Esercitazione in classe sulle curve

✍ **Esercizio 2.1.1.** *Sia γ la curva piana una cui parametrizzazione in coordinate polari è $\rho(\vartheta) = \vartheta^2 + 1$, on $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Dopo aver disegnato sommariamente il sostegno di γ, determinare i versori tangente e normale al sostegno di γ nel punto $\gamma(\pi)$ e scrivere un'equazione della retta tangente nello stesso punto.*

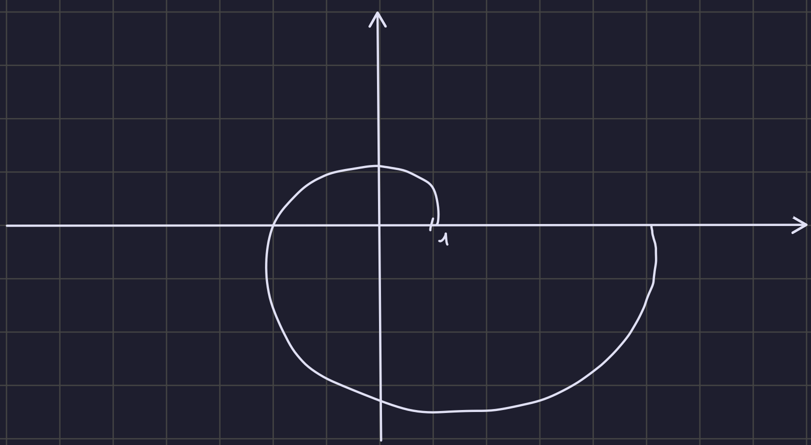
$$\rho(\theta) = \theta^2 + 1 \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

In coordinate cartesiane equivale a

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = (\theta^2+1)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = (\theta^2+1)\sin\theta \end{cases}$$

coordinate polari

Diamo valori a caso a theta e plottiamo il grafico a grandi linee



Rappresenta la curva

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \left((\theta^2+1)\cos\theta, (\theta^2+1)\sin\theta\right)$$

$$\gamma'(\theta) = \left(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta, \ 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\right)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{4\theta^2\cos^2\theta \cancel{- 4\theta(\theta^2+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta^2+1)^2\sin\theta + 4\theta^2\sin^2\theta \cancel{+ 4\theta(\theta^2+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta^2+1)^2\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{4\theta^2 + (\theta^2+1)^2}$$

Tangente:

$$T(\theta) = \frac{\gamma'(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\|} = \frac{\left(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta, \ 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\right)}{\sqrt{4\theta^2 + (\theta^2+1)^2}}$$

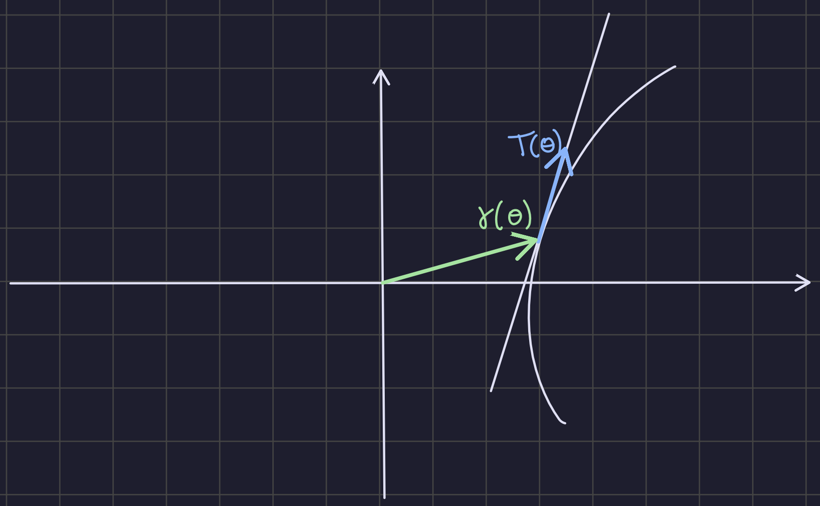
$$T(\pi) = \frac{(-2\pi, -(\pi^2+1))}{\sqrt{4\pi^2 + (\pi^2+1)^2}}$$

Tangente in pi

In R² il versore normale è il versore tangente ruotato di 90°

$$N(\pi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} T(\pi)$$

Per trovare la retta tangente alla curva bisogna trovare quel vettore che sposta lo spazio vettoriale formato dal vettore tangente sopra la curva e quel vettore è proprio $\gamma(\theta)$



Quindi la retta tangente è:

$$\gamma(\pi) + t\gamma'(\pi)$$

$$\begin{cases} x(t) = -(\pi^2+1) - t\, 2\pi \\ y(t) = 0 - t\,(\pi^2+1) \end{cases}$$

$$-\frac{x + (1+\pi^2)}{2\pi} = t$$

$$y = \frac{x + (1+\pi^2)}{2\pi}(\pi^2+1)$$

$$y = \frac{\pi^2+1}{2\pi}x + \frac{(\pi^2+1)^2}{2\pi}$$

✍ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare l'integrale (curvilineo) di*

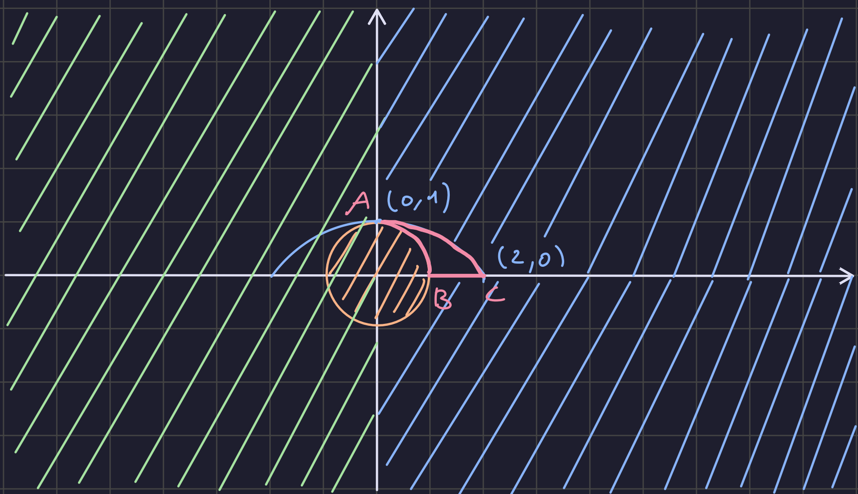
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ *il cui sostegno è il bordo* ∂E *di*

$$E = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\right\}$$

e determinare la retta tangente a γ *nel punto* $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

Disegnamo l'insieme E



Consideriamo solo l'area rossa

Integriamo lungo le 3 curve parametrizzate:

$\gamma_{BA}(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\gamma_{BC}(t) = (t, 0) \quad t \in [1,2]$

$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{4}\right)$

Integriamo

$$\int_{\gamma_{BA}} F \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4+\cos^2 t}} \underbrace{\cancel{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}}_{|\gamma'(\theta)| = 1} dt$$

$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$

$w = \cos^2 t$

$dw = -2 \cos t \sin t \, dt$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2\cos t \sin t \, dt}{\sqrt{4+\cos^2 t}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4+w}}\, dw = -(4+w)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[-\sqrt{4+\cos^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2+\sqrt{5}$$