

Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Numeri reali	3
1.2	Maggiorante	3
1.3	Minorante	3
1.4	Estremo superiore	4
1.5	Estremo inferiore	4
1.6	Massimo	4
1.7	Minimo	5
1.8	Funzioni	5
1.8.1	Dominio di una funzione	5
2	Limiti	6
2.1	Esempi	8
2.2	Osservazioni	10
2.3	Risultati utili per il calcolo dei limiti	11
2.4	Forme indeterminate	12
2.5	Esempi di calcolo di limiti	12
2.6	Limiti razionali	13
2.7	Limiti delle funzioni monotone	13
2.7.1	Variante	16
2.8	Limiti per $x \rightarrow -\infty$	17
2.9	Limiti per $x \rightarrow x_0$	17
2.10	Limiti unilateri	19
2.11	Limiti di funzioni continue	20
3	Notazione o piccolo di Landau	24
3.1	Proprietà	25
3.2	Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$	26
3.3	Funzioni continue	27
4	Derivate	27
4.0.1	Osservazioni	28
4.1	Proprietà delle funzioni differenziabili	29
4.2	Derivate delle funzioni inverse	33
5	Derivate successive	35
5.1	Funzioni convesse e concave	35
5.2	Proprietà delle funzioni convesse (o concave)	36
6	Teoremi	39
6.1	Teorema dei carabinieri	39
6.2	Teorema di Weierstrass	39
6.2.1	Osservazioni	40
6.2.2	Esempi	41
6.3	Teorema degli zeri	43
6.3.1	Esempi	43
6.4	Teorema di Fermat	45
6.4.1	Dimostrazione	45
6.5	Teorema di Lagrange	46

6.5.1	Dimostrazione	47
6.5.2	Dimostrazione del corollario	48
6.6	Teorema de l'Hopital	48
6.6.1	Esempi	49
7	Sviluppi di Taylor	50
7.1	Notazione	51
7.2	Polinomi di Taylor	51
7.3	Polinomi notevoli	52
8	Integrali	54
8.1	Osservazioni	54
8.2	Proprietà di base	56
8.3	Teorema fondamentale del calcolo integrale	57
8.3.1	Dimostrazione	57
8.3.2	Corollario	58
8.3.3	Dimostrazione del corollario	58
8.4	Esempi	58
8.5	Alcune primitive elementari	59
8.6	Osservazioni	59
8.6.1	Esempi	60
8.7	Integrazione delle funzioni razionali	62
8.7.1	Esempi	63
8.8	Integrazione per parti	66
8.8.1	Esempi	66
9	Serie	68
9.1	Osservazioni	69
9.1.1	Esempi importanti	70
9.2	Criteri per studiare il carattere di una serie	71
9.2.1	Serie a termini positivi	72
9.2.2	Criterio del confronto	72
9.2.3	Criterio del confronto asintotico	73
9.2.4	Corollario/Caso particolare	74
9.2.5	Criterio del rapporto	74
9.2.6	Serie a segni alterni	75
9.2.7	Criterio di Leibnitz	76

1 Introduzione

1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazionali; questo insieme viene indicato con il simbolo \mathbb{R}

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- **1^a proprietà (Eudosso-Archimede):** due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

Assioma: dati due numeri reali positivi a, b con $0 < a < b$ esiste un intero n tale che $na > b$.

- **2^a proprietà (Intervalli inscatolati):** date due serie di grandezze: a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n : la prima crescente (numeri della famiglia a) e la seconda decrescente (numeri della famiglia b), in cui ogni a_k è minore di b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k , allora esiste una grandezza c tale che per ogni k $a_k \leq c \leq b_k$.

1.2 Maggiorante

Definizione 1.1

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \geq x$.

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'intervallo tendesse verso $+\infty$ non si sarebbe alcun maggiorante poichè $+\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha maggiorante

1.3 Minorante

Definizione 1.2

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \leq x$.

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso $-\infty$ non ci sarebbe alcun minorante poichè $-\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha minorante

1.4 Estremo superiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato superiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo superiore di S se:

- y è un maggiorante di S
- y è il più piccolo maggiorante di S

Se S è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di S è $\sup(S) = +\infty$. Esempi:

- $I = (1, 10]$: $\sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$: $\sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato inferiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo inferiore di S se:

- y è un minorante di S
- y è il più grande minorante di S

Se S è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di S è $\inf(S) = -\infty$. Esempi:

- $I = [1, 8)$: $\inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$: $\inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

1.6 Massimo

Definizione 1.3

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il massimo di S se y è l'estremo superiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con $\max(S) = y$.

1.7 Minimo

Definizione 1.4

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il minimo di S se y è l'estremo inferiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con $\text{Min}(S) = y$.

Teorema 1 Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.

1.8 Funzioni

Definizione 1.5

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:

$$f : A \rightarrow B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di A è associato uno e uno solo elemento di B .

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } f : A \rightarrow B$$

Esempio di funzione corretta:

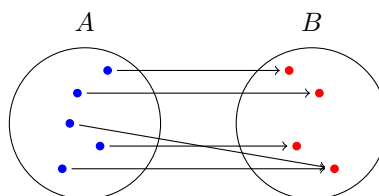


Figura 1: Esempio di funzione corretta

1.8.1 Dominio di una funzione

Definizione 1.6

Dato un insieme di partenza A gli elementi ai quali è applicata la funzione f sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \rightarrow x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \rightarrow +\infty$)

Definizione 2.1

Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A^a,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow L$ per $x \rightarrow +\infty$)

La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .

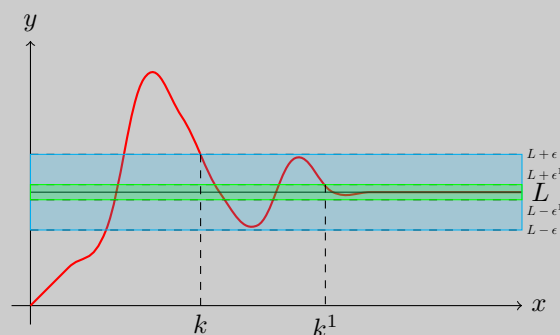


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di L e non uscirne più. Questo vale per ogni ϵ , quindi anche per ϵ^1 .

^aIl dominio della funzione

Definizione 2.2

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$)

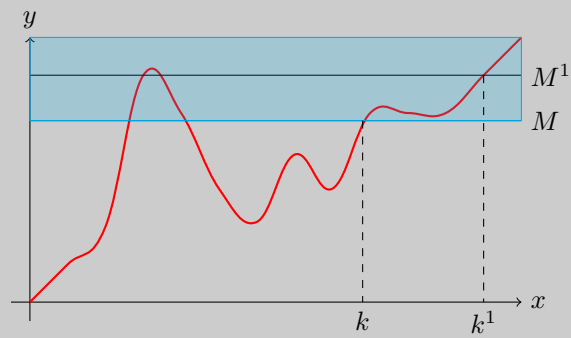


Figura 3: Definizione di limite a $+\infty$

Definizione 2.3

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$)

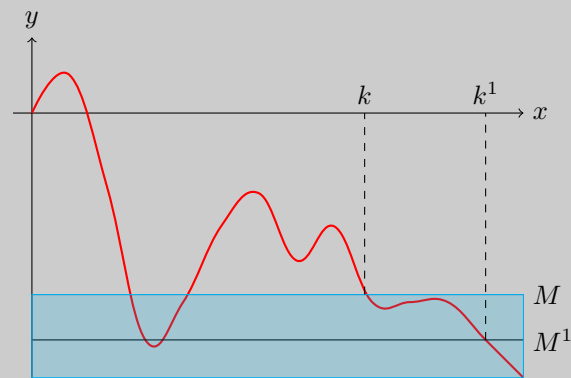


Figura 4: Definizione di limite a $-\infty$

2.1 Esempi**Esempio 2.1**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Dominio} = \mathbb{R}/\{0\}$$



Figura 5: Esempio di limite

*Sia dato $\epsilon > 0$ arbitrario. Definisco $k := \frac{1}{\epsilon}$.
Sia dato $x > 0$ arbitrario, supponiamo $x \geq k$. Allora*

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$).

Esempio 2.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$



Figura 6: Esempio di limite a $+\infty$

*Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
Quindi è verificata la definizione di limite.*

2.2 Osservazioni

Non è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$



Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intervallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.



Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 2 (Algebra dei limiti) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti

$$F := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

esistano e siano **finiti**. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende **parzialmente** nel caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:

- $F + \infty = +\infty$, $F - \infty = -\infty$ $\forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty$, $+\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty$, $\forall F \in \mathbb{R}$, $F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0$ $\forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty$ $\forall F \in \mathbb{R}$, $F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succedere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

N.B.: in questo contesto, 0 , ∞ e 1 sono da intendersi come abbreviazioni.

2.5 Esempi di calcolo di limiti

Esempio 2.3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$
$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \rightarrow +\infty$$

Per $x \rightarrow +\infty$ (per il teorema dell'algebra dei limiti)

Esempio 2.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x^3}_{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_0 - 1 \right) \rightarrow -\infty$$

Per $x \rightarrow +\infty$

Esempio 2.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x}_{+\infty} \left(\underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4 \right) \rightarrow +\infty$$

2.6 Limiti razionali

Se P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > q \\ 0 & \text{se } p < q \\ \text{coefficiente dominante di } P & \text{se } p = q \end{cases}$$

2.7 Limiti delle funzioni monotone

Teorema 3 (di monotonia) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona¹. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ esiste e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce (nondecrecente)} \\ \inf\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ decresce (noncrescente)} \end{cases}$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

f è strettamente crescente e limitata (l'immagine di f è un insieme limitato).

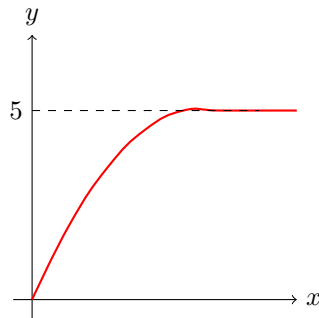


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e non limitata

¹Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

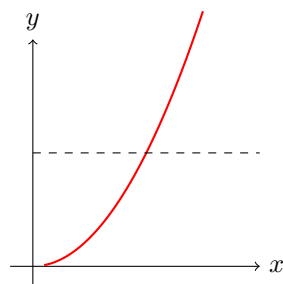


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

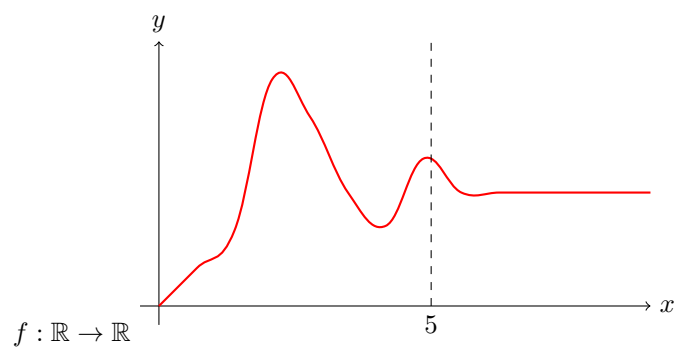


Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede per $x > 5$ si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da $x = 5$.

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Esempio 2.6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

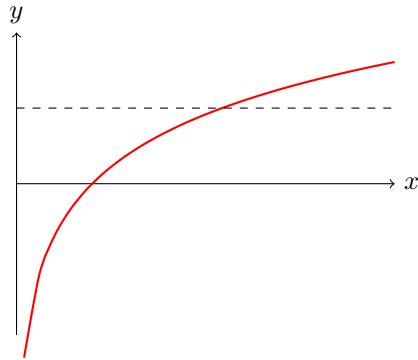


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

Per il teorema di monotonia:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) &= \sup\{\log(x) : x > 0\} \\
 &\geq \sup\{\log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \text{ scelto arbitrariamente} \\
 &= \sup\{n \cdot \log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty
 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a $+\infty$.

Esercizio 2.1

Dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

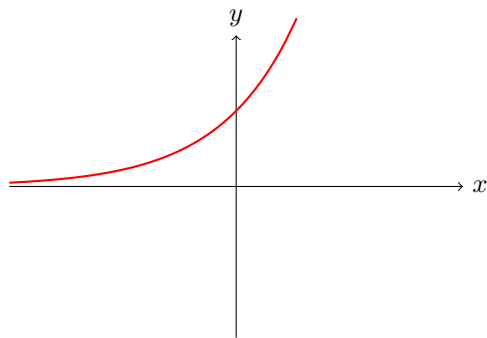


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

E similmente che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

2.7.1 Variante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

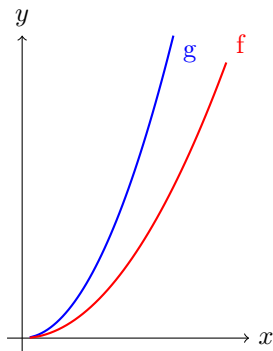


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

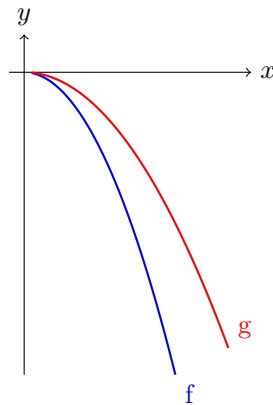


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative

2.8 Limiti per $x \rightarrow -\infty$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato inferiormente, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Diremo che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-t) = L$$

$$x = -t$$

$$\text{se } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{allora } t \rightarrow +\infty$$

2.9 Limiti per $x \rightarrow x_0$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Per definire il limite di f quando $x \rightarrow 0$, serve che f sia definita "vicino a x_0 ", in un senso opportuno. Noi supporremo, ad esempio, che il dominio A contenga almeno un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ oppure $(x_0, x_0 + \delta)$, con $\delta > 0$. **Non** è richiesto, invece, che f sia definita in x_0 .

Esempio 2.7

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

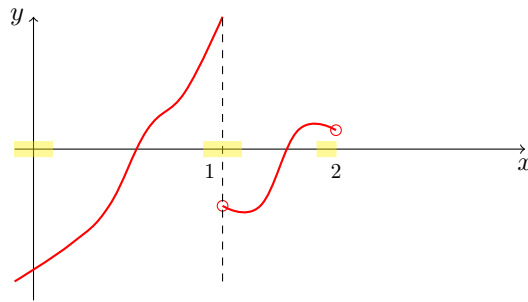


Figura 16: Limiti su una funzione non continua

Posso definire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Non è detto però che tali limiti esistano

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A, \\ x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0 \\ \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon \end{aligned}$$

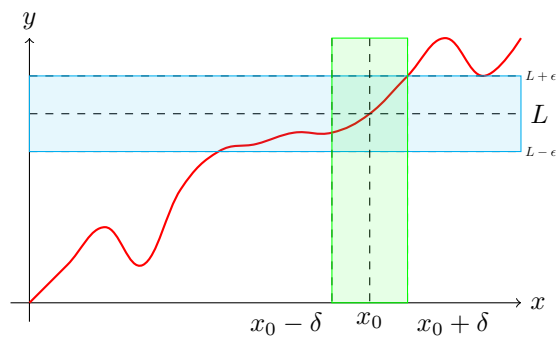


Figura 17: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \geq M$$

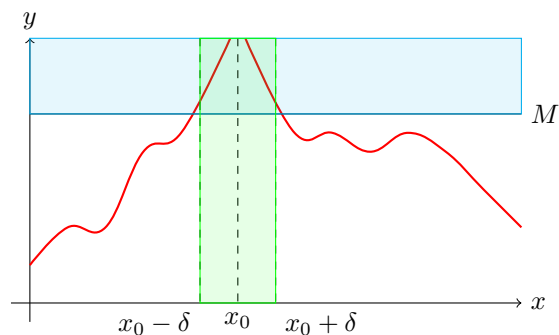


Figura 18: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \leq M$$

2.10 Limiti unilateri

Si possono anche dare le definizioni di limiti **unilateri**, da destra o da sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Esempio 2.8

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$



Figura 19: Limiti unilateri

2.11 Limiti di funzioni continue

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo oppure un'unione finita di intervalli.

Definizione 2.4

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diremo che f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è continua se e solo se f è continua in ogni punto del suo dominio $x_0 \in A$.

Esempio 2.9

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua, perchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

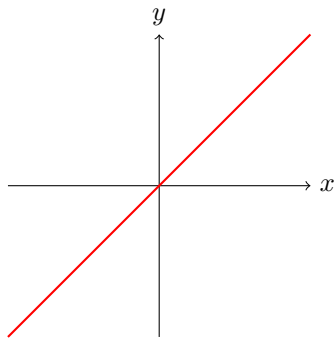


Figura 20: Esempio di funzione continua

Esempio 2.10

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \neq 2 \\ 31 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Non è continua perchè

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2)$$

Però f è continua in tutti gli $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = x_0$$



Figura 21: Esempio di funzione non continua

Esempio 2.11

$$h : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

Il dominio è un'unione di 2 intervalli:

$$(\mathbb{R}/0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

È una funzione continua



Figura 22: Esempio di funzione continua

Esempio 2.12

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione non è continua perché il limite a 0 non esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = \nexists$$

ma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |l(x)| = +\infty$$



Figura 23: Esempio di funzione non continua

Esempio 2.13

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Non è continua perchè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \neq m(0)$$



Figura 24: Esempio di funzione non continua

3 Notazione o piccolo di Landau

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (F.I. \frac{0}{0})$$

Considero $x > 0$

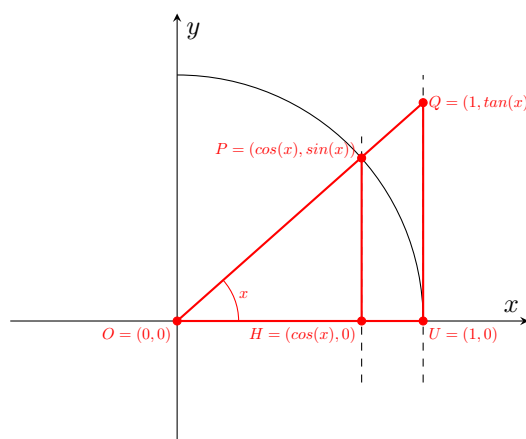


Figura 25: Grafico

Area del triangolo OHP :

- \leq area del settore OUP
- \leq area del triangolo OUQ

Area di $OHP = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$

Area di $OUQ = \frac{1}{2} \tan(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Area di OUP : area del disco unitario = ampiezza dell'angolo $P\hat{O}U$: ampiezza dell'angolo giro

da cui:

$$Area\ di\ OUP = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2}x$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Moltiplico per $\frac{2}{\sin(x)}$ (assumendo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$, così che $\sin(x) > 0$):

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

da cui:

$$\underbrace{\cos(x)}_1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_1$$

per $x \rightarrow 0^+$

Per il teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Il caso $x \rightarrow 0^-$ è analogo. \square

Se definiamo:

$$q(x) := \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

posso concludere che:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} = 1 + q(x) &\Leftrightarrow \sin(x) = x + xq(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} q(x) &= 0 \end{aligned}$$

Definizione 3.1

Notazione o piccolo di Landau.

Diremo che:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se e solo se esiste una funzione q tale che:

$$f(x) = g(x)q(x) \quad (\forall x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = 0$$

Ad esempio, possiamo dire che:

$$\sin(x) = x + \underbrace{o(x)}_{g(x)q(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

3.1 Proprietà

1. $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
2. $o(g(x)) = g(x)o(1)$ per $x \rightarrow x_0$
3. $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Infatti,

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

e quindi

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x) \underbrace{(q_1(x) + q_2(x))}_0 \text{ per } x \rightarrow x_0 = o(g(x))$$

4. Se $k \in \mathbb{R}$ è una costante,

$$ko(g(x)) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

5. $f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$

6. In generale, **non** vale

$$o(g(x)) - o(g(x)) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Infatti,

$$o(g(x)) - o(g(x)) = g(x)q_1(x) - g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

ma **non** è detto che $q_1(x) = q_2(x)$.

(Però è vero che $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$)

7. Allo stesso modo, **non** è detto che

$$\frac{o(g(x))}{o(g(x))} = 1 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(forma indeterminata)

È molto importante specificare $x \rightarrow x_0$.

Ad esempio:

Esempio 3.1

$$\begin{aligned} x^2 &= o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ x &= o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

3.2 Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (\text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante})$
- $\sin(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

3.3 Funzioni continue

Proprietà:

1. Se $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora sono continue anche

$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$

(quest'ultima definita su $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$)

2. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che $f(A) \subseteq B$, allora è continua anche la funzione composta

$$g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Esempio 3.2

Sono funzioni continue:

- tutti i polinomi
- tutte le funzioni razionali (quozienti di polinomi)
- $x \rightarrow x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ costante, laddove ben definito
- $\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \dots$
- valore assoluto, $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- funzioni composte, ad esempio:

$$h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) := \sin(x^3 + 5x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_2 : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(x) := \log(x^2 - 4) \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

4 Derivate

Sia A un intervallo aperto (del tipo $A = (a, b)$ oppure $A = (a, +\infty)$, $A = (-\infty, a)$, $A = \mathbb{R}$), oppure un'unione di intervalli aperti.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. **Retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$?



Preso $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, il coefficiente angolare (pendenza) della retta secante il grafico nei punti $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 4.1

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **differentiabile** (o derivabile) in $x_0 \in A$ se e solo se esiste ed è finito il limite:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite è detto **derivata** di f in x_0 . f si dice **differentiabile** (o derivabile) se e solo se è derivabile in ogni punto del suo dominio.

4.0.1 Osservazioni

1. La retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è definita come l'unica retta di pendenza $f'(x_0)$ passante per $(x_0, f(x_0))$. Essa ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. f è derivabile in x_0 se e solo se vale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

che equivale a dire:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Quindi, f è derivabile in x_0 se e solo se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

il che equivale (posto $x = x_0 + h$) a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Esempio 4.1

$$f = e^x, \quad x_0 = 0$$

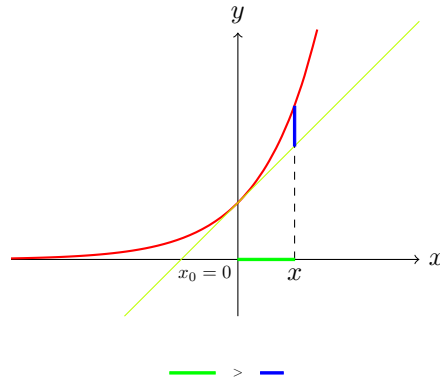


Figura 26: Esempio di funzione continua

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

dunque

$$e'^0 = 1$$

Che sarebbe il coefficiente di x nell'equazione $e^x = 1 + x + o(x)$

Si può anche scrivere (Notazione di Leibnitz):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Esempio 4.2

Una funzione costante è differenziabile con derivata

$$(5')(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 5}{h} = 0$$

4.1 Proprietà delle funzioni differenziabili

Dove non specificato, supporremo sempre che il dominio A sia un intervallo aperto o un'unione di intervalli aperti.

Proprietà: Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0) \square$$

Non vale il viceversa: f può essere continua senza essere differenziabile.

Esempio 4.3

$$f(x) := |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$



Figura 27: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Le derivate destra e sinistra in $x_0 = 0$ esistono e sono entrambe finite, ma sono **diverse** tra loro: f ha un **punto angoloso** in $x_0 = 0$.

Esempio 4.4

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

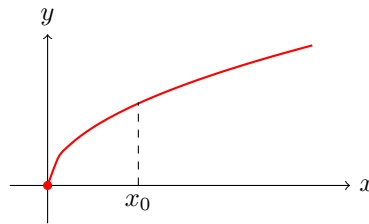


Figura 28: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Il limite (destro, in questo caso) del rapporto incrementale esiste, ma è infinito: g ha una **cuspid** o **punto a tangente verticale** in $x_0 = 0$.

Definizione 4.2

Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ locale di una funzione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$ per ogni:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

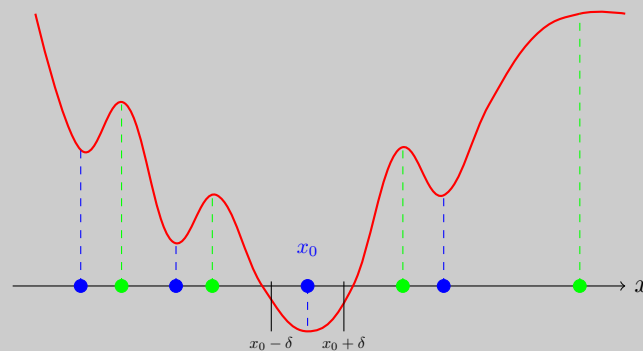


Figura 29: Teorema degli zeri

*I punti di massimo o minimo locale si chiamano anche **estremi locali**.*

4.2 Derivate delle funzioni inverse

Esempio 4.5

Consideriamo

$$\begin{aligned} \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

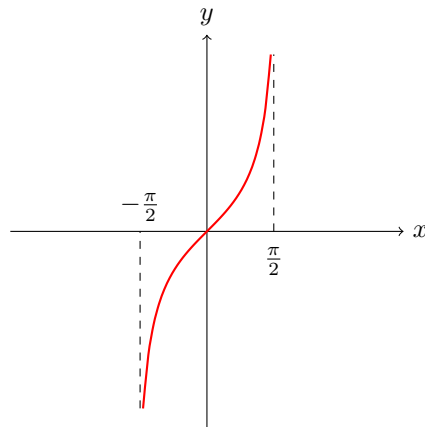


Figura 30: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La tangente è differenziabile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{(\sin)'(x)\cos(x) - (\cos)'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- La tangente è strettamente crescente, quindi iniettiva
- La tangente è suriettiva: per ogni $y \in \mathbb{R}$, esiste

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ t.c. } \tan(x) = y$$

Infatti la tangente è continua e

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$$

Quindi il teorema degli zeri implica che esiste $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $\tan(x) = y$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è biettiva, quindi per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste un unico numero reale, che indicheremo $\arctan(y)$, tale che

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \arctan(y) < \frac{\pi}{2} \\ \tan(\arctan(y)) = y \end{cases}$$

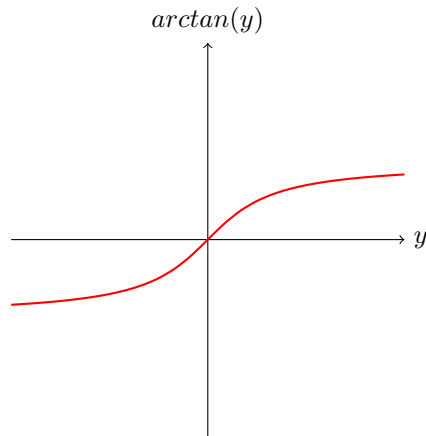


Figura 31: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La funzione \arctan è differenziabile? Se sì, chi è la sua derivata?

Supponiamo già di sapere che \arctan è differenziabile (è vero, ma andrebbe dimostrato)

$$\tan(\arctan(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Deriviamo ambo i membri:

$$\frac{d}{dy}(\tan(\arctan(y))) = 1$$

$$\frac{d}{dy}(\tan(\arctan(y))) = \tan'(\arctan(y)) \cdot (\arctan(y))'$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) = (1 + (\tan(\arctan(y))))^2 \cdot (\arctan(y))' \\ &= (1 + y^2) \cdot (\arctan(y))' \end{aligned}$$

Dunque:

$$(1 + y^2)\arctan'(y) = 1$$

e quindi:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Quanto fatto ha validità più generale:

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora esiste la funzione inversa:

$$g : f(I) \rightarrow I$$

tale che $f(g(y)) = y \forall y \in f(I)$, $g(f(x)) = x \forall x \in I$

Inoltre, g è differenziabile e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

per ogni $y \in f(I)$

Esercizio 4.1

Trovare le derivate delle funzioni:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

5 Derivate successive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, o un'unione di intervalli aperti. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Se (e solo se) f è differenziabile e f' è differenziabile, si dice che f è differenziabile due volte. Si scrive f'' per la derivata seconda di f (cioè la derivata di f').

Similmente si definiscono le funzioni differenziabili 3, 4, 5, ..., infinite volte. Notazione per le derivate successive:

$$f' = f^{(1)} = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

5.1 Funzioni convesse e concave

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ se e solo se la corda tra due punti qualsiasi del grafico di f sta tutta $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$ il grafico di f .

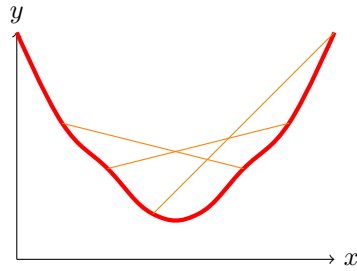


Figura 32: Funzione convessa

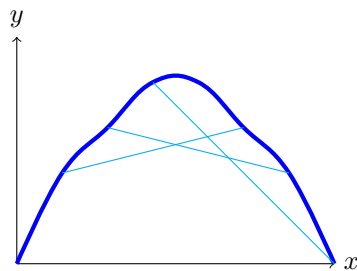


Figura 33: Funzione concava

In maniera equivalente, f è convessa se e solo se per ogni $x \in I$, ogni $\bar{x} \in I$ ed ogni $t \in [0, 1]$, vale

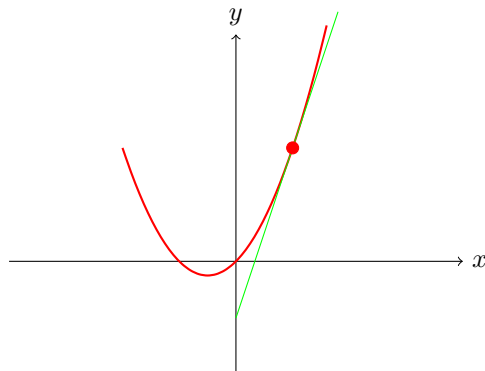
$$f(tx + (1 - t)\bar{x}) \leq tf(x) + (1 - t)f(\bar{x})$$

5.2 Proprietà delle funzioni convesse (o concave)

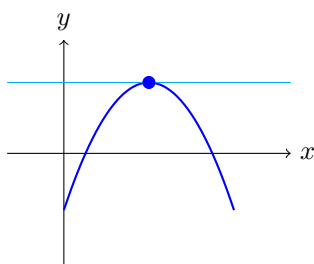
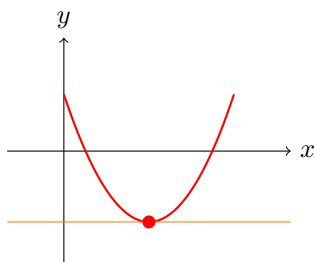
1. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte.

Se $\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$ in ogni punto di I , allora f è $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$

2. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile e $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ e $x_0 \in I$, allora la retta tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$ sta tutta $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$ il grafico di f .



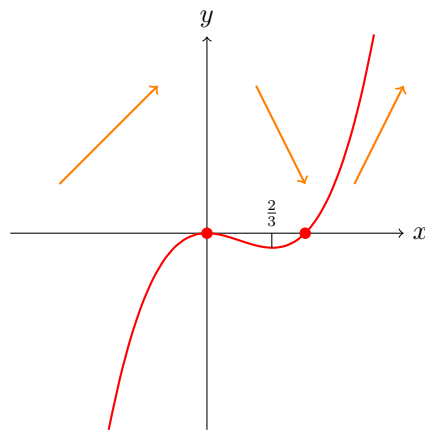
3. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e
- $$\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases} \quad \text{e } x_0 \in I \text{ un punto critico di } f \text{ (} f'(x_0) = 0 \text{), allora } x_0 \text{ è}$$
- un punto di $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$ di f .



4. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile due volte e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ e
- $$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{allora } x_0 \text{ è un punto di } \begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases} \quad \text{locale per } f.$$

Esempio 5.1

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\f(x) &= x^3 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\f'(x) &= 3x^2 - 2x \\f''(x) &= 6x - 2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = 1 \\f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ oppure } x = 0 \\f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = \frac{2}{3} \\f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \leq 0 \text{ oppure } x \geq \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(\frac{2}{3}, +\infty)$; f è decrescente in $(0, \frac{2}{3})$. In $x = 0$ ho un punto di massimo locale, in $x = \frac{2}{3}$ ho un punto di minimo locale.

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 2 \\f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\f''(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

f è convessa in $(\frac{1}{3}, +\infty)$ e concava in $(-\infty, \frac{1}{3})$; f ha $x = \frac{1}{3}$ è un punto di flesso di f .

6 Teoremi

6.1 Teorema dei carabinieri

Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$$

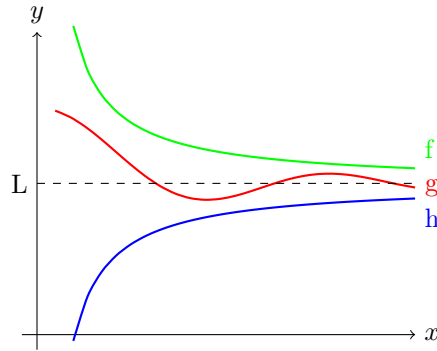


Figura 34: Teorema del confronto tra i limiti

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$$

Prendiamo dunque $\epsilon > 0$ arbitrario. Poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, sappiamo che esiste $k_f > 0$ t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_f \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

Allo stesso modo, poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$, sappiamo che esiste $k_h > 0$ t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_h \rightarrow L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

Definiamo $k := \max\{k_f, k_h\}$. Comunque preso $x \in A$, se $x \geq k$ allora vale che

$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

6.2 Teorema di Weiestrass

Definizione 6.1*Teorema di Weierstrass**Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.**Allora esistono*

$$x_{max}, x_{min} \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \forall x \in [a, b]$$

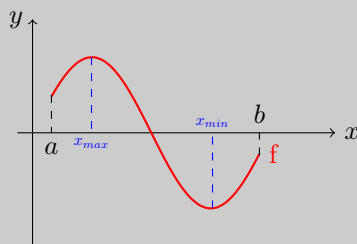


Figura 35: Teorema di Weierstrass

Ogni funzione continua, avrà quindi un punto di minimo e un punto di massimo

6.2.1 Osservazioni

- In particolare, f è limitata
- I punti x_{min}, x_{max} si dicono punti di minimo e di massimo **globali** di f
- I punti di minimo e massimo globali possono essere non unici e coincidere con gli estremi a, b dell'intervallo

Esempio 6.1

$$\cos : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

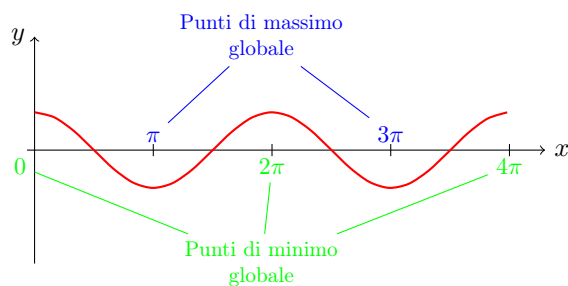


Figura 36: Teorema di Weierstrass

Se vengono meno le ipotesi del teorema, può venir meno la conclusione.

6.2.2 Esempi

Esempio 6.2

$$f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := x \quad \forall x \in (0, 1)$$

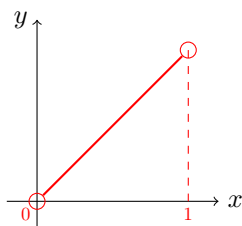


Figura 37: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma per come è definita **non** ammette nè massimo nè minimo perchè il **dominio non è chiuso**.*

Esempio 6.3

$$f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := x \sin(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

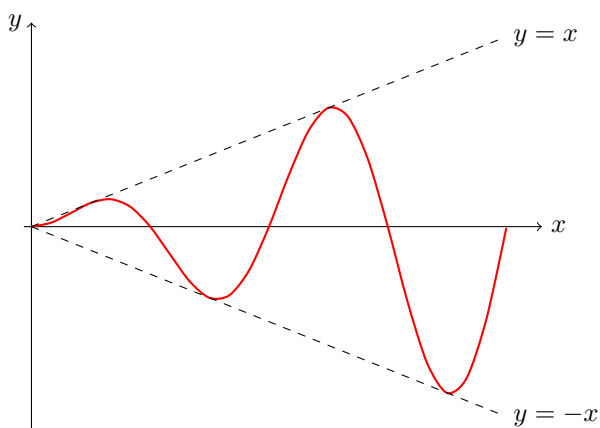


Figura 38: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma **non** possiede nè punti di massimo, nè punti di minimo perchè la funzione ha ampiezza sempre crescente.*

Esempio 6.4

$$f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_3(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

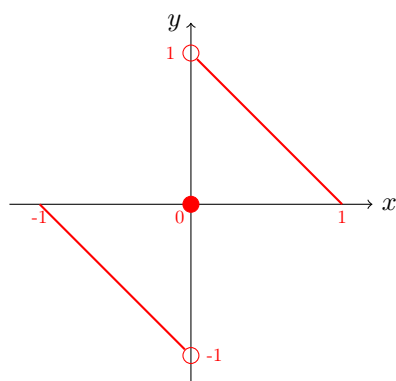


Figura 39: Esempio di funzione non continua

*Questa funzione **non** ammette punti di massimo e di minimo perchè non è continua.*

6.3 Teorema degli zeri

Definizione 6.2

Teorema degli zeri (o di Bolzano)

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

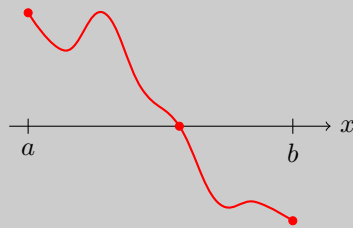


Figura 40: Teorema degli zeri

Se vengono meno le ipotesi, può venir meno la conclusione.

6.3.1 Esempi

Esempio 6.5

$$g_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

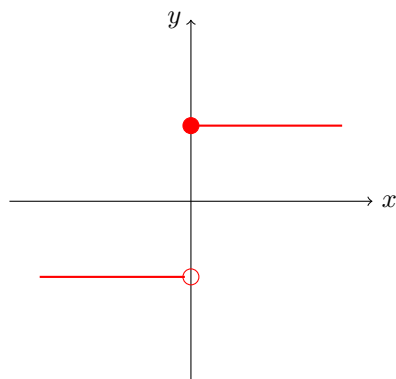


Figura 41: Esempio di funzione non continua

Questa funzione non è continua, quindi non si applica il teorema.

Esempio 6.6

$$g_2 : [-1, 1] / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in [-1, 1] / \{0\}$$

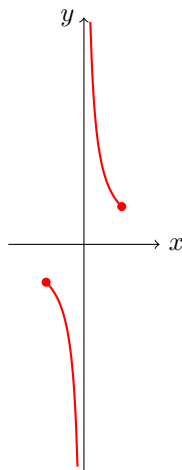


Figura 42: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma non si annulla mai perchè il dominio della funzione **non è un intervallo**, ma un intervallo privato di un valore, quindi non si applica il teorema.*

6.4 Teorema di Fermat

Teorema 5 (di Fermat) Sia $x_0 \in A$ un estremo locale di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è differenziabile in x_0 e se x_0 è **interno** ad A (cioè, f è definita in un intorno di x_0), allora:

$$f'(x_0) = 0$$

(I punti dove $f'(x_0) = 0$ si dicono **punti critici di f**)

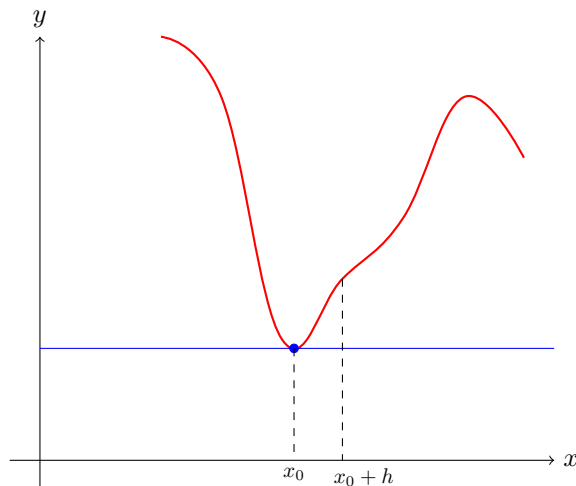


Figura 43: Teorema di Fermat

6.4.1 Dimostrazione

Supponiamo ad esempio x_0 minimo locale di f . Prendo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Se $|h|$ è abbastanza piccolo,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{perchè } x_0 \text{ è minimo locale}$$

Se $h > 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Se $h < 0$:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \leq 0$$

Poichè f è differenziabile in x_0 , so che esistono:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e i due limiti sono uguali tra loro e uguali a $f'(x_0)$. L'unica possibilità $f'(x_0) = 0$

6.5 Teorema di Lagrange

Definizione 6.3

Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e differenziabile in (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

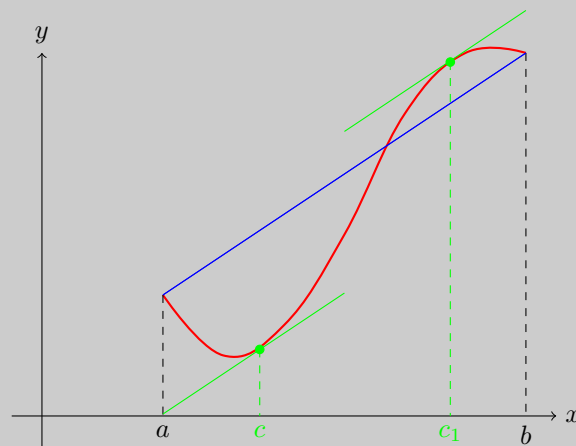


Figura 44: Teorema di Lagrange

Corollario: Sia I un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile se:

$$\begin{cases} f' = 0 \\ f' \geq 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di I , allora f è:

$$\begin{cases} \text{costante} \\ \text{non decrescente} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{non crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Qui è importante assumere che il dominio sia un intervallo

Esempio 6.7

$$f : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

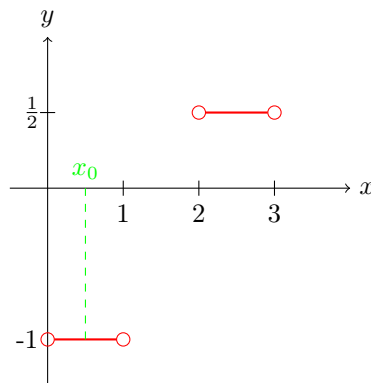


Figura 45: Teorema di Lagrange

f è differenziabile e ha $f' = 0$ ovunque, ma non è costante (il dominio non è un intervallo).

6.5.1 Dimostrazione

1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, differenziabile in (a, b) , tale che $f(a) = f(b)$.
Devo dimostrare che esiste

$$c \in (a, b) \text{ tale che } f'(c) = 0$$

Per il teorema di Weierstrass, f possiede un punto di massimo x_{max} e un punto di minimo x_{min} globali.

Se $x_{min} \in (a, b)$, allora scelgo $c := x_{min}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

Se $x_{max} \in (a, b)$, allora scelgo $c := x_{max}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

Altrimenti, ho $\{x_{max}, x_{min}\} = \{a, b\}$. Grazie all'ipotesi $f(a) = f(b)$, posso allora dedurre che f è costante, dunque $f' = 0$ in tutto $[a, b]$.

2. **Caso generale:** Definisco $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)}_{\text{Equazione della corda AB}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora g è continua, g è differenziabile, in (a, b) ,

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Dunque, per quanto dimostrato nel passo precedente, esiste $c \in (a, b)$ tale che

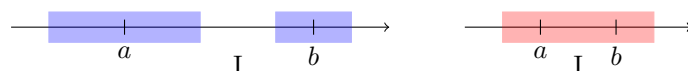
$$g'(c) = 0$$

perchè:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.5.2 Dimostrazione del corollario

Prendo $a \in I, b \in I$ qualsiasi; devo dimostrare che $f(a) = f(b)$. Se $a = b$, non c'è nulla da dimostrare. Suppongo ad esempio $a < b$ (se no li scambio). Allora f è definita su tutto $[a, b]$ (perchè I è un intervallo, dunque $[a, b] \subseteq I$).



Inoltre $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (differenziabile \Rightarrow continua), differenziabile in (a, b) e quindi, per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, per ipotesi, $f'(c) = 0$, da cioè $f(b) - f(a) = 0$, cioè $f(b) = f(a)$.

6.6 Teorema de l'Hopital

Si applica al calcolo dei limiti della forma $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, con f, g funzioni differenziabili, **purchè** il limite si presenti sotto la forma (indeterminata) $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Il teorema riduce il calcolo del limite dato al calcolo di:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{purchè esista})$$

Definizione 6.4

Siano $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Supponiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$$

Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$ e che il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esista. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si possono scrivere varianti per il calcolo dei limiti quando $x \rightarrow x_0$ con $x \in \mathbb{R}$ oppure $x \rightarrow -\infty$.

6.6.1 Esempi**Esempio 6.8**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Esempio 6.9

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Si può dimostrare che per ogni $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

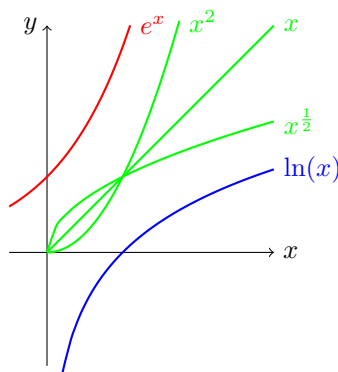


Figura 46: Confronto tra funzioni

Quando $x \rightarrow +\infty$, l'esponenziale cresce più velocemente di tutte le potenze (ad esponente positivo); il logaritmo più lentamente.

7 Sviluppi di Taylor

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) una funzione differenziabile $x_0 \in I$. Per definizione di differenziabilità:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente valutata in } x_0} + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

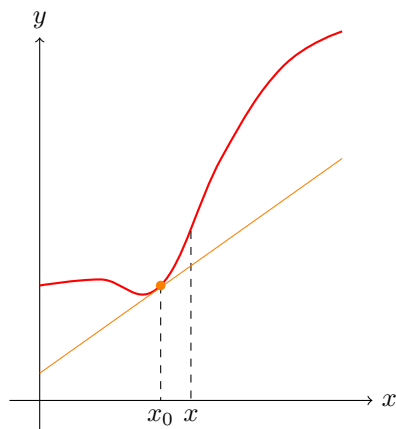


Figura 47: Sviluppo di Taylor

Se f è differenziabile due o più volte, si possono dare approssimazioni locali ancora migliori.

7.1 Notazione

Dato $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, si definisce il fattoriale di n come:

$$\begin{cases} 0! := 1 & \text{se } n = 0 \\ n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

7.2 Polinomi di Taylor

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile n volte, $x_0 \in I$. Si definisce il **Polinomio di Taylor** di f di centro x_0 ed ordine n come:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Quando $x_0 = 0$, si parla anche di polinomio di McLaurin.

Esempio 7.1

Calcolare il polinomio di Taylor di \exp di centro 0 e ordine 7.

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad n = 7$$

$$\exp(x) = e^x$$

$$\exp'(x) = \exp$$

$$\exp''(x) = \exp' = \exp$$

$$\exp^{(j)} = \exp \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\exp(0) = 1$$

Polinomio di Taylor:

$$P(x) = \sum_{j=0}^7 \frac{1}{j!} x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^7}{7!}$$

Teorema 6 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile n volte, P il suo polinomio di Taylor di centro x_0 ed ordine n . Allora:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

7.3 Polinomi notevoli

•

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

•

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

•

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

•

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

•

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1})$$

Esercizio 7.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2} \right)^n - 1 - \frac{1}{2n} \right) n^2$$

Chiamo a_n l'espressione da calcolare:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2} \right)^n - 1 - \frac{1}{2n} \right) n^2 \\ &= n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left(\exp \left(n \log \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Per la regola dell' piccolo $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &= n^2 \left(\exp \left(n \left(\frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{2n^2} \right) \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left(\exp \left(\frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Per la regola dell' piccolo $\exp(x) = 1 + x + o(x)$:

$$\begin{aligned} &= n^2 \left(1 + \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ n^2 \cdot o \left(\frac{1}{n} \right) &= o(n) = n \cdot o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Questa è una forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

$$a_n = n^2 \left(\exp \left(n \log \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right)$$

Applico $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, con $x = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left(\exp \left(n \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n^4} + o \left(\frac{1}{n^4} \right) \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left(\exp \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) - 1 - \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Applico $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x)$ con $x = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right)^2 - 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= n^2 \left(-\frac{1}{8n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) + \frac{1}{8n^2} + o \left(\frac{1}{2n^2} \right) \right) \\ &= n^2 \left(\frac{1}{8n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{8} + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

8 Integrali

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua (su un intervallo chiuso e limitato).

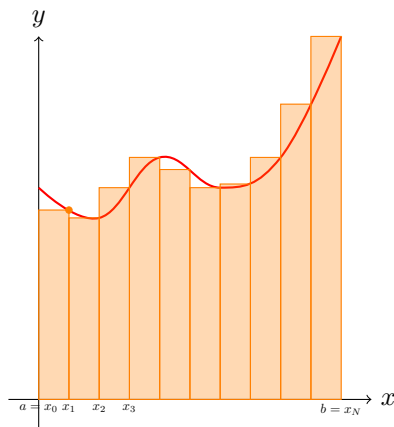


Figura 48: Somma di Riemann

Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Suddivido $[a, b]$ in N intervalli, delimitati da punti equidistanti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

(dove $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{N}(b - a)$ per ogni $j = 1, \dots, N$).

Considero la **somma di Riemann** associata a tale suddivisione di $[a, b]$

$$\sum_{j=1}^N f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, si dimostra che esiste ed è finito:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Tale limite si dice **integrale** (definito) di f .

8.1 Osservazioni

1. Si possono considerare varianti diverse, senza che il valore del limite cambi. Ad esempio:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \quad (\text{Figura 49})$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N (\max_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \quad (\text{Figura 50})$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N (\min_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \quad (\text{Figura 51})$$

(purchè f sia continua).

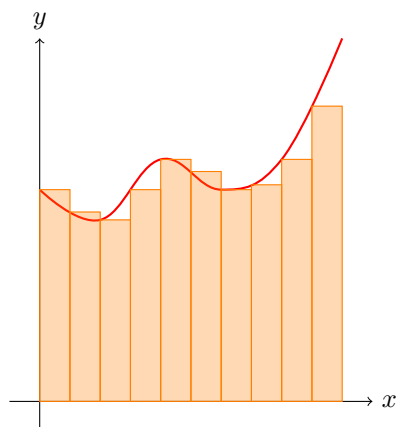


Figura 49: Variante 1

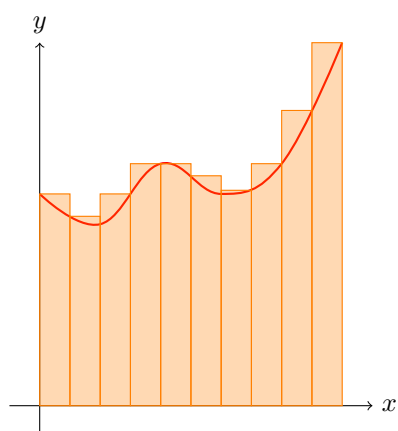


Figura 50: Variante 2

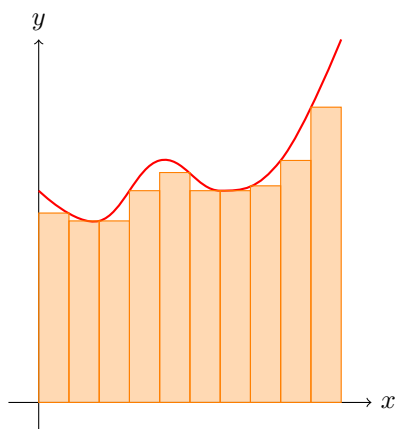


Figura 51: Variante 3

2. Se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)$ rappresenta l'area racchiusa tra il grafico di f e l'asse x .
3. In generale, $\int_a^b f(x)$ rappresenta l'area **con segno** racchiusa tra il grafico di f e l'asse x .

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area della regione gialla} - \text{area della regione azzurra}$$

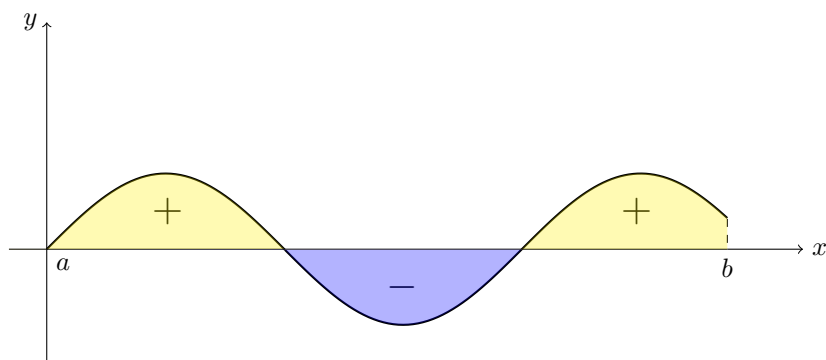


Figura 52: Confronto tra funzioni

8.2 Proprietà di base

Tutte queste proprietà si applicano a funzioni continue di segno qualsiasi.

•

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- Se k è costante

$$\int_a^b (k \cdot f(x)) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

ma in generale **non vale**

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

- Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

- Se $a < b < c$, allora:

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

8.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 7 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt \quad \forall x \in [a, b]$$

è differenziabile e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Una funzione differenziabile P tale che $P' = f$ si chiama una **primitiva** di f . L'insieme di tutte le primitive di f si chiama **integrale indefinito** di f e si denota con:

$$\int f(x) \, dx$$

8.3.1 Dimostrazione

Prendiamo un qualsiasi $x_0 \in [a, b]$. Sia:

$$R.I.^2(x) := \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{per } x \in [a, b]$$

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} R.I.(x) = f(x_0)$, cioè che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in [a, b],$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \quad x \neq x_0 \rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Prendiamo $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Poichè f è continua, sappiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e dunque esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$,

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \quad x \neq 0 \rightarrow \underbrace{f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon}_o$$

²**R.I.:** Rapporto Incrementale

Prendiamo ora $x \in [a, b]$ tale che $x_0 < x \leq x_0 + \delta$

$$\begin{aligned} R.I.(x) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned}$$

Grazie a \circ :

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dt \leq R.I.(x) \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dt$$

Se c è costante:

$$\int_{x_0}^x c dt = c(x - x_0) \quad (\text{area di un rettangolo})$$

e quindi:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Stesso ragionamento se $x_0 - \delta \leq x < x_0$. \square

8.3.2 Corollario

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $P' = f$. Allora:

$$\int_a^b f(x) dx = P(b) - P(a)$$

8.3.3 Dimostrazione del corollario

Come prima, sia $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ per $x \in [a, b]$. Allora:

$$(F - P)' = F' - P' = f - f = 0$$

Quindi $F - P = C$, con $C \in \mathbb{R}$ costante. Inoltre,

$$C = F(a) - P(a) = \int_a^a f(t) dt - P(a) = 0 - P(a) = -P(a)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) = F(b) - P(b) + P(b) \\ &= C + P(b) = -P(a) + P(b) \end{aligned}$$

8.4 Esempi

Esempio 8.1

$$\int 0 dx = C \quad \text{dove } C \in \mathbb{R} \text{ è una generica costante}$$

Esempio 8.2

$$\int 1 \, dx = x + C$$

Esempio 8.3

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

8.5 Alcune primitive elementari

1.

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

2.

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

3.

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

4.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante e } \alpha \neq -1$$

5.

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C$$

6.

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

8.6 Osservazioni

Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce:

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0$$

$$\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$$

Questa notazione è utile soprattutto quando si integra per sostituzione.

8.6.1 Esempi

Esempio 8.4

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3) dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int (x^6 - 3x^2 + 3) dx &= \int x^6 dx - 3 \int x^2 dx + \int 3 dx = \\ &= \frac{x^7}{7} - \cancel{3} \frac{x^3}{\cancel{3}} + 3x + C \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3) dx = \left[\frac{x^7}{7} - x^3 + 3x \right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{7} - 1 + 3}_{P(1)} - \underbrace{(0 - 0 + 0)}_{P(0)} = \frac{15}{7}$$

Esempio 8.5

$$\int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{x^2 + 1} + 5x \right) dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 - \frac{3}{x^2 + 1} + 5x \right) dx &= \int x^5 dx - 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 5 \int x dx = \\ &= \frac{x^6}{6} - 3 \arctan(x) + \frac{5x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{x^2 + 1} + 5x \right) dx &= \left[\frac{x^6}{6} - 3 \arctan(x) + \frac{5x^2}{2} \right]_0^1 = \\ \frac{1}{6} - 3 \arctan(1) + \frac{5}{2} - (0 - 0 + 0) &= \frac{1}{6} - 3 \arctan(1) + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Esempio 8.6

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} \right) dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} \right) dx = \int x^{-3} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} \right) dx = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{16}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{24}$$

Esempio 8.7

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

Integrazione per sostituzione:

$$y = 5x + 7$$

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}(5x+7) \cdot dx = 5 dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5x+7}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{y}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{5} dy = \frac{1}{5} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{5} y^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{y} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x+7} + C \end{aligned}$$

Esempio 8.8

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$$

Sostituiamo $[y = x^2]$ quindi $dy = 2x \cdot dx$ (anche gli estremi di integrazione)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(y) dy &= \frac{1}{2} [-\cos(y)]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{1}{2} (+1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

Esempio 8.9

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$ quindi $dy = -\frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y) dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(y) dy = [\sin(y)]_{y=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

8.7 Integrazione delle funzioni razionali

Esiste, di fatto, un algoritmo che permette di calcolare gli integrali delle funzioni razionali (quozienti di polinomi). Lo schema generale è:

1. ricondursi al caso in cui il grado del **denominatore** sia maggiore del grado del **numeratore**;
2. scomporre il denominatore;
3. scrivere l'integranda come somma di funzioni più semplici;
4. integrare ogni frazione singolarmente.

Si ricorda che un polinomio di grado due $P(x) = ax^2 + bx + c$, si scompone come:

$$P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$$

dove:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sono gli zeri di P . (Purchè $b^2 - 4ac \geq 0$)

8.7.1 Esempi

Esempio 8.10

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Ho $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Cerco di scrivere:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

Con A, B costanti da determinare

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$$

Per far sì che questa sia uguale a $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ devo imporre delle condizioni su A e B

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \int \left(\frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} \right) dx = \\ &= - \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x - 2} dx = -\log|x - 1| + \log|x - 2| + C \end{aligned}$$

Esempio 8.11

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Verifico che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{x^2 \overset{\text{sommo e sottraggo}}{-3x + 2 + 3x - 2} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

Scompongo il denominatore: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ e voglio trovare A e B costanti tali che:

$$\frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$$

Devo imporre:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 - A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} \right) dx = \\ &= \int 1 dx + \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{2}{x - 2} dx = x - \log |x - 1| + 2 \log |x - 2| + C \end{aligned}$$

Esempio 8.12

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$x^2 + 4x + 5$ non ha radici reali! Uso:

$$\int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(y) + C$$

Devo ricondurre a scrivere $x^2 + 4x + 5$ come **somma di quadrati**:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = (x + 2)^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx =$$

Sostituisco $y = x + 2$ quindi $dy = dx$ e:

$$= \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan(y) + C = \arctan(x + 2) + C$$

Esempio 8.13

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} = \frac{x^2 + 4x + 5 - 4x - 5}{x^2 + 4x + 5} = 1 - \frac{4x + 5}{x^2 + 4x + 5}$$

Denominatore privo di radici reali, quindi cerco di utilizzare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

Osservo:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 5) = 2x + 4$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} &= 1 - \frac{2 \cdot 2x + 2 \cdot 4 + -2 \cdot 4 + 5}{x^2 + 4x + 5} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \frac{3}{x^2 + 4x + 5} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \frac{3}{(x + 2)^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 5} dx = x - 2 \log(x^2 + 4x + 5) - 3 \arctan(x + 2) + C$$

8.8 Integrazione per parti

Definizione 8.1 (Proposizione)

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Allora, vale:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$
$$\int f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)] - \int f'(x) g(x) dx$$

8.8.1 Esempi

Esempio 8.14

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx$$
$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Esempio 8.15

$$\int \log(x) dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\log(x)}_{f(x)} dx =$$
$$= x \log(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x \log(x) - x + C$$

Esempio 8.16

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(x) \, dx &= \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx = \\
&= -[\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx = \\
&= -0 + 0 + \int_0^\pi \cos^2(x) \, dx = \\
&= \int_0^\pi (1 - \sin^2(x)) \, dx = \int_0^\pi 1 \, dx - \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx \\
&= 1 \cdot (\pi - 0) - \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato:

$$\left[A = \pi - A \Leftrightarrow 2A = \pi \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \right]$$

Quindi:

$$\int_0^\pi \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 8.17

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, dx$$

La funzione integranda è ben definita e continua su $[0, 2]$. Cambio di variabile:

$$y = 2x + 1$$

$$dy = \frac{d}{dx}(2x+1) \, dx = 2 \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{\log(y)}{y^2} \, dy = \frac{1}{2} \int_1^5 y^{-2} \cdot \log(y) \, dy = \\
&= \frac{1}{2} [-y^{-1} \cdot \log(y)]_{y=1}^5 + \int_1^5 y^{-2} \, dy = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{\log(y)}{y} \right]_{y=1}^5 + [-y^{-1}]_{y=1}^5 = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{\log(5)}{5} + \frac{\log(1)}{1} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\log(5)}{5} \right) - \frac{4}{5} = \\
&= -\frac{\log(5)}{10} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{10} \log(5) - \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

9 Serie

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali (cioè, una funzione $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$). Vogliamo dare un senso preciso alla "somma infinita"

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Definizione 9.1

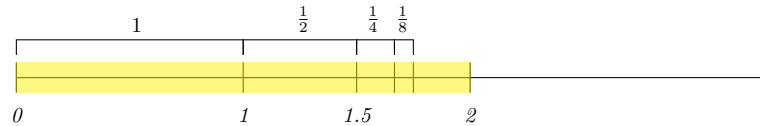
*Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, si definisce la somma della **serie** di termine generale $\{a_n\}$ come:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n$$

Si dice che la serie $\begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \\ \text{oscilla} \end{cases}$ *se il limite* $\begin{cases} \text{esiste finito} \\ \text{esiste infinito} \\ \text{non esiste} \end{cases}$

Esempio 9.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N 2^{-n}$$



Considero prima:

$$\sum_{n=0}^N 2^{-n} \text{ con } N \in \mathbb{N} \text{ qualsiasi.}$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^N (1/2)^n \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^N} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \end{aligned}$$

Somma telescopica:

$$= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{8}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2^N}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{8}} + \dots - \frac{1}{2^{N+1}} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}$$

Dunque:

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

9.1 Osservazioni

- Possiamo anche definire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n$$

$$\sum_{n=57}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=57}^N a_n \dots$$

- Nessuno garantisce che la somma della serie esista. Ad esempio, sia:

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

La serie **Oscilla**. La somma delle serie **non esiste**, infatti:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } N \text{ pari} \\ 0 & \text{se } N \text{ dispari} \end{cases}$$

- Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, allora necessariamente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Infatti, sia $S := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$a_N = \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

(perchè se $f(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$ allora $f(N-1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$). **Non vale** il viceversa: potrebbe benissimo capitare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, però $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converga.

9.1.1 Esempi importanti

1. **Serie geometrica** (di ragione $x \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

Essa converge se e solo se $-1 < x < 1$ e in tal caso si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Conseguenza: $0, \bar{9} = 1$

Dimostrazione: $0, \bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots =$

$$\begin{aligned} &= 9 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 1 \right) = \\ &= 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \cdot \frac{10}{9} - 9 = 10 - 9 = 1 \end{aligned}$$

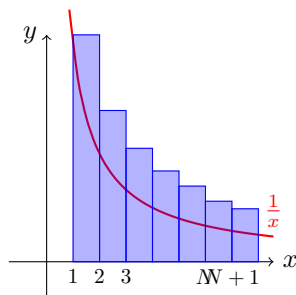
2. **Serie esponenziale:**

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

3. **Serie armonica:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Dimostrazione:



Area dell'unione dei rettangoli $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$
 Area sottesa al grafico $y = \frac{1}{x}$ per $1 \leq x \leq N+1 =$

$$= \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \log(N+1)$$

Dunque:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \log(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

Osservazione:

Facendo stime più precise, si potrebbe dimostrare che vale:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log(N+1) + \gamma + o(1) \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

dove γ è un opportuno numero reale, chiamato la costante di **Eulero-Mascheroni** ($\gamma \approx 0.577\dots$).

4. **Serie armonica generalizzata:** Sia $s \in \mathbb{R}$ un parametro. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Converge se $s > 1$ e diverge se $s \leq 1$ (o oscilla)

9.2 Criteri per studiare il carattere di una serie

Per carattere si intende:

- Convergente
- Divergente
- Oscillante

1. **Serie a termini positivi:** criteri del $\begin{cases} \text{confronto} \\ \text{confronto asintotico} \\ \text{rapporto} \end{cases}$

2. **Serie a segno alterno:** criterio di Leibniz

3. **Serie generali:** convergenza assoluta

9.2.1 Serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \text{con } a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Osservazioni generali:

1. Le serie a termini positivi convergono o divergono, ma **non** oscillano mai, perchè

$$a_0 \leq a_0 + a_1 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \leq \dots$$

Siccome $a_n \geq 0 \forall n$, la successione delle somme parziali è non decrescente, quindi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{esiste per monotonia}$$

2. I criteri qui di seguito si applicano anche alle serie i cui termini sono positivi "da un certo punto in poi" (cioè, $a_n \geq 0$ per ogni n abbastanza grande, maggiore o uguale di un certo n_0). Infatti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n}_{\text{Somma finita}} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

Il carattere della prima serie dipende soltanto dal carattere della serie con somma infinita. Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge.

9.2.2 Criterio del confronto

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni di numeri reali tali che:

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge e vale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

Esempio 9.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge (serie armonica generalizzata)}$$

Per confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ converge.

Esempio 9.3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n}, \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(2)}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{n} = (\ln(2)) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Per confronto $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

9.2.3 Criterio del confronto asintotico

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni di numeri reali tali che $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che il limite

$$\Lambda := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

esista e sia $0 < \Lambda < +\infty$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge se e solo se } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge.}$$

Esempio 9.4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{7n^3 + n \sin(n)}$$

È una serie a termini positivi, perchè $5n \geq 0$, $|n \sin(n)| \leq |n|$, $7n^3 + n \sin(n) \geq 7n^3 - n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sia:

$$a_n := \frac{5n}{7n^3 + n \sin(n)}, \quad b_n := \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n \cdot n^2}{7n^3 + n \sin(n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{7 + \frac{\sin(n)}{n^2}} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Per confronto asintotico

9.2.4 Corollario/Caso particolare

P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q , allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ converge se e solo se } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{n^q} \text{ converge}$$

Esempio 9.5

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{23} + 42n^2 + 3}{n^{25} - 31n^2 + 23n - 3}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{23}}{n^{25}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

La serie iniziale converge per confronto asintotico.

9.2.5 Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che il limite

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + 1}{a_n}$$

esista, finito o infinito.

- Se $L < 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $L > 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.
- Se $L = 1$, allora non possiamo concludere nulla.

Esempio 9.6

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 1}{n!}$$

Serie a termini > 0 , $a_n := \frac{n^3+1}{n!}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3 + 1} = \frac{(n+1)^3 + 1}{n^3 + 1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cancel{n^3}((1 + \frac{1}{n})^3 + \frac{1}{n^3})}{\cancel{n^3}(1 + \frac{1}{n^3})} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &\rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}$ converge.

Esempio 9.7

Per ogni $x \in (0, +\infty)$ dato, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.

Serie a termini > 0 . Sia:

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{x^n}{n!} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1 \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.

9.2.6 Serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \dots$$

con $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

è una serie a segni alterni,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin(n) = -\sin(1) + \sin(2) - \sin(3) + \sin(4) - \dots$$

Non è una serie a segni alterni. Invece lo è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n |\sin(n)| = -|\sin(1)| + |\sin(2)| - |\sin(3)| + |\sin(4)| - \dots$$

9.2.7 Criterio di Leibnitz

Sia $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, tali che:

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

(successione decrescente)

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge

Esempio 9.8

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Sia $b_n := \frac{1}{n}$. Valgono le ipotesi del criterio di Leibnitz:

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$
- $b_{n+1} \leq b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \quad \checkmark$

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$