Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

2° Semestre 2023/2024

Indice

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$
- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come
$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$
- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come
$$\mathbb{C} = \left\{z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio
$$x^2 + 1 = 0$$
non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, ma ha soluzioni in $\mathbb{C}$.

Teorema 1 ***(Teorema fondamentale dell'algebra)***
Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

ed x è un incognita, ammette n soluzioni

Definizioni utili 1.1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textit{con} \quad a_n \neq 0$$

è detto ***polinomio di grado*** *n con* ***coefficienti*** $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero i che è definito come $i^2 = -1$. Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$ è detta **forma algebrica** di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$.

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

Definizioni utili 1.2
Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

1.2.1 Esempi

Esempio 1.1

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \quad \in \mathbb{R}$

1.3 Operazioni tra i numeri complessi

1.3.1 Somma

Definizione 1.1
L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Esempio 1.2

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$

1.3.2 Prodotto

Definizione 1.2
Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che $i^2 = -1$ *si ha che* $bdi^2 = -bd$ *quindi*

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Esempio 1.3

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso $z = a + bi \ \in \mathbb{C}$, il numero complesso $-a - bi$ è l'unico numero complesso tale che $z + (-z) = 0$. Questo numero complesso è detto **opposto** di z e si indica con $-z$.

Definizione 1.3
La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Esempio 1.4

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

1.3.4 Divisione

Definizione 1.4
La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo $\frac{1}{z_2}$ *come l'unico numero complesso tale che:*

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia $z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$ *e* $z \neq 0$. *Supponiamo che* $z' = c + di$ *sia un numero complesso tale che* $z \cdot z' = 1$, *cioè:*

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo $ac - bd = 1$ *e* $ad + bc = 0$.
Possiamo trovare c sostituendo $d = \frac{-1-ac}{b}$ *nella prima equazione:*

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1-ac)}{b} = \frac{1-ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{-1+ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{-1+ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1+ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare d sostituendo $c = \frac{-ad}{b}$ *nella seconda equazione:*

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1-bd)}{a} = \frac{1-bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1-bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$. *Definiamo:*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Esempio 1.5

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 \cancel{+abi} \cancel{-abi} + b^2 = a^2 + b^2 \quad \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

Esempio 1.6

$$\frac{1+2i}{2-i}$$

$$\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)\left(\frac{2+i}{2+i}\right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2+(-1)^2} =$$

$$= \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

1.4 Coniugato e modulo

1.4.1 Coniugato

Sia $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Il numero complesso $\overline{z} = a-bi$ è detto **coniugato** di z.

1.4.2 Modulo

Il **modulo** di z è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Proprietà

Siano $z_1 = a+bi, z_2 = c+di \quad \in \mathbb{C}$

1. $z_1\overline{z_1} = a^2+b^2 = |z_1|^2$
2. $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
4. Se

   $$z_1 \neq 0,\ \overline{\frac{1}{z_1}} = \frac{1}{\overline{z_1}}$$

   Infatti:

   $$\overline{z_1}\cdot\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \overline{\left(z_1\cdot\frac{1}{z_1}\right)} = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$

5. Se $z_2 \neq 0$ allora:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se $z_1 \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z_1} \overset{def}{=} \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

Esempio 1.7

$$z = \frac{1+i}{2-i} = (1+i)\left(\frac{1}{2-i}\right)$$

$$\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$z = (1+i)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\overline{z} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

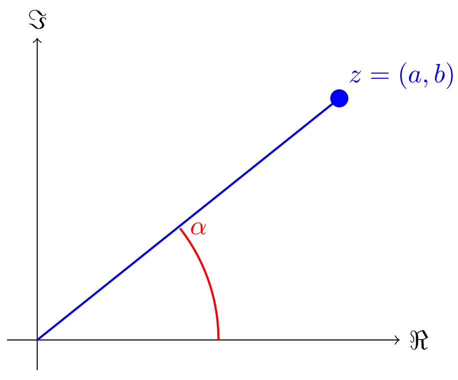

Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ, detto **raggio polare**, ed α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ in senso antiorario. α viene misurato in radianti

Esempio 1.8

$$z_1 = (1, 0) \to 1$$
$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \to i$$
$$z_3 = (1, \pi) \to -1$$
$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \to -i$$

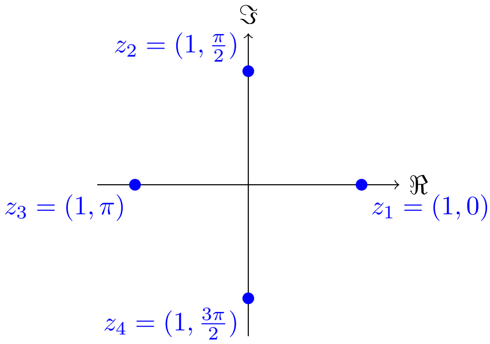

Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \qquad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

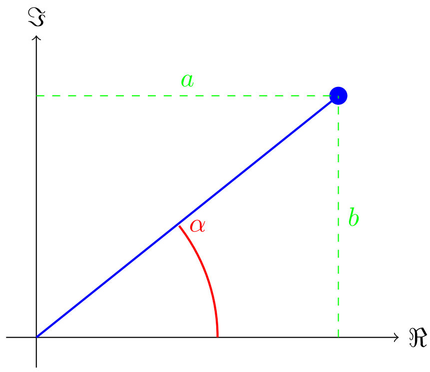

Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

Definizione 1.5
La ***forma trigonometrica*** *di un numero complesso è definita come:*

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha) i) = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \quad \textit{se } a = 0,\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \quad \textit{se } a = 0,\ b < 0 \\ \textit{non definito} \quad \textit{se } a = 0,\ b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \textit{se } a > 0,\ b \textit{ qualsiasi} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \textit{se } a < 0,\ b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \quad \textit{se } a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Esempio 1.9

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$
$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$$
$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$
$$-i = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})$$

1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica

Definizione 1.6

$$z_1 = r\left(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right), \quad z_2 = s\left(\cos(\beta) + i \sin(\beta)\right) \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 z_2 = rs(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) =$$
$$= rs\left((\cos\alpha \cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))i\right) =$$
$$= rs\left(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\right)$$

1.8 Formula di de Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}, \quad z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Esempio 1.10

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6} \cdot 6) + i\sin(\frac{\pi}{6} \cdot 6)\right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -64$$

1.9 Definizione di radice n-esima

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.10 Teorema delle radici n-esime

Teorema 2 *Siano $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esistono precisamente n radici n-esime complesse distinte $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di y. Se $y = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, allora per $k = 0, \ldots, n-1$:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Si somma $2k\pi$ per ottenere tutte le radici n-esime, siccome sin *e* cos *sono periodiche.*

1.10.1 Dimostrazione

Per la formula di de Moivre sappiamo che:

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n (\cos\alpha + (2\pi)k + i\sin\alpha + (2\pi)k) =$$

$$= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = y$$

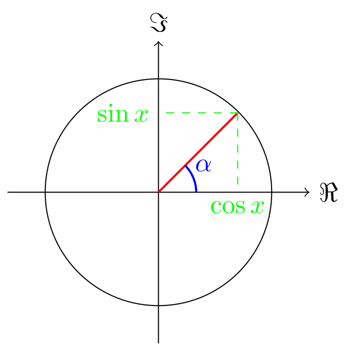

Figura 4: Circonferenza goinometrica

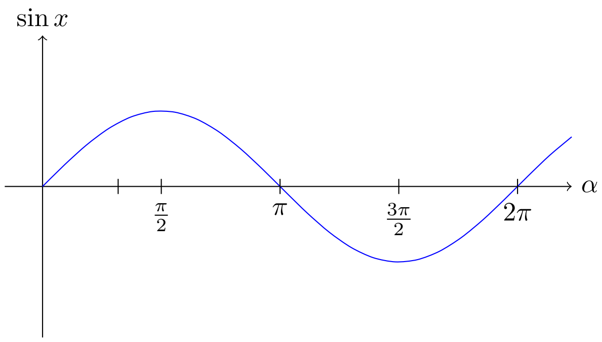

Figura 5: Funzione seno

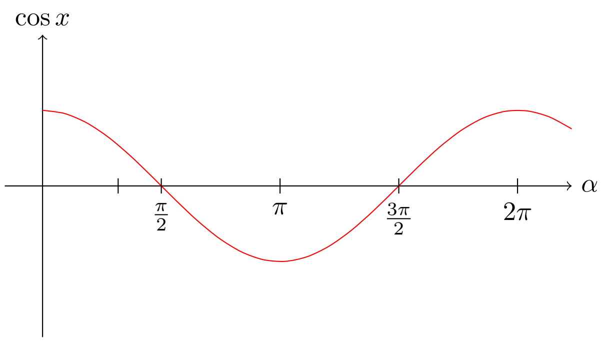

Figura 6: Funzione coseno

Quindi $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sono soluzioni di $y = x^n$, cioè sono radici n-esime di y. Siccome il periodo di $\sin$ e $\cos$ è 2π, le radici n-esime sono tutte distinte.

1.11 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ tale che $a < 0$. Esistono precisamente due radici quadrate di a in $\mathbb{C}$. Infatti, abbiamo:

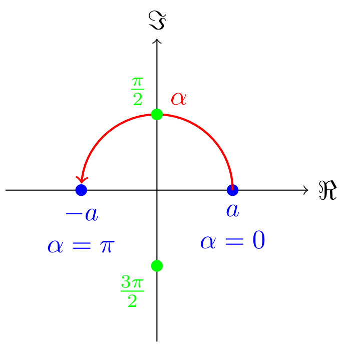

Figura 7: Radici quadrate di numeri reali negativi

$$a = (-a)(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Per il teorema 2:

$$z_0 = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{-a}$$

Definizioni utili 1.3
Se abbiamo un polinomio della forma:

$$ax^2 + bx + c, \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In $\mathbb{C}$ esistono 2 soluzioni anche se $\Delta < 0$.

2 Sistemi lineari e matrici

2.1 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni in n incognite che può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $b_k,\ a_{ij} \in \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{R}$ per $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m$. Se i **termini noti** sono tutti nulli il sistema è detto **omogeneo**. Una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di numeri complessi (o reali) è una soluzione se soddisfa tutte le m equazioni.

Esempio 2.1
Presa in considerazione la seguente tabella nutrizionale di cereali (per porzione):

	Cheerios	*Quakers*
Proteine (g)	*4*	*3*
Carboidrati (g)	*20*	*18*
Grassi (g)	*2*	*5*

Quante porzioni di Cheerios e Quakers dobbiamo mangiare per ottenere 9g *di proteine, 48g di carboidrati e 89g di grassi?*

$$\begin{cases} 4C + 3Q = 9 \quad \textit{(P)} \\ 20C + 18Q = 48 \quad \textit{(C)} \\ 2C + 5Q = 8 \quad \textit{(G)} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema lineare:

- *Moltiplichiamo le per $\frac{1}{4}$ e otteniamo un sistema lineare **equivalente** (cioè con **esattamente** le stesse soluzioni):*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C) \quad 20C + 18Q = 48$$

$$(G) \quad 2C + 5Q = 8$$

- *Calcoliamo $(C) - 20(P')$ e $(G) - 2(P')$ e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + 15Q = 18$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- *Moltiplichiamo (C') per $\frac{1}{3}$ e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- *Calcoliamo $(G') - \frac{7}{2}(C")$ e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + 0Q = 0$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ e $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Per agevolare la risoluzione del sistema lineare si può utilizzare una matrice:

- ***R1** = Riga 1*
- ***R2** = Riga 2*

- ***R3*** = *Riga 3*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \frac{1}{4} \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\downarrow R2 - 20 \cdot R1$$

$$\downarrow R3 - 2 \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow \frac{1}{3} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow R3 - \frac{7}{2} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ *e* $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

2.2 Definizione

Definizione 2.1
Siano m , n, ; < 1. Una tabella A tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

di $m \times n$ elementi di $\mathbb{C}$ disposti in m righe e n colonne si chiama una ***matrice*** *di* ***dimensione*** *$m \times n$. Gli elementi si chiamano* ***coefficienti*** *(o entrate) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice ij dove i indica la riga e j la colonna di appartenenza.*

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ con entrate in $\mathbb{C}$ si indica con $M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ con entrate in $\mathbb{R}$ si indica con $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

2.3 Definizione

Un sistema lineare di n incognite e m equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

può essere rappresentato nella forma **matriciale**:

$$Ax = b$$

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice dei coefficienti}} \qquad \underbrace{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore delle incognite}} \qquad \underbrace{b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei termini noti}}$$

La matrice

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

è detta **matrice aumentata**.

Esempio 2.3

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$R2 - R1 \quad R3 + R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\frac{-1}{5}R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$R3 - 4R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$5R3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right)$$