Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2024/2025

Indice

1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.
Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo**: Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

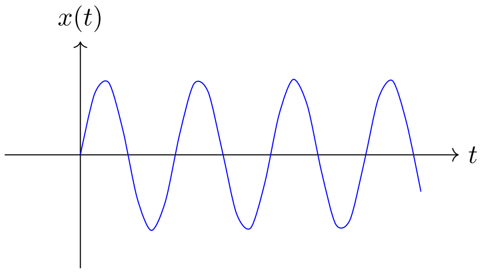

Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto**: Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

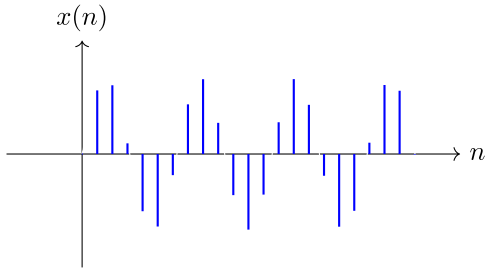

Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale. Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni. Infine si fa

encoding, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.
I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni (x, y).
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale $(x, y)^3$ per rappresentare ogni colore (R,G,B).

1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

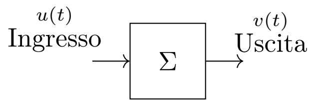

Figura 3: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

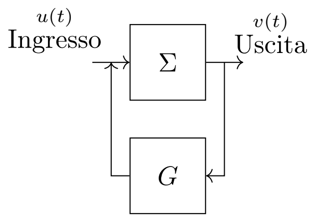

Figura 4: Rappresentazione di due sistemi in cascata

2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

$$\underbrace{f}_{segnale} \qquad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1. t, τ, t_i: tempo continuo
2. k: tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se $v_1(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t)$ e $v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_2(t)$ allora $v_1(t) + v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t) + u_2(t)$.
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

3 Sistemi

3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo**:
   (a) Equazioni differenziali
   (b) Trasformate di Laplace
   (c) Trasformate di Fourier
2. **Discreto**:
   (a) Equazioni alle differenze
   (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.
L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far si che risulti stabile.

3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:

$$\text{Ev. Fisico} \longrightarrow \boxed{\text{Stati}}$$

Figura 5: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo. Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0,\ |u(t)| < M\ \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists N > 0,\ |v(t)| < N\ \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\text{con } M, N \in \mathbb{R} \text{ non per forza uguali}$$

3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0\ \ \forall r \text{ di } u(t),\ t \in \mathbb{R}$$

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$
$$l \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{l^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

Ad esempio con $l = 1$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot l^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot l^{\alpha t} \cdot t$$

Con $\alpha < 0$ il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0 Con $l = 2$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot l^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot l^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$