# Esame 21/07/2023

1. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice con $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -2 & 2 & -2t \\ 7 & -1 & 8t \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il rango $\mathrm{rk}(A_t)$ di $A_t$.
(b) Si calcoli il determinante $\det(A_t)$ di $A_t$.
(c) Si applichi il teorema di Cramer per risolvere il sistema lineare $A_1 x = b$ dove $x$ è il vettore delle incognite e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) $t \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -2 & 2 & -2t \\ 7 & -1 & 8t \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-7)}{\overset{E_{21}(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \overset{E_2(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \overset{E_{31}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \underset{t \neq 0}{\overset{E_3(\frac{1}{t})}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(A_t) = 3$

$t = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-7)}{\overset{E_{21}(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_2(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(A_0) = 2$

b) $$\det(A_t) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -2 & 2 & -2t \\ 7 & -1 & 8t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2t \\ -1 & 8t \end{pmatrix} + t \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 16t - 2t + t(2 - 14) = 14t - 12t = 2t$$

c)

$$A_1 x = b \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A_1) = 2$$

Per il teorema di cramer la soluzione $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ é data da $x_i = \dfrac{\det(A_{1i})}{\det(A_1)}$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det(A_{11}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det(A_{12}) = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 2(-2+2) = 0$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A_{13}) = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2(2) = 4$$

$$x_1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 0 \qquad \text{la soluzione é} \quad x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. **(8 punti)** Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definita come $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x+y+iz \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si calcoli la matrice $B$ associata a $f$ rispetto alla base canonica.
(b) Si trovi una base dello spazio nullo $N(f)$ di $f$.
(c) Si trovi una base dello spazio delle colonne $C(S)$ dove $S = \begin{pmatrix} -1-i & -1 & i \\ 6 & 6+i & i \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.
(d) Si dica se la prima colonna di $S$ appartiene all'intersezione $N(f) \cap C(S)$.

a)

$B = (F(e_1), F(e_2), F(e_3))$ dove $e_i$ sono gli elementi della base canonica

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $Bx = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{6})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{i}{6}x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{6}t - \frac{i}{6}s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{i}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é una base di } N(F)$$

c)

$$S=\begin{pmatrix} -1-i & -1 & i \\ 6 & 6+i & i \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \overset{E_1\left(\frac{-1+i}{2}\right)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{-i-1}{2} \\ 6 & 6+i & i \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-6)}{\overset{E_{21}(-6)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{-i-1}{2} \\ 0 & 3+4i & 3+4i \\ 0 & 1+3i & 1+3i \end{pmatrix} \overset{E_2\left(\frac{3-4i}{25}\right)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{-i-1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \end{pmatrix} \overset{E_{32}(-1-3i)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{-i-1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6+i \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $C(S)$

d) controllo se $F\begin{pmatrix} 1-i \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F\begin{pmatrix} 1-i \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(1-i)+6+6i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-\cancel{6i}+\cancel{6}+\cancel{6i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini se $C$ é invertibile e, in caso positivo, si calcoli la matrice inversa $C^{-1}$ di $C$.
(b) Si determini se $C$ é diagonalizzabile e, in caso positivo, si calcolino la matrice diagonale $D$ e la matrice invertibile $S$ tali che $C = SDS^{-1}$.
(c) Si trovi una base ortonormale dello spazio delle colonne $C(C)$ di $C$ in $\mathbb{C}^2$.

a) É invertibile se det $\neq 0$

$\det(C) = 1$ é invertibile

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{12}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_2 | C^{-1})$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matrice é diagonalizzabile se ha n autovalori distinti o se le molteplicitá algebriche e geometriche coincidono.

$$\det(C - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$\lambda_{1,2} = 1$

$m_1 = 2$

$$d_1 = \dim(E(1)) = \dim(N(C - 1I_n)) = n - rk(C - 1I_n) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

La matrice non é diagonalizzabile perché $m_1 \neq d_1$

c)

$C(C) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Uso l'algoritmo di Gram-Shmidt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo così l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ché é una base ortonormale.

4. **(6 punti)**

Vero o falso? Si giustifichi la risposta!

(a) Se $X$ e $Y$ sono matrici di dimensione $2 \times 2$ su $\mathbb{R}$, allora $XY = YX$.

(b) L'insieme $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ è una base dello spazio vettoriale

$$\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

di polinomi di grado 2 con coefficienti in $\mathbb{R}$.

(c) L'applicazione $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita come $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y$ è lineare.

a)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$ Falso

b)

$\alpha(1) + \beta(1+x) + \gamma(1+x^2) = 0$

$\alpha + \beta + \beta x + \gamma + \gamma x^2 = 0$

$$(\alpha+\beta+\gamma) + \beta(x) + \gamma(x^2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$ é linearmente indipend.

VERO

c) $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2+y$ é lineare se e solo se:

- $\alpha g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$\alpha x^2+\alpha y = g\left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}\right)$

$\alpha x^2+\alpha y = (\alpha x)^2+\alpha y$ $\times$

non é lineare

FALSO