Esame 28/09/2022

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

Considerare i seguenti sistemi:

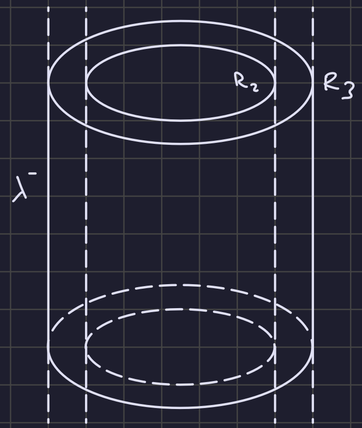
a) un guscio cilindrico indefinito di raggi **R2=0.9cm**, **R3=1cm** sulla cui superficie esterna è stata depositata una densità di carica negativa **$\lambda=-10^{-10}$ C/m**

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}$ m

$R_3 = 10^{-2}$ m

$\lambda = -10^{-10}$ $\frac{C}{m}$

$Q = \lambda \cdot 2\pi R_3 h$



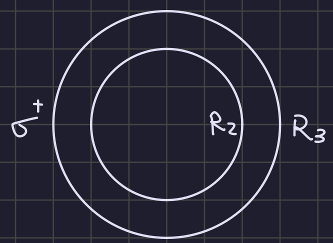
b) un guscio sferico di raggi **R2=0.9cm**, **R3=1cm** sulla cui superficie esterna è stata depositata una densità di carica positiva **$\sigma=10^{-10}$ C/m²**

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}$ m

$R_3 = 10^{-2}$ m

$\sigma = 10^{-10}$ $\frac{C}{m^2}$

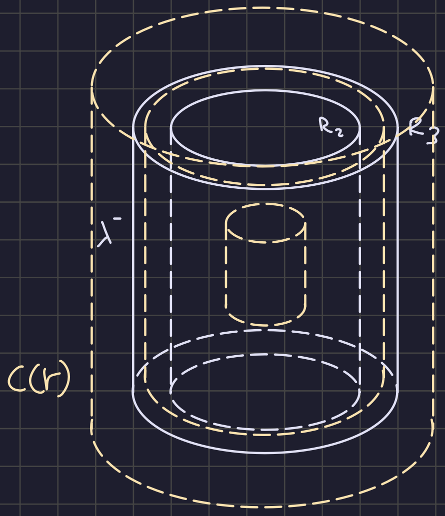
$Q = \sigma \cdot 4\pi R_3^2$



1. Per entrambi i sistemi, si mostri l'applicazione del teorema di Gauss:
   - disegnare le superfici gaussiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo elettrico **E** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico E(r)
   - disegnare le linee di campo
   - disegnare, in modo schematico, le superfici equipotenziali.

Th Gauss: $\oint_{Sup} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Il teorema di Gauss vale per qualsiasi superficie, quindi per calcolare il campo elettrico si possono scegliere superfici con simmetrie che agevolano i calcoli. In questo caso visto che il campo è radiale scelgo come superfici di Gauss dei gusci sferici di raggio r per il sistema B e dei cilindri di raggio r per il sistema A. Su queste superfici il campo è costante e si può tirare fuori dall'integrale.



$$\underset{c(r)}{\oint} E_A(r)\,dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \text{cost.}$$

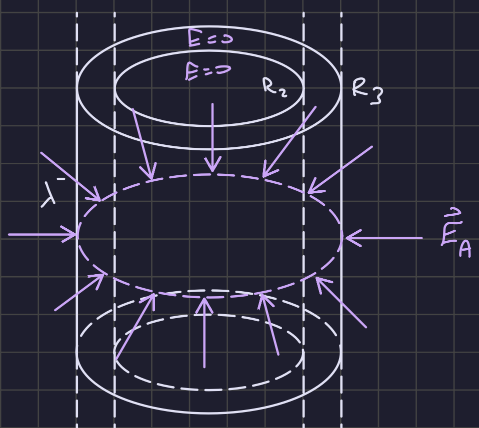
$$E_A(r) \underset{c(r)}{\oint} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

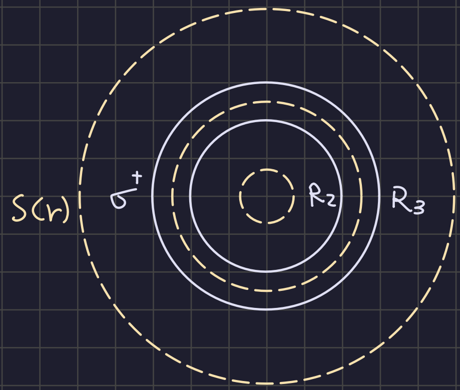
$$E_A(r)\, 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_A(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 r h} \quad \frac{V}{m}$$

$\downarrow$

$$E_A(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ \dfrac{\lambda \cdot 2\pi R_3 h}{2\pi\varepsilon_0 r h} = \dfrac{\lambda R_3}{\varepsilon_0 r} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$





$$\underset{S(r)}{\oint} E_B(r)\,dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \text{cost.}$$

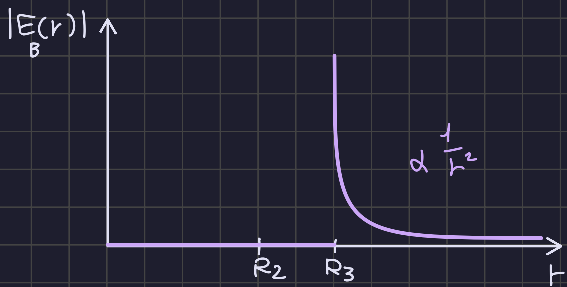
$$E_B(r) \underset{S(r)}{\oint} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

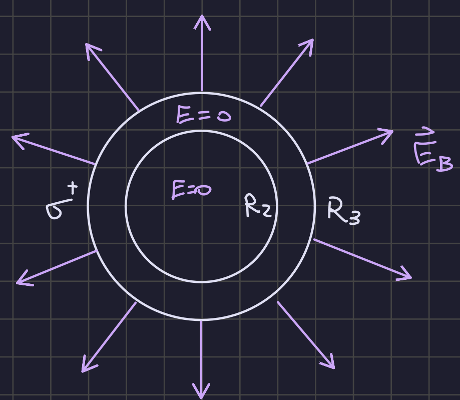
$$E_B(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_B(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \frac{V}{m}$$

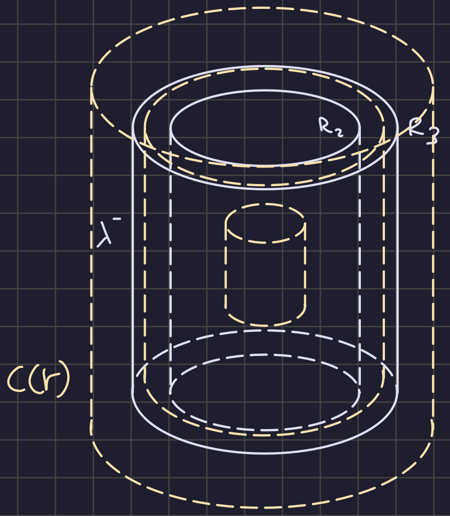
$\downarrow$

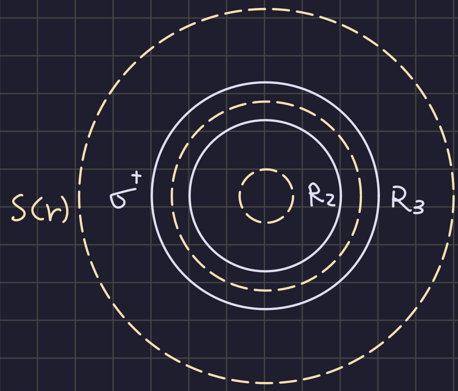
$$E_B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ \dfrac{\sigma \cdot 4\pi R_3^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\sigma R_3^2}{\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$





Le superfici equipotenziali sono le stesse superfici usate per Gauss:





<u>Si consideri il **solo sistema B)**, nel vuoto.</u>

All'interno del guscio viene depositata una sfera di raggio **R1=0.1cm** su cui è depositata una quantità di carica <u>uguale</u> alla carica presente nella superficie R3.

2. descrivere il sistema all'equilibrio e calcolare la nuova distribuzione di carica
3. disegnare le linee di campo

$R_1 = 10^{-3}\ m$

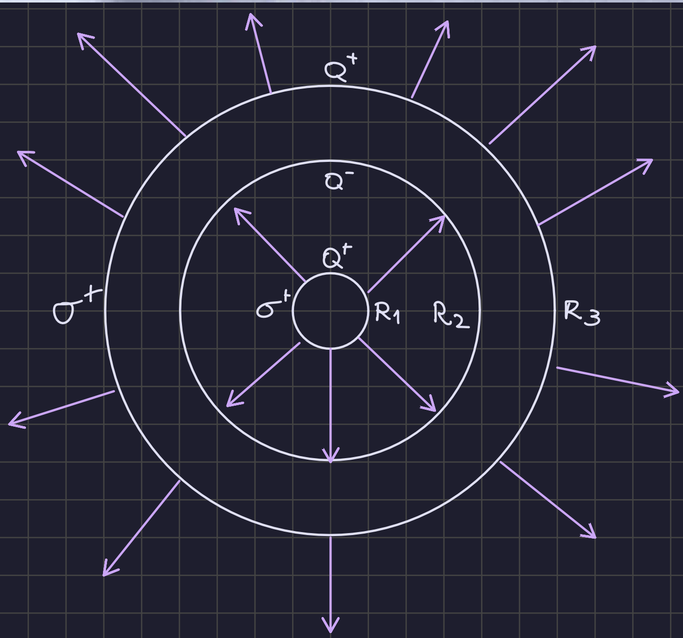
$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\ m$

$R_3 = 10^{-2}\ m$

$\sigma = 10^{-10}\ \frac{C}{m^2}$

$Q_{R_3} = \sigma \cdot 4\pi R_3^2$

$Q_{R_1} = \sigma \cdot 4\pi R_1^2$



All'interno del guscio sferico si forma un campo indotto, mentre all'esterno questo campo indotto si somma a quello che già esisteva all'esterno

$$Q_{est} = Q_{R1} + Q_{R3} = \sigma \cdot 4\pi \left(R_3^2 + R_1^2\right)\ C$$

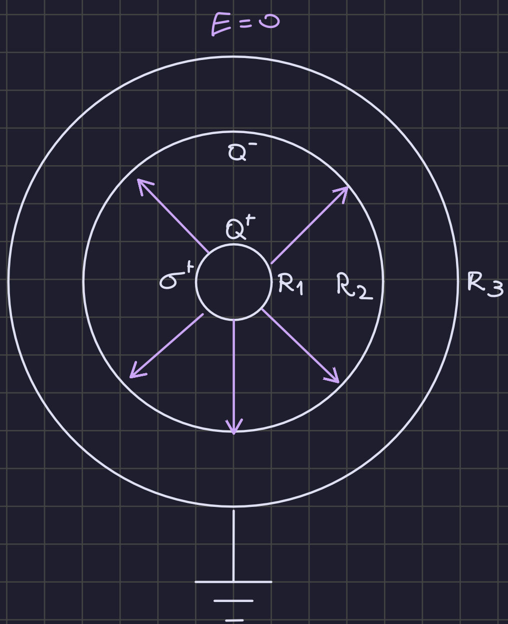
$$\sigma_{R3} = \frac{Q_{est}}{4\pi R_3^2} = \frac{\sigma \cdot \cancel{4\pi}\left(R_3^2 + R_1^2\right)}{\cancel{4\pi} R_3^2} = \frac{\sigma\ \cancel{R_3^2}}{\cancel{R_3^2}} + \frac{\sigma\ R_1^2}{R_3} = \sigma\left(1 + \frac{R_1^2}{R_3^2}\right)\ \frac{C}{m^2}$$

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \vee R_2 < r < R_3 \\ Q_{R1} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \\ Q_{est} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \qquad [C]$$

$$E_B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \vee R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

La sfera esterna viene scaricata a terra:

4. calcolare l'energia **U** del sistema



$$U_{TOT} = U_{int} + U_{est}$$
$$= U_{int} + 0$$
$$= \int_{Vol} \mu_E \, d\tau \qquad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad d\tau = 4\pi r^2 dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 \, 4\pi r^2 dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q_{R1}^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \, 4\pi r^2 dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q_{R1}^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \cancel{4\pi r^2} dr$$

$$= \frac{Q_{R1}^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr$$

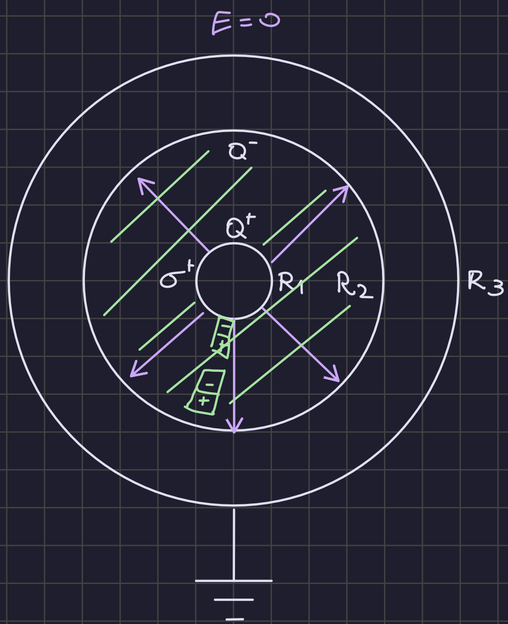
$$= \frac{Q_{R1}^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \quad [J]$$

$$= 6.3 \cdot 10^{-18} \; J$$

Lo spazio interno è ora riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=2**

5. calcolare le cariche di Polarizzazione

$K = 2$



$$\sigma_{Pol}(R_1) = E(R_1)\, \frac{K-1}{K} = \frac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\, \frac{K-1}{K} = 5.6 \; \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_{Pol}(R_2) = E(R_2)\, \frac{K-1}{K} = \frac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\, \frac{K-1}{K} = 7 \cdot 10^{-2} \; \frac{C}{m^2}$$

ESERCIZIO DI MAGNETOSTATICA

Un cavo conduttore di raggio **R_1=5mm** è percorso da una corrente elettrica stazionaria **i=10mA** parallela all'asse e distribuita uniformemente sulla superficie.

1. Si mostri l'applicazione del teorema di Ampere.
   - disegnare le linee amperiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo magnetico **B** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **B(r)**
   - disegnare le linee di campo

$R_1 = 5 \cdot 10^{-3}\, m$

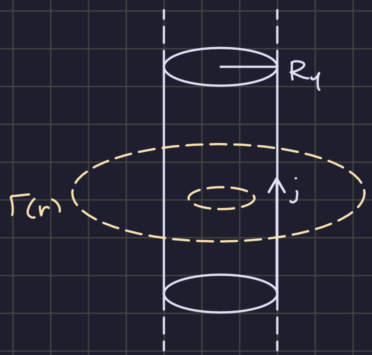
$i = 10^{-2}\, A$

$j = \frac{i}{\pi R_1^2}$

$i_c = j \cdot \pi r^2 = \frac{i}{\cancel{\pi} R_1^2} \cdot \cancel{\pi} r^2 = \frac{i r^2}{R_1^2}$

Th Ampere: $\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = Q_{libere}$

Per calcolare il campo magnetico bisogna scegliere delle linee amperiane su cui il campo è costante per poterlo tirare fuori dall'integrale. In questo caso le linee amperiane sono cerchi di raggio r



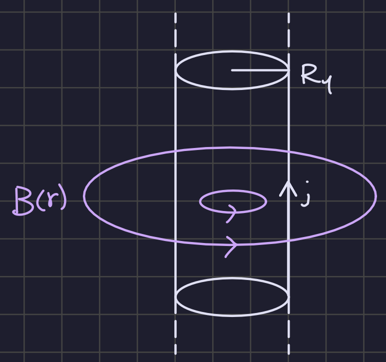
$\oint_{\Gamma(r)} B(r)\, dr = \mu_0\, i_c$

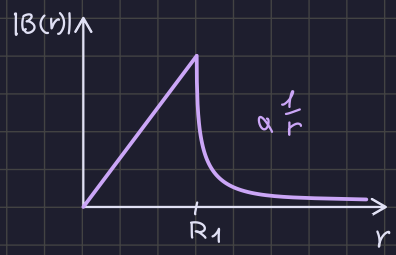
$B(r) \int_{\Gamma(r)} dr = \mu_0\, i_c$

$B(r)\, 2\pi r = \mu_0\, i_c$

$B(r) = \frac{\mu_0\, i_c}{2\pi r}$ $\qquad i_c = \begin{cases} \frac{ir}{R_1^2} & se\ r < R_1 \\ i\ se & r \geq R_1 \end{cases}$

$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0\, i r}{2\pi R_1^2} & se\ r < R_1 \\ \frac{\mu_0\, i}{2\pi r} & se\ r \geq R_1 \end{cases}$ $\qquad [T]$

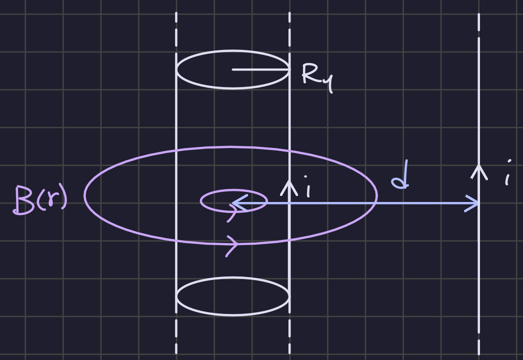




A distanza **d=5m** dall'asse del conduttore viene posto, parallelo ad esso, un filo percorso dalla stessa corrente **i** .

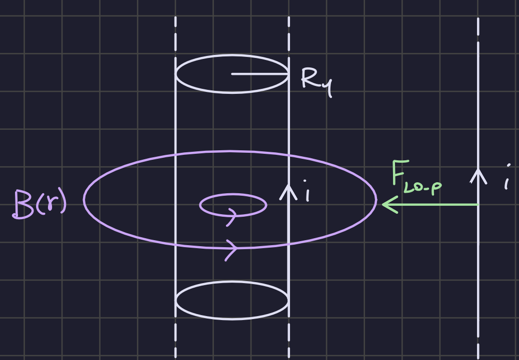
2. Calcolare la forza **F** agente sul filo (MODULO DIREZIONE VERSO!!!)

$d = 5m$



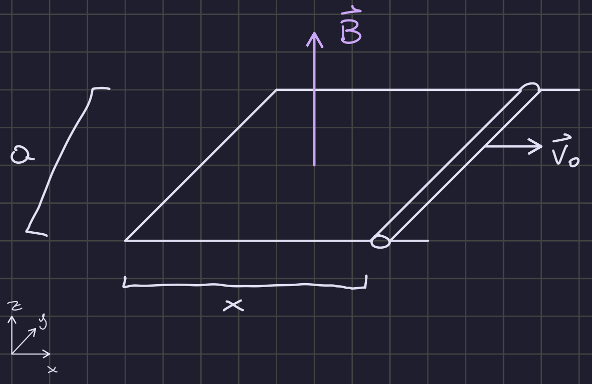
Legge di Laplace $F_{Lap} = i\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$

$$F_{Lap} = i \cdot B(d)$$
$$= i \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$
$$= \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$
$$= 4 \cdot 10^{-12} \quad N$$



ESERCIZIO DI INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Un circuito a U vincolato nel piano XY e formato da due binari paralleli ad X distanti **a=1cm**, ha una parte mobile libera di scorrere senza attrito, in direzione x. Nello spazio è presente un campo magnetico stazionario e uniforme **B=0.5T** in direzione normale al circuito (fig.). Il tratto mobile viene tenuto in moto con velocità $\mathbf{v_0}$**=0.5ms**$^{-1}$ lungo x costante.



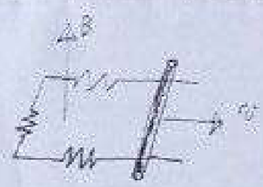
$a = 10^{-2}\ m$

$B = 5 \cdot 10^{-1}\ T$

$v_0 = 5 \cdot 10^{-1}\ \frac{m}{s}$ COST.

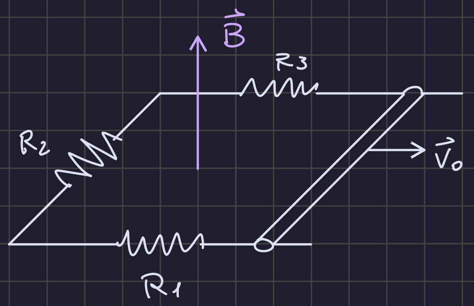
Si trascuri ogni fenomeno di autoinduzione.

Il circuito viene chiuso con le resistenze di **R1=5kΩ**, **R1=2kΩ**i, **R1=2kΩ** collegate come in figura



1- Calcolare la corrente indotta nella barretta $\mathbf{i_{ind}}$

2- Calcolare il bilancio energetico nei diversi elementi del sistema



$R_1 = 5 \cdot 10^3\ \Omega$

$R_2 = 2 \cdot 10^3\ \Omega$

$R_3 = 2 \cdot 10^3\ \Omega$

Legge del flusso elementare di Laplace:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$\Phi(B) = B \cdot ax \quad [Wb]$

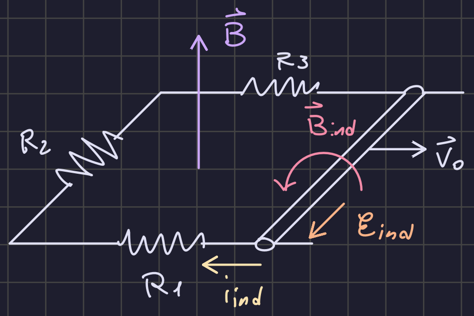
$\mathcal{E}_{ind} = -Bav = -2.5 \cdot 10^{-3}\ [T]$

Per la legge di lenz la forza elettromagnetica indotta si oppone alla variazione del flusso

$R_{eq} = \sum_{i=1}^{3} R_i = 9 \cdot 10^3\ \Omega$

$\mathcal{E} = iR \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R_{eq}} = \frac{-Bav_0}{R_{eq}} = -2.8 \cdot 10^{-7} A$



$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = V \cdot i$

Potenza erogata: $P_\mathcal{E} = V_\mathcal{E}\, i$

$= \mathcal{E}_{ind}\, i$

$= Bav \dfrac{\mathcal{E}}{R_{eq}}$

$= Bav \dfrac{Bav}{R_{eq}}$

$= \dfrac{B^2 a^2 v^2}{R_{eq}^2}$

Potenza dissipata $P_{R_{eq}} = V_\mathcal{E}\, i$

$= R_{eq}\, i\, i$

$= R_{eq}\, i^2$

$= R_{eq} \cdot \left(\dfrac{\mathcal{E}}{R_{eq}}\right)^2$

$= R_{eq} \cdot \left(\dfrac{Bav}{R_{eq}}\right)^2$

$= \cancel{R_{eq}} \dfrac{B^2 a^2 v^2}{R_{eq}^2}$

$= \dfrac{B^2 a^2 v^2}{R_{eq}}$ [W]

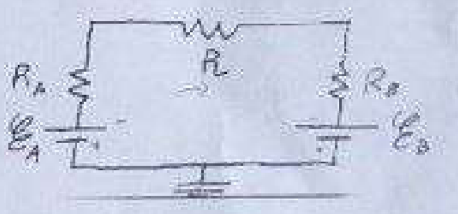
Potenza meccanica asta: $P_{asta} = F \cdot v$

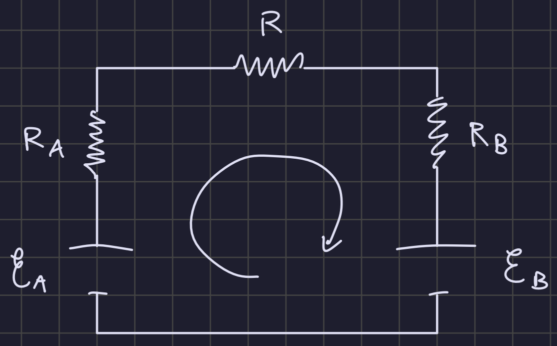
$= B a i v$

$= \dfrac{Bav}{R_{eq}} \cdot Bav$

$= \dfrac{B^2 a^2 v^2}{R_{eq}^2}$

3- Impostare le leggi di Kirchhoff per il circuito in figura





$$\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B = R_A + R + R_B$$