Parziale 1/12/23 Turno 2 Gruppo C

Esercizio 2 (punti: ....../4)

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 9t + 50\sin t \\ y(0) = \frac{2}{3} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$s^2 - 6s + 9 = 0$

$s_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$z = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

$y_{p_1} = At^2 + Bt + C \rightarrow \begin{cases} y'_{p_1} = At + B \\ y''_{p_1} = A \end{cases}$

$y_{p_2} = \alpha \sin t + \beta \cos t \rightarrow \begin{cases} y'_{p_2} = \alpha \cos t - \beta \sin t \\ y''_{p_2} = -\alpha \sin t - \beta \cos t \end{cases}$

y_{p_1}: $A - 6At - 6B + 9At^2 + 9Bt + 9C = 9t$

$+9At^2 + t(-6A + 9B) + A - 6B + 9C = 9t$

$\begin{cases} 9A = 0 \\ -6A + 9B = 9 \\ A - 6B + 9C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$

$y_{p_1} = t + \frac{2}{3}$

y_{p_2}: $-\alpha \sin t - \beta \cos t - 6\alpha \cos t + 6\beta \sin t + 9\alpha \sin t + 9\beta \cos t = 50 \sin t$

$\sin t(-\alpha + 6\beta + 9\alpha) + \cos t(-\beta - 6\alpha + 9\beta) = 50 \sin t$

$\begin{cases} +6\beta + 8\alpha = 50 \\ -6\alpha + 8\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} +6\beta + 8\alpha = 50 \\ \beta = \frac{6}{8}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{25}{2}\alpha = 50 \\ \beta = \frac{6}{8}\alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \cdot \frac{2}{1} \\ \beta = \frac{6}{8}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

$$y_{P_2} = 4\sin t + 3\cos t$$

$$y(t) = z + y_{P_1} + y_{P_2} = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + t + \frac{2}{3} + 4\sin t + 3\cos t$$

$$y'(t) = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + 3C_2 t e^{3t} + 1 + 4\cos t - 3\sin t$$

$$\begin{cases} y(0) = \frac{2}{3} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = -3 \\ 3C_1 + C_2 + 1 + 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

$$y(t) = -3e^{3t} + 4te^{3t} + t + \frac{2}{3} + 4\sin t + 3\cos t$$

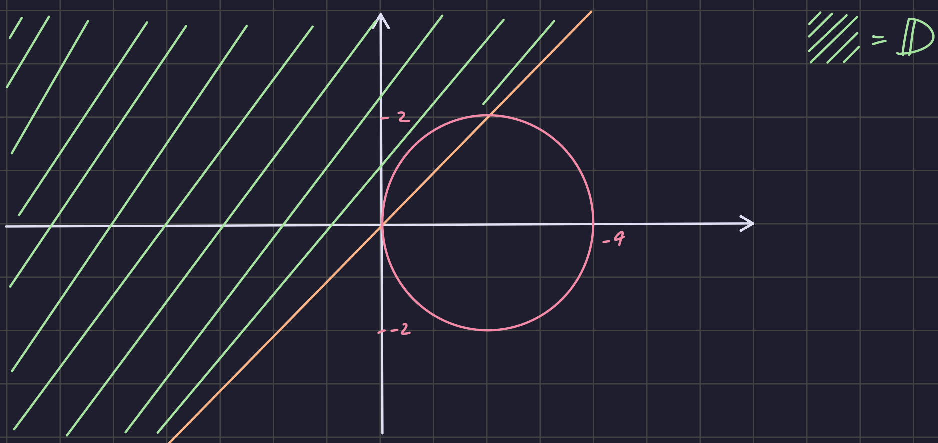
Esercizio 3 (punti: . . . . . . /4)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = e^{-1+\sqrt{x^2+y^2-4x}} - \sqrt{y-x}$$

(1) (2 punti) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Dire, motivando la risposta, se tale insieme è o non è aperto, chiuso, limitato, connesso.

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-4x \geq 0 \wedge y - x \geq 0 \}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x \geq 0 \\ y - x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-4x \geq 0 \\ y \geq x \end{cases}$$




```
L'insieme è chiuso perchè i punti delle due funzioni che delimitano l'insieme sono compresi, mentre è illimitato
perchè l'insieme va all'infinito
```

(2) (2 punti) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P(0,1,f(0,1))$

$$F(x,y) = e^{-1+\sqrt{x^2+y^2-4x}} - \sqrt{y-x}$$

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,y), \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4x}} e^{-1+\sqrt{x^2+y^2-4x}} + \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4x}} e^{-1+\sqrt{x^2+y^2-4x}} - \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$$

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4x}} e^{-1+\sqrt{x^2+y^2-4x}} + \frac{1}{2\sqrt{y-x}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4x}} e^{-1+\sqrt{x^2+y^2-4x}} - \frac{1}{2\sqrt{y-x}} \end{pmatrix}$$

$$F(0,1) = 0$$

$$\nabla F(0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = F(P) + \nabla F(P)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(y-1)$$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

(1) (2 punti) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + \dfrac{y(x^2-9y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$. È differenziabile in $(0,0)$?

$$2 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - 9y^2}{x^2+y^2}$$

Bisogna trovare due percorsi lungo i quali il limite sia diverso

lungo $y=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0 - 0}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

lungo $x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0 - 9y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-9\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = \lim_{y\to 0} -9 = -9$$

$$0 \neq -9$$

Il limite non esiste e la funzione non è continua in (0,0). Non è differenziabile in (0,0) perchè la funzione non è continua.

(2) (2 punti) Data la curva $\phi(t) = (t^2-1, t^3, t^2+1)$ con $t \in [0, 1]$
- determinare le equazioni parametriche della retta tangente in $P(-\frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{10}{9})$ alla curva;

$$\phi(t) = (t^2-1,\ t^3,\ t^2+1) \quad t \in [0,1]$$

$$\phi'(t) = (2t,\ 3t^2,\ 2t)$$

$$P = \phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ \frac{1}{27} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} \to \begin{cases} t^2 - 1 = -\frac{8}{9} \\ t^3 = \frac{1}{27} \\ t^2+1 = \frac{10}{9} \end{cases} \to t = \frac{1}{3}$$

$$\phi'\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$\phi\left(\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{8}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{10}{9}\right)$$

$$r_T = \phi\left(\frac{1}{3}\right) + t\,\phi'\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ \frac{1}{27} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(-\frac{8}{9} + \frac{2}{3}t,\ \frac{1}{27} + \frac{1}{3}t,\ \frac{10}{9} + \frac{2}{3}t\right)$$

- calcolare la lunghezza di ϕ (suggerimento: ci si riconduce a un integrale immediato nella forma $\int_a^b g'(t)[g(t)]^n\,dt$)

$$L(\phi(t)) = \int_0^1 \|\phi'(t)\|\,dt$$

$$\|\phi'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{8t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(8+9t^2)} = t\sqrt{8+9t^2}$$

$$L(\phi(t)) = \int_0^1 \|\phi'(t)\| \, dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{8+9t^2} \, dt$$

$$= \frac{1}{18}\int (u)^{\frac{1}{2}} \, du \qquad 8+9t^2 = u$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right] \qquad du = 18t\,dt$$

$$= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{(8+9t^2)^3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{17^3} - \sqrt{8^3}\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(17\sqrt{17} - 8\sqrt{8}\right)$$