

# Esercitazione Amos

## Elettrostatico-

$Q: [C]$  Carica

$\sigma: \left[ \frac{C}{m^2} \right]$  Distribuz. di carica

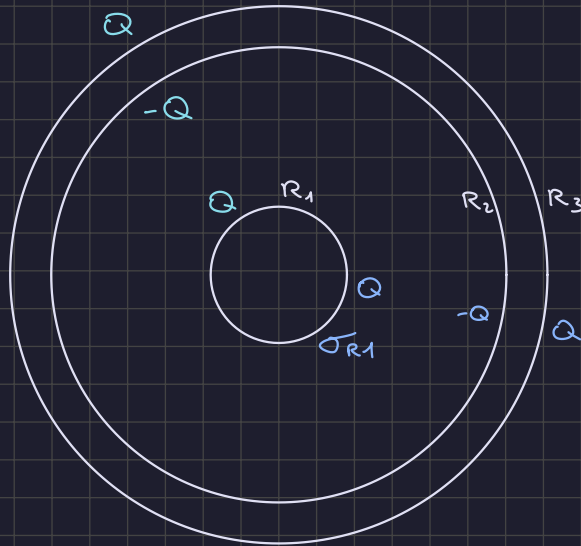
$$Q = +10^{-10} C$$

oppure

$$\sigma_{R_1} = 3 \cdot 10^{-19} \frac{C}{m^2}$$

$$S = 4\pi R_1^2 m^2$$

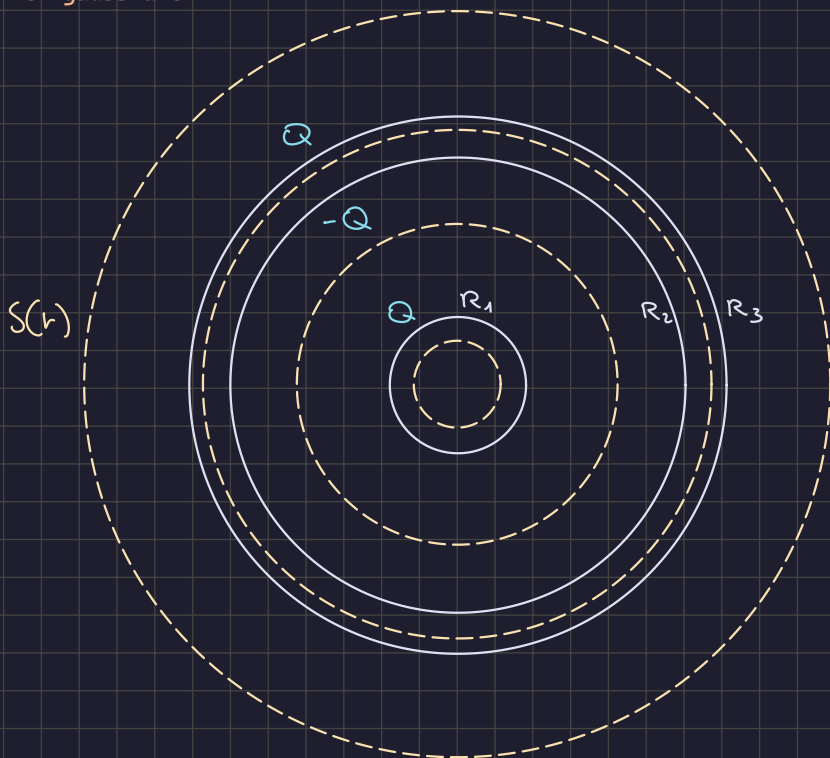
$$Q = \sigma \cdot S = 3 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi R_1^2 \frac{C}{m^2 m^2}$$



Calcolare il campo elettrico con il teorema di Gauss

$$\text{Th Gauss: } \oint_{\text{sup}} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{\text{sup}} \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Disegna le superfici gaussiane



Scelgo superfici gaussiane sferiche perchè rendono il campo costante:

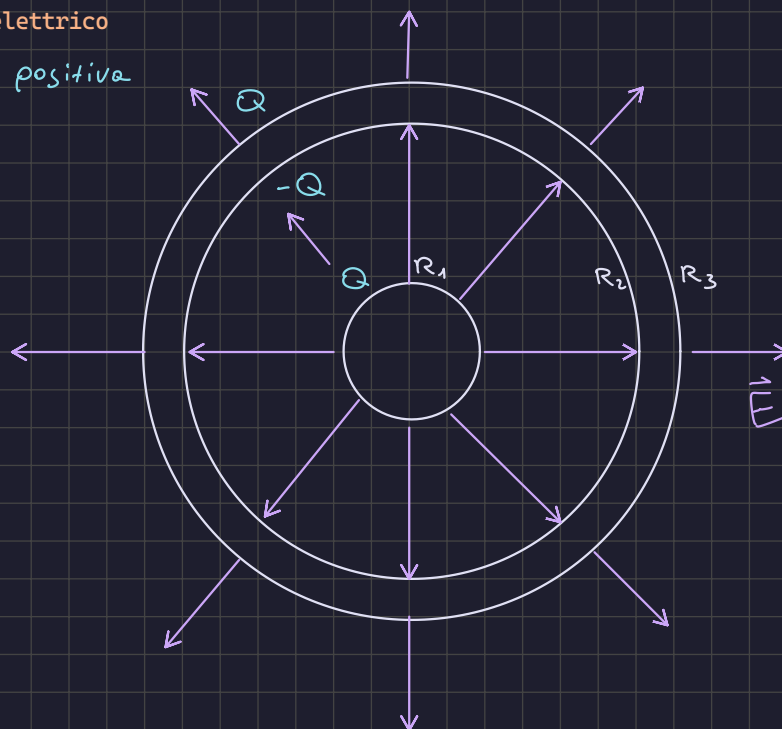
$$\oint_{S(r)} \vec{E} d\vec{S} = E(r) \cdot \oint_{S(r)} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

↓

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \left[ \frac{V}{m} \right]$$

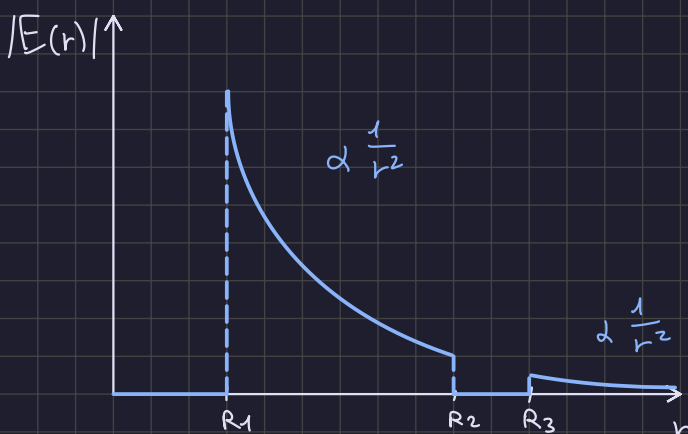
Disegnare il campo elettrico

Consideriamo  $Q$  positiva



Il campo elettrico è radiale uscente. (Se la carica fosse stata negativa sarebbe stato radiale entrante)

Disegnare l'andamento del campo elettrico



$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & \text{se } R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R_3 \end{cases} \quad \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

Calcolare il potenziale elettrico

Il potenziale è il lavoro che si compie spostando una carica di prova da una posizione di riferimento ad una posizione  $r'$

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Considero come punto di riferimento  $r_0$  l'infinito  $\rightarrow$

$$r_0 = \infty$$

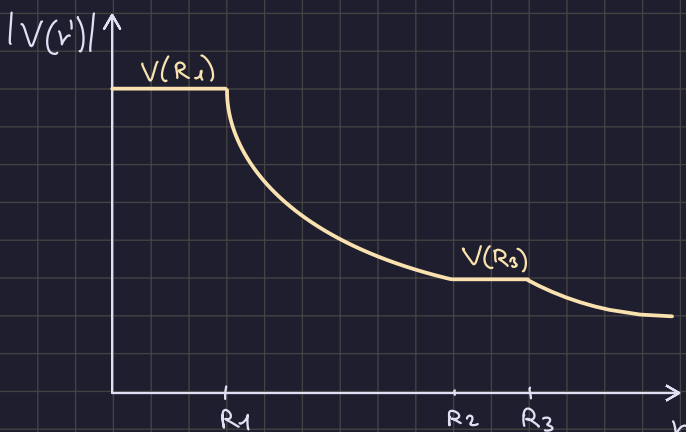
$$V(r_0) = 0$$

$$V(r') - V(r_0) = - \int_{r_0}^{r'} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V(r') = - \int_{r_0}^{r'} \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V(r') = - \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r'} = - \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r'} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad [\text{V}]$$

Disegnare l'andamento del potenziale



$$V(r') = \begin{cases} \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r'} & \text{se } r' \geq R_3 \\ \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R_3} & \text{se } R_2 \leq r' \leq R_3 \\ \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R_3} - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r'} + \frac{1}{R_3} \right) & \text{se } R_1 \leq r' \leq R_2 \\ \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R_1} & \text{se } 0 \leq r' \leq R_1 \end{cases} \quad [V]$$

$$* \quad V(R_3) - \int_{R_3}^{r'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R_3} - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r'} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Calcolare l'energia elettrostatica

$$U = \int_{Vol} \mu_E d\tau = \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$

densità di energia

$$\tau = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$d\tau = \frac{4}{3} \pi r^2 dr$$

Metodo 1

$$U_{Tot} = U_{int} + U_{est}$$

$$\begin{aligned} U_{int} &= \int_{Vol} \mu_E d\tau \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q_{int}^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0} \left( -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \quad [J] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{est} &= \int_{Vol} \mu_E d\tau \\ &= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_3}^{\infty} \\ &= \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_3} \\ &= \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0 R_3} \end{aligned}$$

$$U_{Tot} = \frac{Q_{int}^2}{8\pi \epsilon_0} \left( -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$$

## Metodo 2

Calcolo la capacità del condensatore

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \text{ [F]}$$

L'energia elettrica immagazzinata in un condensatore è:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \text{ [J]}$$

Calcolare il lavoro

$$\vec{F} = q \vec{E} = q E(r) = q \cdot \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

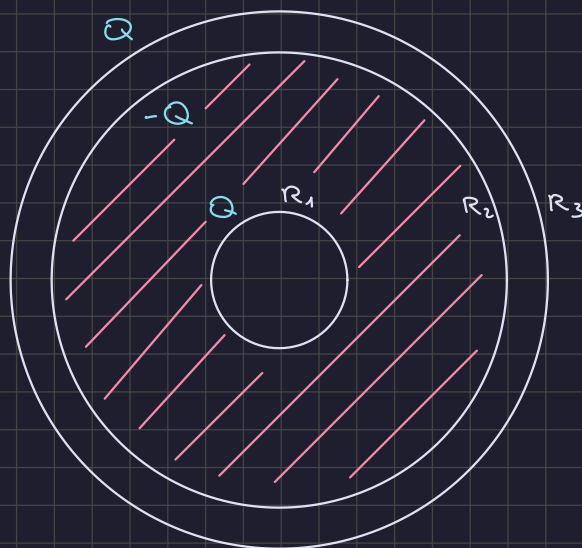
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Perché il campo è conservativo  $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

$$L_{AB} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{l} = q (V_B - V_A) \text{ [J]}$$

Considerare un materiale dielettrico all'interno dell'intercapedine

$$K > 1$$



Calcolare il vettore di spostamento del dielettrico

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) \oint d\vec{S} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{int}}$$

$$D(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Trovare il vettore di polarizzazione

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E} \end{cases} \rightarrow \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 K \vec{E} \downarrow \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} (K-1) \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Calcolare il campo elettrico in presenza di dielettrico

$E_0$  = Campo nel vuoto

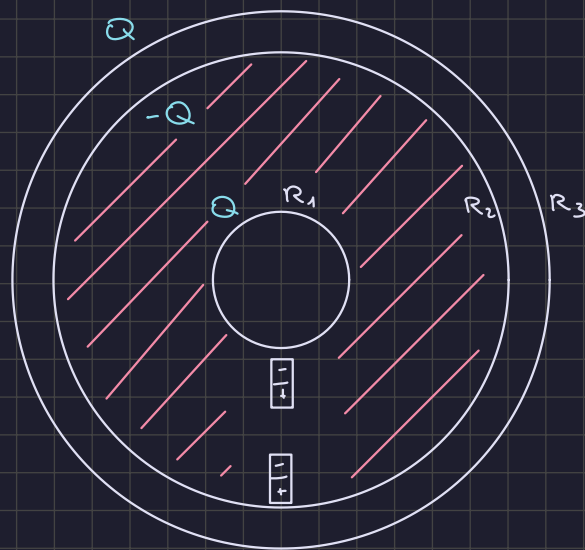
$$E_k = \frac{E_0}{k} \quad C_k = C_0 \cdot k$$

$$V_k = \frac{V_0}{k} \quad U_k = \frac{1}{2} \frac{Q_{in}^2}{C_k} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{k \cdot C_0} = \frac{U_0}{k}$$

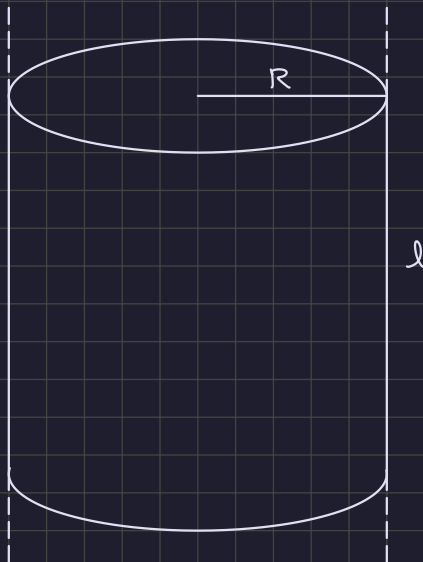
Calcolare la distribuzione delle cariche di polarizzazione sulla superficie

$$P(R) = \sigma_{Pol}(R) = \frac{Q(k-1)}{4\pi k R^2}$$

Disegnare le cariche di polarizzazione



## Cilindro



$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{\text{lat}} + \underbrace{\Phi_{\text{bas}}}_{=0}$$



$$\sigma = \frac{C}{m^2}$$

$$\text{Area} = 2\pi R l$$

$$Q = \sigma \cdot A = \frac{C}{m^2} m^2$$

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \sigma \cdot 2\pi r l & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad [C]$$

Calcolo:

$$\oint_{C(r)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) 2\pi r l = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r l \epsilon_0} \left[ \frac{V}{m} \right] \\ &= \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

$l$ 

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad \underline{\underline{C}} \quad \rightarrow \lambda = \sigma 2\pi R$$

$$Q = \lambda l$$

$$E(r) = \frac{\lambda \cdot l}{2\pi\epsilon_0 r l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

$$\Delta V = V(r') - \underbrace{V(r_0)}_{=0 \atop r_0 \neq \infty}$$

$$V(r') = - \int_{r_0}^{r'} E(r') dr'$$

$$= - \int_{r_0}^{r'} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'} dr'$$

$$= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{r'} dr'$$

$$= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r_0}\right) = \frac{\sigma 2\pi R}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{r'}{r_0} = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\frac{r}{r_0} \quad [V]$$

### ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

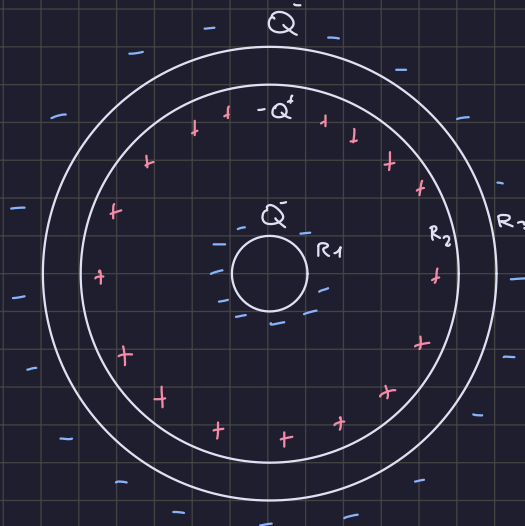
Un conduttore sferico cavo ( $R_2=9\text{cm}$ ;  $R_3=10\text{cm}$ ) contiene, in modo concentrico, una sfera conduttrice ( $R_1=2\text{cm}$ ). Sul conduttore interno viene depositata la carica  $q_{\text{int}} = -10 \times 10^{-9}\text{C}$ . Il sistema finale è isolato e in equilibrio elettrostatico.

$$R_1 = 2\text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$R_2 = 9\text{cm} = 9 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$R_3 = 10\text{cm} = 10 \cdot 10^{-2} = 10^{-1}\text{m}$$

$$Q_{\text{int}} = -10 \cdot 10^{-9}\text{C} = -10^{-8}\text{C}$$



1- Calcolare la distribuzione di carica sulle pareti dei conduttori (Q e densità)

$$\sigma = ? \left[ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \rightarrow \frac{\text{Carica}}{\text{Area}}$$

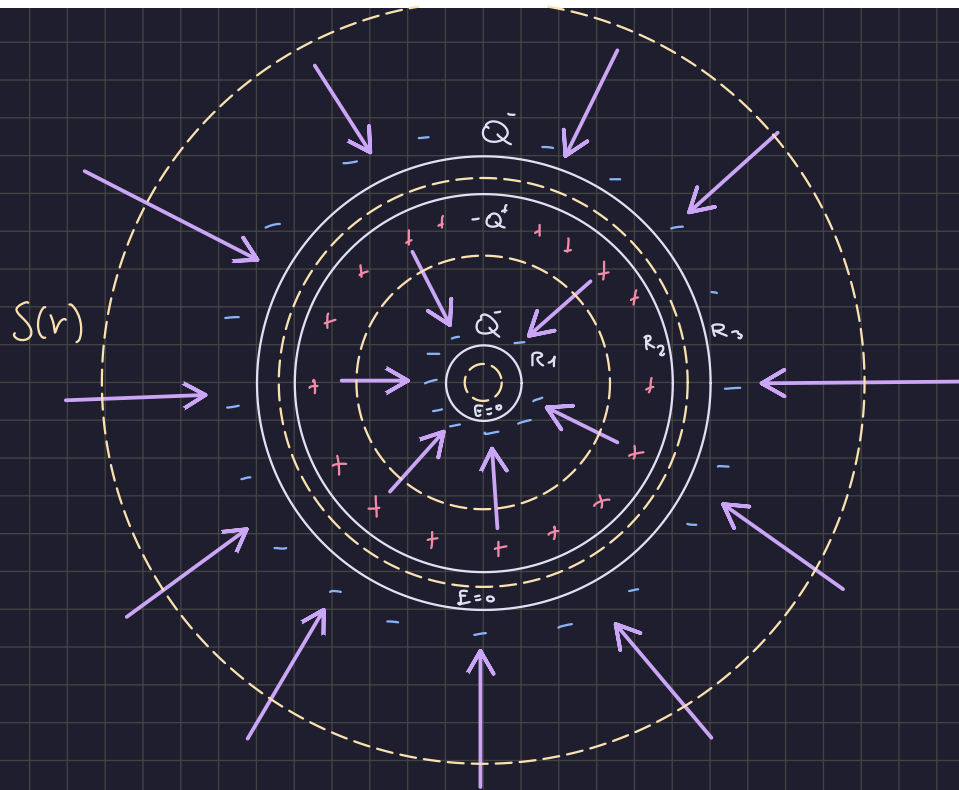
$$\sigma_{R_1}^- = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_1^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{-10^{-8}}{4\pi (2 \cdot 10^{-2})^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \approx -2 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_{R_2}^+ = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_2^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{10^{-8}}{4\pi (9 \cdot 10^{-2})^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = 9,8 \cdot 10^{-8}$$

$$\sigma_{R_3}^- = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_3^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{-10^{-8}}{4\pi (10^{-1})^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = -7,96 \cdot 10^{-8}$$



2- Ricavare applicando il teorema di Gauss il campo elettrico  $E$  generato in tutto lo spazio e disegnare il grafico  $E(r)$ .



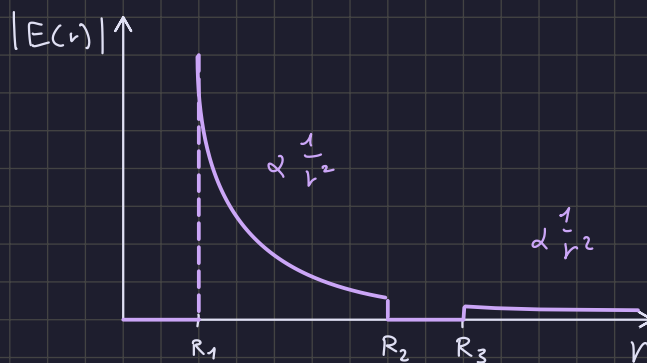
$$\oint_{S(r)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S(r)} E(r) dr = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \left[ \frac{V}{m} \right] \text{ se } R_1 \leq r \leq R_2 \text{ e } r \geq R_3, \text{ 0 altrimenti}$$



3- Ricavare il potenziale elettrostatico  $V$  nella sola regione esterna e disegnare il grafico.

$$\Delta V = V(r) - V(r_0) \quad r_0 = \infty \rightarrow V(r_0) = 0$$

$$= - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

↓

$$V(r) = - \int_{r_0}^r E(r) ds$$

$$= - \int_{r_0}^r \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr$$

$$= - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr$$

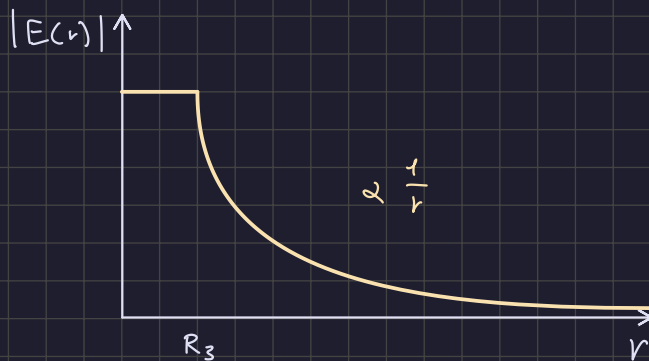
$$= - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r$$

$$= - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right)$$

$$= - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right)$$

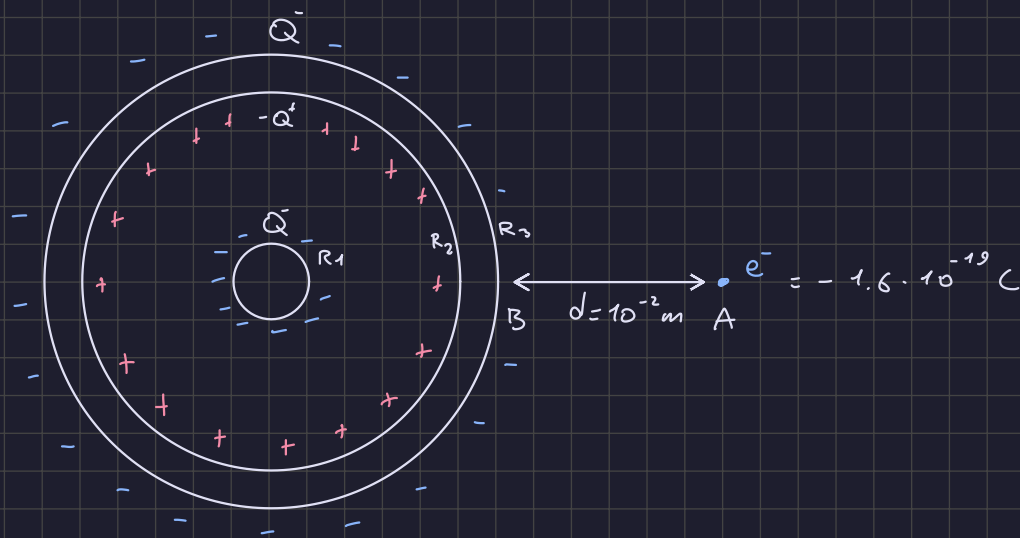
$$= - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right)$$

$$= - \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r} [V]$$



Un elettrone viene posizionato a distanza **1cm** dalla superficie esterna.

4- Calcolare il lavoro del campo elettrico **L** per far compiere all'elettrone il suo percorso.



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$A = R_3 + d = 10^{-1} + 10^{-2} = 0,11 m$$

$$B = \infty \quad (\text{Repulsivo})$$

$$L_{AB} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Il campo \u00e9 conservativo} \rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

$$= -q \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{l}$$

$$= -q (V(B) - V(A)) [J]$$

$$= -q(V(\infty) - V(R_3 + d))$$

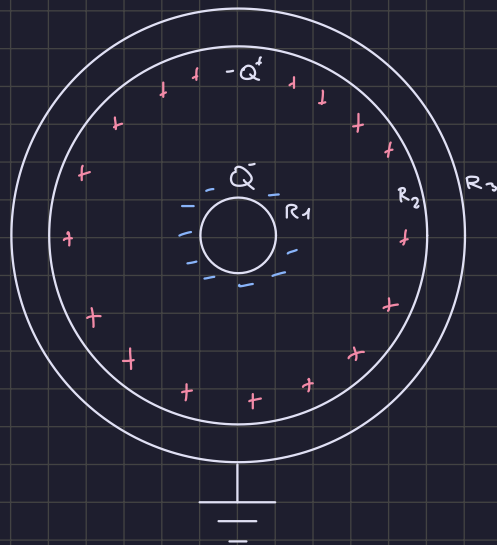
$$= qV(R_3 + d)$$

$$= - \frac{qQ_{int}}{4\pi\epsilon_0(R_3 + d)} [J] = -1.3 \cdot 10^{-16} J$$

### CASO A

La superficie esterna viene collegata a terra.

5- Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare l'energia elettrostatica **U** del sistema



La carica su  $R_3$  diventa nulla  $Q_{R3} = 0$

metodo 1

$$\begin{aligned} U_{TOT} &= U_{int} + U_{ext} \\ &= U_{int} + 0 \\ &= U_{int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{int} &= \int_{vol} \mu E d\tau \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \mu E 4\pi r^2 dr \quad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q_{int}^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}^2}{8\pi r^2 \epsilon_0} dr \end{aligned}$$

metodo 2

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta V} \Delta V^2 \\ &= \frac{1}{2} Q \Delta V \\ &= \frac{1}{2} Q (V(R_1) - V(R_2)) \\ &= 1.75 \cdot 10^{-5} J \end{aligned}$$

$$= \frac{Q_{int}}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{Q_{int}}{8\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

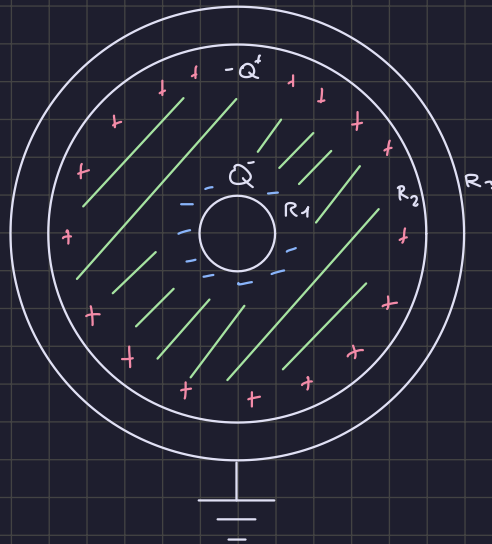
$$= \frac{Q_{int}}{8\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) [J]$$

$$= 1.75 \cdot 10^{-5} J$$

Lo spazio interno è riempito di dielettrico lineare  $k=3$

6- Calcolare la capacità del sistema.

$$k=3$$



$$C_k = C_o \cdot k$$

$$C_o = \frac{Q}{\Delta V} [F]$$

$$= \frac{Q_{int}}{V(R_2) - V(R_1)}$$

$$= 2.86 \cdot 10^{-12} F$$

$$C_k = 3 \cdot 2.86 \cdot 10^{-12} F = 8.58 \cdot 10^{-12} F$$

7- Calcolare il campo spostamento dielettrico  $D$ .

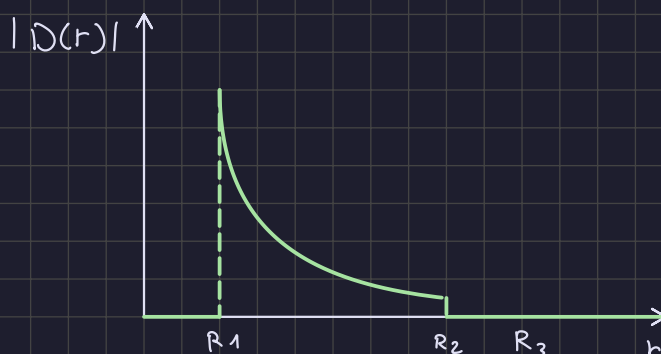
$$\oint_{\text{sup}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libere}}$$

$$\oint_{\text{sup}} D(r) dr = Q_{\text{libere}}$$

$$D(r) \oint_{\text{sup}} dr = Q_{\text{libere}}$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{libere}}$$

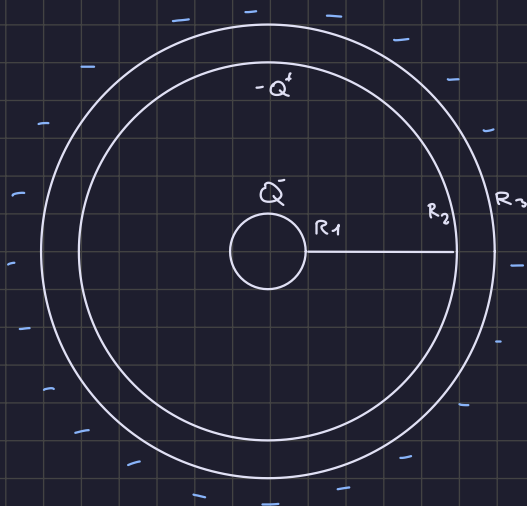
$$D(r) = \frac{Q_{\text{libere}}}{4\pi r^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$



#### CASO B

Diversamente, la sfera interna viene collegata alla superficie della cavità  $R_2$ .

8- Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare l'energia elettrostatica  $U$  del sistema



$$U_{\text{tot}} = 0 + U_{\text{EST}}$$

$$U_{\text{EST}} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

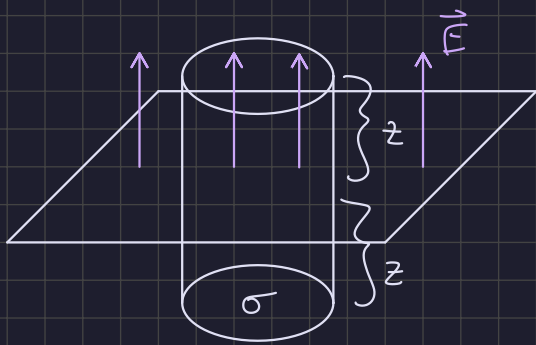
$$= \frac{1}{2} C (V(\infty) - V(R_3))^2$$

$$= \frac{1}{2} C V(R_3)^2$$

9- Calcolare la capacità del sistema.

$$C = \frac{Q}{V(R_3)} [F]$$

Piano indefinito



$$h = 2z$$

$$\Phi = \underbrace{\Phi_{\text{base}} + \Phi_{\text{top}}}_{=0}$$

$$= 2 E(z) \cdot A = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow Q = \sigma \cdot A$$

$$2 E(z) \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{V}{m} \right]$$

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z \geq 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

$$V(z) - \cancel{V(z_0)} = - \int_{z_0}^z \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

$$z_0 = 0$$

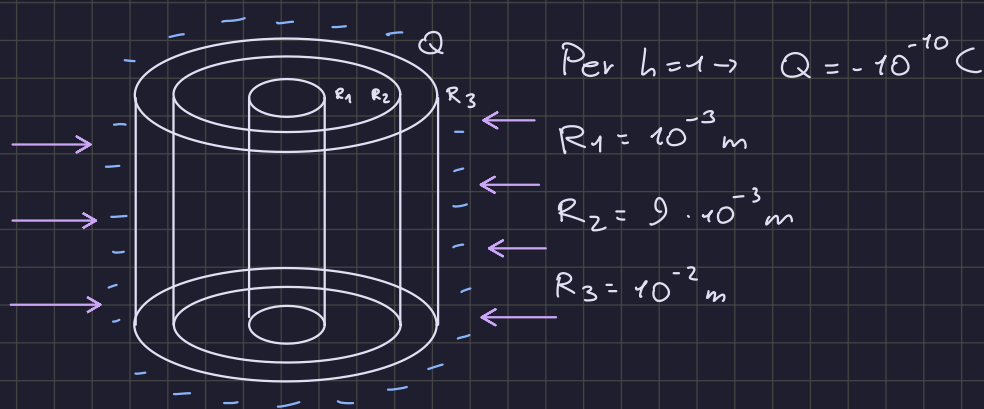
$$V(z_0) = 0$$

$$V(z) = - \int_{z_0}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz$$

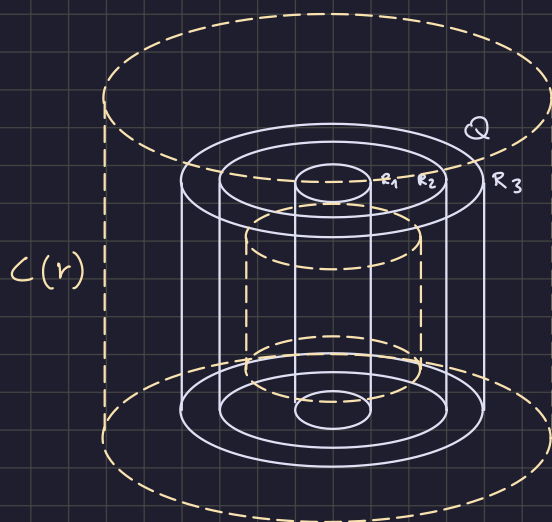
$$= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z_0}^z dz$$

$$= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z [V]$$

B) un guscio cilindrico molto lungo da considerarsi indefinito di raggi  $R_1=0.1\text{cm}$ ,  $R_2=0.9\text{cm}$ ,  $R_3=1\text{cm}$  sulla cui superficie esterna è stata depositata una carica  $Q=-10^{-10}\text{C}$  per ogni metro di lunghezza



- disegnare le superfici gaussiane e spiegare la scelta



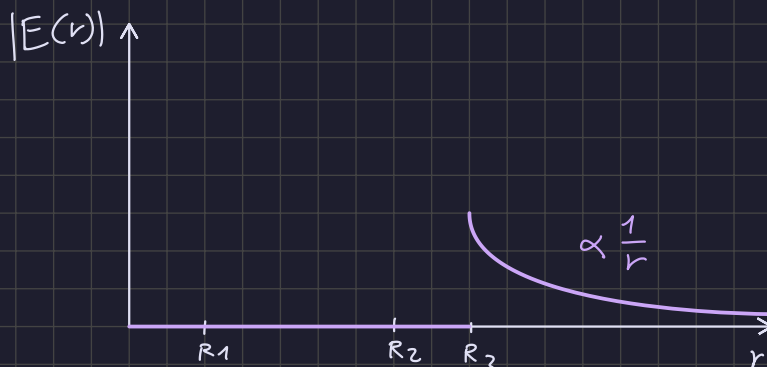
- ricavare il campo elettrico E (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico  $E(r)$

$$\Phi_e = \oint_{C(r)} E(r) dr = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{C(r)} dr = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

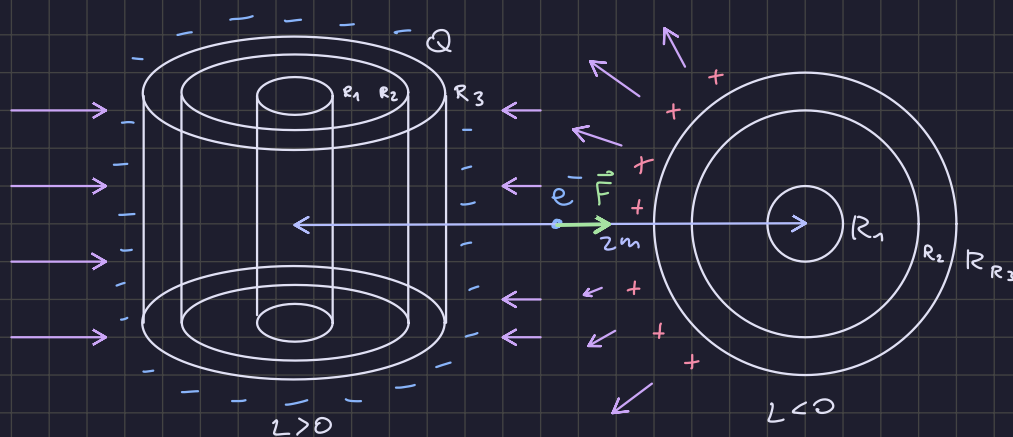
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$



- disegnare le linee di campo  $\rightarrow$   
 - disegnare, in modo schematico, le superfici equipotenziali.

Considerare la situazione in cui il guscio sferico sia posizionato a una distanza di  $d=2m$  dal cilindro (distanza dall'asse del cilindro al centro della sfera).

In una posizione equidistante dai due conduttori vi è, libero di muoversi, un elettrone.



2. Calcolare il valore della forza  $F$  agente sull'elettrone in MODULO DIREZIONE VERSO!!!  
- se l'aria è secca, ovvero nel vuoto ( $\epsilon_0$ )

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

$$F_s = q \cdot E(1)$$

$$F_c = q \cdot E(1)$$

Il lavoro della sfera è di assorbire energia, quello del cilindro accelera

$L_s$ : Assorbe

$L_c$ : Accelera

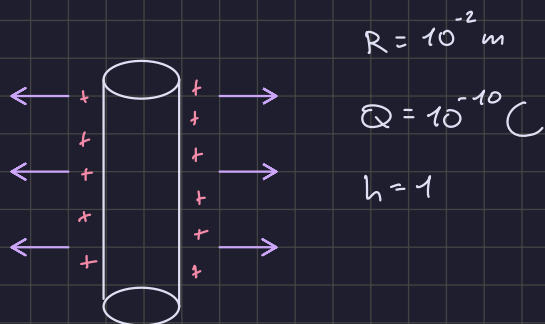
- se l'aria è umida, ovvero in uno spazio riempito di dielettrico  $K=2$

$$F = q E_K$$

$$E_K = \frac{E_0}{K}$$



B) un conduttore cilindrico indefinito di raggio  $R=1\text{cm}$  su cui è stata depositata una carica  $Q=10^{-10}\text{ C}$  per ogni metro di lunghezza



$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0} \quad \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

2. il potenziale elettrostatico  $V$  nella regione esterna  
elettrone posto a distanza  $d=1\text{m}$

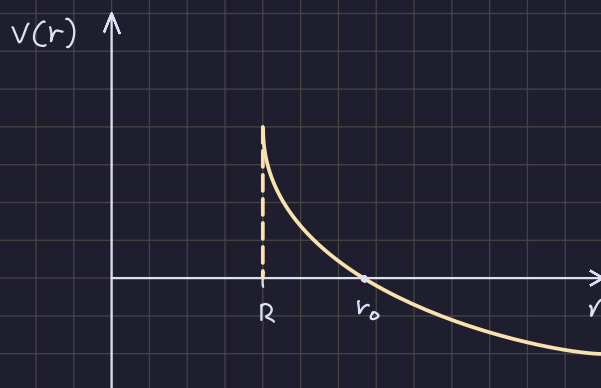
$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r E(r) dr \quad V(r_0) = 0$$

$$V(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

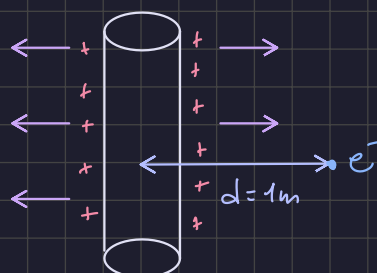
$$V(r) = - \int_{r_0}^r \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0} dr$$

$$V(r) = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr$$

$$V(r) = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \quad [\text{V}]$$



2. il potenziale elettrostatico  
3. la forza agente su un elettrone posto a distanza  $d=1\text{m}$  dal sistema  
calcolare l'elettrone sulla superficie



$$F = qE(1) = -2.9 \cdot 10^{-19} \text{ N}$$

3. la forza agente su un elettrone posto a distanza  $r$  dal centro
4. il lavoro del campo elettrico per portare l'elettrone sulla superficie del conduttore

$$L = -q \Delta V$$

$$= |e| \Delta V$$

$$= |e| \cdot (V(R) - V(\infty))$$

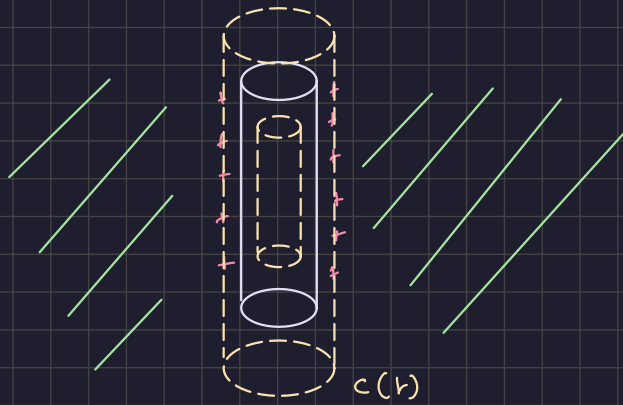
$$= e \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln(R)$$

$$= -1.3 \cdot 10^{-30} \text{ J}$$

Si compie un lavoro contro il campo, per questo c'è il meno

Lo spazio esterno è ora riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica  $K=3$

$$K=3$$



5. calcolare il vettore spostamento elettrico  $D$  nello spazio

$$\oint_{C(r)} D(r) dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \int_{C(r)} dr = Q_{libere}$$

$$D(r) 2\pi r l = Q_{libere}$$

$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{2\pi r l} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

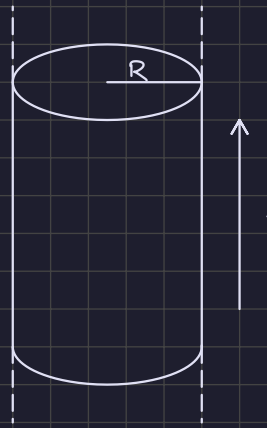
6. calcolare le cariche di polarizzazione

$$\sigma_{pol}(R) = \frac{Q(K-1)}{4\pi K R^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

# Magnetismo

1. Caso:

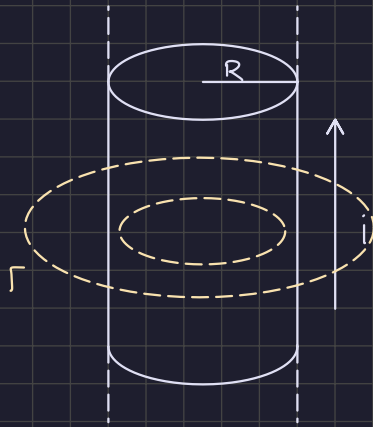
La corrente è solo sulla superficie



Ricavare il campo magnetico

Rappresenta una regione nello spazio in cui una carica subisce l'effetto della sua forza

Th Ampere  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum i_c$



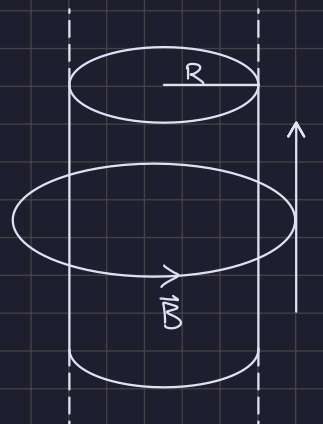
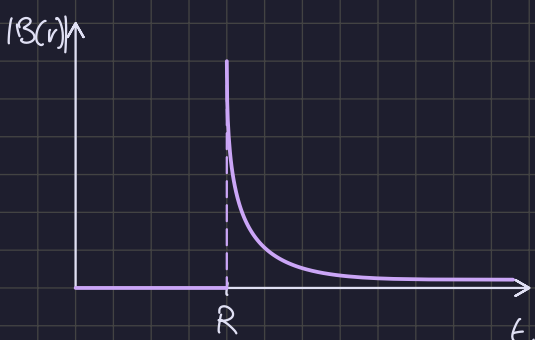
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_c$$

$$B(r) \oint d\ell = \mu_0 i_c$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 i_c$$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad [T]$$

Disegnare il grafico del campo



2. Caso:

La corrente è data come densità di corrente

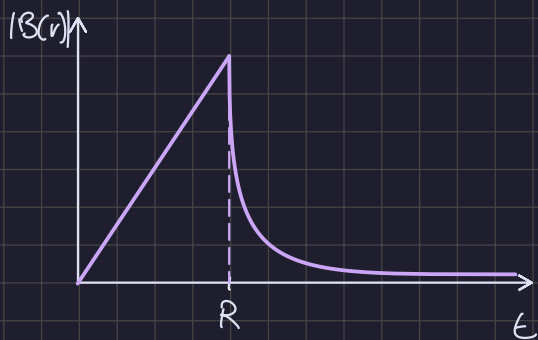
$$j = \frac{i}{S_{\text{op}}} \left[ \frac{A}{m^2} \right]$$

$$j = \frac{i}{\pi R^2}$$

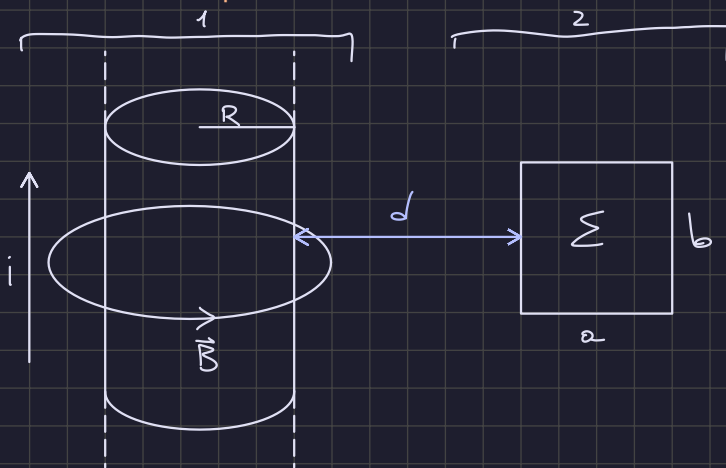
$$i_c(r) = j \pi r^2 = \frac{i}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{i r^2}{R^2} [A]$$

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{i r^2}{R^2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} & \text{se } r < R \\ \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

[T]



Considerare una spira ad una distanza  $d$  dal filo



Calcolare il coefficiente di mutua induzione

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} [H]$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} [wb]$$

$$\phi_B = \oint B d\xi = \int_a^{d+a} B(r) \times dr$$

$$\Sigma = \text{Area} = ab$$

spira

$$\int_a^{d+a} x dr = x \left[ r \right]_a^{d+a}$$

$$= x [d+a-a]$$

$$= x a = a \cdot b$$

↓

$$x = b$$

$$= \int_a^{d+a} B(r) b dr$$

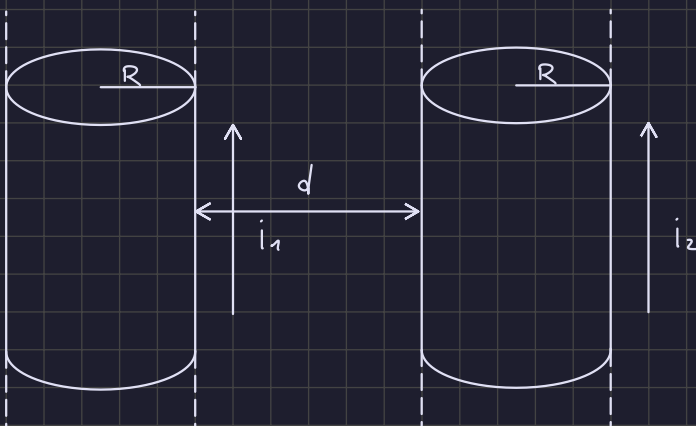
$$= \int_a^{d+a} \frac{\mu_0 i c}{2\pi r} b dr$$

$$= \frac{\mu_0 i c b}{2\pi} \int_a^{d+a} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 i c b}{2\pi} \ln \left| \frac{d+a}{a} \right| [W_b]$$

$$M = \frac{\phi_B}{ic}$$

Viene aggiunto un altro filo accanto al filo originale



Calcolare la forza che agisce sui due fili

Legge di Laplace

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

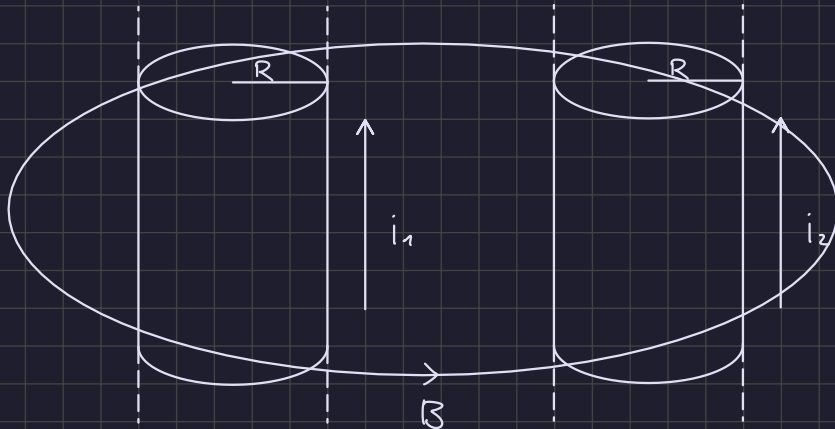
$$dF_{21} = i_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}_1(d)$$

Visto che il filo è indefinito si suppone che la lunghezza sia  $l = 1m$

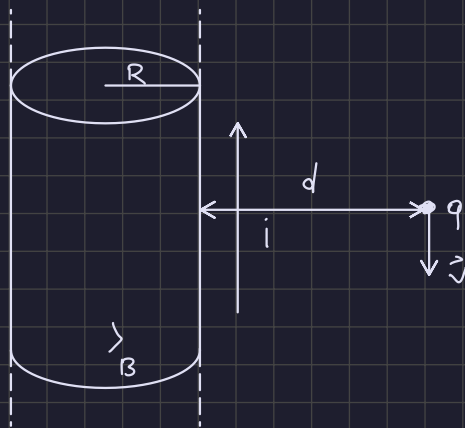
$$= i_2 \frac{\mu_0 \cdot i_1}{2\pi d} \xRightarrow{l=1} \frac{F}{l} = F_{21} = i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} [N]$$

$$dF_{12} = i_1 d\vec{\ell} \times \vec{B}_2(d)$$

$$= i_1 \frac{\mu_0 \cdot i_2}{2\pi d} \xRightarrow{l=1} \frac{F}{l} = F_{12} = i_1 \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} [N]$$



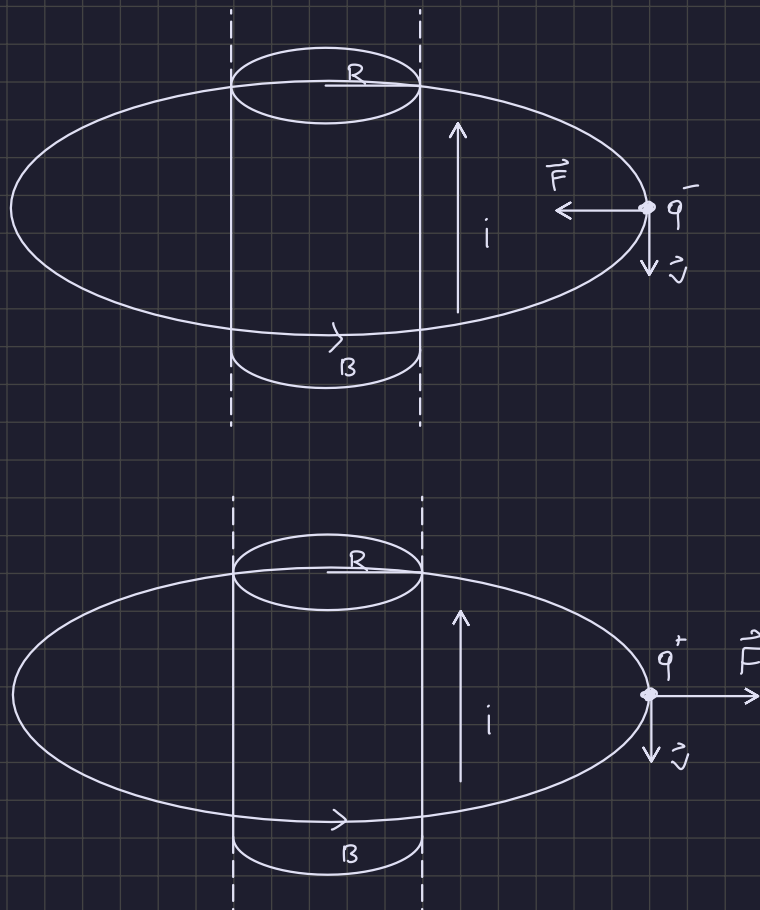
Considerare una carica ad una distanza  $d$  dal filo, calcolare la forza agente sulla particella



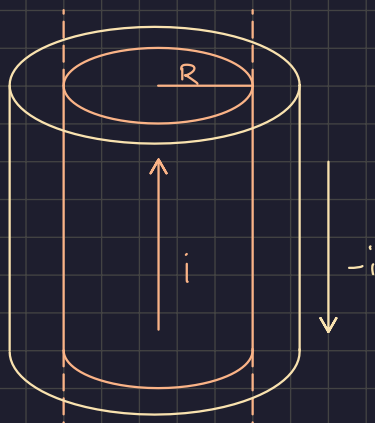
$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$= q \vec{v} \times B(d)$$

$$= q \vec{v} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$



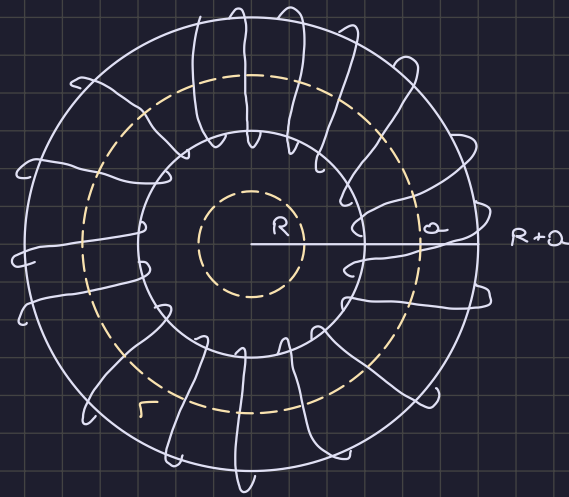
Consideriamo una guaina in cui passa una corrente, quanto vale la corrente per annullare il campo all'esterno?



## Solenoide toroidale

$N = \text{n}^\circ \text{spire}$

$i = \text{corrente}$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_c$$

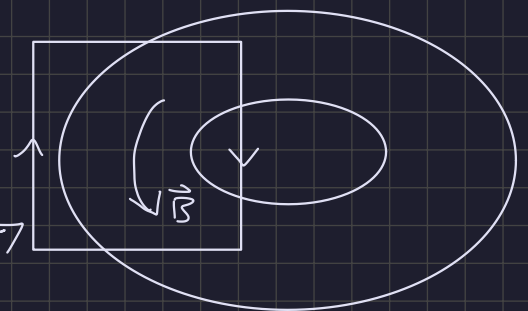
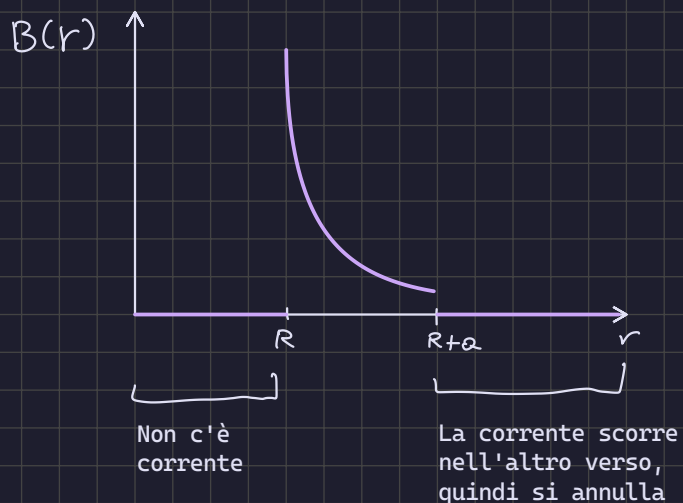
$$i_c = N \cdot i$$

$$B(r) \oint d\ell = \mu_0 N i$$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 N i$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \quad [T]$$

Disegnare l'andamento del campo



Calcolare il flusso del campo magnetico

$$\Phi = N \cdot \int_{\text{Spira}} B(r) d\ell$$

$$= N \int_R^{R+a} B(r) a dr$$



$$= N \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} a dr$$

$$= N \frac{\mu_0 N i}{2\pi} a \int_R^{R+a} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln \left| \frac{R+a}{R} \right| \quad [\text{Wb}]$$

Calcolare il coefficiente di autoinduzione

$$L = \frac{\Phi}{i_c}$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln \left| \frac{R+a}{R} \right|$$

$$= \frac{1}{N i} \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln \left| \frac{R+a}{R} \right|$$

$$= \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \left| \frac{R+a}{R} \right| \quad [\text{H}]$$

Calcolare l'energia immagazzinata nel toroide

Metodo 1:

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 \quad [\text{J}]$$

Metodo 2:

$$U_B = \int_{\text{vol}} \mu_B dV$$

$$V = 2\pi r \cdot a^2$$

$$= \int_{\text{vol}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

$$\int_R^{R+a} x dr = x [R+a - R]$$

$$= x a = 2\pi r \cdot a^2$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{B^2}{2\mu_0} x dr \quad \leftarrow x = 2\pi r a$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r a dr$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i^2 \cdot a}{4\pi} \ln \left| \frac{R+a}{R} \right| \quad [\text{J}]$$