Esame 25/09/23

1. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il determinante $\det(A)$ di A.

(b) Si calcoli una forma ridotta U di A e si determini il rango di A.

(c) Si scriva una base dello spazio delle colonne $C(A)$.

(d) Si trovi una matrice invertibile E tale che $U = EA$ e si calcoli la matrice inversa E^{-1} di E.

a)
$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -7\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + 7\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 11 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -7\left(2\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) + 7\left(2\det\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -7\left(2(9-6) - (\cancel{12}-\cancel{12}) + 3(4-6)\right) + 7\left(2(33-30) - 4(\cancel{15}-\cancel{15}) + 2(30-33)\right) =$$

$$= -7(\cancel{6}-\cancel{6}) + 7(\cancel{6}-\cancel{6}) = -7+7 = 0$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{E_{31}(-1) \\ E_{41}(-3)}}{\overset{E_{21}(-5)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(A) = 2$

c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$ é una base di $C(A)$

d) $E = E_1(\frac{1}{2})\, E_{21}(-5)\, E_{31}(-1)\, E_{41}(-3)\, E_{32}(-1) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{41}(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = EA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = E_{32}(1)\, E_{41}(3)\, E_{31}(1)\, E_{21}(5)\, E_1(2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{41}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{21}(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_1(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$EE^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

2. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice aumentata con un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$B_\alpha = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 3\alpha & \alpha+2 & \alpha \end{array}\right)$$

(a) Si scriva il sistema lineare che corrisponde alla matrice aumentata B_α.

(b) Si trovi il rango della matrice B_α al variare di α.

(c) Si determini per quali valori di α il sistema lineare ammette 0, 1 e infinite soluzioni rispettivamente.

(d) Si risolva il sistema lineare per $\alpha = 0$.

a) $$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3\alpha x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3\alpha x_2 + (\alpha+2)x_3 = \alpha \end{cases}$$

b) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 3\alpha & \alpha+2 & \alpha \end{array}\right) \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3\alpha & 3 & 0 \\ 0 & 3\alpha & \alpha+4 & \alpha \end{array}\right) \underset{\alpha \neq 0}{\overset{E_2\left(\frac{1}{3\alpha}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 3\alpha & \alpha+4 & \alpha \end{array}\right) \overset{E_{32}(-3\alpha)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \end{array}\right) \underset{\alpha \neq -1}{\overset{E_3\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{\alpha+1} \end{array}\right)$$

$rk(B_\alpha) = 3$

$\alpha = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{32}(-4)}{\overset{E_2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(B_0) = 2$

$\alpha = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{E_{32}(3)}{\overset{E_2\left(-\frac{1}{3}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{E_3(-1)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$rk(B_{-1}) = 3$

c) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$ $\quad rk(U_\alpha | b_\alpha) = rk(U_\alpha) = 3 = \# col$ $\rightarrow$ 1 sola soluzione

$\alpha = 0$ $\quad rk(U_0 | b_0) = rk(U_0 | b_0) = 2 < \# col$ $\rightarrow$ infinite soluzioni

$\alpha = -1$ $\quad rk(U_{-1} | b_{-1}) 3 \neq rk(U_{-1}) = 2$ $\rightarrow$ non ammette soluzioni

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}$

3. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il polinomio caratteristico p_C di C e si dimostri che gli autovalori di C sono $1, 2$ e 3.

(b) Si determini una base di ciascun autospazio $E_C(1)$, $E_C(2)$ e $E_C(3)$.

(c) Si trovino matrici D e S tali che D è una matrice diagonale e $C = SDS^{-1}$.

a) $p_C = \det(C - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\big) - \big(2 - ((2-\lambda)2)\big) =$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) - (2 - 4 + 2\lambda) =$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 2 + 4 - 2\lambda =$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 =$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda^2 - 5\lambda - 6\lambda + 6 =$

$= -\lambda^2(\lambda - 1) + 5\lambda(\lambda - 1) - 6(\lambda - 1) =$

$= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) =$

$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$

$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

b) $E(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{E_{13}}{\overset{E_1(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=t \\ x_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-t \\ x_2=t \\ x_3=0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ é una base di $E(\lambda_1)$

$$E(\lambda_2)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_1(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_3(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-\frac{1}{2}x_3=0 \\ x_3=t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-t \\ x_2=\frac{1}{2}t \\ x_3=t \end{cases} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ é una base di $E(\lambda_2)$

$$E(\lambda_3)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_1(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_2(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_{32}(-2)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_3=0 \\ x_2-\frac{1}{2}x_3=0 \\ x_3=t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}t \\ x_2=\frac{1}{2}t \\ x_3=t \end{cases} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ é una base di $E(\lambda_3)$

c) La matrice é diagonalizzabile perché ha 3 autovalori distinti

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **(6 punti)** Vero o falso? Si giustifichi la risposta!

(a) La seguente funzione è un'applicazione lineare: $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3y+4 \\ x+5y \\ y+1 \end{pmatrix}$.

(b) Il seguente insieme è una base di $\mathbb{C}^2$: $\{\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+3 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.

(c) Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$. L'applicazione delle coordinate $c_{\mathcal{B}}\colon V \to \mathbb{C}^n$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è un isomorfismo.

a) $F(v+w) = F(v) + F(w)$

$$F\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b+4 \\ a+5b \\ b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+3d+4 \\ c+5d \\ d+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a+c)+3(b+d)+4 \\ (a+c)+5(b+d) \\ (b+d)+1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} (a+c)+3(b+d)+8 \\ (a+c)+5(b+d) \\ (b+d)+2 \end{pmatrix}$$

Non é un'applicazione lineare

FALSO

b) L'insieme é linearmente indipendente perché:

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} i+3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i+3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e siccome l'insieme contiene 2 elementi come la dimensione di $\mathbb{C}^2$, allora é un insieme di generatori e anche una base.

VERO

c) Vero e la sua inversa é $\mathbb{C}^n \to V$