Esercizi svolti in classe

Esercizio 2.1. *Si dimostri che non è regolare il linguaggio*

$$L = \{\ 0^n 1^m 0^{m+n} \mid m, n \geq 0\ \}$$

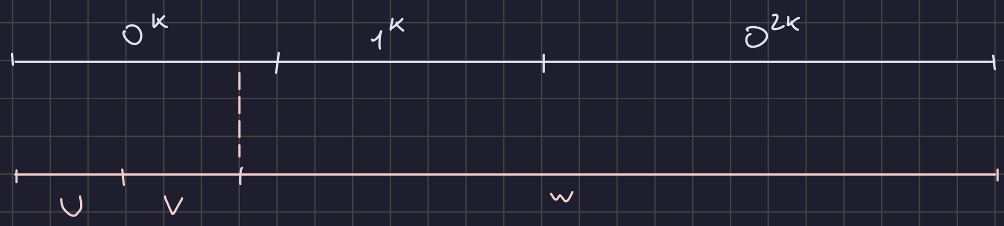
Condizioni di appartenenza

$0^a 1^b 0^c \in L \iff \boxed{c = a + b} \rightarrow$ Da violare nel pumping lemma

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ (n e m possono essere qualsiasi cosa, quindi si potrebbe usare k al loro posto)

Prendiamo $n = m = k \rightarrow z = 0^k 1^k 0^{2k} \in L \quad |z| \geq k$

(le condizioni di z non sono vincolanti, solo quelle di appartenenza)



Per i vincoli sulle suddivisioni fisso k dal Pumping Lemma: $|uv| \leq k \quad e \quad |v| > 0$

$\Downarrow$

$uv \in 0^k$ (sono nel primo grippo di 0)

$z_i = 0^{k + (i-1)|v|} 1^k 0^{2k}$

$\boxed{c = a + b}$

Prendiamo $(i = 2)$

$z_2 = 0^{k+|v|} 1^k 0^{2k} \in L \iff \underbrace{2k}_{c} = \underbrace{k + |v|}_{a} + \underbrace{k}_{b}$

$\iff 2k = 2k + |v|$

$\iff |v| = 0$ Assurdo per ipotesi sulla suddivisione

Poichè $|v| \neq 0$ allora $z_2 \notin L$ quindi il linguaggio non è regolare

Esercizio 2.9. *Dimostrare che il seguente linguaggio non è regolare*

$$L = \{ 0^n \mid n \text{ potenza di } 2 \}$$

$$\equiv$$

$$L = \{ 0^n \mid \exists m .\ n = 2^m \}$$

Condizioni di appartenenza

$$0^a \in L \iff a \text{ potenza di } 2 \iff \exists m .\ a = 2^m$$

Fissiamo k $\quad (z = 0^k \in L \iff k \text{ é potenza di } 2)$

non va bene perchè impone vincoli su k

$z = 0^{2^k} \in L \quad |z| \geq k \quad$ (Perché $2^k \geq k$)

$z_i = 0^{2^k + (i-1)|v|}$

Prendiamo $i = 2$ $\qquad [\exists m .\ a = 2^m]$

$$z_2 = 0^{2^k + |v|} \in L \iff \exists m .\ \underbrace{2^k + |v|}_{a} = 2^m$$

$\vdots$

Osserviamo:

1) La funzione potenza di 2 è crescente: $2^m = 2^k + |v| \quad |v| > 0$

$$\Downarrow$$

$$2^m > 2^k \overset{\text{cresc.}}{\Rightarrow} m > k$$

2) Se m > k allora: $\exists j > 0 .\ m = k + j$

Vogliamo cercare di riscrivere la stessa equazione a più incognite con una sola incognita (k)

$\vdots$

$$\iff 2^k + |v| = 2^{k+j}$$

$$\iff 2^k + |v| = 2^k \cdot 2^j$$

$$\iff |v| = 2^k \cdot 2^j - 2^k$$

$$\iff |v| = 2^k \underbrace{(2^j - 1)}_{= \text{almeno } 1} \qquad (j > 0 \Rightarrow 2^j > 1 \Rightarrow 2^j - 1 > 0 \Rightarrow 2^j - 1 \geq 1)$$

$$\iff |v| \geq 2^k > k$$

$$\iff |v| > k$$

Assudro per le ipotesi sulla suddivisione

$$z_2 \in L \iff |v| > k \Rightarrow |uv| \geq |v| > k \qquad \underbrace{|uv| \leq k}_{\text{Per ipotesi}} \Rightarrow z_2 \notin L$$

ESERCIZIO 2.8. *Dimostrare che il seguente linguaggio non è regolare*

$$L = \{ \ x \in \{0,1\}^* \mid |x|_0 = |x|_1 \ \}$$

$x = \sigma$ $\quad$ $|x|_0$: num di 0 $\quad$ $|x|_1$: num di 1

Si può trovare un sottoinsieme del linguaggio L in cui la Z può essere utile per trovare una soluzione per L

$L_0 \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad L_0 \subseteq L$

Un sottoinsieme non regolare non implica che l'insieme più grande sia anch'esso non regolare

Condizioni di appartenenza

$\sigma \in L \iff |\sigma|_0 = |\sigma|_1$

Fissiamo $K \in \mathbb{N}$

$z = 0^K 1^K \in L$ $\qquad$ (stringa particolare con molti più vincoli)

Per le condizioni sulla suddivisione si ha che $uv \in 0^K$

$z_i = 0^{K+(i-1)|v|} 1^K$

Prendiamo $i=2$

$z_2 = 0^{K+|v|} 1^K \in L \iff \overbrace{|z_2|_0}^{= K+|v|} = \overbrace{|z_2|_1}^{= K}$

$\iff K + |v| = K$

$\iff |v| = 0$ $\qquad$ Assurdo per le condizioni sulla suddivisione

Poichè $|v| \neq 0$ per le ipotesi allora $z_2 \notin L$

ESERCIZIO 2.29. $L = \{ \ 0^n 1^m 0^h \mid n < m < h \ \}$

Condizioni di appartenenza

$0^a 1^b 0^c \in L \iff a < b < c$

$\iff \exists i, j \neq 0 \ . \ b = a + i, \ c = b + j$

Prendiamo la maggiorazione più piccola possibile (+1)

$z = 0^K 1^{K+1} 0^{K+2} \in L \qquad |z| \geq K$

per i vincoli sulla suddivisione $uv \in 0^K$

$z_i = 0^{K+(i-1)|v|} 1^{K+1} 0^{K+2}$

Prendiamo $i=2$

$z_2 = 0^{K+|v|} 1^{K+1} 0^{K+2} \in L \iff \begin{cases} K+|v| < K+1 \iff |v| < 1 \iff |v| = 0 \\ K+1 < K+2 \text{ vero} \end{cases}$ $\qquad$ Assurdo per le ipotesi sulla suddivisione

Poichè $|v| \neq 0$ allora $z_2 \notin L$ per ipotesi

Schema di risoluzione

L regolare → Costruzione automa e dimostrazione di $L = L(M)$

L non regolare → Pumping Lemma

1. Scrivere le condizioni di appartenenza
2. Fissare K GENERICO e si sceglie z
3. Cercare $i \in \mathbb{N}$ t.c. $z_i \notin L$ (condizioni di appartenenza vincoli del pumping lemma)