Algebra Lineare - Esercizi da consegnare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Scheda 2

Mattia Arganetto - VR502412
Chiara Baldo - VR500878
Paolo Imbriani - VR500437
Fabio Irimie - VR501504

2° Semestre 2023/2024

Indice

1 Scheda 2

1.1 Esercizio 1

Si consideri

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ix + y \\ x + iy \\ x + 3z \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che f è lineare.

Verifico se valgono le seguenti proprietà con $v, w \in \mathbb{C}^3$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} iv_1 + v_2 \\ v_1 + iv_2 \\ v_1 + 3v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iw_1 + w_2 \\ w_1 + iw_2 \\ w_1 + 3w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 3(v_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv_1 + v_2 + iw_1 + w_2 \\ v_1 + iv_2 + w_1 + iw_2 \\ v_1 + 3v_3 + w_1 + 3w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 3(v_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 3(v_3 + w_3) \end{pmatrix}$$

Quindi vale la proprietà

- $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} iv_1 + v_2 \\ v_1 + iv_2 \\ v_1 + 3v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i(\alpha v_1) + (\alpha v_2) \\ (\alpha v_1) + i(\alpha v_2) \\ (\alpha v_1) + 3(\alpha v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(iv_1 + v_2) \\ \alpha(v_1 + iv_2) \\ \alpha(v_1 + 3v_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\alpha v_1 + \alpha v_2 \\ \alpha v_1 + i\alpha v_2 \\ \alpha v_1 + 3\alpha v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha v_1 + \alpha v_2 \\ \alpha v_1 + i\alpha v_2 \\ \alpha v_1 + 3\alpha v_3 \end{pmatrix}$$

Quindi vale la proprietà

Entrambe le proprietà sono verificate, quindi f è lineare.

(b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_A = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix + y \\ x + iy \\ x + 3z \end{pmatrix}$$

(c) Stabilire se f è un isomorfismo

f è un isomorfismo se e solo se A è invertibile. A è invertibile se $det(A) \neq 0$.

$$det(A) = det \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot det \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (i \cdot i - (1 \cdot 1)) = 3 \cdot (-1 - 1) = 3 \cdot (-2) = -6$$

$det(A) \neq 0$ quindi f è un isomorfismo.

(d) Verificare che $\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ i & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-i)}{\overset{R_3 - iR_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 - i5 \end{pmatrix} \underset{E_3(\frac{1}{3-i5})}{\overset{\frac{1}{3-i5}R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ridotta ha tutte le colonne dominanti, cioè tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

(e) Verificare che $\mathcal{C} = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{21}(-1)}{\overset{R_2 - R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-1)}{\overset{R_3 - R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \underset{E_{32}}{\overset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \underset{E_2(-1)}{\overset{(-1)R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \underset{E_3(i)}{\overset{iR_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ridotta ha tutte le colonne dominanti, cioè tutti gli elementi di $\mathcal{C}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

(f) Determinare la matrice D associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e alla base $\mathcal{C}$ del codominio

La matrice D avrà come colonne $[f(b_i)]_{\mathcal{C}}$ con $i = 1, 2, 3$.

$$f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}i\\1\\1+3i\end{pmatrix} \Rightarrow [f(b_1)]_{\mathcal{C}} = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3\\ \alpha_1 + \alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 = i\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\\ \alpha_1 = 1 + 3i\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}\alpha_1 = 1 + 3i\\ \alpha_2 = -3i\\ \alpha_3 = \frac{i-1}{i}\end{cases}$$

$$f(b_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix} \Rightarrow [f(b_2)]_{\mathcal{C}} = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3$$

$$= \beta_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\beta_1 + \beta_2 + i\beta_3\\ \beta_1 + \beta_2\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 = 1\\ \beta_1 + \beta_2 = i\\ \beta_1 = 0\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}\beta_1 = 0\\ \beta_2 = i\\ \beta_3 = \frac{1-i}{i}\end{cases}$$

$$f(b_3) = f\left(\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4+5i\\5+4i\\14\end{pmatrix} \Rightarrow [f(b_3)]_{\mathcal{C}} = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3$$

$$= \gamma_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3\\ \gamma_1 + \gamma_2\\ \gamma_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 = 4 + 5i\\ \gamma_1 + \gamma_2 = 5 + 4i\\ \gamma_1 = 14\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}\gamma_1 = 14\\ \gamma_2 = -9 + 4i\\ \gamma_3 = \frac{i-1}{i}\end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 & 14 \\ -3i & i & -9+4i \\ \frac{i-1}{i} & \frac{1-i}{i} & \frac{i-1}{i} \end{pmatrix}$$

(g) Calcolare la matrice $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

La matrice $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ del cambio di base ha come colonne $[b_i]_{\mathcal{C}}$ con $i = 1, 2, 3$.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow [b_1]_{\mathcal{C}} = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = i \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = i \\ \alpha_2 = -i \\ \alpha_3 = \frac{1}{i} \end{cases}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [b_2]_{\mathcal{C}} = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3$$

$$= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 \\ \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = -\frac{1}{i} \end{cases}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow [b_3]_{\mathcal{C}} = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3$$

$$= \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 = 5 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 4 \\ \gamma_1 = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma_1 = 3 \\ \gamma_2 = 1 \\ \gamma_3 = \frac{1}{i} \end{cases}$$

$$A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ -i & 1 & 1 \\ \frac{1}{i} & -\frac{1}{i} & \frac{1}{i} \end{pmatrix}$$

1.2 Esercizio 2

Si consideri

$$g : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad g(A) = AB - BA$$

dove $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Verificare che

$$\mathcal{D} = \left\{ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

L'insieme $\mathcal{D}$ è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se e solo se sono verificate le seguenti proprietà:

- **Indipendenza lineare**
  Per ogni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

  Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

  Quindi tutti gli elementi di $\mathcal{D}$ sono linearmente indipendenti.

- **Insieme di generatori**
  Per ogni $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si ha che:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Quindi $\mathcal{D}$ è un insieme di generatori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Entrambe le proprietà sono verificate, quindi $\mathcal{D}$ è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Verificare che

$$\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

L'insieme $\mathcal{E}$ è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se e solo se sono verificate le seguenti proprietà:

-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

  Quindi:
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

  Quindi tutti gli elementi di $\mathcal{E}$ sono linearmente indipendenti.

- **Insieme di generatori**
  Per ogni $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si ha che:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Quindi $\mathcal{E}$ è un insieme di generatori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Entrambe le proprietà sono verificate, quindi $\mathcal{E}$ è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) Calcolare la matrice M associata a g rispetto alla base $\mathcal{D}$ del dominio e rispetto alla base $\mathcal{E}$ del codominio.

La matrice M avrà come colonne $[g(D_i)]_{\mathcal{E}}$

$$g(D_1) = g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[g(D_1)]_{\mathcal{E}} = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4$$
$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$g(D_2) = g\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[g(D_2)]_{\mathcal{E}} = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4$$

$$= \beta_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \beta_3\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \beta_4\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= 0\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$g(D_3) = g\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$[g(D_3)]_{\mathcal{E}} = \gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2 + \gamma_3 E_3 + \gamma_4 E_4$$

$$= \gamma_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \gamma_2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \gamma_3\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \gamma_4\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= -1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$g(D_4) = g\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[g(D_4)]_{\mathcal{E}} &= \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 + \delta_3 E_3 + \delta_4 E_4 \\
&= \delta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} [g(D_1)]_{\mathcal{E}} & [g(D_2)]_{\mathcal{E}} & [g(D_3)]_{\mathcal{E}} & [g(D_4)]_{\mathcal{E}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(d) Calcolare il rango e la nullità di g

Il rango di g è uguale al rango della matrice M, quindi:

$$rk(M) = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_{12}}{\overset{R_2 \leftrightarrow R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_{24}}{\overset{R_4 \leftrightarrow R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{E_{32}(2)}{\overset{R_3 + 2R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{E_{42}(1)}{\overset{R_4 + R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 2, quindi $rk(g) = rk(M) = 2$

Siccome $dim_{\mathbb{R}}(M) = rk(M) + dim_{\mathbb{R}}(N(M))$, allora

$$dim_{\mathbb{R}}(N(g)) = dim_{\mathbb{R}}(N(M)) = rk(M) - dim_{\mathbb{R}}(M)$$

$$= 4 - 2 = 2$$

L'applicazione lineare g ha rango 2 e nullità 2.

(e) Calcolare una base di $N(g_M)$ ed una base di $Im(g_M)$

$$N(g_M) = N(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 2w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = -3y + w \\ z = -w \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + w \\ y \\ -w \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } N(g_M)$$

Una base di $Im(g_M)$ è data dalle colonne dominanti della matrice M:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } Im(g_M)$$

1.3 Esercizio 3

Data la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico P_N di N

$$P_N = det(N - \lambda I_3) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (3-\lambda) det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(-5 + \lambda) + (3-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda) + 1)$$

$$= 5 - \lambda + (3 - \lambda)(20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 1)$$
$$= 5 - \lambda + (3 - \lambda)(21 - 9\lambda + \lambda^2)$$
$$= 5 - \lambda + 63 - 27\lambda + 3\lambda^2 - 21\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3$$
$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 49\lambda + 68$$

(b) Calcolare tutti gli autovalori di N in $\mathbb{C}$

Utilizzo Ruffini per trovare gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -49 & 68 \\ & & & & \\ 4 & & -4 & 32 & -68 \\ \hline & -1 & 8 & -17 & 0 \end{array}$$

$$(\lambda - 4)(-\lambda^2 + 8\lambda - 17) = 0$$
$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 68}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-4}}{-2} = \frac{-8 \pm 2i}{-2} = 4 \pm i$$
$$\lambda_2 = 4 + i$$
$$\lambda_3 = 4 - i$$

(c) Stabilire se la matrice N è diagonalizzabile

Siccome la matrice $N \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ ha 3 autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.