Esercizi context free

Esercizio 1.1 (Grammatica e dimostrazione). *Si dimostri che il linguaggio di tutte le stringhe palindrome sull'alfabeto* $\{0,1\}$ *(ad esempio abbiamo che* 00100, 010010 *sono palindromi mentre* 0101, 01001 *non lo sono) è context free.*

$$L = \{ x \mid \exists y \in \{0,1\}^*, \exists a \in \{0,1\} .\ x = y y^{rev} \lor x = y a y^{rev} \}$$

$$G = S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon \mid 1 \mid 0$$

Dimostro che questa grammatica genera il linguaggio L : $L = L(G)$
Bisogna quindi dimostrare:

$$x \in L \iff S \Rightarrow_* x$$

– Dimostro che $x \in L \implies S \Rightarrow_* x$ per induzione su |x|

Caso base

Considero le stringhe di lunghezza minima che appartengono al linguaggio

$$|x| = 1 \Rightarrow x \in \{\varepsilon, 0, 1\} \in L \Rightarrow S \to \varepsilon \mid 1 \mid 0$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per stringhe di lunghezza |x| ≤ n e dimostro che vale anche per stringhe di lunghezza |x| = n+1

Ipotesi induttiva: $\forall x \in \{0,1\}^* . |x| \leq n : x \in L \implies S \Rightarrow_* x$

Dimostro che vale per una stringa x nel linguaggio di lunghezza |x| = n+1

$$x \in L \Rightarrow \exists y \in \{0,1\}^*, \exists a \in \{0,1\} .\ x = y a a y^{rev} \lor x = y a y^{rev} \}$$

x è composta da una stringa x' di lunghezza |x'| < |x|, quindi se x è nel linguaggio lo è anche x'

$$x' = y y^{rev} \in L$$

Su x' posso applicare l'ipotesi induttiva

$$x' \in L \to S \Rightarrow_* x'$$

$$\to S \Rightarrow_* y y^{rev} \equiv S \Rightarrow_* y S y^{rev} \Rightarrow y \varepsilon y^{rev} = y y^{rev}$$

Quindi x si può costruire pertendo dalla derivazione di x': $a \in \{0,1\}$

- $x = y a a y^{rev} \to S \Rightarrow_* y S y^{rev} \Rightarrow y a S a y^{rev} \Rightarrow y a \varepsilon a y^{rev} = y a a y^{rev}$
- $x = y a y^{rev} \to S \Rightarrow_* y S y^{rev} \Rightarrow y a y^{rev}$

– Dimostro che $S \Rightarrow_n x \implies x \in L$ per induzione sulla lunghezza della derivazione

Caso base

Considero la derivazione più corta possibile

$n=1 \rightarrow S \Rightarrow \varepsilon|0|1 \rightarrow \{\varepsilon,0,1\} \in L$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza k ≤ n e dimostro che vale per derivazioni di lunghezza k = n+1

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}.\ k \leq n.\ S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L$

Dimostro che l'ipotesi valga per:

$$S \Rightarrow_{n+1} x \equiv S \Rightarrow aSa \overset{i.i}{\underset{n}{\Rightarrow}} ax'a = x \quad \text{con} \quad a \in \{0,1\}$$

Per ipotesi induttiva $x' \in L$ e quindi siccome aggiungere lo stesso simbolo sia a destra che a sinistra di x' mantiene la proprietà di essere palindroma, allora anche x è palindroma e quindi $x \in L$

Ho dimostrato che questo linguaggio è context free.

ESERCIZIO 1.2. *Dimostrare che il seguente linguaggio è context-free*

$$L = \{\ 0^{2n}10^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$$

$G = S \rightarrow 00S0 \mid 1$

Dimostro che questa grammatica genera il linguaggio: $L = L(G) \equiv x \in L \Leftrightarrow S \Rightarrow_* x$

Le tesi da dimostrare sono:

$t_1: \exists i \in \mathbb{N},\ x \in \Sigma^*.\ x = 0^{2i}10^i \leftrightarrow x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x$

$t_2: S \Rightarrow_n x \rightarrow \exists i \in \mathbb{N},\ x \in \Sigma^*.\ x = 0^{2i}10^i \leftrightarrow x \in L$

- Dimostro t1 per induzione sulla lunghezza delle stringhe

Caso base

Considero le stringhe di lunghezza minima che sono nel linguaggio.

$|x| = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow S \Rightarrow 1 = x$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi sia vera per le stringhe di lunghezza |x| ≤ n e dimostro che vale per stringhe di lunghezza |x| = n+1.

Ipotesi induttiva $\forall x \in \Sigma^*.\ |x| \leq n : x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x$

Considero la stringa x nel linguaggio di lunghezza |x| = n+1

$\exists x \in L.\ |x| = n+1$

La stringa x è composta da una stringa x' di lunghezza minore |x'| < |x|, quindi se x è nel linguaggio deve esserlo anche x' e di conseguenza posso appplicare l'ipotesi induttiva

$x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x' \quad n = i$

Per generare x da x', x' deve essere della forma $x' = 0^{2n-2}10^{n-1}$

$$x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* 0^{2n-2}10^{n-1} \equiv S \Rightarrow_* 0^{2n-2}S0^{n-1} \Rightarrow 0^{2n-2}10^{n-1} = x'$$

Quindi x si può costruire a partire dalla derivazione di x'

$$x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* 0^{2n-2}S0^{n-1} \Rightarrow 0^{2n-2}00S0\,0^{n-1} = 0^{2n}S0^n \Rightarrow 0^{2n}10^n = x \in L$$

- Dimostro t2 per induzione sulla lunghezza delle derivazioni

Caso base

Considero il numero minimo di passi di derivazione per generare una stringa nel linguaggio.

$n = 1 \rightarrow S \Rightarrow 1 \rightarrow 1 \in L$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza minore di n e dimostro che valga anche per derivazioni di lunghezza uguale a n+1.

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}.\ k \leq n : S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L$

Dimostro che valga per k = n+1

$S \Rightarrow_{n+1} x \equiv S \Rightarrow 00S0 \overset{i.i.}{\Rightarrow_n} 00x'0 = x \rightarrow x \in L$

Per ipotesi induttiva x' è nel linguaggio, quindi aggiungere a x' due zeri a sinistra e uno a destra fa rimanere la stringa risultante x nel linguaggio

Ho dimostrato che il linguaggio è context free.

Esercizio 1.3 (Grammatica e dimostrazione). *Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio è context free.*

$$L = \{\ 0^n 1^m 0^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\ \}$$

Intuitivamente questo linguaggio è context free perchè è presente una dipendenza tra gruppi diversi di simboli. In questo caso l'ultimo gruppo di zeri dipende dal primo gruppo di zeri e il gruppo di uni.

$$G = \begin{cases} S \rightarrow Z \\ Z \rightarrow 0Z0 \mid U \\ U \rightarrow 1U0 \mid \varepsilon \end{cases} = \begin{cases} S \rightarrow 0S0 \mid U \\ U \rightarrow 1U0 \mid \varepsilon \end{cases}$$

Dimostro che questa grammatica genera il linguaggio $L = L(G)$

Le tesi da dimostrare sono:

$t_1 : x \in L \wedge \exists i, j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j} \rightarrow S \Rightarrow_* x$

$t_2 : S \Rightarrow_n x \rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j} \wedge x \in L$

- Dimostro la tesi t1 per induzione sulla lunghezza delle stringhe

Caso base

Considero le stringhe di lunghezza minima che sono nel linguaggio:

$|x| = 0 \rightarrow x = \varepsilon \rightarrow S \Rightarrow U \Rightarrow \varepsilon$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per stringhe di lunghezza |x| ≤ n e dimostro che vale anche per stringhe di lunghezza |x| = n+1.

Ipotesi induttiva $\forall x \in \Sigma^*.\ |x| \leq n : x \in L \wedge \exists i, j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j} \rightarrow S \Rightarrow_* x$

Considero le sringhe x nel linguaggio di lunghezza |x| = n+1 che sono composte da una stringa x' di lunghezza |x'| < |x|. Si distinguono i seguenti casi:

Se j > 1, allora $x = 0^i 1^j 0^{i+j}$ e x' è della forma $x' = 0^i 1^{j-1} 0^{i+j-1}$

Se j = 1, allora $x = 0^i 1 0^{i+1}$ e x' è della forma $x' = 0^i 0^i = 0^{2i}$

Se j = 0, allora $x = 0^{2i}$ e x' è della forma $x' = 0^{2(i-1)}$

Se i = 0 e j = 0, è il caso base.

In tutti questi casi |x'| < |x| e siccome x è nel linguaggio lo è anche x' quindi posso applicare l'ipotesi induttiva:

- $j > 1$ $\quad x' \in L \rightarrow S \Rightarrow x' \equiv S \Rightarrow_* 0^i 1^{j-1} U \; 0^{i+j-1} \Rightarrow 0^i 1^{j-1} 0^{i+j-1} = x'$

  Partendo da questa derivazione si può costruire x

  $$S \Rightarrow_* 0^i 1^{j-1} U 0^{i+j-1} \Rightarrow 0^i 1^j U 0^{i+j} \Rightarrow 0^i 1^j 0^{i+j} = x$$

- $j = 1$ $\quad x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x' \equiv S \Rightarrow_* 0^i U 0^i \Rightarrow 0^i 0^i = x'$

  Partendo da questa derivazione si può costruire x

  $$S \Rightarrow_* 0^i U 0^i \Rightarrow 0^i 1 U 0 0 0^i \Rightarrow 0^i 1 0^{i+1} = x$$

- $j = 0$ $\quad x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x' \equiv S \Rightarrow_* 0^{i-1} S 0^{i-1} \Rightarrow 0^{i-1} 0^{i-1} = 0^{2(i-1)} = x'$

  Partendo da questa derivazione si può costruire x

  $$S \Rightarrow_* 0^{i-1} S 0^{i-1} \Rightarrow 0^{i-1} 0 S 0 0^{i-1} \Rightarrow 0^i U 0^i \Rightarrow 0^i 0^i = 0^{2i} = x$$

– Dimostro la tesi t2 per induzione sulla lunghezza delle derivazioni

Caso base

Considero la derivazione di lunghezza n minima che porta nel linguaggio:

$$n = 2 \rightarrow S \Rightarrow U \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \in L$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza minore di n e dimostro che vale anche per derivazioni di lunghezza n + 1:

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N} . k \leq n : S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L$

Sia $S \Rightarrow_n x$ allora per ipotesi induttiva $x \in L$ e $x = 0^i 1^j 0^{i+j}$ con $i, j \in \mathbb{N}$

$$S \Rightarrow_n x \equiv S \Rightarrow_{n-1} 0^i 1^j U 0^{i+j} \Rightarrow 0^i 1^j \varepsilon 0^{i+j} = 0^i 1^j 0^{i+j}$$

1) $S \Rightarrow_{n+1} x' \equiv S \Rightarrow 0 S 0 \overset{\text{ii}}{\Rightarrow_n} 0 \, 0^i 1^j 0^{i+j} \, 0 = 0^{i+1} 1^j 0^{i+1+j} = x' \in L$

2) $S \Rightarrow_{n+1} x' \equiv S \Rightarrow_{n-1} 0^i 1^j U 0^{i+j} \Rightarrow 0^i 1^j 1 U 0 0^{i+j} \Rightarrow 0^i 1^{j+1} \varepsilon 0^{i+j+1} = x' \in L$

Ho dimostrato che il linguaggio è context free

Esercizio 1.4 (Grammatica e dimostrazione). *Dimostrare che il seguente linguaggio è context-free*

$$L = \{\ 0^m 1^n 1^n 0^m \mid m, n \in \mathbb{N},\ m + n > 0\ \}$$

Un linguaggio è context-free se è generato da una grammatica G

$$G = \begin{cases} S \to 0S0 \mid A \\ A \to 1A1 \mid \varepsilon \end{cases}$$

Per dimostrare che una grammatica genera un linguaggio bisogna mostrare che vale:

$$L = L(G) \quad \equiv \quad x \in L \iff S \Rightarrow_* x$$

1) $L \subseteq L(G)$

La tesi da dimostrare è:

$$x \in L \iff S \Rightarrow_* x$$

Dimostro per induzione sulla lunghezza delle stringhe:

Caso base

Considero le stringhe minime che stanno nel linguaggio:

$$|x| = 0 \to x = \varepsilon \to S \Rightarrow A \Rightarrow \varepsilon$$

$$|x| = 2 \to x = 00 \to S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow 0A0 \Rightarrow 0\varepsilon 0 = 00$$
$$x = 11 \to S \Rightarrow A \Rightarrow 1A1 \Rightarrow 1\varepsilon 1 = 11$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per stringhe di lunghezza minore di n e dimostro che vale per stringhe di lunghezza n+1

Ipotesi induttiva: $\forall x \in \{0,1\}^* . |x| \leq n : x \in L \to S \Rightarrow_* x$

Sia x una stringa nel linguaggio di lunghezza |x| = n, allora vale l'ipotesi induttiva e quindi esiste una derivazione che la genera. Dimostro che anche la stringa x' di lunghezza |x'| > |x| è nel linguaggio. Si distinguono diversi casi:

1. La stringa x viene estesa con degli zeri $x = 0^m 1^n 1^n 0^m \to x' = 0^{m+1} 1^n 1^n 0^{m+1}$

$$x \in L \to S \Rightarrow_* x \equiv S \Rightarrow_* 0^m S 0^m \Rightarrow 0^m A 0^m \Rightarrow_* 0^m 1^n 1^n 0^m = x$$

Partendo da questa derivazione si può costruire x'

$$S \Rightarrow_* 0^m S 0^m \Rightarrow 0^m 0S0\, 0^m \Rightarrow 0^{m+1} A 0^{m+1} \Rightarrow_* 0^{m+1} 1^n 1^n 0^{m+1} = x'$$

2. La stringa x viene estesa con degli uni $x = 0^m 1^n 1^n 0^m \to x' = 0^m 1^{n+1} 1^{n+1} 0^m$

$$x \in L \to S \Rightarrow_* x \equiv S \Rightarrow_* 0^m 1^n A 1^n 0^m \Rightarrow 0^m 1^n \varepsilon 1^n 0^m = x$$

Partendo da questa derivazione si può costruire x'

$$S \Rightarrow_* 0^m 1^n A 1^n 0^m \Rightarrow 0^m 1^n 1A1\, 1^n 0^m \Rightarrow 0^m 1^{n+1} \varepsilon 1^{n+1} 0^m = x'$$

2) $L \supseteq L(G)$

La tesi da dimostrare è la seguente:

$$S \Rightarrow_n x \rightarrow x \in L$$

Dimostro induttivamente sulla lunghezza delle derivazioni.

Caso base

Considero le derivazioni di lunghezza minima che sono nel linguaggio

$$n = 2 \rightarrow S \Rightarrow A \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \in L$$

Passo induttivo

Suppongo che valga la tesi per le derivazioni di lunghezza minore di n e dimostro che vale anche per derivazioni di lunghezza n+1

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}.\ k \leq n:\ S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L$

Sia $S \Rightarrow_n x$, allora per ipotesi induttiva $x \in L$ e $x = 0^i 1^j 1^j 0^i$ con $i + j > 0$

$$S \Rightarrow_n x \equiv S \Rightarrow_{n-1} 0^i 1^j A 1^j 0^i \Rightarrow 0^i 1^j \varepsilon 1^j 0^i = x \in L$$

Dimostro che le stringhe generate da derivazioni di lunghezza n+1 sono nel linguaggio. Si distinguono i seguenti casi.

1) $S \Rightarrow_{n+1} x' \equiv S \Rightarrow 0S0 \overset{I.I.}{\Rightarrow_n} 0\, 0^i 1^j 1^j 0^i\, 0 = 0^{i+1} 1^j 1^j 0^{i+1} = x' \rightarrow i+1+j \geq 0 \rightarrow x' \in L$

2) $S \Rightarrow_{n+1} x' \equiv S \Rightarrow_{n-1} 0^i 1^j A 1^j 0^i \Rightarrow 0^i 1^j 1A1 1^j 0^i \Rightarrow 0^i 1^{j+1} \varepsilon 1^{j+1} 0^i = x' \rightarrow i+j+1 \geq 0 \rightarrow x' \in L$

Ho dimostrato che il linguaggio è context free

DA RIFARE, ho dimostrato $L = \{0^m 1^n 1^n 0^m \mid n+m \geq 0\}$