Esame 13/06/22

Quesito 1. Una confezione contiene 5 transistor guasti (non funzionano per niente), 10 difettosi (funzionano correttamente per qualche ora e poi si guastano) e 25 accettabili. Si sceglie un transistor a caso. Qual è la probabilità che sia accettabile se inizialmente funziona?

☒ $\frac{5}{7}$
☐ $\frac{40}{35}$
☐ $\frac{40}{25}$

Trans = 40

$P(G) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

$P(D) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$P(A) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

$P(F) = P(A) + P(D) = \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$

$P(F|A) = 1$

$P(A|F) = \frac{P(F|A) \cdot P(A)}{P(F)} = \frac{P(A)}{P(F)} = \frac{5}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{7} = \frac{5}{7}$

Quesito 2. Sia $X_1, X_2, ...X_n$ un campione estratto da una popolazione normale di media incognita μ e varianza nota σ^2, con n il numero di campioni estratti dalla popolazione e $\bar{x}$ la media campionaria. Il margine d'errore (valore critico $\pm$ standard error) dell'intervallo di confidenza bilaterale per la media μ può essere ridotto:

☒ aumentando la dimensione del campione n
☐ aumentando il livello di confidenza $(1 - \alpha)$
☐ diminuendo l'ampiezza del campione n

Quesito 3. Il signor Jones deve riporre 10 libri su uno scaffale. Di questi 4 sono di matematica, 3 di chimica, 2 di storia e 1 di lingue. Quanti modi di disporre i libri ci sono se si vuole che i libri di uno stesso argomento siano tutti adiacenti?

☒ 6912
☐ 288
☐ 1728

$4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 4! = 6912$

Quesito 4. Come si ottiene la varianza di una variabile aleatoria X, uniforme su un intervallo $[\alpha, \beta]$:

☒ $Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
☐ $Var(X) = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}$
☐ $Var(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Quesito 5. Siano assegnate due variabili aleatorie X e Y di media μ_x e μ_y rispettivamente. Quale di queste affermazioni relative alla loro covarianza è falsa.

☒ La loro covarianza, $Cov(X, Y)$, è (se esiste) la quantità: $Cov(X, Y) = Var(X)Var(Y)$
☐ La loro covarianza, $Cov(X, Y)$, è (se esiste) la quantità: $Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$
☐ La loro covarianza, $Cov(X, Y)$, è (se esiste) la quantità: $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

Quesito 6. Un'azienda produce dischetti per PC che sono difettosi con probabilità 0.01, indipendentemente l'uno dall'altro. Questi dischetti sono poi venduti in confezioni da 10 pezzi, con la garanzia di rimborso in caso vi sia più di un pezzo difettoso. Che percentuale delle confezioni viene ritornata? Definire X = numero di pezzi difettosi come variabile aleatoria binomiale.

☒ 0.0043

☐ 0.013

☐ 0.9957

$$1-(P(X=0)+P(X=1)) =$$

$$= 1-\left(\binom{10}{0}\cdot 0{,}01^{0}\cdot 0{,}99^{10} + \binom{10}{1}\, 0{,}01^{1}\cdot 0{,}99^{9}\right) =$$

$$= 1-(0{,}904 + 10\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{9}) = 0{,}0464$$

Quesito 7. Sia $X_1, X_2, ...X_n$ un campione aleatorio proveniente da una popolazione con media μ e varianza σ^2. La media campionaria ($\bar{X}$)

☒ se la popolazione è normale, ha distribuzione normale con varianza pari alla varianza della popolazione divisa per n

☐ ha valore atteso pari alla media della popolazione divisa per n

☐ se la popolazione è normale, ha distribuzione chi-quadrato con n-1 gradi di libertà

Quesito 8. Per trovare l'intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale, si usa la t di Student, anzichè la normale standardizzata quando:

☒ la varianza della popolazione non è nota

☐ la media della popolazione non è nota

☐ la distribuzione t di Student è più efficiente

Quesito 9. Il signor Perez è convinto che vi sia il 30% di probabilità che la sua azienda apra un nuovo ufficio a Phoenix. Nel caso ciò si verifichi, egli stima di avere un 60% di probabilità di assumere il ruolo dirigenziale nella nuova filiale. Che probabilità vi è che egli divenga il manager nel nuovo ufficio di Phoenix?

☒ 18%

☐ 60%

☐ 20%

$$0.3\cdot 0.6 = 0.18$$

Quesito 10. Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti, allora

☒ $E[XY] = E[X]E[Y]$

☐ $Cov(X,Y) \neq 0$

☐ $Var(X) = Var(X+Y)$

Esercizio 1 [5 punti]

Un'analisi di laboratorio di un campione di sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un falso positivo (esito positivo quando la malattia non è in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 0.5% della popolazione abbia la malattia. 1. Qual è la probabilità che una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test è positivo? 2. Qual è la probabilità che una persona scelta a caso che ottiene un risultato negativo al test sia di fatto malata?

Indichiamo rispettivamente con A ed B gli eventi: A = un soggetto estratto casualmente ha la malattia; B = il test è positivo.

$P(T|M) = 0.99 \qquad P(M) = 0.005$

$P(T|M^c) = 0.02$

1)
$$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|M^c) \cdot P(M^c) =$$
$$= 0,99 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995 = 0,025$$

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)\,P(M)}{P(T)} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0,025} = 0,198$$

2)
$$P(M|T^c) = \frac{P(T^c|M) \cdot P(M)}{P(T^c)} = \frac{1-0,99 \cdot 0,005}{1-0,025} = 0,00005$$

Esercizio 2 [4 punti]

L'altezza di un gruppo di 15 ragazzi di una classe è distribuita come una Normale con media = 163 e deviazione standard = 7.
Con queste informazioni a tua disposizione,
a) determinare l'intervallo centrato sulla media che contiene il 68% dei valori
b) determinare l'intervallo centrato sulla media che contiene il 95% dei valori
c) determinare l'intervallo centrato sulla media che contiene il 99.7% dei valori
d) noto il data set [159 157 166 176 161 156 161 160 161 166 162 159 160 154 157], calcolare la moda campionaria.

$\mu = 163 \qquad \sigma = 7$

a) $\mu \pm \sigma = (163-7,\ 163+7) = (156, 170)$

b) $\mu \pm 2\sigma = (163-14,\ 163+14) = (149,\ 177)$

c) $\mu \pm 3\sigma = (163-21,\ 163+21) = (142,\ 148)$

d) [154, 156, 157, 157, 159, 159, 160, 160, 161, 161, 161, 162, 166, 166, 176]

$M = 161$