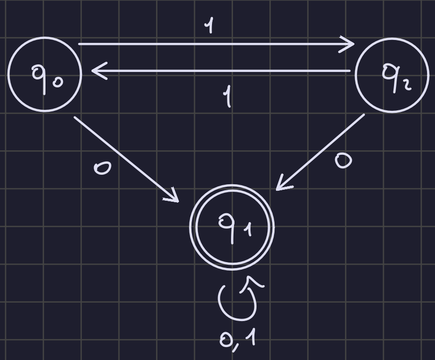
Esercizio 1.1 (Automa e dimostrazione). *Si determini il linguaggio accettato dall'automa rappresentato mediante la seguente matrice di transizione dove* $\mathsf{F} = \{q_1\}$.

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_1	q_0



Esempi

$001 \in L$

$1101 \in L$

$111 \notin L$

$$L = \{\sigma \in \{0,1\}^* \mid \sigma \text{ contiene almeno uno } 0\}$$

Per dimostrare che questo è un linguaggio regolare bisogna dimostrare:

$$L = L(M) \iff \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostriamo:

$$L = L(M) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \in F$$

$$L = L(M) \Leftarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F \quad \equiv \quad L \neq L(M) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in \{q_0, q_1\} \notin F$$

Caso base

$|\sigma| = 0$: $\quad \sigma = \varepsilon \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$

$|\sigma| = 1$: $\quad \sigma = 1 \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \notin F$

$\quad \sigma = 0 \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \in F$

Passo induttivo

Supponiamo che la tesi valga per: $\forall \sigma \in \{0,1\}^*.\ |\sigma| \leq n$

Dimostriamo che vale anche per $\forall \sigma \in \{0,1\}^*.\ |\sigma| = n+1$

$\sigma \in \{0,1\}^*.\ |\sigma| \leq n$

se $\sigma \in L$

- $\sigma' = \sigma 0 \to \sigma = 0^+ \overset{II}{\to} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 0) = \delta(q_1, 0) = q_1 \in F \to \sigma' \in L$
- $\sigma' = \sigma 1 \to \sigma = 0^+ \overset{II}{\to} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1 \in F \to \sigma' \in L$

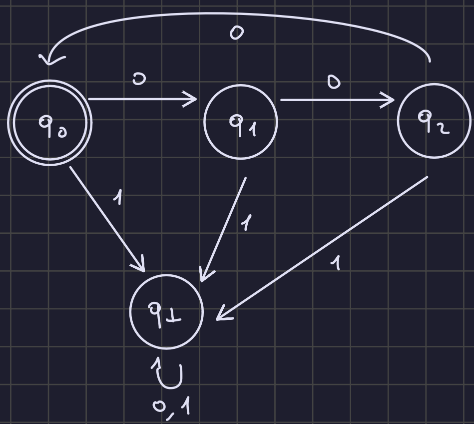
Se $\sigma \notin L$

- $\sigma' = \sigma 0 \overset{II}{\Rightarrow} \sigma = 1^* \overset{IF}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 0) = \delta(\{q_0, q_2\}, 0) = q_1 \in F \rightarrow \sigma' \in L$
- $\sigma' = \sigma 1 \overset{II}{\Rightarrow} \sigma = 1^*$
  - se $|\sigma|$ é dispari $\overset{IF}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_2, 1) = q_0 \notin F \rightarrow \sigma' \notin L$
  - se $|\sigma|$ é pari $\overset{IF}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_0, 1) = q_2 \notin F \rightarrow \sigma' \notin L$

Abbiamo dimostrato che L = L(M) e quindi che il linguaggio è regolare $\square$

Esercizio 1.2 (Automa e dimostrazione). *Si dimostri che il linguaggio* L *è regolare*

$$L = \{\ 0^{3n} \mid n \geq 0\ \},\ \Sigma = \{0, 1\}$$



Esempi

000	$\in L$
0000	$\notin L$
0	$\notin L$
1000	$\notin L$
ε	$\in L$

Per dimostrare che il linguaggio è regolare bisogna mostrare che L = L(M)

$$\sigma \in L \leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostriamo

$$\sigma \in L \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \in F$$

$$\sigma \notin L \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in \{q_1, q_2, q_\perp\} \notin F$$

Caso base

$|\sigma| = 1$

- $\sigma = 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$
- $\sigma = 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(q_0, 1) = q_\perp \notin F$

$|\sigma| = 2$

- $\sigma = 00 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \notin F$
- $\sigma = 01 \vee \sigma = 10 \vee \sigma = 11 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_\perp \notin F$

$|\sigma| = 3$

- $\sigma = 000 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \in F$
- altrimenti $\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_\perp \notin F$

Passo induttivo

Supponiamo che la tesi valga per $|\sigma| \leq n$ dimostriamo che vale anche per $|\sigma| = n+1$

$\sigma = \sigma' v$ dove $|\sigma'| = n$

$\sigma \in L \rightarrow \sigma' = 0^{3i-1} \notin L$

- $\sigma = \sigma' 0 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_2, 0) = q_0 \in F \in L$

$\sigma \notin L \vee \sigma' \in L \rightarrow \sigma' = (0^3)^+$

- $\sigma = \sigma' 1 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1) = \delta(q_0, 1) = q_\perp \notin F \notin L$
- $\sigma = \sigma' 0 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F \notin L$

$\sigma \notin L \vee \sigma' \notin L \rightarrow \sigma' = 0^{3i}$

- $\sigma = \sigma' 0 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F \notin L$

Abbiamo dimostrato che $L = L(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$, cioè che il linguaggio è regolare $\square$

Esercizio 1.3 (Automa e dimostrazione). *Si dimostri che il linguaggio, su $\Sigma = \{0, 1\}$, che contiene l'insieme di tutte le stringhe tali che il penultimo simbolo è 0, è regolare fornendo direttamente il DFA che lo riconosce.*

$$L = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, a \in \Sigma \,.\, \sigma = v0a\}$$

Esempi

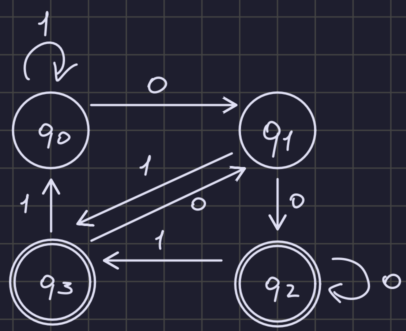
$\varepsilon \notin L$

$01 \in L$

$101 \in L$

$00 \in L$

$111 \notin L$



Dimostrazione

$\sigma \in L \iff \hat{\delta}(q_0, x) \in F$

Dimostro per induzione sulla lunghezza di σ

Caso base

$|\sigma| < 2 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_0, q_1\} \notin F$

$|\sigma| = 2 \Rightarrow \sigma = 00 \quad \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \in F$

$\sigma = 01 \quad \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_3 \in F$

$\sigma = 10 \quad \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \notin F$

$\sigma = 11 \quad \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva

1) $\forall \sigma .\ \exists n > 1 .\ |\sigma| \leq n ,\ \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_2, q_3\} \in F$

2) $\forall \sigma .\ \exists n \in \mathbb{N} .\ |\sigma| \leq n ,\ \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_0, q_1\} \notin F$

Dimostriamo che prendendo una stringa $\sigma .\ |\sigma| = n+1$ il penultimo simbolo è 0

$\sigma = \sigma' \alpha \qquad |\sigma'| = n \qquad \alpha \in \Sigma \qquad |\sigma| = n+1$

- $\sigma \in L$

  - $\sigma = \sigma' 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

    $\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0)$

$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$

> Caso 1: σ' ha come ultimi due simboli 0

$\overset{Hp1.}{\Rightarrow} \delta(q_2, 0) = q_2 \in F$

> Caso 2: σ' ha come penultimo simbolo un simbolo diverso da 0 e come ultimo simbolo uno 0

$\overset{Hp2.}{\Rightarrow} \delta(q_1, 0) = q_2 \in F$

- $\sigma = \sigma' 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1)$

$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$

> Caso 1: σ' ha come ultimi due simboli 0

$\overset{Hp1.}{\Rightarrow} \delta(q_2, 0) = q_3 \in F$

> Caso 2: σ' ha come penultimo simbolo un simbolo diverso da 0 e come ultimo simbolo uno 0

$\overset{Hp2.}{\Rightarrow} \delta(q_1, 0) = q_3 \in F$

- $\sigma \notin L$

- $\sigma = \sigma' 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0)$

$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$

> Caso 1: σ' finisce con 01

$\overset{Hp1.}{\Rightarrow} \delta(q_3, 0) = q_1 \notin F$

> Caso 2: σ' è vuota o sono tutti 1

$\overset{Hp2}{\Rightarrow} \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$

- $\sigma = \sigma' 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1)$

$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$

> Caso 1: σ' finisce con 01

$\overset{Hp1.}{\Rightarrow} \delta(q_3, 0) = q_0 \notin F$

> Caso 2: σ' è vuota o sono tutti 1

$\overset{Hp^2}{\Longrightarrow} \delta(q_0, 0) = q_0 \notin F$

Abbiamo dimostrato che il linguaggio è riconosciuto dall'automa, quindi è regolare. $\square$

Esercizio 1.4 (Automa e dimostrazione). *Si dimostri che è regolare il linguaggio composto da stringhe di 0 e 1 tali che:*

- *ci sono almeno due "0" consecutivi, e*
- *non vi sono mai due "1" consecutivi*

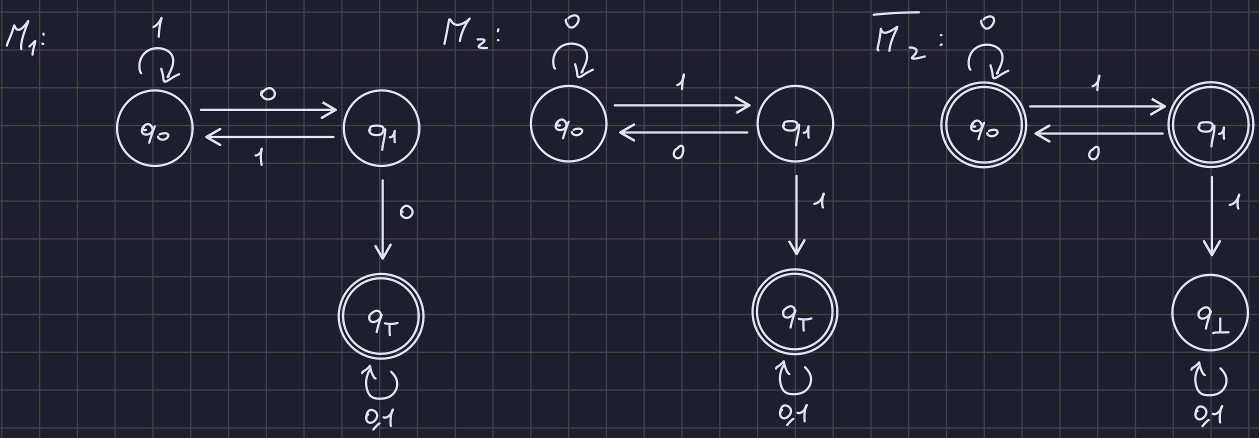
$\Sigma = \{0, 1\}$

$L_1 = \{ \sigma \in \Sigma^* \mid \text{ci sono almeno due 0 consecutivi} \}$

$L_2 = \{ \sigma \in \Sigma^* \mid \text{ci sono almeno due 1 consecutivi} \}$

$L = L_1 \cap \overline{L_2}$

Se L_1 e L_2 sono regolari, allora L è regolare per la proprietà di chiusura. Quindi troviamo un automa che riconosce il linguaggio L_1 e dimostriamo che è regolare, se L_1 è regolare lo è anche L_2 perchè sono lo stesso linguaggio ma riconoscono un simbolo diverso, quindi basta dimostrarne uno.



Dimostriamo L_1

Dimostriamo per induzione sulla lunghezza della stringa $|\sigma|$

Tesi:

$L_1 = L_1(M_1) \Rightarrow \sigma \in L \iff \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$

Caso base

$|\sigma| = 2 \rightarrow \sigma = 00 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_T \in F$ $\qquad |\sigma| < 2 \notin L$

$\sigma = 01 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$

$\sigma = 10 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \notin F$

$\sigma = 11 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva

1) $\forall \sigma \in \Sigma^*. \ \exists n > 1. \ |\sigma| \leq n. \ \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_T\} \in F$

2) $\forall \sigma \in \Sigma^*. \ \exists n \in \mathbb{N}. \ |\sigma| \leq n. \ \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_0, q_1\} \notin F$

Dimostriamo che la tesi vale per le stringhe di lunghezza n+1

$\sigma = \sigma'\alpha \ . \ |\sigma| = n+1, \ |\sigma'| = n, \ \alpha \in \Sigma$

- $\sigma \in L$

  - $\sigma = \sigma' 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$
    $\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0)$
    $\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$

    > Caso 1: σ' contiene almeno due 0 consecutivi

    $\xRightarrow{Hp1} \delta(q_T, 0) = q_T \in F$

    > Caso 2: σ' non ci sono due 0 consecutivi e finisce con 0

    $\xRightarrow{Hp2} \delta(q_1, 0) = q_T \in F$

  - $\sigma = \sigma' 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$
    $\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1)$
    $\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$
    $\xRightarrow{Hp1} \delta(q_T, 0) = q_T \in F$ σ' contiene almeno due 0 consecutivi

- $\sigma \notin L$

  - $\sigma = \sigma' 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$
    $\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0)$
    $\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$
    $\xRightarrow{Hp2} \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$ σ' è vuota o finisce con 1 e non contiene due zeri consecutivi

  - $\sigma = \sigma' 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$
    $\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1)$
    $\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$
    $\xRightarrow{Hp2} \delta(\{q_0, q_1\}, 1) = q_0 \notin F$ σ' è vuota o finisce con 1 e non contiene due zeri consecutivi (q_0) oppure non ci sono due 0 consecutivi e finisce con 0 (q_1)

Abbiamo dimostrato che L_1 è regolare, di conseguenza anche L_2 è regolare perchè è riconosciuto dallo stesso automa di L_1 con i simboli invertiti. Siccome L_2 è regolare anche il complemento di L_2 è regolare e quindi l'intersezione tra L_1 e L_2 è regolare siccome i linguaggi sono chiusi rispetto all'intersezione:

$$L_1 = L_1(M_1) \land L_2 = L_2(M_2) \implies L = L_1 \cap \overline{L_2} = L(M) \qquad \square$$

Esercizio 1.5 (Automa e dimostrazione). *Sia $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$. Si dimostri che il linguaggio:*

$$L = \{\varepsilon\} \cup \{\ a_n \dots a_0 \mid a_i \in \Sigma, n \geq 0, \boxed{a_n \neq 0}, \left(\sum_{i=0}^{n} a_i (10)^i\right) \bmod 3 = 0\ \}$$

è regolare, ovvero il linguaggio dei numeri decimali divisibili per tre. Si spieghi il principio usato per la costruzione dell'automa. Si riscriva poi l'automa con l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ e si dia una dimostrazione formale di correttezza per il linguaggio corrispondente su Σ.

Contraddizione perchè il primo carattere non può essere 0, ma 0 è un numero divisibile per 3 e quindi deve essere accettato

Il modulo di 3 genera 3 classi di equivalenza:

- Concatenare i simboli 0,3,6,9 ad una stringa equivale a sommare 0 al resto:

$$(val(\sigma) + \alpha) \bmod 3 = val(\sigma) \bmod 3 + 0 \qquad \alpha \in \{0, 3, 6, 9\}$$

- Concatenare i simboli 1,4,7 ad una stringa equivale a sommare 1 al resto:

$$(val(\sigma) + \alpha) \bmod 3 = val(\sigma) \bmod 3 + 1 \qquad \alpha \in \{1, 4, 7\}$$

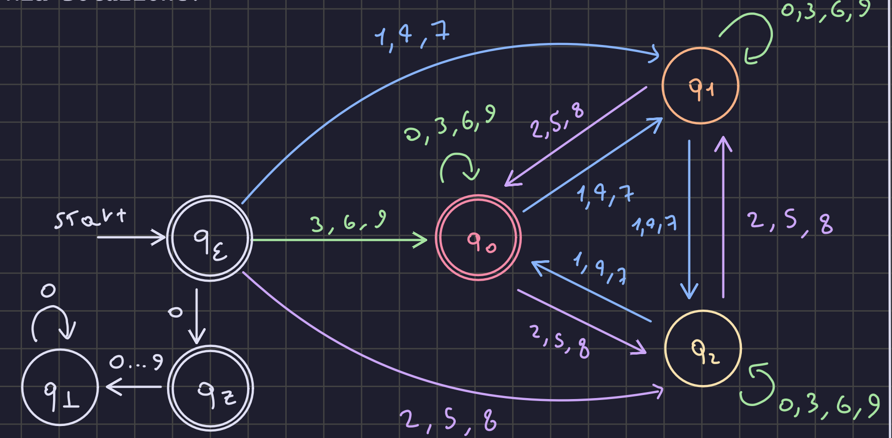
- Concatenare i simboli 2,5,8 ad una stringa equivale a sommare 2 al resto:

$$(val(\sigma) + \alpha) \bmod 3 = val(\sigma) \bmod 3 + 2 \qquad \alpha \in \{2, 5, 8\}$$

Lo stato q_z serve per accettare il carattere 0, ma una stringa che inizia per 0 non può essere accettata se ha altri numeri dopo, quindi si va in uno stato pozzo

Ci sono 3 classi di equivalenza e sono rappresentate da 3 stati diversi

Mia soluzione:

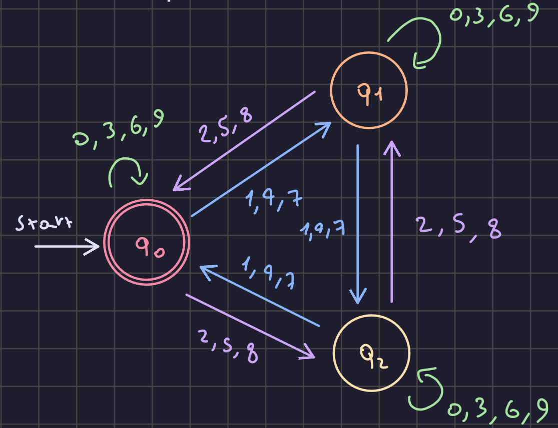


$0\sigma \notin L \quad \sigma \in \Sigma^*$ ✓

$\varepsilon \in L$ ✓

$0 \in L$ ✓

Soluzione della prof:



Non rispetta il vincolo del linguaggio $a_n \neq 0$

Ma rispetta $\varepsilon \in O$ e $0 \in L$

$0\sigma \notin L \quad \sigma \in \Sigma^*$ ✗ ?

$\varepsilon \in L$ ✓

$0 \in L$ ✓

Dimostrazione

Dimostriamo per induzione sulla lunghezza della stringa

Tesi:

1) $\sigma \in L \quad \wedge \quad \sigma \bmod 3 = 0 \quad \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_\varepsilon, q_z, q_0\} \in F$

2) $\sigma \in L \quad \wedge \quad \sigma \bmod 3 = 1$

2) $\sigma \in L \quad \wedge \quad \sigma \bmod 3 = 2$