Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1 Introduzione

1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazioneli; questo insieme viene indicato con il simbolo $\mathbb{R}$

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- 1^a **proprietà (Eudosso-Archimede)**: due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

  Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

  Assioma: dati due numeri reali positivi a, b con $0 < a < b$ esiste un intero n tale che $na > b$.

- 2^a **proprietà (Intervalli inscatolati)**: date due serie di grandezze: $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$: la prima crescente (numeri della famiglia a) e la seconda decrescente (numeri della famiglia b), in cui ogni a_k è minore di b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k, allora esiste una grandezza c tale che per ogni k $a_k \leq c \leq b_k$.

1.2 Maggiorante

Definizione 1.1
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ ‘ è un maggiorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \geq x$.

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'interballo tendesse verso $+\infty$ non si sarebbe alcun maggiorante poichè $+\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha maggiorante

1.3 Minorante

Definizione 1.2
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \leq x$.

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso $-\infty$ non ci sarebbe alcun minorante poichè $-\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha minorante

1.4 Estremo superiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato superiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo superiore di S se:

- y è un maggiorante di S
- y è il più piccolo maggiorante di S

Se S è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di S è $sup(S) = +\infty$. Esempi:

- $I = (1, 10]$: $sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$: $sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $sup(\mathbb{R}) = +\infty$

1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato inferiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo inferiore di S se:

- y è un minorante di S
- y è il più grande minorante di S

Se S è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di S è $inf(S) = -\infty$. Esempi:

- $I = [1, 8)$: $inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$: $inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $inf(\mathbb{R}) = -\infty$

1.6 Massimo

> ***Definizione 1.3***
> *Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il massimo di S se y è l'estremo superiore di S e se $y \in S$.*

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con $Max(S) = y$.

1.7 Minimo

Definizione 1.4
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il minimo di S se y è l'estremo inferiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con $Min(S) = y$.

Teorema 1 *Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.*

1.8 Funzioni

Definizione 1.5
*Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:*

$$f : A \to B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di A è associato uno e uno solo elemento di B.

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \; \exists! \; b \in B \; tale \; che \; f : A \to B$$

Esempio di funzione corretta:

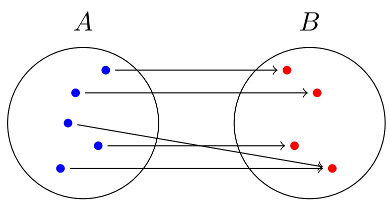


Figura 1: Esempio di funzione corretta

1.8.1 Dominio di una funzione

Definizione 1.6
Dato un insieme di partenza A gli elementi ai quali è applicata la funzione f sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \to x^2 \; con \; D = \mathbb{R}$$

$$x \to \sqrt{x} \; con \; D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ } con \text{ } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ } con \text{ } D = [0, +\infty)$$

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \to +\infty$)

Definizione 2.1
Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \; t.c. \; \forall x \subset A^a,$$

$$x \geq k \to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$)
La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .

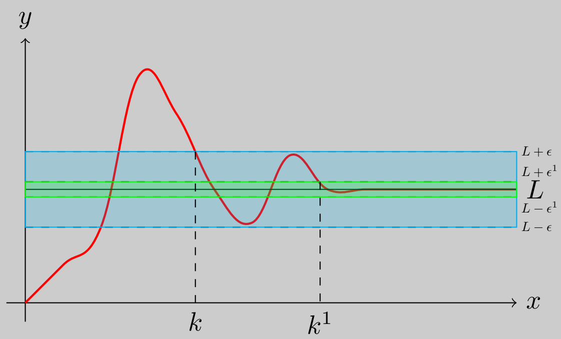


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di L e non uscirne più. Questo vale per ogni ϵ, quindi anche per ϵ^1.

[a] Il dominio della funzione

Definizione 2.2
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

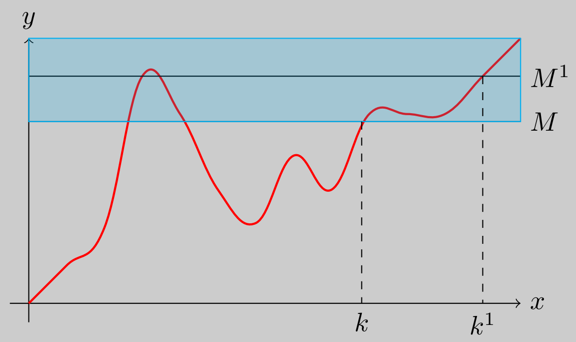


Figura 3: Definizione di limite a $+\infty$

Definizione 2.3
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$)

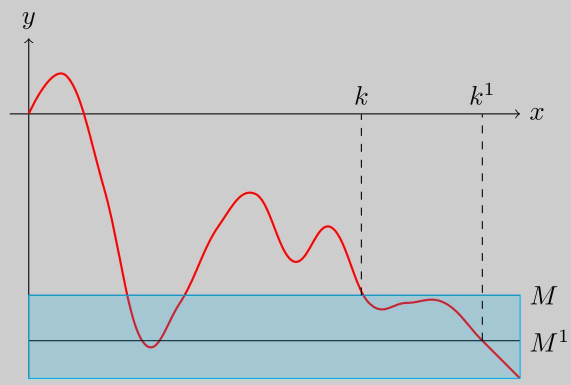


Figura 4: Definizione di limite a $-\infty$

2.1 Esempi

Esempio 2.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad Dominio = \mathbb{R}/\{0\}$$

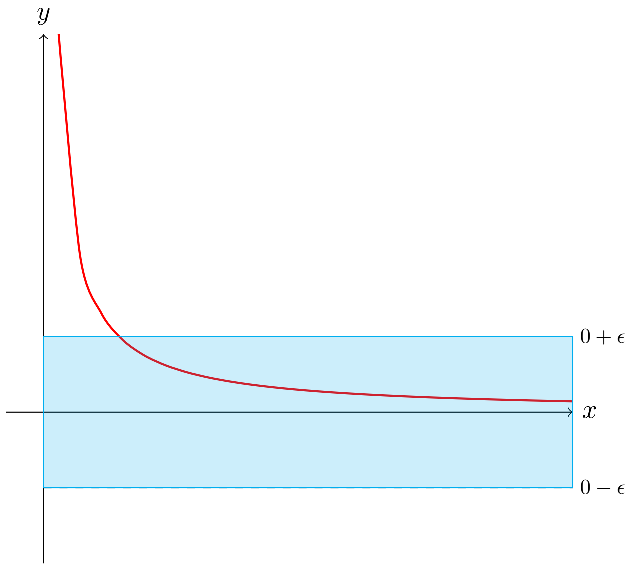


Figura 5: Esempio di limite

Sia dato $\epsilon > 0$ arbitrario. Definisco $k := \frac{1}{\epsilon}$.
Sia dato $x > 0$ arbitrario, supponiamo $x \geq k$. Allora

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$).

Esempio 2.2

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

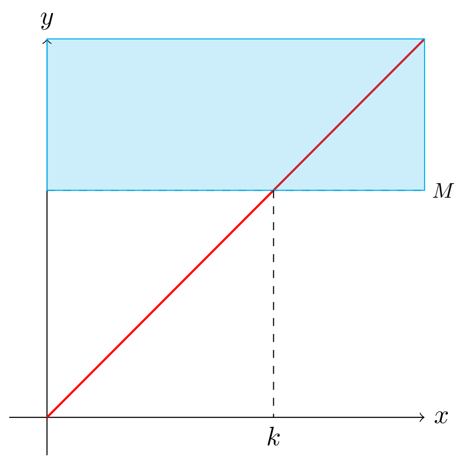


Figura 6: Esempio di limite a $+\infty$

Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
Quindi è verificata la definizione di limite.

2.2 Osservazioni

Non è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \to +\infty} sin(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} cos(x)$$

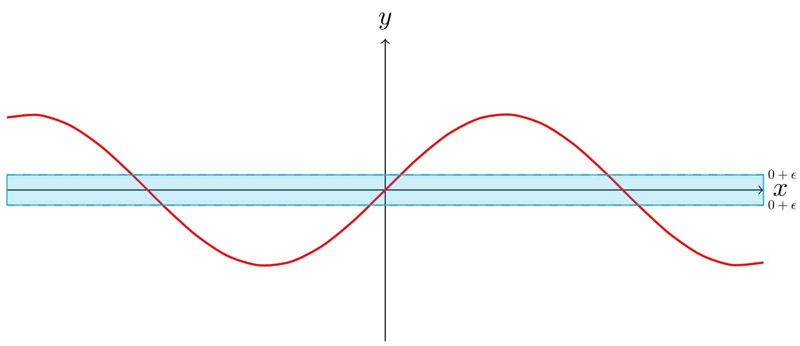


Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intevallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.

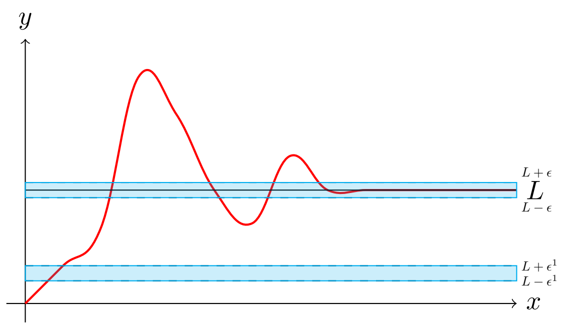


Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 2 (Algebra dei limiti) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti*

$$F := \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

*esistano e siano **finiti**. Allora*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad se\ G \neq 0$$

*Il teorema si estende **parzialmente** nel caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:*

- $F + \infty = +\infty, \quad F - \infty = -\infty \ \ \forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty, \quad +\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty, \ \ \forall F \in \mathbb{R}, \ F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0 \ \ \forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty \ \ \forall F \in \mathbb{R}, \ F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succdere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}

N.B.: in questo contesto, 0 , ∞ e 1 sono da intendersi come abbreviazioni.

2.5 Esempi di calcolo di limiti

Esempio 2.3

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + \frac{1}{x})$$

$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \to +\infty$$

Per $x \to +\infty$ (per il teorema dell'algebra dei limiti)

Esempio 2.4

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x^3}_{+\infty}(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - 1) \to -\infty$$

Per $x \to +\infty$

Esempio 2.5

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x}_{+\infty}(\underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4) \to +\infty$$

2.6 Limiti razionali

Se P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q, allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & se\ p > q \\ 0 \quad se\ p < q \\ coefficiente\ denominante\ di\ P & se\ p = q \\ coefficiente\ denominante\ di\ Q & se\ p = q \end{cases}$$

2.7 Limiti delle funzioni monotone

Teorema 3 (di monotonia) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona*[1]*. Allora*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ \ esiste\ e$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} sup\{f(x) :\ x \in A\} & se\ f\ cresce\ (nondecrescecnte) \\ inf\{f(x) :\ x \in A\} & se\ f\ decresce\ (noncrescente) \end{cases}$$

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
f è strettamente crescente e limitata (l'immagine di f è un insieme limitato).

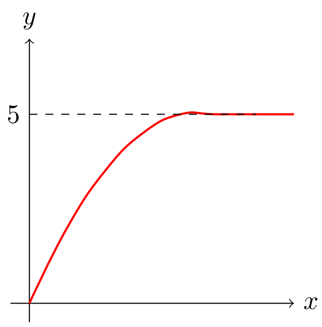


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e non limitata

[1]Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

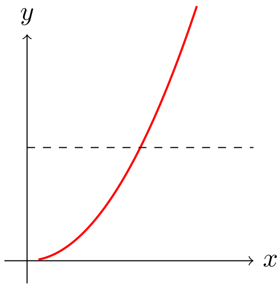
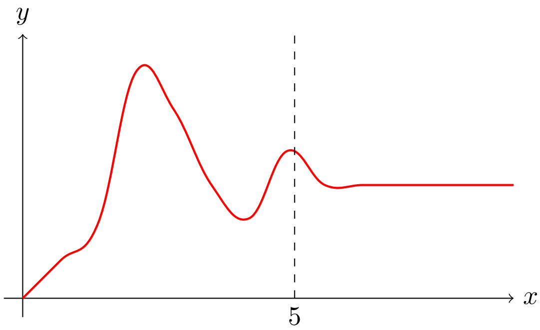


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede epr $x > 5$ si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da $x = 5$.

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Esempio 2.6

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = +\infty$$

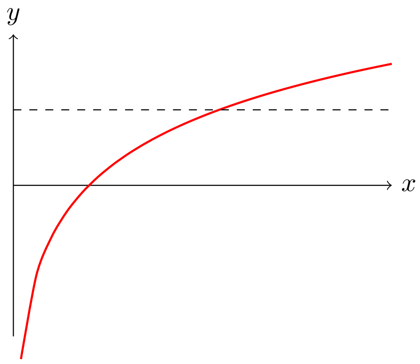


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

Per il teorema di monotonia:

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = sup\{log(x) : x > 0\}$$

$$\geq sup\{log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \;\; scelto\ arbitrariamente$$

$$= sup\{n \cdot log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty$$

Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a $+\infty$.

Esercizio 2.1
Dimostrare che:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

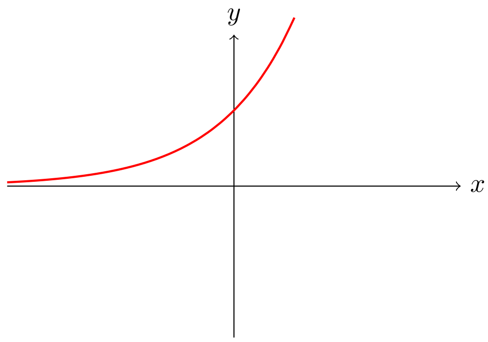


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

E similmente che:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

2.7.1 Variante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ *t.c.* $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$.
Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

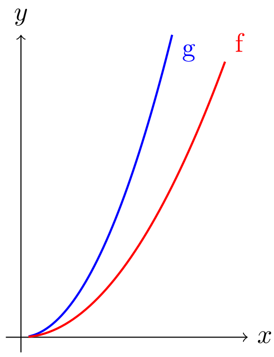


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

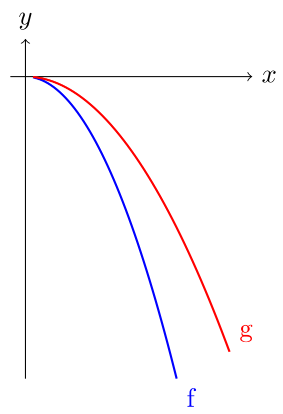


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative

2.8 Limiti per $x \to -\infty$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato inferiormente, $f : A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \to +\infty} f(-t) = L$$

$$x = -t$$
$$\text{se } x \to -\infty$$
$$\text{allora } t \to +\infty$$

2.9 Limiti per $x \to x_0$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Per definire il limite di f quando $x \to 0$, serve che f sia definita "vicino a x_0", in un senso opportuno. Noi supporremo, ad esempio, che il dominio A contenga almeno un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ oppure $(x_0, x_0 - \delta)$, con $\delta > 0$. **Non** è richiesto, invece, che f sia definita in x_0.

Esempio 2.7

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \quad f : A \to \mathbb{R}$$

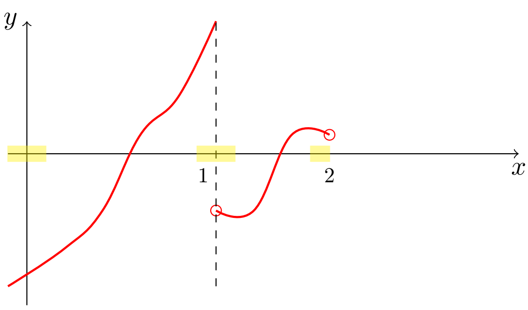


Figura 16: Limiti su una funzione non continua

Posso definire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to 2} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

Non è detto però che tali limiti esistano

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; t.c. \; \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \;\; e \;\; x \neq x_0$$

$$\to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

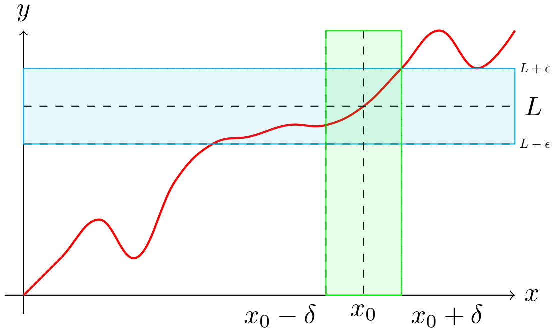


Figura 17: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \; t.c. \; \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \;\; e \;\; x \neq x_0$$
$$f(x) \geq M$$

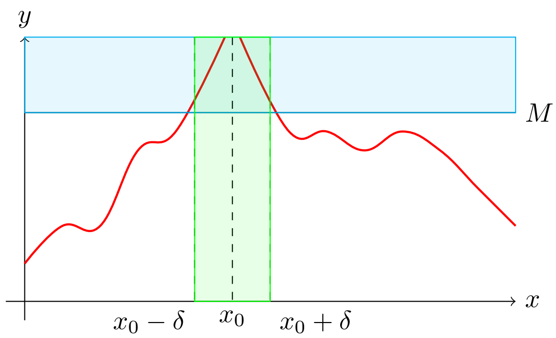


Figura 18: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \; t.c. \; \forall x \in A,$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \;\; e \;\; x \neq x_0$$
$$f(x) \leq M$$

2.10 Limiti unilateri

Si possono anche dare le definizioni di limiti **unilateri**, da destra o da sinistra:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Esempio 2.8

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \;\; \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} (\frac{1}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x}) \;\; non \; esiste$$

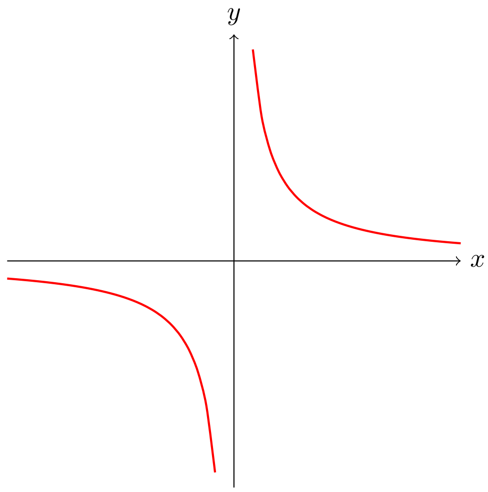


Figura 19: Limiti unilateri

2.11 Limiti di funzioni continue

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo oppure un'unione finita di intervalli.

Definizione 2.4
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diremo che f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è continua se e solo se f è continua in ogni punto del suo dominio $x_0 \in A$.

Esempio 2.9

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua, perchè

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \;\; \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

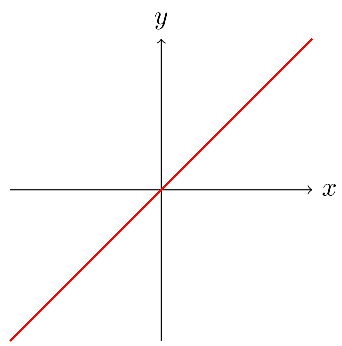


Figura 20: Eempio di funzione continua

Esempio 2.10

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & se\ x \neq 2 \\ 31 & se\ x = 2 \end{cases}$$

Non è continua perchè

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2)$$

Però f è continua in tutti gli $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 2$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = x_0$$

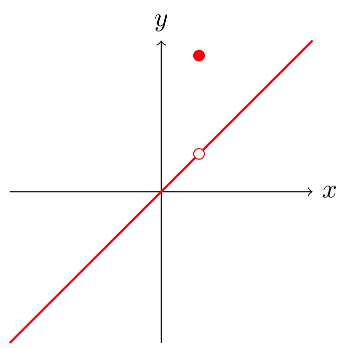


Figura 21: Eempio di funzione non continua

Esempio 2.11

$$h : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

Il dominio è un unione di 2 intervalli:

$$(\mathbb{R}/0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

È una funzione continua

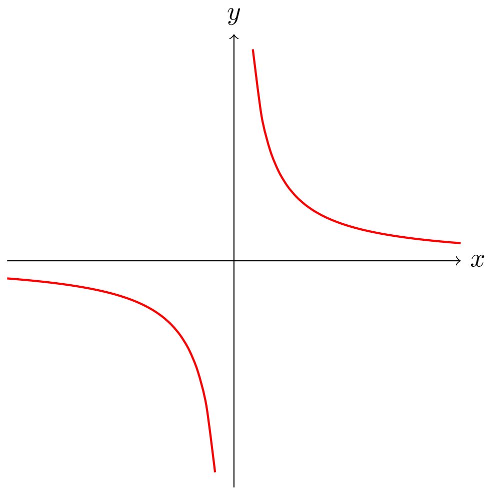


Figura 22: Esmpio di funzione continua

Esempio 2.12

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$l(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 5 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione non è continua perchè il limite a 0 non esiste:

$$\lim_{x \to 0} l(x) = \nexists$$

ma:

$$\lim_{x \to 0} |l(x)| = +\infty$$

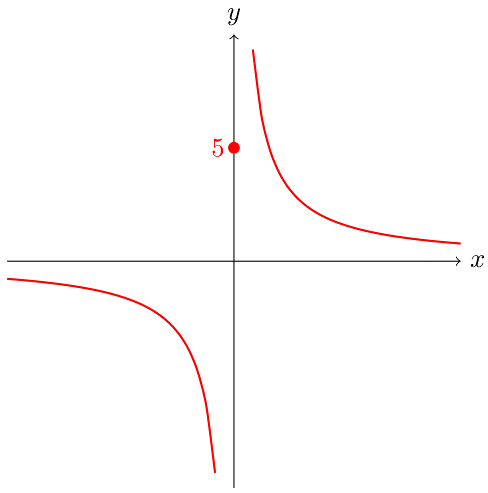


Figura 23: Esmpio di funzione non continua

Esempio 2.13

$$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$m(x) := \begin{cases} x^2 & se\ x \neq 0 \\ -2 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Non è continua perchè:

$$\lim_{x \to 0} m(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \neq m(0)$$

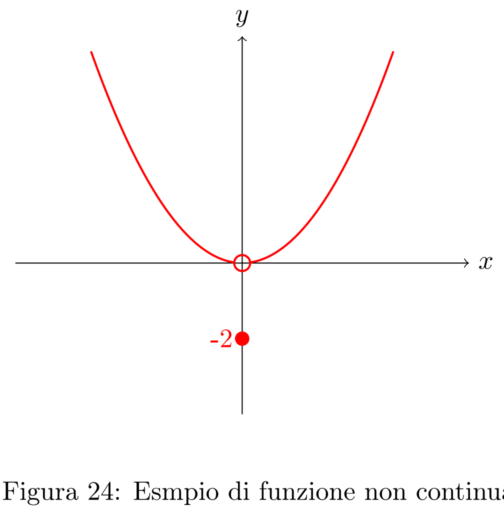


Figura 24: Esmpio di funzione non continua

3 Notazione o piccolo di Landau

Si dimostra che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \qquad (F.I.\ \frac{0}{0})$$

Considero $x > 0$

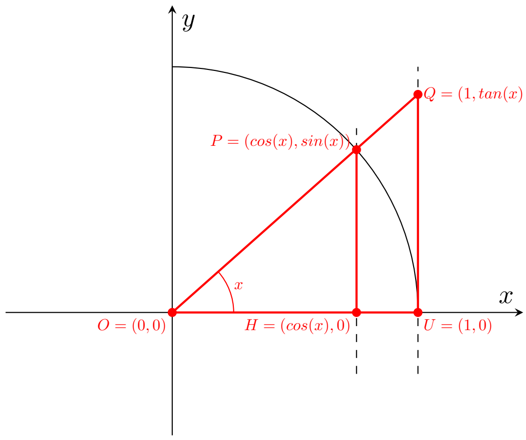


Figura 25: Grafico

Area del triangolo OHP:

- $\leq$ area del settore OUP
- $\leq$ area del triangolo OUQ

Area di $OHP = \frac{1}{2}sin(x)cos(x)$
Area di $OUQ = \frac{1}{2}tan(x) = \frac{1}{2}\frac{sin(x)}{cos(x)}$
Area di OUP : area del disco unitario = ampiezza dell'angolo $P\hat{O}U$: ampiezza dell'angolo giro
da cui:

$$Area\ di\ OUP = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2}x$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2}sin(x)cos(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Moltiplico per $\frac{2}{sin(x)}$ (assumendo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$, così che $sin(x) > 0$):

$$cos(x) \leq \frac{x}{sin(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}$$

da cui:

$$\underbrace{cos(x)}_{1} \leq \frac{sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{cos(x)}}_{1}$$

$$per\ x \to 0^+$$

Per il teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = 1.$$

Il caso $x \to 0^-$ è analogo. $\square$

Se definiamo:

$$q(x) := \frac{sin(x)}{x} - 1$$

posso concludere che:

$$\frac{sin(x)}{x} = 1 + q(x) \Leftrightarrow sin(x) = x + xq(x)$$

$$\lim_{x \to 0} q(x) = 0$$

Definizione 3.1
Notazione *o piccolo di Landau.*
Diremo che:

$$f(x) = o(g(x)) \qquad per\ x \to x_0$$

se e solo se esiste una funzione q tale che:

$$f(x) = g(x)q(x) \qquad (\forall x)$$

$$\lim_{x \to x_0} q(x) = 0$$

Ad esempio, possiamo dire che:

$$sin(x) = x + \underbrace{o(x)}_{g(x)q(x)} \qquad per\ x \to 0$$

3.1 Proprietà

1. $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
2. $o(g(x)) = g(x)o(1)$ per $x \to x_0$
3. $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$
   Infatti,
   $$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)$$
   dove
   $$\lim_{x \to x_0} q_1(x) = \lim_{x \to x_0} q_2(x) = 0$$
   e quindi
   $$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)\underbrace{(q_1(x) + q_2(x))}_{0\ \ per\ x \to x_0} = o(g(x))$$

4. Se $k \in \mathbb{R}$ è una costante,

$$ko(g(x)) = o(g(x)) \quad per\ x \to x_0$$

5. $f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \quad per\ x \to x_0$

6. In generale, **non** vale

$$o(g(x)) - o(g(x)) = 0 \quad per\ x \to x_0$$

   Infatti,

$$o(g(x)) - o(g(x)) = g(x)q_1(x) - g(x)q_2(x)$$

   dove

$$\lim_{x \to x_0} q_1(x) = \lim_{x \to x_0} q_2(x) = 0$$

   ma **non** è detto che $q_1(x) = q_2(x)$.
   (Però è vero che $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x)) \quad per\ x \to x_0$)

7. Allo stesso modo, **non** è detto che

$$\frac{o(g(x))}{o(g(x))} = 1 \quad per\ x \to x_0$$

   (forma indeterminata)

È molto importante specificare $x \to x_0$.
Ad esempio:

Esempio 3.1

$$x^2 = o(x) \quad per\ x \to 0$$
$$x = o(x^2) \quad per\ x \to +\infty$$

3.2 Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \to 0$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $log(1 + x) = x + o(x)$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (con\ \alpha \in \mathbb{R}\ costante)$
- $sin(x) = x + o(x)$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

3.3 Funzioni continue

Proprietà:

1. Se $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora sono continue anche

$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$

(quest'ultima definita su $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$)

2. Se $f : A \to \mathbb{R},\ g : B \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che $f(A) \subseteq B$, allora è continua anche la funzione composta

$$g \circ f : A \to \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

Esempio 3.2
Sono funzioni continue:

- *tutti i polinomi*
- *tutte le funzioni razionali (quozienti di polinomi)*
- $x \to x^\alpha$*, con* $\alpha \in \mathbb{R}$ *costante, laddove ben definito*
- *exp, log, sin, cos, tan, ...*
- *valore assoluto,* $x \in \mathbb{R} \to |x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$
- *funzioni composte, ad esempio:*

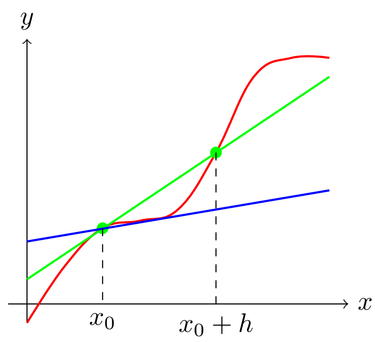
$$h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_1(x) := sin(x^3 + 5x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_2 : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad h_2(x) := log(x^2 - 4) \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

4 Derivate

Sia A un intervallo aperto (del tipo $A = (a, b)$ oppure $A = (a, +\infty), A = (-\infty, a), A = \mathbb{R}$), oppure un'unione di intervalli aperti.

Sia $f : A \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in A$. **Retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$?



Preso $h \in \mathbb{R},\ h \neq 0$, il coefficiente angolare (pendenza) della retta secante il grafico nei punti $(x_0, f(x_0)),\ \ (x_0 + h, f(x_0 + h))$ è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 4.1
*Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** (o derivabile) in $x_0 \in A$ se e solo se esiste ed è finito il limite:*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Tale limite è detto **derivata** di f in x_0. f si dice **differenziabile** (o derivabile) se e solo se è differenziabile in ogni punto del suo dominio.*

4.0.1 Osservazioni

1. La retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è definita come l'unica retta di pendenza $f'(x_0)$ passante per $(x_0, f(x_0)$. Essa ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. f è differenziabile in x_0 se e solo se vale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \textit{per } h \to 0$$

che equivale a dire:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\, o(1) \quad \textit{per } h \to 0$$

Quindi, f è differenziabile in x_0 se e solo se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \textit{per } h \to 0$$

il che equivale (posto $x = x_0 + h$) a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \textit{per } x \to x_0$$

Esempio 4.1

$$f = e^x, \quad x_0 = 0$$

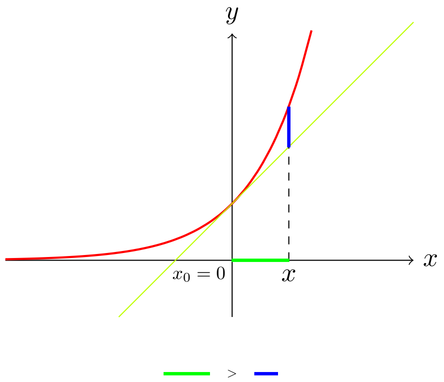


Figura 26: Eempio di funzione continua

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \textit{per } x \to 0$$

dunque

$$e'^0 = 1$$

Che sarebbe il coefficiente di x nell'equazione $e^x = 1 + x + o(x)$

Si può anche scrivere (Notazione di Leibnitz):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Esempio 4.2
Una funzione costante è differenziabile con derivata

$$(5')(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{5 - 5}{h} = 0$$

4.1 Proprietà delle funzioni differenziabili

Dove non specificato, supporremo sempre che il dominio A sia un intervallo aperto o un'unione di intervalli aperti.

Proprietà: Se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0, allora f è continua in x_0.
Dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0) \square$$

Non vale il viceversa: f può essere continua senza essere differenziabile.

Esempio 4.3

$$f(x) := |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x_0 = 0$$
$$f' + (0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$
$$f' - (0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

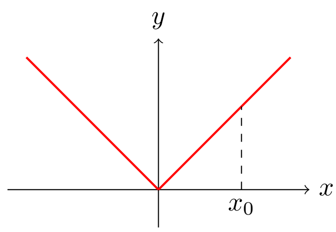


Figura 27: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Le derivate destra e sinistra in $x_0 = 0$ esistono e sono entrambe finite, ma sono **diverse** tra loro: f ha un **punto angoloso** in $x_0 = 0$.

Esempio 4.4

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g' + (0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

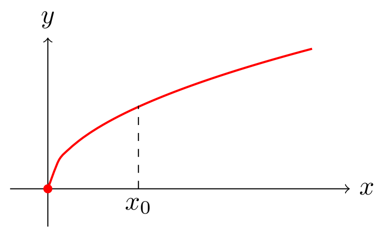


Figura 28: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Il limite (destro, in questo caso) del rapporto incrementale esiste, ma è infinito: g ha una ***cuspide*** *o* ***punto a tangente verticale*** *in* $x_0 = 0$.

Definizione 4.2

Un punto $x_0 \in A$ *si dice punto di* $\begin{cases} \textit{massimo} \\ \textit{minimo} \end{cases}$ *locale di una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *se esiste* $\delta > 0$ *tc* $\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$ *per ogni:*

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

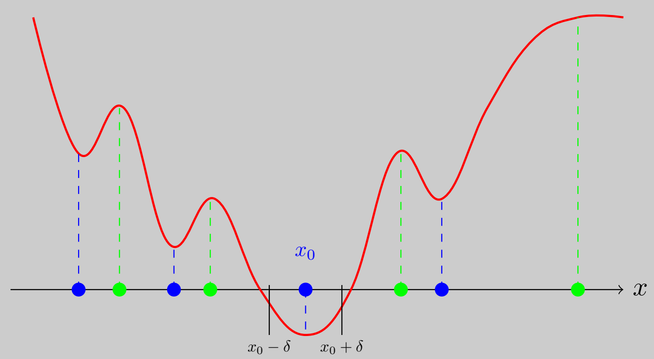


Figura 29: Teorema degli zeri

I punti di massimo o minimo locale si chiamano anche ***estremi locali***.

4.2 Derivate delle funzioni inverse

Esempio 4.5
Consideriamo

$$tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

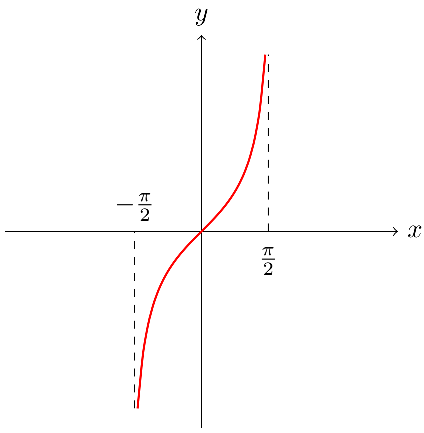


Figura 30: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La tangente è differenziabile

$$\frac{d}{dx}(tan(x)) = \frac{(sin)'(x)cos(x) - (cos)'(x)sin(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x) > 0 \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

- *La tangente è strettamente crescente, quindi iniettiva*
- *La tangente è suriettiva: per ogni $y \in \mathbb{R}$, esiste*

  $$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \; tc \; tan(x) = y$$

  Infatti la tangente è continua e

  $$\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} tan(x) = -\infty$$

  $$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} tan(x) = +\infty$$

Quindi il teorema degli zeri implica che esiste $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tc $tan(x) = y$

$tan : (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è biettiva, quindi per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste un unico numero reale, che indicheremo $arctan(y)$, tale che

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < arctan(y) < \frac{\pi}{2} \\ tan(arctan(y)) = y \end{cases}$$

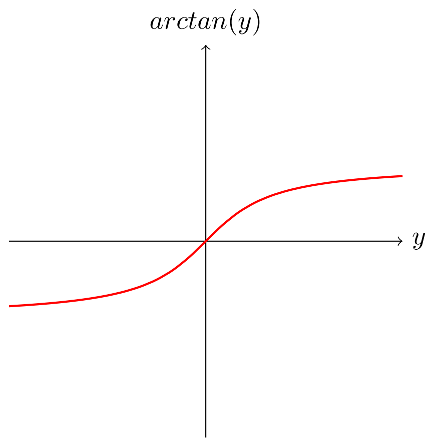


Figura 31: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La funzione $arctan$ è differenziabile? Se sì, chi è la sua derivata?

Supponiamo già di sapere che $arctan$ è differenziabile (è vero, ma andrebbe dimostrato)

$$tan(arctan(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Deriviamo ambo i membri:

$$\frac{d}{dy}(tan(arctan(y))) = 1$$

$$\frac{d}{dy}(tan(arctan(y))) = tan'(arctan(y)) \cdot (arctan(y))'$$

$$tan'(x) = 1 + tan^2(x) = (1 + (tan(arctan(y))))^2 \cdot (arctan(y))'$$
$$= (1 + y^2) \cdot (arctan(y))'$$

Dunque:

$$(1 + y^2)arctan'(y) = 1$$

e quindi:

$$arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Quanto fatto ha validità più generale:

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione fifferenziabile tale che $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora esiste la funzione inversa:

$$g : f(I) \to I$$

tale che $f(g(y)) = y \ \forall y \in f(I),\ g(f(x)) = x \ \forall x \in I$

Inoltre, g è differenziabile e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

per ogni $y \in f(I)$

Esercizio 4.1
Trovare le derivate delle funzioni:

$$arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

5 Derivate successive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, o un'unione di intervalli aperti. Sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Se (e solo se) f è differenziabile e f' è differenziabile, si dice che f è differenziabile due volte. Si scrive f'' per la derivata seconda di f (cioè la derivata di f).

Similmente si definiscono le funzioni differenziabili $3, 4, 5, \ldots$, infinite volte. Notazione per le derivate successive:

$$f' = f^{(1)} = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

5.1 Funzioni convesse e concave

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ se e solo se la corda tra due punti qualsiasi del grafico di f sta tutta $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$ il grafico di f.

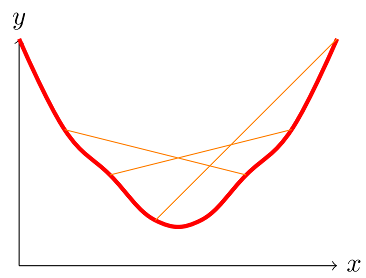


Figura 32: Funzione convessa

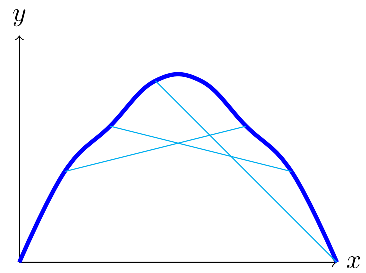


Figura 33: Funzione concava

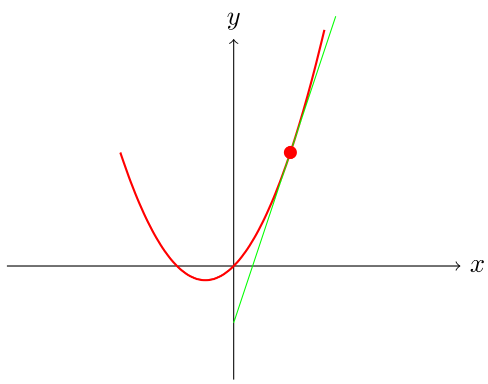
In maniera equivalente, f è convessa se e solo se per ogni $x \in I$, ogni $\overline{x} \in I$ ed ogni $t \in [0,1]$, vale

$$f(tx + (1-t))\overline{x}) \leq tf(x) + (1-t)f(\overline{x})$$

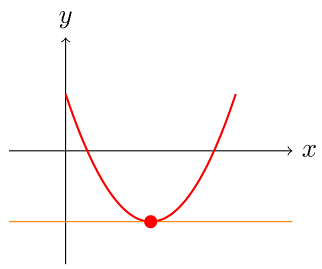
5.2 Proprietà delle funzioni convesse (o concave)

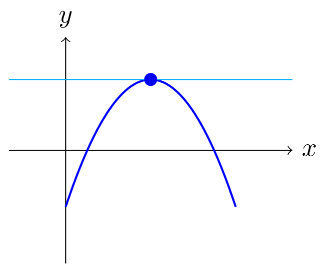
1. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte. Se $\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$ in ogni punto di I, allora f è $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$

2. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ è differenziabile e $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ e $x_0 \in I$, allora la retta tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$ sta tutta $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$ il grafico di f.



3. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ e $x_0 \in I$ un punto critico di f ($f'(x_0) = 0$), allora x_0 è un punto di $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$ di f.

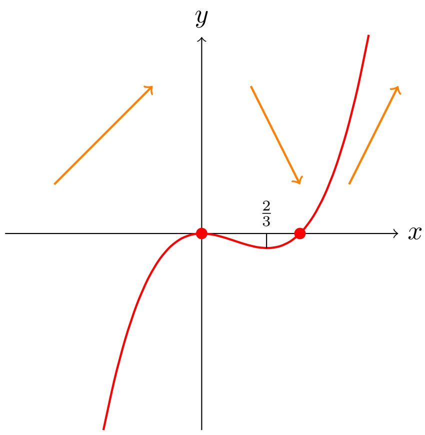




4. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è differenziabile due volte e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ e $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$ locale per f.

Esempio 5.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 6x - 2$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; \textit{oppure}$$
$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \;\; \textit{oppure} \;\; x = 0$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; \textit{oppure} \;\; x = \frac{2}{3}$$
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \;\; \textit{oppure} \;\; x \geq \frac{2}{3}$$

Quindi f è cresccente in $(-\infty, 0)$ e in $\frac{2}{3}, +\infty$; f è decrescente in $(0, \frac{2}{3})$. In $x = 0$ ho un punto di massimo locale, in $x = \frac{2}{3}$ ho un punto di minimo locale.

$$f''(x) = 6x - 2$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

f è convessa in $(\frac{1}{3}, +\infty)$ e concava in $(-\infty, \frac{1}{3})$; f ha $x = \frac{1}{3}$ è un punto di flesso di f.

6 Teoremi

6.1 Teorema dei carabinieri

Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$$

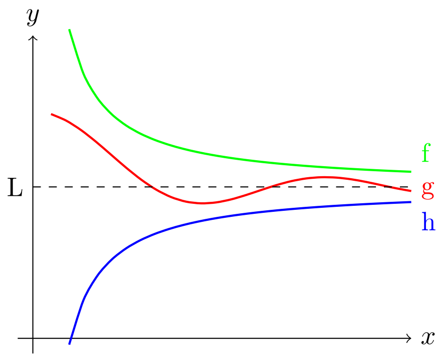


Figura 34: Teorema del confronto tra i limiti

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists k > 0 \ \ t.c. \ \ \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$$

Prendiamo dunque $\epsilon > 0$ arbitrario. Poichè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, sappiamo che esiste $k_f > 0$ t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_f \to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

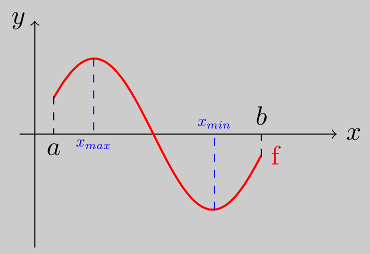
Allo stesso modo, poichè $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$, sappiamo che esiste $k_h > 0$ t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_h \to L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

Definiamo $k := max\{k_f, k_h\}$. Comunque preso $x \in A$, se $x \geq k$ allora vale che

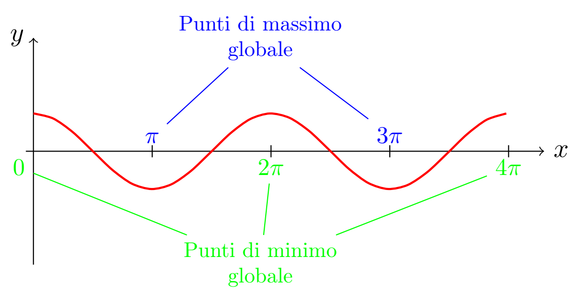
$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

6.2 Teorema di Weiestrass

> ***Definizione 6.1***
> *Teorema di Weierstrass*
> *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono*
>
> $$x_{max}, x_{min} \in [a,b] \ \ t.c. \ \ f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \forall x \in [a,b]$$
>
> 
>
>
> Figura 35: Teorema di Weiestrass
>
> *Ogni funzione continua, avrà quindi un punto di minimo e un punto di massimo*

6.2.1 Osservazioni

- In particolare, f è limitata
- I punti x_{min}, x_{max} si dicono punti di minimo e di massimo **globali** di f
- I punti di minimo e massimo globali possono essere non unici e coincidere con gli estremi a, b dell'intervallo

> ***Esempio 6.1***
>
> $$cos : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$$
>
> 
>
>
> Figura 36: Teorema di Weiestrass

Se vengono meno le ipotesi del teorema, può venir meno la conclusione.

6.2.2 Esempi

Esempio 6.2

$$f_1 : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := x \quad \forall x \in (0, 1)$$

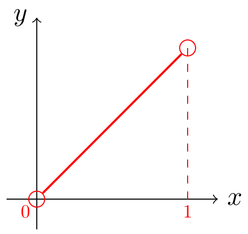


Figura 37: Esempio di funzione continua

Questa funzione è continua, ma per come è definita ***non*** *ammette nè massimo nè minimo perchè il* ***dominio non è chiuso****.*

Esempio 6.3

$$f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) := xsin(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

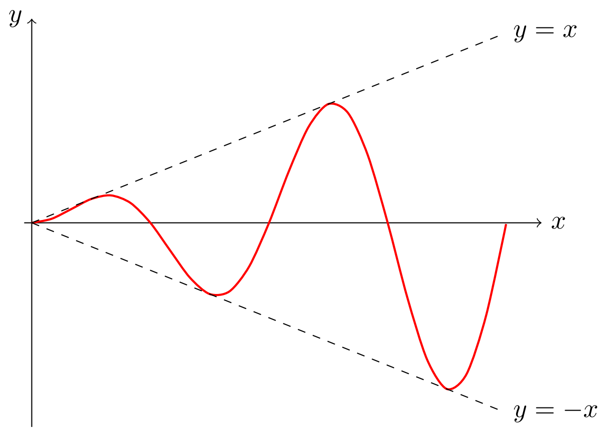


Figura 38: Esempio di funzione continua

Questa funzione è continua, ma ***non*** *possiede nè punti di massimo, nè punti di minimo perchè la funzione ha ampiezza sempre crescente.*

Esempio 6.4

$$f_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$f_3(x) := \begin{cases} 1 - x \quad se\ 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad se\ x = 0 \\ -x - 1 \quad se\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

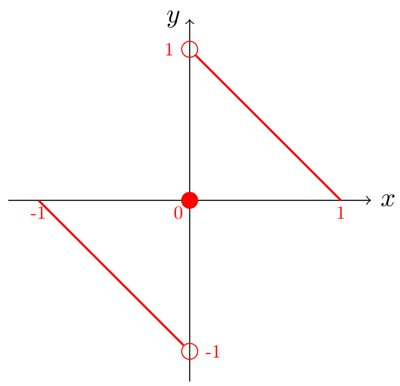


Figura 39: Esempio di funzione non continua

Questa funzione ***non*** *ammette punti di massimo e di minimo perchè non è continua.*

6.3 Teorema degli zeri

Definizione 6.2
Teorema degli zeri (o di Bolzano)
Sia $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato,* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Se*

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$

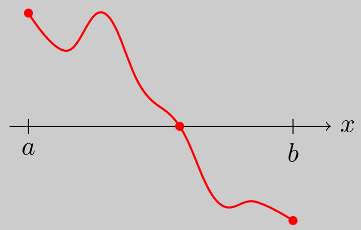


Figura 40: Teorema degli zeri

Se vengono meno le ipotesi, può venir meno la conclusione.

6.3.1 Esempi

Esempio 6.5

$$g_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} -1 & se \ -1 \leq x < 0 \\ 1 & se \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

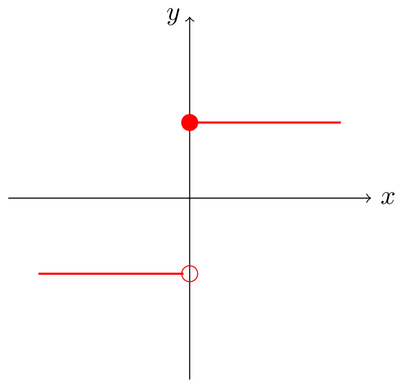


Figura 41: Esempio di funzione non continua

Questa funzione non è continua, quindi non si applica il teorema.

Esempio 6.6

$$g_2 : [-1,1]/\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$g_2(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in [-1,1]/\{0\}$$

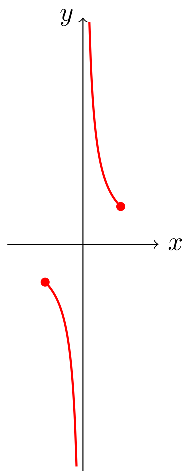


Figura 42: Esempio di funzione continua

Questa funzione è continua, ma non si annulla mai perchè il dominio della funzione ***non è un intervallo*** *,ma un intervallo privato di un valore, quindi non si applica il teorema.*

6.4 Teorema di Fermat

Teorema 5 (di Fermat) *Sia $x_0 \in A$ un estremo locale di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è differenziabile in x_0 e se x_0 è **interno** ad A (cioè, f è definita in un intorno di x_0), allora:*

$$f'(x_0) = 0$$

*(I punti dove $f'(x_0) = 0$ si dicono **punti critici di** f)*

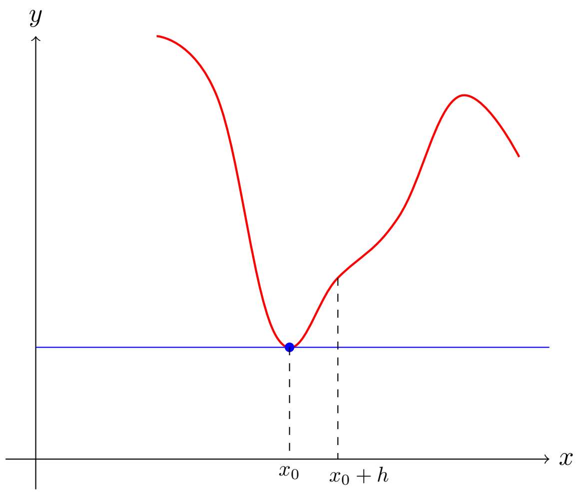


Figura 43: Teorema di Fermat

6.4.1 Dimostrazione

Supponiamo ad esempio x_0 minimo locale di f. Prendo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Se $|h|$ è abbastanza piccolo,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{perchè } x_0 \text{ è minimo locale}$$

Se $h > 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Se $h < 0$:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Poichè f è differenziabile in x_0, so che esistono:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e i due limiti sono uguali tra loro e uguali a $f'(x_0)$. L'unica possibilità $f'(x_0) = 0$

6.5 Teorema di Lagrange

Definizione 6.3
Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e differenziabile in (a, b). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

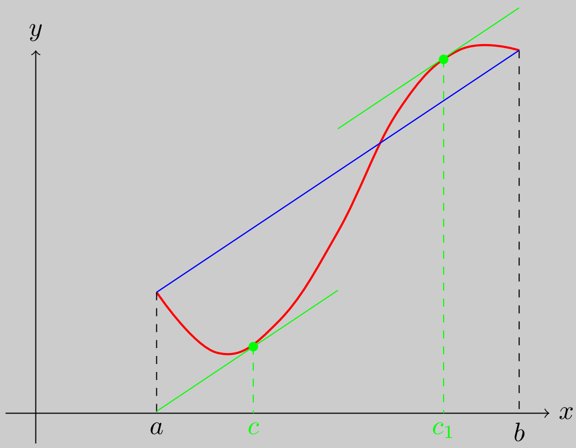


Figura 44: Teorema di Lagrange

Corollario: Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile se:

$$\begin{cases} f' = 0 \\ f' \geq 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di I, allora f è:

$$\begin{cases} \text{costante} \\ \text{non decrescente} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{non crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Qui è importante assumere che il dominio sia un intervallo

Esempio 6.7

$$f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := \begin{cases} -1 & se\ 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & se\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

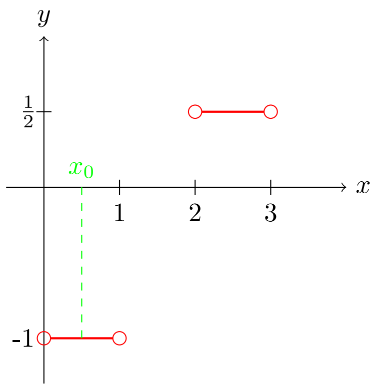


Figura 45: Teorema di Lagrange

f è differenziabile e ha $f' = 0$ ovunque, ma non è costante (il dominio non è un intervallo).

6.5.1 Dimostrazione

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, differenziabile in (a,b) , tale che $f(a) = f(b)$.

   Devo dimostrare che esiste

   $$c \in (a,b)\ tc\ f'(c) = 0$$

   Per il teorema di Weierstrass, f possiede un punto di massimo x_{max} e un punto di minimo x_{min} globali.

   Se $x_{min} \in (a,b)$, allora scelgo $c := x_{min}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

   Se $x_{max} \in (a,b)$, allora scelgo $c := x_{max}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

   Altrimenti, ho $\{x_{max}, x_{min}\} = \{a,b\}$. Grazie all'ipotesi $f(a) = f(b)$, posso allora dedurre che f è costante, dunque $f' = 0$ in tutto $[a,b]$.

2. **Caso generale:** Definisco $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)}_{\text{Equazione della corda AB}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora g è continnua, g è differenziabile, in (a, b),

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Dunque, per quanto dimostrato nel passo precedente, esiste $c \in (a, b)$ tale che

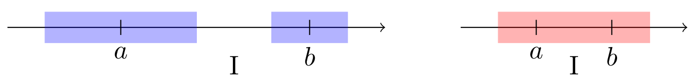
$$g'(c) = 0$$

perchè:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.5.2 Dimostrazione del corollario

Prendo $a \in I, b \in I$ qualsiasi; devo dimostrare che $f(a) = f(b)$. Se $a = b$, non c'è nulla da dimostrare. Suppongo ad esempio $a < b$ (se no li scambio). Allora f è definita su tutto $[a, b]$ (perchè I è un intervallo, dunque $[a, b] \supseteq I$).



Inoltre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua (differenziabile $\Rightarrow$ continua), differenziabile in (a, b) e quindi, per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, per ipotesi, $f'(c) = 0$, da cioè $f(b) - f(a) = 0$, cioè $f(b) = f(a)$.

6.6 Teorema de l'Hopital

Si applica al calcolo dei limiti della forma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, con f, g funzioni differenziabili, **purchè** il limite si presenti sotto la forma (indeterminata) $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Il teorema riduce il calcolo del limite dato al calcolo di:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(purchè esista)}$$

Definizione 6.4
Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Supponiamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$$

Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$ e che il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esista. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si possono scrivere varianti per il calcolo dei limiti quando $x \to x_0$ con $x \in \mathbb{R}$ oppure $x \to -\infty$.

6.6.1 Esempi

Esempio 6.8

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Esempio 6.9

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Si può dimostrare che per ogni $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = 0$$

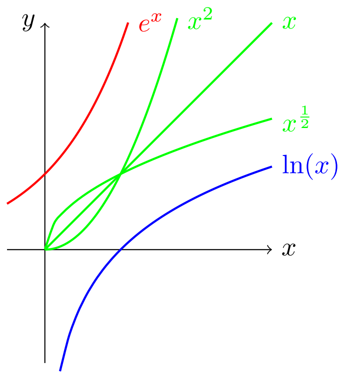


Figura 46: Confronto tra funzioni

Quando $x \to +\infty$, l'esponenziale cresce più velocemente di tutte le potenze (ad esponente positivo); il logaritmo più lentamente.

7 Sviluppi di Taylor

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) una funzione differenziabile $x_0 \in I$. Per definizione di differenziabilità:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente valutata in } x_0} + o(x - x_0) \quad \textit{per } x \to x_0$$

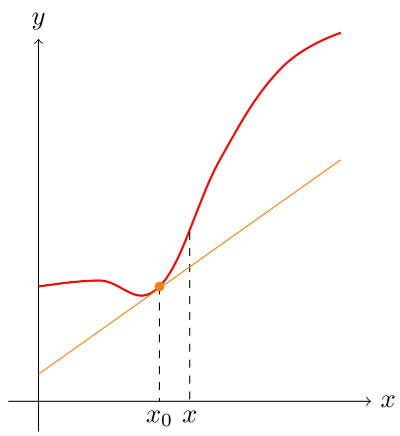


Figura 47: Sviluppo di Taylor

Se f è differenziabile due o più volte, si possono dare approssimazioni locali ancora migliori.

7.1 Notazione

Dato $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, si definisce il fattoriale di n come:

$$\begin{cases} 0! := 1 & se\ n = 0 \\ n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & se\ n \geq 0 \end{cases}$$

7.2 Polinomi di Taylor

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile n volte, $x_0 \in I$. Si definisce il **Polinomio di Taylor** di f di centro x_0 ed ordine n come:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Quando $x_0 = 0$, si parla anche di polinomio di McLaurin.

Esempio 7.1
Calcolare il polinomio di Taylor di exp di centro 0 e ordine 7.

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad n = 7$$

$$exp(x) = e^x$$

$$exp'(x) = exp$$

$$exp''(x) = exp' = exp$$

$$exp^{(j)} = exp \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$exp(0) = 1$$

Polinomio di Taylor:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{7} \frac{1}{j!} x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^7}{7!}$$

Teorema 6 *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile n volte, P il suo polinomio di Taylor di centro x_0 ed ordine n. Allora:*

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0$$

7.3 Polinomi notevoli

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
- $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
- $$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
- $$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1})$$

Esercizio 7.1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^n-1-\frac{1}{2n}\right)n^2$$

Chiamo a_n l'espressione da calcolare:

$$a_n=\left(\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^n-1-\frac{1}{2n}\right)n^2$$

$$=n^2\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=n^2\left(exp\left(n\log\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

Per la regola dell'o piccolo $\log(1+x)=x+o(x)$ *per* $x\to 0$*:*

$$=n^2\left(exp\left(n\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$=n^2\left(exp\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

Per la regola dell'o piccolo $exp(x)=1+x+o(x)$*:*

$$=n^2\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2n}}\right)$$

$$n^2\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=o(n)=n\cdot o(1)\quad pern\to+\infty$$

Questa è una forma indeterminata $\infty\cdot 0$.

$$a_n=n^2\left(exp\left(nlog\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)-1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

Applico $log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ *per* $x\to 0$, *con* $x=\frac{1}{2n}\to 0$ *per* $n\to+\infty$.

$$a_n=n^2\left(exp\left(n\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$=n^2\left(exp\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

Applico $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x)$ *con* $x=\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o(\frac{1}{n^3})\to 0$

$$a_n=n^2\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2-\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2n}}\right)$$

$$=n^2\left(-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)$$

$$=n^2\left(\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{8}+o(1)\quad per\ n\to+\infty$$

8 Integrali

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua (su un intervallo chiuso e limitato).

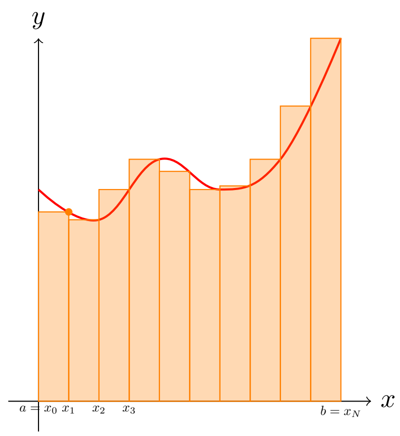


Figura 48: Somma di Riemann

Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Suddivido $[a, b]$ in N intervalli, delimitati da punti equidistanti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

(dove $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{N}(b - a)$ per ogni $j = 1, \ldots, N$).

Considero la **somma di Riemann** associata a tale suddivisione di $[a, b]$

$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, si dimostra che esiste ed è finito:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Tale limite si dice **integrale** (definito) di f.

8.1 Osservazioni

1. Si possono considerare varianti diverse, senza che il valore del limite cambi. Ad esempio:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{(Figura 49)}$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} (\max_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{(Figura 50)}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (\underset{[x_{j-1},x_j]}{min} f)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{(Figura 51)}$$

(purchè f sia continua).

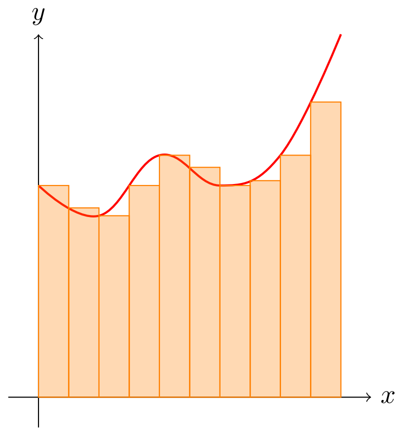


Figura 49: Variante 1

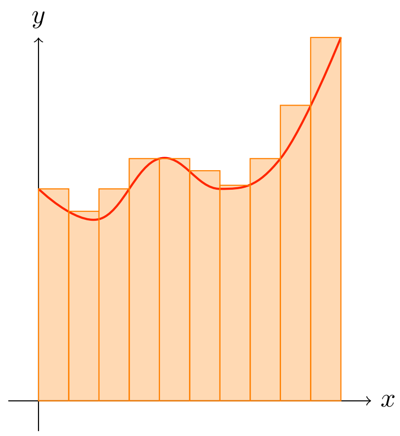


Figura 50: Variante 2

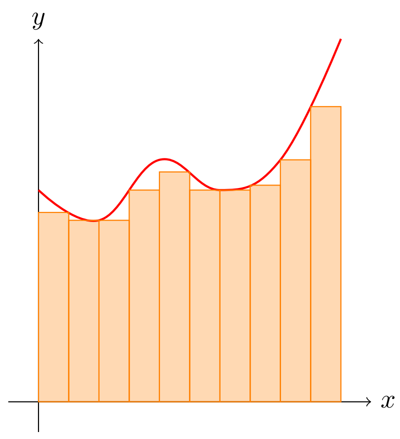


Figura 51: Variante 3

2. Se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)$ rappresenta l'area racchiusa tra il grafico di f e l'asse x.

3. In generale, $\int_a^b f(x)$ rappresenta l'area **con segno** racchiusa tra il grafico di f e l'asse x.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{ Area della regione gialla} - \text{area della regione azzurra}$$

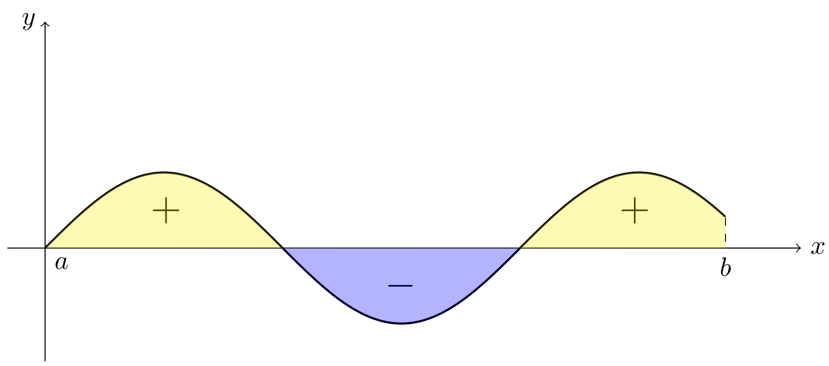


Figura 52: Confronto tra funzioni

8.2 Proprietà di base

Tutte queste proprietà si applicano a funzioni continue di segno qualsiasi.

- $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- Se k è costante
$$\int_a^b (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$
ma in generale **non vale**
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$
- Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora:
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$
- Se $a < b < c$, allora:
$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

8.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 7 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da:*
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in [a, b]$$
è differenziabile e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.
*Una funzione differenziabile P tale che $P' = f$ si chiama una **primitiva** di f.*
*L'insieme di tutte le primitive di f si chiama **integrale indefinito** di f e si denota con:*
$$\int f(x)\, dx$$

8.3.1 Dimostrazione

Prendiamo un qualsiasi $x_0 \in [a, b]$. Sia:
$$R.I.^2(x) := \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad per x \in [a, b]$$
Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} R.I.(x) = f(x_0)$, cioè che:
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; t.c. \; \forall x \in [a, b],$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \;\; x \neq x_0 \to f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$
Prendiamo $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Poichè f è continua, sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e dunque esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$,
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta. \;\; x \neq 0 \to \underbrace{f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon}_{\circ}$$

[2] **R.I.**: Rapporto Incrementale

Prendiamo ora $x \in [a, b]$ tale che $x_0 < x \le x_0 + \delta$

$$R.I.(x) = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right) =$$
$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

Grazie a $\circ$:

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon)\ dt \le R.I.(x) \le \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon)\ dt$$

Se c è costante:

$$\int_{x_0}^x c\ dt = c(x - x_0) \quad \text{(area di un rettangolo)}$$

e quindi:

$$f(x_0) - \varepsilon \le R.I.(x) \le f(x_0) + \varepsilon$$

Stesso ragionamento se $x_0 - \delta \le x < x_0$. $\square$

8.3.2 Corollario

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $P' = f$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\ dx = P(b) - P(a)$$

8.3.3 Dimostrazione del corollario

Come prima, sia $F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$ per $x \in [a, b]$. Allora:

$$(F - P)' = F' - P' = f - f = 0$$

Quindi $F - P = C$, con $C \in \mathbb{R}$ costante. Inoltre,

$$C = F(a) - P(a) = \int_a^a f(t)\ dt - P(a) = 0 - P(a) = -P(a)$$

Quindi:

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) = F(b) - P(b) + P(b)$$
$$= C + P(b) = -P(a) + P(b)$$

8.4 Esempi

Esempio 8.1

$$\int 0\ dx = C \quad \textit{dove } C \in \mathbb{R} \textit{ è una generica costante}$$

Esempio 8.2

$$\int 1 \, dx = x + C$$

Esempio 8.3

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

8.5 Alcune primitive elementari

1. $$\int e^x \, dx = e^x + C$$

2. $$\int sin(x) \, dx = -cos(x) + C$$

3. $$\int cos(x) \, dx = sin(x) + C$$

4. $$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante e } \alpha \neq -1$$

5. $$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$$

6. $$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

8.6 Osservazioni

Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si definisce:

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0$$

$$\int_b^a f(x) \, dx := -\int_a^b f(x) \, dx$$

Questa notazione è utile soprattutto quando si integra per sostituzione.

8.6.1 Esempi

Esempio 8.4

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3)\ dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int (x^6 - 3x^2 + 3)\ dx = \int x^6\ dx - 3\int x^2\ dx + \int 3\ dx =$$

$$= \frac{x^7}{7} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + 3x + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3)\ dx = \left[\frac{x^7}{7} - x^3 + 3x\right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{7} - 1 + 3}_{P(1)} - \underbrace{(0 - 0 + 0)}_{P(0)} = \frac{15}{7}$$

Esempio 8.5

$$\int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{x^2+1} + 5x\right)\ dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int \left(x^5 - \frac{3}{x^2+1} + 5x\right)\ dx = \int x^5\ dx - 3\int \frac{1}{x^2+1}\ dx + 5\int x\ dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - 3\arctan(x) + \frac{5x^2}{2} + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{x^2+1} + 5x\right)\ dx = \left[\frac{x^6}{6} - 3\arctan(x) + \frac{5x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{6} - 3\arctan(1) + \frac{5}{2} - (0 - 0 + 0) = \frac{1}{6} - 3\arctan(1) + \frac{5}{2}$$

Esempio 8.6

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx = \int x^{-3}\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{16}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24}$$

Esempio 8.7

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx$$

Integrazione per sostituzione:

$$y = 5x + 7$$

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}(5x+7) \cdot dx = 5\, dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{5}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{5}\, dy = \frac{1}{5}\int y^{-\frac{1}{2}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{y} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x+7} + C$$

Esempio 8.8

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$$

Sostituiamo $\left[y = x^2\right]$ *quindi* $dy = 2x \cdot dx$ *(anche gli estremi di integrazione)*

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(y)\, dy = \frac{1}{2}\left[-\cos(y)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{1}{2}(+1+1) = 1$$

Esempio 8.9

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})\ dx$$

Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$ *quindi* $dy = -\frac{1}{x^2}\ dx$

$$= -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\ dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(y)\ dy = [\sin(y)]_{y=\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 - 1 = -1$$

8.7 Integrazione delle funzioni razionali

Esiste, di fatto, un algoritmo che permette di calcolare gli integrali delle funzioni razionali (quozienti di polinomi). Lo schema generale è:

1. ricondursi al caso in cui il grado del **denominatore** sia maggiore del grado del **numeratore**;
2. scomporre il denominatore;
3. scrivere l'integranda come somma di funzioni più semplici;
4. integrare ogni frazione singolarmente.

Si ricorda che un polinomio di grado due $P(x) = ax^2 + bx + c$, si scompone come:

$$P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$$

dove:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sono gli zeri di P. (Purchè $b^2 - 4ac \geq 0$)

8.7.1 Esempi

Esempio 8.10

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Ho $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. *Cerco di scrivere:*

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Con A, B *costanti da determinare*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{X^2 - 3x + 2}$$

Per far si che questa sia uguale a $\frac{1}{x^2-3x+2}$ *devo imporre delle condizioni su* A *e* B

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{x-2}\, dx = -\log|x-1| + \log|x-2| + C$$

Esempio 8.11

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\,dx$$

Verifico che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore:

$$\frac{x^2-2}{x^2-3x+2} = \frac{x^2 \overbrace{-3x+2+3x-2}^{\textit{sommo e sottraggo}} -2}{x^2-3x+2} =$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+2} + \frac{3x-4}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$$

Scompongo il denominatore: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ *e voglio trovare* A *e* B *costanti tali che:*

$$\frac{3x-4}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2}$$

Devo imporre:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-B=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3-A=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)\,dx =$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = x - \log|x-1| + 2\log|x-2| + C$$

Esempio 8.12

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$$

x^2+4x+5 *non ha radici reali! Uso:*

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan(y) + C$$

Devo ricondurmi a scrivere x^2+4x+5 *come* ***somma di quadrati:***

$$x^2+4x+5 = x^2+4x+4-4+5 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

Sostituisco $y = x+2$ *quindi* $dy = dx$ *e:*

$$= \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan(y) + C = \arctan(x+2) + C$$