Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1 Introduzione **2**
1.1 Maggiorante 2
1.2 Minorante 2
1.3 Estremo superiore 2
1.4 Estremo inferiore 2

2 Limiti **2**
2.1 Osservazioni 3
2.2 Risultati utili per il calcolo dei limiti 4
2.3 Forme indeterminate 4
2.4 Esempi 4
2.4.1 Esempi di limiti irrazionali 5

1 Introduzione

1.1 Maggiorante

1.2 Minorante

1.3 Estremo superiore

1.4 Estremo inferiore

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \to +\infty$)

Definizione 2.1
Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 \; t.c. \; \forall x \subset A^a,$$

$$x \geq k \to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$)
La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .

[a] Il dominio della funzione

Esempio 2.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Sia dato $\epsilon > 0$ arbitrario. Definisco $k := \frac{1}{\epsilon}$.
sia dato $x > 0$ arbitrario, supponiamo $x \geq k$. Allora

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$).

Definizione 2.2
Si dice che
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
Se e solo se
$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \ t.c. \ \forall x \in A,$$
$$x \geq k \to f(x) \geq M$$
(Notazione alternativa: $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

Definizione 2.3
Si dice che
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
Se e solo se
$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \ t.c. \ \forall x \in A,$$
$$x \geq k \to f(x) \leq -M$$
(Notazione alternativa: $f(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$)

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limmite è soddisfatta (con $L = 0$).
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
Quindi è verificata la definizione di limite.

2.1 Osservazioni

Non è detto che un limite esista.

Esempio 2.2
$$\lim_{x \to +\infty} sin(x)$$
$$\lim_{x \to +\infty} cos(x)$$
La funzione non entra in un intevallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. La funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.2 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 1 (Algebra dei limiti) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti*

$$F := \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

esistano e siano ***finiti****. Allora*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

TODO

parzialmente *al caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:*

- $F + \infty = +\infty, \;\; F - \infty = -\infty \;\; \forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty, \;\; +\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty, \;\; \forall F \in \mathbb{R}, \; F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0 \;\; \forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty \;\; \forall F \in \mathbb{R}, \; F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.3 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succdere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}
- 0^0
- ∞^0

N.B.: in questo contesto, 0 , ∞ TODO

2.4 Esempi

Esempio 2.3

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\frac{1}{x})$$

$$\underbrace{x^2}_{+\infty}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\to+\infty$$

Per $x\to+\infty$ *(per il teorema dell'algebra dei limiti)*

Esempio 2.4

$$\lim_{x\to+\infty}x^2-x^3=+\infty-\infty$$

$$\underbrace{x^3}_{+\infty}(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-1)\to-\infty$$

Per $x\to+\infty$

Esempio 2.5
TODO

2.4.1 Esempi di limiti irrazionali