Esame 21/09/21

Quesito 1. Sia $X_1, X_2, ...X_n$ un campione estratto da una popolazione normale di media incognita μ e varianza nota σ^2, con n il numero di campioni estratti dalla popolazione e $\bar{x}$ la media campionaria. L'intervallo di confidenza bilaterale per la media μ è costruito aggiungendo e sottraendo alla media campionaria un margine d'errore $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Il margine d'errore può essere ridotto se:

☒ si aumenta la dimensione del campione

☐ si aumenta il livello di confidenza $(1 - \alpha)$

☐ si diminuisce l'ampiezza del campione

Quesito 2. Dato un modello di regressione lineare semplice, la retta $Y = \alpha + \beta x$ presenta un buon adattamento ai dati se:

☐ la devianza spiegata (SS_E, explained sum of squares) è di poco inferiore alla devianza totale (S_{YY}, total sum of squares)

☐ la devianza residua (SS_R, residual sum of squares) è circa uguale alla devianza spiegata (SS_E, explained sum of squares)

☐ la devianza residua (SS_R, residual sum of squares) è di poco inferiore alla devianza totale (S_{YY}, total sum of squares)

?

Quesito 3. Dodici amici, dopo aver partecipato ad una cena, si salutano e ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

☐ 66

☐ 65

☐ nessuna delle altre risposte

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\,10!} = 66$$

Quesito 4. Dato un esperimento che consiste nell'estrarre 3 palline con ripetizione da un'urna che contiene 50 palline di cui 20 bianche, 18 nere e 12 rosse, si determini la probabilità che si verifichi l'evento "tre palline di diverso colore".

☐ 0.20736

☐ 0.03456

☐ nessuna delle altre risposte

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 12}{\binom{50}{3}} = 0.22$$

Quesito 5. Sia X una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori $x_1, x_2 ....$; il valore atteso (expectation) di X è (se esiste) il numero

☒ $E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$

☐ $Var(X) = E[(X - \mu)^2]$

☐ $E[X] = \sum_i x_i P(X \leq x_i)$

Quesito 6. Se $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ sono variabili aleatorie normali standard e indipendenti, allora

☒ la somma dei loro quadrati, $X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$ è una variabile aleatoria che prende il nome di $chi - quadro$ a n gradi di libertà.

☐ la variabile aleatoria $T_n = \frac{Z}{\sqrt{C_n/n}}$ è una variabile aleatoria che prende il nome di $chi - quadro$ a n gradi di libertà.

☐ la somma dei loro quadrati, $X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$ è una variabile aleatoria che prende il nome di t *di Student* con n gradi di libertà.

Quesito 7. Consideriamo una popolazione di elementi, a ciascuno dei quali è associata una grandezza numerica. Sia $X_1, X_2, ..., X_n$ un campione di dati estratto da questa popolazione. I valori associati a ciascuno degli elementi del campione sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite. Denotiamo con μ e σ^2 la loro media e la loro varianza. Quanto valgono il valore atteso e la varianza della media campionaria $\bar{X}$?

☒ $E[\bar{X}] = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

☐ $E[\bar{X}] = n\mu$ e $Var(\bar{X}) = n\sigma^2$

☐ $E[\bar{X}] = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \sigma^2$

Quesito 8. Se in un box-plot il rettangolo ha area nulla:

☒ la differenza interquartile è pari a zero

☐ il primo e il terzo quartile non esistono

☐ questa situazione non si può mai verificare

Quesito 9. Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti, allora

☒ $E[XY] = E[X]E[Y]$

☐ $Var(X) = Var(X + Y)$

☐ $Cov(X, Y) \neq 0$

Quesito 10. Supponiamo di realizzare n ripetizioni indipendenti di un esperimento, ciascuna delle quali può concludersi in un "successo" con probabilità p o in un "fallimento" con probabilità $1 - p$. Se X denota il numero totale di successi, X si dice variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p). La sua funzione di massa di probabilità è data da:

☒ $P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}, i = 0, 1, ..., n$

☐ $P(X = 0) = 1 - p$ e $P(X = 1) = p$ con $0 \leq p \leq 1$

☐ $P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

Su un tavolo ci sono due monete. Quando vengono lanciate, una moneta dà testa con probabilità 0.5 mentre l'altra dà testa con probabilità 0.6. Una moneta viene scelta a caso e lanciata. Indichiamo con M_1 l'evento "la moneta scelta è la moneta 1", con M_2 l'evento "la moneta scelta è la moneta 2", con T l'evento "uscita testa in un lancio" e con C l'evento "uscita croce in un lancio".
1. Qual è la probabilità che esca testa (usare due cifre decimali dopo la virgola).
2. Se esce croce, qual è la probabilità condizionata che fosse la moneta equilibrata, ossia quella che ha la stessa probabilità di dare testa o croce (usare due cifre decimali dopo la virgola).

$P(T|M_1)=0.5 \quad P(T|M_2)=0.6$

$P(T)=P(T|M_1)\cdot P(M_1)+P(T|M_2)\cdot P(M_2)=$

$=0.5\cdot 0.5+0.6\cdot 0.5=0.55$

$P(M_1|T^c)=\dfrac{P(T^c|M_1)\cdot P(M_1)}{P(T^c)}=\dfrac{0.5\cdot 0.5}{0.45}=0.55$

Esercizio 2 [4 punti]

In uno studio scientifico un gruppo di topi di 5 settimane fu sottoposto a una dose di radiazione di 300 rad. I topi furono quindi divisi in due gruppi, il primo dei quali venne tenuto in ambiente sterile, mentre il secondo in normali condizioni di laboratorio. I seguenti diagrammi stem and leaf riportano i giorni di vita dei topi che in seguito morirono di linfoma del timo.

Topi in ambiente sterile		Topi in ambiente normale	
1	58, 92, 93, 94, 95	1	59, 89, 91, 98
2	02, 12, 15, 29, 30, 37, 40, 44, 47, 59	2	35, 45, 50, 56, 61, 65, 66, 80
3	01, 01, 21, 37	3	43, 56, 83
4	15, 34, 44, 85, 96	4	03, 14, 28, 32
5	29, 37		
6	24		
7	07		
8	00		

Determinare le rispettive medie campionarie e mediane per i due gruppi di topi.

$\mu_1 = 344{,}069 \qquad \mu_2 = 292{,}315$

$M_1 = 259 \qquad M = 265$