Esercizi context free

Esercizio 1.1 (Grammatica e dimostrazione). *Si dimostri che il linguaggio di tutte le stringhe palindrome sull'alfabeto* $\{0,1\}$ *(ad esempio abbiamo che* 00100, 010010 *sono palindromi mentre* 0101, 01001 *non lo sono) è context free.*

$$L = \{ x \mid \exists y \in \{0,1\}^*, \exists a \in \{0,1\} .\ x = y y^{rev} \lor x = y a y^{rev} \}$$

$$G = S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon \mid 1 \mid 0$$

Dimostro che questa grammatica genera il linguaggio L : $L = L(G)$
Bisogna quindi dimostrare:

$$x \in L \iff S \Rightarrow_* x$$

— Dimostro che $x \in L \implies S \Rightarrow_* x$ per induzione su |x|

Caso base

Considero le stringhe di lunghezza minima che appartengono al linguaggio

$$|x| = 1 \Rightarrow x \in \{\varepsilon, 0, 1\} \in L \Rightarrow S \to \varepsilon \mid 1 \mid 0$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per stringhe di lunghezza |x| ≤ n e dimostro che vale anche per stringhe di lunghezza |x| = n+1

Ipotesi induttiva: $\forall x \in \{0,1\}^* . |x| \leq n : x \in L \implies S \Rightarrow_* x$

Dimostro che vale per una stringa x nel linguaggio di lunghezza |x| = n+1

$$x \in L \Rightarrow \exists y \in \{0,1\}^*, \exists a \in \{0,1\} .\ x = y a a y^{rev} \lor x = y a y^{rev} \}$$

x è composta da una stringa x' di lunghezza |x'| < |x|, quindi se x è nel linguaggio lo è anche x'

$$x' = y y^{rev} \in L$$

Su x' posso applicare l'ipotesi induttiva

$$x' \in L \to S \Rightarrow_* x'$$

$$\to S \Rightarrow_* y y^{rev} \equiv S \Rightarrow_* y S y^{rev} \Rightarrow y \varepsilon y^{rev} = y y^{rev}$$

Quindi x si può costruire pertendo dalla derivazione di x': $a \in \{0,1\}$

- $x = y a a y^{rev} \to S \Rightarrow_* y S y^{rev} \Rightarrow y a S a y^{rev} \Rightarrow y a \varepsilon a y^{rev} = y a a y^{rev}$
- $x = y a y^{rev} \to S \Rightarrow_* y S y^{rev} \Rightarrow y a y^{rev}$

— Dimostro che $S \Rightarrow_n x \implies x \in L$ per induzione sulla lunghezza della derivazione

Caso base

Considero la derivazione più corta possibile

$n=1 \rightarrow S \Rightarrow \varepsilon|0|1 \rightarrow \{\varepsilon,0,1\} \in L$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza k ≤ n e dimostro che vale per derivazioni di lunghezza k = n+1

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}.\ k \leq n.\ S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L$

Dimostro che l'ipotesi valga per:

$$S \Rightarrow_{n+1} x \equiv S \Rightarrow aSa \overset{i.i}{\underset{n}{\Rightarrow}} ax'a = x \quad \text{con} \quad a \in \{0,1\}$$

Per ipotesi induttiva $x' \in L$ e quindi siccome aggiungere lo stesso simbolo sia a destra che a sinistra di x' mantiene la proprietà di essere palindroma, allora anche x è palindroma e quindi $x \in L$

Ho dimostrato che questo linguaggio è context free.

ESERCIZIO 1.2. *Dimostrare che il seguente linguaggio è context-free*

$$L = \{\ 0^{2n}10^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$$

$G = S \rightarrow 00S0 \mid 1$

Dimostro che questa grammatica genera il linguaggio: $L = L(G) \equiv x \in L \Leftrightarrow S \Rightarrow_* x$

Le tesi da dimostrare sono:

$t_1: \exists i \in \mathbb{N},\ x \in \Sigma^*.\ x = 0^{2i}10^i \leftrightarrow x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x$

$t_2: S \Rightarrow_n x \rightarrow \exists i \in \mathbb{N},\ x \in \Sigma^*.\ x = 0^{2i}10^i \leftrightarrow x \in L$

- Dimostro t1 per induzione sulla lunghezza delle stringhe

Caso base

Considero le stringhe di lunghezza minima che sono nel linguaggio.

$|x| = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow S \Rightarrow 1 = x$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi sia vera per le stringhe di lunghezza |x| ≤ n e dimostro che vale per stringhe di lunghezza |x| = n+1.

Ipotesi induttiva $\forall x \in \Sigma^*.\ |x| \leq n : x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x$

Considero la stringa x nel linguaggio di lunghezza |x| = n+1

$\exists x \in L.\ |x| = n+1$

La stringa x è composta da una stringa x' di lunghezza minore |x'| < |x|, quindi se x è nel linguaggio deve esserlo anche x' e di conseguenza posso appplicare l'ipotesi induttiva

$x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x' \quad n = i$

Per generare x da x', x' deve essere della forma $x' = 0^{2n-2}10^{n-1}$

$$x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* 0^{2n-2}10^{n-1} \equiv S \Rightarrow_* 0^{2n-2}S0^{n-1} \Rightarrow 0^{2n-2}10^{n-1} = x'$$

Quindi x si può costruire a partire dalla derivazione di x'

$$x \in L \rightarrow S \Rightarrow_* 0^{2n-2}S0^{n-1} \Rightarrow 0^{2n-2}00S0\,0^{n-1} = 0^{2n}S0^n \Rightarrow 0^{2n}10^n = x \in L$$

- Dimostro t2 per induzione sulla lunghezza delle derivazioni

Caso base

Considero il numero minimo di passi di derivazione per generare una stringa nel linguaggio.

$$n = 1 \rightarrow S \Rightarrow 1 \rightarrow 1 \in L$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza minore di n e dimostro che valga anche per derivazioni di lunghezza uguale a n+1.

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}.\ k \leq n : S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L$

Dimostro che valga per k = n+1

$$S \Rightarrow_{n+1} x \equiv S \Rightarrow 00S0 \overset{i.i.}{\Rightarrow_n} 00x'0 = x \rightarrow x \in L$$

Per ipotesi induttiva x' è nel linguaggio, quindi aggiungere a x' due zeri a sinistra e uno a destra fa rimanere la stringa risultante x nel linguaggio

Ho dimostrato che il linguaggio è context free.

Esercizio 1.3 (Grammatica e dimostrazione). *Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio è context free.*

$$L = \{\ 0^n 1^m 0^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\ \}$$

Intuitivamente questo linguaggio è context free perchè è presente una dipendenza tra gruppi diversi di simboli. In questo caso l'ultimo gruppo di zeri dipende dal primo gruppo di zeri e il gruppo di uni.

$$G = \begin{cases} S \rightarrow Z \\ Z \rightarrow 0Z0 \mid U \\ U \rightarrow 1U0 \mid \varepsilon \end{cases} = \begin{cases} S \rightarrow 0S0 \mid U \\ U \rightarrow 1U0 \mid \varepsilon \end{cases}$$

Dimostro che questa grammatica genera il linguaggio $L = L(G)$

Le tesi da dimostrare sono:

$$t_1 : x \in L \wedge \exists i,j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j} \rightarrow S \Rightarrow_* x$$

$$t_2 : S \Rightarrow_n x \rightarrow \exists i,j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j} \wedge x \in L$$

- Dimostro la tesi t1 per induzione sulla lunghezza delle stringhe

Caso base

Considero le stringhe di lunghezza minima che sono nel linguaggio:

$$|x| = 0 \rightarrow x = \varepsilon \rightarrow S \Rightarrow U \Rightarrow \varepsilon$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per stringhe di lunghezza |x| ≤ n e dimostro che vale anche per stringhe di lunghezza |x| = n+1.

Ipotesi induttiva $\forall x \in \Sigma^*.\ |x| \leq n : x \in L \wedge \exists i,j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j} \rightarrow S \Rightarrow_* x$

Considero le sringhe x nel linguaggio di lunghezza |x| = n+1 che sono composte da una stringa x' di lunghezza |x'| < |x|. Si distinguono i seguenti casi:

Se j > 1, allora $x = 0^i 1^j 0^{i+j}$ e x' è della forma $x' = 0^i 1^{j-1} 0^{i+j-1}$

Se j = 1, allora $x = 0^i 1 0^{i+1}$ e x' è della forma $x' = 0^i 0^i = 0^{2i}$

Se j = 0, allora $x = 0^{2i}$ e x' è della forma $x' = 0^{2(i-1)}$

Se i = 0 e j = 0, è il caso base.

In tutti questi casi |x'| < |x| e siccome x è nel linguaggio lo è anche x' quindi posso applicare l'ipotesi induttiva:

- $j > 1 \quad x' \in L \rightarrow S \Rightarrow x' \equiv S \Rightarrow_* 0^i 1^{j-1} U 0^{i+j-1} \Rightarrow 0^i 1^{j-1} 0^{i+j-1} = x'$

  Partendo da questa derivazione si può costruire x

  $$S \Rightarrow_* 0^i 1^{j-1} U 0^{i+j-1} \Rightarrow 0^i 1^j U 0^{i+j} \Rightarrow 0^i 1^j 0^{i+j} = x$$

- $j = 1 \quad x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x' \equiv S \Rightarrow_* 0^i U 0^i \Rightarrow 0^i 0^i = x'$

  Partendo da questa derivazione si può costruire x

  $$S \Rightarrow_* 0^i U 0^i \Rightarrow 0^i 1 U 0 0 0^i \Rightarrow 0^i 1 0^{i+1} = x$$

- $j = 0 \quad x' \in L \rightarrow S \Rightarrow_* x' \equiv S \Rightarrow_* 0^{i-1} S 0^{i-1} \Rightarrow 0^{i-1} 0^{i-1} = 0^{2(i-1)} = x'$

  Partendo da questa derivazione si può costruire x

  $$S \Rightarrow_* 0^{i-1} S 0^{i-1} \Rightarrow 0^{i-1} 0 S 0 0^{i-1} \Rightarrow 0^i U 0^i \Rightarrow 0^i 0^i = 0^{2i} = x$$

- Dimostro la tesi t2 per induzione sulla lunghezza delle derivazioni

Caso base

Considero la derivazione di lunghezza n minima che porta nel linguaggio:

$$n = 2 \rightarrow S \Rightarrow U \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \in L$$

Passo induttivo

Suppongo che la tesi valga per derivazioni di lunghezza minore di n e dimostro che vale anche per derivazioni di lunghezza n + 1:

Ipotesi induttiva $\forall k \in \mathbb{N}.\ k \leq n : S \Rightarrow_k x \rightarrow x \in L \wedge \exists i, j \in \mathbb{N}.\ x = 0^i 1^j 0^{i+j}$

Parto dall'inizio della derivazione e ne eseguo altre n in modo da avere una derivazione lunga n+1 e poter applicare l'ipotesi induttiva su quella lunga n.

1) Per come è fatta la grammatica U genera solo 1 a sinistra e 0 a destra o niente, quindi:

$$U \rightarrow 1U0 \mid \varepsilon \quad \text{allora} \quad \forall j \in \mathbb{N}.\ U \Rightarrow_n 1^j 0^j$$

$$S \Rightarrow_{n+1} x \equiv S \Rightarrow U \Rightarrow_n 1^j \varepsilon 0^j = x \in L$$

2) $S \Rightarrow_{n+1} x \equiv S \Rightarrow 0S0 \overset{ii}{\Rightarrow} 0\, 0^i 1^j 0^{i+j}\, 0 = 0^{i+1} 1^j 0^{i+j+1} = x \in L$

Ho dimostrato che il linguaggio è context free