Parziale 26/11/2021

Esercizio 1 (punti: . . . . . . /3.5)
Si trovi una soluzione del seguente problema di Cauchy e si determini il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2-1}} \\ y(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int \frac{y'}{y^2}\, dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

$U = y$

$dU = y'dy$

$\downarrow U=y$

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 1 \cdot dU$$

$\sqrt{x^2-1} = U$

$$dU = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} \cdot \cancel{2}x$$

$$dU = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = U + c$$

$$\frac{1}{y} = -\sqrt{x^2-1} + c$$

$$y = \frac{1}{-\sqrt{x^2-1} + c}$$

$$y(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{-\sqrt{5-1} + c}$$

$$2 = -\sqrt{5-1} + c$$

$$c = 2+2 = 4$$

$$y = \frac{1}{4 - \sqrt{x^2-1}}$$

$$\mathbb{D} = \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} \neq 4 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2-1 \neq 16 \end{cases} \to \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \neq \pm\sqrt{17} \end{cases}$$

$$(-\infty, -\sqrt{17}) \cup (-\sqrt{17}, -1] \cup \underbrace{[1, \sqrt{17})}_{\text{contiene } \sqrt{5}} \cup (\sqrt{17}, \infty)$$

Il più ampio intervallo che contiene la soluzione è $[1, \sqrt{17})$

Esercizio 2 (punti: ....../3.5)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 10y = 17xe^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$s^2 + 6s + 10 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$$

$$z = C_1 e^{(-3-i)t} + C_2 e^{(-3+i)t} = C_1 e^{-3t} \cos t + C_2 e^{-3t} \sin t$$

$$y_p = Ae^t + Bte^t$$

$$y_p' = Ae^t + Be^t + Bte^t$$

$$y_p'' = Ae^t + 2Be^t + Bte^t$$

$$Ae^t + 2Be^t + Bte^t + 6Ae^t + 6Be^t + 6Bte^t + 10Ae^t + 10Bte^t = 17xe^x$$

$$e^t(A + 2B + 6A + 6B + 10A) + te^t(B + 6B + 10B) = 17xe^x$$

$$e^t(8B + 17A) + te^t(17B) = 17xe^x$$

$$\begin{cases} 8B + 17A = 0 \\ 17B = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} 17A = -8 \\ B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{8}{17} \\ B = 1 \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{8}{17}e^t + te^t = e^t\left(-\frac{8}{17} + t\right)$$

$$y(t) = z + y_p = c_1 e^{-3t} \cos t + c_2 e^{-3t} \sin t + e^t\left(-\frac{8}{17} + t\right)$$

$$y'(t) = -3c_1 e^{-3t} \cos t - c_1 e^{-3t} \cdot \sin t - 3c_2 e^{-3t} \sin t + c_2 e^{-3t} \cos t + e^t\left(-\frac{8}{17} + t + 1\right)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 - \frac{8}{17} = 0 \\ -3c_1 + c_2 - \frac{8}{17} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{8}{17} \\ -3\left(\frac{8}{17}\right) + c_2 = \frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{8}{17} \\ c_2 = \frac{8}{17} + 3\left(\frac{8}{17}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{8}{17} \\ c_2 = 4\frac{8}{17} = \frac{32}{17} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{8}{17} e^{-3t} \cos t + \frac{32}{17} e^{-3t} \sin t + e^t\left(-\frac{8}{17} + t\right)$$

Esercizio 3 (punti: . . . . . . /4)
Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio naturale della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - 4y^2} - x \ln(2x + y - x^2)$$

(1) (2 punti) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. L'insieme D è aperto? È limitato? (motivare la risposta)

$$\mathbb{D} = \begin{cases} 1 - 4y^2 \geq 0 \\ 2x + y - x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 \leq \frac{1}{4} \\ -x^2 + 2x > y \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ y < -x^2 + 2x \end{cases}$$

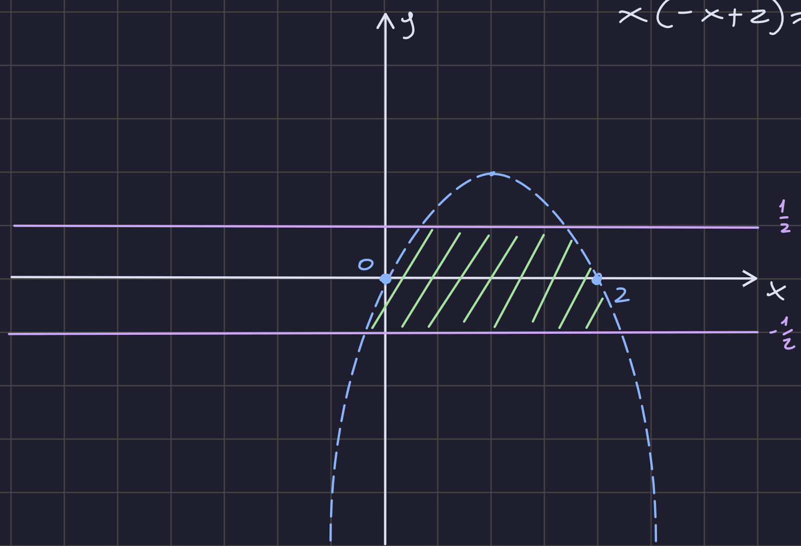
$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = 2$$

$$\downarrow$$

$$-(1)^2 + 2(1) = 1$$

$\mathbb{D} =$



Nè aperto nè chiuso perche i valori della parabola non sono compresi, ma è limitato perchè non è infinito nè sull'asse x nè sull'asse y

(2) (2 punti) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto con $x = 3/2$ e $y = 1/4$.

$$F(x,y) = \sqrt{1-4y^2} - x\ln(2x+y-x^2)$$

$$\overline{\nabla} F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,y), \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 - \left(\ln(2x+y-x^2) + x\,\frac{2-2x}{2x+y-x^2}\right)$$

$$= -\ln(2x+y-x^2) - \frac{2x-2x^2}{2x+y-x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{-4y^2}{\sqrt{1-4y^2}} - \frac{1}{2x+y-x^2}$$

$$\overline{\nabla} F(x,y) = \left(-\ln(2x+y-x^2) - \frac{2x-2x^2}{2x+y-x^2}, \frac{-4y^2}{\sqrt{1-4y^2}} - \frac{1}{2x+y-x^2}\right)$$

$$\overline{\nabla} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(-\ln(\underbrace{3+\tfrac{1}{4}-\tfrac{9}{4}}_{=1}) - \frac{3-\frac{9}{2}}{3+\frac{1}{4}-\frac{9}{2}}, \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} - \frac{1}{3+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}, -\frac{1-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} - \frac{3}{2}\ln\left(3+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$T(x,y) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) + \frac{\partial}{\partial x} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) + -\frac{1-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(y-\frac{1}{4}\right)$$

Esercizio 4 (punti: ....../5)

(1) (2 punti) Si dica se la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2+4y^5}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2+4y^5}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Trasformo in coordinate polari

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+4\rho^5\sin^5\theta}{\rho^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+4\rho^5\sin^5\theta\right)\rho^{\frac{2}{3}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0} \rho^{\frac{14}{3}}\cos^2\theta\sin^2\theta+4\rho^{\frac{17}{3}}\sin^5\theta = \lim_{\rho\to 0}\rho^{\frac{14}{3}}\Big(\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{\in[-1,1]}+\rho\underbrace{4\sin^5\theta}_{\in[-4,4]}\Big)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{\frac{14}{3}}\left(\cos^2\theta\sin^2\theta+\rho\, 4\sin^5\theta\right)=0$$

Il limite esiste e fa 0, quindi la funzione è continua in (x,y) = (0,0)

(2) (2 punti) Si trovi una parametrizzazione dell'arco di ellisse di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$$

che congiunge in senso antiorario i punti $A(3,1)$ e $B(2, \frac{1}{2})$ e si scrivano poi le equazioni parametriche della tangente alla curva in $P(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})$.

$$x^2+4y^2-4x-8y+7=0 \rightarrow \begin{cases} x^2-4x = (x-2)^2-4 \\ 4y^2-8y = (2y-2)^2-4 = 4(y-1)^2-4 \end{cases}$$

$$(x-2)^2-4+4(y-1)^2-4+7=0$$

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{1/4} = 1$$

$$t = \frac{(x-2)}{1} \qquad s = \frac{(y-1)}{1/2}$$

$$t^2+s^2=1 \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{(x-2)}{1} \\ \sin\theta = \dfrac{(y-1)}{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = x-2 \\ \sin\theta = 2y-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2+\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\sin\theta + 1 \end{cases}$$

$$\gamma(\theta) = \left(2+\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta+1\right)$$

$$A = \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2+\cos\theta = 3 \\ \frac{1}{2}\sin\theta+1 = 1 \end{cases} \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \rightarrow \theta = 0$$

$$B = \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2+\cos\theta = 2 \\ \frac{1}{2}\sin\theta+1 = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$\gamma(\theta)$ Da B ad A $\rightarrow$ $\theta \in [0, \frac{3}{2}\pi]$

$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta)$

$P = \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 + \cos\theta = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\theta + 1 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{7}{6}\pi$

$\gamma'(\frac{7}{6}\pi) = (-\sin(\frac{7}{6}\pi), \frac{1}{2}\cos(\frac{7}{6}\pi))$

$= (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$

$\gamma(\frac{7}{6}\pi) = (2 + \cos(\frac{7}{6}\pi), \frac{1}{2}\sin(\frac{7}{6}\pi) + 1)$

$= (2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4} + 1)$

$r_T = \gamma(\frac{7}{6}\pi) + t\gamma'(\frac{7}{6}\pi)$

$= \begin{pmatrix} 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} + t \cdot 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2t \\ y = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3}\, t \end{cases}$

$(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2t, \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3}\, t)$

(3) (1 punti) Verificare che la lunghezza dell'arco AB si può ridurre a un integrale della forma $\int_a^b \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt$.

$L(\gamma(\theta)) = \int_A^B \|\gamma'(\theta)\| d\theta$

$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\frac{1}{2}\cos\theta)^2} = \sqrt{\sin\theta^2 + \frac{1}{2}\cos\theta^2} = \sqrt{(1 - \cos^2\theta) + \frac{1}{2}\cos^2\theta}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta}$

$a = A$

$b = B$

$k = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$t = \theta$

$L(\gamma(\theta)) = \int_A^B \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta}\, d\theta = \int_a^b \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\, dt \rightarrow$ Con