

# **Analisi 1**

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Numeri reali . . . . .	3
1.2	Maggiorante . . . . .	3
1.3	Minorante . . . . .	3
1.4	Estremo superiore . . . . .	4
1.5	Estremo inferiore . . . . .	4
1.6	Massimo . . . . .	4
1.7	Minimo . . . . .	5
1.8	Funzioni . . . . .	5
1.8.1	Dominio di una funzione . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Limiti</b>	<b>6</b>
2.1	Esempi . . . . .	8
2.2	Osservazioni . . . . .	10
2.3	Risultati utili per il calcolo dei limiti . . . . .	11
2.4	Forme indeterminate . . . . .	12
2.5	Esempi di calcolo di limiti . . . . .	12
2.6	Limiti razionali . . . . .	13
2.7	Limiti delle funzioni monotone . . . . .	13
2.7.1	Variante . . . . .	16
2.8	Limiti per $x \rightarrow -\infty$ . . . . .	17
2.9	Limiti per $x \rightarrow x_0$ . . . . .	17
2.10	Limiti unilateri . . . . .	19
2.11	Limiti di funzioni continue . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Notazione o piccolo di Landau</b>	<b>24</b>
3.1	Proprietà . . . . .	25
3.2	Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$ . . . . .	26
3.3	Funzioni continue . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Derivate</b>	<b>27</b>
4.0.1	Osservazioni . . . . .	28
4.1	Proprietà delle funzioni differenziabili . . . . .	29
4.2	Derivate delle funzioni inverse . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Derivate successive</b>	<b>35</b>
5.1	Funzioni convesse e concave . . . . .	35
5.2	Proprietà delle funzioni convesse (o concave) . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Teoremi</b>	<b>39</b>
6.1	Teorema dei carabinieri . . . . .	39
6.2	Teorema di Weiestrass . . . . .	39
6.2.1	Osservazioni . . . . .	40
6.2.2	Esempi . . . . .	41
6.3	Teorema degli zeri . . . . .	43
6.3.1	Esempi . . . . .	43
6.4	Teorema di Fermat . . . . .	45
6.4.1	Dimostrazione . . . . .	45
6.5	Teorema di Lagrange . . . . .	46

6.5.1	Dimostrazione . . . . .	47
6.5.2	Dimostrazione del corollario . . . . .	48
6.6	Teorema de l'Hopital . . . . .	48
6.6.1	Esempi . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Sviluppi di Taylor</b>	<b>50</b>
7.1	Notazione . . . . .	51
7.2	Polinomi di Taylor . . . . .	51
7.3	Polinomi notevoli . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Integrali</b>	<b>54</b>
8.1	Osservazioni . . . . .	54
8.2	Proprietà di base . . . . .	56
8.3	Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . . .	57
8.3.1	Dimostrazione . . . . .	57
8.3.2	Corollario . . . . .	58
8.3.3	Dimostrazione del corollario . . . . .	58
8.4	Esempi . . . . .	58
8.5	Alcune primitive elementari . . . . .	59
8.6	Osservazioni . . . . .	59
8.6.1	Esempi . . . . .	60
8.7	Integrazione delle funzioni razionali . . . . .	62
8.7.1	Esempi . . . . .	63
8.8	Integrazione per parti . . . . .	66
8.8.1	Esempi . . . . .	66
<b>9</b>	<b>Serie</b>	<b>68</b>
9.1	Osservazioni . . . . .	69
9.1.1	Esempi importanti . . . . .	70
9.2	Criteri per studiare il carattere di una serie . . . . .	71
9.2.1	Serie a termini positivi . . . . .	72
9.2.2	Criterio del confronto . . . . .	72
9.2.3	Criterio del confronto asintotico . . . . .	73
9.2.4	Corollario/Caso particolare . . . . .	74
9.2.5	Criterio del rapporto . . . . .	74
9.2.6	Serie a segni alterni . . . . .	75
9.2.7	Criterio di Leibnitz . . . . .	76
9.2.8	Serie a termini di segno qualsiasi . . . . .	76
9.2.9	Criterio di convergenza assoluta . . . . .	76
9.3	Serie di potenze . . . . .	77
9.3.1	Serie di potenze notevoli con centro $x_0 = 0$ . . . . .	78
9.3.2	Osservazioni . . . . .	79
9.3.3	Esempi . . . . .	79
9.3.4	Formule di risoluzione . . . . .	79
9.3.5	Proprietà . . . . .	80

# 1 Introduzione

## 1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazionali; questo insieme viene indicato con il simbolo  $\mathbb{R}$

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- **1<sup>a</sup> proprietà (Eudosso-Archimede):** due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

**Assioma:** dati due numeri reali positivi  $a, b$  con  $0 < a < b$  esiste un intero  $n$  tale che  $na > b$ .

- **2<sup>a</sup> proprietà (Intervalli inscatolati):** date due serie di grandezze:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$ : la prima crescente (numeri della famiglia  $a$ ) e la seconda decrescente (numeri della famiglia  $b$ ), in cui ogni  $a_k$  è minore di  $b_k$  e tali che per ogni altra grandezza  $d$  si ha  $b_k - a_k < c$  per qualche  $k$ , allora esiste una grandezza  $c$  tale che per ogni  $k$   $a_k \leq c \leq b_k$ .

## 1.2 Maggiorante

### **Definizione 1.1**

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme di numeri reali. Un numero  $y \in \mathbb{R}$  è un maggiorante dell'insieme  $S$  se per ogni  $x \in S$  si ha che  $y \geq x$ .

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'intervallo tendesse verso  $+\infty$  non si sarebbe alcun maggiorante poichè  $+\infty$  non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$ : tutti i maggioranti sono quelli per  $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$ : tutti i maggioranti sono quelli per  $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ : non ha maggiorante

## 1.3 Minorante

### **Definizione 1.2**

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme di numeri reali. Un numero  $y \in \mathbb{R}$  è un minorante dell'insieme  $S$  se per ogni  $x \in S$  si ha che  $y \leq x$ .

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso  $-\infty$  non ci sarebbe alcun minorante poichè  $-\infty$  non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$ : tutti i minoranti sono quelli per  $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$ : tutti i minoranti sono quelli per  $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ : non ha minorante

## 1.4 Estremo superiore

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S$  è un insieme limitato superiormente con  $y \in \mathbb{R}$  estremo superiore di  $S$  se:

- $y$  è un maggiorante di  $S$
- $y$  è il più piccolo maggiorante di  $S$

Se  $S$  è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di  $S$  è  $\sup(S) = +\infty$ . Esempi:

- $I = (1, 10]$ :  $\sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$ :  $\sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ :  $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

## 1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S$  è un insieme limitato inferiormente con  $y \in \mathbb{R}$  estremo inferiore di  $S$  se:

- $y$  è un minorante di  $S$
- $y$  è il più grande minorante di  $S$

Se  $S$  è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di  $S$  è  $\inf(S) = -\infty$ . Esempi:

- $I = [1, 8)$ :  $\inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$ :  $\inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ :  $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

## 1.6 Massimo

### **Definizione 1.3**

*Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme reale, dove  $y \in \mathbb{R}$  è il massimo di  $S$  se  $y$  è l'estremo superiore di  $S$  e se  $y \in S$ .*

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con  $\max(S) = y$ .

## 1.7 Minimo

### **Definizione 1.4**

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme reale, dove  $y \in \mathbb{R}$  è il minimo di  $S$  se  $y$  è l'estremo inferiore di  $S$  e se  $y \in S$ .

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con  $\text{Min}(S) = y$ .

**Teorema 1** Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.

## 1.8 Funzioni

### **Definizione 1.5**

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:

$$f : A \rightarrow B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di  $A$  è associato uno e uno solo elemento di  $B$ .

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } f : A \rightarrow B$$

Esempio di funzione corretta:

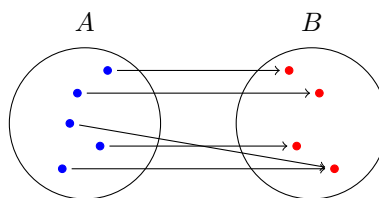


Figura 1: Esempio di funzione corretta

### 1.8.1 Dominio di una funzione

#### **Definizione 1.6**

Dato un insieme di partenza  $A$  gli elementi ai quali è applicata la funzione  $f$  sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \rightarrow x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

## 2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  il cui dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$  è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per  $x \rightarrow +\infty$  )

### **Definizione 2.1**

Sia  $L \in \mathbb{R}$ . Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A^a,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow L$  per  $x \rightarrow +\infty$  )

**La condizione deve essere soddisfatta per ogni  $\epsilon$  .**

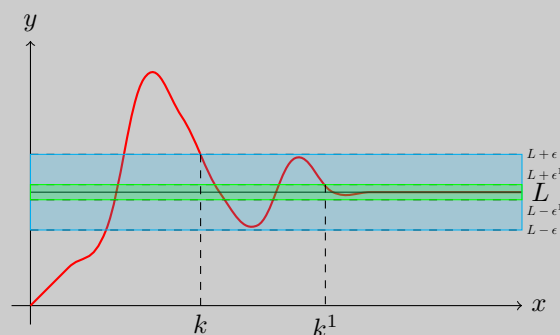


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di  $L$  e non uscirne più. Questo vale per ogni  $\epsilon$ , quindi anche per  $\epsilon^1$ .

<sup>a</sup>Il dominio della funzione

**Definizione 2.2**

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ )

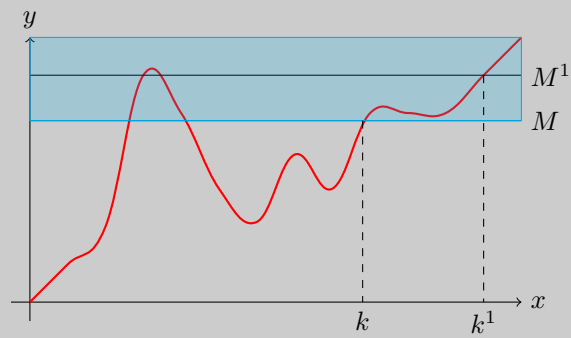


Figura 3: Definizione di limite a  $+\infty$



**Definizione 2.3**

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ )

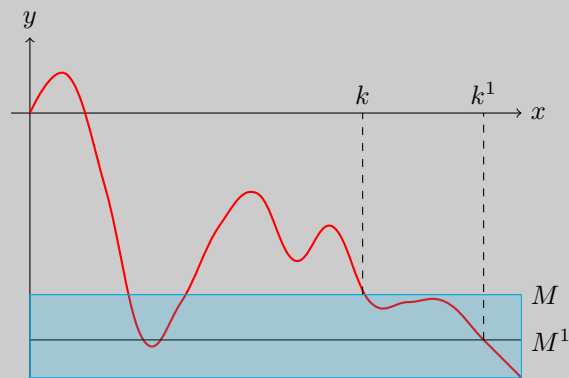


Figura 4: Definizione di limite a  $-\infty$

**2.1 Esempi****Esempio 2.1**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Dominio} = \mathbb{R}/\{0\}$$



Figura 5: Esempio di limite

*Sia dato  $\epsilon > 0$  arbitrario. Definisco  $k := \frac{1}{\epsilon}$ .  
Sia dato  $x > 0$  arbitrario, supponiamo  $x \geq k$ . Allora*

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

*Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con  $L = 0$ ).*

### **Esempio 2.2**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$



Figura 6: Esempio di limite a  $+\infty$

*Sia dato  $M > 0$  arbitrario. Definisco  $k := M$ .  
Sia dato  $x \geq k$ . Allora  $x \geq M$ .  
Quindi è verificata la definizione di limite.*

## 2.2 Osservazioni

**Non** è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$



Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intervallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.



Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

### 2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

**Teorema 2 (Algebra dei limiti)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente,  $f$  e  $g$  due funzioni.  $A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che i limiti

$$F := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

esistano e siano **finiti**. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende **parzialmente** nel caso  $F$  o  $G$  siano infiniti, secondo le regole seguenti:

- $F + \infty = +\infty$ ,  $F - \infty = -\infty$   $\forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty$ ,  $+\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty$ ,  $\forall F \in \mathbb{R}$ ,  $F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0$   $\forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty$   $\forall F \in \mathbb{R}$ ,  $F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di  $\infty$  è da determinare secondo la regola usuale.

## 2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succedere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $1^\infty$
- $0^0$
- $\infty^0$

**N.B.:** in questo contesto,  $0$ ,  $\infty$  e  $1$  sono da intendersi come abbreviazioni.

## 2.5 Esempi di calcolo di limiti

### *Esempio 2.3*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)$$
$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \rightarrow +\infty$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  (per il teorema dell'algebra dei limiti)

### *Esempio 2.4*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x^3}_{+\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{x}}_0 - 1 \right) \rightarrow -\infty$$

Per  $x \rightarrow +\infty$

### *Esempio 2.5*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x}_{+\infty} \left( \underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4 \right) \rightarrow +\infty$$

## 2.6 Limiti razionali

Se  $P$  è un polinomio di grado  $p$  e  $Q$  è un polinomio di grado  $q$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > q \\ 0 & \text{se } p < q \\ \text{coefficiente dominante di } P & \text{se } p = q \\ \text{coefficiente dominante di } Q & \text{se } p = q \end{cases}$$

## 2.7 Limiti delle funzioni monotone

**Teorema 3 (di monotonia)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona<sup>1</sup>. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ esiste e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce (nondecrecente)} \\ \inf\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ decresce (noncrescente)} \end{cases}$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  è strettamente crescente e limitata (l'immagine di  $f$  è un insieme limitato).

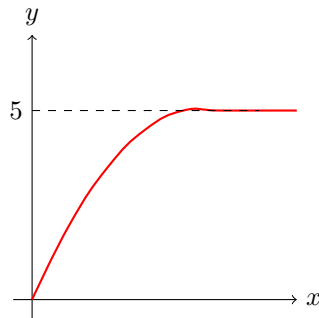


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente crescente e non limitata

---

<sup>1</sup>Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

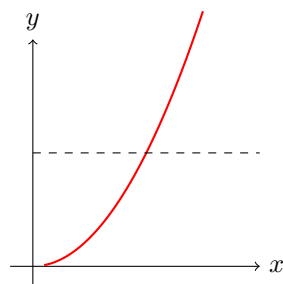


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

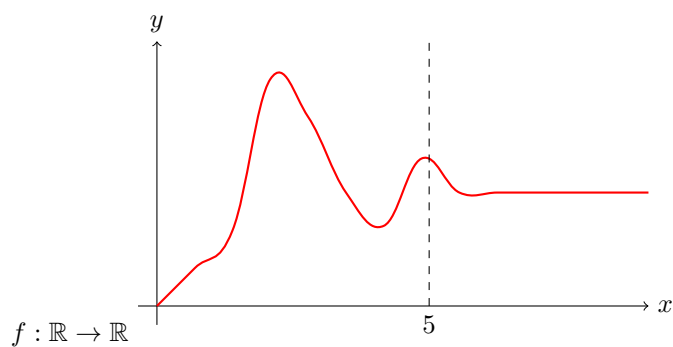


Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede per  $x > 5$  si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da  $x = 5$ .

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

### ***Esempio 2.6***

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

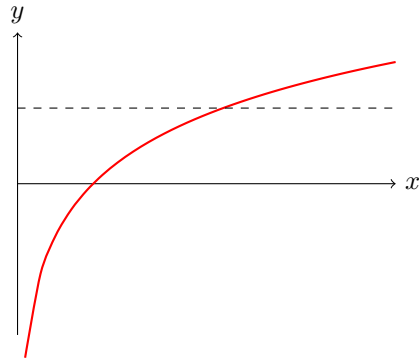


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

*Per il teorema di monotonia:*

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) &= \sup\{\log(x) : x > 0\} \\
 &\geq \sup\{\log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \text{ scelto arbitrariamente} \\
 &= \sup\{n \cdot \log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty
 \end{aligned}$$

*Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a  $+\infty$ .*



**Esercizio 2.1**

*Dimostrare che:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

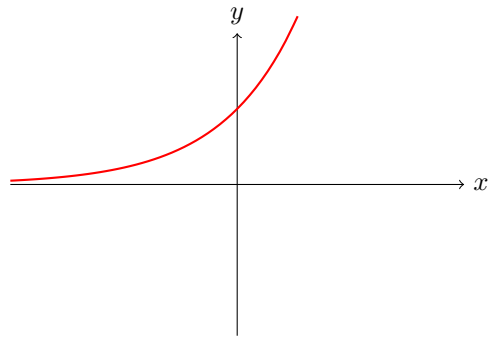


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

*E similmente che:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

**2.7.1 Variante**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non limitato superiormente e siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

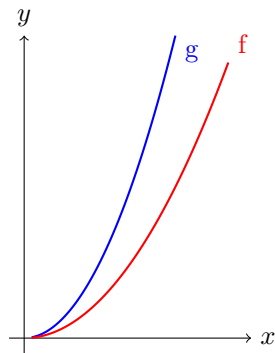


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

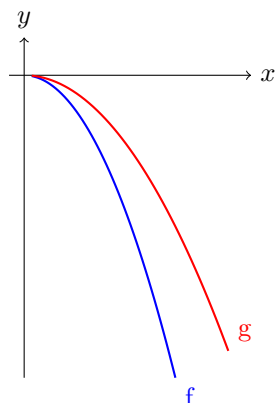


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative

## 2.8 Limiti per $x \rightarrow -\infty$

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato inferiormente,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Diremo che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-t) = L$$

$$x = -t$$

$$\text{se } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{allora } t \rightarrow +\infty$$

## 2.9 Limiti per $x \rightarrow x_0$

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Per definire il limite di  $f$  quando  $x \rightarrow 0$ , serve che  $f$  sia definita "vicino a  $x_0$ ", in un senso opportuno. Noi supporremo, ad esempio, che il dominio  $A$  contenga almeno un intervallo del tipo  $(x_0 - \delta, x_0)$  oppure  $(x_0, x_0 + \delta)$ , con  $\delta > 0$ . **Non** è richiesto, invece, che  $f$  sia definita in  $x_0$ .

### *Esempio 2.7*

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

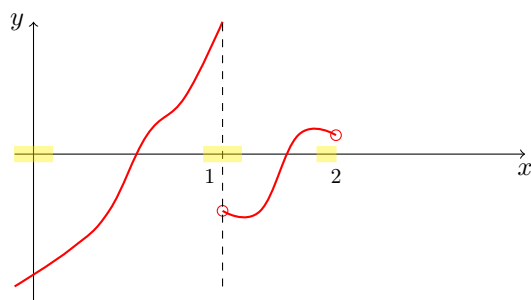


Figura 16: Limiti su una funzione non continua

*Posso definire*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

*Non è detto però che tali limiti esistano*

Sotto le ipotesi precedenti su  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e su  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dato  $L \in \mathbb{R}$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A, \\ x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0 \\ \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon \end{aligned}$$

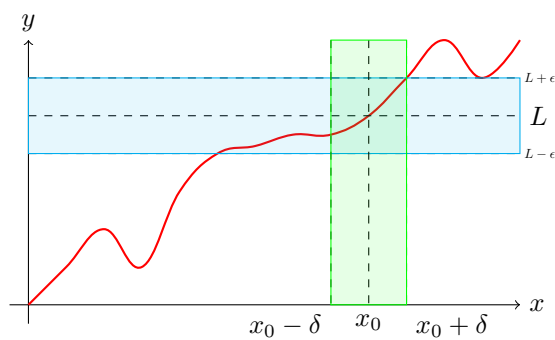


Figura 17: Limite a  $x_0$

Sotto le ipotesi precedenti su  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e su  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dato  $L \in \mathbb{R}$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \geq M$$

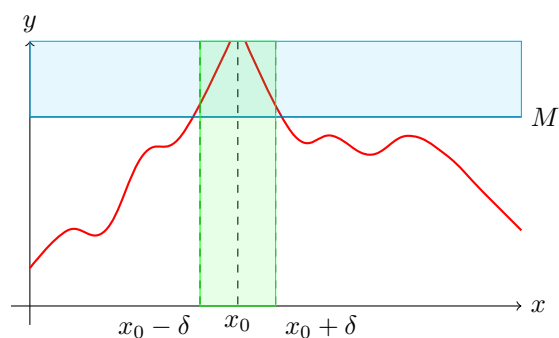


Figura 18: Limite a  $x_0$

Sotto le ipotesi precedenti su  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e su  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dato  $L \in \mathbb{R}$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \leq M$$

## 2.10 Limiti unilateri

Si possono anche dare le definizioni di limiti **unilateri**, da destra o da sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

### *Esempio 2.8*

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$



Figura 19: Limiti unilateri

## 2.11 Limiti di funzioni continue

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo oppure un'unione finita di intervalli.

### **Definizione 2.4**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ . Diremo che  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che  $f$  è continua se e solo se  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio  $x_0 \in A$ .

### **Esempio 2.9**

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua, perchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

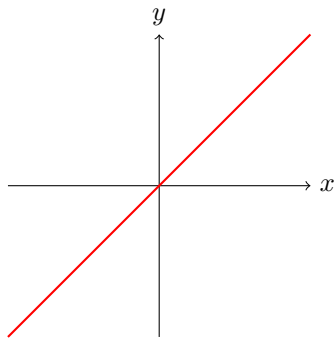


Figura 20: Esempio di funzione continua

**Esempio 2.10**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \neq 2 \\ 31 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Non è continua perché

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2)$$

Però  $f$  è continua in tutti gli  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = x_0$$



Figura 21: Esempio di funzione non continua

**Esempio 2.11**

$$h : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

*Il dominio è un'unione di 2 intervalli:*

$$(\mathbb{R}/0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

*È una funzione continua*



Figura 22: Esempio di funzione continua

***Esempio 2.12***

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

*Questa funzione non è continua perché il limite a 0 non esiste:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = \nexists$$

*ma:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} |l(x)| = +\infty$$



Figura 23: Esempio di funzione non continua

**Esempio 2.13**

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Non è continua perchè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \neq m(0)$$



Figura 24: Esempio di funzione non continua



### 3 Notazione o piccolo di Landau

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (F.I. \frac{0}{0})$$

Considero  $x > 0$

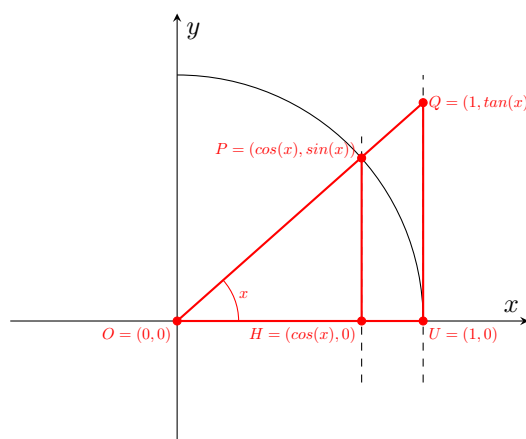


Figura 25: Grafico

Area del triangolo  $OHP$ :

- $\leq$  area del settore  $OUP$
- $\leq$  area del triangolo  $OUQ$

Area di  $OHP = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$

Area di  $OUQ = \frac{1}{2} \tan(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Area di  $OUP$  : area del disco unitario = ampiezza dell'angolo  $P\hat{O}U$ : ampiezza dell'angolo giro

da cui:

$$Area\ di\ OUP = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2}x$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Moltiplico per  $\frac{2}{\sin(x)}$  (assumendo che  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , così che  $\sin(x) > 0$ ):

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

da cui:

$$\underbrace{\cos(x)}_1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_1$$

per  $x \rightarrow 0^+$

Per il teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Il caso  $x \rightarrow 0^-$  è analogo.  $\square$

Se definiamo:

$$q(x) := \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

posso concludere che:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 + q(x) \Leftrightarrow \sin(x) = x + xq(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = 0$$

### **Definizione 3.1**

**Notazione o piccolo di Landau.**

Diremo che:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se e solo se esiste una funzione  $q$  tale che:

$$f(x) = g(x)q(x) \quad (\forall x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = 0$$

Ad esempio, possiamo dire che:

$$\sin(x) = x + \underbrace{o(x)}_{g(x)q(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

## **3.1 Proprietà**

1.  $f(x) = o(1)$  per  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
2.  $o(g(x)) = g(x)o(1)$  per  $x \rightarrow x_0$
3.  $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$

Infatti,

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

e quindi

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x) \underbrace{(q_1(x) + q_2(x))}_{0 \text{ per } x \rightarrow x_0} = o(g(x))$$

4. Se  $k \in \mathbb{R}$  è una costante,

$$ko(g(x)) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

5.  $f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$

6. In generale, **non** vale

$$o(g(x)) - o(g(x)) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Infatti,

$$o(g(x)) - o(g(x)) = g(x)q_1(x) - g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

ma **non** è detto che  $q_1(x) = q_2(x)$ .

(Però è vero che  $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$  )

7. Allo stesso modo, **non** è detto che

$$\frac{o(g(x))}{o(g(x))} = 1 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(forma indeterminata)

**È molto importante specificare  $x \rightarrow x_0$  .**

Ad esempio:

**Esempio 3.1**

$$\begin{aligned} x^2 &= o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ x &= o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

### 3.2 Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (\text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante})$
- $\sin(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

### 3.3 Funzioni continue

Proprietà:

1. Se  $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue, allora sono continue anche

$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$

(quest'ultima definita su  $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$  )

2. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$  sono funzioni continue tali che  $f(A) \subseteq B$ , allora è continua anche la funzione composta

$$g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

#### **Esempio 3.2**

*Sono funzioni continue:*

- tutti i polinomi
- tutte le funzioni razionali (quozienti di polinomi)
- $x \rightarrow x^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  costante, laddove ben definito
- $\exp$ ,  $\log$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ , ...
- valore assoluto,  $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- funzioni composte, ad esempio:

$$h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) := \sin(x^3 + 5x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_2 : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(x) := \log(x^2 - 4) \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

## 4 Derivate

Sia  $A$  un intervallo aperto (del tipo  $A = (a, b)$  oppure  $A = (a, +\infty)$ ,  $A = (-\infty, a)$ ,  $A = \mathbb{R}$ ), oppure un'unione di intervalli aperti.

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ . **Retta tangente** al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ ?



Preso  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , il coefficiente angolare (pendenza) della retta secante il grafico nei punti  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

#### **Definizione 4.1**

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **differenziabile** (o derivabile) in  $x_0 \in A$  se e solo se esiste ed è finito il limite:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite è detto **derivata** di  $f$  in  $x_0$ .  $f$  si dice **differenziabile** (o derivabile) se e solo se è differenziabile in ogni punto del suo dominio.

#### **4.0.1 Osservazioni**

1. La retta tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  è definita come l'unica retta di pendenza  $f'(x_0)$  passante per  $(x_0, f(x_0))$ . Essa ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se vale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

che equivale a dire:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Quindi,  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

il che equivale (posto  $x = x_0 + h$ ) a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

**Esempio 4.1**

$$f = e^x, \quad x_0 = 0$$

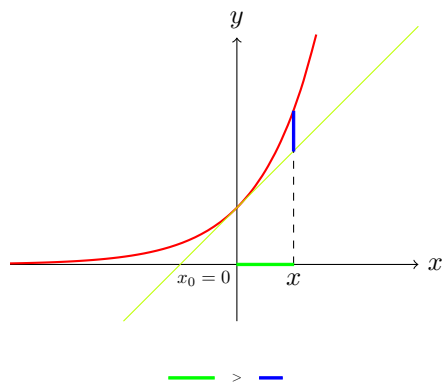


Figura 26: Esempio di funzione continua

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

dunque

$$e'^0 = 1$$

Che sarebbe il coefficiente di  $x$  nell'equazione  $e^x = 1 + x + o(x)$

Si può anche scrivere (Notazione di Leibnitz):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

**Esempio 4.2**

Una funzione costante è differenziabile con derivata

$$(5')(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 5}{h} = 0$$

**4.1 Proprietà delle funzioni differenziabili**

Dove non specificato, supporremo sempre che il dominio  $A$  sia un intervallo aperto o un'unione di intervalli aperti.

**Proprietà:** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

Dimostrazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0) \square$$

**Non** vale il viceversa:  $f$  può essere continua senza essere differenziabile.

**Esempio 4.3**

$$f(x) := |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$



Figura 27: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Le derivate destra e sinistra in  $x_0 = 0$  esistono e sono entrambe finite, ma sono **diverse** tra loro:  $f$  ha un **punto angoloso** in  $x_0 = 0$ .

**Esempio 4.4**

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

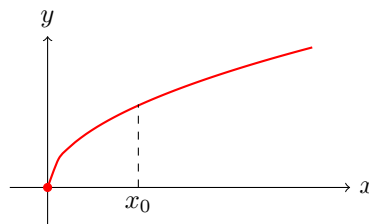


Figura 28: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Il limite (destro, in questo caso) del rapporto incrementale esiste, ma è infinito:  $g$  ha una **cuspid** o **punto a tangente verticale** in  $x_0 = 0$ .

**Definizione 4.2**

Un punto  $x_0 \in A$  si dice punto di  $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$  locale di una funzione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  se esiste  $\delta > 0$  tale che  $\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$  per ogni:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

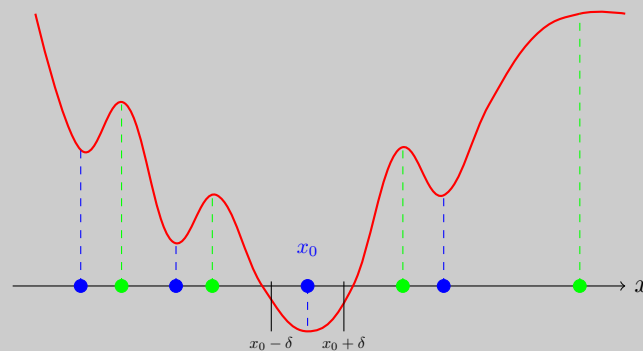


Figura 29: Teorema degli zeri



*I punti di massimo o minimo locale si chiamano anche **estremi locali**.*

## 4.2 Derivate delle funzioni inverse

### **Esempio 4.5**

Consideriamo

$$\begin{aligned} \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

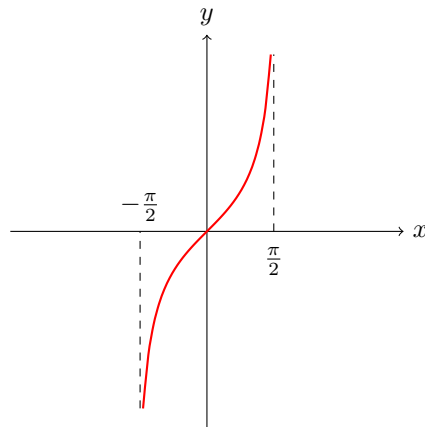


Figura 30: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La tangente è differenziabile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{(\sin)'(x)\cos(x) - (\cos)'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- La tangente è strettamente crescente, quindi iniettiva
- La tangente è suriettiva: per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , esiste

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ t.c. } \tan(x) = y$$

Infatti la tangente è continua e

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$$

Quindi il teorema degli zeri implica che esiste  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  t.c.  $\tan(x) = y$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  è biettiva, quindi per ogni  $y \in \mathbb{R}$  esiste un unico numero reale, che indicheremo  $\arctan(y)$ , tale che

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \arctan(y) < \frac{\pi}{2} \\ \tan(\arctan(y)) = y \end{cases}$$

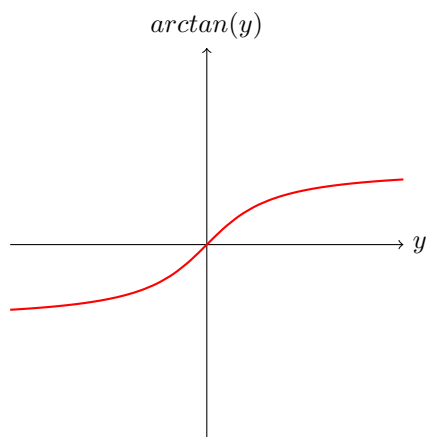


Figura 31: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La funzione  $\arctan$  è differenziabile? Se sì, chi è la sua derivata?

Supponiamo già di sapere che  $\arctan$  è differenziabile (è vero, ma andrebbe dimostrato)

$$\tan(\arctan(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Deriviamo ambo i membri:

$$\frac{d}{dy}(\tan(\arctan(y))) = 1$$

$$\frac{d}{dy}(\tan(\arctan(y))) = \tan'(\arctan(y)) \cdot (\arctan(y))'$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) = (1 + (\tan(\arctan(y))))^2 \cdot (\arctan(y))' \\ &= (1 + y^2) \cdot (\arctan(y))' \end{aligned}$$

Dunque:

$$(1 + y^2)\arctan'(y) = 1$$

e quindi:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Quanto fatto ha validità più generale:

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile tale che  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Allora esiste la funzione inversa:

$$g : f(I) \rightarrow I$$

tale che  $f(g(y)) = y \forall y \in f(I)$ ,  $g(f(x)) = x \forall x \in I$

Inoltre,  $g$  è differenziabile e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

per ogni  $y \in f(I)$

**Esercizio 4.1**

Trovare le derivate delle funzioni:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

## 5 Derivate successive

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto, o un'unione di intervalli aperti. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se (e solo se)  $f$  è differenziabile e  $f'$  è differenziabile, si dice che  $f$  è differenziabile due volte. Si scrive  $f''$  per la derivata seconda di  $f$  (cioè la derivata di  $f'$ ).

Similmente si definiscono le funzioni differenziabili 3, 4, 5, ..., infinite volte. Notazione per le derivate successive:

$$f' = f^{(1)} = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

### 5.1 Funzioni convesse e concave

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo. Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$  se e solo se la corda tra due punti qualsiasi del grafico di  $f$  sta tutta  $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$  il grafico di  $f$ .

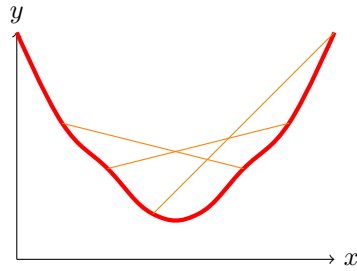


Figura 32: Funzione convessa

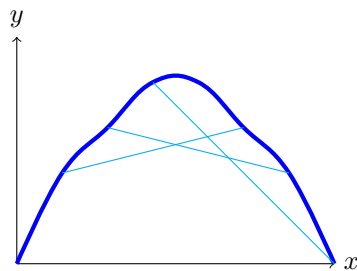


Figura 33: Funzione concava

In maniera equivalente,  $f$  è convessa se e solo se per ogni  $x \in I$ , ogni  $\bar{x} \in I$  ed ogni  $t \in [0, 1]$ , vale

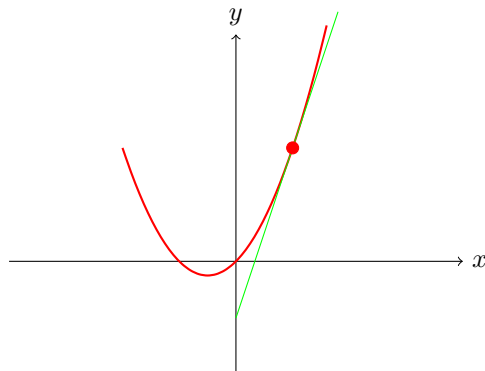
$$f(tx + (1 - t)\bar{x}) \leq tf(x) + (1 - t)f(\bar{x})$$

## 5.2 Proprietà delle funzioni convesse (o concave)

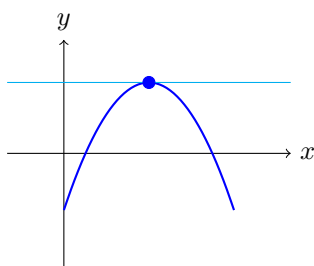
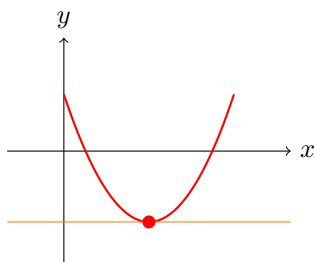
1. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile due volte.

Se  $\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$  in ogni punto di  $I$ , allora  $f$  è  $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$

2. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile e  $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$  e  $x_0 \in I$ , allora la retta tangente a  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$  sta tutta  $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$  il grafico di  $f$ .



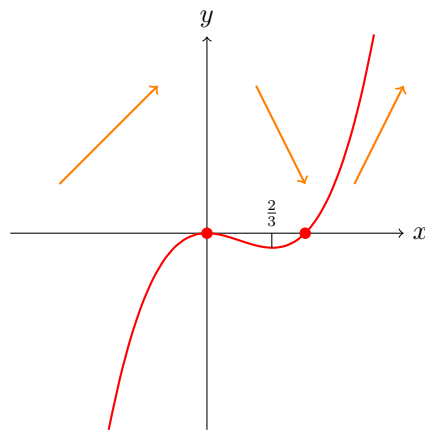
3. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile e
- $$\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases} \quad \text{e } x_0 \in I \text{ un punto critico di } f \text{ (} f'(x_0) = 0 \text{), allora } x_0 \text{ è}$$
- un punto di  $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$  di  $f$ .



4. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile due volte e  $x_0 \in I$  è tale che  $f'(x_0) = 0$  e
- $$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{allora } x_0 \text{ è un punto di } \begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases} \quad \text{locale per } f.$$

**Esempio 5.1**

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\f(x) &= x^3 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\f'(x) &= 3x^2 - 2x \\f''(x) &= 6x - 2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = 1 \\f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ oppure } x = 0 \\f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = \frac{2}{3} \\f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \leq 0 \text{ oppure } x \geq \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Quindi  $f$  è crescente in  $(-\infty, 0)$  e in  $(\frac{2}{3}, +\infty)$ ;  $f$  è decrescente in  $(0, \frac{2}{3})$ . In  $x = 0$  ho un punto di massimo locale, in  $x = \frac{2}{3}$  ho un punto di minimo locale.

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 2 \\f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\f''(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$f$  è convessa in  $(\frac{1}{3}, +\infty)$  e concava in  $(-\infty, \frac{1}{3})$ ;  $f$  ha  $x = \frac{1}{3}$  è un punto di flesso di  $f$ .

## 6 Teoremi

### 6.1 Teorema dei carabinieri

**Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente e siano  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$$

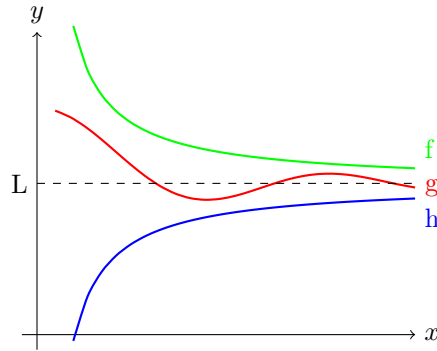


Figura 34: Teorema del confronto tra i limiti

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$$

Prendiamo dunque  $\epsilon > 0$  arbitrario. Poichè  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , sappiamo che esiste  $k_f > 0$  t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_f \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

Allo stesso modo, poichè  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ , sappiamo che esiste  $k_h > 0$  t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_h \rightarrow L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

Definiamo  $k := \max\{k_f, k_h\}$ . Comunque preso  $x \in A$ , se  $x \geq k$  allora vale che

$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

### 6.2 Teorema di Weiestrass



**Definizione 6.1***Teorema di Weierstrass**Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.**Allora esistono*

$$x_{max}, x_{min} \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \forall x \in [a, b]$$

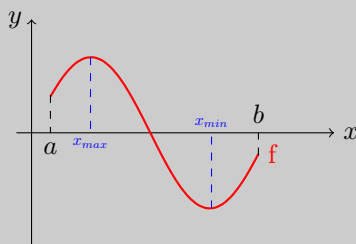


Figura 35: Teorema di Weierstrass

*Ogni funzione continua, avrà quindi un punto di minimo e un punto di massimo*

**6.2.1 Osservazioni**

- In particolare,  $f$  è limitata
- I punti  $x_{min}, x_{max}$  si dicono punti di minimo e di massimo **globali** di  $f$
- I punti di minimo e massimo globali possono essere non unici e coincidere con gli estremi  $a, b$  dell'intervallo

**Esempio 6.1**

$$\cos : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

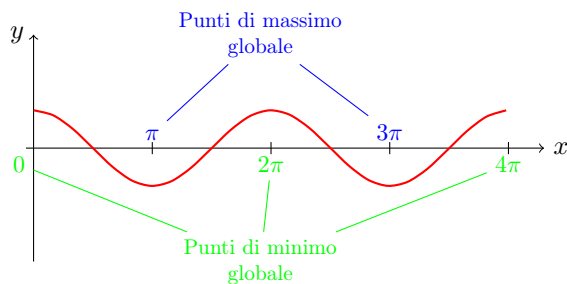


Figura 36: Teorema di Weierstrass

Se vengono meno le ipotesi del teorema, può venir meno la conclusione.

### 6.2.2 Esempi

#### **Esempio 6.2**

$$f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := x \quad \forall x \in (0, 1)$$

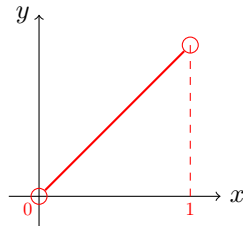


Figura 37: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma per come è definita **non** ammette nè massimo nè minimo perchè il **dominio non è chiuso**.*

#### **Esempio 6.3**

$$f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := x \sin(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

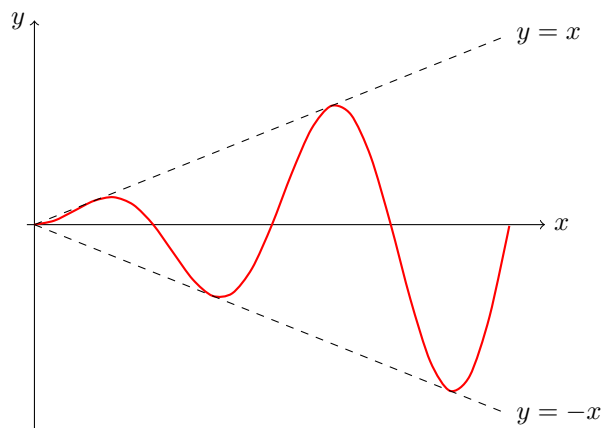


Figura 38: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma **non** possiede nè punti di massimo, nè punti di minimo perchè la funzione ha ampiezza sempre crescente.*

**Esempio 6.4**

$$f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_3(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

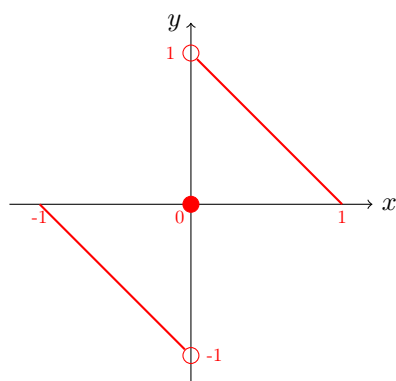


Figura 39: Esempio di funzione non continua

*Questa funzione **non** ammette punti di massimo e di minimo perchè non è continua.*

### 6.3 Teorema degli zeri

**Definizione 6.2**

*Teorema degli zeri (o di Bolzano)*

*Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se*

$$f(a)f(b) < 0$$

*allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$*

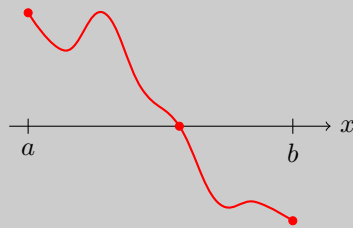


Figura 40: Teorema degli zeri

Se vengono meno le ipotesi, può venir meno la conclusione.

#### 6.3.1 Esempi

**Esempio 6.5**

$$g_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

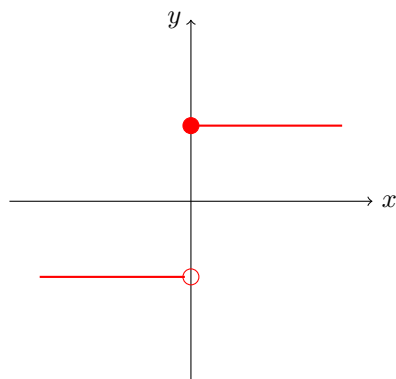


Figura 41: Esempio di funzione non continua

*Questa funzione non è continua, quindi non si applica il teorema.*

**Esempio 6.6**

$$g_2 : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

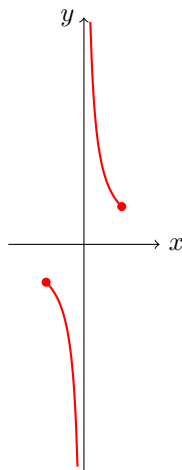


Figura 42: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma non si annulla mai perchè il dominio della funzione **non è un intervallo**, ma un intervallo privato di un valore, quindi non si applica il teorema.*

## 6.4 Teorema di Fermat

**Teorema 5 (di Fermat)** Sia  $x_0 \in A$  un estremo locale di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  e se  $x_0$  è **interno** ad  $A$  (cioè,  $f$  è definita in un intorno di  $x_0$ ), allora:

$$f'(x_0) = 0$$

(I punti dove  $f'(x_0) = 0$  si dicono **punti critici di  $f$**  )

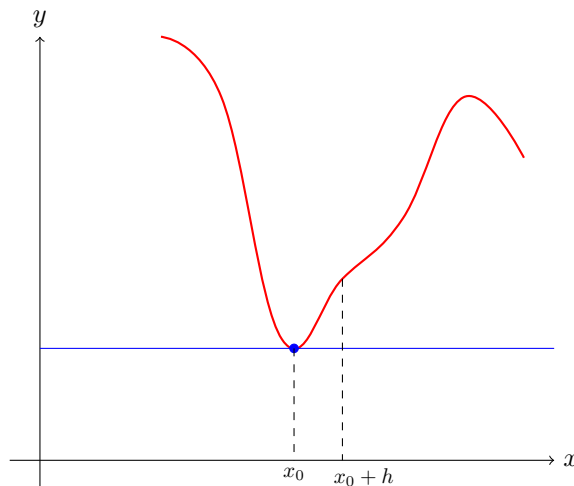


Figura 43: Teorema di Fermat

### 6.4.1 Dimostrazione

Supponiamo ad esempio  $x_0$  minimo locale di  $f$ . Prendo  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ . Se  $|h|$  è abbastanza piccolo,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{perchè } x_0 \text{ è minimo locale}$$

Se  $h > 0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Se  $h < 0$ :

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \leq 0$$

Poichè  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , so che esistono:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e i due limiti sono uguali tra loro e uguali a  $f'(x_0)$ . L'unica possibilità  $f'(x_0) = 0$

## 6.5 Teorema di Lagrange

### Definizione 6.3

*Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $[a, b]$  e differenziabile in  $(a, b)$ . Allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

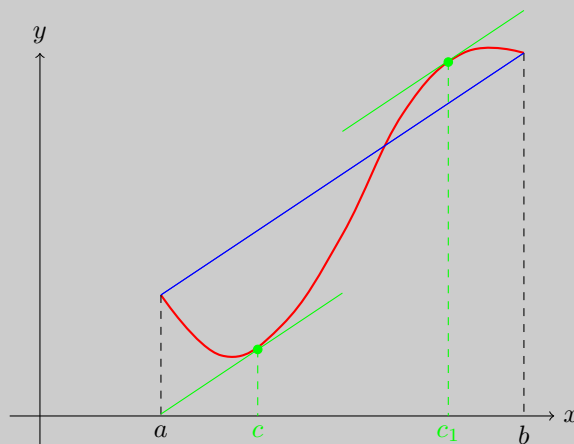


Figura 44: Teorema di Lagrange

**Corollario:** Sia  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile se:

$$\begin{cases} f' = 0 \\ f' \geq 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di  $I$ , allora  $f$  è:

$$\begin{cases} \text{costante} \\ \text{non decrescente} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{non crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Qui è importante assumere che il dominio sia un intervallo

**Esempio 6.7**

$$f : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

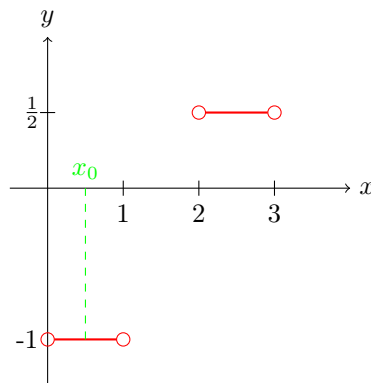


Figura 45: Teorema di Lagrange

*f è differenziabile e ha  $f' = 0$  ovunque, ma non è costante (il dominio non è un intervallo).*

**6.5.1 Dimostrazione**

1. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, differenziabile in  $(a, b)$ , tale che  $f(a) = f(b)$ .  
Devo dimostrare che esiste

$$c \in (a, b) \text{ tale che } f'(c) = 0$$

Per il teorema di Weierstrass,  $f$  possiede un punto di massimo  $x_{max}$  e un punto di minimo  $x_{min}$  globali.

Se  $x_{min} \in (a, b)$ , allora scelgo  $c := x_{min}$  e per il teorema di Fermat, so che  $f'(c) = 0$ .

Se  $x_{max} \in (a, b)$ , allora scelgo  $c := x_{max}$  e per il teorema di Fermat, so che  $f'(c) = 0$ .

Altrimenti, ho  $\{x_{max}, x_{min}\} = \{a, b\}$ . Grazie all'ipotesi  $f(a) = f(b)$ , posso allora dedurre che  $f$  è costante, dunque  $f' = 0$  in tutto  $[a, b]$ .



2. **Caso generale:** Definisco  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)}_{\text{Equazione della corda AB}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora  $g$  è continua,  $g$  è differenziabile, in  $(a, b)$ ,

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Dunque, per quanto dimostrato nel passo precedente, esiste  $c \in (a, b)$  tale che

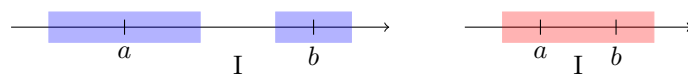
$$g'(c) = 0$$

perchè:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 6.5.2 Dimostrazione del corollario

Prendo  $a \in I, b \in I$  qualsiasi; devo dimostrare che  $f(a) = f(b)$ . Se  $a = b$ , non c'è nulla da dimostrare. Suppongo ad esempio  $a < b$  (se no li scambio). Allora  $f$  è definita su tutto  $[a, b]$  (perchè  $I$  è un intervallo, dunque  $[a, b] \subseteq I$ ).



Inoltre  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua (differenziabile  $\Rightarrow$  continua), differenziabile in  $(a, b)$  e quindi, per il teorema di Lagrange, esiste  $c \in (a, b)$  t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, per ipotesi,  $f'(c) = 0$ , da cioè  $f(b) - f(a) = 0$ , cioè  $f(b) = f(a)$ .

## 6.6 Teorema de l'Hopital

Si applica al calcolo dei limiti della forma  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , con  $f, g$  funzioni differenziabili, **purchè** il limite si presenti sotto la forma (indeterminata)  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\infty}{\infty}$ . Il teorema riduce il calcolo del limite dato al calcolo di:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{purchè esista})$$

**Definizione 6.4**

Siano  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni differenziabili. Supponiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$$

Supponiamo inoltre che  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$  e che il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esista. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si possono scrivere varianti per il calcolo dei limiti quando  $x \rightarrow x_0$  con  $x \in \mathbb{R}$  oppure  $x \rightarrow -\infty$ .

**6.6.1 Esempi****Esempio 6.8**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

**Esempio 6.9**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Si può dimostrare che per ogni  $\alpha > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

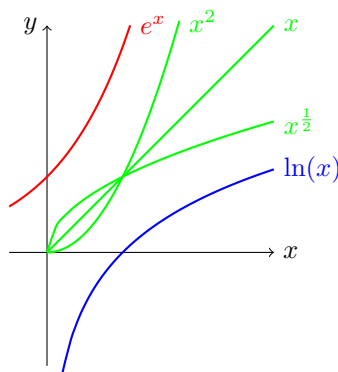


Figura 46: Confronto tra funzioni

Quando  $x \rightarrow +\infty$ , l'esponenziale cresce più velocemente di tutte le potenze (ad esponente positivo); il logaritmo più lentamente.

## 7 Sviluppi di Taylor

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo) una funzione differenziabile  $x_0 \in I$ . Per definizione di differenziabilità:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente valutata in } x_0} + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

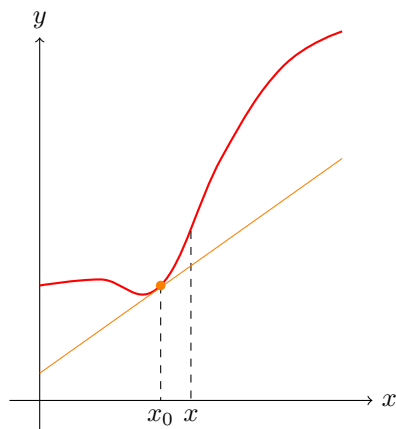


Figura 47: Sviluppo di Taylor

Se  $f$  è differenziabile due o più volte, si possono dare approssimazioni locali ancora migliori.

## 7.1 Notazione

Dato  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ , si definisce il fattoriale di  $n$  come:

$$\begin{cases} 0! := 1 & \text{se } n = 0 \\ n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

## 7.2 Polinomi di Taylor

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile  $n$  volte,  $x_0 \in I$ . Si definisce il **Polinomio di Taylor** di  $f$  di centro  $x_0$  ed ordine  $n$  come:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Quando  $x_0 = 0$ , si parla anche di polinomio di McLaurin.

**Esempio 7.1**

Calcolare il polinomio di Taylor di  $\exp$  di centro 0 e ordine 7.

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad n = 7$$

$$\exp(x) = e^x$$

$$\exp'(x) = \exp$$

$$\exp''(x) = \exp' = \exp$$

$$\exp^{(j)} = \exp \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\exp(0) = 1$$

Polinomio di Taylor:

$$P(x) = \sum_{j=0}^7 \frac{1}{j!} x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^7}{7!}$$

**Teorema 6** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile  $n$  volte,  $P$  il suo polinomio di Taylor di centro  $x_0$  ed ordine  $n$ . Allora:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

**7.3 Polinomi notevoli**

•

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

•

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

•

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

•

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

•

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1})$$

**Esercizio 7.1**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2} \right)^n - 1 - \frac{1}{2n} \right) n^2$$

Chiamo  $a_n$  l'espressione da calcolare:

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2} \right)^n - 1 - \frac{1}{2n} \right) n^2 \\ &= n^2 \left( \left( 1 + \frac{1}{2n^2} \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left( \exp \left( n \log \left( 1 + \frac{1}{2n^2} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Per la regola dell' piccolo  $\log(1+x) = x + o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} &= n^2 \left( \exp \left( n \left( \frac{1}{2n^2} + o \left( \frac{1}{2n^2} \right) \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left( \exp \left( \frac{1}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Per la regola dell' piccolo  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ :

$$\begin{aligned} &= n^2 \left( 1 + \frac{1}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \cdot o \left( \frac{1}{n} \right) = o(n) = n \cdot o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Questa è una forma indeterminata  $\infty \cdot 0$ .

$$a_n = n^2 \left( \exp \left( n \log \left( 1 + \frac{1}{2n^2} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right)$$

Applico  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ , con  $x = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left( \exp \left( n \left( \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n^4} + o \left( \frac{1}{n^4} \right) \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left( \exp \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Applico  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x)$  con  $x = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left( 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right) \right)^2 - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left( -\frac{1}{8n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right) + \frac{1}{8n^2} + o \left( \frac{1}{2n^2} \right) \right) \\ &= n^2 \left( \frac{1}{8n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{8} + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

## 8 Integrali

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua (su un intervallo chiuso e limitato).

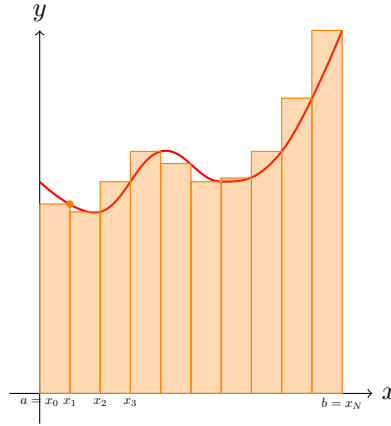


Figura 48: Somma di Riemann

Sia  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 1$ . Suddivido  $[a, b]$  in  $N$  intervalli, delimitati da punti equidistanti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

(dove  $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{N}(b - a)$  per ogni  $j = 1, \dots, N$ ).

Considero la **somma di Riemann** associata a tale suddivisione di  $[a, b]$

$$\sum_{j=1}^N f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, si dimostra che esiste ed è finito:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Tale limite si dice **integrale** (definito) di  $f$ .

### 8.1 Osservazioni

1. Si possono considerare varianti diverse, senza che il valore del limite cambi. Ad esempio:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \quad (\text{Figura 49})$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N (\max_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \quad (\text{Figura 50})$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N (\min_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \quad (\text{Figura 51})$$

(purchè  $f$  sia continua).

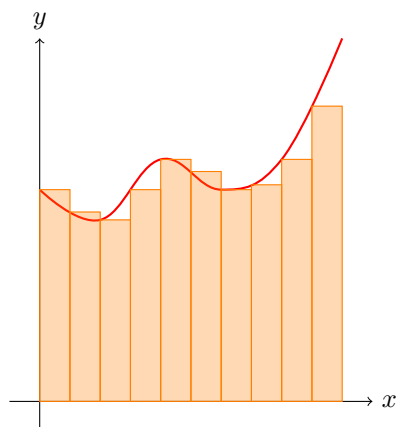


Figura 49: Variante 1

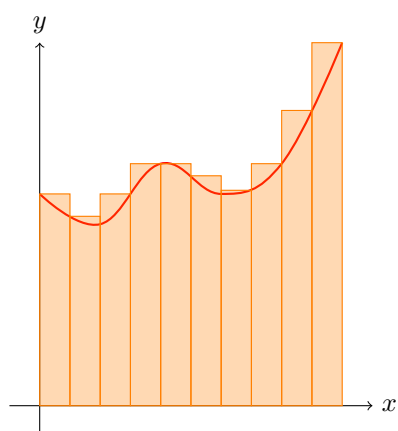


Figura 50: Variante 2



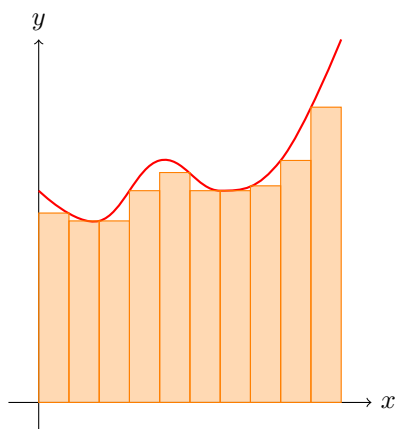


Figura 51: Variante 3

2. Se  $f \geq 0$ ,  $\int_a^b f(x)$  rappresenta l'area racchiusa tra il grafico di  $f$  e l'asse  $x$ .
3. In generale,  $\int_a^b f(x)$  rappresenta l'area **con segno** racchiusa tra il grafico di  $f$  e l'asse  $x$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area della regione gialla} - \text{area della regione azzurra}$$

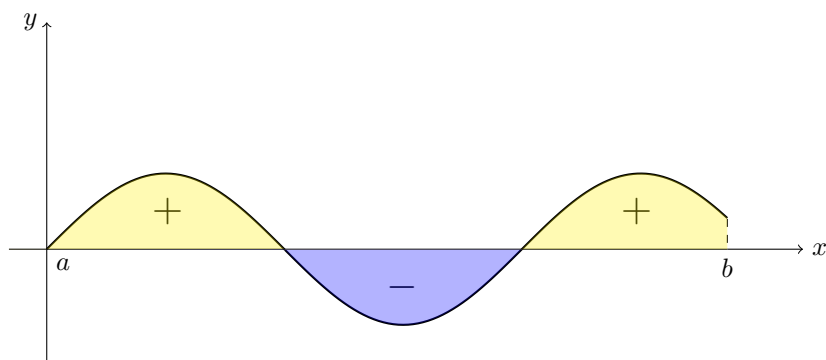


Figura 52: Confronto tra funzioni

## 8.2 Proprietà di base

Tutte queste proprietà si applicano a funzioni continue di segno qualsiasi.

•

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- Se  $k$  è costante

$$\int_a^b (k \cdot f(x)) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

ma in generale **non vale**

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

- Se  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

- Se  $a < b < c$ , allora:

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

### 8.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

**Teorema 7** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora la funzione  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt \quad \forall x \in [a, b]$$

è differenziabile e  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

Una funzione differenziabile  $P$  tale che  $P' = f$  si chiama una **primitiva** di  $f$ . L'insieme di tutte le primitive di  $f$  si chiama **integrale indefinito** di  $f$  e si denota con:

$$\int f(x) \, dx$$

#### 8.3.1 Dimostrazione

Prendiamo un qualsiasi  $x_0 \in [a, b]$ . Sia:

$$R.I.^2(x) := \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{per } x \in [a, b]$$

Dobbiamo dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0} R.I.(x) = f(x_0)$ , cioè che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in [a, b],$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \quad x \neq x_0 \rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Prendiamo  $\varepsilon > 0$  qualsiasi. Poichè  $f$  è continua, sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  e dunque esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \quad x \neq 0 \rightarrow \underbrace{f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon}_o$$

---

<sup>2</sup>**R.I.:** Rapporto Incrementale

Prendiamo ora  $x \in [a, b]$  tale che  $x_0 < x \leq x_0 + \delta$

$$\begin{aligned} R.I.(x) &= \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned}$$

Grazie a  $\circ$ :

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dt \leq R.I.(x) \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dt$$

Se  $c$  è costante:

$$\int_{x_0}^x c dt = c(x - x_0) \quad (\text{area di un rettangolo})$$

e quindi:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Stesso ragionamento se  $x_0 - \delta \leq x < x_0$ .  $\square$

### 8.3.2 Corollario

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Sia  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile tale che  $P' = f$ . Allora:

$$\int_a^b f(x) dx = P(b) - P(a)$$

### 8.3.3 Dimostrazione del corollario

Come prima, sia  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  per  $x \in [a, b]$ . Allora:

$$(F - P)' = F' - P' = f - f = 0$$

Quindi  $F - P = C$ , con  $C \in \mathbb{R}$  costante. Inoltre,

$$C = F(a) - P(a) = \int_a^a f(t) dt - P(a) = 0 - P(a) = -P(a)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) = F(b) - P(b) + P(b) \\ &= C + P(b) = -P(a) + P(b) \end{aligned}$$

## 8.4 Esempi

### *Esempio 8.1*

$$\int 0 dx = C \quad \text{dove } C \in \mathbb{R} \text{ è una generica costante}$$

**Esempio 8.2**

$$\int 1 \, dx = x + C$$

**Esempio 8.3**

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

### 8.5 Alcune primitive elementari

1.

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

2.

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

3.

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

4.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante e } \alpha \neq -1$$

5.

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C$$

6.

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

### 8.6 Osservazioni

Data una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si definisce:

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0$$

$$\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$$

Questa notazione è utile soprattutto quando si integra per sostituzione.

### 8.6.1 Esempi

#### **Esempio 8.4**

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3) dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int (x^6 - 3x^2 + 3) dx &= \int x^6 dx - 3 \int x^2 dx + \int 3 dx = \\ &= \frac{x^7}{7} - \cancel{3} \frac{x^3}{\cancel{3}} + 3x + C \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3) dx = \left[ \frac{x^7}{7} - x^3 + 3x \right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{7} - 1 + 3}_{P(1)} - \underbrace{(0 - 0 + 0)}_{P(0)} = \frac{15}{7}$$

#### **Esempio 8.5**

$$\int_0^1 \left( x^5 - \frac{3}{x^2 + 1} + 5x \right) dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int \left( x^5 - \frac{3}{x^2 + 1} + 5x \right) dx &= \int x^5 dx - 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 5 \int x dx = \\ &= \frac{x^6}{6} - 3 \arctan(x) + \frac{5x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( x^5 - \frac{3}{x^2 + 1} + 5x \right) dx &= \left[ \frac{x^6}{6} - 3 \arctan(x) + \frac{5x^2}{2} \right]_0^1 = \\ \frac{1}{6} - 3 \arctan(1) + \frac{5}{2} - (0 - 0 + 0) &= \frac{1}{6} - 3 \arctan(1) + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

**Esempio 8.6**

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{x^3} + \sqrt{x} \right) dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int \left( \frac{1}{x^3} + \sqrt{x} \right) dx = \int x^{-3} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{x^3} + \sqrt{x} \right) dx = \left[ -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{16}{3} - \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{24}$$

**Esempio 8.7**

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

Integrazione per sostituzione:

$$y = 5x + 7$$

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}(5x+7) \cdot dx = 5 dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5x+7}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{y}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{5} dy = \frac{1}{5} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{5} y^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{y} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x+7} + C \end{aligned}$$

**Esempio 8.8**

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$$

Sostituiamo  $[y = x^2]$  quindi  $dy = 2x \cdot dx$  (anche gli estremi di integrazione)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(y) dy &= \frac{1}{2} [-\cos(y)]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{1}{2} (+1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

**Esempio 8.9**

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Sostituiamo  $y = \frac{1}{x}$  quindi  $dy = -\frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y) dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(y) dy = [\sin(y)]_{y=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

## 8.7 Integrazione delle funzioni razionali

Esiste, di fatto, un algoritmo che permette di calcolare gli integrali delle funzioni razionali (quozienti di polinomi). Lo schema generale è:

1. ricondursi al caso in cui il grado del **denominatore** sia maggiore del grado del **numeratore**;
2. scomporre il denominatore;
3. scrivere l'integranda come somma di funzioni più semplici;
4. integrare ogni frazione singolarmente.

Si ricorda che un polinomio di grado due  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , si scompone come:

$$P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$$

dove:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sono gli zeri di  $P$ . (Purchè  $b^2 - 4ac \geq 0$  )

### 8.7.1 Esempi

#### **Esempio 8.10**

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Ho  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ . Cerco di scrivere:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

Con  $A, B$  costanti da determinare

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$$

Per far sì che questa sia uguale a  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$  devo imporre delle condizioni su  $A$  e  $B$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \int \left( \frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} \right) dx = \\ &= - \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x - 2} dx = -\log|x - 1| + \log|x - 2| + C \end{aligned}$$



**Esempio 8.11**

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Verifico che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{x^2 \overset{\text{sommo e sottraggo}}{-3x + 2 + 3x - 2} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

Scompongo il denominatore:  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$  e voglio trovare  $A$  e  $B$  costanti tali che:

$$\frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$$

Devo imporre:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 - A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \left( 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} \right) dx = \\ &= \int 1 dx + \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{2}{x - 2} dx = x - \log |x - 1| + 2 \log |x - 2| + C \end{aligned}$$

**Esempio 8.12**

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$x^2 + 4x + 5$  non ha radici reali! Uso:

$$\int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(y) + C$$

Devo ricondurre a scrivere  $x^2 + 4x + 5$  come **somma di quadrati**:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = (x + 2)^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx =$$

Sostituisco  $y = x + 2$  quindi  $dy = dx$  e:

$$= \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan(y) + C = \arctan(x + 2) + C$$

**Esempio 8.13**

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} = \frac{x^2 + 4x + 5 - 4x - 5}{x^2 + 4x + 5} = 1 - \frac{4x + 5}{x^2 + 4x + 5}$$

Denominatore privo di radici reali, quindi cerco di utilizzare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

Osservo:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 5) = 2x + 4$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} = 1 - \frac{2 \cdot 2x + 2 \cdot 4 + -2 \cdot 4 + 5}{x^2 + 4x + 5} =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \frac{3}{x^2 + 4x + 5} =$$

$$1 - 2 \cdot \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \frac{3}{(x + 2)^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} dx = x - 2 \log(x^2 + 4x + 5) - 3 \arctan(x + 2) + C$$

## 8.8 Integrazione per parti

### **Definizione 8.1 (Proposizione)**

Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni differenziabili. Allora, vale:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

$$\int f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)] - \int f'(x) g(x) dx$$

### 8.8.1 Esempi

#### **Esempio 8.14**

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx$$
$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

#### **Esempio 8.15**

$$\int \log(x) dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\log(x)}_{f(x)} dx =$$
$$= x \log(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x \log(x) - x + C$$

**Esempio 8.16**

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(x) \, dx &= \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx = \\
&= -[\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx = \\
&= -0 + 0 + \int_0^\pi \cos^2(x) \, dx = \\
&= \int_0^\pi (1 - \sin^2(x)) \, dx = \int_0^\pi 1 \, dx - \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx \\
&= 1 \cdot (\pi - 0) - \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato:

$$\left[ A = \pi - A \Leftrightarrow 2A = \pi \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \right]$$

Quindi:

$$\int_0^\pi \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2}$$

**Esempio 8.17**

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, dx$$

La funzione integranda è ben definita e continua su  $[0, 2]$ . Cambio di variabile:

$$y = 2x + 1$$

$$dy = \frac{d}{dx}(2x+1) \, dx = 2 \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{\log(y)}{y^2} \, dy = \frac{1}{2} \int_1^5 y^{-2} \cdot \log(y) \, dy = \\
&= \frac{1}{2} [-y^{-1} \cdot \log(y)]_{y=1}^5 + \int_1^5 y^{-2} \, dy = \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\log(y)}{y} \right]_{y=1}^5 + [-y^{-1}]_{y=1}^5 = \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\log(5)}{5} + \frac{\log(1)}{1} \right) + \left( -\frac{1}{5} + \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\log(5)}{5} \right) - \frac{4}{5} = \\
&= -\frac{\log(5)}{10} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{10} \log(5) - \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

## 9 Serie

Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali (cioè, una funzione  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Vogliamo dare un senso preciso alla "somma infinita"

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

### **Definizione 9.1**

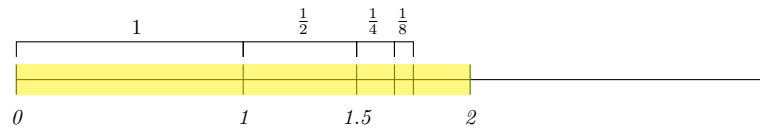
*Data una successione di numeri reali  $\{a_n\}$ , si definisce la somma della **serie** di termine generale  $\{a_n\}$  come:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n$$

*Si dice che la serie*  $\begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \\ \text{oscilla} \end{cases}$  *se il limite*  $\begin{cases} \text{esiste finito} \\ \text{esiste infinito} \\ \text{non esiste} \end{cases}$

**Esempio 9.1**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N 2^{-n}$$



Considero prima:

$$\sum_{n=0}^N 2^{-n} \text{ con } N \in \mathbb{N} \text{ qualsiasi.}$$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=0}^N (1/2)^n \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \\ & = \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^N} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \end{aligned}$$

Somma telescopica:

$$= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{8}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2^N}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{8}} + \dots - \frac{1}{2^{N+1}} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}$$

Dunque:

$$\sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

**9.1 Osservazioni**

- Possiamo anche definire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n$$

$$\sum_{n=57}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=57}^N a_n \dots$$

- Nessuno garantisce che la somma della serie esista. Ad esempio, sia:

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

La serie **Oscilla**. La somma delle serie **non esiste**, infatti:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } N \text{ pari} \\ 0 & \text{se } N \text{ dispari} \end{cases}$$

- Se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge, allora necessariamente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . Infatti, sia  $S := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ . Allora

$$a_N = \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

(perchè se  $f(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$  allora  $f(N-1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$ ). **Non vale** il viceversa: potrebbe benissimo capitare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , però  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  non converga.

### 9.1.1 Esempi importanti

1. **Serie geometrica** (di ragione  $x \in \mathbb{R}$ ):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

Essa converge se e solo se  $-1 < x < 1$  e in tal caso si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

**Conseguenza:**  $0, \bar{9} = 1$

**Dimostrazione:**  $0, \bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots =$

$$\begin{aligned} &= 9 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \cdot \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 1 \right) = \\ &= 9 \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \cdot \frac{10}{9} - 9 = 10 - 9 = 1 \end{aligned}$$

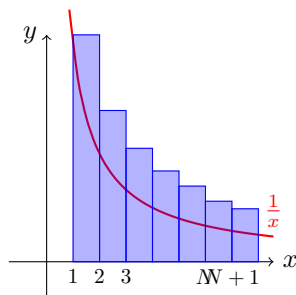
2. **Serie esponenziale:**

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

3. **Serie armonica:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

**Dimostrazione:**



Area dell'unione dei rettangoli  $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$   
 Area sottesa al grafico  $y = \frac{1}{x}$  per  $1 \leq x \leq N+1 =$

$$= \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \log(N+1)$$

Dunque:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \log(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

**Osservazione:**

Facendo stime più precise, si potrebbe dimostrare che vale:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log(N+1) + \gamma + o(1) \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

dove  $\gamma$  è un opportuno numero reale, chiamato la costante di **Eulero-Mascheroni** ( $\gamma \approx 0.577\dots$ ).

4. **Serie armonica generalizzata:** Sia  $s \in \mathbb{R}$  un parametro. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Converge se  $s > 1$  e diverge se  $s \leq 1$  (o oscilla)

## 9.2 Criteri per studiare il carattere di una serie

Per carattere si intende:

- Convergente
- Divergente
- Oscillante

1. **Serie a termini positivi:** criteri del  $\begin{cases} \text{confronto} \\ \text{confronto asintotico} \\ \text{rapporto} \end{cases}$

2. **Serie a segno alterno:** criterio di Leibniz

3. **Serie generali:** convergenza assoluta



### 9.2.1 Serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \text{con } a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Osservazioni generali:**

1. Le serie a termini positivi convergono o divergono, ma **non** oscillano mai, perchè

$$a_0 \leq a_0 + a_1 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \leq \dots$$

Siccome  $a_n \geq 0 \forall n$ , la successione delle somme parziali è non decrescente, quindi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{esiste per monotonia}$$

2. I criteri qui di seguito si applicano anche alle serie i cui termini sono positivi "da un certo punto in poi" (cioè,  $a_n \geq 0$  per ogni  $n$  abbastanza grande, maggiore o uguale di un certo  $n_0$ ). Infatti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n}_{\text{Somma finita}} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

Il carattere della prima serie dipende soltanto dal carattere della serie con somma infinita. Quindi  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge se e solo se  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$  converge.

### 9.2.2 Criterio del confronto

Siano  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  successioni di numeri reali tali che:

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge e vale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverge, allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  diverge.

#### **Esempio 9.2**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge (serie armonica generalizzata)}$$

Per confronto  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$  converge.

**Esempio 9.3**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n}, \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(2)}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{n} = (\ln(2)) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Per confronto  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$  diverge.

**9.2.3 Criterio del confronto asintotico**

Siano  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  successioni di numeri reali tali che  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Supponiamo che il limite

$$\Lambda := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

esista e sia  $0 < \Lambda < +\infty$ . Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge se e solo se } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge.}$$

**Esempio 9.4**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{7n^3 + n \sin(n)}$$

È una serie a termini positivi, perchè  $5n \geq 0$ ,  $|n \sin(n)| \leq |n|$ ,  $7n^3 + n \sin(n) \geq 7n^3 - n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Sia:

$$a_n := \frac{5n}{7n^3 + n \sin(n)}, \quad b_n := \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n \cdot n^2}{7n^3 + n \sin(n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{7 + \frac{\sin(n)}{n^2}} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Per confronto asintotico

### 9.2.4 Corollario/Caso particolare

$P$  è un polinomio di grado  $p$  e  $Q$  è un polinomio di grado  $q$ , allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ converge se e solo se } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{n^q} \text{ converge}$$

#### **Esempio 9.5**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{23} + 42n^2 + 3}{n^{25} - 31n^2 + 23n - 3}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{23}}{n^{25}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

*La serie iniziale converge per confronto asintotico.*

### 9.2.5 Criterio del rapporto

Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali tale che  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che il limite

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + 1}{a_n}$$

esista, finito o infinito.

- Se  $L < 1$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge.
- Se  $L > 1$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverge.
- Se  $L = 1$ , allora non possiamo concludere nulla.

**Esempio 9.6**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 1}{n!}$$

Serie a termini  $> 0$ ,  $a_n := \frac{n^3+1}{n!}$

$$\begin{aligned} \frac{a_n + 1}{a_n} &= \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3 + 1} = \frac{(n+1)^3 + 1}{n^3 + 1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cancel{n^3}((1 + \frac{1}{n})^3 + \frac{1}{n^3})}{\cancel{n^3}(1 + \frac{1}{n^3})} \\ \frac{a_n + 1}{a_n} &\rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}$  converge.

**Esempio 9.7**

Per ogni  $x \in (0, +\infty)$  dato,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  converge.

Serie a termini  $> 0$ . Sia:

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{x^n}{n!} \\ \frac{a_n + 1}{a_n} &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1 \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  converge.

**9.2.6 Serie a segni alterni**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \dots$$

con  $b_n > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

è una serie a segni alterni,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin(n) = -\sin(1) + \sin(2) - \sin(3) + \sin(4) - \dots$$

**Non** è una serie a segni alterni. Invece lo è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n |\sin(n)| = -|\sin(1)| + |\sin(2)| - |\sin(3)| + |\sin(4)| - \dots$$

### 9.2.7 Criterio di Leibnitz

Sia  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali, tali che:

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

(successione decrescente)

Allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$  converge

#### **Esempio 9.8**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Sia  $b_n := \frac{1}{n}$ . Valgono le ipotesi del criterio di Leibnitz:

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$
- $b_{n+1} \leq b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \quad \checkmark$

Quindi  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

### 9.2.8 Serie a termini di segno qualsiasi

#### 9.2.9 Criterio di convergenza assoluta

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$  converge, allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge.

**Osservazioni:**

1. Si dice che una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  **converge assolutamente** quando converge  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ .
2. Può benissimo capitare che una serie converga, ma **non** assolutamente, ad esempio:

**Esempio 9.9**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge, ma}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ non converge}$$

Questo criterio fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza di una serie.

**Esempi:**

**Esempio 9.10**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2 + 1}$$

Considero la serie dei valori assoluti che è una serie a valori positivi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + 1}$$

Si osserva che:

$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Adesso che ci siamo ricondotti ad una serie a valori positivi si possono usare tutti i criteri relativi, in questo caso utilizziamo il criterio del confronto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \text{ converge, per confronto con:}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge (serie armonica generalizzata)}$$

Per confronto,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + 1}$  converge. Per il criterio di convergenza assoluta,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2 + 1}$  converge.

### 9.3 Serie di potenze

Si tratta di serie che dipendono da un parametro  $x \in \mathbb{R}$  e si scrivono nella forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{R}}$  è una successione di coefficienti e  $x_0 \in \mathbb{R}$  è detto il centro della serie.

Ad esempio sono serie di potenze:

**Esempio 9.11**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(x-3)^n \quad (a_n = n, x_0 = 3)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{27^n}{n^2+3} (x-5)^n \quad (a_n = \frac{27^n}{n^2+3}, x_0 = 5)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{27^n}{n!} x^n = 1 + 27x + \frac{27^2}{2} x^2 + \frac{27^3}{6} x^3$$

Le serie di potenze in sostanza rappresenta un polinomio di grado infinito, che dipende dal parametro  $x$ .

**9.3.1 Serie di potenze notevoli con centro  $x_0 = 0$**

•

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{per } x \in (-\infty, +\infty)$$

•

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \text{per } x \in (-\infty, +\infty)$$

•

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \text{per } x \in (-\infty, +\infty)$$

•

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } x \in (-1, 1)$$

•

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \quad \text{per } x \in (-1, 1]$$

•

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x \quad \text{per } x \in [-1, 1]$$

TODO

**Teorema 8** Per ogni serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$  esiste un unico valore  $R \in [0, +\infty]$  t.c.:

- se  $|x - x_0| < R$ , allora la serie **converge (assolutamente)**
- se  $|x - x_0| > R$ , allora la serie **non converge**

### 9.3.2 Osservazioni

1. Reale unico  $R$  è detto **raggio di convergenza** della serie.
2. Per valori  $x$  t.c.  $|x - x_0| = R$  la serie potrebbe convergere oppure no; il carattere varia da caso a caso.
3. Sono possibili anche i casi limite  $R = 0$  (la serie converge solo per  $x = x_0$ ) e  $R = +\infty$  (la serie converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ).

### 9.3.3 Esempi

#### **Esempio 9.12**

Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze con centro in  $x_0 = 7$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} (x-7)^n$$

Per il teorema 8, basta studiare il caso  $x > 7$  e poi per  $x < 7$  si avrà la stessa situazione per simmetria. In questo caso la serie è a termini positivi e si può applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{3^{n+1}}{n+1} (x-7)^{n+1} \cdot \frac{n}{3^n (x-7)^n} = 3(x-7) \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3(x-7)$$

Per il criterio del rapporto, la serie converge se  $3(x-7) < 1$ , diverge se  $3(x-7) > 1$ .

Equivalentemente, se  $x-7 < \frac{1}{3}$  allora la serie converge, se  $x-7 > \frac{1}{3}$  allora la serie diverge. Quindi il raggio di convergenza è  $R = \frac{1}{3}$ .

### 9.3.4 Formule di risoluzione

Ragionando come sopra, si potrebbe dimostrare che il raggio di convergenza  $R$  di una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$  è tale che:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

purchè il limite esista. Inoltre, si potrebbe dimostrare che vale:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$



purchè il limite esista.

Queste formule non sono strettamente necessarie per calcolare il raggio di convergenza, ma possono essere utili.

### 9.3.5 Proprietà

Le serie di potenze godono di proprietà importanti, che non valgono per serie di funzioni più generali. Ad esempio, data una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$  con raggio di convergenza  $R$ , la funzione:

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

è differenziabile e vale:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (a_n(x-x_0)^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

per ogni  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . Inoltre per ogni intervallo  $[p, q] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$  si ha

$$\int_p^q f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_p^q a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \right]_{x=p}^q$$

**Esempio 9.13**

Sviluppo in serie di  $\arctan$  (e formula di Leibnitz per  $\pi$ ).

Sappiamo che:

$$\forall y \in (-1, 1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$$

Se sostituisco  $y = -t^2$

$$\forall t \in (-1, 1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$$

Integro entrambi i membri per  $t \in [0, x]$  dove  $x$  è fissato,  $0 < x < 1$  :

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = [\arctan t]_{t=0}^x$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[ \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_{t=0}^x = \arctan x - \arctan 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$

Si dimostra che questa formula continua a valere per ogni  $x \in [-1, 1]$  sostituisco  $x = 1$ :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Formula di Leibnitz per  $\pi$ .