

# Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

2° Semestre 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>2</b>
1.1	Insiemi di numeri . . . . .	2
1.2	Numeri immaginari . . . . .	3
1.2.1	Esempi . . . . .	4
1.3	Operazioni tra i numeri complessi . . . . .	4
1.3.1	Somma . . . . .	4
1.3.2	Prodotto . . . . .	5
1.3.3	Sottrazione . . . . .	5
1.3.4	Divisione . . . . .	5
1.4	Coniugato e modulo . . . . .	7
1.4.1	Coniugato . . . . .	7
1.4.2	Modulo . . . . .	7
1.4.3	Proprietà . . . . .	7
1.5	Coordinate polari . . . . .	8
1.6	Forma trigonometrica di un numero complesso . . . . .	9
1.7	Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica . . . . .	10
1.8	Formula di de Moivre . . . . .	10
1.9	Definizione di radice n-esima . . . . .	11
1.10	Teorema delle radici n-esime . . . . .	11
1.10.1	Dimostrazione . . . . .	11
1.11	Radici quadrate di numeri reali negativi . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Sistemi lineari e matrici</b>	<b>13</b>
2.1	Sistemi lineari . . . . .	13
2.2	Definizione . . . . .	16
2.3	Definizione . . . . .	16
2.4	Operazioni elementari . . . . .	18
2.5	Linee in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	19
2.6	Metodo di eliminazione di Gauss (EG) . . . . .	20
2.7	Risoluzione di un sistema lineare . . . . .	22
2.8	Definizione di rango di una matrice . . . . .	23
2.9	Osservazione . . . . .	23

# 1 Numeri complessi

## 1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni in  $\mathbb{R}$ , ma ha soluzioni in  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'algebra)**

Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

ed  $x$  è un'incognita, ammette  $n$  soluzioni

**Definizioni utili 1.1**

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

è detto **polinomio di grado  $n$  con coefficienti**  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

## 1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero  $i$  che è definito come  $i^2 = -1$ . Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$  è detta **forma algebrica** di un numero complesso  $z \in \mathbb{C}$ .

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

**Definizioni utili 1.2**

Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

### 1.2.1 Esempi

**Esempio 1.1**

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{R}$

## 1.3 Operazioni tra i numeri complessi

### 1.3.1 Somma

**Definizione 1.1**

L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

**Esempio 1.2**

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$

### 1.3.2 Prodotto

**Definizione 1.2**

Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che  $i^2 = -1$  si ha che  $bdi^2 = -bd$  quindi

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

**Esempio 1.3**

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

### 1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , il numero complesso  $-a - bi$  è l'unico numero complesso tale che  $z + (-z) = 0$ . Questo numero complesso è detto **opposto** di  $z$  e si indica con  $-z$ .

**Definizione 1.3**

La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

**Esempio 1.4**

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

### 1.3.4 Divisione

**Definizione 1.4**

La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo  $\frac{1}{z_2}$  come l'unico numero complesso tale che:

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  e  $z \neq 0$ . Supponiamo che  $z' = c + di$  sia un numero complesso tale che  $z \cdot z' = 1$ , cioè:

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo  $ac - bd = 1$  e  $ad + bc = 0$ .

Possiamo trovare  $c$  sostituendo  $d = \frac{-1-ac}{b}$  nella prima equazione:

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1-ac)}{b} = \frac{1-ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1+ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare  $d$  sostituendo  $c = \frac{ad}{b}$  nella seconda equazione:

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1-bd)}{a} = \frac{1-bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1-bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$ . Definiamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

**Esempio 1.5**

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i) \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \right) i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} - \cancel{abi} + b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

**Esempio 1.6**

$$\begin{aligned} & \frac{1+2i}{2-i} \\ & \left( \frac{1+2i}{2-i} \right) \left( \frac{2+i}{2+i} \right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2 + (-1)^2} = \\ & = \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i \end{aligned}$$

**1.4 Coniugato e modulo****1.4.1 Coniugato**

Sia  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . Il numero complesso  $\bar{z} = a - bi$  è detto **coniugato** di  $z$ .

**1.4.2 Modulo**

Il **modulo** di  $z$  è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

**1.4.3 Proprietà**

Siano  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$

1.  $z_1 \bar{z}_1 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
2.  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. Se

$$z_1 \neq 0, \quad \frac{\overline{1}}{z_1} = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

Infatti:

$$\bar{z}_1 \cdot \left( \frac{1}{z_1} \right) = \overline{\left( z_1 \cdot \frac{1}{z_1} \right)} = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$



5. Se  $z_2 \neq 0$  allora:

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se  $z_1 \neq 0$ , allora

$$\frac{1}{z_1} \stackrel{def}{=} \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

**Esempio 1.7**

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{2-i} = (1+i) \left( \frac{1}{2-i} \right) \\ \frac{1}{2-i} &= \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ z &= (1+i) \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ \overline{z} &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

## 1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

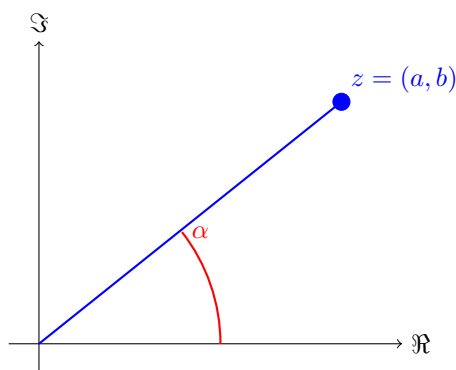


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere  $z$  in coordinate polari  $(r, \alpha)$  dove  $r$  è la lunghezza del segmento  $OZ$ , detto **raggio polare**, ed  $\alpha$  è l'angolo compreso tra l'asse delle  $x$  e  $OZ$  in senso antiorario.  $\alpha$  viene misurato in radianti

**Esempio 1.8**

$$z_1 = (1, 0) \rightarrow 1$$

$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow i$$

$$z_3 = (1, \pi) \rightarrow -1$$

$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow -i$$

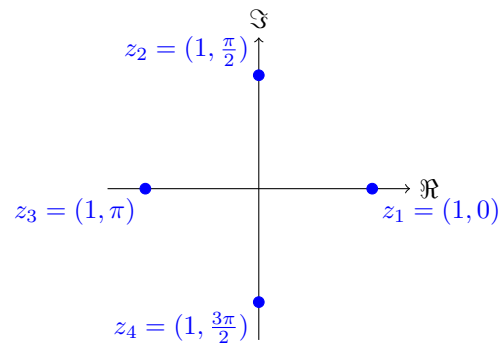


Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

## 1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un  $z = (r, \alpha)$  in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

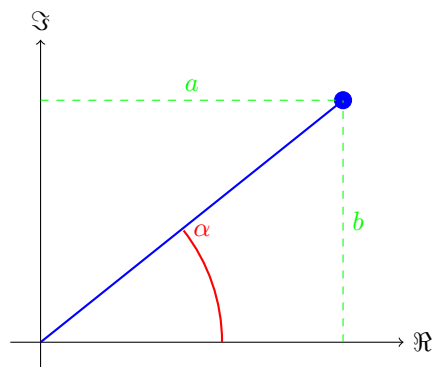


Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

**Definizione 1.5**

La **forma trigonometrica** di un numero complesso è definita come:

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha)i) = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } a = 0, b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0, b \text{ qualsiasi} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{se } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

**Esempio 1.9**

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$

$$-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

**1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica****Definizione 1.6**

$$z_1 = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)), \quad z_2 = s(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \quad \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= rs(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = \\ &= rs((\cos \alpha \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) + (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))i) = \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

**1.8 Formula di de Moivre**

Dati  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

**Esempio 1.10**

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) \right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -64$$

**1.9 Definizione di radice n-esima**

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di  $y$  le soluzioni dell'equazione  $x^n = y$ .

**1.10 Teorema delle radici n-esime**

**Teorema 2** Siano  $y \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Esistono precisamente  $n$  radici  $n$ -esime complesse distinte  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  di  $y$ . Se  $y = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ , allora per  $k = 0, \dots, n-1$ :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Si somma  $2k\pi$  per ottenere tutte le radici  $n$ -esime, siccome  $\sin$  e  $\cos$  sono periodiche.

**1.10.1 Dimostrazione**

Per la formula di de Moivre sappiamo che:

$$z_k^n = \left( \sqrt[n]{r} \right)^n (\cos \alpha + (2\pi)k + i \sin \alpha + (2\pi)k) =$$

$$= r (\cos \alpha + i \sin \alpha) = y$$

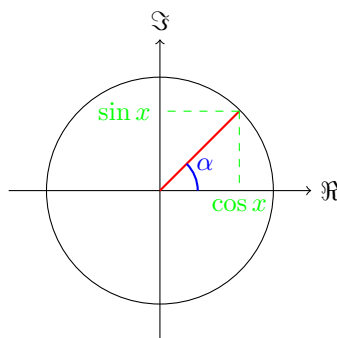


Figura 4: Circonferenza goniometrica

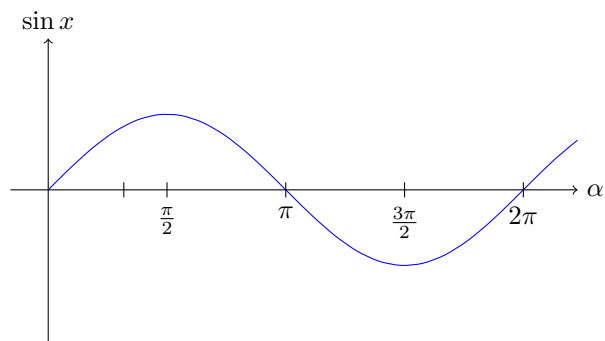


Figura 5: Funzione seno

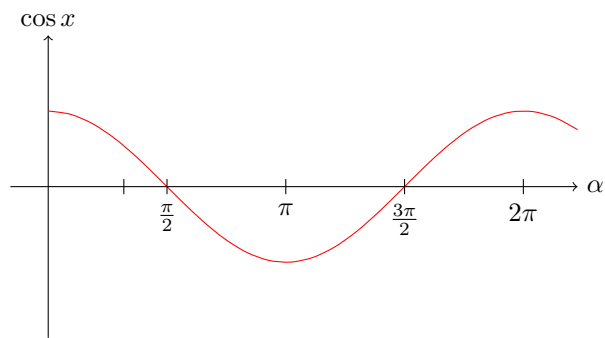


Figura 6: Funzione coseno

Quindi  $z_0, \dots, z_{n-1}$  sono soluzioni di  $y = x^n$ , cioè sono radici n-esime di  $y$ . Siccome il periodo di  $\sin$  e  $\cos$  è  $2\pi$ , le radici n-esime sono tutte distinte.

### 1.11 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia  $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  tale che  $a < 0$ . Esistono precisamente due radici quadrate di  $a$  in  $\mathbb{C}$ . Infatti, abbiamo:

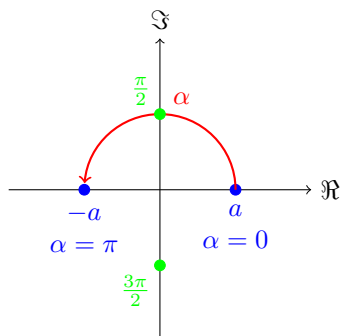


Figura 7: Radici quadrate di numeri reali negativi

$$a = (-a)(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Per il teorema 2:

$$z_0 = \sqrt{-a} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt{-a}$$

### **Definizioni utili 1.3**

Se abbiamo un polinomio della forma:

$$ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In  $\mathbb{C}$  esistono 2 soluzioni anche se  $\Delta < 0$ .

## 2 Sistemi lineari e matrici

### 2.1 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un insieme di  $m$  equazioni in  $n$  incognite che può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $b_k, a_{ij} \in \mathbb{C}$  oppure  $\mathbb{R}$  per  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ . Se i **termini noti** sono tutti nulli il sistema è detto **omogeneo**. Una n-upla  $(x_1, \dots, x_n)$  di numeri complessi (o reali) è una soluzione se soddisfa tutte le  $m$  equazioni.

### **Esempio 2.1**

Presa in considerazione la seguente tabella nutrizionale di cereali (per porzione):

	Cheerios	Quakers
Proteine (g)	4	3
Carboidrati (g)	20	18
Grassi (g)	2	5

Quante porzioni di Cheerios e Quakers dobbiamo mangiare per ottenere 9g

di proteine, 48g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4C + 3Q = 9 & (P) \\ 20C + 18Q = 48 & (C) \\ 2C + 5Q = 8 & (G) \end{cases}$$

Per risolvere il sistema lineare:

- Moltiplichiamo le per  $\frac{1}{4}$  e otteniamo un sistema lineare **equivalente** (cioè con **esattamente** le stesse soluzioni):

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C) \quad 20C + 18Q = 48$$

$$(G) \quad 2C + 5Q = 8$$

- Calcoliamo  $(C) - 20(P')$  e  $(G) - 2(P')$  e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + 15Q = 18$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- Moltiplichiamo  $(C')$  per  $\frac{1}{3}$  e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C'') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- Calcoliamo  $(G') - \frac{7}{2}(C'')$  e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C'') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G'') \quad 0C + 0Q = 0$$

Otteniamo dunque che  $Q = 1$  e  $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Per agevolare la risoluzione del sistema lineare si può utilizzare una matrice:

- **R1** = Riga 1
- **R2** = Riga 2

- $R3 = \text{Riga } 3$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{4} \cdot R1$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\downarrow R2 - 20 \cdot R1$$

$$\downarrow R3 - 2 \cdot R1$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{3} \cdot R2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\downarrow R3 - \frac{7}{2} \cdot R2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Otteniamo dunque che  $Q = 1$  e  $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$



## 2.2 Definizione

### Definizione 2.1

Siano  $m, n, \dots < 1$ . Una tabella  $A$  tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

di  $m \times n$  elementi di  $\mathbb{C}$  disposti in  $m$  righe e  $n$  colonne si chiama una **matrice** di **dimensione**  $m \times n$ . Gli elementi si chiamano **coefficienti** (o entrate) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice  $ij$  dove  $i$  indica la riga e  $j$  la colonna di appartenenza.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione  $m \times n$  con entrate in  $\mathbb{C}$  si indica con  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ .

L'insieme di tutte le matrici di dimensione  $m \times n$  con entrate in  $\mathbb{R}$  si indica con  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

### Esempio 2.2

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

## 2.3 Definizione

Un sistema lineare di  $n$  incognite e  $m$  equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

può essere rappresentato nella forma **matriciale**:

$$Ax = b$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice dei coefficienti}} \quad x = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore delle incognite}} \quad b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei termini noti}}$$

La matrice

$$(A \mid B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

è detta **matrice aumentata**.

**Esempio 2.3**

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2}R1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$R2 - R1 \quad R3 + R1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$-\frac{1}{5}R2$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$R3 - 4R2$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right)$$

$$5R3$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

Si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegniamo un parametro alla **variabile libera**  $x_4$  :

$$t = x_4 \quad x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8 - 5t) + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + t + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3\left(\frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t\right) - \frac{3}{2}(8 - 5t) - t = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t - \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10 + 21 - 60}{5} + \frac{15 + 30}{4}t - t = \frac{-29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = \frac{-29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni  $t \in \mathbb{C}$ .

## 2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumentata  $(A|b)$ , si ottiene un sistema equivalente di forma più semplice:

- Moltiplicare una riga  $(R_i)$  per uno scalare  $\alpha \in \mathbb{C}$  **non nullo**:

$$\alpha R_i$$

- Sommare una riga  $(R_i)$  con un multiplo di un'altra riga  $(R_j)$ :

$$R_i + \alpha R_j$$

- Scambiare riga  $R_i$  con riga  $R_j$ :

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

### **Esempio 2.4**

Prendiamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R3+R1]{R2-R1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{-1}{5}R2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R3-4R2]{R3-4R2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{5}{8}R3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, non ha soluzioni.

## 2.5 Linee in $\mathbb{R}^2$

2 equazioni a 2 incognite con coefficienti in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (I) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Questo sistema lineare può essere rappresentato come:

$$y = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}} \quad (I)$$

$$y = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} \quad (II)$$

Il sistema può essere rappresentato come un sistema di rette nel piano cartesiano in cui la soluzione è l'intersezione delle rette.

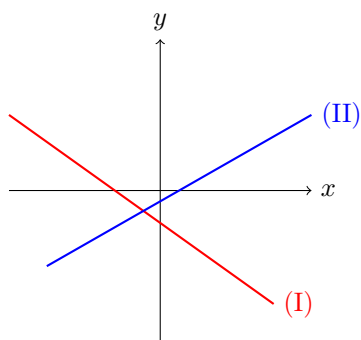


Figura 8: Intersezione di due rette

Può anche succedere che le rette siano parallele, in questo caso il sistema è impossibile:

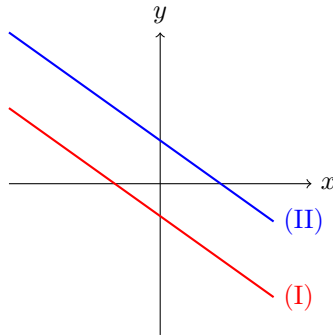


Figura 9: Retta parallela

Oppure che le rette siano coincidenti, in questo caso il sistema è indeterminato, cioè con infinite soluzioni:

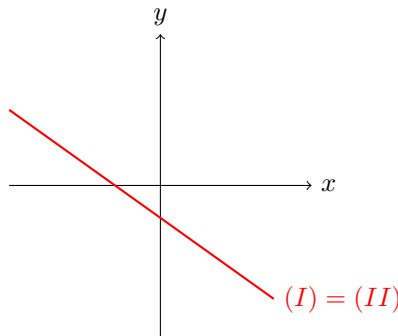


Figura 10: Retta coincidente

## 2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice  $M = (a_{ij})$   $1 \leq i \leq m$   $1 \leq j \leq n$  in  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  (oppure in  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ) con righe  $R1, \dots, Rn$ , eseguiamo le seguenti operazioni elementari:

1. Scegliamo la prima colonna non nulla  $j$  di  $M$  (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato 2 righe di  $M$ , otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{con } a_{ij} \neq 0$$

Moltiplicando  $R1$  per  $\frac{1}{a_{1j}}$ , si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Adesso, per ogni  $2 \leq i \leq m$ , eseguiamo l'operazione elementare  $Ri - a_{ij}R1$ .  
Otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

2. Ripetiamo il procedimento 1. su  $M'$  per ottenere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & * & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

e così via...

3. Dopo un numero finito di passi, si ottiene una matrice che si chiama **matrice a scala**:

$$r \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè esiste un numero  $1 \leq r \leq m$  tale che:

- (a) Le righe  $1 \leq i \leq r$  non sono nulle.
- (b) Ogni riga  $2 \leq i \leq m$  ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente.
- (c) le righe  $r + 1 \leq i \leq m$  sono tutte nulle.

Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga  $i$  è uguale a 1 e si chiama **pivot**. La matrice è detta **forma ridotta** di  $M$ . Le colonne che contengono pivot sono dette **dominanti**.

### **Esempio 2.5**

Prendiamo in considerazione la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{C})$$

$$\begin{array}{l}
R1 \xleftrightarrow{\sim} R2 \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{10}R1} \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{array} \right) \\
R3 \xrightarrow{+iR2} \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{5}R2} \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{array} \right) \\
R3 \xrightarrow{-(6+3i)R2} \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} - \frac{11}{5}i \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{11}{5} - \frac{11}{5}i R3} \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

## 2.7 Risoluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*) \quad Ax = b$$

con  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$  procediamo con il metodo di eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata  $(A|b)$  fino ad ottenere la forma ridotta  $(U|c)$  e un sistema lineare corrispondente

$$Ux = c$$

che è equivalente a  $(*)$ . Chiamiamo **variabili dominanti** le  $r$  variabili che corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti.

### Esempio 2.6

Prendiamo in considerazione il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$x_1$  e  $x_3$  sono variabili dominanti e  $x_2$  è variabile libera.

Si ha uno dei seguenti casi:

- 1) Tutte le colonne di  $(U|c)$  tranne  $c$  sono dominanti. In questo caso il sistema ha una soluzione unica. Ad esempio:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\infty$ ) L'ultima colonna e almeno una colonna di  $U$  **non** sono dominanti. In tal caso il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono assegnando parametri

alle  $n - r$  variabili libere. Ad esempio:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

- 0) L'ultima colonna  $c$  è dominante. In questo tal caso il sistema non ammette soluzioni. Ad esempio:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Attenzione:** la forma ridotta di una matrice **non** è univocamente determinata, ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

## 2.8 Definizione di rango di una matrice

### *Definizione 2.2*

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  con forma ridotta  $U$ . Il numero  $r$  di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di  $U$  e si indica con  $rk(U)$ .

Verrà dimostrato più avanti che ogni forma ridotta di  $A$  ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di  $A$  come  $rk(A) = rk(U)$ .

Si ha  $rk(A) \leq \min(m, n)$ .

## 2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni  $[1]$ ,  $[\infty]$ ,  $[0]$  usando il rango:

**Teorema 3 (Teorema di Rouché-Cappelli)** Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , sia  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ .

$$\begin{aligned} [1] &\Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) = n \\ &\text{"}rk(U) = rk(U|c)\text{"} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\infty] &\Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) < n \\ &\text{"}rk(U) = rk(U|c) < n\text{"} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0] &\Leftrightarrow rk(A) < rk(A|b) \\ &\text{"}rk(U) < rk(U|c)\text{"} \end{aligned}$$