Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

2° Semestre 2023/2024

Indice

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come

$$\mathbb{C} = \left\{z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, ma ha soluzioni in $\mathbb{C}$.

Teorema 1 ***(Teorema fondamentale dell'algebra)***
Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, \;\; a_n \neq 0$$

ed x è un incognita, ammette n soluzioni

Definizioni utili 1.1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \;\; \textit{con} \;\; a_n \neq 0$$

è detto ***polinomio di grado*** *n con* ***coefficienti*** $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero i che è definito come $i^2 = -1$. Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$ è detta **forma algebrica** di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$.

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

Definizioni utili 1.2
Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

1.2.1 Esempi

Esempio 1.1

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \quad \in \mathbb{R}$

1.3 Operazioni tra i numeri complessi

1.3.1 Somma

Definizione 1.1
L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Esempio 1.2

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$

1.3.2 Prodotto

Definizione 1.2
Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che $i^2 = -1$ *si ha che* $bdi^2 = -bd$ *quindi*

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Esempio 1.3

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso $z = a + bi \ \in \mathbb{C}$, il numero complesso $-a - bi$ è l'unico numero complesso tale che $z + (-z) = 0$. Questo numero complesso è detto **opposto** di z e si indica con $-z$.

Definizione 1.3
La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Esempio 1.4

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

1.3.4 Divisione

Definizione 1.4
La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo $\frac{1}{z_2}$ *come l'unico numero complesso tale che:*

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia $z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$ *e* $z \neq 0$. *Supponiamo che* $z' = c + di$ *sia un numero complesso tale che* $z \cdot z' = 1$, *cioè:*

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo $ac - bd = 1$ *e* $ad + bc = 0$.
Possiamo trovare c sostituendo $d = \frac{-1-ac}{b}$ *nella prima equazione:*

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1 - ac)}{b} = \frac{1 - ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{-1+ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{-1+ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1 + ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare d sostituendo $c = \frac{-ad}{b}$ *nella seconda equazione:*

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1 - bd)}{a} = \frac{1 - bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1 - bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$. *Definiamo:*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Esempio 1.5

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 \cancel{+abi} \cancel{-abi} + b^2 = a^2+b^2 \quad \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

Esempio 1.6

$$\frac{1+2i}{2-i}$$

$$\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)\left(\frac{2+i}{2+i}\right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2+(-1)^2} =$$

$$= \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

1.4 Coniugato e modulo

1.4.1 Coniugato

Sia $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Il numero complesso $\overline{z} = a-bi$ è detto **coniugato** di z.

1.4.2 Modulo

Il **modulo** di z è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Proprietà

Siano $z_1 = a+bi, z_2 = c+di \quad \in \mathbb{C}$

1. $z_1\overline{z_1} = a^2+b^2 = |z_1|^2$
2. $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
4. Se
$$z_1 \neq 0,\ \overline{\frac{1}{z_1}} = \frac{1}{\overline{z_1}}$$
Infatti:
$$\overline{z_1}\cdot\left(\overline{\frac{1}{z_1}}\right) = \left(\overline{z_1\cdot\frac{1}{z_1}}\right) = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$

5. Se $z_2 \neq 0$ allora:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se $z_1 \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z_1} \overset{def}{=} \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

Esempio 1.7

$$z = \frac{1+i}{2-i} = (1+i)\left(\frac{1}{2-i}\right)$$

$$\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$z = (1+i)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\overline{z} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

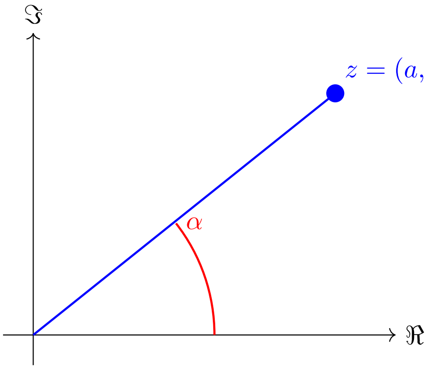


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ, detto **raggio polare**, ed α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ in senso antiorario. α viene misurato in radianti

Esempio 1.8

$$z_1 = (1, 0) \rightarrow 1$$

$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow i$$

$$z_3 = (1, \pi) \rightarrow -1$$

$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow -i$$

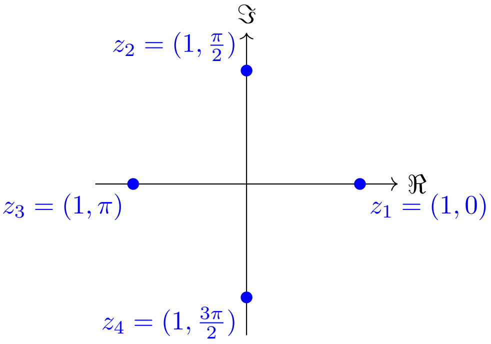


Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

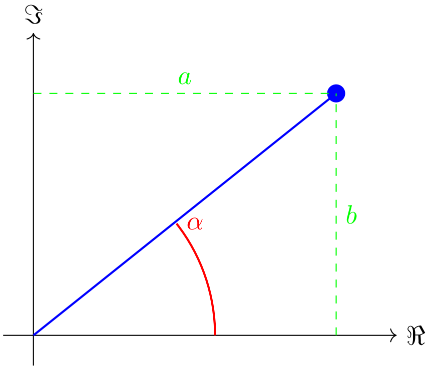


Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

Definizione 1.5
La ***forma trigonometrica*** *di un numero complesso è definita come:*

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha) i) = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \textit{se } a = 0,\ b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \textit{se } a = 0,\ b < 0 \\ \textit{non definito} & \textit{se } a = 0,\ b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \textit{se } a > 0,\ b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \textit{se } a > 0,\ b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \textit{se } a < 0,\ b \textit{ qualsiasi} \end{cases}$$

Esempio 1.9

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$
$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$$
$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$
$$-i = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})$$

1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica

Definizione 1.6

$$z_1 = r\left(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right), \quad z_2 = s\left(\cos(\beta) + i \sin(\beta)\right) \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 z_2 = rs(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) =$$
$$= rs\left((\cos\alpha \cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))i\right) =$$
$$= rs\left(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\right)$$

1.8 Formula di de Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}, \quad z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Esempio 1.10

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}) \right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6} \cdot 6) + i \sin(\frac{\pi}{6} \cdot 6) \right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -64$$

1.9 Definizione di radice n-esima

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.10 Teorema delle radici n-esime

Teorema 2 *Siano* $y \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Esistono precisamente* n *radici n-esime complesse distinte* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ *di* y. *Se* $y = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, *allora per* $k = 0, \ldots, n-1$ *:*

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Si somma $2k\pi$ *per ottenere tutte le radici n-esime, siccome* sin *e* cos *sono periodiche.*

1.10.1 Dimostrazione

Per la formula di de Moivre sappiamo che:

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n (\cos\alpha + (2\pi)k + i \sin\alpha + (2\pi)k) =$$

$$= r\,(\cos\alpha + i \sin\alpha) = y$$

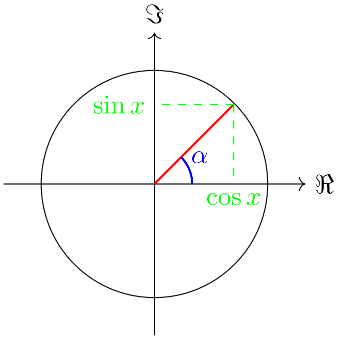


Figura 4: Circonferenza goinometrica

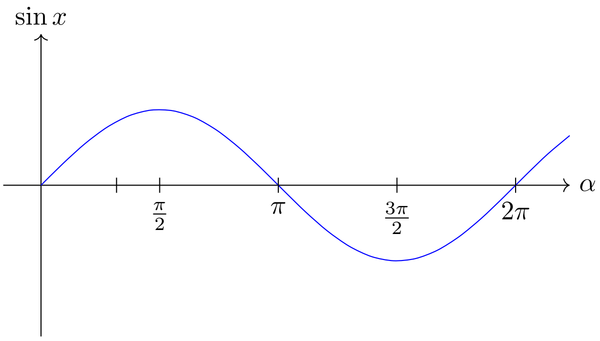


Figura 5: Funzione seno

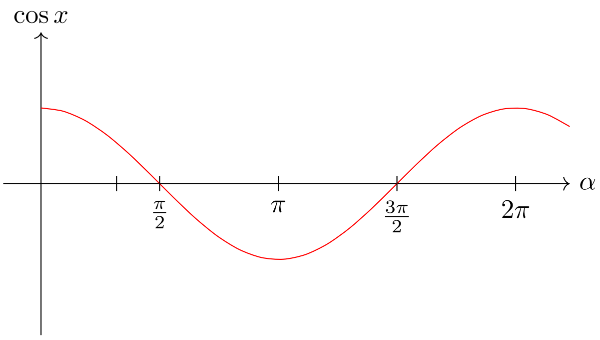


Figura 6: Funzione coseno

Quindi $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sono soluzioni di $y = x^n$, cioè sono radici n-esime di y. Siccome il periodo di $\sin$ e $\cos$ è 2π, le radici n-esime sono tutte distinte.

1.11 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ tale che $a < 0$. Esistono precisamente due radici quadrate di a in $\mathbb{C}$. Infatti, abbiamo:

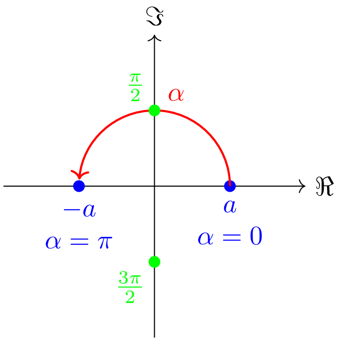


Figura 7: Radici quadrate di numeri reali negativi

$$a = (-a)(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Per il teorema 2:

$$z_0 = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{-a}$$

Definizioni utili 1.3
Se abbiamo un polinomio della forma:

$$ax^2 + bx + c, \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In $\mathbb{C}$ *esistono 2 soluzioni anche se* $\Delta < 0$.

2 Sistemi lineari e matrici

2.1 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni in n incognite che può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $b_k,\ a_{ij} \in \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{R}$ per $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m$. Se i **termini noti** sono tutti nulli il sistema è detto **omogeneo**. Una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di numeri complessi (o reali) è una soluzione se soddisfa tutte le m equazioni.

Esempio 2.1
Presa in considerazione la seguente tabella nutrizionale di cereali (per porzione):

	Cheerios	*Quakers*
Proteine (g)	*4*	*3*
Carboidrati (g)	*20*	*18*
Grassi (g)	*2*	*5*

Quante porzioni di Cheerios e Quakers dobbiamo mangiare per ottenere $9g$

di proteine, 48g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4C + 3Q = 9 \quad \textit{(P)} \\ 20C + 18Q = 48 \quad \textit{(C)} \\ 2C + 5Q = 8 \quad \textit{(G)} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema lineare:

- *Moltiplichiamo le per* $\frac{1}{4}$ *e otteniamo un sistema lineare* ***equivalente*** *(cioè con* ***esattamente*** *le stesse soluzioni):*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C) \quad 20C + 18Q = 48$$

$$(G) \quad 2C + 5Q = 8$$

- *Calcoliamo* $(C) - 20(P')$ *e* $(G) - 2(P')$ *e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + 15Q = 18$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- *Moltiplichiamo* (C') *per* $\frac{1}{3}$ *e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- *Calcoliamo* $(G') - \frac{7}{2}(C")$ *e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + 0Q = 0$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ *e* $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Per agevolare la risoluzione del sistema lineare si può utilizzare una matrice:

- ***R1*** *= Riga 1*
- ***R2*** *= Riga 2*

- ***R3*** = *Riga 3*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \frac{1}{4} \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\downarrow R2 - 20 \cdot R1$$

$$\downarrow R3 - 2 \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow \frac{1}{3} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow R3 - \frac{7}{2} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ *e* $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

2.2 Definizione

Definizione 2.1
Siano $m\ ,n,;\ < 1$. *Una tabella* A *tale che:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

di $m \times n$ *elementi di* $\mathbb{C}$ *disposti in* m *righe e* n *colonne si chiama una* ***matrice*** *di* ***dimensione*** $m \times n$. *Gli elementi si chiamano* ***coefficienti*** *(o entrate) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice* ij *dove* i *indica la riga e* j *la colonna di appartenenza.*

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ *con entrate in* $\mathbb{C}$ *si indica con* $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ *con entrate in* $\mathbb{R}$ *si indica con* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

2.3 Definizione

Un sistema lineare di n incognite e m equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

può essere rappresentato nella forma **matriciale**:

$$Ax = b$$

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice dei coefficienti}} \quad \underbrace{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore delle incognite}} \quad \underbrace{b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei termini noti}}$$

La matrice

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

è detta **matrice aumentata**.

Esempio 2.3

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$R2 - R1 \quad R3 + R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\frac{-1}{5}R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$R3 - 4R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$5R3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

Si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegiamo un parametro alla **variabile libera** x_4 :

$$t = x_4 \quad x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8-5t) + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + t + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3(\frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t)\frac{-3}{2}(8-5t) - t = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t - \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10+21-60}{5} + \frac{15+30}{4}t - t = \frac{-29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = \frac{-29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni $t \in \mathbb{C}$.

2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumenta $(A|b)$, si ottiene un sistema equivalente di forma più semplice:

- Moltiplicare una riga (R_i) per uno scalare $\alpha \in \mathbb{C}$ **non nullo**:

$$\alpha R_i$$

- Sommare una riga (R_i) con un multiplo di un'altra riga (R_j):

$$R_i + \alpha R_j$$

- Scambiare riga R_i con riga R_j:

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

Esempio 2.4
Prendiamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{R2-R1}{\underset{R3+R1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right) \overset{\frac{-1}{5}R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{R3-4R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{array}\right) \overset{\frac{5}{8}R3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \\ \qquad\qquad 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, non ha soluzioni.

2.5 Linee in $\mathbb{R}^2$

2 equazioni a 2 incognite con coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (I) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$$

Questo sistema lineare può essere rappresentato come:

$$y = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}} \quad (I)$$

$$y = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} \quad (II)$$

Il sistema può essere rappresentato come un sistema di rette nel piano cartesiano in cui la soluzione è l'intersezione delle rette.

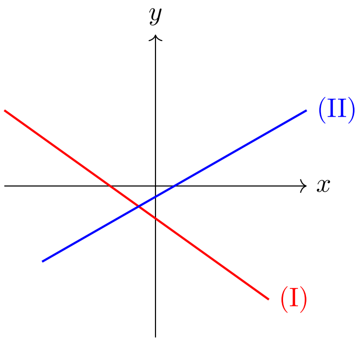


Figura 8: Intersezione di due rette

Può anche succedere che le rette siano parallele, in questo caso il sistema è impossibile:

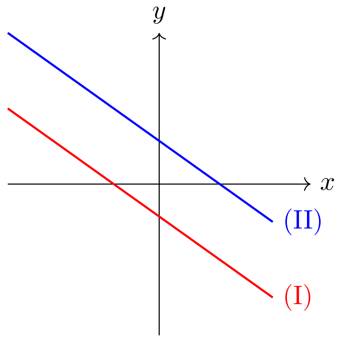


Figura 9: Retta parallela

Oppure che le rette siano coincidenti, in questo caso il sistema è indeterminato, cioè con infinite soluzioni:

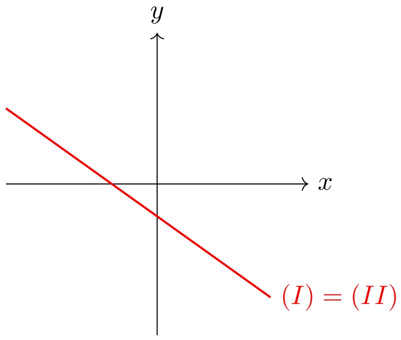


Figura 10: Retta coincidente

2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice $M = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m \;\; 1 \leq j \leq n$ in $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ (oppure in $M_{m\times n}(\mathbb{R})$) con righe $R1, \ldots, Rn$, eseguiamo le seguenti opreazioni elementari:

1. Scegliamo la prima colonna non nulla j di M (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato 2 righe di M, otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{con } a_{ij} \neq 0$$

Moltiplicando $R1$ per $\frac{1}{a_{ij}}$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mj} & a_{mj+1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Adesso, per ogni $2 \leq i \leq m$, eseguiamo l'operazione elementare $Ri - a_{ij}R1$. Otteniamo una matrice della forma:

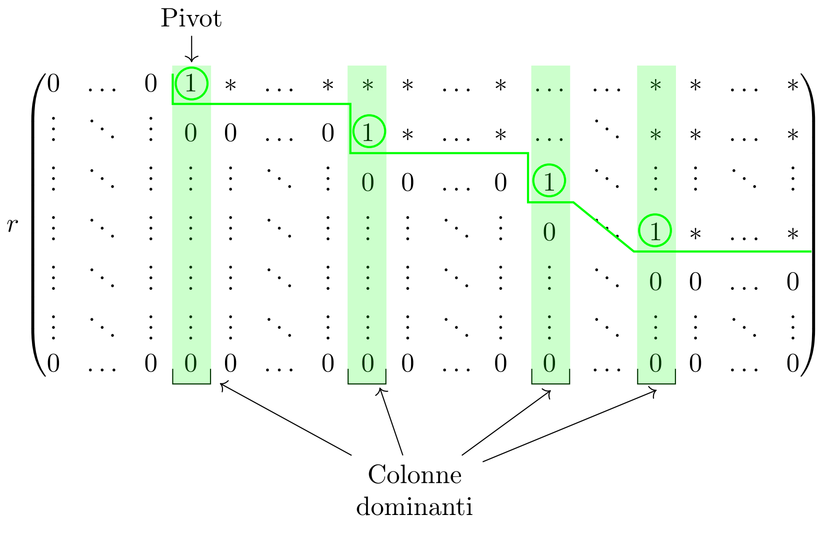
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & M' & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Colonna } j}}{0} & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

2. Ripetiamo il procedimento 1. su M' per ottenere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & M'' & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e così via...

3. Dopo un numero finito di passi, si ottiene una matrice che si chiama **matrice a scala**:



cioè esiste un numero $1 \leq r \leq m$ tale che:

(a) Le righe $1 \leq i \leq r$ non sono nulle.

(b) Ogni riga $2 \leq i \leq m$ ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente.

(c) le righe $r + 1 \leq i \leq m$ sono tutte nulle.

Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga i è uguale a 1 e si chiama **pivot**. La matrice è detta **forma ridotta** di M. Le colonne che contengono pivot sono dette **dominanti**.

Esempio 2.5
Prendiamo in considerazione la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{C})$$

$$\overset{R1 \leftrightarrow R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{10}R1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R3+iR1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix}$$

$$\overset{R3-(6+3i)R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{11}{5}-\frac{11}{5}i} \end{pmatrix} \overset{\frac{R3}{\frac{11}{5}-\frac{11}{5}i}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{3} & \textcircled{$\frac{1}{5}$} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Risoluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*) \quad Ax = b$$

con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ procediamo con il metodo di eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata $(A|b)$ fino ad ottenere la forma ridotta $(U|c)$ e un sistema lineare corrispondente

$$Ux = c$$

che è equivalente a $(*)$. Chiamiamo **variabili dominanti** le r variabili che corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti.

Esempio 2.6
Prendiamo in considerazione il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{array}\right) \overset{EG}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 \;\; x_2 \;\; x_3$$

x_1 e x_3 sono variabili dominanti e x_2 è variabile libera.

Si ha uno dei seguenti casi:

1) Tutte le colonne di $(U|c)$ tranne c sono dominanti. In questo caso il sistema ha una soluzione unica. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

∞) L'ultima colonna e almeno una colonna di U **non** sono dominanti. In tal caso il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono assegnando parametri alle $n - r$ variabili libere. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 5 & 8 \end{array}\right)$$

0) L'ultima colonna c è dominante. In questo tal caso il sistema non ammette soluzioni. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array}\right)$$

Attenzione: la forma ridotta di una matrice **non** è unicovamente determinata, ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

2.8 Definizione di rango di una matrice

Definizione 2.2
*Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ con forma ridotta U. Il numero r di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di U e si indica con $rk(U)$.*

Verrà dimostrato più avanti che ogni forma ridotta di A ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di A come $rk(A) = rk(U)$.
Si ha $rk(A) \leq min(m, n)$.

2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni [1], [∞], [0] usando il rango:

Teorema 3 (Teprema di Rouchè-Capelli) *Sia* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$*, sia* $b \in M_{m \times 1}((C))$*.*

$$[1] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) = n$$
$$"rk(U) = rk(U|c)"$$

$$[\infty] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) < n$$
$$"rk(U) = rk(U|c) < n"$$

$$[0] \Leftrightarrow rk(A) < rk(A|b)$$
$$"rk(U) < rk(U|c)"$$

3 Matrici e le loro operazioni

3.1 Definizione di somma

Definizione 3.1
Siano $A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$ *e* $B = (b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$ *due matrici in* $M_{m \times n}(\mathbb{C})$*. La* ***somma*** *di* A *e* B *è la matrice*

$$A + B(a_{ij} + b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

in $M_{m \times n}(\mathbb{C})$

Esempio 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ -1 & 1-i & 5+i \end{pmatrix}$$

3.1.1 Proprietà

L'addizione di matrici è:

- **Associativa**, cioè:
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- **Commutativa**, cioè:
$$A + B = B + A$$

3.2 Definizione di prodotto per uno scalare

Definizione 3.2
Data una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$*, il* ***prodotto*** *della matrice* A *per lo scalare* α *è la matrice:*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 3.2

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix}$$

3.2.1 Proprietà

Il prodotto di una matrice per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:

  $$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

  $$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

  per $A, b \in M_{m \times n}(\mathbb{C})\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

3.3 Definizione di matrice trasposta

Definizione 3.3
Accanto a una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$*, consideriamo la matrice* A^T *ottenuta da* A *scambiando le righe con le colonne, è detta* ***trasposta*** *di* A*.*

Esempio 3.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 7 \\ \pi & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ i & \frac{1}{12} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Definizione di prodotto di matrici

- Una matrice di dimensione $m \times 1$ è detta **vettore** (colonna) e si usa la notazione $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$.

Una matrice di dimensione $1 \times n$ è detta **vettore riga** e si usa la notazione $v^T = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$.

Sia $v^T = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ un vettore riga in $M_{1\times n}(\mathbb{C})$ e $u = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vettore colonna in $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Il **prodotto** di v^T per u è il numero complesso: $v^T u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \in \mathbb{C}$

Esempio 3.4

$$v^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v^T u = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 1 + 0 + 9 = 10$$

- Possiamo vedere una matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m\ ,\ 1\leq j\leq n}$ come m vettori riga $Ri = (a_{i1} \ldots a_{in})_{1\leq i\leq m}$ detti **righe di** A oppure n vettori colonna $Cj = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{1\leq j\leq n}$ detti **colonne di** A.

  Siano

  $$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m\ ,\ 1\leq j\leq n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$$

  $$B = (b_{ij})_{1\leq i\leq s\ ,\ 1\leq j\leq t} \in M_{n\times t}(\mathbb{C})$$

  Se $n = s$, allora possiamo formare il prodotto di A e B:

  $$AB = (c_{ij})_{1\leq i\leq m\ ,\ 1\leq j\leq t}$$

  dove

  $$c_{ij} = RiCj = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

  è il prodotto della riga i di A e la colonna j di B.

Esempio 3.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1C1 & R1C2 & R1C3 \\ R2C1 & R2C2 & R2C3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 12 & 22 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

3.4.1 Proprietà

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà:

- **Associativa**, cioè:
$$A(BC) = (AB)C$$
- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:
$$(A+B)C = AC + BC$$
Con $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{n\times t}(\mathbb{C})$
$$A(B+C) = AB + AC$$
In sostanza le matrici devono avere il numero di colonne uguale al numero di righe.
- Scriviamo $I_n \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ per la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
Questa matrice viene detta **matrice identità**.
Per ogni matrice $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, abbiamo che:
$$M \cdot I_m = I_m \cdot M = M$$

Esempio 3.6

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.7

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

- $(AB)^T = B^T A^T$ con
$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \quad B \in M_{n\times t}(\mathbb{C})$$
$$A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) \quad B^T \in M_{t\times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto di matrici **non** è commutativo:

$$AB \neq BA$$

Infatti:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Osservazione

Siano $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m \times i}(\mathbb{C})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Consideriamo $Ax = b$ in forma matriciale. Abbiamo

$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{C})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{n \times 1}(\mathbb{C})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{m \times 1}(\mathbb{C})}$$

che è uguale a $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esempio 3.9

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6 Definizione

Una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ di dimensione $n \times n$ si dice **matrice quadrata** di ordine n. Gli elementi di A: $a_{ii} \quad 1 \leq i \leq n$ formano la **diagonale** di A.

Esempio 3.10

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti gli elementi fuorri dalla diagonale sono nulli, la matrice è detta **matrice diagonale**.

Esempio 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sotto della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare superiore**.

Esempio 3.12

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sopra della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare inferiore**.

Esempio 3.13

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

3.7 Matrici elementari

Prendiamo la matrice identità:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le operazioni elementari alla matrice identità I_n per ottenere le matrici elementari che denotiamo come segue:

- E_{ij} la matrice ottenuta da I_n scambiando la riga i con la riga j

Esempio 3.14

$$n = 3 \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E_i(\alpha)$ ottenuta da I_n moltiplicando la riga i per lo scalare $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$

Esempio 3.15

$$n = 3 \quad \alpha = i + 5 \in \mathbb{C}$$

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

- $E_{ij}(\alpha)$ ottenuta da I_n sommando la riga i con la riga j moltiplicata per lo scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

Esempio 3.16

$$n = 3 \quad \alpha = \frac{-5}{6} \in \mathbb{C}$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Moltiplicazione con matrici elementari

Esempio 3.17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -i-5 & 5(i+5) \end{pmatrix}$$

$$E_{13}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-25}{6} \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che ogni operazione elementare su una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ corrisponde alla (pre)moltiplicazione di A con la matrice elementare ottenuta da I_m effettuando la medesima operazione elementare.

Definizioni utili 3.1

$$AE_1(-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \overset{EG}{\rightsquigarrow}$$

$$\underset{E_{21}(-3)}{\overset{R2-3R1}{\rightsquigarrow}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}}_{\equiv E_{21}A} \underset{E_2(\frac{1}{5})}{\overset{\frac{1}{5}R2}{\rightsquigarrow}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\equiv E_2(\frac{1}{5})(E_{21}(-3)A)} = U$$

*Otteniamo una matrice con 2 pivot e 2 colonne dominanti. Questa matrice viene chiamata **forma ridotta di** A . Quindi il calcolo può essere anche fatto in questo modo:*

$$U = E_2\left(\frac{1}{5}\right)(E_{21}(-3)A) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{E} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R2-3R1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{5}R2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice U e a destra la matrice E.

3.9 Definizione di matrice invertibile

Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ si dice **invertibile** se esiste $C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$CA = I_n \quad \text{e} \quad AC = I_n$$

In tal caso, C è detta **inversa** di A. L'inversa di A, quando esiste, è univocamente determinata e si denota con A^{-1}. Infatti, se C e C' sono due matrici inverse di A , allora:

$$C = I_nC = (C'A)C = C'(AC) = C'I_n = C'$$

Esempio 3.19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow C = A^{-1}$$

Se $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ sono invertibili, allora lo è anche il loro prodotto AB. Infatti l'inversa di AB è $B^{-1}A^{-1}$. Infatti:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

oppure

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.10 Inverse di matrici elementari

Le matrici elementari sono tutte invertibili con inverse:

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

Esempio 3.20

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\frac{1}{\alpha})$$

Esempio 3.21

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$E_3(\frac{1}{i+5})E_3(i+5) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

Esempio 3.22

$$E_{23}(-\frac{5}{6}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}(\frac{5}{6})E_{23}(-\frac{5}{6}) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.11 Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare in forma matriciale, cioè $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$. Se $(U|c)$ è una forma ridotta della matrice aumentata $(A|b)$, allora i sistemi lineari $Ax = b$ e $Ux = c$ hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti.

3.11.1 Dimostrazione

Siano $E_1, \dots, E_s$ le matrici elementari che trasformano $(A|b)$ nella forma ridotta $(U|c)$. Allora:

$$(A|b) \underset{E_1}{\sim} (A'|b') \underset{E_2}{\sim} \dots \underset{E_s}{\sim} (U|c)$$

Allora abbiamo:

$$(U|c) = E_s \dots \underbrace{E_1(A|b)}_{(A'|b')}$$

Per 3.10, le matrici elementari $E_1, \dots, E_s$ sono invertibili. Dunque anche il prodotto $E = E_s \dots E_1$ è invertibile con $E^{-1} = E_1^{-1} \dots E_s^{-1}$. Abbiamo che

$E(A|b) = (U|c)$, ovvero $EA = U$ e $Eb = c$. Pertanto, se $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ è una soluzione di $Ax = b$, cioè $Av = b$, allora:

$$Uv = (EA)v = E(Av) = Eb = c$$

Quindi v è soluzione di $Ux = c$.

Se $v \in M_{a\times 1})\mathbb{C}$ è soluzione di $Ux = c$, cioè $Uv = c$, allora:

$$Av = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m} Av = E^{-1}(EA)v = E^{-1}(Uv) = E^{-1}c =$$

$$= E^{-1}(Eb) = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m} b = b$$

Quindi v è soluzione di $Ax = b$ $\square$.

3.12 Proposizione

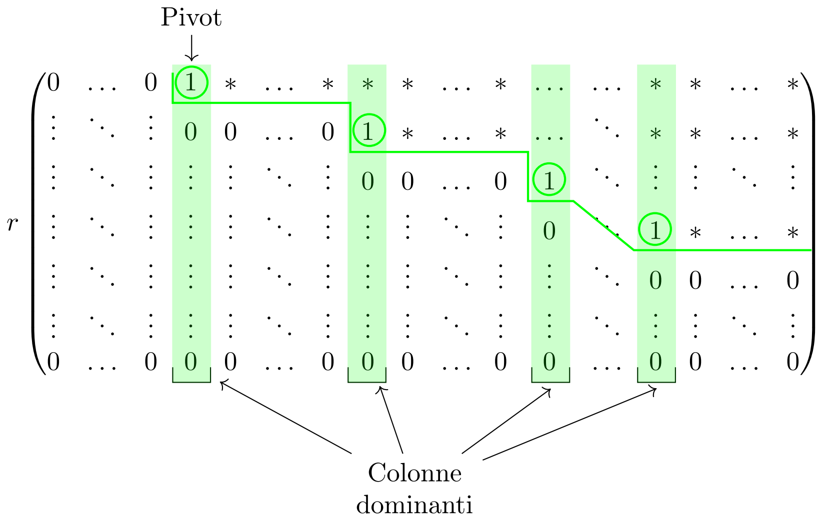
Sono equivalenti i seguenti enunciati per $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$:

1. Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$.
2. Il rango $rk(A)$ di A è pari al numero di righe di A.

3.12.1 Dimostrazione

Dimostriamo che 1. implica 2. Supponiamo (1.)

Sia U una forma ridotta di A:



Queste righe esistono se e solo se $rk(U) <$ numero di righe di U.

Esiste una matrice invertibile E tale che $U = EA$ ($E =$ prodotto delle matrici elementari dell'Eliminaizone di Gauss). Consideriamo il vettore $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e mettiamo $b = E^{-1}C$. Allora il sistema lineare $Ax = b$ ammette una soluzione v per (1.), cioè $Av = b$. Allora $Uv = Eb = E(E^{-1}C) = C$ per (3.11). Per il teorema di **Rouché-Capelli**, $rk(U) = rk(U|c)$, cioè:

$$(U|c) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & * & \dots & * & * & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & 1 \end{array}\right)$$

L'ultima riga non può essere nulla, altrimenti l'ultima colonna di $(U|c)$ sarebbe una colonna dominante.

Dunque $rk(A) = rk(U) =$ numero di righe di $U =$ numero di righe di A.

Dimostriamo che 2. implica 1. Supponiamo (2.)

Sia $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ e consideriamo $Ax = b$. Eseguendo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice $(A|b)$, otteniamo una forma ridotta $(U|c)$. Siccome $rk(U) =$ numero di righe di U, ogni riga di U contiene un pivot. Perciò $rk(U) = rk(U|c)$ e quindi $rk(A) = rk(A|b)$. Quindi siamo nel caso di una soluzione unica, oppure nel caso di infinite soluzioni del teorema di **Rouché-Capelli**. $\square$

4 Matrici inverse e determinante

Esempio 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss e calcoliamo il prodotto delle matrici elementari contemporaneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{21}(-5)}{\underset{E_{31}4}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{E_{32}(2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{E_3(-\frac{1}{4})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice ridotta U , a destra abbiamo il prodotto delle matrici elementari. Cioè:

$$E_3(-\frac{1}{4})E_{32}(2)E_{31}(4)E_{21}(-5)$$

Siccome $rk(U) = 3$, possiamo continuare per ottenere la matrice identità:

$$(U|E) \overset{E_{23}(1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\overset{E_{12}(-2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice identità, a destra abbiamo la matrice $E' = E_{12}(-2)E_{23}(1)E$. Allora:

$$I_3 = E_{12}(-2)E_{23}(1)U = E_{12}(-2)E_{23}(1)E \cdot A =$$

$$= E'A$$

Osserviamo che:

$$AE' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $A^{-1} = E'$

4.1 Proposizione

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Allora A è invertibile se e solo se esiste una sequenza di matrici elementari $E_1, \dots, E_t$ tale che $I_n = (E_t \dots E_1 A)$.

4.1.1 Dimostrazione

Supponiamo che A sia invertibile. Per ogni $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, il vettore $A^{-1}b =: v$ è soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Infatti:

$$Av = b = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$$

Per (3.12), abbiamo che $rk(A) = n$. Esiste una forma ridotta U di A tale che $rk(U) = n$ e

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con 1 sulla diagnoale e matrici elementari $E_1, \dots, E_t$ tali che $U = E_t \dots E_1 A$. Proseguendo come nell'esempio precedente, otteniamo le matrici elementari $E_{t+1}, \dots, E_s$ tali che:

$$I_n = E_s \dots E_{t+1} U = E_s \dots E_{t+1} E_t \dots E_1 A$$

Ora supponiamo che esistano le matrici elementari $E_1, \dots, E_s$ tali che:

$$I_n = E_s \dots E_1 A$$

Per 3.10, le matrici elementari sono invertibili. Dunque:

$$E_i^{-1} \dots E_s^{-1} = E_i^{-1} \dots E_s^{-1} I_n = \overbrace{\underbrace{E_i^{-1} \dots E_s^{-1}}_{(E_s \dots E_1)^{-1}} E_s \dots E_1}^{I_n} A = A$$

A è un prodotto di matrici invertibili, quindi è invertibile con $A^{-1} = Es \dots E_1$
□

4.2 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice invertibile $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Usiamo le operazioni elementari per trasformare A nella matrice identità, e eseguiamo le stesse operazioni elementari su I_n per ottenere A^{-1}:

$$(A|I_n) \overset{E_1}{\rightsquigarrow} (A'|E') \overset{E_2}{\rightsquigarrow} \dots \overset{E_s}{\rightsquigarrow} (I_n|A^{-1})$$

Esempio 4.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{31}(-5)}{\underset{R3-5R1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{E_{32}(4)}{\underset{R3+4R2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{23}(-4)}{\underset{R2-4R3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{E_{13}(-3)}{\underset{R1-3R3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{12}(-2)}{\underset{R1-2R2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice identità I_3 *, a destra abbiamo la matrice inversa* A^{-1}

4.3 Teorema delle matrici invertibili

Sono equivalenti i seguenti enunciati per $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$:

(a) A è invertibile.

(b) Esiste una sequenza di matrici elementari $E_1, \dots, E_t$ tale che:

$$I_n = E_t \dots E_1 A$$

(c) $rk(a) = n$

(d) Il sistema lineare $Ax = b$ ammette una soluzione per qualsiasi vettore $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

(e) Il sistema lineare $Ax = \underbrace{o}_{\text{vettore nullo}}$ ha una sola soluzione, cioè:

$$x = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(f) Esiste una matrice $C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$CA = I_n$$

(g) Esiste una matrice $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$AD = I_n$$

4.3.1 Dimostrazione

$$\begin{tikzcd}
 & (b) \arrow[d, Leftrightarrow, "\surd\ (4.2)"] & \\
(g) \arrow[d, Rightarrow, "dim\ (4.1)"'] & (a) \arrow[l, Rightarrow, "\surd"'] \arrow[r, Rightarrow, "\surd"] & (f) \arrow[d, Rightarrow, "\surd"] \\
(d) \arrow[r, Rightarrow, "dim\ (3.12)"'] & (c) \arrow[u, Rightarrow, "dim\ (4.1)"] & (e) \arrow[l, Rightarrow, "1 soluz."]
\end{tikzcd}$$

Figura 11: Diagramma delle implicazioni

$(f) \Rightarrow (e)$ Supponiamo che $\exists C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che $CA = I_n$. Sia $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ una soluzione del sistema $Ax = 0$. Allora:

$$v = I_n v = (CA)v = C(Av) = Co = 0$$

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Definizioni utili 4.1
Sia D la matrice inversa destra:

$$D = I_n D = (CA)D = C(AD) = CI_n = C$$

Osserviamo che $D = C$. Quindi:

$$C = D = A^{-1}$$

4.4 Proposizione (Determinante di una matrice)

Sia $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se $ad - bc \neq 0$, allora A è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Se $ad - bc = 0$, allora A non è invertibile.

$ad - bc$ è detto **determinante** di A e si indica con $\det(A)$.

4.4.1 Dimostrazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Quindi A è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Se $ad - bc = 0$, allora:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc \\ cd-cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ è soluzione al sistema $Ax = 0$. Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora A non è invertibile per (4.3(e)).

Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $d = c = 0$ e:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango < 2, quindi A non è invertibile per (4.3(c)). $\square$

4.5 Definizione di determinante

Definizione 4.1
Definiamo una funzione $\det : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *detta* ***determinante*** *per ricorrenza:*

- $n = 1$*:*

$$A = (a) \quad \det(A) = a$$

- $n = 2$ *(4.3):*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

- $n \geq 3$*:*

$$A = (A_{ij})_{1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

dove A_{1j} *è la matrice ottenuta da* A *cancellando la prima riga e la colonna* j*.*

Esempio 4.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^2 1 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(-1)^3 2 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{2} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(-1)^4 3 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix} =$$

$$= -6 + 6 - 3 = -3$$

Esempio 4.4

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} +$$

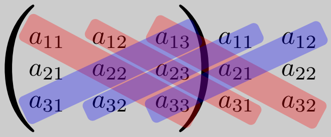
$$(-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1(-2-1) - 2(-3-0) + 3(3-0) = -3 + 6 + 9 = 12$$

4.6 Regola di Sarrus

Definizione 4.2
Per una matrice di dimensione 3×3 *si può usare la regola di Sarrus:*



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esempio 4.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la regola di Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = -3$$

$$= 6 - 3 - 6 = -3$$

4.7 Teorema di Laplace

Definizione 4.3
Il determinante di una matrice $A = (a_{ij})$ può essere sviluppato per qualsiasi riga o colonna come segue:

- *Sviluppo per la riga i*

  $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

  dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j.

- *Sviluppo per la colonna j*

  $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

  dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j.

Il valore $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ è detto ***complemento algebrico*** *di a_{ij}. Il segno si determina secondo:*

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esempio 4.6

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 0^- & 1^+ & 3^- \\ 1^+ & 2^- & 0^+ \end{pmatrix}$$

- ***Riga*** *3:*

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{0} & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{1} & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$= (6-3) - 2(3-0) = 3 - 6 = -3$$

- ***Colonna*** *3:*

$$\det(A) = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$-3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$= 3(1-6) - 3(1-6) = -15 + 15 = 0$$

4.8 Determinante e trasposta

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc \quad \det(A^T) = ad - cb$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Esempio 4.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -3$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \overset{R1}{=} 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}} -2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}} +3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{13}} = -3$$

$$\det(A^T) \overset{C1}{=} 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T_{11}} -2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T_{21}} +3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^T_{31}} = -3$$

Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, allora:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

4.9 Il principio di induzione

Il principio di induzione serve a dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale una proprietà $P(n)$. Nel nostro caso che ogni matrice A di dimensione $n \times n$, $\det(A) = \det(A^T)$. Si procede in due passi:

- **Base dell'induzione**:

  $P(n)$ è vera per $n = 1$, ovvero $P(1)$ è vera.

- **Passo induttivo**:

  Supponendo che $p(n)$ sia vera; ne consegue che $p(n+1)$ è vera.

Allora $p(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 4.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per la riga 4:

$$\det(A) = 10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cancel{4} \\ 0 & 5 & 6 & \cancel{7} \\ 0 & 0 & 8 & \cancel{9} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{10} \end{pmatrix}$$

Si utilizza di nuovo il teorema di Laplace per la matrice 3×3 *ottenuta:*

$$\overset{R3}{=} 10 \left(8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 10 \cdot 8 \cdot (1 \cdot 5 - 0 \cdot 2) = 10 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 1 = 400 \right)$$

4.10 Proposizione

Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matrice triangolare superiore o inferiore. Allora:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Dimostrazione (superiore):
Per induzione su n:

- **Proprietà** $P(n)$:

  Per $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$

- **Base dell'induzione**:

  $$A = (a_{11}) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{C})$$

  $$\det(A) = a_{11} \quad \text{Per definizione}$$

- **Passo induttivo**:

  Supponiamo $P(n)$

  $$A = (a_{ij}) \in M_{n+1 \times n+1}(\mathbb{C})$$

  $$\det(A) \overset{Rn+1}{=} a_{n+1n+1} \cdot \underbrace{\det(A_{n+1n+1})}_{\text{mat. triang. sup. di dim. } n \times n} = a_{n+1n+1}(a_{nn} \dots a_{11})$$

  Quindi $P(n+1)$ è vera.

Per il principio di induzione, abbiamo dimostrato che $P(n)$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione per A triangolare inferiore è simile. $\square$

Esempio 4.9

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice è una matrice ridotta, cioè una matrice triangolare superiore con 1 sulla diagonale.

$$\det(U) = 1$$

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(U') = 0$$

Esempio 4.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -3$$

- $$\det(E_{23}A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
  $$\overset{C1}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
  $$= (6-0) - (6-3) = 6 - 6 + 3 = 3 = -\det(A)$$
- $$\det(E_2(2)A) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$\overset{C2}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$
  $$= -12 + 6 = -6 = 2\det(A)$$
- $$\det(E_{13}(2)A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C1}{=} 3 \cdot \det\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix}6 & 3\\1 & 3\end{pmatrix}$$

$$= 3(-6) + 1(18-3) = -3 = \det(A)$$

4.11 Teorema

Siano $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ 1 \leq i, j \leq n,\ 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$. Allora:

$$\det(EA) = \begin{cases} -\det(A) & \text{se } E = E_{ij} \\ \alpha\det(A) & \text{se } E = E_i(\alpha) \\ \det(A) & \text{se } E = E_{ij}(\alpha) \end{cases}$$

Dimostrazione ($n = 2$):

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) = ad - bc$$

- $$\det(E_{12}A) = \det\begin{pmatrix}c & d\\a & b\end{pmatrix} = cb - ad = -\det(A)$$
- $$\det(E_{12}A) = \det(E_{21}A)$$
- $$\det(E_1(\alpha)A) = \det\begin{pmatrix}\alpha a & \alpha b\\c & d\end{pmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad-bc) = \alpha\det(A)$$
- $$\det(E_2(\alpha)A) = \det\begin{pmatrix}a & b\\\alpha c & \alpha d\end{pmatrix} = a(\alpha d) - b(\alpha c) = \alpha(ad-bc) = \alpha\det(A)$$
- $$\det(E_{21}(\alpha)A) = \det\begin{pmatrix}a & b\\c+\alpha a & d+\alpha b\end{pmatrix} = a(d+\alpha b) - b(c+\alpha a) =$$

  $$ad + \alpha ab - bc - \alpha ab = ad - bc = \det(A)$$
- $$\det(E_{12}(\alpha)A) = \det\begin{pmatrix}a+\alpha c & b+\alpha d\\c & d\end{pmatrix} = (a+\alpha c)d - (b+\alpha d)c =$$

  $$ad + \alpha cd - bc - \alpha cd = ad - bc = \det(A)$$

Esempio 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma ridotta della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{E_3(-\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\det(U) = 1$$

$$U = E_3(-\frac{1}{3})E_{31}(-1)A$$

$$A = E_{31}(-1)^{-1}E_3(-\frac{1}{3})^{-1}U = E_{31}(1)E_3(-3)U$$

$$\det(A) = \det(E_{31}(1)E_3(-3)U) =$$

$$\det(E_3(-3)U) = -3\det(U) = -3$$

4.12 Corollario

Se $A \in M_{n\times n}$, allora $\det(A) \neq 0$ se e solo se A è invertibile.

Dimostrazione:

Sia U una forma ridotta di A:

$$\det(A) \neq 0 \underset{4.3}{\Leftrightarrow} \det(U) \neq 0 \underset{4.10}{\Leftrightarrow} rk(U) = n \underset{4.3}{\Leftrightarrow} A \text{ è invertibile}$$

□

4.13 Corollario

Siano $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Dimostrazione:

- **Caso 1**:

  A non è invertibile, ovvero $\det(A) = 0$. Se AB è invertibile, allora

  $$A(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = I_n \quad \text{e} \quad B(AB)^{-1}$$

  sarebbe l'inversa di A. Quindi AB **non** è invertibile. Allora $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$

- **Caso 2**:

  A è invertibile. Per (4.1), esiste una sequenza $E_1, \dots, E_t$ di matrici elementari tali che:

  $$E_t \dots E_1 A = I_n$$

Siccome $E_1, \dots, E_t$ sono invertibili, possiamo considerare:

$$A = (E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) E_t \dots E_1 A = E_1^{-1} \dots E_t^{-1} I_n = E_1^{-1} \dots E_t^{-1}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1^{-1} \dots E_t^{-1} B) \\ &\overset{teo}{=} \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_t^{-1}) \det(B) \\ &\overset{teo}{=} \det(E_1^{-1} \dots \det(E_t^{-1}) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

$$\square$$

4.14 Formula per A^{-1}

Se $\det(A) \neq 0$ allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

dove A^* è la matrice i cui coefficienti sono i complementi algebrici di A^T e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Esempio 4.12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{1} & 2 \\ 3 & \cancel{3} & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ 3 & 3 & \cancel{0} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{3} & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & 3 & \cancel{0} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ 2 & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{3}$$

4.15 Teorema di Cramer

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\det(A) \neq 0$, sia $b \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Allora il sistema lineare $Ax = b$ possiede l'unica soluzione $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ dove

$$p_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

e A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i con il vettore b.

Esempio 4.13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -3 \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} +1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_1) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_2) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_3) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$p_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

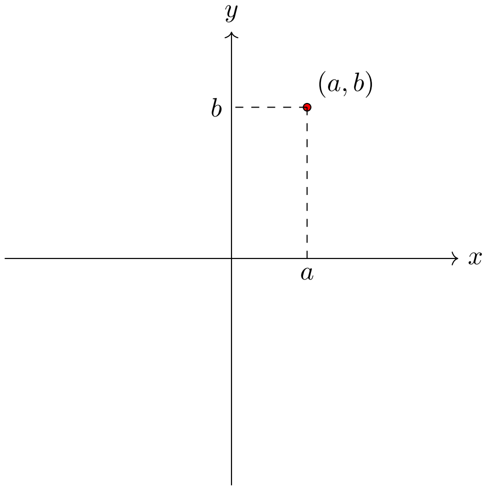
$$p_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$p_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Dunque $p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *è l'unica soluzione del sistema lineare* $Ax = b$

5 Spazi vettoriali e sottospazi

Esempio 5.1
Prendiamo in considerazione il piano cartesiano: $\mathbb{R}^2$



Ogni punto nel piano cartesiano può essere rappresentato con una coppia di valori (a,b)*. Possiamo identificare* $\mathbb{R}^2$ *con l'insieme*

$$M_{2\times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Possiamo:

- *Sommare i vettori:*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$$

- *Moltiplicare per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

5.1 Definizione di spazio vettoriale

Definizione 5.1
Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oppure* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Uno* ***spazio vettoriale*** *su* $\mathbb{K}$ *è un insieme non vuoto* V *i cui elementi sono detti* ***vettori*** *sul quale sono definite due operazioni:*

1. ***Addizione***: *per* $v, w \in V$ *abbiamo:*

$$v + w \in V$$

2. ***Moltiplicazione per uno scalare***: *per* $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ *abbiamo:*

$$\alpha v \in V$$

che godono delle seguenti proprietà:

1. *Valgono le proprietà:*
    (a) ***Associatività***:

    $$(v + u) + w = v + (u + w)$$

    per ogni $v, u, w \in V$

    (b) ***Elemento neutro***: *esiste* $0_v \in V$ *tale che:*

    $$v + 0_v = v = 0_v + v$$

    per ogni $v \in V$

    (c) ***Elemento inverso***: *per ogni* $v \in V$ *esiste* $w \in V$ *tale che:*

    $$v + w = 0_v = w + v$$

    Scriviamo $w = -v$

    (d) ***Commutatività***:

    $$v + w = w + v$$

    per ogni $v, w \in V$

2. *Per ogni* $v \in V$:

$$1 \cdot v = v$$

3. *Per ogni* $v \in V$ *e* $a, b \in \mathbb{K}$

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$$

4. *Per ogni* $v, w \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$ *valgono le seguenti* ***leggi distributive***:

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

5.1.1 Esempi

1. $V = M_{m\times n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con addizione di matrici e moltiplicazione per scalari usuale.

   $$0_v = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   In particolare scriviamo:

   $$\mathbb{K}^m := M_{m\times 1}(\mathbb{K})$$

   $$0_{\mathbb{K}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

2. $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$.

   $$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

   $$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

   $$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$
   $$\alpha f = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \ldots + (\alpha a_n)x^n$$

   - $\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale. L'elemento neutro è:

     $$0_{\mathbb{K}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$$

   - $\mathbb{K}[x]$ è l'insieme di polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. È uno spazio vettoriale

3. Le successioni sono delle liste di numeri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}$. Ad esempio:

   $$(1, -1, 2, 3, 6, i, \ldots) \in \mathbb{C}$$

   formano uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ su $\mathbb{K}$:

   $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

   Ad esempio:

   $$(1, -1, 2, 3, 6, i, \ldots) + (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) = (2, -1, 3, 3, 7, i, \ldots)$$

   La molitplicazione per uno scalare è:

   $$\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

   Ad esempio:

   $$2(1, -1, 2, 3, 6, i, \ldots) = (2, -2, 4, 6, 12, 2i, \ldots)$$

L'insieme di successioni che soddisfano la relazione:

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 3a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ad esempio:

$$(1, 0, -3, -15, -66, \ldots)$$

è uno spazio vettoriale. L'elemento neutro è:

$$0_{\mathcal{S}} = (0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

4. L'insieme di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale:

$$f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha \in \mathbb{R},$$

$$\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ è la funzione: $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0$

5. $V = \{0_v\}$ è uno spazio vettoriale. Scriviamo $V = \{0\}$.

5.2 Osservazioni

Sia V uno spazio vettoriale. Sia $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$

a. $\alpha 0_v = 0_v$, infatti:

$$\alpha 0_v = \alpha(0_v + 0_v) = \alpha 0_v + \alpha 0_v$$

Sommando $-\alpha 0_v$ ad entrambi i membri otteniamo:

$$\alpha 0_v + (-\alpha 0_v) = (\alpha 0_v + \alpha 0_v) + (-\alpha 0_v)$$

$$0_v = \alpha 0_v + (\alpha 0_v - \alpha 0_v)$$

$$0_v = \alpha 0_v + 0_v$$

$$0_v = \alpha 0_v$$

b. $0 \cdot v = 0_v$

$$v = 1 \cdot v = (1 + 0)v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$$

Sommando $-v$ ad entrambi i membri otteniamo:

$$v + (-v) = v + 0 \cdot v + (-v)$$

$$0_v = 0 \cdot v + (v + (-v))$$

$$0_v = 0 \cdot v + 0_v$$

$$0_v = 0 \cdot v$$

c. Se $\alpha v = 0_v$, allora $\alpha = 0$ oppure $v = 0_v$

$$\alpha v = 0_v$$

$$\alpha v = \alpha 0_v$$

$$\alpha v = \alpha(v - v)$$

$$\alpha v = \alpha v - \alpha v$$

$$0_v = 0_v$$

d. $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$

5.3 Definizione combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Il vettore:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

è detto **combinazione lineare** di $v_1, \ldots, v_n$ con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Esempio 5.2
Il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

è combinazione lineare di:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con coefficienti $1, 2, 3$ *rispettivamente. Infatti:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra combinazione lineare è:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 5.3
Il polinomio

$$f = 2x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$$

è combinazione lineare di:

$$g_1 = x^2 + 2x, \quad g_2 = x - 1, \quad g_3 = \frac{1}{2}x - 1$$

Infatti:

$$2g_1 + 3g_2 + (-6)g_3 = 2(x^2 + 2x) + 3(x - 1) - 6\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 2x^2 + 4x + 3 = f$$

5.4 Definizione di insieme di generatori

Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Se ogni $v \in V$ è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ si dice che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un **insieme di generatori** e V è detto **finitamente generato**.

5.4.1 Esempi

Esempio 5.4

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{K}^3 = M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ *(per* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *).*
Infatti, se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$*, allora:*

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivendo:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con 1 *nella i-esima posizione, otteniamo l'insime di generatori di* $\mathbb{K}^n$*:* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *Dunque* $\mathbb{K}^n$ *è finitamente generato.*

Esempio 5.5

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$. *Infatti, se* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *allora*

$$v = (v_1, -v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(v_2 - v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (v_1 - v_2) + v_2 \\ 3(v_1 - v_2) + v_2 + 3(v_2 - v_1) \end{pmatrix}$$

I coefficienti della combinazione lineare non sono univocamente determinati:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 5.6

Le successioni:

$$u_1 = (1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$

$$u_2 = (0, 1, 5, 22, 95, \dots)$$

formano un insieme di generatori di $\mathcal{S}'$. *Infatti, se:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, b, 5b - 3a, 5(5b - 3a) - 3b, \dots) \in \mathcal{S}'$$

allora

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = au_1 + bu_2$$

Esempio 5.7

Gli spazi vettoriali $\mathcal{S}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *(successioni, polinomi, funzioni)* ***non*** *sono finitamente generati.*

5.5 Definizione di sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme $\emptyset \neq U \subseteq V$ è detto **sottospazio** di V se soddisfa le proprietà:

1. per ogni $u, u' \in U$:

$$u + u' \in U$$

2. per ogni $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$:
$$\alpha u \in U$$

Osservazione:
In tal caso U è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni $+, \cdot$ di V.

5.5.1 Esempi

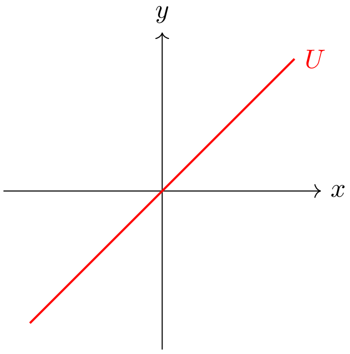
Esempio 5.8

$$\mathbb{K}_n[x] \subseteq \mathbb{K}[x] \quad \textit{sottospazi}$$
$$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \quad \textit{sottospazi}$$

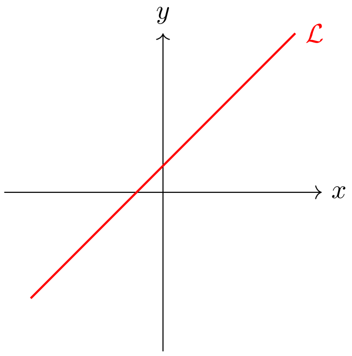
Esempio 5.9
Il sottoinsieme
$$u = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| v_2 = mv_1 \right\}$$
è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ *per qualsiasi* $m \in \mathbb{R}$. *Infatti:*

1.
$$\begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+u \\ mv+mu \end{pmatrix}$$

2.
$$\alpha \begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ m(\alpha v) \end{pmatrix} \in U$$



Il sottoinsieme $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \middle| v_2 = mv_1 + c \right\}$ *non è un sottospazio se* $c \neq 0$.



Infatti:

$$\begin{pmatrix} v \\ mv+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+u \\ mv+mu+2c \end{pmatrix} \notin U$$

$$mv+mu+2c \neq m(v+u)+c$$

Esempio 5.10

$O = \{0_v\} \subseteq V$ è un sottospazio per ogni spazio vettoriale V. Infatti

1. $0_v + 0_v = 0_v \in O$
2. $\alpha 0_v = 0_v \in O$

Ogni sottospazio U di V contiene 0_v. infatti $\forall u \in U$ abbiamo che $(-1)u = -u \in U$. Quindi $0_v = u + (-u) \in U$

Esempio 5.11

Il sottoinsieme

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \middle| \, a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$$

è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Infatti

1. $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{pmatrix} \in T$$
2. $$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha c \end{pmatrix} \in T$$

Esempio 5.12

$$\overbrace{\mathbb{K}_n[x]}^{\text{polinomi di grado } \leq n} \subseteq \overbrace{\mathbb{K}[x]}^{\text{polinomi}}$$

$$\underbrace{\mathcal{S}'}_{\text{successioni che soddisfano una relazione}} \subseteq \underbrace{\mathcal{S}}_{\text{successioni}}$$

sono sottospazi

5.6 Definizione di sottospazio generato

Definizione 5.2
Dati $v_1, \ldots, v_n \in V$, *l'insieme*

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_n$ *è un sottospazio di* V. *Infatti:*

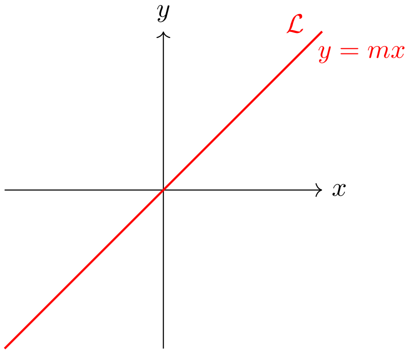
1.
$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) \\ &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \\ &= (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1) + \ldots + (\alpha_n v_n + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i \quad \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \end{aligned}$$

2.
$$\beta \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i) v_i \quad \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

Diciamo che $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ *è il sottospazio generato da* $v_1, \ldots, v_n$.

Esempio 5.13

$$V = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$$



è il sottospazio generato da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{S}'$ *è il sottospazio di* $\mathcal{S}$ *generato da* u_1 *e* u_2.

5.7 Definitione

Se U, W sono sottospazi di V, allora l'intersezione

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \wedge v \in W\}$$

è un sottospazio di V.
In generale, l'unione

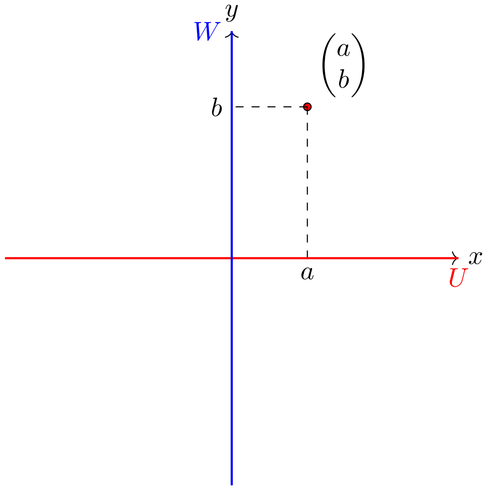
$$U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \vee v \in W\}$$

non è un sottospazio di V.

Esempio 5.14

$$V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin U \cup W$$

Quindi $U \cup W \subseteq V$ *non soddisfa la prima proprietà dei sottospazi.*

L'insieme $U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$ è un sottospazio di V, detto la **somma di** U **e** W.

NB:
$U \cup U \subseteq U + W$ perchè

$$U = \{u = u + 0_v \mid u \in U\}$$

$$W = \{w = 0_v + w \mid w \in W\}$$

5.8 Definizione

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^m$. Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
Il sottospazio di $\mathbb{K}^m$

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

generato dalle colonne di A è detto lo **spazio delle colonne** di A.

Esempio 5.15
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ad esempio:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in C(A)$$

NB:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in C(A) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

Il sistema lineare $Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *possiede soluzione*

5.9 Proposizione

Sia $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Lo spazio delle colonne $C(A)$ consiste di tutti i vettori $b \in \mathbb{K}^m$ per i quali il sistema lineare $Ax = b$ possiede soluzione.

5.9.1 Dimostrazione

$$C(A) \overset{def}{=} \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \,\middle|\, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ b \in \mathbb{K}^m \middle| \exists v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ tale che } Av = b \right\}$$

$$\square$$

5.10 Definizione

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ l'insieme

$$N(A) = \left\{ v \in \mathbb{K}^n \middle| \; Av = \mathbb{O} \right\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

(dove $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) è detto **spazio nullo di** A .

5.11 Proposizione

Lo spazio nullo $N(A)$ di una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

5.11.1 Dimostrazione

Siano $v, u \in N(A)$, cioè $Av = \mathbb{O}$ e $Au = \mathbb{O}$ e sia $\alpha \in \mathbb{K}$. Allora

- Per la legge distributiva del prodotto di matrici:

  $$A(v+u) = Av + Au = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

  Quindi $v + u \in N(A)$

- Per la proprietà di molitplicazione per uno scalare:

  $$A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

  Quindi $\alpha v \in N(A)$

Dunque $N(A)$ è un sottospazio. $\square$

Esempio 5.16

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$N(A) = \{\textit{Soluzioni del sistema lineare } Ax = 0 \;\}$$

Risolviamo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{E_1(-i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{E_{31}(-i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{E_{23}(1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \textit{Quindi } N(A) = \left\{ \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio 5.17

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Risolviamo il sistema lineare $Ax = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{E_2(\frac{1}{6})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} {}_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Siccome la matrice ha soltanto 2 colonne dominanti bisogna introdurre un parametro per la variabile libera x_3.

$$x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2\left(-\frac{1}{2}t\right) = t \\ x_2 = -\frac{1}{2}t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Quindi $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{sottospazio}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

6 Dipendenza e indipendenza lineare

Esempio 6.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \textit{ insieme di generatori}$$

Infatti, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V$ *abbiamo che:*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_2 - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - \frac{3}{2} v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v_2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Non è efficiente usare l'insieme di generatori $\mathcal{C}$ *perchè esistono almeno 2 sottoinsiemi di generatori più piccoli:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{C}$$

In particolare:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.1 Proposizione

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e v_n è una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{n-1}$, allora $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori.

6.1.1 Dimostrazione

Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per ogni $v \in V$ esistono $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n$$

$$= \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right)$$

$$= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + \ldots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1}$$

Quindi $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori. $\square$

6.2 Definizione

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ vettori in uno spazio vettoriale V. Un insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è detto **linearmente dipendente** se almeno uno dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ è combinazione lineare dei rimanenti.

6.3 Teorema

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sono equivalenti i seguenti enunciati:

1. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ **non** è linearmente dipendente
2. Se
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$
allora $\alpha_i = \beta_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$
3. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sono coefficienti tali che
$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_v$$
allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$

Se valgono le condizioni (1), (2) + (3), allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è detto **linearmente indipendente**.

6.3.1 Dimostrazione

Dimostriamo che (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), quindi:

$$\neg(1) \Rightarrow \neg(2) \Rightarrow \neg(3) \land (2) \Rightarrow (3)$$

- [(2) $\Rightarrow$ (3)] Supponiamo che:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \right) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$
Supponiamo che:
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_v$$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$$
Quindi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ per (2).

- $[\neg(2) \Rightarrow \neg(3)]$ Supponiamo che:

  $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

  e $a_j \neq \beta_j$ per qualche $1 \leq j \leq n$. Quindi:

  $$0_v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i$$

  e allora:

  $$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i$$

  Dunque $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente dipendente

- $[\neg(1) \Rightarrow \neg(3)]$ Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia linearmente dipendente, cioè esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che:

  $$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i + \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i v_i$$

  Allora:

  $$0_v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_n v_n$$

  Dunque (3) non è verificata. $\square$

6.3.2 Esempi

Esempio 6.2

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ *è linearmente indipendente. Infatti se:*

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$ *e* $2\alpha_2 = 0$. *Abbiamo che* $\alpha_2 = 0$ *e* $\alpha_1 = 0$. *Quindi l'insieme è linearmente indipendente.*

Esempio 6.3

Un insieme $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ *è linearmente dipendente se e solo se esiste* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tale che* $\alpha v_1 = v_2$ *oppure* $v_1 = \alpha v_2$

Esempio 6.4
Un insieme $\{v\} \subseteq V$ *è linearmente dipendente se e solo se* $v = 0_v$*. Inoltre, per ogni* $\{v_1, \dots, v_n\}$*, se* $v_j = 0_v$ *per qualche* j*, allora* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *è linearmente dipendente perchè:*

$$0_v = \underbrace{0 \cdot v_1}_{0_v} + \ldots + \underbrace{0 \cdot v_{j-1}}_{0_v} + \underbrace{v_j}_{0_v} + \underbrace{0 \cdot v_{j+1}}_{0_v} + \ldots + \underbrace{0 \cdot v_n}_{0_v}$$

e quindi abbiamo $\neg(3)$

6.4 Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. L'insieme $\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è detto **base** di V se $\mathcal{U}$ è un insieme di generatori di V e $\mathcal{U}$ è linearmente indipendente.

6.5 Osservazione

Per il Teorema 6.4 un sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq V$ è una base se e solo se possiamo ricostruire in un modo unico tutti i vettori di V mediante combinazioni lineari. Possiamo pensare ad una base $\mathcal{U} = \{b_1, \dots, b_n\}$ di V come ad un sistema di coordinate:

Sia $v \in V$. Esiste un unico vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$.

Scriviamo $[v]_{\mathcal{U}}$ per il vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

6.5.1 Esempi

Esempio 6.5

$$V = \mathbb{K}^n \quad \mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right\}$$

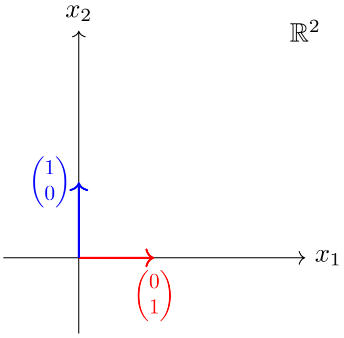


Figura 12: Base canonica di $\mathbb{K}^n$

Infatti, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *abbiamo che:*

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

Supponiamo $\mathbb{O} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$*, quindi:*

$$v_1 = 0,\ v_2 = 0, \dots, v_n = 0$$

Esempio 6.6

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$*, quindi non esiste un unica base di* $\mathbb{R}^2$.

6.6 Base di C(U) per una matrice U in forma ridotta

Esempio 6.7

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(U) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Le colonne dominanti formano una base di $C(U)$, infatti:

- ***Linearmente indipendente:*** *Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 7\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 = \alpha_1 + 7\alpha_2 = 0$

- ***Insieme di generatori*** *Proposizione 6.1:*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *è un insieme di generatori di $C(U)$.*

6.6.1 Osservazioni

Le colonne dominanti di una matrice U in forma ridotta formano una base di $C(U)$. Inoltre le colonne non nulle di U^T (cioè le righe non nulle di U formano una base di $C(U^T)$.

6.7 Proposizione

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

1. $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori minimo, cioè nessun sottoinsieme di $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori
2. $\mathcal{B}$ è massimamente linearmente indipendente, cioè nessun insieme di vettori che contenga propriamente $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

6.8 Teorema

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato.

- Se $V \neq 0$, allora V possiede una base.
- Se $V = 0$, allora V **non** possiede una base.

6.8.1 Dimostrazione

Se $V = 0 = \{0_v\}$, allora ogni sottoinsieme non vuoto di V contiene 0_v e quindi non può essere linearmente indipendente.

Supponiamo $V \neq 0$.
Sia $\mathcal{B}_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un insieme di generatori. Se $\mathcal{B}_n$ è linearmente indipendente, allora $\mathcal{B}_n$ è una base di V. Altrimenti uno dei vettori di $\mathcal{B}_n$ è combinazione lineare dei rimanenti. Senza perdita di generalità supponiamo che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per 6.1 $\mathcal{B}_{n-1} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori. Se $\mathcal{B}_{n-1}$ è linearmente indipendente, allora $\mathcal{B}_{n-1}$ è una base. Altrimenti continuiamo come sopra. Proseguendo così si otterrà un sottoinsieme di $\mathcal{B}_n$ che è una base. $\square$

Esempio 6.8

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\mathcal{C}_3$ è un insieme di generatori, ma non è linearmente indipendente:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_2 + 2v_1$$

Allora:

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori. Inoltre $\mathcal{C}_2$ è linearmente indipendente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$. Allora $\mathcal{C}_2$ è una base.

6.9 Teorema di Steinitz

Sia $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di V e $\mathcal{L} = \{u_1, \dots, u_m\}$ un insieme linearmente indipendente. Allora $m \leq n$ ed esiste un insieme di generatori di V formato da $\mathcal{L}$ e $n - m$ vettori di $\mathcal{G}$.

6.10 Corollario

Se $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ sono basi di uno spazio vettoriale, allora $m = n$.

6.10.1 Dimostrazione

Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_2$ nel teorema di Steinitz, si ha $m \leq n$. Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_1$ si ha $n \leq m$. Quindi $m = n$. □

6.11 Definizione

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Il numero di vettori che formano una base di V è detto **dimensione** di V e si indica con $dim_{\mathbb{K}}(V)$.

6.11.1 Esempi

Esempio 6.9

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad V = \mathbb{C}$$

$\{1\}$ *è una base di* V *su* $\mathbb{C}$. *Dunque* $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

Esempio 6.10

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{C}$$

$\{1, i\}$ *è una base di* V *su* $\mathbb{R}$.

- *(Insieme di generatori):* $z \in \mathbb{C} = V$

$$z = a + bi = a(1) + b(i), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- *(Linearmente indipendente):* $0_v \in \mathbb{C}$

$$0 = 0 + 0i$$

è l'unico modo di scrivere 0 *come combinazione lineare di* $\{1, i\}$.

$$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$$

6.12 Corollario

In uno spazio vettoriale V di dimensione $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, si ha

1. Un insieme con $> n$ vettori è linearmente dipendente.
2. Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base di V.
3. Ogni insieme di generatori consiste di almeno n vettori

6.13 Proposizione

Sia $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Allora ogni sottospazio U di V ha dimensione $dim_{\mathbb{K}}(U) \leq n$. Inoltre $dim_{\mathbb{K}}(U) = n$ se e solo se $U = V$

6.13.1 Dimostrazione

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di U. Allora $\mathbb{B}$ è linearmente indipendente in V perchè $0_v = 0_u$. Quindi possiamo completare $\mathbb{B}$ a una base di V (usando il teorema di Steinitz). Allora $\underbrace{\#\mathcal{B}}_{dim_{\mathbb{K}}(U)} \leq \underbrace{\#\mathcal{B}'}_{dim_{\mathbb{K}}(V)}$. Abbiamo che $\mathcal{B}$ contiene n

elementi (cioè $dim_{\mathbb{K}}(U) = n$) se e solo se $\mathcal{B}$ è una base di V. Quindi in tal caso abbiamo:

$$U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = V \quad \square$$

7 Applicazione lineare

D'ora in poi, tutti gli spazi vettoriali saranno **finitamente generati**.

7.1 Definizione

Siano U e V spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Un'applicazione $f : U \to V$ si dice **lineare** se, per $u, u' \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha:

1. $f(u + u') = f(u) + f(u')$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

7.1.1 Osservazioni

1. $f(0_u) \underset{5.2(b)}{=} f(0 \cdot 0_u) \underset{7.1(2)}{=} 0 \cdot f(0_u) \underset{5.2(b)}{=} 0_v$
2. $f(-u) \underset{5.2(d)}{=} f((-1) \cdot u) \underset{7.1(2)}{=} (-1) \cdot f(u) \underset{5.2(d)}{=} -f(u)$

Per tutti gli elementi di U

7.1.2 Esempi

Esempio 7.1

$$U = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \mathbb{R}^2 = M_{2\times1}(\mathbb{R})$$
$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$f : U \to V$$
$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

f è lineare. Infatti per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$

1.

$$f(p+q) = \big((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2\big) =$$
$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Quindi $f(p+q) = f(p) + f(q)$

2. $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha p) = f((\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha f(p) = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(\alpha p) = \alpha f(p)$

7.2 Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definiamo $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $f(v) = Av$. f_A è lineare:

1. $f_A(v+w) = A(v+w) = Av + Aw = f_A(v) + f_A(w)$
2. $f_A(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha f_A(v)$

7.2.1 Esempi

Esempio 7.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1-i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$$

$$f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1-i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + iy \\ (1-i)y \\ x \end{pmatrix}$$

Esempio 7.3

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3z - y \end{pmatrix}$$

f è lineare. Notiamo che, per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, *abbiamo:*

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= xf\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + yf\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + zf\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dunque $f = f_A$ *dove* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Per ogni applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ e per $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo che

$$v = v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \ldots + v_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

$$f(v) = f(v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n)$$

$$= f(v_1e_1) + f(v_2e_2) + \ldots + f(v_ne_n)$$

$$= v_1f(e_1) + v_2f(e_2) + \ldots + v_nf(e_n)$$

$$= (f(e_1)\dots f(e_n))\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= Av$$

dove $A = (f(e_1)\dots f(e_n))$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora $f = f_A$. La matrice A è detta la **matrice associata a f (rispetto alla base canonica)**

NB: Per una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile abbiamo $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ e $f_{A^{-1}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Osserviamo:

$$f_{A^{-1}}(f_A(v)) = f_{A^{-1}}(Av) = A^{-1}(Av) = (A_{-1}A)v = I_n v = v$$

$$f_A(f_{A^{-1}}(v)) = f_A(A^{-1}v) = AA^{-1}v = I_n v = v$$

7.3 Definizione

Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è detta **isomorfismo** se esiste $g : W \to V$ tale che $g(f(v)) = V$ per ogni $v \in V$ e $f(g(w)) = W$ per ogni $w \in W$. L'applicazione lineare g è detta **inversa di** f e si dice che V e W sono **isomorfi**. Scriviamo $f^{-1} = g$ e $V \cong W$.

Esempio 7.4
Sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare. Allora esiste una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tale che $f = f_A$. L'applicazione lineare f è un isomorfismo se e solo se A è invertibile. Infatti, supponiamo che esista f^{-1} e consideriamo la matrice associata B, cioè $f^{-1} = f_B$. Allora, per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, abbiamo:

$$(BA)v = f_B f_A(v) = f^{-1}f(v) = v$$

$$= ff^{-1}(v) = f_A f_B(v) = f_A(BV) = (AB)v$$

Ne segue $AB = I_n = BA$. Quindi $B = A^{-1}$

7.4 Applicazione delle coordinate

Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$. Per ogni $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v \in V$ abbiamo definito il vettore:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

L'applicazione $C_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ definita come:

$$C_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

è lineare ed è detta **applicazione delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$**. Infatti, per:

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n, \quad w = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \in V$$

e $\alpha \in \mathbb{K}$, abbiamo

1.

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{B}}(v+w) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n) \\
&= C_{\mathcal{B}}((\alpha_1+\beta_1)b_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)b_n) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{B}}(v)+C_{\mathcal{B}}(w) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(v+w) = C_{\mathcal{B}}(v)+C_{\mathcal{B}}(w)$

2.

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{B}}(\alpha v) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n)) \\
&= C_{\mathcal{B}}((\alpha\alpha_1)b_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)b_n) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\alpha C_{\mathcal{B}}(v) = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}$$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha C_{\mathcal{B}}(v)$

Esempio 7.5

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$
$$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1+x, b_2 = 1+x^2, b_3 = x+x^2\}$$

è una base di V.

Prendiamo $v = 6+3x-x^2 \in V$. Poichè $\mathcal{B}$ è una base di V, esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$.

$$6+3x-x^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1+x^2) + \alpha_3(x+x^2)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_1 x) + (\alpha_2 + \alpha_2 x^2) + (\alpha_3 x + \alpha_3 x^2)$$

$$= (\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_3)x + (\alpha_2+\alpha_3)x^2$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema lineare usando l'Eliminazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 - \alpha_2 = 5 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi:

$$6 + 3x - x^2 = v = 5b_1 + b_2 - 2b_3 = 5(1+x) + (1+x^2) - 2(x+x^2)$$

7.5 Applicazione delle coordinate $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

Esempio 7.6

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \{b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}\} \textit{ base}$$

Per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$*, esistono* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ *è soluzione del sistema lineare* $Ax = v$ *dove:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Siccome $\mathcal{B}$ *è una base,* α_1 *e* α_2 *sono univocamente determinati e quindi* $Ax = v$ *ha soluzione per ogni* $v \in \mathbb{R}^2$*. Per il teorema 4.2, A è invertibile e*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v$$

Calcolando A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Dunque, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$C_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{8}v_2 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{pmatrix}$$

In generale, per una base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ di $\mathbb{K}^n$, la matrice $A = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ è invertibile e $C_{\mathcal{B}} = f_{A^{-1}}$. Dunque $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo con inversa f_A.

7.6 Teorema

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. L'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo.

7.6.1 Dimostrazione

Definiamo $g_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$,

$$g_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$$

Mostriamo che $g_{\mathcal{B}}$ è l'inversa di $C_{\mathcal{B}}$. Infatti:

$$C_{\mathcal{B}}\left(g_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right)\right) = C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Per ogni $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n \in V$,

$$g_{\mathcal{B}}\left(C_{\mathcal{B}}(v)\right) = g_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = v$$

Dunque $g_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}^{-1}$ $\square$

7.7 Osservazione

Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ è una base di V, allora $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ è una base di W. In particolare, $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$.

7.8 Corollario

Due spazi vettoriali V e W sono isomorfi se e solo se:

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$$

7.8.1 Dimostrazione

Se $f : V \to W$ è un isomorfismo, allora $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$

Supponiamo che V , W sono spazi vettoraili tali che:

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W) = n$$

Allora esiste una base di V $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e esiste una base di W $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$. Consideriamo $C_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ e $C_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^n$. Notiamo che abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "C_{\mathcal{B}}"'] & & W \\
& \mathbb{K}^n \arrow[ur, "C_{\mathcal{C}}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

L'applicazione lineare ha inversa:

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}} : W \to V$$

dove

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}}(w) = C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w))$$

per ogni $w \in W$. Infatti:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}} \left(C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}}(w)\right) &= C_{\mathcal{C}}^{-1} \left(C_{\mathcal{B}} \left(C_{\mathcal{B}}^{-1} \left(C_{\mathcal{C}}(w)\right)\right)\right) \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1} \left(C_{\mathcal{C}}(w)\right) = w \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}} \left(C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(v)\right) \\ = C_{\mathcal{B}}^{-1} \left(C_{\mathcal{C}} \left(C_{\mathcal{C}}^{-1} \left(C_{\mathcal{B}}(v)\right)\right)\right) \\ = C_{\mathcal{B}}^{-1} \left(C_{\mathcal{B}}(v)\right) = v \end{gathered}$$

Dunque V e W sono isomorfi. $\square$

NB: Per ogni $b_i \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(b_i) = C_{\mathcal{C}}^{-1} \left(C_{\mathcal{B}}(b_i)\right)$$

$$= C_{\mathcal{C}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = C_i$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) &= \{C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(b_1), \dots, C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(b_n)\}\} \\ &= \{C_1, \dots, C_n\} = \mathcal{C} \end{aligned}$$

7.9 Matrice del cambio di base

Esempio 7.7

$$V = \mathbb{K}^2$$

con basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Sia $v \in V$. Dati i numeri $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

come possiamo determinare $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{D}}(v) &= C_{\mathcal{D}}\left(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2\right) \\ &= C_{\mathcal{D}}\left(C_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1}\left([v]_{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & \overset{=\mathbb{K}^2}{V} \arrow[dl, shift right, "C_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "C_{\mathcal{D}}"] & \\ \mathbb{K}^2 \arrow[ur, shift right, red, "C_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \arrow[rr, "C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}"'] & & \mathbb{K}^2 \end{tikzcd}$$

Per 7.5, $C_{\mathcal{B}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_C$ per una matrice C, cioè per ogni $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$,

$$C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\right) = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

In questo esempio, abbiamo che $C_{\mathcal{D}} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ e $C_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ sono della forma:

$$C_{\mathcal{D}} = f_{A^{-1}} \quad e \quad C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_B$$

dove:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allora

$$f_{A^{-1}B} = f_{A^{-1}} \circ f_B = C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_C$$

Quindi $C = A^{-1}B$. *Calcolando* A^{-1}*:*

$$\left(\underbrace{\left.\begin{matrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right|}_{A} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \overset{EG}{\sim} \left(\underbrace{\left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|}_{I_2} \underbrace{\begin{matrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Abbiamo:

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Allora, per ogni $v \in V$*, abbiamo:*

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{D}}$$

Teorema 4 *Siano* $\mathcal{B}\{b_1, \ldots, b_n\}$ *e* $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ *basi di uno spazio vettoriale* V*. Esiste una matrice* $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ *tale che:*

$$[v]_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Le colonne di $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ *sono i vettori* $[b_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [b_n]_{\mathcal{C}}$*. La matrice* $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ *è detta* ***matrice del cambio di base*** $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$*.*

7.9.1 Dimostrazione

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "C_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "C_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rr, "C_{\mathcal{C}}C_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Per 7.2, esiste una matrice A tale che $C_{\mathcal{C}}C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_A$. Inoltre:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = A &\overset{7.2}{=} \left(C_{\mathcal{C}}C_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) \ldots C_{\mathcal{C}}C_{\mathcal{B}}^{-1}(e_n)\right) \\ &= (C_{\mathcal{C}}(b_1) \ldots C_{\mathcal{C}}(b_n)) \\ &= ([b_1]_{\mathcal{C}} \cdots [b_n]_{\mathcal{C}}) \quad \square \end{aligned}$$

dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica.

7.9.2 Osservazione

L'applicazione lineare $C_{\mathcal{C}}C_{\mathcal{B}}^{-1}$ è un isomorfismo con inversa $C_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{C}}^{-1}$. Dunque per 7.3, la matrice $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambio di base $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}^{-1} = A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.

Esempio 7.8

$$V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B} = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

NB:

$$C_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} &= ([b_1]_{\mathcal{C}}\ [b_2]_{\mathcal{C}}\ [b_3]_{\mathcal{C}}) \\ &= (C_{\mathcal{C}}(b_1)C_{\mathcal{C}}(b_2)C_{\mathcal{C}}(b_3)) \\ &= \big(C_{\mathcal{C}}(1+x)C_{\mathcal{C}}(1+x^2)C_{\mathcal{C}}(x+x^2)\big) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = [a_0 + a_1x + a_2x^2]_{\mathcal{C}}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1)(1+x) + (a_0 + a_2)(1+x^2) + (a_1 + a_2)(x+x^2)$$

7.10 Matrice associata a f rispetto a basi

Esempio 7.9

$$U = \mathbb{R}_2[x], \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$f : U \to V \textit{ tale che } f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Ovvero, per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$,

$$f(p) = f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2\} \textit{ base di } U$$

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \textit{ base di } V$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "C_{\mathcal{C}}"', shift right] & V \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, shift right, red, "C_{\mathcal{C}}^{-1}"'] \arrow[r, "C_{\mathcal{B}}\circ f\circ C_{\mathcal{C}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Per 7.2 esiste una matrice A associata a $C_{\mathcal{B}} \circ f \circ C_{\mathcal{C}}^{-1}$ rispetto alla base canonica:

$$C_{\mathcal{B}} \circ f \circ C_{\mathcal{C}}^{-1} = f_A$$

dove:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}} \circ f \circ C_{\mathcal{C}}^{-1}(e_1) & C_{\mathcal{B}} \circ f \circ C_{\mathcal{C}}^{-1}(e_2) & C_{\mathcal{B}} \circ f \circ C_{\mathcal{C}}^{-1}(e_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}} \circ f(1) & C_{\mathcal{B}} \circ f(x) & C_{\mathcal{B}} \circ f(x^2) \end{pmatrix} \\
&= \left(C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \right)
\end{aligned}$$

Osserviamo

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

per ogni $p \in U$,

$$[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} [p]_{\mathcal{C}}$$

Un esempio con $p = 3 + 2x - x^2$ $\quad f(p)$?

$$[p]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(p) = 4b_1 - b_2 = 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Teorema 5 *Siano U, V spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $f : U \to V$, $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ base di U, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ base di V.*
*Esiste una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tale che $A[u]_{\mathcal{C}} = [f(u)]_{\mathcal{B}}$ per ogni $u \in U$. A è detta **matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ di U e la base $\mathcal{B}$ di V**. Le sue colonne sono $[f(c_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [f(c_n)]_{\mathcal{B}}$.*

Esempio 7.10
Definiamo l'applicazione lineare $id : V \to V$ come $id(v) = v$ per ogni $v \in V$. Allora la matrice associata a id rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base $\mathcal{C}$ di V è la

matrice del cambio di base $A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$

8 Rango + nullità

8.1 Definizione

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_w\}$$

è un sottospazio di V, detto **spazio nullo di** f. Inoltre $Im(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ è un sottospazio di W detto **immagine di** f.

8.1.1 Esempi

Esempio 8.1

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$
$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$
$$N(f_A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = N(A)$$
$$Im(f_A) = \{Av \in \mathbb{K}^m \mid v \in \mathbb{K}^n\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \ldots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}v_1 \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \right.$$
$$\left. v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K} \right\} = C(A)$$

(Combinazioni lineari delle colonne di A)

Esempio 8.2

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^2, \quad f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$
$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$
$$N(f) = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 + a_2 = 0\}$$

$$Im(f) = \left\{ f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Esempio 8.3

$$i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$i\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N(i) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, i\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v_1 = v_2 = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Im(i) = \left\{ i\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, v_3 = 0 \right\}$$

8.2 Teorema (nullità + rango)

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(N(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

8.2.1 Dimostrazione

Notiamo che $N(f) \subseteq V$ è un sottospazio di V. Quindi:

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(f)) = m \quad \leq \quad n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

per 6.11.
Sia $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq N(f) \subseteq V$ una base di $N(f)$. Per il teorema di Steinitz, possiamo completare $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ad una base di V, cioè esiste una base $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ di V. Si può dimostrare che $\{f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ è una base di $Im(f)$, cioè $dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$ è uguale a $n - m$. Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n = m + (n - m) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(N(f)) \quad \square$$

Esempio 8.4

$$f : V \to W$$

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^2$$

Per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, *definiamo:*

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N(f) &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 = -a_2\} \\ &= \{ax - ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \quad a = a_1 \\ &= \{a(x - x^2) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle x - x^2 \rangle \end{aligned}$$

L'insieme $\{x - x^2\}$ *è un insieme di generatori e inoltre è linearmente indipendente, cioè è una base di* $N(f)$*.*

Completiamo $\{x - x^2\}$ *a una base di* $V = \mathbb{R}_2[x]$

$$\{x - x^2, 1, x\} \subseteq V$$

Dimostriamo che

$$\mathcal{B} = \{f(1), f(x)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \middle| \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

- ***Linearmente indipendente****: Siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Quindi $\alpha = 0$ *e* $\beta = \alpha + \beta = 0$.

- ***Insieme di generatori di*** $Im()$ *: Per ogni* $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in Im(f)$*, abbiamo:*

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Quindi $\mathcal{B}$ *è un insieme di generatori.*

8.3 Dimensione di C(A)

Esempio 8.5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Troviamo la forma ridotta di A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-1)}{\overset{E_{21}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{E_{21}(\frac{3}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

In 6.6 abbiamo visto che le colonne dominanti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *formano una base di* $C(U)$ *e* $dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = 2$.
Il problema è che $C(U) \neq C(A)$*, in particolare:*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C(U)$$

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \frac{2}{3}\beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 0 = 1 \end{cases} \right)$$

il sistema lineare non ha soluzione

8.3.1 Proposizione

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia $U \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una forma ridotta di A. Allora lo spazio delle colonne $C(A)$ e lo spazio delle colonne $C(U)$ sono isomorfi e quindi hanno la stessa dimensione:

$$dim_{\mathbb{K}}(C(A)) = dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = rk(U)$$

8.3.2 Dimostrazione

Sia $E \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ la matrice invertibile tale che $U = EA$ e $A = E^{-1}U$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m, \quad f_E(v) = Ev$$

con inversa $f_E^{-1} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ $f_E^{-1}(v) = f_{E^{-1}}(v) = E^{-1}v$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, shift left, "f_E"] & \mathbb{K}^m \arrow[l, shift left, "f_{E^{-1}}"] \\
C(A) \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, dashed, shift left, "f_E"] & C(U) \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[l, dashed, shift left, "f_{E^{-1}}"]
\end{tikzcd}$$

Vogliamo dimostrare che per ogni $v \in C(A)$, abbiamo $f_E(v)$ è un elemento di $C(U)$ e, per $w \in C(U)$ abbiamo $f_{E^{-1}}(w) \in C(A)$. Infatti, $C(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dove $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e $C(U) = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ dove $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$. Inoltre $\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = U = EA = E \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ea_1 & \dots & Ea_n \end{pmatrix}$ e quindi $Ea_1 = u_1, \dots, Ea_n = u_n$. Abbiamo $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = A = E^{-1}U = \begin{pmatrix} E^{-1}u_1 & \dots & E^{-1}u_n \end{pmatrix}$ e quindi $a_1 = E^{-1}u_1, \dots, a_n = E^{-1}u_n$. Dunque, per ogni $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in C(A)$, abbiamo che:

$$f_E(v) = f_E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_E(a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in C(U)$$

e, per ogni $w = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \in C(U)$, abbiamo che:

$$f_{E^{-1}}(w) = \sum_{i=1}^n \beta_i (E^{-1}u_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i \in C(A)$$

Quindi abbiamo un'applicazione lineare $f_E : C(A) \to C(U)$ con inversa $f_{E^{-1}} : C(U) \to C(A)$. Dunque f_E è un isomorfismo e

$$dim_{\mathbb{K}}(C(A)) \overset{7.7}{=} dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = rk(U) \quad \square$$

Esempio 8.6

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } C(U)$$

quindi

$$\left\{ f_{E^{-1}}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_1(U)} \right), f_{E^{-1}}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_2(U)} \right) \right\} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_1(A)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{C_2(A)} \right\}$$

è una base di $C(A)$ per 7.7.

In generale, le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$.

8.4 Dimensione di N(A)

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Per il teorema nullità + rango, abbiamo:

$$n = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = dim_{\mathbb{K}}(f_A) + dim_{\mathbb{K}}(Im(f_A)) =$$
$$= dim_{\mathbb{K}}(N(A)) + dim_{\mathbb{K}}(C(A)) = dim_{\mathbb{K}}(N(A)) + rk(A)$$

8.4.1 Corollario

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$dim_{\mathbb{K}}(N(A)) = n - rk(A)$$

8.5 Procedimento per determinare basi di C(A) e N(A)

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $r = rk(A)$ e $d = n - r = n - rk(A)$

1. Per determinare una base di $C(A)$:
    - Trovare una forma ridotta U di A
    - Le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$
2. Per determinare una base di $N(A)$:
    - Risolvere il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ assegnando parametri $t_1, \dots, t_d$ alle d variabili libere e ricavando le rimanenti variabili tramite "sostituzione all'indietro"
    - Per $1 \leq i \leq d$ si ottiene una soluzione u_i di $Ax = 0$ assegnando il valore 1 al parametro t_i e 0 ai rimanenti parametri.
    - Così facendo otteniamo $\{u_i, \dots, u_d\}$ un insieme linearmente indipendente.
    - Dunque $\{u_i, \dots, u_d\}$ è una base di $N(A)$.

Esempio 8.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Le colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *formano una base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

di $C(A)$*. Allora* $dim_{\mathbb{K}}(N(A)) = 4 - rk(A) = 4 - 2 = 2$*. Risolviamo il sistema lineare* $Ax = \mathbb{O}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

variabili libere:

$$x_3 = t_1 \quad x_4 = t_2$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -2(-t_1 - 2t_2) - 3t_1 = -t_1 + 4t_2 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 = -t_1 - 2t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

soluzioni:

$$\begin{pmatrix} -t_1 + 4t_2 \\ -t_1 - 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t_2 \\ -2t_2 0 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *è una base di* $N(A)$.

8.6 Proposizione

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali V, W. Se A è la matrice associata a f rispetto a una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{D}$ di W, allora:

$$dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = rk(A)$$

Di conseguenza

$$dim_{\mathbb{K}}(N(f)) = dim_{\mathbb{K}}(V) - rk(A)$$

La dimensione $dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$ è detta **rango di** f e scriviamo $rk(f)$. La dimensione $dim_{\mathbb{K}}(N(f))$ è detta **nullità di** f .

8.7 Teorema

Siano $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Se $p \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $Ax = b$, allora l'insieme di tutte le soluzioni di $Ax = b$ è

$$L = \{p + u \mid u \in N(A)\}$$

8.7.1 Dimostrazione

Se $v = p + u$ con $u \in N(A)$, allora

$$Av = A(p + u) = Ap + Au \underset{Au=0}{=} Ap + 0 = b$$

Quindi v è una soluzione di $Ax = b$. Viceversa, se v è una soluzione di $Ax = b$, allora $Av = b = Ap$. Quindi

$$\mathbb{O} = Av - Ap = A(v - p) \quad \text{e } \underbrace{v - p}_{=u} \in N(A)$$

Dunque $v = (v - p) + p = u + p \in L \quad \square$

Esempio 8.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Consideriamo $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 16 \end{array}\right) \overset{EG}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = U$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Ponendo le variabili libere uguali a 0: $x_3 = x_4 = 0$. *Troviamo una soluzione particolare:*

$$p = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque l'insieme di soluzioni di $Ax = b$ *è:*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

9 Autovalori e autovettori

$$f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$$

$$\exists A \in M_{m\times m}(\mathbb{K}) \quad \text{take che } f = f_A$$

Esempi:
Consideriamo un'applicazione lineare $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ per una matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esempio 9.1

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Esempio 9.2

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \beta v_2 \end{pmatrix}$$

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta v_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Esempio 9.3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$*,* $t \in \mathbb{R}$*, abbiamo che:*

$$f_A\left(\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3t - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}$, *abbiamo che:*

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6t-2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

9.1 Definizione

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto **autovalore** di A se esiste un vettore $\mathbb{O} \neq v \in \mathbb{K}^n$ tale che $Av = \lambda v$. In tal caso v è detto **autovettore** di A rispetto all'autovalore λ.
N.B: Se $v = \mathbb{O}$, si ha sempre:

$$Av = A\mathbb{O} = \mathbb{O} = \lambda\mathbb{O} = \lambda v \quad \text{per qualsiasi } \lambda$$

Quindi è essenziale considerare $v \neq 0$ nella definizione, cioè soltanto i vettori non nulli possono essere autovettori.

Esempio 9.4
$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ sono autovalori di $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Ogni vettore della forma* $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ *per $t \neq 0$ è autovettore di A rispetto a $\lambda_1 = 1$.*
Ogni vettore di forma $v_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ *per $t \neq 0$ è autovettore di A rispetto a $\lambda_2 = 2$.*

9.2 Osservazione

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}),\ v \neq 0$ in $\mathbb{K}^n$.

1. v è un autovettore di A rispetto a $\lambda \in \mathbb{K}$ se e solo se:

$$\underset{DEF}{\iff} Av = \lambda v \iff \mathbb{O} = Av - \lambda v =$$
$$= Av - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} v = \left(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) v =$$
$$= (A - \lambda I_n)\, v$$
$$\iff v \in N(A - \lambda I_n)$$
$$\iff v \text{ è soluzione del sistema lineare } (A - \lambda I_n)x = \mathbb{O}$$

2. $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A se e solo se:

$$\iff \text{il sistema lineare } (A - \lambda I_n)x = \mathbb{O} \text{ ha una soluzione diversa da } \mathbb{O}.$$
$$\underset{4.3}{\iff} (A - \lambda I_n) \text{ non è invertibile.}$$
$$\iff det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Esempio 9.5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{K}$$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-\lambda) - (1)(-2) = -3\lambda + \lambda^2 + 2 =$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

λ è autovalore di A se e solo se:

$$\iff (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \ o \ \lambda = 2$$

9.3 Definizione

Data una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, il polinomio di grado n:

$$p_A = det(A - \lambda I_n) \in \mathbb{K}[\lambda]$$

è detto **polinomio caratteristico**.

Esempio 9.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A = det(A - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 1$$

Quindi A non possiede autovalori reali, però A ha autovalori complessi $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$.

9.4 Teorema

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

1. Gli autovalori di A sono esattamente gli zeri del polinomio caratteristico p_A.
2. Gli autovettori relativi a un autovalore λ sono esattamente le soluzioni non nulle del sistema lineare $(A - \lambda I_n)x = \mathbb{O}$, ovvero gli elementi non nulli di $N(A - \lambda I_n)$. Chiamiamo $N(A - \lambda I_n)$ l'**autospazio** di λ e scriviamo $E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$.

9.5 Corollario

Ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ha al massimo n autovalori. Ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ possiede n autovalori in $\mathbb{C}$ (non necessariamente distinti) per il teorema fondamentale dell'algebra (1.3).

$$p_A = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

9.6 Definizione

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Si dice **molteplicità algebrica** di λ la molteplicità m_λ di λ come uno zero di p_A, cioè se:

   $$p_A = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

   allora la molteplicità algebrica di λ_i è m_i per ogni $1 \leq i \leq r$.

2. Si dice **molteplicità geometrica** di λ la dimensione di $E_A(\lambda)$.

Esempio 9.7

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

- ***Autovalori di*** A

  $$p_A = det(A - \lambda I_2) = det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 8 =$$

  $$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

  Gli autovalori di A *sono* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = 1$.

- ***Molteplicità algebrica***

  $$m_1 = 1, \quad m_2 = 1$$

- ***Molteplicità geometrica***

  $$E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_2) =$$

  $$= \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  $$E_A(3) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\right) = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  $$\alpha_1 = dim_{\mathbb{K}}(E_A(3)) = 2 - rk\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2 - rk \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$E_A(1) = N\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\alpha_2 = dim_{\mathbb{K}}(E_A(1)) = 2 - rk \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = 2 - rk \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

9.7 Osservazione

Siano $v_1, \ldots, v_r$ autovettori di una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ rispetto a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Supponiamo che $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ è linearmente indipendente.
NB: $U = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle \subseteq \mathbb{K}^n$ dove $\langle v_1, \ldots, v_r\rangle$ indica:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

è una base di U.

Sia $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r \in U$. Allora:

$$\begin{aligned} Av &= A(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r) = \\ &= \alpha_1(Av_1) + \ldots + \alpha_r(Av_r) = \\ &\underset{Av_i = \lambda_i v_i}{=} \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \ldots + \alpha_r(\lambda_r v_r) = \\ &= (\alpha_1\lambda_1)v_1 + \ldots + (\alpha_r\lambda_r)v_r \quad \in U \end{aligned}$$

Abbiamo che $f_A : U \to U$ è un applicazione lineare. Allora:

$$[f_A(v)]_{\mathcal{B}} = [Av]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_r\alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{B}}$$

Quindi: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix}$ è la matrice associata a f_A rispetto a $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio per il teorema 7.10. In particolare, se $n = r$, allora $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ e abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "C_\mathcal{B}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "C_\mathcal{B}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_D"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Che equivale a:

$$\begin{tikzcd}
v = \sum_{i=1}^n \alpha_1 v_1 \arrow[r] \arrow[d] & Av \arrow[d] \\
\left[v\right]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \arrow[r] & \underset{D[v]_\mathcal{B}}{[Av]_\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

quindi $f_D = C_\mathcal{B} f_A C_\mathcal{B}^{-1}$.
Abbiamo $C_\mathcal{B}^{-1} = f_B$ dove $(v_1, \dots, v_n) = B$ per 7.5 e $C_\mathcal{B} = (C_\mathcal{B}^{-1})^{-1} = f_B^{-1} = F_{B^{-1}}$. Allora $f_D = f_{B^{-1}} f_A f_B = f_{B^{-1}AB}$ e $D = B^{-1}AB$.

Esempio 9.8

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha autovalori:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

Gli autovettori rispetto a $\lambda_1 = 3$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \neq 0$$

Gli autovettori rispetto a $\lambda_2 = 1$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s, \quad s \neq 0$$

Quindi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^2$ *formata da autovettori di* A*.*

Dunque

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo $D = B^{-1}AB$*. Calcoliamo:*

$$(I_n|B^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.8 Proposizione

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $v_1, \ldots, v_r$ sono autovettori di A che corrispondono a r autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, allora $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è linearmente indipendente. In particolare, se abbiamo n autovalori distinti, allora esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori.

9.8.1 Dimostrazione (r = 2)

$\{v_1, v_2\}$ è linearmente indipendente $\iff$ v_1 **non** è combinazione lineare di v_2 (cioè v_1 non è multiplo di v_2). Mostriamo che non è possibile trovare $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha v_2 = v_1$.

Se $v_1 = \alpha v_2$, allora:

$$\lambda_1 v_1 = A v_1 = A(\alpha v_2) = \alpha(A v_2) = \alpha(\lambda_2 v_2)$$

Quindi:

$$\alpha\lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2 = \lambda_1(\alpha v_2) = \alpha\lambda_1 v_2$$

cioè:

$$\phi = \alpha\lambda_2 v_2 - \alpha\lambda_1 v_2 = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = \mathbb{O}$$

Perciò $v_2 \neq \mathbb{O}$ (definizione di autovettore) e $\lambda_2 \neq \lambda_1$ (quindi $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$), concludiamo che $\alpha = 0$. Ma è impossibile che $v_1 = \mathbb{O}$ perchè v_1 è autovettore. Dunque non esiste un tale scalare α. $\square$

Esempio 9.9

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Vogliamo calcolare:

1. ***Autovalori di*** A

   Calcoliamo $p_A = det(A - \lambda I_3)$ *il polinomio caratteristico della matrice* A. *Le radici di* p_A *sono gli autovalori di* A.

   $$p_A = det(A - \lambda I_3) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

   Utilizzo la regola di sarrus:

   $$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$det(A-\lambda I_3) = (-\lambda)^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Osserviamo che $\lambda_1 = 2$ *è una radice di* p_A*. Dividiamo per* $\lambda - 2$*:*

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow p_A = (\lambda-2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

Allora le radici di $-\lambda^2 - 2\lambda - 1$ *sono:*

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = -1$$

Quindi $p_A = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ *e gli autovalori sono:*

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

2. ***Molteplicità algebriche***

   Sono gli esponenti dei fattori del polinomio caratteristico.

   $$m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

3. ***Molteplicità geometriche e basi di*** $E_A(\lambda_i)$

   È la dimensione dell'autospazio $E_A(\lambda_i)$*.*

   $$d_1 = dim_{\mathbb{R}}(E_A(2)), \quad d_2 = dim_{\mathbb{R}}(E_A(-1))$$

   $$E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_3)$$
   $$E_A(2) = N\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) d_1 = 3 - rk\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$$
   $$E_A(-1) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) d_2 = 3 - rk\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

   $$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
   $$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(A-\lambda_1 I_3) = 2$ Quindi $d_1 = 3-2 = 1$

$$A-\lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$rk(A-\lambda_2 I_3) = 1$ Quindi $d_2 = 3-1 = 2$.

Calcoliamo una base per $E_A(2) = N\left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\right)$ usando il metodo (vedi capitolo 8) per il calcolo di basi di spazi nulli, possiamo calcolare una base di $E_A(2)$:

Risolviamo il sistema lineare che corrisponde alla forma ridotta di

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0\\ x_2 - x_3 = 0\\ x_3 = t\end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = t\\ x_2 = t\\ x_3 = t\end{cases}$$

$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ *è una base di* $N\left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\right)$

Calcoliamo una base $E_A(-1) = N\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_2 = t\\ x_3 = s\end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -t-s\\ x_2 = t\\ x_3 = s\end{cases}$$

$\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *è una base di* $N\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)$

Osserviamo che

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti, $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente se e solo se

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, cioè se e solo se $det(B) \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to rk(B) = 3$$

Quindi $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente. Siccome $\mathcal{B}$ contiene 3 vettori, allora $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Per 9.7, la matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice invertibile:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tali che:

$$D = B^{-1}AB \quad e \quad BDB^{-1} = \overbrace{BB^{-1}}^{I_3} A \overbrace{B^{-1}B}^{I_3} = A$$

9.9 Definizione

1. Due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sono **simili** se esiste una matrice invertibile $S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tale che:
$$B = S^{-1}AS$$
2. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è simile a una matrice diagonale, allora A è **diagonalizzabile** su $\mathbb{K}$.

10 Diagonalizzazione di matrici

10.1 Proposizione (Proprietà delle matrici simili)

Siano $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ due matrici simili, cioè esiste una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1}AS$.

1. $det(A) = det(B)$ e $P_A = P_B$

2. A e B hanno gli stessi autovalori.

3. $A^m = SB^mS^{-1}$

4. Se $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ è diagonale, allora $det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ e

$$A^m = S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1}$$

10.1.1 Dimostrazione

1. $B = S^{-1}AS$

$$det(B) = det(S^{-1}AS)$$
$$det(B) \overset{4.13}{=} det(S^{-1})det(A)det(S)$$
$$det(B) = det(S^{-1})det(S)det(A)$$
$$det(B) \overset{4.14}{=} \frac{1}{det(S)}det(S)det(A)$$
$$det(B) = det(A)$$

Analogamente si vede $P_A = P_B$

2. Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico. Quindi segue da 1. che gli autovalori coincidono.

3.

$$\begin{aligned} A = I_nAI_n &= (SS^{-1})A(SS^{-1}) \\ &= S(S^{-1}AS)S^{-1} \\ &= SBS^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^m &= \underbrace{(SBS^{-1})(SBS^{-1})\dots(SBS^{-1})(SBS^{-1})}_{m \text{ volte}} \\ &= SB\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}B\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}\dots\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}B\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}BS^{-1} \\ &= SB^mS^{-1} \end{aligned}$$

4. $det(A) \underset{1.}{=} det(B) \underset{4.10}{=} \lambda_1 \dots \lambda_n$

Osserviamo

$$B^m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \overset{2.}{=} SB^mS^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1}$$

□

Esempio 10.1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = SDS^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si vuole calcolare A^6

$$A^6 = SD^6S^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 64 & 64 & 64 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 66 & 63 & 63 \\ 63 & 66 & 63 \\ 63 & 63 & 66 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

10.2 Teorema

Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A.

10.2.1 Dimostrazione

$\Leftarrow$ Se esiste una base di autovettori, allora abbiamo dimostrato in 9.7 che A è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$ Supponiamo che $A = PDP^{-1}$ dove P è una matrice invertibile e D è una matrice diagonale.

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \quad \text{dove } v_1, \dots, v_n \text{ le colonne di } P$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora:

$$AP = (PDP^{-1})P = (PD)\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n} = PD$$

$$AP = A\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix}$$

$$AP = PD = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$$

Siccome $v_i \neq \mathbb{O}$ per ogni $1 \leq i \leq n$ perchè la matrice è invertibile. Dunque $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori di A rispetto agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Siccome P è invertibile, il rango di P è uguale a n (per il teorema delle matrici invertibili). Per 8.3, le colonne di P sono linearmente indipendenti. Per 6.12 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori, cioè $\mathcal{B}$ è una base. $\square$

Esempio 10.2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

A ha autovalori $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

10.3 Corollario

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ possiede n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

10.3.1 Dimostrazione

$10.2 + 9.8 + 6.12$ $\square$

10.4 Osservazione

Esempio 10.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, ma gli autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ *(la molteplicità algebrica di* λ_2 *è uguale a* $m_2 = 2$*)*

La condizione di 10.3 è sufficiente ma non è necessaria

Esempio 10.4

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_m = det(M - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Autovalore: $\lambda_1 = 1$. $m_1 = 2$.

$$E_M(\lambda_1) = E_M(1) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; v_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$d_1 = 1$$

Gli insiemi di autovettori linearmente indipendenti $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $t \neq 0$.

Quindi non esiste una base di $\mathbb{R}^2$ *formata da autovettori di* M *perchè ogni base di* $\mathbb{R}^2$ *contiene 2 vettori. Per 10.2, la matrice* M *non è diagonalizzabile.*

10.5 Lemma

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con molteplicità algebriche $m_1, \dots, m_r$ e molteplicità geometriche $d_1, \dots, d_r$.

1. $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$

2. $1 \leq d_i \leq m_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$.

10.5.1 Dimostrazione

1. $$P_A = \underbrace{det(A - \lambda I_n)}_{\text{grado } n} = \underbrace{(\lambda - \lambda_r)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}}_{\text{grado } m_1 + \ldots + m_r}$$

   Quindi

   $$n = m_1 + \ldots + m_r \quad \square$$

10.6 Teorema

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ molteplicità algebriche $m_1, \ldots, m_r$ e molteplicità geometriche $d_1, \ldots, d_r$.
I seguenti enunciati sono equivalenti:

1. A è diagonalizzabile.
2. $d_1 + \ldots + d_r = n$
3. $m_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$

10.6.1 Dimostrazione

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[rr, Rightarrow] & & (2) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (3) \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$