Esercizi linguaggi non regolari

ESERCIZIO 2.1. *Si dimostri che non è regolare il linguaggio*

$$L = \{ 0^n 1^m 0^{m+n} \mid m, n \geq 0 \}$$

Condizioni di appartenenza

$$0^a 1^b 0^c \in L \iff c = a + b$$

Dimostro che il pumping lemma non vale:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists z \in L . \ |z| \geq k . \ \forall uvx = z . \begin{cases} |uv| \leq k \\ |v| > 0 \\ \exists i \in \mathbb{N} \ uv^i w \notin L \end{cases} \iff L \notin Reg$$

Prendo $k \in \mathbb{N}$ e $n = m = k$. Considero una stringa nel linguaggio:

$$z = 0^k 1^k 0^{2k}$$

Ripeto la stringa i volte

$$z_i = 0^{k + (i-1)|v|} 1^k 0^{2k}$$

Cerco un indice che la faccia uscire dal linguaggio

- $z_2 = 0^{k+|v|} 1^k 0^{2k}$

$$z_2 \in L \iff 2k = k + |v| + k$$

$$\iff \cancel{2k} = \cancel{2k} + |v|$$

$$\iff |v| = 0$$ Viola le condizioni del pumping lemma $\Rightarrow z_2 \notin L$

Quindi L non é regolare

ESERCIZIO 2.2. *Dimostrare che non è regolare il linguaggio*

$$L = \left\{ 0^n 0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$L = \{ 0^n 0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 0^{n+2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Condizioni di appartenenza

$$0^{a+b} \in L \iff b = 2^a$$

Considero $k \in \mathbb{N}$ e $n = k$. Prendo una stringa nel linguaggio piú lunga di k

$$z = 0^{k+2^k}$$

L'unica suddivisione possibile é $uv \in 0^k$ perché $|uv| \leq k$

Ripeto v i volte

$$z_i = 0^{k + (i-1)|v| + 2^k}$$

Cerco un indice che faccia uscire la stringa dal linguaggio

$$z_2 = 0^{\overbrace{k+|v|}^{a}} \; {\underbrace{2^k}_{b}} \qquad (b = 2^a)$$

$$z_2 \in L \iff 2^k = 2^{k+|v|}$$

$$\iff k = k+|v|$$

$$\iff |v| = 0$$ Viola i vincoli del pumping lemma

$z_2 \notin L$, quindi L non é regolare

ESERCIZIO 2.3. *Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio non è regolare.*

$$L = \left\{ x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il numero di occorrenze di } 0 \text{ in } x \text{ è} \\ \text{uguale al numero di occorrenze di } 1 \text{ meno uno} \end{array} \right\}$$

Condizioni di apparrenenza

$$x \in L \iff |0|_x = |1|_x - 1$$

Considero $k \in \mathbb{N}$ e prendo una stringa nel linguaggio più grande di k

$$z = 0^k 1^{k+1}$$

L'unica suddivisione possibile è $uv \in 0^k$ perchè $|uv| \leq k$. Ripeto v i volte

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^{k+1}$$

Cerco un indice che faccia uscire la stringa dal linguaggio

$$z_2 = 0^{k+|v|} 1^{k+1}$$

$$z_2 \in L \iff |0|_{z_2} = |1|_{z_2} - 1$$

$$\iff k+|v| = k+1-1$$

$$\iff |v| = 0$$ Viola i vincoli del pumping lemma

Quindi $z_2 \notin L$, di conseguenza L non è regolare.

ESERCIZIO 2.4. *Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio non è regolare.*

$$L = \{ 0^m 1^n 1^n 0^m \mid m, n \in \mathbb{N},\; m+n > 0 \}$$

$$L = \{ 0^m 1^n 1^n 0^m \mid m, n \in \mathbb{N},\; m+n > 0 \}$$

$$= \{ 0^m 1^{2n} 0^m \mid m, n \in \mathbb{N},\; m+n > 0 \}$$

Condizioni di appartenenza

$$0^a 1^b 0^c \in L \iff a=c \land a+b>0 \land b \in 2\mathbb{N}$$

Considero $k \in \mathbb{N}$ e $a=c=k, b=k+1$ per non imporre nessun vincolo su k.
Prendo una stringa nel linguaggio più lunga di k

$$z = 0^k 1^{2k+2} 0^k$$

L'unica suddivisione possibile è quella in cui uv appartiene al primo gruppo di 0 perchè $|uv| \leq k$.
Ripeto v i volte

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^{2k+2} 0^k$$

Cerco un indice che faccia uscire la stringa dal linguaggio

$$z_0 = 0^{k-|v|} 1^{2k+2} 0^k$$

$$z_0 \in L \iff \overset{\times}{k-|v| = k} \land \overset{\checkmark}{2k+2 \in 2\mathbb{N}} \land \overset{\checkmark}{k+k+1>0}$$

$$\iff |v| = 0$$ Viola i vincoli del pumping lemma

$z_0 \notin L$ quindi il linguaggio non è regolare.

Esercizio 2.5. *Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio non è regolare.*

$$L = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ è palindrome} \}$$

$$L = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ è palindrome} \}$$
$$= \{ x = a\,a^R \mid a \in \{0,1\}^* \}$$

Condizioni di appartenenza

$$x = ab \in L \iff b = a^R$$