Sistemi LTI con Laplace

1. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 5\frac{dv(t)}{dt} + 6v(t) = \frac{1}{3}u(t), \\ \frac{dv(0^-)}{dt} = 2 \\ v(0^-) = 1 \end{cases}$$

e considerando il seguente input:

$$u(t) = \frac{1}{5}e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

1) Discutere la stabilità del sistema

Risolviamo l'equazione caratteristica del sistema

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$s_1 = -3 \qquad \mu_{1,2} = 1$$
$$s_2 = -2$$

Il sistema è asintoticamente stabile perchè entrambe le soluzioni hanno parte reale minore di 0, di conseguenza il sistema è anche BIBO stabile.

2) Determinare la risposta impulsiva usando Laplace

La risposta impulsiva è il rapporto tra il polinomio caratteristico dell'ingresso e il polinomio caratteristico dell'uscita

$$H(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2+5s+6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+3)(s+2)}$$

Scomponiamo in fratti semplici per fare l' antitrasformata di Laplace

$$\frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} = \frac{As+2A+Bs+3B}{(s+3)(s+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ -2B+3B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+3}$$

Facciamo l'antitrasformata di Laplace $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s-\lambda)^{l+1}}\right](t) = A\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{s+3}\right](t) =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-2t}\delta_{-1}(t) - \frac{1}{3}\,e^{-3t}\,\delta_{-1}(t)$$

3) Determinare la risposta totale usando Laplace

$$v''(t) + 5v'(t) + 6v(t) = \frac{1}{3}u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}\left[v''(t) + 5v'(t) + 6v(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}u(t)\right]$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}\left[v''(t)\right](s) = s^2 V(s) - \left[v(0^-)\,s + v'(0^-)\right] = s^2 V(s) - s - 2$$

$$5\,\mathcal{L}\left[v'(t)\right](s) = 5\left[sV(s) - v(0^-)\right] = 5sV(s) - 5$$

$$6\,\mathcal{L}\left[v(t)\right](s) = 6\,V(s) = 6\,V(s)$$

$$\frac{1}{3}\,\mathcal{L}\left[u(t)\right](s) = \frac{1}{3}U(s) = \frac{1}{3}U(s)$$

$$s^2 V(s) - s - 2 + 5sV(s) - 5 + 6V(s) = \frac{1}{3}U(s)$$

$$(s^2 + 5s + 6)\,V(s) + (-s - 2 - 5) = \frac{1}{3}U(s)$$

$$V(s) = \frac{\frac{1}{3}U(s) + s + 7}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2+5s+6}\,U(s) + \frac{s+7}{s^2+5s+6}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\left[u(s)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{5}e^{-2t}\,\delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$V(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(s+3)(s+2)}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{s+7}{(s+3)(s+2)}$$

$$= \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(s+3)(s+2)^2} + \frac{s+7}{(s+3)(s+2)}$$

$$= \frac{1 + (s+7)(s+2)\,15}{15\,(s+3)(s+2)^2}$$

$$= \frac{1 + (s^2 + 2s + 7s + 14)\,15}{15\,(s+3)\,(s+2)^2}$$

$$= \frac{15s^2 + 135s + 211}{15\,(s+3)\,(s+2)^2}$$

$$= \frac{1}{15}\,\frac{15s^2 + 135s + 211}{(s+3)(s+2)^2}$$

Trasformiamo in fratti semplici

$$V(s) = \frac{1}{15}\left(\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}\right)$$

$$C_{i,l} = \lim_{s \to \alpha_i} \frac{d^{\mu_i - l - 1}\left((s-\alpha_i)^{\mu_i} \cdot \frac{r(s)}{d(s)}\right)}{d^{\mu_i - l - 1}}$$

$$A = \lim_{s \to -3} \frac{d^{1-0-1}\,\cancel{(s+3)}\,\frac{15s^2 + 135s + 211}{\cancel{(s+3)}(s+2)^2}}{d^{1-0-1}} = \frac{135 - 405 + 211}{1} = -59$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{d^{2-0-1}\,\cancel{(s+2)^2}\,\frac{15s^2 + 135s + 211}{(s+3)\cancel{(s+2)^2}}}{d^{2-0-1}} = \frac{d}{ds}\,\frac{15s^2 + 135s + 211}{(s+3)}$$

$$= \frac{(s+3)(30s + 135) + (15s^2 + 135s + 211)}{(s+3)^2}$$

$$= \frac{30s^2 + 135s + 90s + 405 + 15s^2 + 135s + 211}{(s+3)^2} = \frac{45s^2 + 360s + 616}{(s+3)^2}$$

$$= \frac{168 - 720 + 616}{1} = 64$$

$$C = \lim_{s \to -3} \frac{d^{1-0-1}\,\cancel{(s+2)^2}\,\frac{15s^2 + 135s + 211}{(s+3)\cancel{(s+2)^2}}}{d^{1-0-1}} = \frac{60 - 270 + 211}{1} = 1$$

$$V(s) = \frac{1}{15}\left(\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{15}\left(\frac{-59}{s+3} + \frac{64}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}\right)$$

$$= -\frac{59}{15}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{64}{15}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(s+2)^2}$$

Facciamo l'antitrasformata

$$v(s) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)](t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{59}{15}\cdot\frac{1}{s+3}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{64}{15}\cdot\frac{1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(s+2)^2}\right](t)$$

$$= \left(-\frac{59}{15}\cdot e^{-3t} + \frac{64}{15}\cdot e^{-2t} + \frac{1}{15}\cdot t\cdot e^{-2t}\right)\cdot \delta_{-1}(t)$$

2. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\begin{cases} \frac{d^3v(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 6\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = u(t), \\ \frac{d^2v(0^-)}{dt^2} = 1 \\ \frac{dv(0^-)}{dt} = 0 \\ v(0^-) = 1 \end{cases}$$

e considerando il seguente input:

$$u(t) = 12e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

1) Discutere la stabilità del sistema

Risolviamo il polinomio caratteristico del sistema

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

$$(s+2)(s^2+2s+2) = 0$$

$$s_1 = -2$$

$$s_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1-i \\ -1+i \end{cases}$$

$$s_1 = -2 \qquad \mu_{1,2,3} = 1$$
$$s_2 = -1-i$$
$$s_3 = -1+i$$

Il sistema è asintoticamente stabile perchè la parte reale di tutte le radici è minore di 0, quindi il sistema è anche BIBO stabile.

2) Determinare la risposta totale usando Laplace

$$v'''(t) + 4v''(t) + 6v'(t) + 4v(t) = u(t)$$

$$\mathcal{L}[v'''(t)](s) = s^3 V(s) - [s^2 \cdot v(0^-) + s \cdot v'(0^-) + v''(0^-)]$$

$$= s^3 V(s) - s^2 - 1$$

$$4\mathcal{L}[v''(t)](s) = 4\cdot(s^2 V(s) - (s \cdot v(0^-) + v'(0^-)))$$

$$= 4s^2 V(s) - 4s$$

$$6\mathcal{L}[v'(t)](s) = 6(sV(s) - (v(0^-))) = 6(sV(s) - 1) = 6sV(s) - 6$$

$$4\mathcal{L}[v(t)](s) = 4V(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = U(s)$$

$$s^3 V(s) - s^2 - 1 + 4s^2 V(s) - 4s + 6sV(s) - 6 + 4V(s) = \frac{12}{s+1}$$

$$(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)V(s) - s^2 - 4s - 7 = U(s)$$

$$V(s) = \frac{s^2 + 4s + 7}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} + \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} U(s)$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s) = \mathcal{L}[12e^{-t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{12}{s+1}$$

$$V(s) = \frac{s^2 + 4s + 7}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} + \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} \cdot \frac{12}{s+1}$$

$$= \frac{s^2 + 4s + 7}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} + \frac{12}{(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)(s+1)}$$

$$= \frac{12 + (s^2 + 4s + 7)(s+1)}{(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)(s+1)} = \frac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

Trasformiamo in fratti semplici

$$\frac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+(1-i)} + \frac{D}{s+(1+i)}$$

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{d^{1-0-1} \cancel{(s+1)} \dfrac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s^2+2s+2)}}{d^{1-0-1}}$$

$$= \frac{-1 + 5 - 11 + 19}{(1 \cancel{-2} \cancel{+2})} = 12$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{d^{1-0-1} \cancel{(s+2)} \dfrac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s^2+2s+2)}}{d^{1-0-1}}$$

$$= \frac{-8 + 20 - 22 + 19}{-(\cancel{4} - \cancel{4} + 2)} = -\frac{9}{2}$$

$$C = \lim_{s \to -1+i} \frac{d^{1-0-1} (s+(1-i)) \dfrac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)}}{d^{1-0-1}}$$

$$= \frac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s+(1+i))} = \frac{2+2i - 10i - 11 + 11i + 19}{i(1+i)2i} = \frac{10+3i}{-2-2i}$$

$$D = \lim_{s \to -1-i} \frac{d^{1-0-1} (s+(1+i)) \dfrac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)}}{d^{1-0-1}}$$

$$= \frac{s^3 + 5s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s+(1-i))} = \frac{2-2i + 10i - 11 - 11i + 19}{-i(1-i)-2i} = \frac{6-3i}{-2+2i}$$

$$V(s) = \frac{12}{s+1} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{10+3i}{-2-2i} \cdot \frac{1}{s+(1-i)} + \frac{6-3i}{-2+2i} \cdot \frac{1}{s+(1+i)}$$

Facciamo l'antitrasformata di Laplace

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10+3i}{-2-2i}\cdot\frac{1}{s+(1-i)}\right] +$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6-3i}{-2+2i}\cdot\frac{1}{s+(1+i)}\right]$$

$$= \left(12e^{-t} - \frac{9}{2}e^{-2t} + \frac{10+3i}{-2-2i}\cdot e^{-1+i} + \frac{6-3i}{-2+2i}\cdot e^{-1-i}\right)\delta_{-1}(t)$$

3. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{dv(t)}{dt} - 12v(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 5\frac{du(t)}{dt} + 6u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

e le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 1 \qquad \frac{dv(0^-)}{dt} = 0.$$

1) Discutere la stabilità del sistema

Risolviamo il polinomio caratteristico

$$s^2 + s - 12 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -\frac{8}{2} = -4 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$s_1 = -4$

$s_2 = 3 \qquad \mu_{1,2} = 1$ (molteplicità)

Il sistema non è asintoticamente stabile perchè la parte reale delle radici non è minore di 0. Per verificare se il sistema è BIBO stabile bisogna calcolare la funzione di trasferimento e vedere se le radici che non hanno parte reale negativa si semplificano:

$$H = \frac{s^2 - 5s + 6}{s^2 + s - 12} = \frac{\cancel{(s-3)}(s-2)}{(s+4)\cancel{(s-3)}} = \frac{s-2}{s+4}$$

$$s_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

La radice S_2 con parte reale negativa si semplifica nella funzione di trasferimento, di conseguenza il sistema è BIBO stabile.

2) Determinare la risposta libera usando Laplace

$$v''(t) + v'(t) - 12v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 6u(t)$$

Facciamo la trasformata di laplace di tutto il sistema

$$\mathcal{L}[v''(t)] = s^2 V(s) - \left(s \cdot v(0^-) + v'(0^-)\right) = s^2 V(s) - s$$

$$\mathcal{L}[v'(t)] = sV(s) - v(0^-) = sV(s) - 1$$

$$-12\,\mathcal{L}[v(t)] = -12\,V(s)$$

$$\mathcal{L}[u''(t)] = s^2 U(s) - \left(s u(0^-) + u'(0^-)\right) = s^2 U(s)$$

$$-5\,\mathcal{L}[u'(t)] = -5\left(s U(s) - \left(u(0^-)\right)\right) = -5sU(s)$$

$$6\,\mathcal{L}[u(t)] = 6U(s)$$

$$s^2 V(s) - s + sV(s) - 1 - 12V(s) = s^2 U(s) - 5sU(s) + 6U(s)$$

$$(s^2 + s - 12)\,V(s) - s - 1 = (s^2 - 5s + 6)\,U(s)$$

$$V(s) = \frac{(s^2 - 5s + 6)\,U(s) + s + 1}{s^2 + s - 12}$$

$$= \frac{s^2 - 5s + 6}{s^2 + s - 12}\,U(s) + \underbrace{\frac{s+1}{s^2 + s - 12}}_{\text{Risposta libera}}$$

$$V_l(s) = \frac{s+1}{s^2 + s - 12} = \frac{s+1}{(s+4)(s-3)}$$

Passiamo ai fratti semplici

$$\frac{s+1}{(s+4)(s-3)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-3} = \frac{sA - 3A + sB + 4B}{(s+4)(s-3)} = \frac{s(A+B) - 3A + 4B}{(s+4)(s-3)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -3A + 4B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 - B \\ -3 + 3B + 4B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 - B \\ 7B = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{7} \\ B = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$V_l(s) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{s-3}$$

Applichiamo l'antitrasformata di Laplace

$$v_l(t) = \left(\frac{3}{7} \cdot e^{-4t} + \frac{4}{7} \cdot e^{3t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

3) Determinare la funzione di trasferimento del sistema

L'abbiamo trovata nella domanda 1:

$$H(s) = \frac{s-2}{s+4}$$