Esame 03/02/2025

1° Parte

- **(6pt)** Classificare, SENZA dimostrarlo formalmente (Fornire solo automa o grammatica e/o stringa per il Pumping Lemma **commentando brevemente**), al variare di $m, h \in \mathbb{N}$ i seguenti linguaggi sull'alfabeto $\{0, 1\}$:

$$A_{m,h} = \{\ 0^n 1^m 0^h \mid n \in 2m\mathbb{N} + m\ \}\quad B_{m,h} = \{\ 0^h 1^m 0^n \mid n \in 3m\mathbb{N} + m\ \}$$

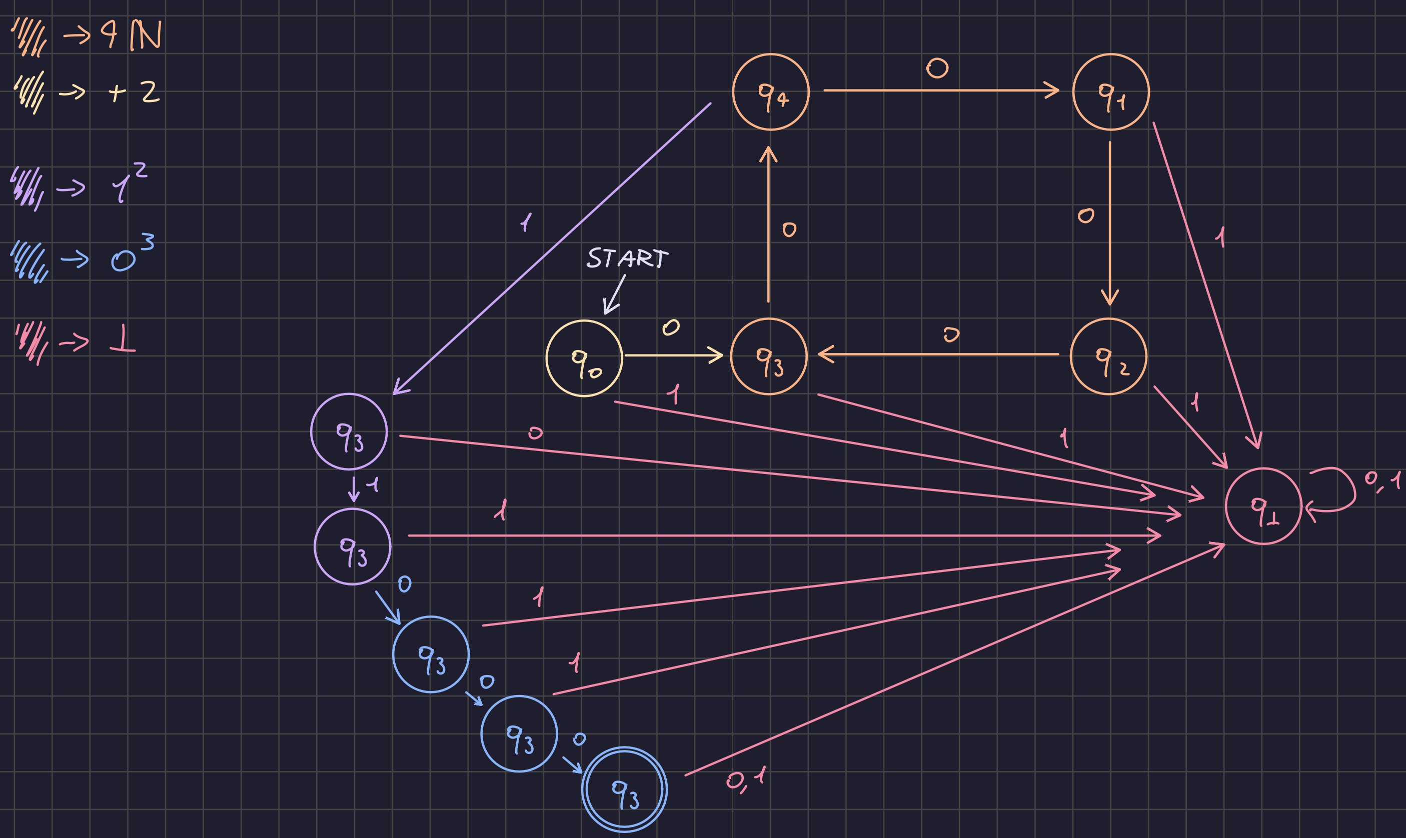
In particolare classificare $A_{2,3}$ e $B_{2,3}$.

$A_{0,0} = \{0\} = A_{0,1}$ Se $m = 0 \rightarrow$ Linguaggio costante $\rightarrow A_{0,h} \in REG$

$A_{1,0} = \{0^n 1 \mid n \in 2\mathbb{N}+1\}$

$A_{2,3} = \{0^n 1^2 0^3 \mid n \in 4\mathbb{N}+2\}$

Questo linguaggio è intuitivamente regolare perchè si può riconoscere con una memoria finita siccome non ci sono dipendenze tra gruppi di simboli.
Questo linguaggio riconosce tutte le stringhe con un numero iniziale di zeri uguale ai multipli di 4 a cui e stato sommato 4 e che ha alla fine 2 uni e 3 zeri. L'automa è il seguente



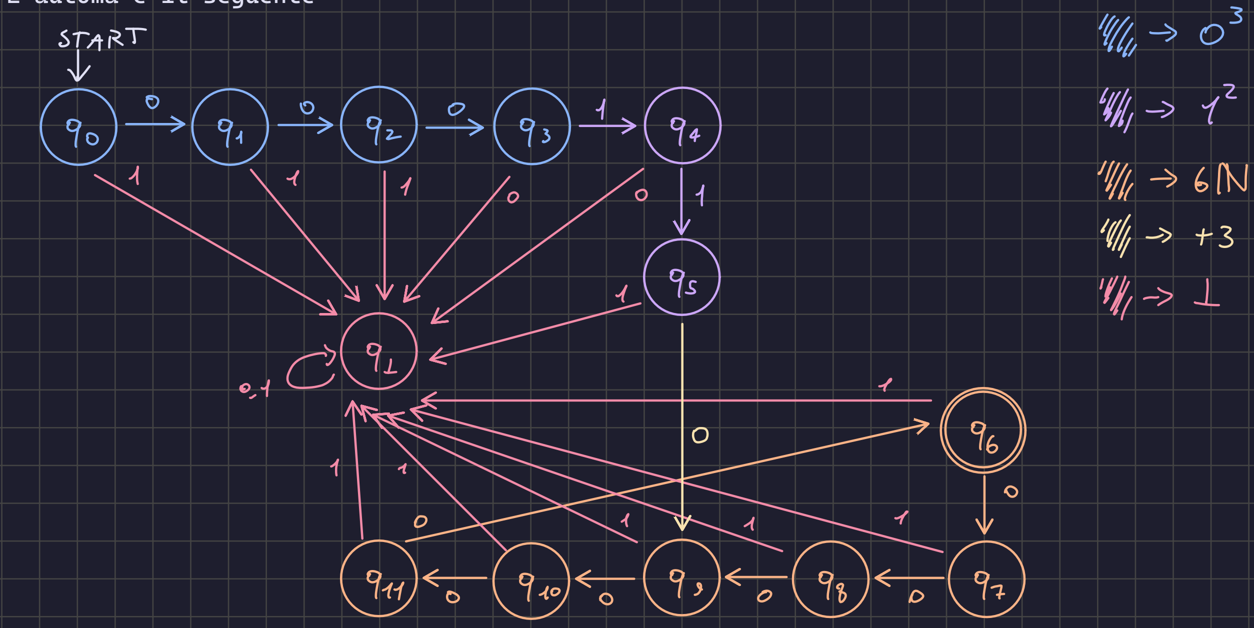
$A = \{0^n 1^m 0^h \mid n \in 2m\mathbb{N}+m,\ m, h \in \mathbb{N}\}$

Tutti i linguaggi formati dall'insieme A sono regolari perchè tutti i gruppi di simboli sono indipendenti e la funzione di n è calcolabile tramite una macchina a stati finiti.

$B_{m,h} = \{0^h 1^m 0^n \mid n \in 3m\mathbb{N} + m\}$

$B_{2,3} = \{0^3 1^2 0^n \mid n \in 6\mathbb{N} + 3\}$

Anche questo linguaggio è intuitivamente regolare perchè si può riconoscere con una memoria finita siccome non ci sono dipendenze tra gruppi di simboli.
Questo linguaggio riconosce tutte le stringhe con 3 zeri e 2 uni all'inizio e seguiti da un numero di zeri multiplo di 6 a cui viene sommato 3.
L'automa è il seguente



$B = \{0^h 1^m 0^n \mid n \in 3m\mathbb{N} + m,\ m, h \in \mathbb{N}\}$

Tutti i linguaggi formati dall'insieme B sono regolari perchè tutti i gruppi di simboli sono indipendenti e la funzione di n è calcolabile tramite una macchina a stati finiti.

Classificare nella gerarchia di Chomsky i seguenti linguaggi motivando formalmente la risposta[1] :

- **(12pt)** Classificare La seguente famiglia di linguaggi al variare di $m \in \mathbb{N}$:

$$D_m = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{\ 0^n 1^m 0^{2h} \mid\ n \in 2m\mathbb{N} + 3h\ \}$$

In particolare dimostrare la classificazione per D_3

$D_0 = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{0^{n+2h} \mid n = 3h\} = \{0^{5h} \mid h \in \mathbb{N}\} \in REG$

$D_1 = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{0^n 1\ 0^{2h} \mid n \in 2\mathbb{N} + 3h\} \in CF$ Perchè il primo gruppo di zeri dipende dall'ultimo

$D_2 = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{0^n 1 1 0^{2h} \mid n \in 4\mathbb{N} + 3h\} \in CF$ Perchè il primo gruppo di zeri dipende dall'ultimo

$D_3 = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{0^n 1^3 0^{2h} \mid n \in 6\mathbb{N} + 3h\} = \{0^n 1^3 0^{2h} \mid h \in \mathbb{N},\ n \in 6\mathbb{N} + 3h\}$

Questo linguaggio è intuitivamente context free perchè il primo gruppo di zeri dipende dall'ultimo.
La grammatica che genera questo linguaggio è la seguente:

$G = S \to 0^6 S \mid 000S00 \mid 1^3$

Per dimostrare che questa grammatica genera il linguaggio deve valere: $L = L(G)$

$$x \in L \Leftrightarrow S \Rightarrow_* x$$

1) $L \subseteq L(G)$

La tesi da dimostrare è: $x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x$

Dimostro per induzione sulla lunghezza della stringa:

Caso base

Considero la stringa di lunghezza minima che è nel linguaggio

$$|x| = 3 \rightarrow x = 111 \in L \rightarrow S \rightarrow 111$$

Esiste una produzione per la stringa x

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per stringhe di lunghezza minore di n e dimostro che vale per stringhe di lunghezza n+1:

Ipotesi induttiva $\forall x \in L . |x| \leq n . \ x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x$

con x della forma $\exists j \in \mathbb{N} . \exists i \in 6\mathbb{N}+3j . \ x = 0^i 1^3 0^{2j}$

Considero una stringa x di lunghezza n nel linguaggio, la espando per formare una stringa x' di lunghezza maggiore $|x'| > |x|$

$\exists x . |x| = n$

Ci sono due modi per espandere la stringa x e creare x':

1) Si aggiungono 6 zeri a sinistra

$$x = 0^{i-6} 1^3 0^{2j} \in L \rightarrow x' = 0^i 1^3 0^{2j} \quad \wedge \ |x'| > |x|$$

So che esiste una derivazione che genera x per ipotesi induttiva

$$x \in L \rightarrow S \overset{ii}{\Rightarrow_*} 0^{i-6} S 0^{2j} \Rightarrow 0^i 111 0^{2j} = x$$

Posso partire da questa derivazione per creare x'
Dimostro che esiste una derivazione che genera x'.

$$S \overset{ii}{\Rightarrow_*} 0^{i-6} S 0^{2j} \Rightarrow 0^{i-6} 0^6 S 0^{2j} \Rightarrow 0^i 1^3 0^{2j} = x' \in L \text{ perché } j \in \mathbb{N} \wedge i \in 6\mathbb{N}+3j$$

2) Si aggiungono 3 zeri a sinistra e 2 a destra

$$x = 0^{i-3} 1^3 0^{2j-2} \rightarrow x' = 0^i 1^3 0^{2j} \quad |x'| > |x|$$

So che esiste una derivazione che genera x per ipotesi induttiva

$$x \in L \rightarrow S \overset{ii}{\Rightarrow_*} 0^{i-3} S 0^{2j-2} \Rightarrow 0^{i-3} 111 0^{2j-2} = x$$

Dimostro che esiste una derivazione che genera x'.

$$S \overset{ii}{\Rightarrow_*} 0^{i-3} S 0^{2j-2} \Rightarrow 0^{i-3} 0^3 S 0^2 0^{2j-2} \Rightarrow 0^i 1^3 0^{2j} = x' \in L \text{ perché } j \in \mathbb{N} \wedge i \in 6\mathbb{N}+3j$$

2) $L(G) \subseteq L$

La tesi da dimostrare è: $S \Rightarrow_n x \rightarrow x \in L$

Dimostro per induzione sulla lunghezza della derivazione:

Caso base

Considero la derivazione minima che generi una stringa terminale

$$n = 1 \rightarrow S \Rightarrow 111 \rightarrow 111 \in L$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza minore di n e dimostro che vale per derivazioni di lunghezza n+1:

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}. k \leq n. \ S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L \ \wedge \ \exists j \in \mathbb{N}. \exists i \in 6\mathbb{N}+3j. \ x = 0^i 1^3 0^{2j}$

Sia $S \Rightarrow_n x$ una derivazione lunga n, allora per l'ipotesi induttiva x è nel linguaggio ed è della forma:
$\exists j \in \mathbb{N}. \exists i \in 6\mathbb{N}+3j. \ x = 0^i 1^3 0^{2j}$

$$S \Rightarrow_n x \equiv S \Rightarrow_{n-1} 0^i S 0^{2j} \Rightarrow 0^i 111 0^{2j} = 0^i 1^3 0^{2j} \in L$$

Dimostro che le stringhe generate da derivazioni di lunghezza n+1 sono nel linguaggio. Si distinguono i seguenti casi.

1) $S \Rightarrow_{n-1} 0^i S 0^{2j} \Rightarrow 0^i 0^6 S 0^{2j} \Rightarrow 0^{i+6} 111 0^{2j} = x' \in L$ perché:

$i \in 6\mathbb{N}+3j \rightarrow i+6 \in 6\mathbb{N}+3j$ perché $i+6$ é multiplo di 6 e j é rimasto invariato

2) $S \Rightarrow_{n-1} 0^i S 0^{2j} \Rightarrow 0^i 0^3 S 0^2 0^{2j} \Rightarrow 0^{i+3} S 0^{2j+2} \Rightarrow 0^{i+3} 111 0^{2j+2} = x' \in L$ perché:

La quantità di zeri a sinistra deve essere sempre 3 volte tante quante sono le coppie di zeri a destra

$$|0^i| = \frac{3}{2}|0^{2j}| \wedge |0^i| \in 6\mathbb{N} \rightarrow i = \frac{3}{2} \cdot 2j = 3j \wedge i \in 6\mathbb{N}$$
$$\rightarrow i = 3j \wedge i \in 6\mathbb{N}$$

Quindi se si aggiungono 3 zeri a sinistra e due a destra l'uguaglianza deve rimanere vera:

$$|0^{i+3}| = \frac{3}{2}|0^{2j+2}| \rightarrow i+3 = \frac{3}{2}(2j+2) = 3(j+1) \wedge i \in 6\mathbb{N}$$
$$\rightarrow i+3 = 3(j+1) \wedge i \in 6\mathbb{N}$$
$$\rightarrow i = 3(j+1) - 3 \wedge i \in 6\mathbb{N}$$
$$\rightarrow i = 3(j+1-1) \wedge i \in 6\mathbb{N}$$
$$\rightarrow i = 3j \wedge i \in 6\mathbb{N}$$

La condizione rimane valida.

Ho dimostrato che il linguaggio è context free. Ora devo dimostrare che il linguaggio non è regolare, per farlo dimostro che non vale il pumping lemma siccome è una condizione necessaria affinchè un linguaggio sia regolare. Per farlo deve valere la sua negazione:

$$\neg \text{Pumping Lemma} \Rightarrow L \notin RE$$

La negazione del pumping lemma è la seguente:

$$\forall k \in \mathbb{N}. \exists z \in L. |z| \geq k. \forall u, v, w \in \{0,1\}^*. \begin{cases} z = uvw \\ |uv| \leq k \\ |v| > 0 \end{cases} \wedge \ \exists i. \ uv^iw \notin L$$

Dimostrazione del linguaggio non RE

Prendo $k \in \mathbb{N}$ e considero una stringa nel linguaggio più lunga di k

$$z = 0^{l} 1^{3} 0^{2k} \quad \text{con } j = k$$

Le condizioni di appartenenza al linguaggio sono:

$$z \in L \Leftrightarrow |0^{l}| = \frac{3}{2}|0^{2k}| \wedge l \in 6\mathbb{N} \equiv l = 3k \wedge l \in 6\mathbb{N}$$

Cerco un indice per pompare la stringa che la faccia uscire dal linguaggio. Le suddivisioni possibili sono:

- $uv \in 0^{i}$

  $$z_i = 0^{l+|v|(i-1)} 1^{3} 0^{2k}$$

  - $i = 2 \Rightarrow z = 0^{l+|v|} 1^{3} 0^{2k}$

    $|0^{l+|v|}| = \frac{3}{2}|0^{2k}| \Rightarrow l + |v| = 3k \Rightarrow l = 3k + |v|$ Viola le condizioni di appartenenza

    $l = 3k + |v| \neq 3k$

- $u \in 0^{i} \wedge v \in 1^{3}$ Questo caso è banale perchè per qualsiasi indice diverso da 1 il numero di uni è diverso da 3, quindi la stringa non è nel linguaggio.

- $u \in 0^{i} 1^{3} \wedge v \in 0^{2k}$

  $$z_i = 0^{l} 1^{3} 0^{2j + |v|(i-1)}$$

  - $i = 2$

    $|0^{l}| = \frac{3}{2}|0^{2k+|v|}| \Rightarrow l = \frac{3}{2}(2k + |v|) \Rightarrow l = 3k + \frac{3}{2}|v|$ Viola le condizioni di appartenenza

    $l = 3k + \frac{3}{2}|v| \neq 3k$

Ho quindi dimostrato che il linguaggio non è regolare.