Tutoraggio simulazione esame

1. $L_m = \{0^m 1^{2(m+n)} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$, $m \in \mathbb{N}$

$L_0 = \{1^{2n} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$

L_0 contiene una sequenza di 1 che è in relazione con la sequenza di 0 sulla variabile n ≥ 0, quindi un automa non può riconoscerlo. $L_0 \notin Reg$

La condizione di appartenenza al linguaggio è:

$|1| = 2n \quad |0| = 3n \quad \rightarrow \quad 3|1| = 2|0|$

Si procede con il dimostrare che vale la negazione del pumping lemma regolare

$$PL\ Reg: \begin{cases} z = uvw\ .\ |z| \geq K \\ |uv| \leq K \\ |v| > 0 \end{cases}$$

Sia $n = K$, perció $z = 1^{2K} 0^{3K}$, dove $|z| = 5K \geq K$

Si effettua il pompaggio per i = 2

$i = 2 \rightarrow z'_2 = 1^{2K + (i-1)|v|} 0^{3K}$

$z'_2 \in L \iff 6K + 3|v| = 6K$

$|v| = 0$ Assurdo

Ho dimostrato che il linguaggio L_0 non è regolare

Ora bisogna dimostrare che L_0 appartiene ai linguaggi liberi dal contesto. Per farlo si definisce una grammatica G tale che:

$$L_0 \iff L(G)$$

$G: S \rightarrow \varepsilon \mid 1^2 S 0^3$

Dimostrazione:

1) $L_0 \Rightarrow L(G): \quad x \in L_0 \Rightarrow S \rightarrow^* x$

2) $L(G) \Rightarrow L_0: \quad S \rightarrow^n x \Rightarrow x \in L_0$

Si utilizza l'induzione sulla lunghezza di x in 1) e sul numero di passi n della derivazione in 2)

1) Caso base $\quad |x| = 0 \Rightarrow S \rightarrow \varepsilon$

$x = \varepsilon$

Passo induttivo

Dato un n > 0 generico vale l'ipotesi induttiva:

$|x| \leq n,\ x \in L_0 \Rightarrow S \rightarrow^* x \quad$ dove $x = 1^{2K} 0^{3K},\ 2K + 3K < n$

Si deriva $x' = 1^{2(k+1)} 0^{3(k+1)}$

Si costruisce la derivazione:

$$S \rightarrow 1^2 S 0^3 \overset{*}{\underset{ii}{\rightarrow}} 1^2 \underbrace{1^{2k} 0^{3k}}_{x} 0^3 = 1^{2(k+1)} 0^{3(k+1)} = x'$$

2) Caso base $n = 1$ $S \rightarrow^1 \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \in L_0$

Passo induttivo

Dato un n > 0 generico vale l'ipotesi induttiva:

$$S \rightarrow^n x \Rightarrow x \in L_0 \quad \text{dove} \quad x = 1^{2k} 0^{3k}$$

Si dimostra che con n+1 passi produco una stringa $x' \in L_0$

$$\underbrace{S \rightarrow^1 1^2 S 0^3}_{1} + \underbrace{\underset{ii}{\rightarrow^n} 1^2 x 0^3 = 1^2 1^{2k} 0^{3k} 0^3}_{n} = x' \in L_0$$

$= n+1$ passi

Ho dimostrato che il linguaggio è libero dal contesto.

$$L_1 = \{0^1 1^{2+2n} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$$

Questo linguaggio è libero dal contesto (perchè è stato aggiunto un singolo 0 all'inizio)

$$L_2 = \{0^2 1^{4+2n} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$$

La considerazione è analoga per L_2

Quindi al variare di m, $L_m \in CF$

2. $L = \bigcup_m L_m = \{0^m 1^{2(m+n)} 0^{3n} \mid n, m \geq 0\}$

$$= \{\underbrace{0^m 1^{2m}}_{A} \underbrace{1^{2n} 0^{3n}}_{B} \mid n, m \geq 0\}$$

Questo linguaggio è intuitivamente context free perchè c'è una relazione tra i primi due simboli (A) e in modo indipendente una relazione tra gli ultimi due (B).

Dimostrare che non è regolare con il pumping lemma dei regolari ...

Si dimostra che è libero dal contesto definendo una grammatica G tale che:

$$\bigcup_m L_m = L(G)$$

$G: S \rightarrow AB$

$A \rightarrow \varepsilon \mid 0 A 1^2$

$B \rightarrow \varepsilon \mid 1^2 B 0^3$

Le possibili opzioni per generare la stringa x' sono:

$$x' \to 0^{j+1}\, 1^{2(j+1)}\, 1^{2k}\, 0^{3k} \quad \text{Aumentare A}$$
$$x' \to 0^{j}\, 1^{2j}\, 1^{2(k+1)}\, 0^{3(k+1)} \quad \text{Aumentare B}$$
$$x' \to 0^{j+1}\, 1^{2(j+1)}\, 1^{2(k+1)}\, 0^{3(k+1)} \quad \text{Aumentare entrambi}$$

Si può dimostrare l'ultimo caso senza perdita di generalità (esiste un caso che implementa tutti gli altri sottocasi)

3. $H = \bigcup_m L_m \cap \{0^n 1^k 0^{3n} \mid n, k \geq 0\}$

$$m=n \quad \bigcup_m L_m = \{\varepsilon,\ \underset{\substack{m=1\\n=0\\\times}}{01^2},\ \underset{\substack{m=0\\n=1\\\times}}{1^2 0^3},\ \underset{\substack{m=1\\n=1}}{\underbrace{0 1^2 1^2 0^3}},\ \underset{\substack{m=2\\n=1\\\times}}{0^2 1^4 1^2 0^3},\ \underset{\substack{m=1\\n=2}}{\underbrace{0 1^2 1^4 0^6}},\ \underset{\substack{m=8\\n=1}}{0 1^8 0^3}\}$$

$$\{0^n 1^m 0^{3n} \mid n, m \geq 0\} = \{\varepsilon,\ \underset{\substack{m=0\\n=1\\\times}}{0\,0^3},\ \underset{\substack{m=1\\n=0\\\times}}{1},\ \underset{\substack{m=1\\n=1}}{\underbrace{0\,1\,0^3}},\ \underset{\substack{n=1\\m=4}}{0 1^4 0^3},\ \underset{\substack{n=1\\m=6}}{0 1^6 0},\ \underset{\substack{m=8\\n=1}}{0 1^8 0^3}\}$$

L'intersezione genera stringhe di questa forma

$$H = \{\varepsilon,\ 0 1^4 0^3,\ 0 1^8 0^3, \dots\}$$

La condizione per generare H è:

$m = n$

$k = 2(m+n) \to 0^k 1^{4k} 0^{3k}$

$3n = 3n'$

Quindi $H = \{0^k 1^{4k} 0^{3k} \mid k \geq 0\}$

Questo linguaggio non è context free ed è da dimostrare che non è CF con il pumping lemma dei CF

Le condizioni di appartenenza al linguaggio sono:

1. $|0|_{DX} = 3|0|_{SX}$
2. $|1| = 4|0|_{SX}$
3. $4|0|_{DX} = 3|1|$

Dopo il pompaggio bisogna mostrare che le seguenti condizioni non sono più valide:

$i = 0$

- $|0|_{sx} = k - |vx|$

  $|1| = 4k$

  $|0|_{DX} = 3k$

1. $3k = 3(k - |vx|)$

   $\cancel{3k} = \cancel{3k} - 3|vx|$

   $3|vx| = 0$ Assurdo

2. $4k = 4(k - |vx|)$

$$4K = 4K - 4|vx|$$

$|vx| = 0$ Assurdo

- $i = 2$

$|0|_{sx} = K + |v|$

$|1| = 4K + |x|$

$|0|_{dx} = 3K$

1. $3K = 3(K + |v|)$

   $|v| = 0$ Non basta

3. $12K = 3(4K + |x|)$

   $\cancel{12K} = \cancel{12K} + 3|x|$

   $|x| = 0$ Non basta

$$|v| = 0 \land |x| = 0 \rightarrow |vx| = 0$$ Assurdo

- ... Bisogna controllare tutte le possibili suddivisioni per poter dimostrare che il linguaggio non è CF