Algoritmi
Esercizi

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2024/2025

Indice

1 Ricorrenza

1.1 Esercizio 1

Usando il metodo di sostituzione, dimostrare che la ricorrenza:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n < n_0 \\ L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{2n}{3}\right) & \text{se } n \geq n_0 \end{cases}$$

ha un limite asintotico inferiore $L(n) \in \Omega(n)$ e deducetene che $L(n) \in \Theta(n)$

1.1.1 Risoluzione

Sostituiamo $L(n) = cn$ per verificare se $\Omega(n)$ è il limite inferiore.

$$\begin{aligned} L(n) &= L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{2n}{3}\right) \\ &\geq c\frac{n}{3} + c\frac{2n}{3} \\ &= c\left(\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\right) \\ &= c\left(\frac{\cancel{3}n}{\cancel{3}}\right) \\ &= cn \end{aligned}$$

Siccome $cn \geq cn$ abbiamo verificato quindi che il limite asintotico inferiore è $\Omega(n)$. Siccome le due parti sono uguali, abbiamo anche verificato che $L(n) \in \Theta(n)$.

1.2 Esercizio 2

Usando il metodo di sostituzione, dimostrare che la ricorrenza:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n)$$

ha soluzione $T(n) = \Omega(n \lg n)$ e deducetene che $T(n) = \Theta(n \lg n)$

1.2.1 Risoluzione

Sostituiamo $T(n) = cn\lg n$ per verificare $T(n)$ ha soluzione in $\Omega(n\lg n)$

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n) \\
&\geq c\frac{n}{3}\lg\frac{n}{3} + c\frac{2n}{3}\lg\frac{2n}{3} + cn \\
&= c\left(\frac{n}{3}\lg\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\lg\frac{2n}{3} + n\right) \\
&= c\left(\frac{n}{3}\left(\lg\frac{n}{3} + 2\lg\frac{2n}{3} + 3\right)\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(\lg\frac{n}{3} + 2\lg\frac{2n}{3} + 3\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(\lg\frac{n}{3} + 2\lg\frac{n}{3} + 2\lg 2 + 3\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(3\lg\frac{n}{3} + 3 + 2\lg 2\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(3 + 2\lg 2\right) + cn\lg\frac{n}{3} \\
&= c\frac{n}{3} + cn\lg\frac{n}{3} \\
&= c\frac{n}{3} + cn\left(\lg n - \lg 3\right) \\
&= c\frac{n}{3} + cn\lg n \\
&= cn + cn\lg n \stackrel{?}{\geq} cn\lg n \\
&= \frac{\cancel{cn} + \cancel{cn}\lg n}{\cancel{cn}} \stackrel{?}{\geq} \frac{\cancel{cn}\lg n}{\cancel{cn}} \\
&= 1 + \lg n \stackrel{?}{\geq} n\lg n \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi verificato che $T(n) \in \Omega(n\lg n)$.