Esame 02/09/2022

1. **(8 punti)**

   (a) Calcolare z^4 dove $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

   (b) Considerare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8k & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il rango rk$A$ di A e il determinante det$A$ di A al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

a) $z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\right) =$

$= 16\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) =$

$= 16\left(-1 + i(0)\right) = -16$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 16k & 0 \end{bmatrix} \underset{}{\overset{E_{21}(-3k)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 16k & 0 \end{bmatrix} \underset{k\neq -1}{\overset{E_2\left(\frac{1}{8+8k}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k-1}{8+8k} \\ 0 & 16k & 0 \end{bmatrix} \overset{E_{32}(-16k)}{\sim}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k-1}{8+8k} \\ 0 & 0 & -\frac{2k^2-2k}{k+1} \end{bmatrix} \underset{\substack{k\neq 0 \\ k\neq 1}}{\overset{E_3\left(\frac{-k+1}{2k^2-2k}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k-1}{8+8k} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$rk(A) = 3$ se $k \neq -1 \wedge k \neq 0 \wedge k \neq 1$

$k = -1$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{E_3(-\frac{1}{2})}{\overset{E_2(-\frac{1}{16})}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$rk(A_{-1}) = 3$ se $k = -1$

$K = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $rk(A_0) = 2$ se $k = 0$

$K=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rk(A_1)=2 \quad \text{se } K=1$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3K & 8+2K & K-1 \\ 0 & 16K & 0 \end{bmatrix} = -(K-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 16K \end{pmatrix} = -(K-1)(16K) = -16K^2+16K$$

A é invertibile se $\det \neq 0$

$-16K^2+16K \neq 0$

$K^2-K\neq 0$

$K(K-1)\neq 0 \;\Big\langle\; \begin{matrix} K\neq 0 \\ K\neq 1 \end{matrix}$

A é invertibile se $K\neq 0 \wedge K\neq 1$

2. **(8 punti)** Considerare la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una forma ridotta e una decomposizione LU di B.

(b) Determinare se B è invertibile e motivare la risposta. Se sì, calcolare l'inversa di B.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_{31}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_3(\tfrac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$U = L^{-1}B \qquad B = L\cdot U$

$L^{-1} = E_{31}(1)\,E_{32}(2)\,E_3\left(\tfrac{1}{2}\right)$

$$L = E_3(2)\,E_{32}(-2)\,E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_3(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_{32}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} = B$$

b) B é invertibile se $\det \neq 0$

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8-6 = 2$$ é invertibile

$$(B \mid I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{31}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{32}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_3\left(\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{23}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{3}{2} & 4 & \tfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \end{array}\right] = (I_3 \mid B^{-1})$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tfrac{3}{2} & 4 & \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. **(8 punti)** Considerare la seguente matrice:

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del sottospazio $C(D)$ di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne to D e una base dello spazio nullo $N(D^T)$ della trasposta D^T di D.

(b) Mostrare che l'insieme $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Considerare la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcolare la matrice $N = A_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}}$, cioè l'unica matrice N tale che $c_{\mathcal{B}}(v) = Nc_{\mathcal{C}}(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $C(D)$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ é una base di $N(D^T)$

b) $$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2$$

$$\alpha = \frac{(c_1 | c_3)}{\|c_1\|^2} = \frac{(1 \;\; -1 \;\; 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1+1+1} = 0$$ non si può creare c_3 come combinaz. lineare

L'insieme é linearmente dipendente, ha dimensione 3 ed é un insieme di generatori, quindi é una base di $\mathbb{R}^3$

c) $A_{C \to B} = ([c_1]_B \;\; [c_2]_B \;\; [c_3]_B)$

$$[c_1]_B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 + \gamma_1 = -1 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$[c_2]_B = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 1 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

$$[c_3]_B = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_3 = -1 \\ \beta_3 + \gamma = -1 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = -2 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

$$A_{C \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **(6 punti)** Considerare la seguente matrice: $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vero o falso? Si motivi la risposta!

(a) Gli autovalori di M sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.
(b) La matrice M è diagonalizzabile.
(c) Le colonne di M sono ortogonali.

a) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$

$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 3$ VERO

b) $\det(M) = \det(M - 0I_2) = (0-3)(0+1) = -3$

é diagonalizzabile perché $\det(M) \neq 0$ VERO

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0$

FALSO