

# Introduzione alla Meccanica Quantistica per il Quantum Computing

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2024/2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Formalismo della meccanica quantistica</b>	<b>2</b>
2.1	Principi . . . . .	2
2.2	Operazioni . . . . .	4
2.2.1	Prodotto "interno" . . . . .	4
2.2.2	Operazioni illecite . . . . .	5
2.2.3	Prodotto esterno . . . . .	5
2.2.4	Operatore aggiunto . . . . .	6
2.3	Rappresentazione matriciale . . . . .	6
2.3.1	Ket di base . . . . .	6
2.4	Teoria della misura . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Quantizzazione dell'esperimento Stern-Gerlach</b>	<b>8</b>
3.1	Operatori . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Processi della misura</b>	<b>9</b>
4.1	Teoria della misura . . . . .	9
4.2	Osservabili compatibili . . . . .	10
4.3	Osservabili incompatibili . . . . .	10
4.4	Postulati (Interpretazione di Copenhagen) . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Dalla meccanica quantistica al quantum computing</b>	<b>12</b>
5.1	Computazione quantistica . . . . .	12
5.2	Comunicazione quantistica . . . . .	13
5.3	Calcolo quantistico . . . . .	13
5.3.1	Rappresentazione geometrica del Qubit . . . . .	14
5.4	Qubit . . . . .	14
5.4.1	Porta di Hadamard . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Entanglement</b>	<b>16</b>
6.1	Stato singoletto di spin . . . . .	16

# 1 Introduzione

TODO

## 2 Formalismo della meccanica quantistica

Deriviamo il formalismo partendo dall'esperimento di Stern-Gerlach e di Feynman utilizzando la notazione di Dirac.

### 2.1 Principi

- Ad un **sistema fisico** corrisponde uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n$ , dove  $n$  è il numero di gradi di libertà del sistema quanto-meccanico. Il grado di libertà è il numero di alternative, o scelte, a disposizione del sistema (da qui deriva il termine "quantistico", siccome le alternative sono quantizzate).

$$\text{Sistema fisico} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

Ad esempio nell'esperimento di Stern-Gerlach la misura è lo spin di un atomo che può avere solo due valori, quindi  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , ovvero  $n = 2$ .

Nell'esperimento di Feynman con la doppia fenditura il sistema è una particella che può passare per una delle due fenditure, quindi  $n = 2$ . Se oltre al percorso in cui è passato l'atomo si vuole sapere anche lo spin, allora il grado di libertà aumenta.

I sistemi con  $n = 2$  si chiamano **sistemi a due stati**.

- Allo **stato fisico** corrisponde un vettore di stato dello spazio vettoriale complesso chiamato **Ket**. Nella notazione di Dirac il vettore di stato è indicato con  $|\alpha\rangle$ . Questo vettore è definito a meno di una costante, quindi:

$$|\alpha\rangle \iff c|\alpha\rangle$$

sono lo stesso stato e ciò significa che il Ket è **normalizzato** e sarà un vettore unitario.

Ad esempio un atomo di argento con un certo spin rappresenta uno stato fisico. E il Ket contiene tutte le informazioni riguardanti la direzione ("raggi") che si possono avere su quell'atomo.

- Un **osservabile** è una variabile fisica che si può misurare. All'osservabile corrisponde un operatore dello spazio  $\mathbb{C}^n$  che agisce sui Ket e restituisce un altro Ket:

$$\mathcal{A}|\alpha\rangle \quad \text{dove } \mathcal{A} \text{ è l'operatore che agisce su } \alpha$$

(potrebbero essere matrici se si trova una base ad esempio)

Ci sono degli operatori importanti, cioè quelli che agendo su un Ket  $|\alpha_i\rangle$  restituiscono un vettore parallelo ad  $|\alpha_i\rangle$  e quindi sono **autoKet** (si può pensare

agli autovettori dell'algebra lineare):

$$\underbrace{\mathcal{A} |a_i\rangle}_{\text{autoKet} \leftrightarrow \text{autostato}} = \underbrace{a_i}_{\text{autovalore}} |a_i\rangle$$

L'oggetto risultante rappresenta lo stesso stato fisico, siccome è solo moltiplicato per una costante. L'insieme degli autoKet e autostati è rappresentato come:

$$\{|a_i\rangle\}; \{a_i\}$$

Ad esempio nell'esperimento di Stern-Gerlach si aveva l'operatore  $S_z$  che rappresentava la misura dello spin lungo l'asse  $z$ .

$$\{S_z; \pm\}; \left\{ \pm \frac{\hbar}{2} \right\}$$

nell'esperimento si ha che l'operatore  $S_z$  che agisce sullo stato a spin in su restituisce:

$$S_z |S_z; +\rangle = \frac{\hbar}{2} |S_z; +\rangle$$

l'operatore  $S_z$  agisce sullo stato a spin in giù restituisce:

$$S_z |S_z; -\rangle = -\frac{\hbar}{2} |S_z; -\rangle$$

Nell'esperimento di Stern-Gerlach i due autoKet di  $S_z$  sono una base dello spazio  $\mathbb{C}^2$  e quindi si può scrivere un qualsiasi Ket come combinazione lineare di questi due Ket:

$$\begin{aligned} |S_x; \pm\rangle \\ |S_y; \pm\rangle \end{aligned}$$

Un generico stato rappresentato come combinazione lineare di questi Ket è:

$$|\alpha\rangle = c_+ |S_z; +\rangle + c_- |S_z; -\rangle$$

o anche la seguente notazione (qbit):

$$|\alpha\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

- Qualsiasi **generico stato fisico** del sistema si può rappresentare come **sovrapposizione di autostati**, cioè una combinazione lineare degli autoKet.

$$|\alpha\rangle = \sum_i^n c_i |a_i\rangle$$

(questo sviluppo è unico per il sistema  $a_i$ ) dove  $n$  è il grado di libertà e:

$$\mathcal{A} |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle$$

Finchè non viene effettuata una misura, il sistema è in uno stato di sovrapposizione e non si può sapere il suo stato. Trovare tutti gli autostati di un

sistema si chiama problema di quantizzazione.

## 2.2 Operazioni

### 2.2.1 Prodotto "interno"

- Esiste una corrispondenza uno ad uno tra lo spazio degli stati (Ket) e un suo spazio duale (Bra):

$$\begin{array}{ccc} |\alpha\rangle & \xleftrightarrow{\text{Duale}} & \langle\alpha| \\ \text{Ket} & & \text{Bra} \end{array}$$

La base dei Ket è in corrispondenza duale con la base dei Bra:

$$\underbrace{\{|a_n\rangle\}}_{\text{autoKet}} \xleftrightarrow{\text{C.D.}} \underbrace{\{\langle a_n|\}}_{\text{autoBra}}$$

ad esempio:

$$C|\alpha\rangle \xleftrightarrow{\text{C.D.}} C^* \langle\alpha|$$

dove  $C^*$  è il complesso coniugato di  $C$ . Questo vuol dire che ad una somma di Ket corrisponde la somma dei Bra.

Vogliamo definire un prodotto tra stati fisici.

**Definizione 2.1** (Prodotto interno). È definito **prodotto interno** il prodotto tra un Ket e un Bra:

$$\underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{\text{Notazione di Dirac}} = (\langle\alpha|) \cdot (|\beta\rangle)$$

**Proprietà:**

- $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$
- $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ , quindi  $\langle\alpha|\alpha\rangle$  è reale.

**Definizione 2.2** (Ket ortogonali). Due Ket sono **ortogonali** quando:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = 0$$

Con questo operatore si possono normalizzare gli stati fisici, che sono definiti a meno di una costante.

**Definizione 2.3** (Normalizzazione). La normalizzazione di uno stato fisico si esegue come:

$$|\hat{\alpha}\rangle = \frac{|\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}$$

Di conseguenza

$$\langle \hat{\alpha} | \hat{\alpha} \rangle = 1$$

### 2.2.2 Operazioni illecite

Alcune operazioni nella meccanica quantistica sono vietate, perchè non hanno significato.

- Un operatore non può agire su un Ket da destra:

$$\begin{aligned} A |\alpha\rangle & \quad \checkmark \\ |\alpha\rangle A & \quad \times \end{aligned}$$

Analogamente un osservabile non può agire da sinistra su un Bra:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | A & \quad \checkmark \\ A \langle \alpha | & \quad \times \end{aligned}$$

- Non ha significato moltiplicare due Ket:

$$|\alpha\rangle |\beta\rangle \quad \times$$

Non ha significato moltiplicare due Bra:

$$\langle \alpha | \langle \beta | \quad \times$$

La notazione  $|\alpha\rangle |\beta\rangle$  si può utilizzare solo quando si hanno spazi fisici diversi (due variabili diverse dello stesso sistema o due sistemi diversi). Ad esempio se si hanno 2 particelle si può rappresentare il sistema fisico di ogni singola particella con un Ket diverso:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_1 \\ |\alpha\rangle_2 \end{aligned}$$

ma si può anche rappresentare il sistema fisico totale di entrambe le particelle con la seguente notazione:

$$|\alpha\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 = |\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2$$

Nell'esperimento di Feynman avremo lo stato fisico del percorso:

$$|\text{Percorso}\rangle$$

ma se si vuole rappresentare il percorso e lo spin si avrà:

$$|\text{Percorso}\rangle \otimes |\text{Spin}\rangle = |\text{Percorso}\rangle |\text{Spin}\rangle$$

### 2.2.3 Prodotto esterno

In meccanica quantistica ha senso definire un prodotto esterno:

$$|\alpha\rangle \langle \beta|$$

Questo oggetto è un operatore.

**Teorema 2.1** (Assioma associativo della moltiplicazione).

$$(|\alpha\rangle \langle \beta|) |\psi\rangle = |\alpha\rangle (\langle \beta|\psi\rangle)$$

Secondo l'assioma associativo della moltiplicazione si ha che:

$$\underbrace{(|\alpha\rangle \langle \beta|)}_{\text{Operatore}} \underbrace{|\psi\rangle}_{\text{Ket}} = \underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{Ket}} \underbrace{(\langle \beta|\psi\rangle)}_{\text{Numero}}$$

Osserviamo che  $(|\beta\rangle \langle \alpha|)$  è un operatore

Ha agito come proiettore, proiettando il Ket  $|\psi\rangle$  sullo stato  $|\alpha\rangle$  (segue una rotazione di uno stato).

#### 2.2.4 Operatore aggiunto

**Definizione 2.4** (Operatore aggiunto). Si definisce operatore aggiunto l'operatore  $A^+$ . Ogni operatore che agisce su uno stato ha una corrispondenza uno ad uno con un operatore duale (operatore aggiunto) che agisce su un Bra:

$$A |\alpha\rangle \xleftrightarrow{\text{C.D.}} \langle \alpha| A^+$$

Se  $A = A^+$  allora l'operatore è **hermitiano** o **autoaggiunto**.

### 2.3 Rappresentazione matriciale

#### 2.3.1 Ket di base

Se  $A = A^+$ , allora

- Gli autovalori  $\{\alpha_i\}$  sono reali
- Gli autoKet  $\{|\alpha_i\rangle\}$  sono una base

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$$

e un ket arbitrario potrà essere espresso come sovrapposizione di autoket dell'osservabile  $A$ :

$$\begin{aligned} \text{Ket qualunque} &= \sum_i \text{autoKet di } A \\ &\Downarrow \\ |\alpha\rangle &= \sum_i c_i |\alpha_i\rangle \end{aligned}$$

L'oggetto  $c_i$  è la proiezione  $\langle \alpha_i | \alpha \rangle$ :

$$\langle \alpha_i | \alpha \rangle = \sum_i c_i \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle = c_i$$

ovvero:

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\alpha\rangle$$

Questa è la **relazione di completezza**, che dice che  $a_i$  è base dello spazio:

$$\sum |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbb{I}$$

Questo oggetto è il proiettore sul Ket di base  $|a_i\rangle$  e si può indicare anche come:

$$|a_i\rangle \langle a_i| = \Lambda_{a_i}$$

Da questo si deriva che la somma dei coefficienti al quadrato fa 1:

$$\sum |c_i|^2 = 1$$

perchè:

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\alpha\rangle &= 1 \\ &= \langle \alpha| \left( \sum |a_i\rangle \langle a_i| \right) |\alpha\rangle \\ &= \sum_i \langle \alpha|a_i\rangle \langle a_i|\alpha\rangle \\ &= \sum |c_i|^2 = 1 \end{aligned}$$

## 2.4 Teoria della misura

In pratica ogni Ket si può rappresentare come un vettore colonna:

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

dove le componenti  $\alpha_n$  sono i coefficienti della sovrapposizione  $\langle a_i|\alpha\rangle$

Ogni Bra è un vettore riga:

$$\langle \alpha| = (\alpha_1^* \quad \cdots \quad \alpha_n^*)$$

dove le componenti sono il complesso coniugato delle componenti del Ket.

La componente  $\langle \alpha|\beta\rangle$  si può calcolare come un prodotto scalare:

$$\langle \alpha|\beta\rangle = (\alpha_1^* \quad \cdots \quad \alpha_n^*) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$|\alpha\rangle \langle \beta| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1^* \quad \cdots \quad \beta_n^*)$$



In entrambi i casi si ottiene una matrice quadrata  $N \times N$ .

Qualunque operatore  $B$  è rappresentato da una matrice quadrata  $N \times N$  e agisce sui Bra (a destra) o sui Ket (a sinistra):

$$B = \sum_i \sum_j \underbrace{|a_i\rangle \langle a_j| B |a_j\rangle \langle a_i|}_{N^2 \text{ numeri } B_{ij}} = \mathbb{B} \mathbb{I}$$

cioè si moltiplica per l'identità a destra e sinistra:

Nella base  $a_i$   $A = A^+$  è osservabile e la sua base è diagonale con elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

### 3 Quantizzazione dell'esperimento Stern-Gerlach

Scelgo i Ket di base:

$$|S_z; \pm\rangle$$

con la seguente notazione:

$$\{|+\rangle, |-\rangle\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle, |1\rangle$$

#### 3.1 Operatori

- Il più semplice operatore è l'operatore di completezza:

$$\mathbb{I} = |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|$$

- Operatore  $S_z$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} [|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|]$$

in forma matriciale:

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

- Autostati di  $S_z$ :

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle$$

$$S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

Uno stato arbitrario  $\alpha$  sarà dato dalla combinazione di autoKet di cui i coefficienti si trovano proiettando  $\alpha$  sugli autoKet:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= |+\rangle \overbrace{\langle +|\alpha\rangle}^{c_+} + |-\rangle \overbrace{\langle -|\alpha\rangle}^{c_-} \\ &= \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 4 Processi della misura

Il quadrato della funzione d'onda descrive la probabilità di trovare una particella in una certa posizione:

$$P = |\phi|^2$$

Se abbiamo due particelle e vogliamo calcolare la probabilità della somma delle ampiezze notiamo che:

- Se non misuro si ha interferenza:

$$\sum \phi \quad P = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

- Se misuro si ha che la probabilità è la somma delle probabilità:

$$P = \sum P$$

### 4.1 Teoria della misura

Prendiamo in considerazione la base  $|a_i\rangle$ , sappiamo che lo stato prima della misura è espresso come sovrapposizione di autostati:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad c_i = \langle a_i | \psi \rangle$$

1. Se faccio la misura di un osservabile  $A$  lo stato  $\psi$  **collassa** in un autostato di  $A$  con una certa probabilità  $P$  :

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Misura di } A} |a_i\rangle$$

il risultato della misura è  $a_i$ , cioè l'autovalore. Sono i possibili risultati della misura, **lo spettro dell'osservabile**.

La probabilità  $P$  di misurare  $a_i$  è data dal coefficiente dello sviluppo di  $|\psi\rangle$  al quadrato:

$$P = |c_i|^2 = |\langle a_i | \psi \rangle|^2 \quad \text{Con stato normalizzato}$$

**La misura in meccanica quantistica cambia lo stato del sistema.** Ad esempio nell'esperimento di Stern-Gerlach lo stato  $|\psi\rangle$  rappresenta lo spin di un atomo. Prima di misurare non sappiamo che stato abbia, cioè è in sovrapposizione. Attraverso un operatore misuriamo lo spin e la particella potrà dare come risultato l'autostato  $|+\rangle$  o l'autostato  $|-\rangle$ :

2. Se  $|\psi\rangle = |a\rangle$  è un autostato, allora la misura di  $A$  non lo cambia:

$$|a\rangle \xrightarrow{\text{Misura di } A} |a\rangle$$

Ad esempio nell'esperimento di Stern-Gerlach se dopo aver misurato lo spin  $S_z$  ho trovato l'autostato  $|+\rangle$  rifaccio la misura ritrovo lo stesso autostato ed è un risultato certo:

**Definizione 4.1** (Valore di aspettazione). Il **valore di aspettazione** di un osservabile  $A$  rispetto a  $|\psi\rangle$  è la media dei valori che si possono ottenere misurando  $A$  sullo stato  $|\psi\rangle$ :

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | (A | \psi \rangle)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \langle \psi | A | \psi \rangle &= \sum_i \sum_j \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \underbrace{A | a_j \rangle}_{a_j | a_j \rangle} \langle a_j | \psi \rangle \\ &= \sum_i a_i \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle \\ &= \sum_i a_i |\langle a_i | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

dove  $a_i$  è la misura e  $|\langle a_i | \psi \rangle|^2 = P$  è la probabilità di ottenerla.

## 4.2 Osservabili compatibili

$S_z, S_x$  ( $S_y$ ) non si possono misurare simultaneamente. Si vuole definire cosa significa che due osservabili siano compatibili.

**Definizione 4.2.** Dati due osservabili  $[A, B] = AB - BA$  è il **commutatore** di  $A$  e  $B$ .

- $A(B) |\psi\rangle$  vuol dire che si misura prima  $B$  e poi  $\psi$

**Teorema 4.1.** Se  $A, B$  commutano

- Gli elementi di  $B$  sono diagonali nella rappresentazione di  $A$ , cioè la base di  $A$   $|a_i\rangle$  è anche la base di  $B$

Due operatori che commutano hanno una base comune e la notazione è:

$$|a, b\rangle$$

Consideriamo che  $[A, B]$  siano osservabili che commutano

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\xrightarrow{\text{Misuro } A} |a\rangle \xrightarrow{\text{Misuro } A} \underbrace{|a\rangle}_{100\% \text{ risultato } a} \\ |\psi\rangle &\xrightarrow{\text{Misuro } A} |a, b\rangle \xrightarrow{\text{Misuro } B} |a, b\rangle \xrightarrow{\text{Misuro } A} |a, b\rangle \end{aligned}$$

Non si avrà nessuna distruzione dell'informazione perchè  $A$  è anche autostato di  $B$ .

## 4.3 Osservabili incompatibili

Se  $A, B$  non commutano allora non hanno una base comune e non si possono misurare simultaneamente.

#### 4.4 Postulati (Interpretazione di Copenhagen)

- Ad ogni sistema fisico, si associa uno spazio di **Hilbert**  $\mathcal{H}$ , cioè una generalizzazione dello spazio complesso.
  - Ad ogni stato di questo sistema si associa un vettore normalizzato dello spazio di Hilbert:

$$|\psi\rangle \leftrightarrow (\alpha|\psi\rangle) \leftrightarrow \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

- Arbitrarietà della fase, cioè  $|\psi\rangle$  è definito a meno di una fase:

$$e^{i\phi} |\psi\rangle$$

La conseguenza è che **ogni stato** può essere espresso come sovrapposizione di altri stati:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

(Principio di sovrapposizione)

- Ad ogni osservabile  $A$  si associa un operatore lineare autoaggiunto  $\hat{A}$  dello spazio  $\mathcal{H}$  che si dice hermitiano.

Lo spettro di  $\hat{A}$  (l'insieme degli autovalori) è l'insieme dei valori possibili della misura (spettro della misura).

$$\hat{A} |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle$$

- Se il sistema fisico si trova in uno stato  $|\psi\rangle$ , la probabilità che la misura di  $A$  (grandezza fisica) dia come risultato  $\alpha$  è proporzionale a:

$$P(a_i) \propto |\langle a_i|\psi\rangle|^2$$

dove  $\langle a_i|\psi\rangle$  è il coefficiente  $c_i$ .

Ne consegue che la somma delle probabilità è 1:

$$\sum |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = 1$$

- Collasso della funzione d'onda  $\psi$  (non c'è spiegazione fisica). La misura dell'osservabile  $A$  sullo stato generico  $|\psi\rangle$  (che ha dato un risultato  $\alpha$ ) proietta  $|\psi\rangle$  sull'autospazio di  $\alpha$ , (cioè  $|a\rangle$ )
- Gli stati  $|\psi\rangle$  evolvono nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

dove  $\hat{H}$  è l'**operatore Hamiltoniano** del sistema. L'operatore Hamiltoniano è l'"energia" del sistema che è data da:

$$\underbrace{T}_{\text{Cinetica}} + \underbrace{V(\vec{x})}_{\text{Potenziale}}$$

Il risultato di questa equazione sono tutti i possibili valori dell'energia.

## 5 Dalla meccanica quantistica al quantum computing

L'informazione è **fisica**, cioè manipolare l'informazione è un processo fisico e quindi non si può separare le operazioni logiche dalla loro implementazione fisica. Esiste quindi un limite dato dal **principio di Landauer** che dice che c'è un limite minimo all'energia spesa (lavoro) per una singola computazione irreversibile (ad esempio cancellare un bit). Il limite è dato da:

$$\Delta E = k_b T \ln 2$$

dove  $k_b$  è la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura a cui avviene il processo (in gradi Kelvin).

**Esempio 5.1.** Un esempio a temperatura ambiente è il seguente:

$$T = 300K$$

$$\Delta E \approx 18mV$$

È un valore altissimo, quindi visto che l'unica variabile disponibile è la temperatura se si vuole diminuire il limite bisogna diminuire la temperatura a livelli criogenici.

### 5.1 Computazione quantistica

Si ha uno stato fisico  $|\psi\rangle$  di input preparato che entra in un computer quantistico (processo fisico reversibile) e si ottiene un output  $|\psi\rangle$  che è un altro stato fisico, quindi un operatore unitario che indica l'evoluzione temporale di  $|\psi\rangle$ .

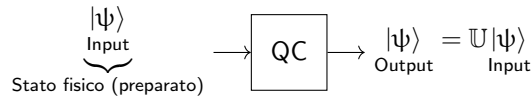


Figura 1: Computazione quantistica

Dove  $UU^+ = \mathbb{I}$

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t\right)$$

Si farà poi una misura quantistica per selezionare uno dei possibili esiti di  $|\psi\rangle$ .  
Output

L'algoritmo quantistico ottimizza questo processo di estrazione dell'informazione

**Teorema 5.1** (Teorema di No-Cloning). In meccanica quantistica non si può creare (clonare) una copia esatta di uno stato senza distruggere l'originale.

Nella computazione quantistica si possono sfruttare tutte le proprietà quantistiche, come ad esempio:

- Sovrapposizione
- Correlazione quantistica (entanglement)
- Teletrasporto

## 5.2 Comunicazione quantistica

Si considerano due entità A e B che vogliono comunicare attraverso un canale di comunicazione quantistico. Si ha che:

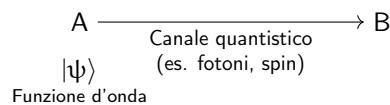


Figura 2: Comunicazione quantistica

Questo dà luogo a:

- Crittografia quantistica
- Teletrasporto
- Teletrasporto di maggiori informazioni

B per rilevare il messaggio ha un rivelatore quantistico.

## 5.3 Calcolo quantistico

L'elemento base di un'operazione è il **Qubit**, cioè un insieme di due possibili stati quantistici distinguibili:

$$\begin{array}{cc} |0\rangle & ; & |1\rangle \\ \text{Stato fondamentale} & & \text{Stato eccitato} \end{array}$$

nell'implementazione fisica potrebbe essere uno spin in su o in giù, un fotone con polarizzazione orizzontale o verticale ecc...

Si possono creare, quindi, degli stati che non hanno analogo classico. Un generico qubit  $|\psi\rangle$  si trova in sovrapposizione dei suoi stati:

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$$

La fase non ha significato nel mondo quantistico:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

quindi si può scrivere il qubit come:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

Questo è un punto sulla **sfera di Bloch**.

### 5.3.1 Rappresentazione geometrica del Qubit

Il qubit è un punto sulla superficie della sfera di Bloch:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = (\cos \frac{\theta}{2} \quad e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2})$$

## 5.4 Qubit

Il Qubit codifica una quantità infinita di informazioni perchè è in sovrapposizione, ma questo si può sfruttare soltanto all'interno del calcolo quantistico, perchè quando il valore viene estratto si ha il collasso della funzione d'onda e potrà essere soltanto uno dei due stati  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$ .

Si hanno  $n$  qubit preparati nello stato fondamentale:

$$|\alpha_i\rangle = \{|0\rangle, |1\rangle\}_i$$

$$\begin{pmatrix} |0\rangle_1 \\ \vdots \\ |0\rangle_n \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbb{U}} \rightarrow |\psi\rangle = \alpha_{1,2,\dots,n} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = |\alpha\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\alpha\rangle_n$$

Figura 3: Calcolo quantistico

Il sistema descritto da 2 qubit:  $|\alpha\rangle_1; |\alpha\rangle_2$  si indica con:

$$|\alpha\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 = |\alpha_1 \alpha_2\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

Due qubit possono essere ad esempio 2 fotoni che possono assumere gli stati:

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}_1$$

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}_2$$

e quindi ci sono 4 stati possibili che formano la base. Gli stati si indicano:

$$|00\rangle$$

$$|01\rangle$$

$$|10\rangle$$

$$|11\rangle$$

Qualsiasi combinazione di questi consiste in una formazione quantistica trasportata all'interno del circuito e quindi:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle$$

$$\sum |\alpha_{ij}|^2 = 1$$

I coefficienti sono la probabilità di ottenere il primo stato in un certo stato fondamentale e il secondo stato in un altro stato fondamentale.

Gli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  a livello fisico hanno una differenza di energia piccolissima, che viene annullata dal bagno termico (non si possono differenziare per l'interferenza dell'ambiente) in cui è immerso il sistema, per questo motivo bisogna lavorare a temperature criogeniche. Quando un sistema fisico perde il suo stato si dice **incoerenza fisica**.

#### 5.4.1 Porta di Hadamard

Il processo fisico:

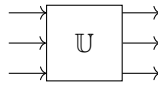


Figura 4: Processo fisico

si può separare in operatori più piccoli che agiscono su un qubit, quindi sono rappresentate da matrici unitarie  $2 \times 2$  (se agiscono su 2 qbit da matrici  $4 \times 4...$ ) in cui ogni colonna rappresenta uno stato del qubit.

Porta di Hadamard o porta H (non ha analogo classico):

- Il vettore di stato  $|0\rangle$  viene trasformato in sovrapposizione di:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

- Il vettore di stato  $|1\rangle$  viene trasformato in sovrapposizione di:

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un generico qubit viene trasformato in:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \alpha \underbrace{\left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)}_{|+\rangle} + \beta \underbrace{\left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)}_{|-\rangle}$$

quindi torna in sovrapposizione. Si sta essenzialmente effettuando un cambiamento di base.



## 6 Entanglement

### 6.1 Stato singoletto di spin

Lo stato "singoletto di Spin" è uno stato composto da 2 particelle che hanno Spin totale = 0 e spin opposto.

Ad esempio una sorgente radioattiva che emette una particella in una direzione e una particella nella direzione opposta: Bisogna mantenere lo spin totale a 0, quindi se una particella ha spin "su" l'altra deve avere spin "giù". Abbiamo 2 particelle con 2 stati e quindi 4 possibili stati:

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

Per mettere lo spin ( $|0\rangle = \text{"su"}$  e  $|1\rangle = \text{"giù"}$ ) in relazione si avrà:

$$|\text{stato "singoletto di Spin"}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

Le due particelle si dicono **entangled** perchè le particelle devono avere spin opposto. Questo stato si dice **stato di Bell**.

Se aggiungiamo degli osservatori A e B al sistema: Se A fa una misura sulla particella  $p_1$  e trova  $|0\rangle$  al 50% e  $|1\rangle$  al 50%. Siccome si sta lavorando in un sistema di 2 qubit, se A trova  $|0\rangle$  esso cade nell'autostato di A, ad esempio:

- Al primo lancio A trova  $|0\rangle_A$  ed esso collassa nell'autostato

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle$$

quindi B troverà  $|1\rangle_B$  al 100%

La misura di A determina **"simultaneamente"** il valore di B, senza che egli lo abbia misurato.

In meccanica quantistica questa relazione è detta **correlazione di spin** o **entanglement**. Questo avviene solo nella stessa base, se un osservatore non conosce la base del secondo osservatore la misura rimane incerta e questa cosa è la fondamentale per la **crittografia quantistica**.