

Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Numeri reali	2
1.2	Maggiorante	2
1.3	Minorante	2
1.4	Estremo superiore	3
1.5	Estremo inferiore	3
1.6	Massimo	3
1.7	Minimo	4
1.8	Funzioni	4
1.8.1	Dominio di una funzione	4
2	Limiti	5
2.1	Esempi	6
2.2	Osservazioni	8
2.3	Risultati utili per il calcolo dei limiti	9
2.4	Forme indeterminate	9
2.5	Esempi di calcolo di limiti	10
2.6	Limiti razionali	10
2.7	Monotonia	10

1 Introduzione

1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazionali; questo insieme viene indicato con il simbolo \mathbb{R}

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- **1^a proprietà (Eudosso-Archimede):** due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

Assioma: dati due numeri reali positivi a, b con $0 < a < b$ esiste un intero n tale che $na > b$.

- **2^a proprietà (Intervalli inscatolati):** date due serie di grandezze: a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n : la prima crescente (numeri della famiglia a) e la seconda decrescente (numeri della famiglia b), in cui ogni a_k è minore di b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k , allora esiste una grandezza c tale che per ogni k $a_k \leq c \leq b_k$.

1.2 Maggiorante

Definizione 1.1

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \geq x$.

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'intervallo tendesse verso $+\infty$ non si sarebbe alcun maggiorante poichè $+\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha maggiorante

1.3 Minorante

Definizione 1.2

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \leq x$.

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso $-\infty$ non ci sarebbe alcun minorante poichè $-\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha minorante

1.4 Estremo superiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato superiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo superiore di S se:

- y è un maggiorante di S
- y è il più piccolo maggiorante di S

Se S è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di S è $\sup(S) = +\infty$. Esempi:

- $I = (1, 10]$: $\sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$: $\sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato inferiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo inferiore di S se:

- y è un minorante di S
- y è il più grande minorante di S

Se S è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di S è $\inf(S) = -\infty$. Esempi:

- $I = [1, 8)$: $\inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$: $\inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

1.6 Massimo

Definizione 1.3

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il massimo di S se y è l'estremo superiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con $\max(S) = y$.

1.7 Minimo

Definizione 1.4

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il minimo di S se y è l'estremo inferiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con $\text{Min}(S) = y$.

Teorema 1 Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.

1.8 Funzioni

Definizione 1.5

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:

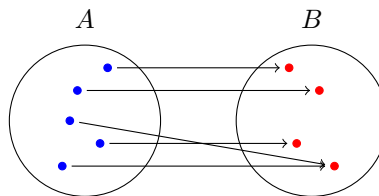
$$f : A \rightarrow B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di A è associato uno e uno solo elemento di B .

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } f : A \rightarrow B$$

Esempio di funzione corretta:



1.8.1 Dominio di una funzione

Definizione 1.6

Dato un insieme di partenza A gli elementi ai quali è applicata la funzione f sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \rightarrow x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \rightarrow +\infty$)

Definizione 2.1

Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

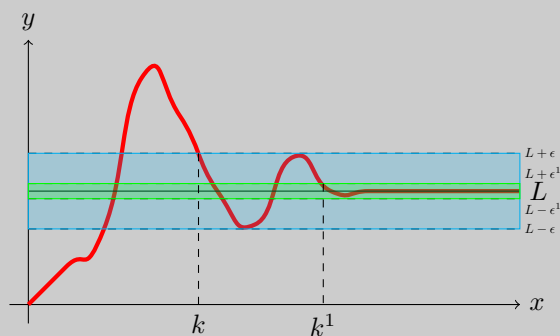
Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A^a,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow L$ per $x \rightarrow +\infty$)

La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .



Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di L e non uscirne più. Questo vale per ogni ϵ , quindi anche per ϵ^1 .

^aIl dominio della funzione

Definizione 2.2

Si dice che

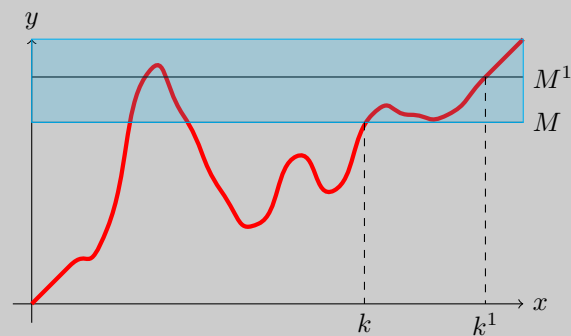
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$)

**Definizione 2.3**

Si dice che

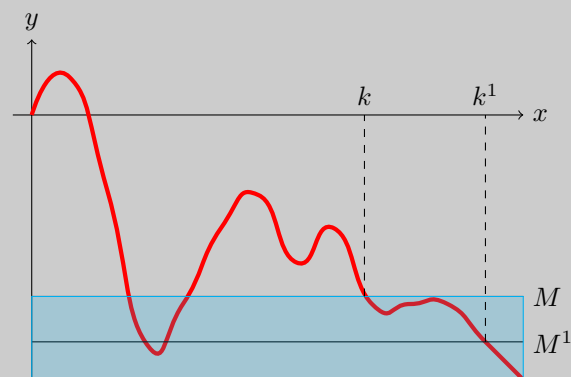
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

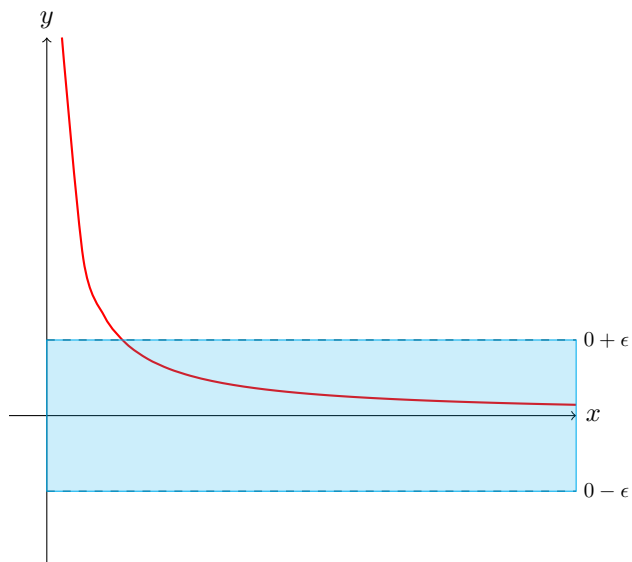
$$x \geq k \rightarrow f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$)

**2.1 Esempi**

Esempio 2.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Dominio} = \mathbb{R}/\{0\}$$



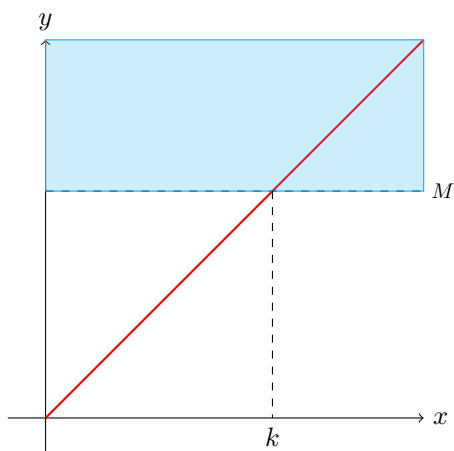
Sia dato $\epsilon > 0$ arbitrario. Definisco $k := \frac{1}{\epsilon}$.
Sia dato $x > 0$ arbitrario, supponiamo $x \geq k$. Allora

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$).

Esempio 2.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$



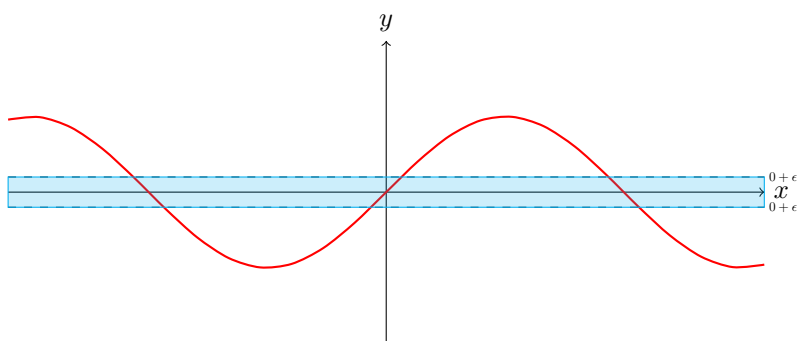
*Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
 Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
 Quindi è verificata la definizione di limite.*

2.2 Osservazioni

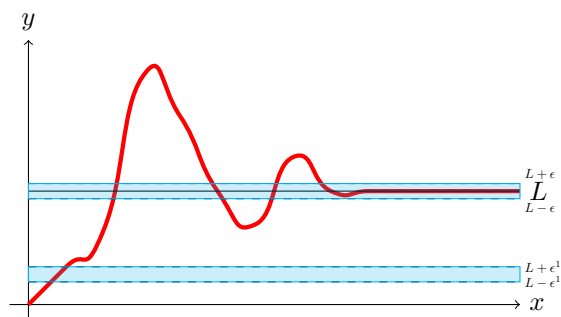
Non è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$



La funzione non entra in un intervallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.



Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 2 (Algebra dei limiti) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti

$$F := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

esistano e siano **finiti**. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende **parzialmente** nel caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:

- $F + \infty = +\infty, \quad F - \infty = -\infty \quad \forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty, \quad +\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty, \quad \forall F \in \mathbb{R}, \quad F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0 \quad \forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty \quad \forall F \in \mathbb{R}, \quad F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succedere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

N.B.: in questo contesto, 0 , ∞ e 1 sono da intendersi come abbreviazioni.

2.5 Esempi di calcolo di limiti

Esempio 2.3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \frac{1}{x})$$

$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \rightarrow +\infty$$

Per $x \rightarrow +\infty$ (per il teorema dell'algebra dei limiti)

Esempio 2.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x^3}_{+\infty} (\underbrace{\frac{1}{x}}_0 - 1) \rightarrow -\infty$$

Per $x \rightarrow +\infty$

Esempio 2.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x}_{+\infty} (\underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4) \rightarrow +\infty$$

2.6 Limiti razionali

Se P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > q \\ 0 & \text{se } p < q \\ \text{coefficiente denominante di } P & \text{se } p = q \\ \text{coefficiente denominante di } Q & \text{se } p = q \end{cases}$$

2.7 Monotonia

Teorema 3 (di monotonia) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ esiste e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce} \\ \inf\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ decresce} \end{cases}$$