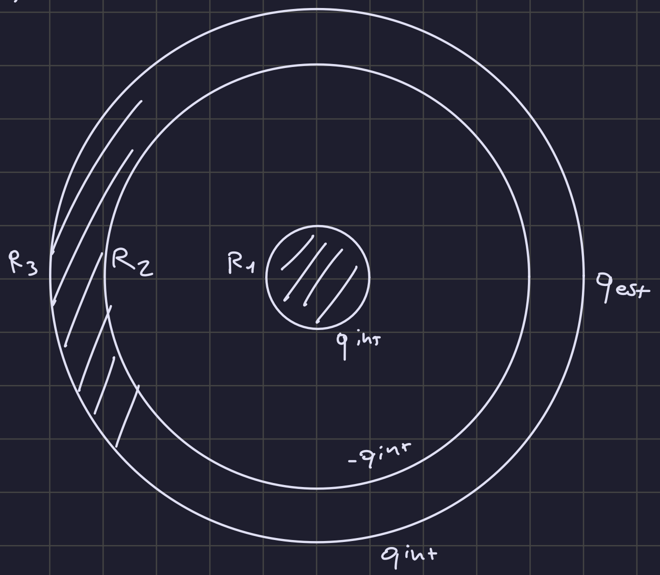
Esame 2024

Un conduttore sferico cavo di raggi $R_2 = 9\,cm$, $R_3 = 10\,cm$ contiene in modo concentrico una sfera $R_1 = 1\,cm$
Sul conduttore interno R_1 viene depositata la carica $q_{int} = -2 \cdot 10^{-9}\,C$.
Sul conduttore esterno R_3 viene depositata la carica $q_{est} = +10^{-9}\,C$.
Il sistema finale è in equilibrio elettrostatico.

$R_1 = 1\,cm = 1 \cdot 10^{-2}\,m$

$R_2 = 9\,cm = 9 \cdot 10^{-2}\,m$

$R_3 = 10\,cm = 10 \cdot 10^{-2}\,m$



1. Calcolare la distribuzione di carica sulle pareti dei conduttori (Q e densità) (induzione elettrostatica)

q_1 si deposita solo sulla superficie di R_1 perchè è un conduttore.

Su R_2 si avrà $-q_{int}$ per induzione visto che c'è una cavità. Sulla superficie R_3 si avrà $+q_{int}$ per induzione e conservazione della carica.

q_{est} non induce cariche all'interno (schermo elettrostatico), quindi su R_3 ci sarà una carica totale:

$$q_{TOT} = q^+_{est} + q^-_{int}$$
$$= 10^{-9} - 2 \cdot 10^{-9} = -10^{-9}\ C$$

La densità sulle superfici sferiche sono:

$$\sigma_1^- = \frac{q_{int}^-}{4\pi R_1^2} = \frac{-\cancel{2} \cdot 10^{-9}}{\cancel{4}\pi \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = \frac{-10^{-5}}{2\pi} = -1.6 \cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

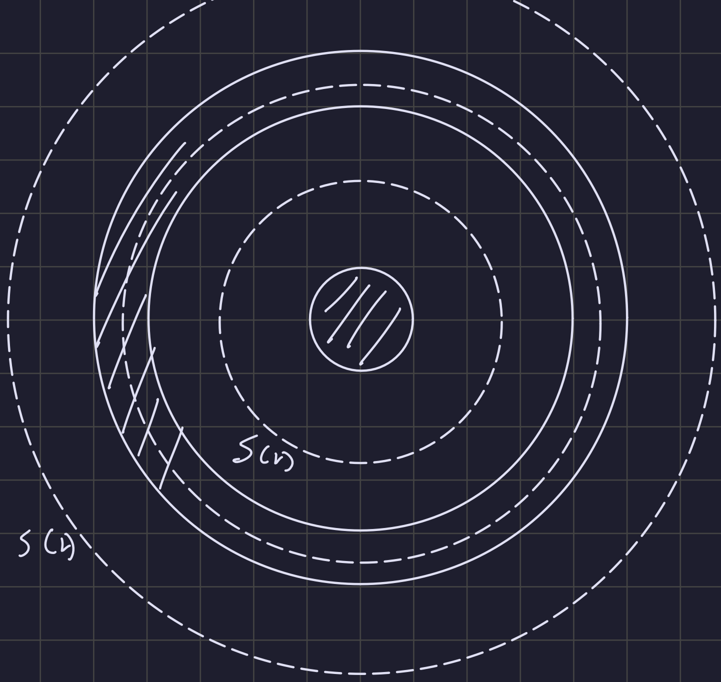
$$\sigma_2^+ = \frac{-q_{int}^-}{4\pi R_2^2} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 9^2 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^{-5}}{2\pi \cdot 81} = 1{,}9 \cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_3^- = \frac{q_{TOT}}{4\pi R_3^2} = \frac{-10^{-9}}{4\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}} = \frac{-10^{-\cancel{9}}}{4\pi \cdot 10^{-\cancel{2}}} = \frac{-10^{-7}}{4\pi} = -7{,}9 \cdot 10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$$

2. Ricavare, applicando il teorema di Gauss, il campo elettrico $\vec{E}$ (modulo, direzione, verso) in tutto lo spazio.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Come superficie di Gauss prendo superfici sferiche di raggio r

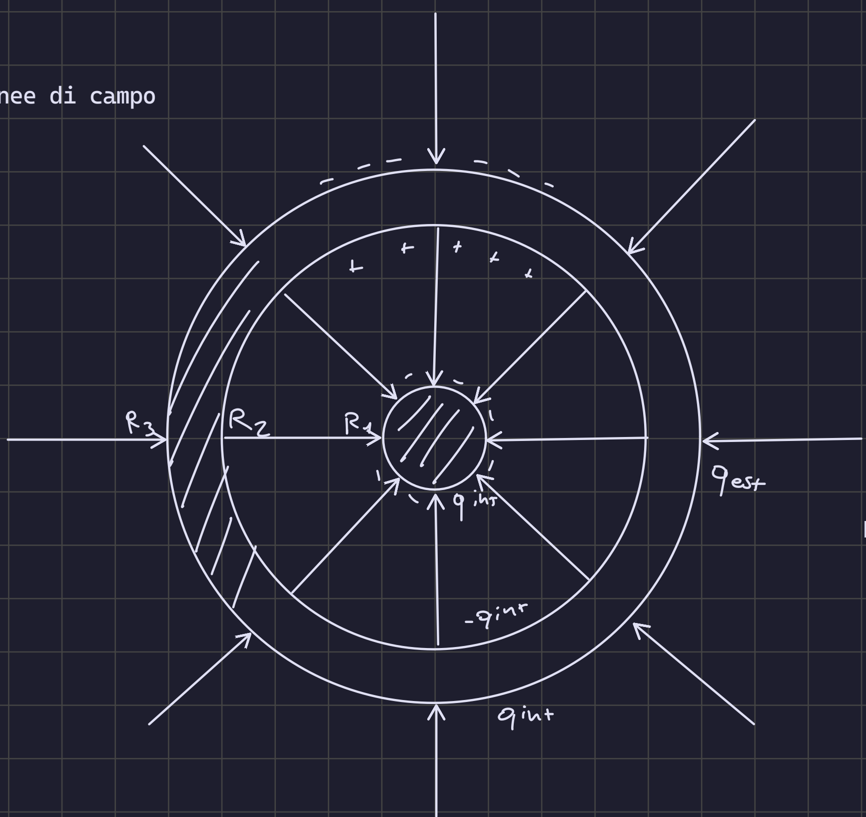


dove E = E(r) radiale

$$\oint_{S(r)} E(r)\, dS = E(r) \cdot \oint_{S(r)} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q \text{ interna a } S(r)}{\varepsilon_0}$$

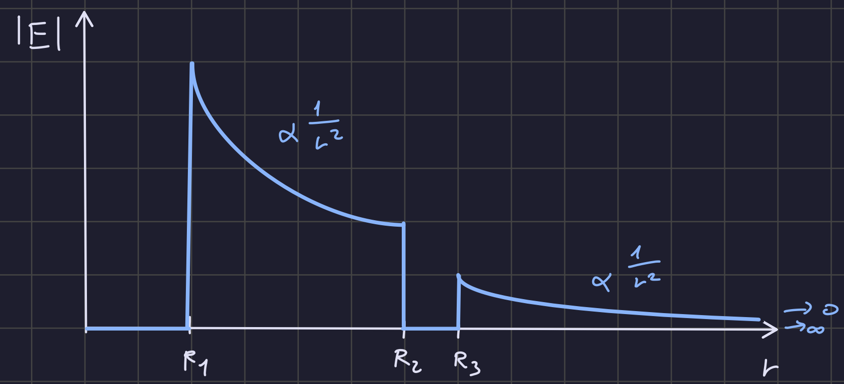
$$Q_{int\,S(r)} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \text{ (interno di conduttore)} \rightarrow E = 0 \left[\frac{V}{m}\right] \\ \bar{q}_{int} & \text{se } R_1 < r < R_2 \rightarrow E(r) = \dfrac{\bar{q}_{int}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left[\frac{V}{m}\right] \\ 0 & \text{se } R_2 < r < R_3 \text{ (interno di conduttore)} \rightarrow E = 0 \left[\frac{V}{m}\right] \\ \bar{q}_{TOT} & \text{se } r > R_3 \rightarrow E(r) = \dfrac{\bar{q}_{TOT}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left[\frac{V}{m}\right] \end{cases}$$

Disegnare le linee di campo



Linee di campo radiali entranti

Disegnare il grafico del campo E



In R_3 c'è un salto perchè all'esterno la carica totale è una somma di più cariche

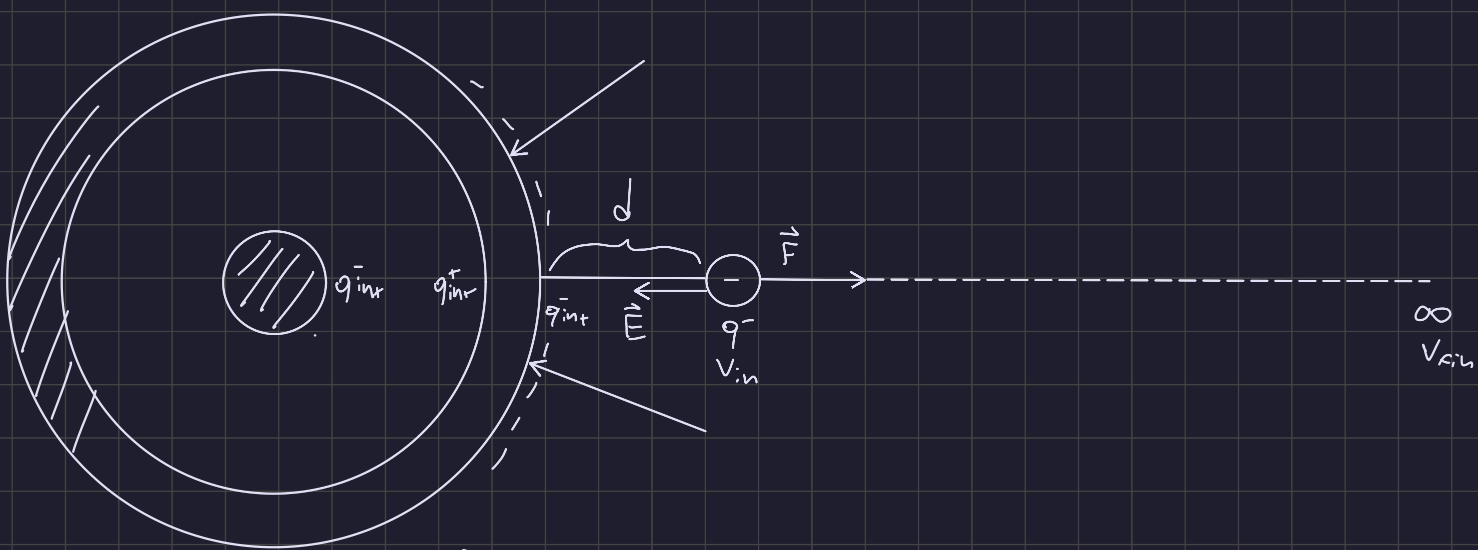
3. Ricavare il potenziale elettrostatico della sola regione esterna

$$V(r) - V_{rif} = -\int_{rif}^{r} E(r)\,dr$$

Poichè il sistema è finito, posso prendere come riferimento del potenziale l'infinito $V_{rif} = V_\infty = 0$

$$V(r) - 0 = -\int_{\infty}^{r} \frac{q^-_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q^-_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{q_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad [V]$$

4. Una particella di carica q negativa viene posizionata a distanza d dalla superficie esterna del sistema
Ricavare senza calcoli numerici il lavoro del campo elettrico per far compiere a q il suo percorso

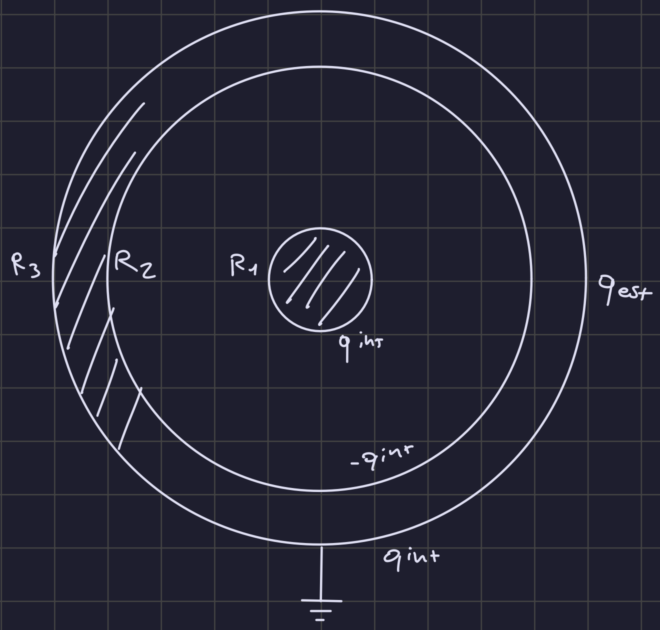


La particella sente la forza $\vec{F} = q\vec{E} = q^-\vec{E}$, quindi verrà spostata all'infinito

$$L = -q\,\Delta V = -q\left(V_{fin} - V_{in}\right) = -q^-\left(V_\infty - V(R_3+d)\right) = -q^-\left(-V(R_3+d)\right)$$

$$= -q^- \left(- \frac{q_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0 (R_3+d)} \right) = \frac{q_{TOT}^- \cdot q^-}{4\pi\varepsilon_0 (R_3+d)} > 0 \quad [J]$$

5. La superficie esterna viene collegata a terra descrivere la situazione che si viene a creare

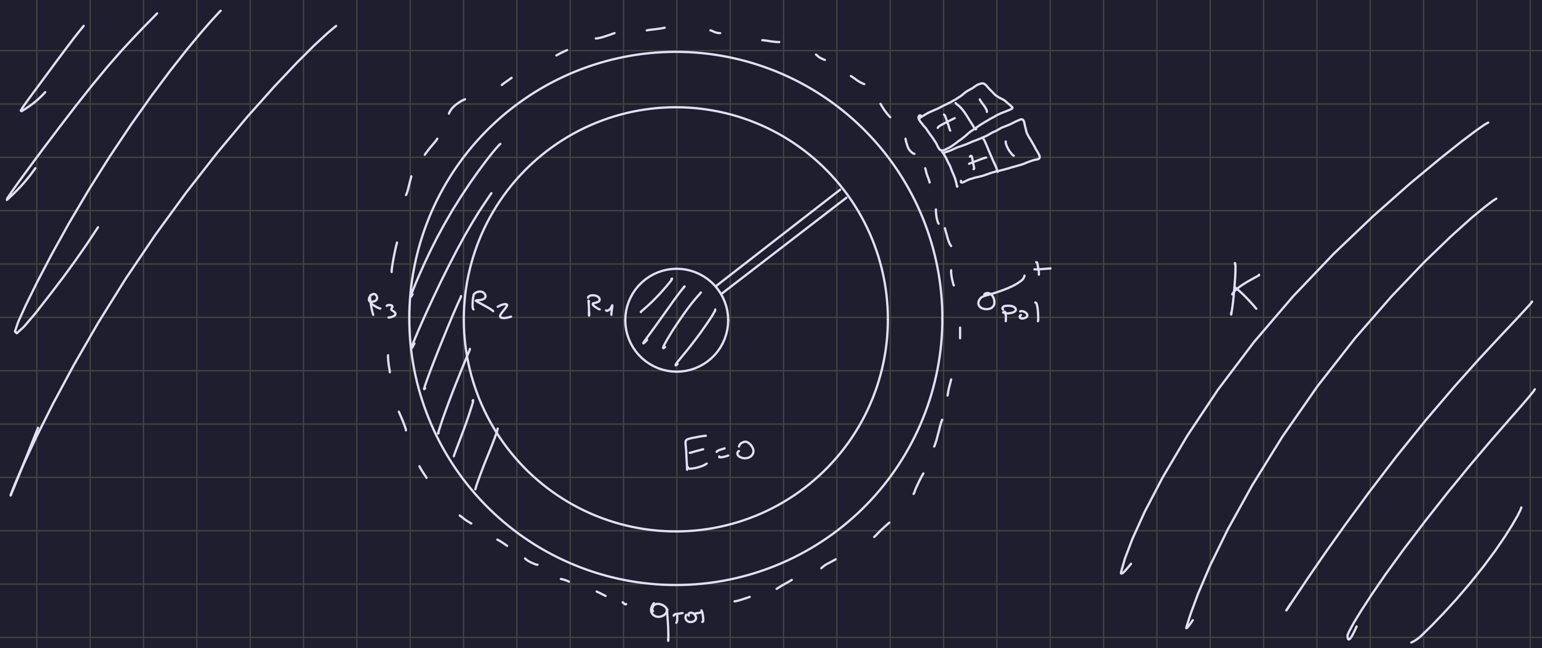


$Q(R_3) \to 0 \qquad E_{EST} = 0 \qquad E_{INT} = \text{invariato}$

Il sistema è un condensatore sferico

NB: $U_{\substack{energia \\ condensatore}} = \frac{1}{2} C V = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} \quad [J]$

6. Si collega il conduttore interno con quello esterno tramite un filo e si riempie lo spazio esterno con un materiale dielettrico k. Calcolare il campo $\vec{D}$ e le cariche di polarizzazione



Si crea una carica di polarizzazione σ_{pol} positiva. Per calcolare il campo si usa il teorema di Gauss nei dielettrici

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libere}$$