Esame Probabilità e Statistica

Università di Verona - Irimie Fabio VR501504

4 Luglio 2024

Indice

1 Domanda 1

Nei test effettuati sui bambini dagli 8 ai 10 anni (popolazione di riferimento) è risultato che la loro soglia di attenzione ha legge normale di media $\mu = 40$ minuti e deviazione standard $\sigma = 8$ minuti.

1.1 Parte 1

Calcolare la probabilità che un bambino scelto a caso nella popolazione abbia una soglia di attenzione maggiore di 45 minuti (usare la seconda cifra decimale)

1.1.1 Soluzione senza R

Standardizzo la normale:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 40}{8} = 0.625$$

Vogliamo calcolare:

$$P(Z > 0.625) = 1 - P(Z \leq 0.625) = 1 - \phi(0.625) = 1 - 0.73237 \approx 0.27$$

1.1.2 Soluzione con R

```r
pnorm(45, mean = 40, sd = 8, lower.tail = FALSE)
# 0.2659855
```

1.2 Parte 2

Scelti a caso $n = 500$ bambini dalla popolazione, si consideri la media campionaria delle soglie di attenzione. Calcolare la probabilità che la media delle soglie di attenzione del campione sia inferiore di 40 minuti (usa 1 cifra decimale).

1.2.1 Soluzione senza R

Essendo che la media della normale e la media campionaria coincidono, allora la probabilità che la media campionaria sia inferiore a 40 è la stessa di $P(Z < 0)$ che è 0.5.

1.2.2 Soluzione con R

```r
pnorm(40, mean = 40, sd = 8)
# 0.5
```

1.3 Parte 3

Scelti a caso $n = 10$ dalla popolazione, calcolare la probabilità che al massimo due di loro abbiano una soglia di attenzione maggiore di 45 minuti (usa 2 cifre decimali).

1.3.1 Soluzione senza R

$$p = 1 - P(Z \leq 0.625) = 1 - 0.73237 = 0.26763$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} =$$

$$= \frac{10!}{0!10!}(0.73237)^{10} + \frac{10!}{1!9!}(0.26763)^1(0.73237)^9 + \frac{10!}{2!8!}(0.26763)^2(0.73237)^8 =$$

$$P(X \leq 2) \approx 0.48$$

1.3.2 Soluzione con R

```
pnorm(45, mean = 40, sd = 8, lower.tail = FALSE)
# 0.26598
pbinom(2, size = 10, prob = 0.26598)
# 0.478
```

2 Domanda 2

In un sondaggio tra gli italiani su una certa questione il 56% degli intervistati si è detto favorevole ed il restante 44% contrario. Il 53% degli intervistati erano maschi e di questi il 60% era favorevole. Scelto a caso un intervistato calcolare la probabilità che sia femmina sapendo che è favorevole.

2.1 Soluzione

- **S** = "essere favorevole"
- **N** = "essere contrario"
- **M** = "essere maschio"
- **F** = "essere femmina"

$$P(S) = 0.56 \quad P(N) = 0.44$$

$$P(M) = 0.53 \quad P(F) = 0.47$$

$$P(S|M) = 0.6$$

Vogliamo calcolare $P(F|S)$:

$$P(F|S) = 1 - P(M|S)$$

Usando la formula di Bayes otteniamo:

$$P(M|S) = \frac{P(S|M) \cdot P(M)}{P(S)} = \frac{0.6 \cdot 0.53}{0.56} = 0.5678$$

$$P(F|S) = 1 - 0.5678 = 0.4322$$

3 Domande 3-7

Vogliamo testare le luminosità di picco degli schermi di un certo modello di computer portatili. Testiamo la luminosità di picco per $n = 7$ portatili con lo stesso tipo di schermo. Le luminosità misurate, in candele-per-metro-quadro (nits), sono:

$$770, \quad 800, \quad 760, \quad 780, \quad 790, \quad 800, \quad 760$$

Il produttore pubblica una luminosità media pari a $\mu_0 = 800\,\text{nits}$
con deviazione standard $\sigma = 50\,\text{nits}$

Si dia per buona la varianza fornita dal produttore. Vogliamo studiare la luminosità media.

3.1 Domanda 3

Si stimi la media del campione misurato.

3.1.1 Soluzione senza R

La media del campione è:

$$\bar{x} = \frac{770 + 800 + 760 + 780 + 790 + 800 + 760}{7} = 780$$

3.1.2 Soluzione con R

```
x <- c(770, 800, 760, 780, 790, 800, 760)
mean(x)
# 780
```

3.2 Domanda 4

Si trovi, per la luminosita' media degli schermi, l'intervallo bilaterale di confidenza uguale a 0.98.

3.2.1 Soluzione con R

Per trovare l'intervallo di confidenza bilaterale bisogna usare la seguente formula:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Dove $z_{\frac{\alpha}{2}}$ è il quantile della normale standard corrispondente a $\frac{\alpha}{2}$ e $\alpha = 0.02$.

```
alpha <- 0.02
z <- qnorm(1 - alpha / 2)
sigma <- 50
n <- 7
x <- 780
upper <- round(x + z * sigma / sqrt(n))
lower <- round(x - z * sigma / sqrt(n))
```

```
cat("(", lower, ",", upper, ")\n")
# ( 736 , 824 )
```

3.3 Domanda 5

Con riferimento alla domanda precedente, quanti schermi si dovrebbero testare per avere un intervallo con confidenza di 0.98 non più largo di 10 nits?

3.3.1 Soluzione con R

```
alpha <- 0.02
z <- qnorm(1 - alpha / 2)
sigma <- 50
n <- 542
x <- 780
upper <- x + z * sigma / sqrt(n)
lower <- x - z * sigma / sqrt(n)
cat("(", round(lower), ",", round(upper), ")\n")
# ( 775 , 785 )

diff <- upper - lower
cat("Differenza:" , diff , "\n")
# Differenza: 9.99252
```

La risposta è $n \geq 156$

3.4 Domanda 6

Calcolare la statistica-test per la media della popolazione.

3.4.1 Soluzione

La statistica-test a varianza nota è data da:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{780 - 800}{\frac{50}{\sqrt{7}}} \approx -1.058$$

3.5 Domanda 7

Ora, si assuma di modificare l'ipotesi alternativa: $H_1 : \mu < 800\,\text{nits}$. Si calcoli l'intervallo critico sinistro C con livello di significatività pari ad $\alpha = 0.05$.

3.5.1 Soluzione

L'intervallo critico sinistro è dato da:

$$C = (-\infty, z_\alpha)$$

Dove z_α è il quantile della normale standard corrispondente a $\alpha = 0.05$.

```
alpha <- 0.05
z <- qnorm(alpha)
cat("(", -Inf, ",", z, ")\n")
# ( -Inf , -1.644854 )
```

4 Domanda 12

Da una rilevazione statistica risulta che il numero di incidenti mensili nel tratto di autostrada A4 Venezia-Trieste segue una distribuzione di Poisson con media 16.

4.1 Parte 1

Calcolare la probabilità che in un mese ci siano più di 20 incidenti (usa 3 cifre decimali).

4.1.1 Soluzione

$$P(X > 20)$$

```
ppois(20,16, lower.tail = FALSE)
# 0.132
```

4.2 Parte 2

La probabilità che in un mese ci siano esattamente dai 10 ai 15 incidenti (usa 3 cifre decimali).

4.2.1 Soluzione

$$P(10 < X < 15) = P(X \leq 15) - P(X < 10)$$

```
ppois(15,16) - ppois(9,16)
# 0.423
```

4.3 Parte 3

Durante un certo anno si sono verificati i seguenti incidenti:

$$13, \quad 20, \quad 9, \quad 16, \quad 22, \quad 17, \quad 10, \quad 9, \quad 20, \quad 17, \quad 17, \quad 16$$

Calcola la media.

4.3.1 Soluzione

$$\bar{x} = \frac{13 + 20 + 9 + 16 + 22 + 17 + 10 + 9 + 20 + 17 + 17 + 16}{12} = 15.5$$

4.4 Parte 3

Durante un certo anno si sono verificati i seguenti incidenti:

$$13, \quad 20, \quad 9, \quad 16, \quad 22, \quad 17, \quad 10, \quad 9, \quad 20, \quad 17, \quad 17, \quad 16$$

Calcola il 90° percentile.

4.4.1 Soluzione

```
data <- c(13, 20, 9, 16, 22, 17, 10, 9, 20, 17, 17, 16)
quantile(data, 0.9)
# 20
```