Parziale 1/12/23 Turno 1 Gruppo B

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Si trovi una soluzione del seguente problema di Cauchy e si determini il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

$$\begin{cases} y' - (y+1)\cos 2x = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$y' = (y+1)\cos 2x$$

$$\frac{y'}{y+1} = \cos 2x$$

$$\int \frac{y'}{y+1} dy = \int \cos 2x \, dx \qquad \begin{matrix} 2x = u \\ du = 2dx \end{matrix}$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \frac{1}{2}\int \cos u \, du$$

$$\ln(y+1) = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ln(1) = \frac{1}{2}\sin(\pi) + c$$

$$c = 0$$

$$\ln(y+1) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$y+1 = e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\sin 2x} - 1$$

Esercizio 2 (punti: ....../4)

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4t^2 - e^t \\ y(0) = -\frac{1}{5} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$s^2 + 4 = 0$$
$$s^2 = -4$$

$$s_{1,2} = \pm 2i$$

$$z = c_1 e^{-2it} + c_2 e^{2it} = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$$

$$y_p = At^2 + Bt + C + \alpha e^t$$

$$y'_p = 2At + B + \alpha e^t$$

$$y''_p = 2A + \alpha e^t$$

$$2A + \alpha e^t + 4At^2 + 4Bt + 4C + 4\alpha e^t = 4t^2 - e^t$$

$$t^2(4A) + t(4B) + e^t(\alpha + 4\alpha) + 2A + 4C = 4t^2 - e^t$$

$$\begin{cases} 4A = 4 \\ 4B = 0 \\ 5\alpha = -1 \\ 2A + 4C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ \alpha = -\frac{1}{5} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p = t^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^t$$

$$y(t) = z + y_p = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + t^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^t$$

$$y'(t) = 2c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) + 2t - \frac{1}{5} e^t$$

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{5} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} \\ 2c_1 - \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \begin{cases} c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{10} \sin(2t) + \frac{1}{2} \cos(2t) + t^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^t$$

Esercizio 3 (punti: ....../4)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y\sqrt{1 - y - x^2} + 3\sqrt{-x - y}$$

(1) (2 punti) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentare (con cura!) nel piano cartesiano l'insieme:

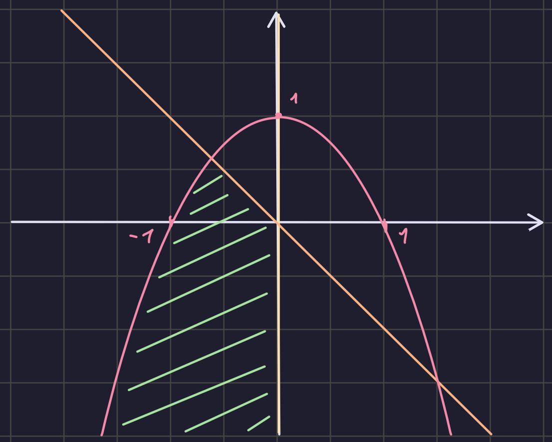
$$D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$$

Dire, motivando la risposta, se tale insieme è o non è aperto, chiuso, limitato, connesso.

$$\mathbb{D} = \begin{cases} 1 - y - x^2 \geq 0 \\ -x - y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq -x^2 + 1 \\ y \leq -x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$-x^2 = -1$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{1/2} = \pm 1 \qquad -0^2 + 1 = 1$$

$\mathbb{D} =$



Il dominio è chiuso perchè i punti delle funzioni sono compresi, illimitato perchè va all'infinito

(2) (2 punti) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P(-2, -4)$ e nella direzione del versore $\vec{v} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Qual è il significato geometrico del valore trovato?

$$F(x,y) = y\sqrt{1-y-x^2} + 3\sqrt{-x-y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = y \frac{-x}{\sqrt{1-y-x^2}} - 3 \frac{1}{2\sqrt{-x-y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = y\sqrt{1-y-x^2} - y \frac{1}{2\sqrt{1-y-x^2}} - 3 \frac{1}{2\sqrt{-x-y}}$$

$$\overline{\nabla} F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-xy}{\sqrt{1-y-x^2}} - 3 \frac{1}{2\sqrt{-x-y}} \\ \sqrt{1-y-x^2} - \frac{y}{2\sqrt{1-y-x^2}} - \frac{3}{2\sqrt{-x-y}} \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$D_v f(-2,-4) = \overline{\nabla} F(-2,-4) \cdot \vec{v}$$

$$\nabla F(-2,-4) = \begin{pmatrix} -4 \frac{+2}{\sqrt{1+4-4}} - 3 \frac{1}{2\sqrt{+2+4}} \\ \\ \sqrt{1+4-4} + 4 \frac{1}{2\sqrt{1+4-4}} - 3 \frac{1}{2\sqrt{+2+4}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 - \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \\ 3 - \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad 1 \quad + 2$$

$$D_v f(-2,4) = \nabla F(-2,-4) \cdot \vec{v} = \left(-8 - \frac{3}{2\sqrt{6}} \qquad 3 - \frac{3}{2\sqrt{6}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 4\sqrt{2} + \cancel{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \cancel{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}} = \frac{11}{2}\sqrt{2}$$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

(1) (2 punti) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y-2|\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}} & (x,y) \neq (-1,2) \\ 0 & (x,y) = (-1,2) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x-1, x+2)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\downarrow$ Polari

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}|\sin\theta|\sqrt[3]{\rho\cos\theta}}{\cancel{\rho}} = \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\sin\theta}_{[0,1]} \sqrt[3]{\rho \underbrace{\cos\theta}_{[-1,1]}} = 0$$

Per maggiorazione $|f| \to 0 \to f \to 0$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\,|\sqrt[3]{x}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} |\sqrt[3]{x}| \le \lim_{x\to 0} 1\cdot|\sqrt[3]{x}| = 0$$

perché $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$

Il limite esiste e fa 0, quindi la funzione è continua in (-1,2)

(2) (2 punti) Si trovi una parametrizzazione della retta tangente in $P(-4, \frac{\sqrt{3}}{2})$ all'arco di ellisse di equazione

$$x^2 + 4y^2 + 6x + 5 = 0$$

che congiunge nell'ordine i punti $A(-3, 1)$ e $B(-5, 0)$.
Verificare infine che la direzione di tale retta tangente è ortogonale a quella del gradiente di $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 5$ calcolato nel punto P.

$$4y^2 = -x^2 - 6x - 5$$

$$y = +\sqrt{\frac{-x^2-6x-5}{4}}$$

$$\gamma(t) = \left(t, \sqrt{\frac{-t^2-6t-5}{4}}\right) \quad t \in [-3, -5]$$

$\gamma(t) = A \Leftrightarrow t = -3$

$\gamma(t) = B \Leftrightarrow t = -5$

$\gamma(t) = P \Leftrightarrow t = -4$

$$\left(t, \sqrt{\frac{-t^2-6t-5}{4}}\right)$$

$$\gamma'(t) = \left(1, -\frac{t+3}{2\sqrt{-t^2-6t-5}}\right)$$

$$\gamma'(-4) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \gamma(-4) = \left(-4, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$r_T = \gamma(-4) + t\,\gamma'(-4)$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + t \cdot 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(-4 + t\,2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + t\right)$$

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 5$$

$$\overline{\nabla} f(x,y) = (2x+6,\ 8y)$$

$$\overline{\nabla} f\left(-4, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-2,\ 4\sqrt{3})$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0 \quad \checkmark$$

I due vettori sono ortogonali