

# Tutoraggio

## Linguaggi regolari

$L \in \text{Regolari} \iff \text{DFA}$

1.

$$\Sigma = \{0, 1\} \quad L = \left\{ \sigma \in \Sigma^* \mid \text{val}(\sigma) \equiv 0 \pmod{3} \right\}$$

(numeri divisibili per 3)

$\hookrightarrow$  classi di equivalenza

Esempi:  $11 = 3 \in L$

Aggiungere 0  $\rightarrow \underbrace{01010}_{\begin{matrix} 5 \\ \hline 10 \end{matrix}} \rightarrow 02$

Aggiungere 1  $\rightarrow \underbrace{01011}_{\begin{matrix} 5 \\ \hline 11 \end{matrix}} \rightarrow 02 + 1$

Classi di equivalenza

$$n = 3k + 0 \quad \text{Resto } 0$$

$$n = 3k + 1 \quad \text{Resto } 1$$

$$n = 3k + 2 \quad \text{Resto } 2$$

$$n = 3k + 0$$

Aggiungere 0

$$n = 3k \rightarrow 2n = 3k$$

$$n = 3 \frac{k}{2} + 0$$

Aggiungere 1

$$n = 3k \rightarrow 2n + 1 = 3k$$

$$2n = 3k - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 0 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$2n = 3 \frac{k}{2} + 1$$

$$n = 3k + 1$$

Aggiungere 0

$$2n = 3k + 1$$

Aggiungere 1

$$2n + 1 = 3k + 1$$

$$2n = 3k - 2$$

$$n = 3 \frac{k}{2} + 0$$

$$n = 3k + 2$$

Aggiungere 0

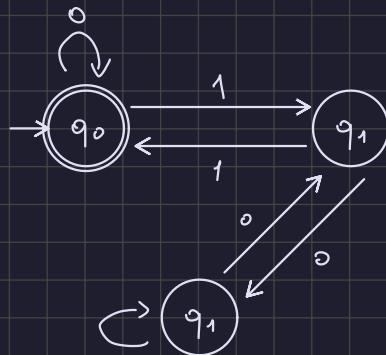
$$2n = 3k + 2$$

Aggiungere 1

$$2n + 1 = 3k + 2$$

$$n = 3 \frac{k}{2} + 1$$

$$n = 3 \frac{k}{2} + 1$$



## Dimostrazione

$$x \in L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \in F$$

Separando il se e solo se bisogna dimostrare le seguenti implicazioni:

$$1) x \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \in F$$

$$2) x \in L \Leftarrow \hat{\delta}(q_0, x) \in F \equiv x \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \notin F$$

Dimostro per induzione sulla lunghezza della stringa:  $| \sigma |$

## Caso base

È una stringa lunga il minimo possibile per mostrare sia che appartiene sia che non appartiene

$$|\sigma| = 1$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, 0) = q_0 \in F$$

Non bisogna necessariamente coprire tutti gli stati dell'automa nei casi base perché basta una stringa che finisce in uno stato finale e una che non finisce in uno stato finale

## Passo induttivo

Ipotesi induttiva

$$1) \forall \sigma. \exists n > 1. |\sigma| \leq n : \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_0\} \in F$$

$$2) \forall \sigma. \exists n > 1. |\sigma| \leq n : \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_1, q_2\} \notin F$$

Prendo una stringa di lunghezza  $n+1$ : Sigma è una stringa binaria multiplo di 3

$$\sigma = \sigma' \alpha . \quad |\sigma'| = n, \alpha \in \Sigma$$

$$-\sigma \in L, |\sigma| = n+1$$



## Pumping lemma linguaggi regolari

$L \in \text{Reg} \Rightarrow \text{Pumping lemma}$

↓

$z \in L, |z| \geq n, \exists z = uvw, |uv| \leq n, |v| > 0, \forall i \in \mathbb{N}. uv^i w \in L$

$\neg \text{Pumping lemma} \Rightarrow L \notin \text{Reg}$

↓

$z \notin L, |z| \geq n, \forall z = uvw, |uv| \leq n, |v| > 0, \exists i \in \mathbb{N}. uv^i w \notin L$

$$1. L = \{0^n 1^m \mid n \neq m\}$$

Condizioni di appartenenza

$$|0| \neq |1|$$

Consideriamo la stringa

$$z = 0^k 1^{k+1} \quad \begin{matrix} n=k \\ m=k+1 \end{matrix}$$

Pompiamo la stringa

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^{k+1}$$

$$- i=0$$

$$z_0 = 0^{k-|v|} 1^{k+1}$$

$$|0| \neq |1| \Rightarrow k - |v| \neq k + 1 \Rightarrow |v| \neq -1 \quad \checkmark$$

$$- i=1$$

$$z_1 = 0^{k+|v|} 1^{k+1}$$

$$|0| \neq |1| \Rightarrow k + |v| \neq k + 1 \Rightarrow |v| \neq 1 \quad \checkmark$$

Non si riesce a trovare un pompaggio che rompe le condizioni del pumping lemma utilizzando la stringa  $z$ . Bisogna quindi usare un altro approccio.

Per le proprietà di chiusura sappiamo che:  $L \in \text{Reg} \Leftrightarrow \overline{L} \in \text{Reg}$

Quindi se dimostriamo che complemento di  $L$  non è regolare con il pumping lemma negato, allora anche  $L$  originale non è regolare

$$\overline{L} = \{0^n 1^m \mid n=m\}$$

Scegliamo una stringa

$$z = 0^k 1^k \quad n=m=k$$

Pompiamo la stringa

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^k$$

$$- i=2$$

$$z_2 = 0^{k+|v|} 1^k$$

$$|o| = |1| \Rightarrow k + |v| = k \Rightarrow |v| = 0 \quad \text{Viola i vincoli del pumping lemma}$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $\bar{L}$  non è regolare e quindi non è regolare nemmeno  $L$

$$2. L_m = \left\{ x_2 y_2 x^R \mid y \in \{0\}^*, |y| \leq m, x = 1^n \right\} \quad m \in \mathbb{N}$$

Siccome  $x$  è formata solo da 1 il reverse di  $x$  non ha alcun effetto

$$\begin{aligned} \cdot L_0 &= \left\{ x_2 y_2 x^R \mid y \in \{0\}^*, |y| \leq 0, x = 1^n = 1 \right\} \\ &= \{1221\} \quad \text{Qualunque linguaggio FINITO è regolare} \Rightarrow L_0 \in \text{Reg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot L_1 &= \left\{ x_2 y_2 x^R \mid y \in \{0\}^*, |y| \leq 1, x = 1^n \right\} \\ &= \{1^n 2 \quad 2 1^n\} \cup \{1^n 2 0 2 1^n\} \end{aligned}$$

Sembra non sia regolare perchè ci sono due "gruppi" vincolati tra di loro ( $1^n$ ) cioè il numero di uni deve essere uguale sia a sinistra che a destra. Dimostriamo quindi che il linguaggio non è regolare:

Prendiamo una stringa  $z$

$$z = 1^k 2 2 1^k \in L \quad n=k$$

Pompiamo la stringa

$$z_i = 1^{k+(i-1)|v|} 2 2 1^k$$

$$- i=2 \quad z_2 = 1^{k+|v|} 2 2 1^k$$

$$|1|_{s_x} = |1|_{d_x} \Rightarrow k + |v| = k \Rightarrow |v| = 0 \quad \text{Viola i vincoli del pumping lemma}$$

Quindi il linguaggio  $L_1$  non è regolare

$$\cdot L_2 = \left\{ x_2 y_2 x^R \mid y \in \{0\}^*, |y| \leq 2, x = 1^n \right\}$$

Questo linguaggio non è né regolare e né CF, quindi da  $m \geq 2$  si ottengono soltanto linguaggi non CF (da dimostrare con il pumping lemma dei CF)

## 2.1 L'unione è regolare?

Verifichiamo l'unione di tutti i linguaggi è regolare

$$\begin{aligned} \bigcup_m L_m &= L' \\ &= \left\{ x \in \{0, 1\}^* \mid x = 1^n \right\} \quad (\text{In un'unione è come se la variabile "sparisse"}) \\ &= \left\{ 1^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Questo linguaggio non è CF (da dimostrare con il pumping lemma dei CF)

## L'intersezione è regolare?

Verifichiamo se l'intersezione di tutti i linguaggi è regolare

$$\begin{aligned} \bigcap_m L_m &= L' \\ &= L_0 \cap L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_m \\ &= \{1221\} \cap \{1221, \dots\} \cap \dots \cap L_m \\ &= \{1221\} \end{aligned}$$

Siccome il linguaggio è finito, allora è regolare

$$\begin{aligned} 3. \quad L &= \left\{ 0^m 0^{2n} 0^{k+m} \mid m, n, k > 0 \right\} \\ &= \left\{ 0^{m+2n+k} \mid m, n, k > 0 \right\} \end{aligned}$$

Siccome le variabili sono su un solo simbolo, e quindi non ci sono dipendenze tra simboli diversi, si può dire che il linguaggio è regolare.

$$4. \quad L_p = \left\{ a^{p \cdot m} b^m a^{p \cdot n} \mid m, n \geq 1 \right\} \quad p > 0$$

$$\bullet \quad L_1 = \left\{ a^m b^m a^n \mid m, n \geq 1 \right\} \quad \text{Sembra CF perché a e b dipendono entrambi dalla stessa variabile } m$$

Dimostriamo che non è regolare con il pumping lemma

Prendiamo una stringa nel linguaggio

$$z = a^k b^k a \in L$$

Pompiamo la stringa

$$z_i = a^{k+(i-1)|v|} b^k a$$

$$\cdot \quad i = 0$$

$$z_0 = a^{k-|v|} b^k a$$

$$|a| = |b| \Rightarrow k - |v| = k \Rightarrow |v| = 0 \quad \text{Viola i vincoli del pumping lemma} \quad z_i \notin L_1$$

$$\bullet \quad L_2 = \left\{ a^{2m} b^m a^{2n} \mid m, n \geq 2 \right\} \quad \text{CF}$$

$$z_i = a^{2k} b^k a^2 \in L$$

$$z_i = a^{2k + (i-1)|v|} b^k a^i$$

$\cdot i=0$

$$z_0 = a^{2k - |v|} b^k a^i$$

$|a|=2|b| \Rightarrow 2k - |v| = 2k \Rightarrow |v|=0$  Viola i vincoli del pumping lemma  $z_i \notin L$

Osserviamo che con  $p \geq 1$  i linguaggi sono tutti CF

## 4.1 L'unione è regolare?

Verifichiamo l'unione di tutti i linguaggi è regolare

$$\bigcup_p L_p = L' \\ = \{ a^{pm} b^m c^{pn} \mid m, n, p \geq 1 \}$$

Sicuramente non è regolare. Possiamo vedere che non è CF perché a è legato a b per la variabile m, e la a a sinistra è legata a quella a destra per la variabile p.

$$= \{ a^{pm} b^m c^{pn} \mid m, n, p \geq 1, c = a \}$$

Le condizioni di appartenenza sono:

$$\begin{cases} 1) |a| = p|b| \\ 2) |a|m = |c|m \end{cases}$$

Pumping lemma:

Prendiamo una stringa nel linguaggio

$$z = a^{k^2} b^k c^{k^2} \in L \quad m=n=p=k$$

Pompiamo la stringa

$$z_i = a^{k^2 + (i-1)|v|} b^k c^{k^2}$$

$\cdot i=2$

$$z_2 = a^{k^2 + |v|} b^k c^{k^2}$$

1)  $|a|=p|b| \Rightarrow k^2 + |v| = k \cdot k \Rightarrow |v|=0$  Viola i vincoli del pumping lemma

2)  $|a|m = |c|m \Rightarrow (k^2 + |v|)k = k^2 \cdot k \Rightarrow |v|=0$  Viola i vincoli del pumping lemma

$\Downarrow$   
 $z \notin L$

L'unione dei linguaggi non è regolare

L'intersezione è regolare?

Verifichiamo l'intersezione di tutti i linguaggi è regolare

$$\begin{aligned}\bigcap_p L_p &= L' \\&= L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_p \\&= \{a^m b^m a^n, m, n \geq 1\} \cap \{a^{2m} b^m a^{2n}, m, n \geq 1\} \cap \dots \cap L_p \\&= \emptyset \in \text{Reg}\end{aligned}$$