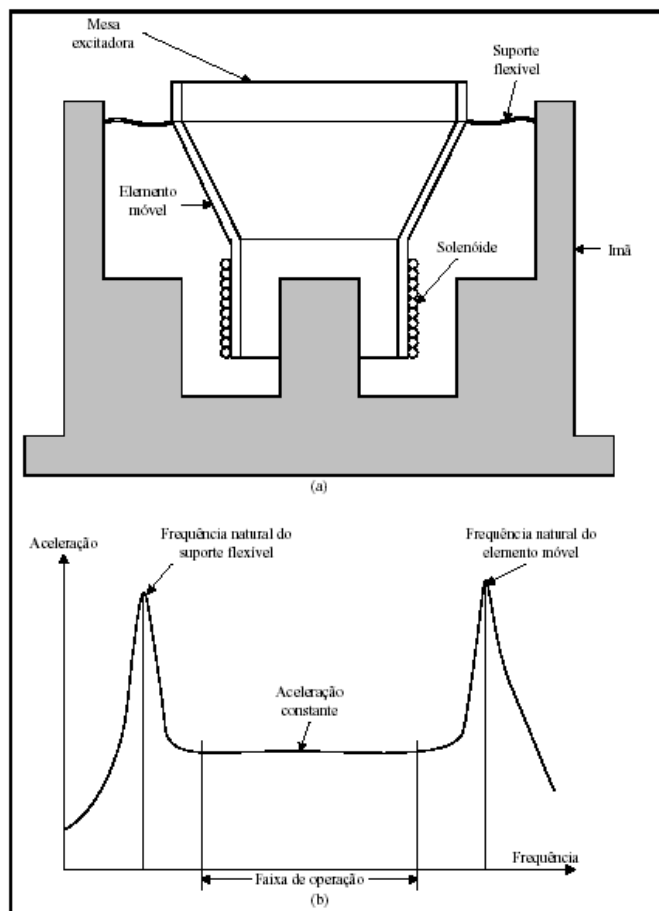


Figura 4.14 – Excitador eletrodinâmico e características.

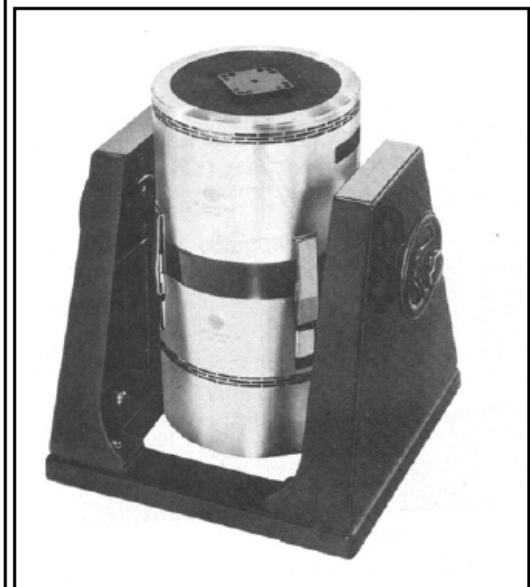


Figura 4.15 – Excitador eletrodinâmico.

Como o enrolamento e o elemento móvel devem executar um movimento linear, devem ser suspensos por um suporte flexível (com uma rigidez pequena), como mostra a Fig. 4.14 (a). Então o excitador eletromagnético possui duas frequências naturais: uma correspondente à frequência natural do suporte flexível e a outra correspondente à frequência natural do elemento móvel, que pode ser tornada bastante grande. Estas duas frequências de ressonância são mostradas na Fig. 4.18 (b). A faixa de frequências de operação do excitador deve ficar entre estas duas frequências de ressonância.

Os excitadores eletrodinâmicos são usados para gerar forças até 30 kN, deslocamentos até 25 mm, e frequências na faixa entre 5 Hz a 20 kHz. A Fig. 4.15 mostra uma foto de um excitador eletrodinâmico utilizado na prática.

CAPÍTULO V – BALANCEAMENTO DE ROTORES

5.1 – Introdução

Uma fonte comum de esforços dinâmicos em máquinas rotativas, responsável pela geração de vibração, é o desbalanceamento provocado por alguns desequilíbrios de massa devido a causas inevitáveis como: assimetrias, tolerâncias dimensionais, desvios de forma, imperfeições da matéria prima e da montagem. Qualquer uma destas causas ou uma combinação delas irá destruir a condição de perfeita distribuição de massa em torno do eixo de rotação do rotor, gerando desbalanceamento.

Cada erro de massa que ocorre em um rotor provoca mudança de posição do centro de gravidade da secção transversal que contém o erro. A somatória destes desvios é o afastamento do eixo principal de inércia (EPI) do eixo de rotação (ER), ou seja, a massa do rotor não estará perfeitamente distribuída ao redor do eixo de rotação, conforme pode ser observado na Fig. 5.1, o que leva ao aparecimento de forças e/ou momentos de inércia que são responsáveis pela excitação do rotor e a conseqüente vibração resultante.

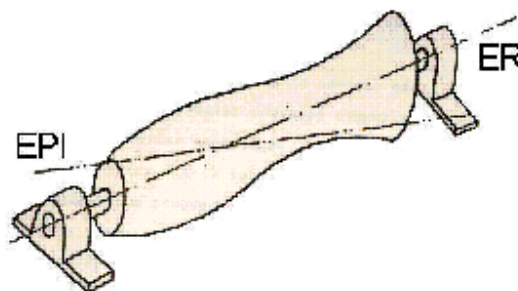


Figura 5.1 – Discrepância entre ER e EPI.

O balanceamento consiste na técnica de correção ou eliminação das excitações de inércia indesejáveis. Ele é o respaldo, o toque final, de todo bom projeto e assume um papel importante na linha de fabricação de elementos que giram, bem como na atividade de manutenção de máquinas rotativas.

Neste curso, trataremos especificamente do balanceamento rotativo de rotores rígidos, apresentando as técnicas usadas para a determinação do desbalanceamento e a aplicação das suas correções, bem como apresentaremos a norma internacional que recomenda a qualidade de balanceamento para cada caso.

5.2 – Efeitos e Tipos de Desbalanceamento

Os erros inevitáveis de massa em um rotor podem ser descritos por uma massa concentrada (ponto pesado) em pontos fora do centro de rotação da secção reta que contém o erro. Assim, existirão pontos pesados distribuídos de forma aleatória ao longo do comprimento do rotor.

Cada ponto pesado gera uma força dinâmica radial e a combinação mútua de todas estas forças, associando suas intensidades, direções e distancias, fazem aparecer uma resultante radial em cada mancal, como pode ser visualizado na Fig. 5.2, que mostra a formação das resultantes do desbalanceamento em um rotor com 4 pontos pesados. Fica nítido nesta figura que a posição relativa das forças é constante, girando com o rotor o que faz com que os esforços resultantes nos mancais girem solidários com o rotor. As intensidades destas resultantes são constantes, suas direções são radiais e suas posições angulares podem ser referenciadas a partir de um marco característico no próprio rotor. Nesta situação tem-se, então, determinadas as duas resultantes dos pontos pesados que o rotor aplica no mancal.

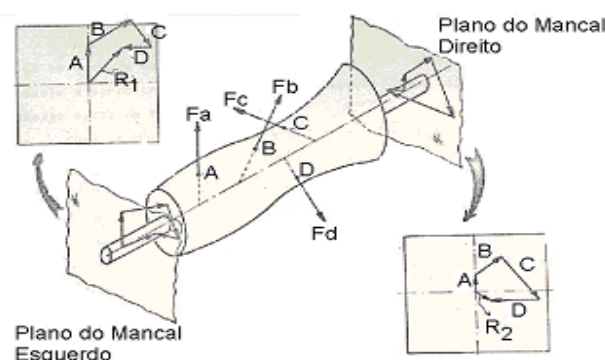


Figura 5.2 – Combinação de forças de desbalanceamento.

As resultantes R_1 e R_2 atuam sobre os mancais e representam o efeito do desbalanceamento de todo o rotor. Elas são conseqüências de um conjunto de forças centrífugas e agem em planos distintos, podendo seus módulos e direções serem quaisquer, iguais ou não.

Como os módulos e direções de R_1 e R_2 podem ser quaisquer, duas situações características podem ser imaginadas, as quais representam casos limites para rotores simétricos:

- **Primeiro Caso:** os pontos pesados estão distribuídos uniformemente em uma linha paralela ao eixo de rotação. O eixo principal de inércia (EPI) estará paralelo ao eixo de rotação (ER) e as duas resultantes serão iguais em módulo e direção;
- **Segundo Caso:** os pontos pesados estão divididos igualmente, parte concentrados em uma extremidade e parte concentrados na outra extremidade, mas no lado diametralmente oposto. O EPI estará inclinado em relação ao ER, cruzando com este exatamente no centro de Gravidade (C.G.) do rotor. As duas resultantes terão módulos iguais e direções defasadas de 180° .

Um rotor enquadrado no primeiro caso apresentará, em movimento, uma tendência de vibração em órbita circular em fase nas duas extremidades. Porém, se for do tipo do segundo caso o movimento orbital das duas extremidades serão também circulares, mas defasados de 180° . Estes dois casos limites são mostrados na Fig. 5.3.

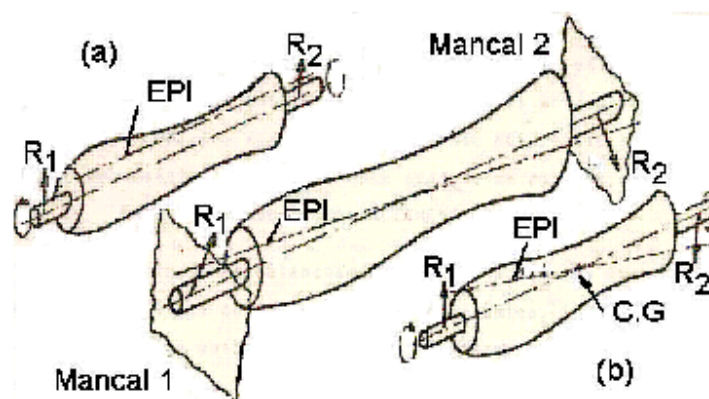


Figura 5.3 – Casos limites: relação entre EPI e R_1 e R_2 .

Estas situações limites representam dois tipos distintos de desbalanceamento. Os rotores inseridos no primeiro caso apresentam um Desbalanceamento Estático, pois devido apresentarem uma resultante não nula, quando parados terão a ação de uma força gravitacional tentando girar o rotor colocando o lado pesado para baixo. Por outro lado, os rotores que estão agrupados no segundo caso apresentam uma resultante nula e os efeitos do desbalanceamento só aparecem com o rotor em rotação, devido um momento resultante não nulo provocado pelas forças centrífugas e são ditos ter um Desbalanceamento Dinâmico.

A grande maioria dos rotores apresentam um efeito combinado destes dois casos limites, ou seja, o desbalanceamento é a soma de uma parcela puramente estática com outra puramente dinâmica. Entretanto, em rotores com diâmetro muito maior que seu comprimento (serra circular, polias, engrenagens, alguns ventiladores, etc) a parcela dinâmica do desbalanceamento pode ser negligenciada se a rotação de trabalho não for alta.

5.3 – Rotores Rígidos e Rotores Flexíveis

Foi dito anteriormente que os pontos pesados geram forças centrífugas na rotação do rotor e que estas forças se somam vetorialmente produzindo as resultantes R_1 e R_2 . Entretanto, nos moldes em que isto foi colocado, é necessário que os planos radiais, que contêm cada uma das forças centrífugas, permaneçam imóveis uns em relação aos outros. Isto impõe a condição de ser o rotor rígido, ou seja, suas deformações elásticas que ocorrem em serviço não são suficientes para influenciar significativamente as resultantes R_1 e R_2 do desbalanceamento.

O conceito de rigidez do rotor é bastante complexo e engloba, inclusive, a relação entre a flexibilidade do conjunto rotor-eixo e a dos mancais. Quanto maior a flexibilidade dos mancais mais o rotor pode ser considerado rígido. A Fig. 5.4 mostra em escala exagerada as deformações de um rotor flexível e sua transformação em rotor rígido com o aumento da flexibilidade dos mancais. Deve-se ressaltar que os métodos e técnicas de determinação e correção do desbalanceamento, a serem apresentados neste curso, só se aplicam aos rotores rígidos.

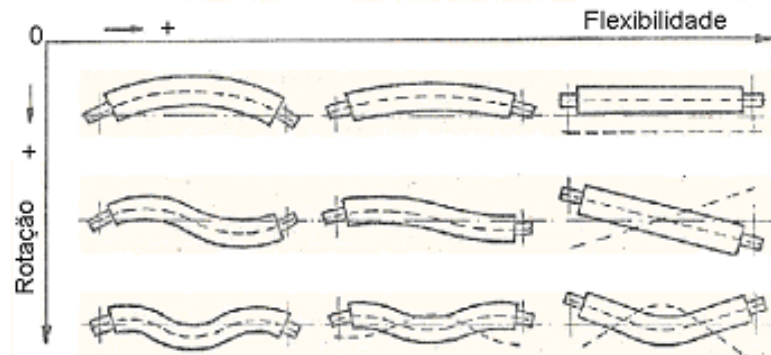


Figura 5.4 – Efeito da flexibilidade dos mancais.

5.4 – Fundamentos Teóricos

O tipo de esforço devido ao desbalanceamento ocorre freqüentemente nas máquinas e merece nossa atenção especial. Os resultados desta espécie de esforço são particularmente interessantes, porque a magnitude da força depende da velocidade de rotação da máquina. Tal esforço pode aparecer devido ao fato das peças rotativas giram em torno de um eixo não coincidente com o centro de massa. O equacionamento do problema de desbalanceamento rotativo pode ser obtido tendo por base o modelo esquemático apresentado na Fig. 5.5.

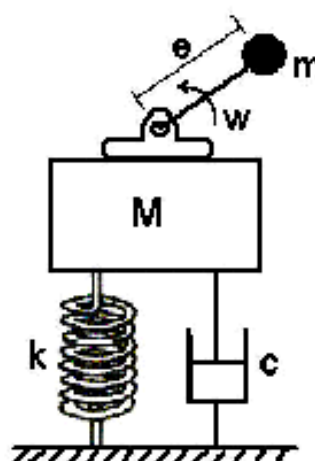


Figura 5.5 – Modelo físico para o desbalanceamento rotativo.

Uma massa desbalanceada m , tendo uma excentricidade e está girando com ω . A máquina é ligada ao solo por meio de amortecedor e mola, e apresenta uma massa total M , que inclui a massa desbalanceada. A magnitude da força é $m.e.\omega^2$, e este vetor força gira com velocidade angular ω . Ambas as componentes destas forças, horizontal e vertical, são importantes, mas aqui, consideraremos um sistema com um grau de liberdade e, devido a esta premissa, trataremos apenas com a componente vertical. A equação diferencial que descreve o movimento é dada por:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m.e.\omega^2 \text{sen}(\omega.t) \quad (5.1)$$

A solução da Eq.(5.1) é dada por:

$$x(t) = X.\text{sen}(\omega.t - \phi) \quad (5.2)$$

onde X e ϕ são, respectivamente, a amplitude e a fase da vibração forçada dados por:

$$X = \frac{m.e.\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c.\omega)^2}} \quad (5.3)$$

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{c.\omega}{k - M.\omega^2}\right) \quad (5.4)$$

A Eq.(5.3) permite estabelecer que a amplitude da vibração é diretamente proporcional ao desbalanceamento $m.e$ e, devido a isto, é possível se determinar o desbalanceamento de um rotor pela medição de vibração. É com base neste fundamento que as máquinas rotativas de balanceamento estático e dinâmico funcionam e é estabelecida a técnica de balanceamento de campo muito usada por equipes de manutenção de máquinas, as quais serão posteriormente apresentadas.

5.5 – Balanceamento de Campo (Estático e Dinâmico)

A melhor qualidade de balanceamento é conseguida com a balanceadora dinâmica. Com ela pode-se garantir a vida útil especificada para rolamentos e outras partes. Todos os rotores novos ou recém concertados devem passar por uma balanceadora.

Na montagem das máquinas, o rotor é conectado a acoplamentos, polias, etc, que mesmo balanceados podem introduzir desbalanceamento no conjunto pela não concentricidade. Isto exige um balanceamento para corrigir o erro introduzido. Por outro lado, durante o serviço do rotor sempre ocorrem em maior ou menor grau: acomodamento plástico, incrustações, abrasões, corrosão e outras coisas que destroem a perfeição da distribuição de massa, gerando desbalanceamento.

Para corrigir os problemas de montagem, os técnicos dispõem dos procedimentos de balanceamento de campo, que permite que a máquina seja balanceada sem necessidade de transporte, demora, etc. Pela simplicidade, o balanceamento de campo é aplicado aos próprios rotores corrigindo os efeitos de serviço, mesmo sabendo-se que não se alcançará a qualidade dada pela balanceadora.

O balanceamento de campo pode ser estático (um plano) ou dinâmico (dois ou mais planos) e o equipamento necessário é composto de: transdutor de sinal (acelerômetro ou vibrômetro); amplificador; filtro; indicador; e sensor de fase.

No processo de balanceamento de campo o procedimento de correção do desbalanceamento é executado a partir da medição de vibração no mancal da máquina que se quer balancear. Assim, é preciso garantir que a vibração medida seja realmente devido ao desbalanceamento e, devido a isto, em alguns casos se torna necessário filtrar o sinal de vibração medido para que se elimine as vibrações de outras origens.

A força resultante dos pontos pesados do rotor cria uma vibração senoidal predominantemente radial. O sistema mecânico (rotor-eixo-mancais, estruturas) caracterizam a resposta vibratória de forma individual, modulando a amplitude e inserindo um atraso ou defasagem na resposta.

É preciso aplicar um método de calibração para determinar com exatidão:

- a proporção entre o tamanho da vibração e o desbalanceamento existente
- a relação entre a fase medida e a posição angular do ponto pesado

5.5.1 – Balanceamento Estático de Campo

Para se executar o balanceamento estático, é necessário que se crie um novo centro de gravidade para o rotor que deverá estar localizado sobre o eixo de rotação. Isso é feito pela adição (ou remoção) de uma massa ao sistema. Essa massa deve ser colocada em uma linha que passa através do centro de gravidade original do rotor e que seja perpendicular ao eixo de rotação.

5.5.1.1 – Balanceamento Estático com Medição de Fase

Seja o arranjo da Fig. 5.6, em que se observa um rotor de um ventilador que se deseja balancear estaticamente e um conjunto de medição de vibração constituído de sensor, amplificador e lâmpada estroboscópica, que permite a determinação da amplitude e fase da vibração induzida por desbalanceamento.

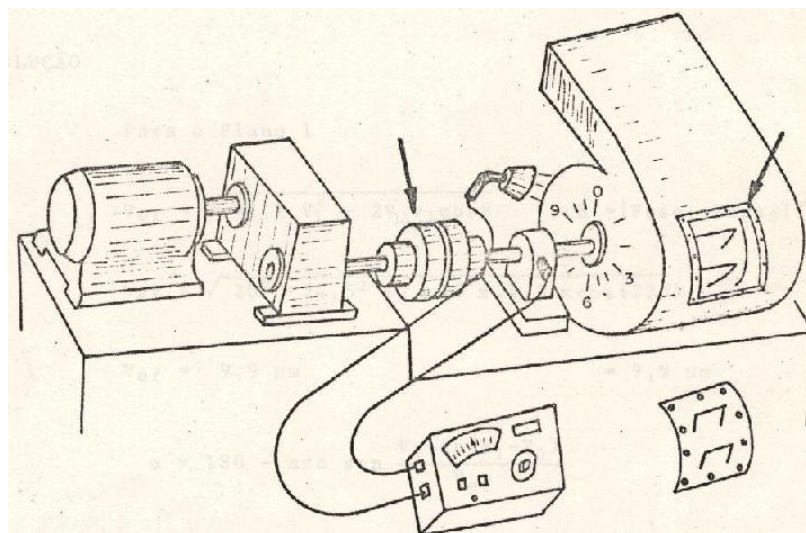


Figura 5.9 – Montagem para balanceamento de campo.

O procedimento a ser seguido para possibilitar a correção é o seguinte:

- Coloque o ventilador em funcionamento e meça a vibração na frequência de rotação em módulo e fase. O valor medido é a vibração original do rotor devido ao desbalanceamento aqui denominada de V_0 .
- Desligue o conjunto de acionamento e fixe uma massa de teste em uma posição qualquer do rotor (se possível próximo ao plano de maior massa do rotor). Esta massa de teste não deve ser grande, ela depende da massa do rotor e da rotação. Ela deverá provocar um desbalanceamento de 5 a 10 vezes ao desbalanceamento residual permissível.
- Acione novamente o conjunto e meça novamente a vibração em módulo (V_1) e fase (F_1). O novo valor medido é a vibração devido ao desbalanceamento original e aquele provocado pela massa de teste adicionada no rotor, e será aqui denominado de V_1 .
- Determine a diferença vetorial entre V_0 e V_1 , ou seja, determine a contribuição da massa de teste através de:

$$V_{ef} = V_1 - V_0 \quad (5.5)$$

Importante lembrar que a Eq.(5) é uma equação vetorial. Portanto, o módulo de V_{ef} e o ângulo α , que deverá ser usado para fixar a massa final de balanceamento, podem ser determinados, respectivamente, através das leis do cosseno e do seno aplicadas a um triângulo qualquer, tendo por base a Fig. 5.10:

$$V_{ef} = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_1V_0\cos\beta} \quad (5.6)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{V_1}{V_{ef}} \cdot \sin\beta\right) \quad (5.7)$$

onde $\beta = F_1 - F_0$.

1. retire a massa de teste m_t do rotor e fixe a nova massa de correção m_c , cujo valor é determinado pela equação apresentada abaixo, na nova posição determinada pelo ângulo α .

$$m_c = m_t \frac{V_0}{V_{ef}} \quad (5.8)$$

2. Finalmente, é importante ressaltar que a rotação de funcionamento do conjunto deve ser a mesma em todas as etapas descritas anteriormente e a distância radial de fixação da massa de correção deverá ser igual àquela usada para fixar a massa de teste.

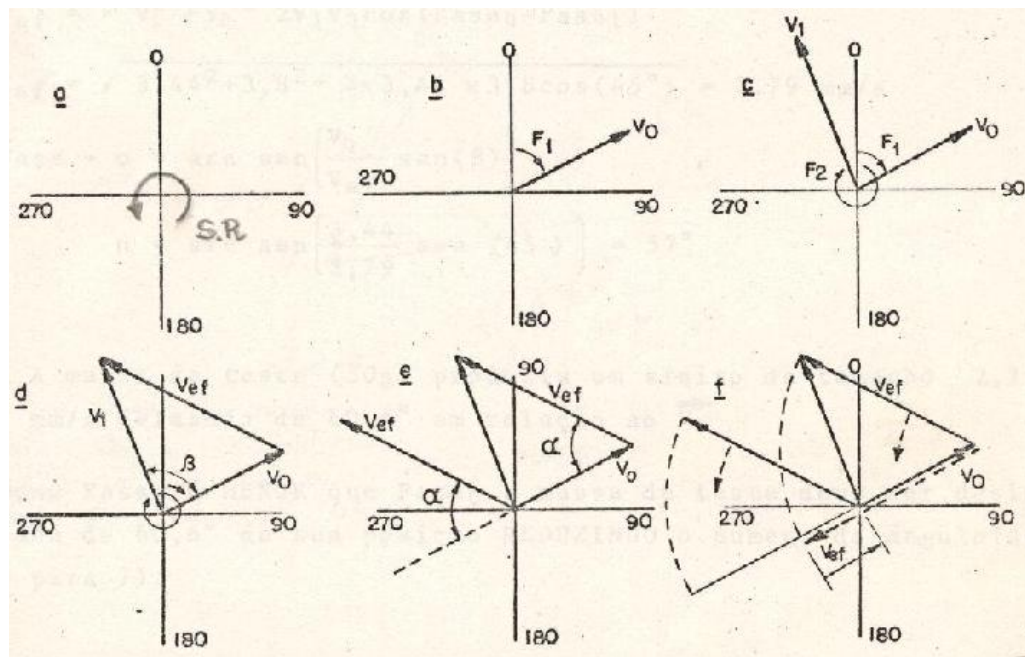


Figura 5.10 – Sequência gráfica do balanceamento estático com medição de fase.

É comum o erro de posicionamento da massa de correção, devido à dúvida do operador quanto ao sentido de giro a partir da massa de teste. Assim, de modo a se evitar o erro a Fig. 5.11 mostra de forma clara o sentido de rotação que fica perfeitamente determinado a partir das fases dos vetores V_0 e V_1 . Nesta figura temos duas situações:

1. Se $F_0 < F_1$, posicionar a massa de correção na posição definida pelo giro correspondente ao ângulo α , com início na posição da massa de teste, no sentido contrário ao de rotação do rotor.
2. Se $F_0 > F_1$, posicionar a massa de correção na posição definida pelo giro correspondente ao ângulo α , com início na posição da massa de teste, no mesmo sentido de rotação do rotor.

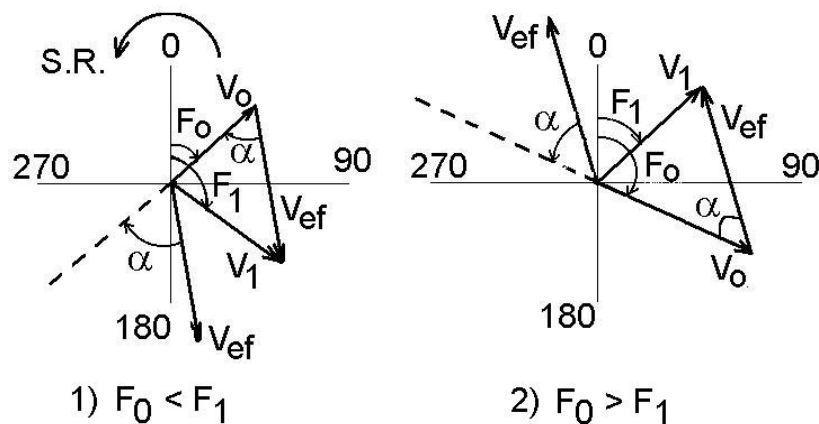


Figura 11 – Posicionamento correto da massa de correção.

5.5.1.2 – Balanceamento Estático sem Medição de Fase

Quando não se dispõe de equipamentos com medida de fase e é necessário se fazer o balanceamento estático pode-se usar o método dos três pontos, que apesar de apresentar uma boa precisão permite que se amenize bem o problema de desbalanceamento.

O método dos três pontos tem o seguinte procedimento:

- Gire o rotor e meça o módulo da vibração devida ao desbalanceamento: este valor é V_0 .
- Pare o rotor e marque três posições separadas por um ângulo de 120° .
- Coloque a massa de teste na posição 1 e em uma distância radial

conveniente para as três posições.

- Gire o rotor e meça o módulo da nova vibração: este valor é V_1 .
- Retire a massa de teste da posição 1 e a coloque na posição 2, na mesma distância anterior.
- Gire o rotor e meça o módulo da nova vibração: este valor é V_2 .
- Retire a massa de teste da posição 2 e a coloque na posição 3, na mesma distância radial.
- Gire o rotor e meça a nova vibração: este valor é V_3 .

De posse dos valores de V_0 , V_1 , V_2 e V_3 , pode-se obter o valor de V_{ef} de modo gráfico como segue (Fig. 5.12):

- Escolha uma escala conveniente e desenhe um círculo de raio V_0 . Marque os pontos 1, 2 e 3 tal como no rotor.
- Pelo ponto 1 trace um arco de círculo com raio V_1 .
- Repita o procedimento do item anterior nos pontos 2 e 3 com os raios V_2 e V_3 , respectivamente.

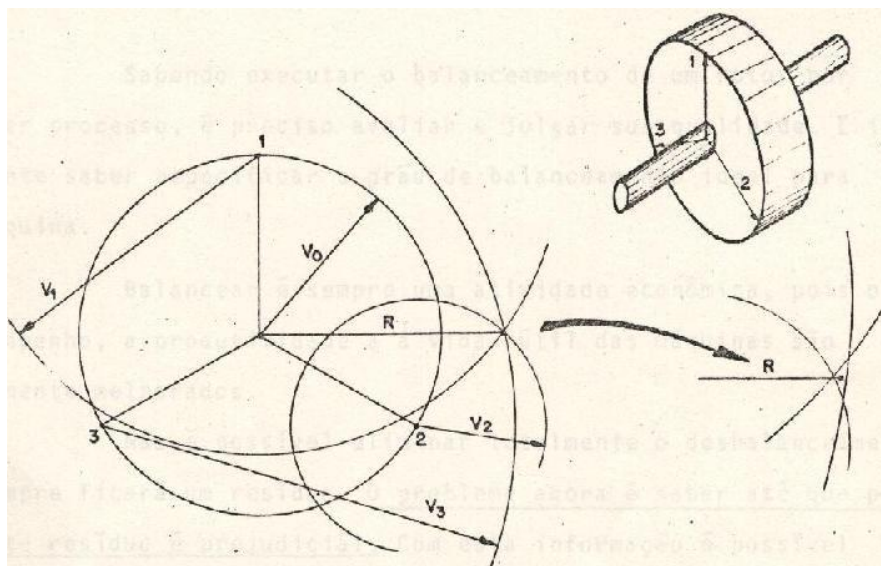


Figura 5.12 – Esquema para balanceamento em três pontos.

- Localize uma pequena região limitada pelos três arcos de círculos.
- Una o centro do círculo com o centro da região fechada (linha R).
- Meça o tamanho do segmento desta linha, o qual corresponde ao módulo de V_{ef} .

Finalmente, determine o valor da massa de correção pela Eq. (5.8) e, para efetivar o balanceamento, retire a massa de teste e fixe a massa de correção na posição em que a linha R corta o círculo.

5.5.2 – Balanceamento Dinâmico de Campo

O balanceamento estático move o centro de gravidade para um ponto comum aos eixos de rotação e inercial. Entretanto, esses dois eixos podem não coincidirem em toda a extensão do rotor. Nesse caso, o balanceamento estático foi obtido uma vez que a soma das forças inerciais é nula, mas dinamicamente o rotor está desbalanceado, uma vez que existe a ação de um momento inercial sobre os mancais, que causa o aparecimento de vibração.

Para que seja obtido o balanceamento dinâmico, há a necessidade de se promover uma rotação do eixo principal de inércia do rotor de modo a fazê-lo coincidir com o eixo de rotação. Assim, é preciso a utilização de dois planos de balanceamento, um a cada lado do centro de gravidade do rotor, onde deverão ser posicionadas massas de correção.

Teoricamente, as posições dos planos que receberão as massas não são importantes, mas na prática, elas o são, pois usualmente quanto mais afastado do C.G. esses planos estiverem, melhor serão os resultados e daí se usar os planos que correspondem as extremidades do rotor.

Embora o balanceamento dinâmico possa ser, na prática, obtido através do procedimento de balanceamento estático em um plano e, em seguida, no outro plano, tornando a se aplicar no primeiro plano, em virtude da necessidade de correção do efeito cruzado, ou seja, o efeito em um plano provocado pela colocação da massa no outro plano, isto pode ser um processo demorado e para alguns equipamentos proibitivo, devido aos problemas de aquecimento

provocado pelo número de partidas do equipamento durante a correção do desbalanceamento. Assim, a seguir apresentaremos um procedimento de balanceamento em dois planos levando-se em conta o efeito cruzado.

A notação usada a seguir representa o vetor completo, ou seja, módulo e fase, bem como o plano no qual as medidas de vibração foram efetuadas e o plano em que a massa de teste foi fixada. Assim, $V_{1,0}$ representa um nível de vibração (módulo e fase) medido no plano 1, sem massa de teste fixada no rotor (índice 0). $V_{1,2}$ representa um nível de vibração no plano 1 com a massa de teste fixada no plano 2, e assim por diante.

A Fig. 5.13 mostra o rotor a ser balanceado, bem como os planos de correção já com as marcas dos ângulos de 0 a 360°. O procedimento de balanceamento segue as seguintes etapas:

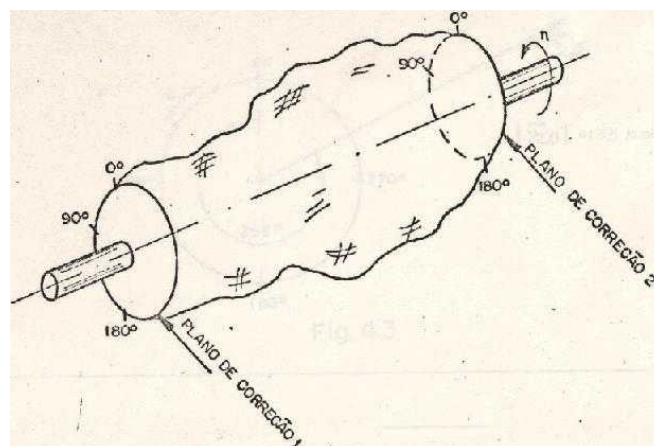
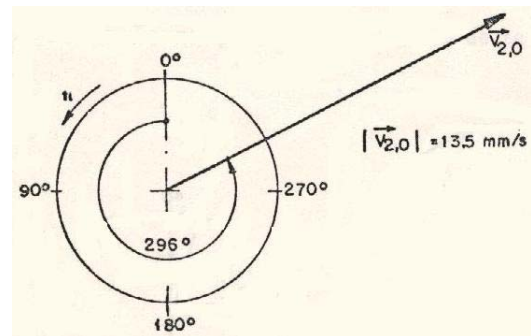
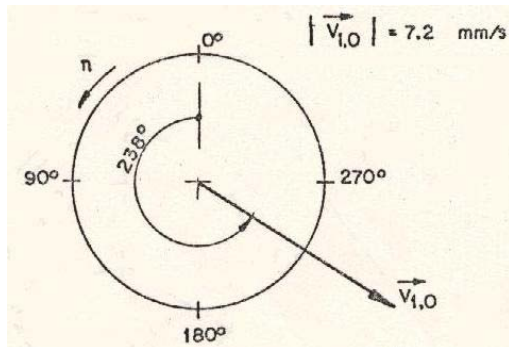


Figura 5.13 – Rotor a ser balanceado dinamicamente.

1. Fazem-se as medidas de vibração, para os dois planos, devido ao desbalanceamento original, obtendo-se:

Plano 1 - $V_{1,0}$ = vibração no plano 1 devido o desbalanceamento original.

Plano 2 - $V_{2,0}$ = vibração no plano 2 devido o desbalanceamento original.

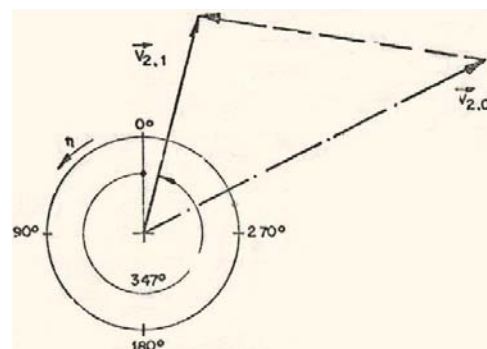
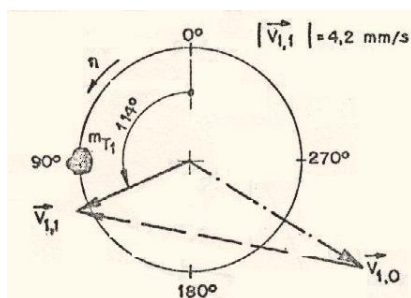


2. Fazem-se as medições de vibrações com a massa de teste m_{t1} colocada no plano 1, obtendo-se:

Leitura no Plano 1

Plano 1 - $V_{1,1}$ = vibração no plano 1 devido a massa de teste no plano 1.

Plano 2 - $V_{2,1}$ = vibração no plano 2 devido a massa de teste no plano 1.

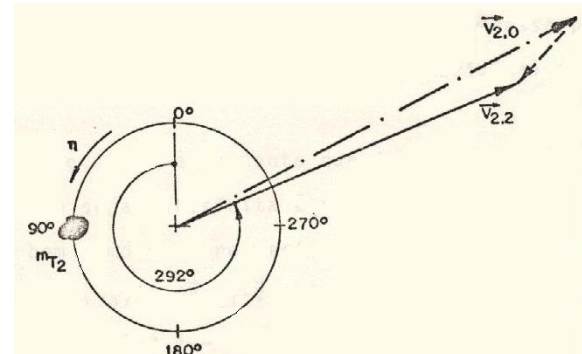
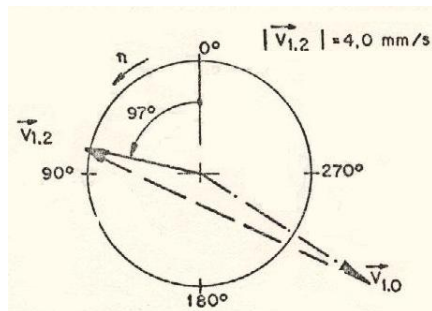


Note que $(V_{1,1} - V_{1,0})$ e $(V_{2,1} - V_{2,0})$ representam, respectivamente, os efeitos ou influências da massa de teste colocada no plano 1, sobre os planos 1 e 2.

3. Fazem-se as medições de vibrações com a massa de teste m_{t2} colocada no plano 1 (a massa de teste fixada no plano 1 deve ser retirada), obtendo-se:

Plano 1 - $V_{1,2}$ = vibração no plano 1 devido a massa de teste no plano 2.

Plano 2 - $V_{2,2}$ = vibração no plano 2 devido a massa de teste no plano 2.



Note que $(V_{1,2} - V_{1,0})$ e $(V_{2,2} - V_{2,0})$ representam, respectivamente, os efeitos ou influências da massa de teste colocada no plano 2, sobre os planos 1 e 2.

A Fig. 5.14 mostra o Plano 1, com a vibração correspondente ao desbalanceamento original juntamente com os efeitos das massas de teste m_{t1} e m_{t2} sobre esse plano. Portanto, a partir desta figura, pode-se visualizar o efeito resultante R_1 das duas massas de teste sobre o plano 1. Se $R_1 + V_{1,0} = 0$, ou seja, $R_1 = -V_{1,0}$, as massas de teste balanceariam esse plano, isto é, elas anulariam o efeito do desbalanceamento original sobre o plano 1.

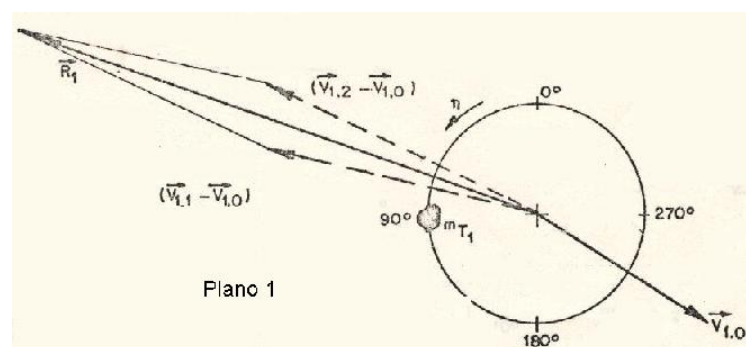


Figura 5.14 – Efeito resultante sobre o plano 1 das massas de teste.

Pela Fig. 5.14 é evidente que o equilíbrio não aconteceu. Assim, para que o a condição de equilíbrio seja atendida é necessário mudar os valores de m_{t1} e m_{t2} , bem como

suas respectivas posições. Dessa maneira os efeitos $(V_{1,1} - V_{1,0})$ e $(V_{1,2} - V_{1,0})$ deverão variar de tal maneira que a soma deles seja igual a $-V_{1,0}$.

Para impor essa condição utilizam-se dois operadores vetoriais Q_1 e Q_2 , de tal forma que:

$$Q_1(V_{1,1} - V_{1,0}) + Q_2(V_{1,2} - V_{1,0}) = -V_{1,0} \quad (5.9)$$

A Fig. 5.15 mostra o Plano 2, com a vibração correspondente ao desbalanceamento original juntamente com os efeitos das massas de teste m_{t1} e m_{t2} sobre esse plano. Portanto, a partir desta figura, pode-se visualizar o efeito resultante R_2 das duas massas de teste sobre o plano 2. Se $R_2 + V_{2,0} = 0$, ou seja, $R_2 = -V_{2,0}$, as massas de teste balanceariam esse plano, isto é, elas anulariam o efeito do desbalanceamento original sobre o plano 2.

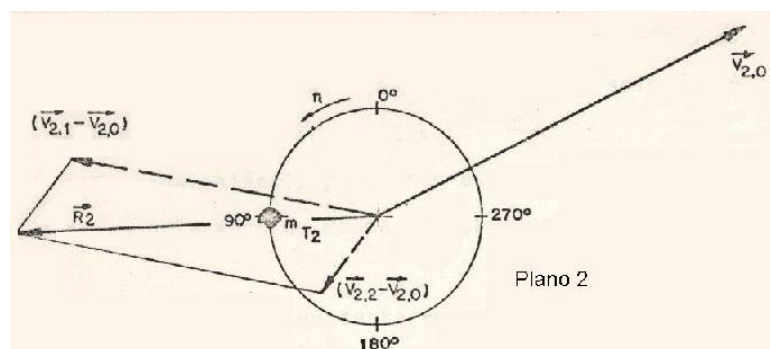


Figura 5.15 – Efeito resultante sobre o plano 2 das massas de teste.

Pela Fig. 5.15 é evidente que o equilíbrio não aconteceu. Assim, para que a condição de equilíbrio seja atendida é necessário mudar os valores de m_{t1} e m_{t2} , bem como suas respectivas posições. Dessa maneira os efeitos $(V_{2,1} - V_{2,0})$ e $(V_{2,2} - V_{2,0})$ deverão variar de tal maneira que a soma deles seja igual a $-V_{2,0}$.

Para impor essa condição utilizam-se dois operadores vetoriais Q_1 e Q_2 , de tal forma que:

$$Q_1(V_{2,1} - V_{2,0}) + Q_2(V_{2,2} - V_{2,0}) = -V_{2,0} \quad (5.10)$$

Deve ficar claro que os valores de Q_1 e Q_2 nas Eq. (5.9) e (5.10) são os mesmos, uma vez que a massa de teste colocada em um dos planos afeta, evidentemente, as medições nos dois planos, ou seja, existe o efeito cruzado. Assim, estamos de frente de um sistema de equações vetoriais com duas incógnitas. Estas equações podem ser resolvidas, obedecendo-se as regras de operações com números complexos, para Q_1 e Q_2 .

Resolvendo para Q_2 , temos:

$$Q_2 = \frac{V_{2,0}(V_{1,1} - V_{1,0}) - V_{1,0}(V_{2,1} - V_{2,0})}{(V_{2,1} - V_{2,0})(V_{1,2} - V_{1,0}) - (V_{2,2} - V_{2,0})(V_{1,1} - V_{1,0})} \quad (5.11)$$

Para Q_1 , temos:

$$Q_1 = \frac{-V_{1,0} - Q_2(V_{1,2} - V_{1,0})}{(V_{1,1} - V_{1,0})} \quad (5.12)$$

Uma vez obtidos Q_1 (Q_1 e γ_1) e Q_2 (Q_2 e γ_2), as massas de correção são calculadas por:

$m_{c1} = Q_1 m_{t1}$ colocada a γ_1 graus da posição de m_{t1} no sentido de rotação.

$m_{c2} = Q_2 m_{t2}$ colocada a γ_2 graus da posição de m_{t2} no sentido de rotação.

5.6 – Avaliação do Desbalanceamento

O desbalanceamento de um rotor provoca na máquina tensões mecânicas e vibrações, cada uma delas com suas conseqüências sempre más. As tensões mecânicas não são vistas ou sentidas pelo operador, que somente verão seus efeitos quando estes acontecerem. As vibrações, porém, dão informações imediatas do desbalanceamento,

permitindo ao usuário com critério a atitude corretiva. A medida de vibração permite avaliar o grau de desbalanceamento do rotor.

Infelizmente, existem outras fontes de vibração nas máquinas, o que confunde a avaliação. Contudo, vários pesquisadores dedicaram muito esforço e estabeleceram vários critérios válidos para avaliar as vibrações das máquinas, incluindo o desbalanceamento.

Se o balanceamento é feito em máquinas balanceadoras, o desbalanceamento residual em g x mm é obedecido e a vibração resultante estará sempre baixa. Entretanto, no balanceamento de campo, não é possível quantificar o desbalanceamento residual e a vibração resultante poderá ser alta, mas terá contribuição de desalinhamento, lubrificação, etc.

A Carta de Severidade da IRD, apresentada na Fig. 5.16, pode ser usada para avaliar vibrações com frequência de até 10.000 rpm medidas nos mancais e filtradas. Isto quer dizer que não se pode usar vibrações de banda larga, uma vez que para o desbalanceamento a frequência da vibração corresponde à rotação do rotor.

Uma outra Carta de Severidade de Vibrações que pode ser usada é apresentada na Fig. 5.17, a qual foi proposta pelo Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida (FUPAI), que é indicada para máquinas rotativas excitadas por desbalanceamento e/ou desalinhamento, tais como: motores elétricos, bombas, ventiladores, exaustores, compressores rotativos, turbinas, etc.

5.7 – Exemplos de Cálculos

Exemplo 5.1 - Balanceamento Estático com Medição de Fase: Para fixação dos conceitos até aqui apresentados vamos realizar o cálculo de balanceamento estático para o sistema mostrado na Fig. 5.9. Nesta figura, o rotor a ser balanceado gira a 1.200 rpm e possui 32 kg de peso distribuídos por uma geometria de 550 mm de diâmetro. O equipamento de medição usado é um vibrômetro com luz estroboscopia levantou os seguintes parâmetros:

- $V_0 = 3,8 \text{ mm/s} / 110^\circ$ (fase medida pela coincidência da referência fixa com a posição próxima ao número 4).

- Colocada uma massa de teste m_t de 50 g a 250 mm do centro do eixo, na face do rotor (posição 9), o resultado foi $V_I = 3,44 \text{ mm/s } /65^\circ$ (posição próxima ao número 2).

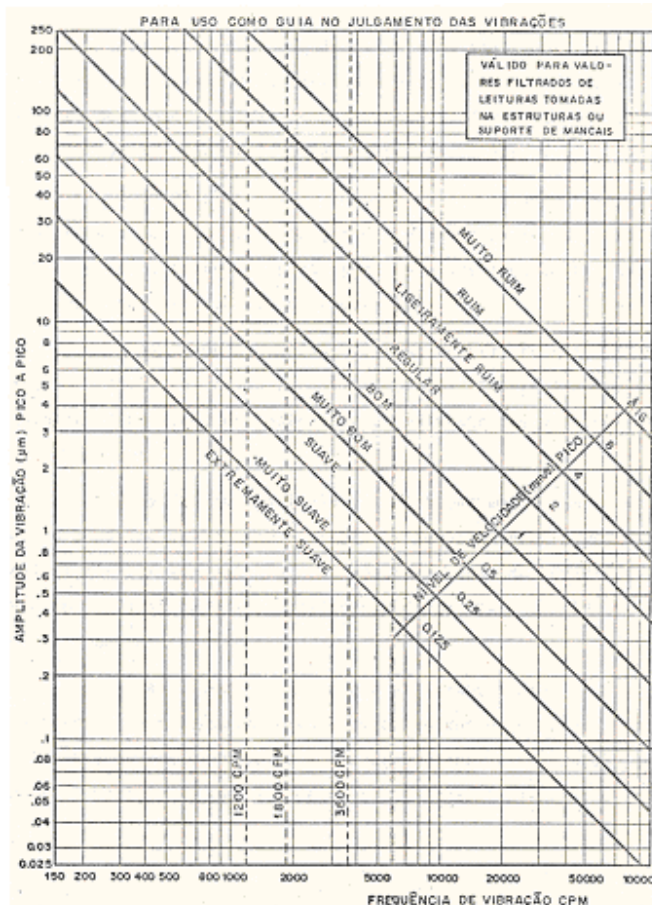


Figura 5.16 – Carta de severidade da IRD.

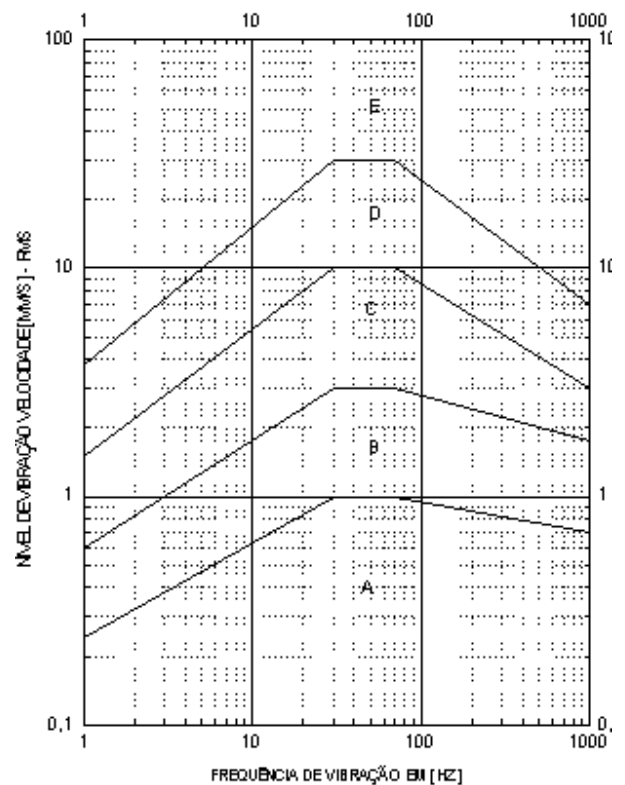


Figura 5.17 – Carta de Severidade de Almeida.

Solução:

$$\beta = [F_1 - F_0] \quad \therefore \beta = [65 - 110] \quad \therefore \beta = 45^\circ$$

$$V_{ef} = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_1V_0\cos\beta}$$

$$V_{ef} = \sqrt{(3,8)^2 + (3,44)^2 - 2 \times 3,8 \times 3,44 \times \cos(45)} \quad \therefore \quad V_{ef} = 2,79 \text{ mm/s}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{V_1}{V_{ef}} \cdot \sin \beta\right)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{3,44}{2,79} \cdot \sin(45)\right) \quad \therefore \quad \alpha \cong 60,7^\circ$$

A massa de correção será:

$$m_c = m_t \frac{V_0}{V_{ef}} \quad \therefore \quad m_c = 50 \times \frac{3,8}{2,79} \quad \therefore \quad m_c \cong 68,1 \text{ g}$$

Como $F_1 < F_0$ a massa de correção deverá ser colocada a $60,7^\circ$ da posição da massa de teste, com giro no mesmo sentido de rotação do rotor, e distante 250 mm do centro do rotor. Na prática retira-se a massa de teste posicionada na posição identificada pelo número 9 e fixa-se a massa de correção na posição identificada com o número 7, o que corresponde a um ângulo de 60° e, portanto, muito próximo do valor calculado. A Fig. 5.18 mostra a resolução vetorial do exemplo de cálculo aqui apresentado.

Exemplo 5.2 – Balanceamento Estático sem Medição de Fase: Balancear o rotor da Fig. 5.12 pelo método dos três pontos. São dados:

$$V_0 = 15 \text{ } \mu\text{m}; \quad m_t = 40 \text{ g}; \quad V_1 = 25 \text{ } \mu\text{m}; \quad V_2 = 10,25 \text{ } \mu\text{m}; \quad V_3 = 34,07 \text{ } \mu\text{m}$$

Solução: Para se obter a solução pelo método gráfico apresentado anteriormente, é necessário inicialmente a escolha de uma escala conveniente, por exemplo $1 \text{ } \mu\text{m}$ para 2 mm. Em seguida trace os círculos tomando como raio os valores das vibrações medidas e identifique a região delimitada pelos três arcos de círculos cujos os raios são V_1 , V_2 e V_3 . Trace a linha R unindo o centro do círculo, cujo raio é V_0 , ao centro da região fechada.

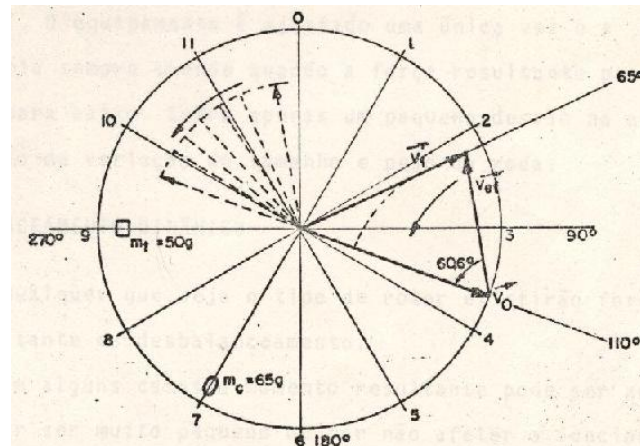


Figura 5.18 – Resolução vetorial do exemplo apresentado.

Feito o desenho, é possível determinar $V_{ef} = 20,3 \mu\text{m}$ (comprimento de R) e, então determinar a massa de correção como:

$$m_c = m_t \frac{V_0}{V_{ef}} \quad \therefore \quad m_c = 40 \times \frac{15}{20,3} \quad \therefore \quad m_c \cong 30 \text{ g}$$

Para efetivar o balanceamento basta colocar a massa de correção na posição da linha R, ou seja, a 90 ° da posição 1.

É possível se colocar a massa de correção em uma distância radial diferente da distância usada pela massa de teste mas é necessário corrigir a massa de correção de acordo com a seguinte equação:

$$m_c^* = m_c \frac{r_c}{r_c^*} \quad (5.13)$$

onde r_c^* é a nova distância radial em que deverá ser fixada a massa corrigida m_c^* .

Exemplo 5.3 – Balanceamento em Dois Planos com Efeito Cruzado: As medidas de vibração obtidas num procedimento de balanceamento dinâmico com efeito cruzado são:

$$V_{1,0} = 7,2 \text{ mm/s} / 238^\circ$$

$$V_{2,0} = 13,5 \text{ mm/s} / 296^\circ$$

$$V_{1,1} = 4,9 \text{ mm/s} / 114^\circ$$

$$V_{2,1} = 9,2 \text{ mm/s} / 347^\circ$$

$$V_{1,2} = 4,0 \text{ mm/s} / 79^\circ$$

$$V_{2,2} = 12,0 \text{ mm/s} / 292^\circ$$

$$m_{t1} = 2,5 \text{ g} / 90^\circ$$

$$m_{t2} = 2,5 \text{ g} / 90^\circ$$

Solução: Os valores da medição são fornecidos em coordenadas polares (V, γ). Para resolver as Eq. (12) e (13) é conveniente escrever os valores de V em coordenadas cartesianas, como:

$$V = a + j b \quad \therefore \quad a = V \cos(\gamma) \quad e \quad b = V \cdot \sin(\gamma)$$

Por outro lado, é bom relembrar as regras das operações aritméticas com números complexos:

SOMA:

$$(a + j b) + (c + j d) = (a + c) + j (b + d)$$

SUBTRAÇÃO:

$$(a + j b) - (c + j d) = (a - c) + j (b - d)$$

MULTIPLICAÇÃO:

$$(a + j b) \cdot (c + j d) = (a \cdot c - b \cdot d) + j (b \cdot c + a \cdot d)$$

DIVISÃO:

$$\frac{(a + j b)}{(c + j d)} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d)}{(c^2 + d^2)} + j \frac{(b \cdot c - a \cdot d)}{(c^2 + d^2)}$$

Escrevendo os valores de vibração medidos na forma cartesiana e substituindo na Eq.(5.11), temos:

$$Q_2 = \frac{(5,92 - j12,13)(1,82 + j10,60) - (3,82 - j6,12)(3,04 + j10,06)}{(3,04 + j10,06)(4,58 + j10,05) - (-1,42 + j1,00)(1,82 + j10,60)}$$

obtendo-se: $Q_2 = 0,1598 - j 1,1264$ ou $(Q_2, \gamma_2) = 1,1376 / -81,9^\circ$

Do mesmo modo, para a Eq. (13), temos:

$$Q_2 = \frac{(5,92 - j12,13)(1,82 + j10,60) - (3,82 - j6,12)(3,04 + j10,06)}{(3,04 + j10,06)(4,58 + j10,05) - (-1,42 + j1,00)(1,82 + j10,60)}$$

obtendo-se: $Q_1 = 0,7468 + j 0,9033$ ou $(Q_1, \gamma_1) = 1,172 / 50,5^\circ$

Lembre-se que para converter Q_1 e Q_2 em coordenadas polares devemos usar:

$$Q = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{para } a > 0 \quad \gamma = \arctg \frac{b}{a} \quad -90^\circ < \gamma < 90^\circ$$

$$\text{para } a < 0 \quad \gamma = 180 + \arctg \frac{b}{a} \quad 90^\circ < \gamma < 270^\circ$$

Assim, considerando que a mesma massa teste foi usada em cada plano e na mesma posição de 90° , as massas de correção e suas respectivas posições são:

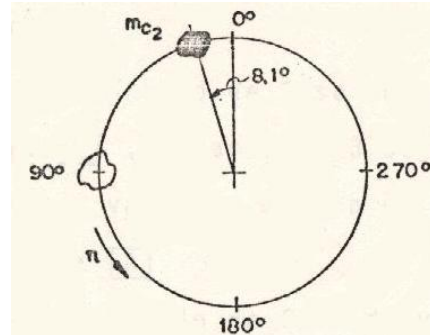
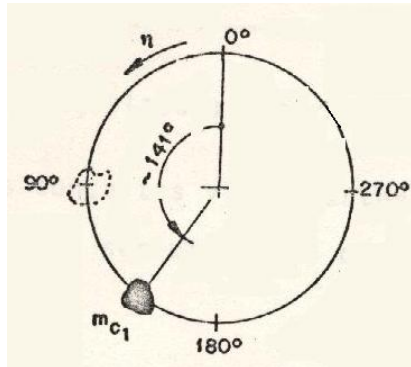
$$m_{c1} = Q_1 m_{t1} \quad \therefore \quad m_{c1} = 1,172 \times 2,5 \quad \therefore \quad m_{c1} = 2,93 \text{ g}$$

que deve ser colocada a $50,4^\circ$ da posição de m_{t1} no sentido de rotação, portanto em $140,4^\circ$ ($90^\circ + 50,4^\circ$) contados da referência zero.

$$m_{c2} = Q_2 m_{t2} \quad \therefore \quad m_{c2} = 1,1376 \times 2,5 \quad \therefore \quad m_{c2} = 2,84 \text{ g}$$

que deve ser colocada a $81,9^\circ$ da posição de m_{t2} no sentido oposto à rotação, portanto em $8,1^\circ$ ($90^\circ - 81,9^\circ$) contados da referência zero.

As figuras a seguir apresentadas ilustram as posições das massas de teste e correção para os dois planos.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ALMEIDA, M. T. e GÓZ, R. D., Curso de Balanceamento de Rotores, Itajubá: FUPAI, 1993.

DIMAROGONAS, A. D. and HADDAD, S., Vibration for Engineers, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1992.

EHRICK, F. E., Handbook of Rotor Dynamics, New York: Mc. Graw Hill, 1993.

INMAN, D. J., Engineering Vibration, 3th ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, 2008.

RAO, S. S., Mechanical Vibrations, 4th ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., Upper Saddle River. 2004.

SOEIRO, N. S., Notas de Aula de Vibrações Mecânicas. Belém: UFPA-ITEC-FEM, 2007.