

# Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2024/2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Concetti base</b>	<b>2</b>
1.1	Tipi di segnali . . . . .	2
1.2	Rappresentazione dei sistemi . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Notazioni</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Sistemi</b>	<b>6</b>
3.1	Approccio classico . . . . .	6
3.2	Approccio moderno . . . . .	6
3.3	Obsolescenza . . . . .	6
3.4	Causalità . . . . .	7
3.5	Stabilità . . . . .	7
3.5.1	Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output) . . . .	8
3.5.2	Stabilità Asintotica . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Modello di segnali</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Funzioni in C</b>	<b>12</b>
5.1	Funzione a variabili complesse . . . . .	12
5.2	Funzioni complesse . . . . .	14
5.3	Funzioni polinomiali . . . . .	15
5.3.1	Risoluzione . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Segnali</b>	<b>15</b>
6.1	Segnali continui . . . . .	15
6.1.1	Sinusoidale . . . . .	16
6.1.2	Esponenziali reali . . . . .	17
6.1.3	Esponenziali complessi . . . . .	18
6.2	Segnali discreti . . . . .	20
6.2.1	Sinusoidale . . . . .	20
6.2.2	Esponenziali Reali . . . . .	21
6.2.3	Esponenziali Complessi . . . . .	22
6.3	Rappresentazione . . . . .	24
6.4	Problema della periodicità . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Segnali generalizzati</b>	<b>27</b>
7.1	Segnali di impulso . . . . .	27
7.1.1	Finestra rettangolare unitaria . . . . .	29
7.1.2	Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario	29
7.2	Come si realizza un impulso . . . . .	30
7.3	Derivata dell'impulso . . . . .	31
7.4	Integrale dell'impulso . . . . .	32
7.4.1	Funzione gradino . . . . .	32
7.4.2	Funzione rampa . . . . .	33
7.4.3	Funzione parabolica . . . . .	33
7.4.4	A cosa servono i segnali canonici . . . . .	34
7.5	Proprietà degli impulsi . . . . .	34

# 1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

## 1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

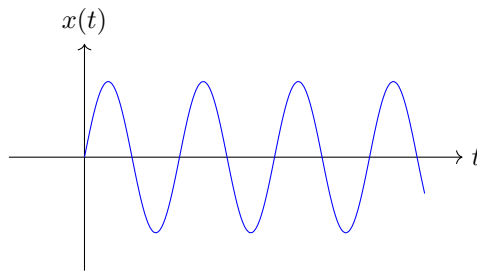


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

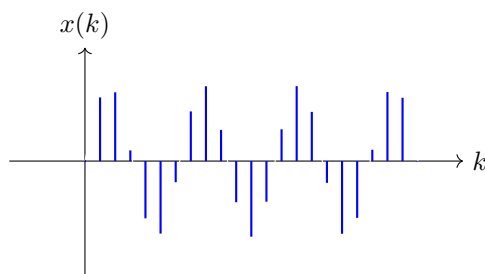


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

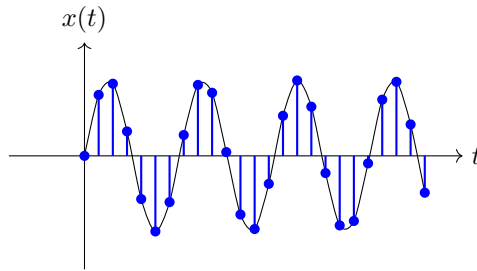


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

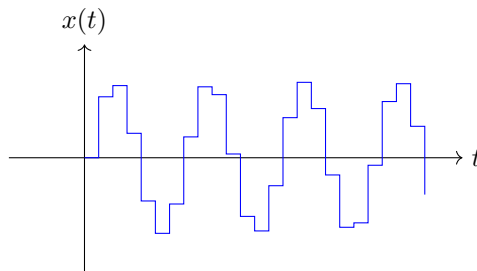


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni  $(x, y)$ .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale  $(x, y)^3$  per rappresentare ogni colore (R,G,B).

## 1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

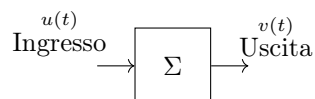


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

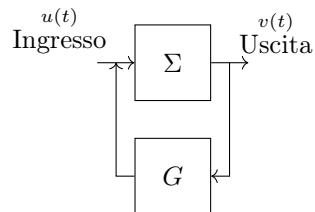


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

## 2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1.  $t, \tau, t_i$ : tempo continuo
2.  $k$ : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se  $v_1(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t)$  e  $v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_2(t)$  allora  $v_1(t) + v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t) + u_2(t)$ .
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.

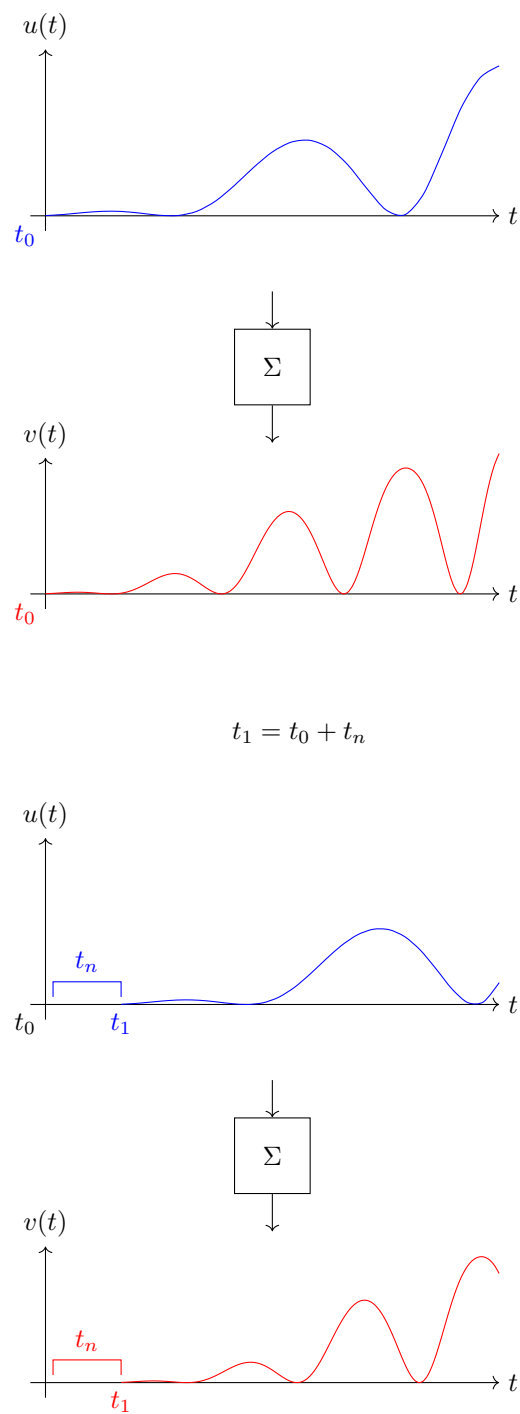


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

## 3 Sistemi

### 3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

### 3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:

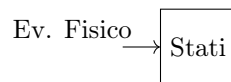


Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

### 3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

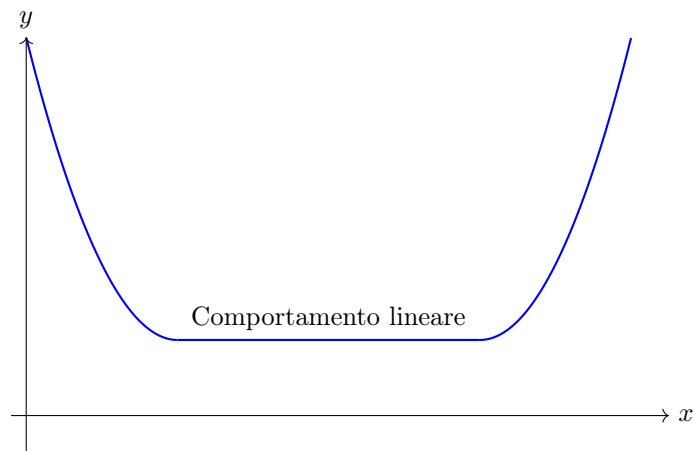


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

### 3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

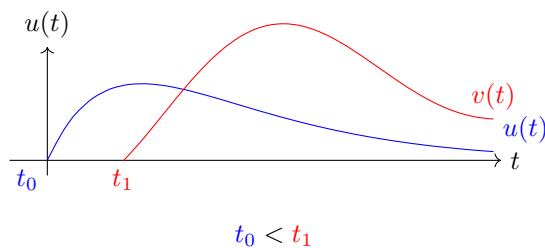


Figura 10: Esempio di causalità

### 3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.



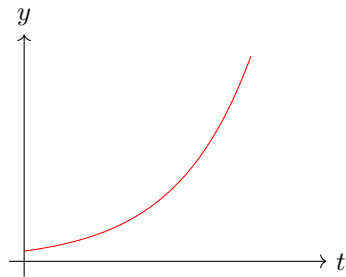


Figura 11: Sistema instabile

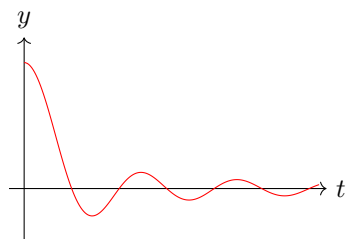


Figura 12: Sistema stabile

### 3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $M, N \in \mathbb{R}$  non per forza uguali

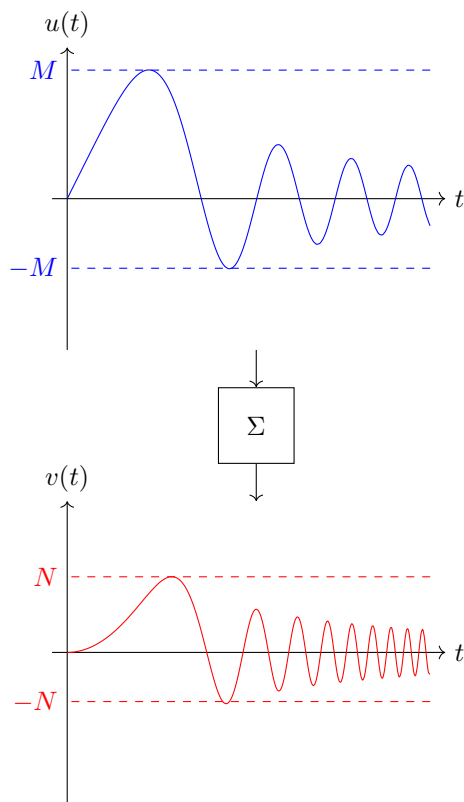


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

### 3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

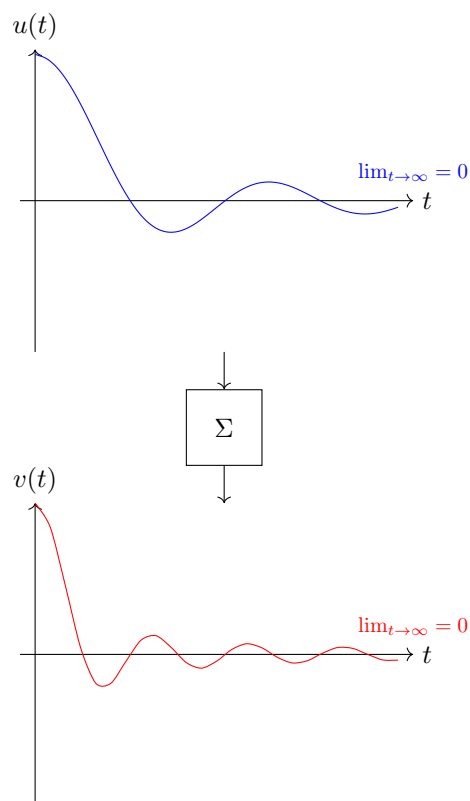


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

## 4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

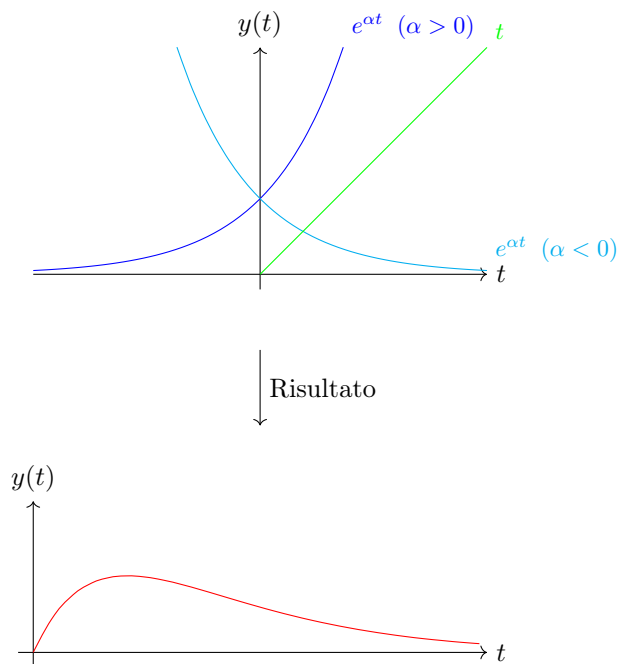


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con  $l = 1$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con  $\alpha < 0$  il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con  $l = 2$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome  $\alpha \in \mathbb{C}$  si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

$\lambda$  è la parte reale

$j\omega$  è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

**Definizione 4.1** (Complesso coniugato). A ogni numero complesso è associato un coniugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

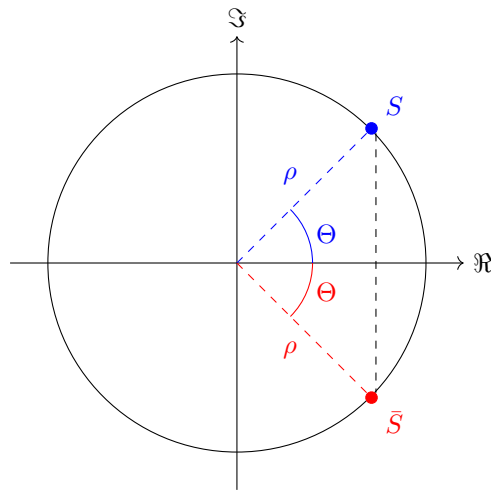


Figura 16: Circonferenza di proiezione

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

## 5 Funzioni in C

### 5.1 Funzione a variabili complesse

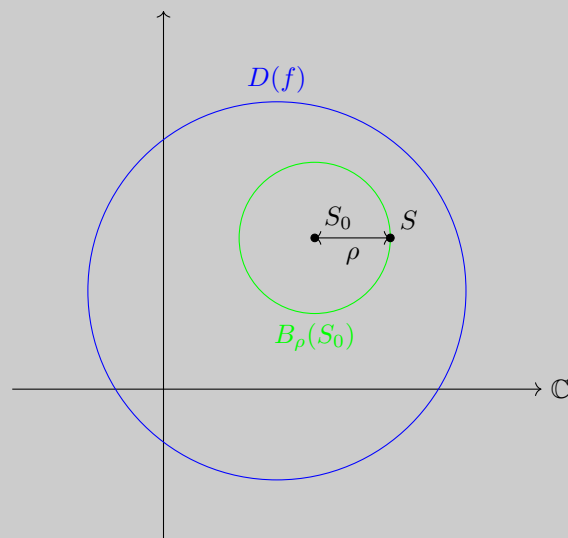
**Definizione 5.1** (Funzione a variabile complessa). Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

**Definizione 5.2** (Punto interno). Un punto  $S_0$  appartenente a un intorno  $D(f) \subseteq \mathbb{C}$  è interno a  $D(f)$  se e solo se esiste un disco  $B_\rho(S_0)$  di raggio  $\rho \in \mathbb{R}_+$  centrato in  $S_0$  tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi  $D(f)$  è un dominio e  $B_\rho(S_0)$  è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$

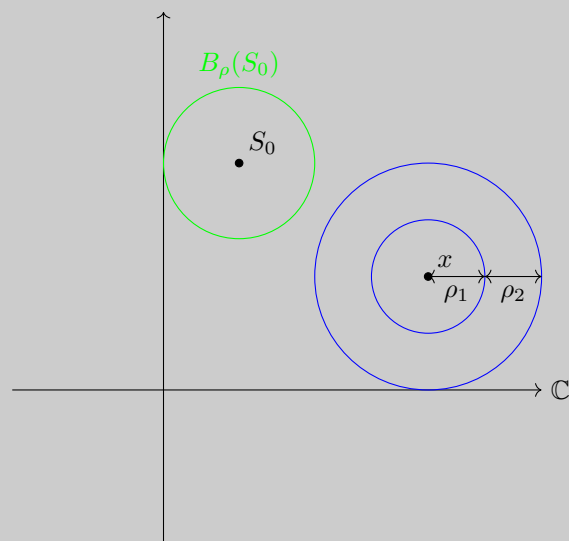


**Definizione 5.3** (Insieme aperto). È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

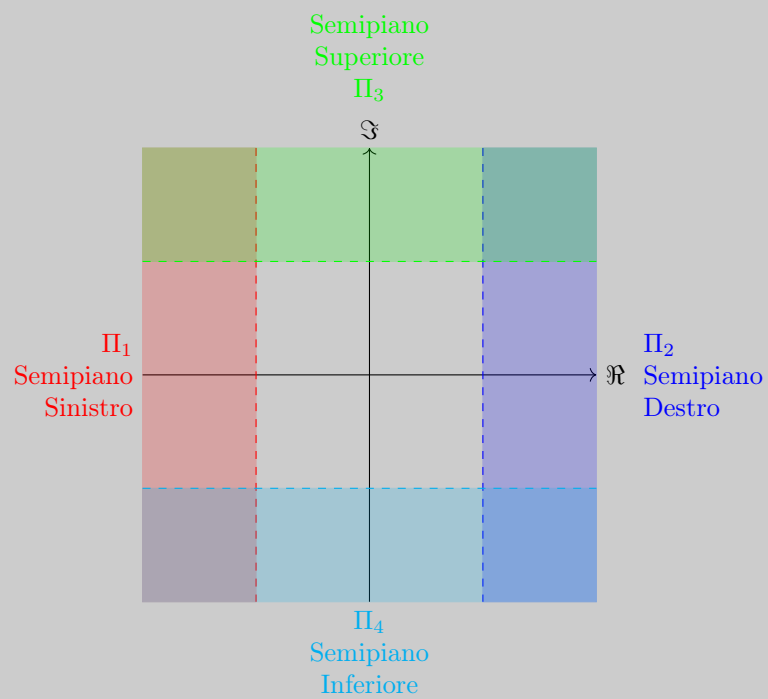
Ad esempio:

- insieme  $\mathbb{C}$
- insieme  $\emptyset$
- i dischi in un punto  $S_0$ ,  $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto  $x$ ,

$$\{S \in \mathbb{C}, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$



- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



## 5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$

- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad k, n \in \mathbb{Z}$  (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad S, S_0 \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{Z}$  (Serie di potenze)

### 5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con  $n = 2$ :

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con  $n = 3$ :

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

#### 5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

**Teorema 5.1** (Teorema fondamentale delle radici). Ogni polinomio  $P(S)$  a coefficienti complessi di grado  $n > 0$  ha  $n$  **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^r (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:

$s_r$  sono delle radici

$\mu_r$  sono le molteplicità delle radici

$a_n$  è il coefficiente del polinomio

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$$

## 6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

### 6.1 Segnali continui

$$t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



### 6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- $A$  è l'ampiezza
- $\omega$  è la frequenza  $f = \frac{1}{T}$  ( $T$  = periodo )
- $\phi$  è la fase

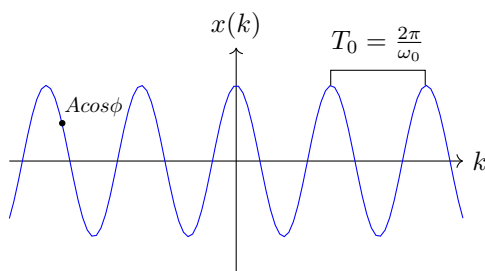


Figura 17: Funzione sinusoidale

- **Periodico**

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\omega_0(t - t_0)] = A \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta \phi})$$

$$A \cos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

- Se  $\phi = 0$  Il segnale assume la seguente forma:

$$A = \cos(\omega_0 t)$$

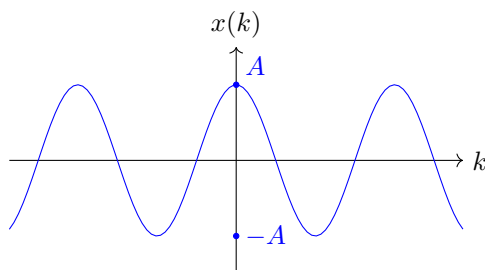


Figura 18: Funzione coseno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A\sin(\omega_0 t) \\ A\cos(\omega_0(t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$

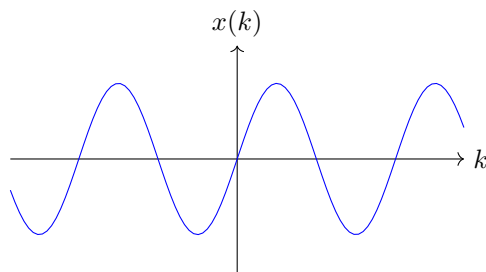


Figura 19: Funzione seno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

### 6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

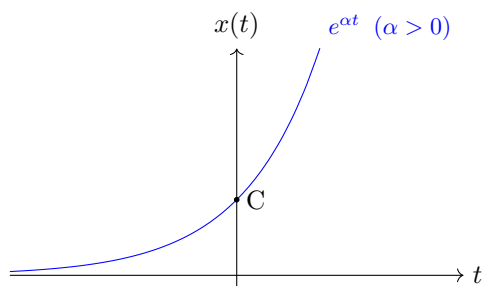


Figura 20: Esempio di segnale

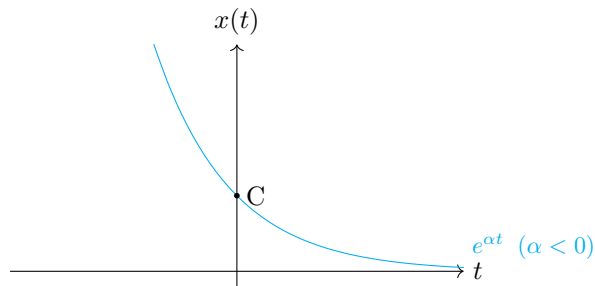


Figura 21: Esempio di segnale

- Shift Temporale

$$C e^{\alpha(t+t_0)} = C e^{\alpha t} \cdot \underbrace{C e^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

### 6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = C e^{\alpha t}$$

$$C = |c| e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_o \text{ (cartesiana)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_o)t} = \\ &= |c| e^{rt} \cdot e^{j(\omega_o t + \Theta)} \text{ (Eulero)} \end{aligned}$$

**Definizione 6.1** (Eulero). La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_o t + \Theta)} = \cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta)$$

$$x(t) = |c| e^{rt} \cdot (\cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta))$$

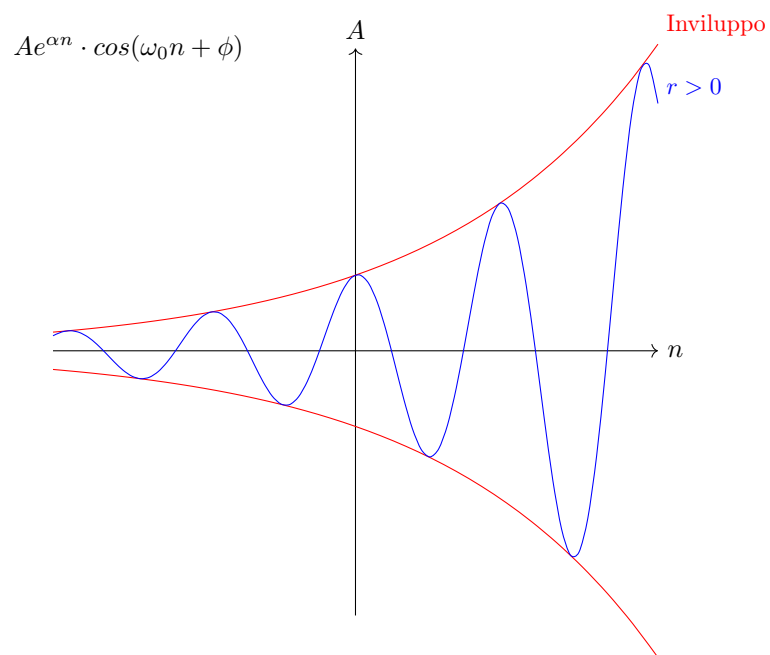


Figura 22: Esponenziale sinusoidale continuo con  $r > 0$

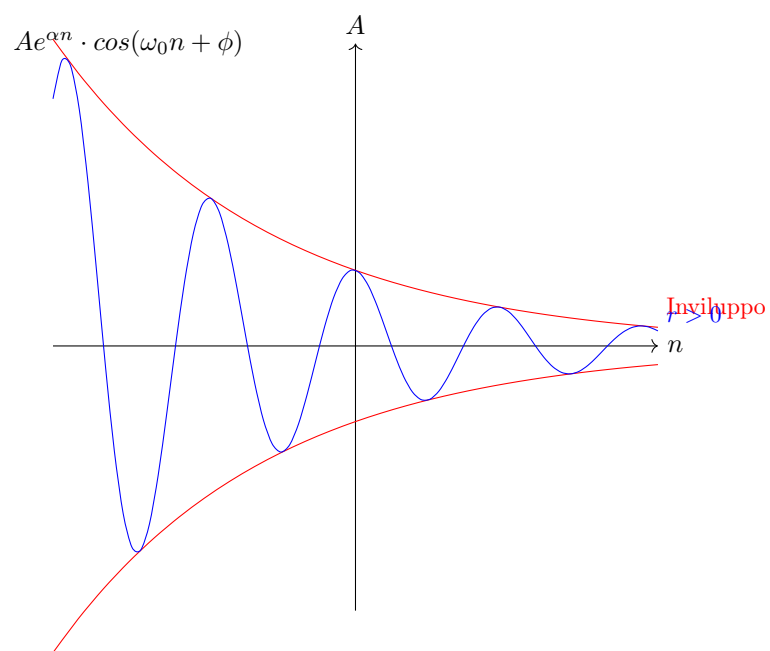


Figura 23: Esponenziale sinusoidale continuo con  $r < 0$

## 6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

### 6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- $A$  è l'ampiezza
- $\Omega_0$  è la frequenza  $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$
- $\phi$  è la fase

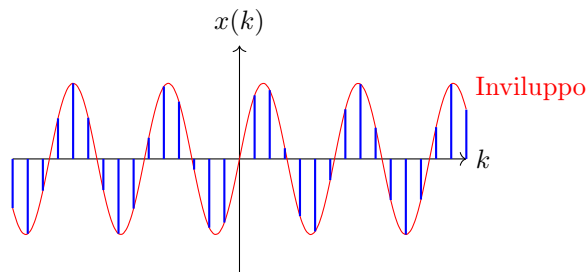


Figura 24: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] = A \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta\phi})$$

- Se  $\phi = 0$  Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] \stackrel{?}{=} A \cos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove  $\phi$  è il rapporto tra  $\phi$  e  $\Omega_0$  è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

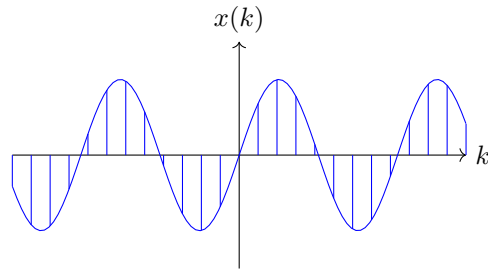


Figura 25: Calcolo del cambio di fase

**Esempio 6.1.**

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m = 1)$$

### 6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^\beta; \quad C, \alpha \in \mathbb{R}$$

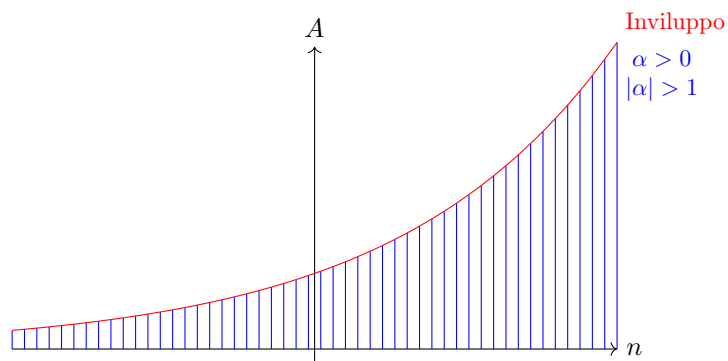


Figura 26: Esponenziale reale con  $\alpha > 0$   $|\alpha| > 1$

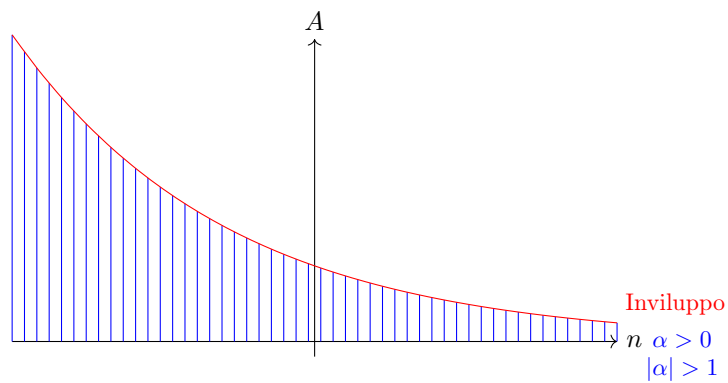


Figura 27: Esponenziale reale con  $\alpha > 0$   $|\alpha| < 1$

### 6.2.3 Esponenziali Complessi

$$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

dove

$$C = |C|e^{j\Theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = |C|e^{j\Theta} \cdot (|\alpha|e^{j\omega_0})^n =$$

$$|C| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \Theta)}$$

Usando la formula di Eulero:

$$x[n] = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot (\cos(\omega_0 n + \Theta) + j\sin(\omega_0 n + \Theta))$$

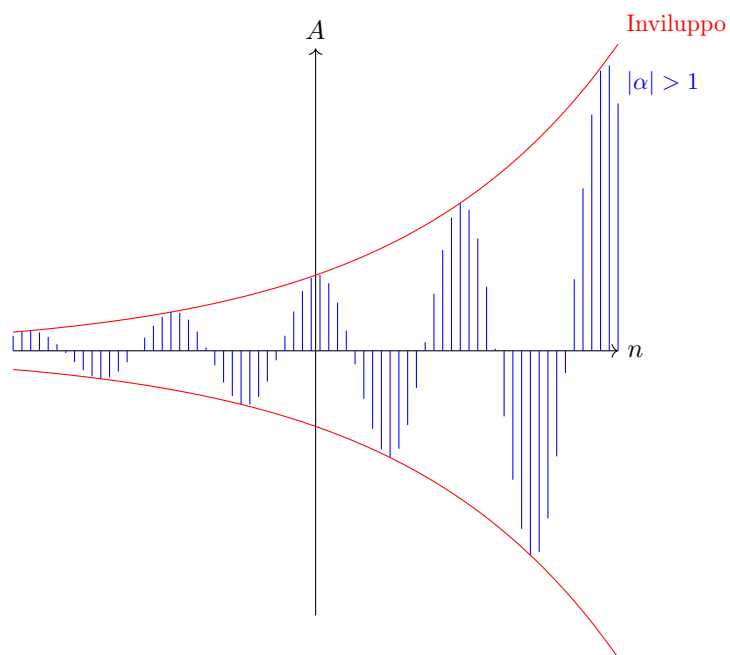


Figura 28: Esponenziale sinusoidale con  $|\alpha| > 1$

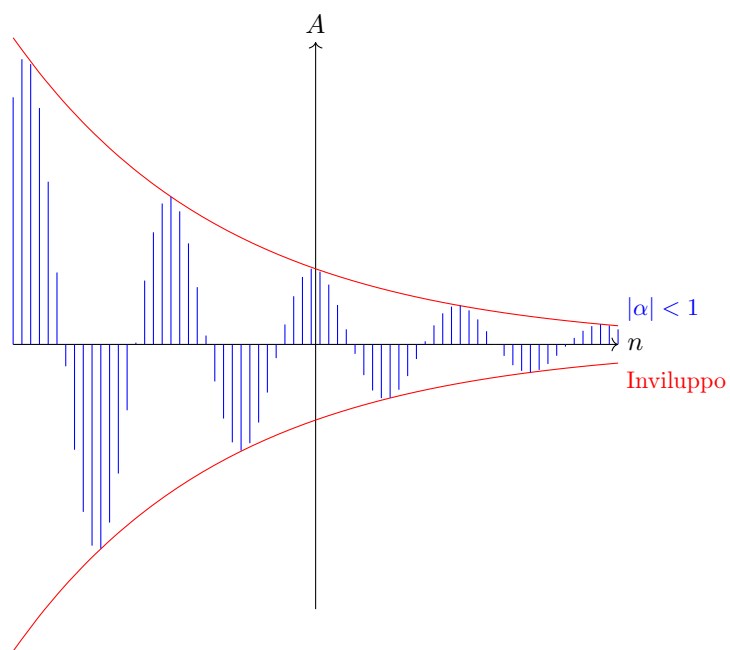


Figura 29: Esponenziale sinusoidale con  $|\alpha| < 1$



### 6.3 Rappresentazione

I segnali che appartengono all'insieme dei complessi sono tridimensionali e sono rappresentati in 2 assi cartesiani diversi, che mostrano lo stesso segnale, ma da 2 punti di vista differenti. Il segnale viene generato da un punto che continua a girare periodicamente su una circonferenza proiettando su entrambi gli assi il suo valore.

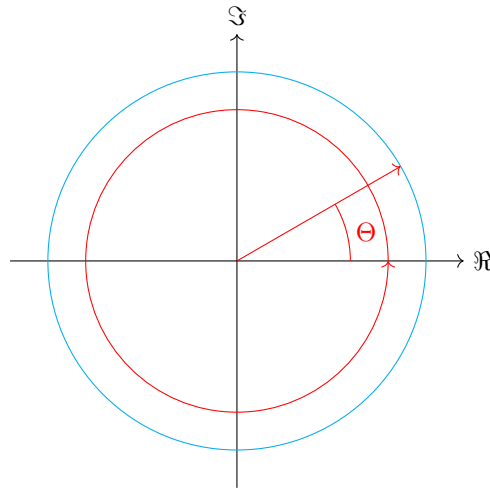


Figura 30: Circonferenza di proiezione

La proiezione sull'asse dei reali è la parte reale del segnale:

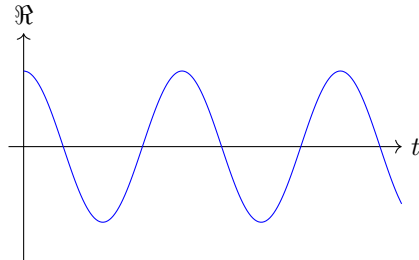


Figura 31: Proiezione su asse reale

La proiezione sull'asse degli immaginari è la parte immaginaria del segnale ed è traslata di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alla parte reale:

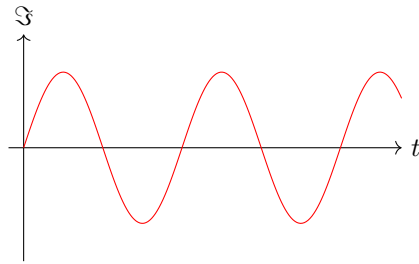


Figura 32: Proiezione su asse immaginario

In 3 dimensioni diventa:

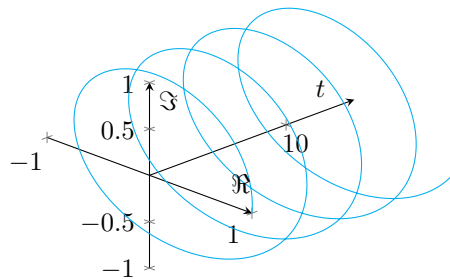


Figura 33: Circonferenza di proiezione in 3D

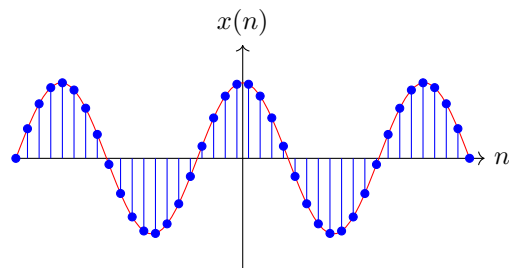
## 6.4 Problema della periodicità

Il problema della periodicità consiste nel fatto che alcuni segnali possono sembrare periodici anche se non lo sono. Ad esempio:

**Esempio 6.2.**

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}} m = 12m$$

Con  $m = 1$ :

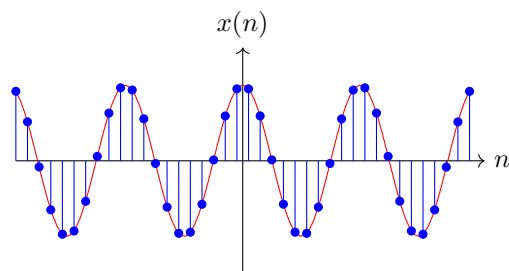
$$T_0 = 12 \cdot 1 = 12 \in \mathbb{Z}$$

Quindi il segnale è periodico.

**Esempio 6.3.**

$$\Omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} m = \frac{31}{4} m$$

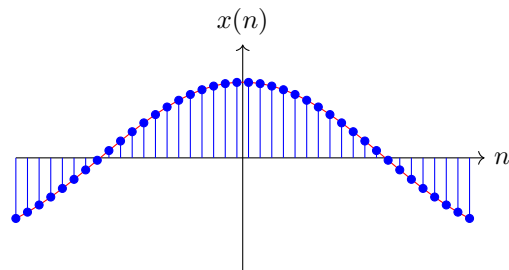
Con  $m = 4$ :

$$T_0 = \frac{31}{4} \cdot 4 = 31 \in \mathbb{Z}$$

**Esempio 6.4.**

$$\Omega_0 = \frac{1}{6}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

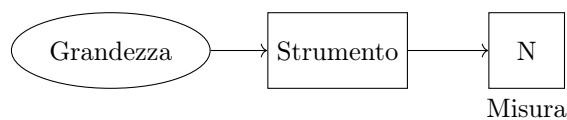
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} m = 2\pi \cdot 6m$$

Non esiste  $m \in \mathbb{Z}$  che mi tolga  $\pi$  dalla formula del periodo, quindi il segnale non è periodico anche se lo sembra

## 7 Segnali generalizzati

Ci sono alcune grandezze che non si possono facilmente calcolare con i segnali tradizionali, quindi analiticamente, ma solo con strumenti appositi.

**Esempio 7.1.** La tensione della corrente elettrica



Per misurare la tensione si usa il multimetro. Queste sono grandezze definite all'interno di un'operazione integrale.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma(t)}_{\text{Grandezza}} \cdot \underbrace{\phi(t)}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{N}_{\text{Misura}}$$

### 7.1 Segnali di impulso

- **Impulso di Dirac** È una funzione con supporto **infinitesimo**, altezza **infinita** e area = 1

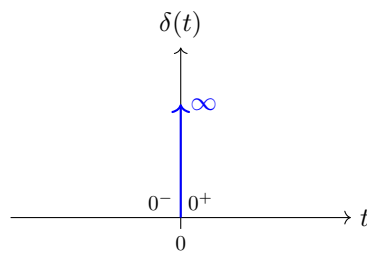


Figura 34: Impulso di Dirac

È definita in  $[0^-, 0^+]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{\text{Impulso}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{1}_{\text{Valore}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Impulso unitario**

Matematicamente non si usa l'impulso di Dirac, ma l'**impulso unitario**.

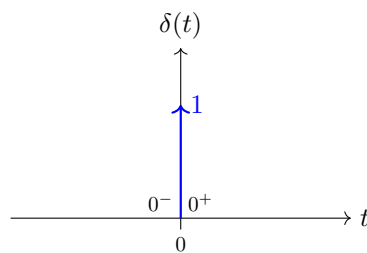


Figura 35: Impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In natura, il segnale che si avvicina di più al segnale di impulso è il seguente:

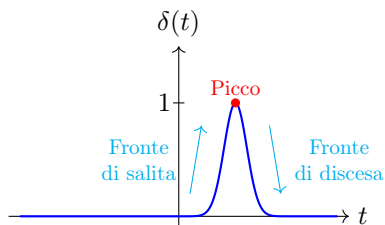


Figura 36: Segnale che si avvicina all'impulso

In ogni caso, non si avvicina mai all'impulso di Dirac, perchè ha sempre un fronte di salita e discesa, quindi non è istantaneo.

### 7.1.1 Finestra rettangolare unitaria

È una funzione che definisce un rettangolo di altezza  $A = 1$  e larghezza  $T$ .

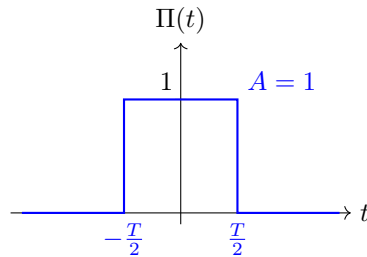


Figura 37: Finestra rettangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se questo segnale è ripetuto nel tempo si chiama **onda quadra**.

Alcune applicazioni possono essere:

- Gestione di motori elettrici
- Equalizzazione di audio

### 7.1.2 Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario

È una funzione che definisce un triangolo di altezza  $A = 1$  e larghezza  $T$ .

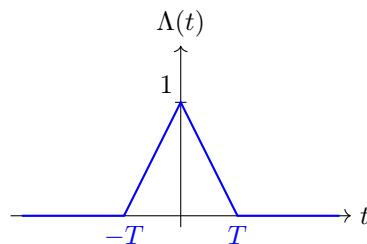


Figura 38: Finestra triangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{se } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le applicazioni sono le stesse del rettangolo, ma con una forma più armonica (smooth). Si possono anche generare segnali sinusoidali.

## 7.2 Come si realizza un impulso

- Rettangolo:

L'impulso si definisce come una successione di funzioni per cui vengono cambiati dei valori:

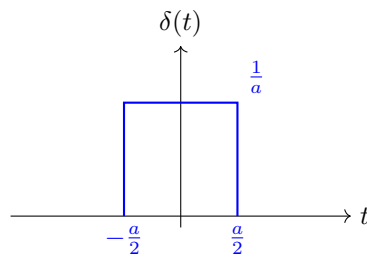


Figura 39: Impulso rettangolare

L'obiettivo è raddoppiare l'altezza e dimezzare la larghezza, mantenendo l'area uguale.

Calcoliamo l'area di questa funzione:

$$Area = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

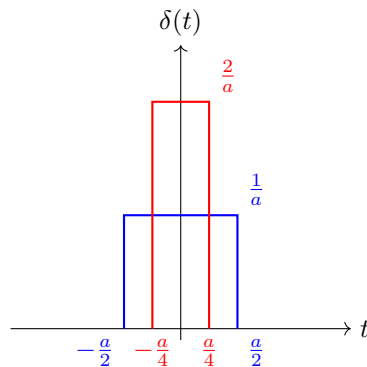


Figura 40: Impulsi rettangolari

E calcoliamo di nuovo l'area

$$Area = \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4}\right) \cdot \frac{2}{a} = \frac{2a}{4} \cdot \frac{2}{a} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

- Triangolo:

Facciamo la stessa cosa con il triangolo:

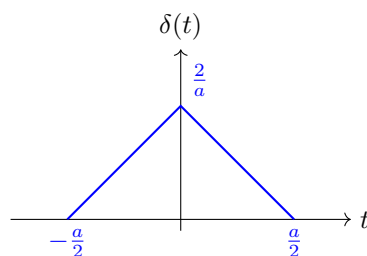


Figura 41: Impulso triangolare

$$Area = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

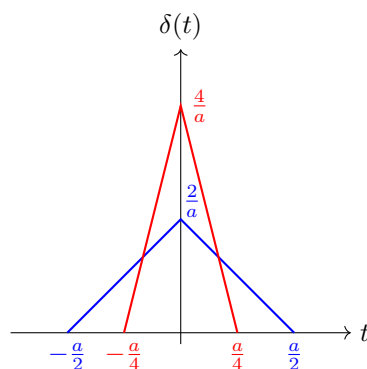


Figura 42: Impulsi triangolari

$$Area = \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4}\right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

### 7.3 Derivata dell'impulso

Considerando l'impulso come successione di triangoli abbiamo che all'infinito ci sarà un fronte di salita e discesa, quindi la derivata saranno degli impulsi positivi e negativi.

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \dot{\delta}(t) = \delta'(t)$$



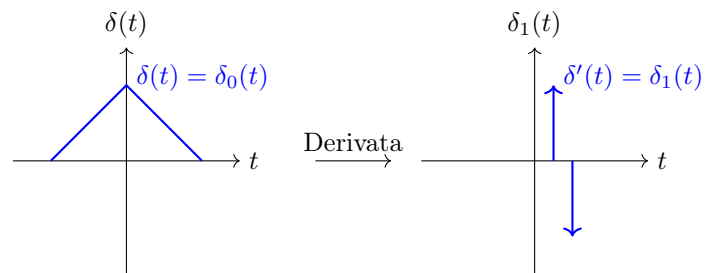


Figura 43: Derivata del segnale triangolare

## 7.4 Integrale dell'impulso

I segnali polinomiali (o segnali canonici) sono definiti come l'integrale di un impulso. È definito come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int \delta_0(t) dt = \delta_{-1}(t)$$

### 7.4.1 Funzione gradino

Si ottiene integrando una volta:

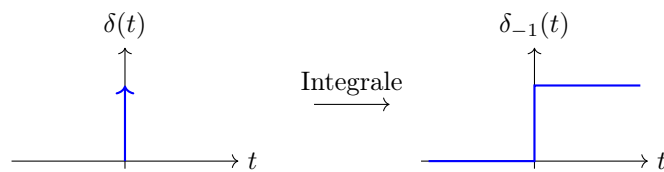


Figura 44: Funzione gradino

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Moltiplicare un segnale per il gradino unitario permette di ottenere la parte positiva del segnale:

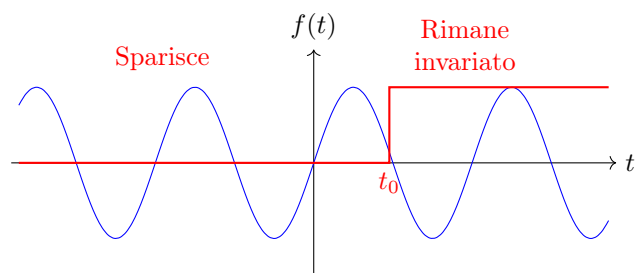


Figura 45: Moltiplicazione per gradino unitario

Si ottiene:

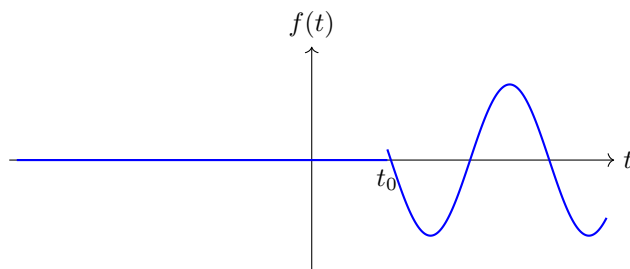


Figura 46: Risultato della moltiplicazione

$$f(t) \cdot \delta_{-1}(t) = f_1(t) \text{ (che è causale)}$$

La funzione del gradino è anche nota come **funzione di Heaviside**.

#### 7.4.2 Funzione rampa

Si ottiene integrando due volte:

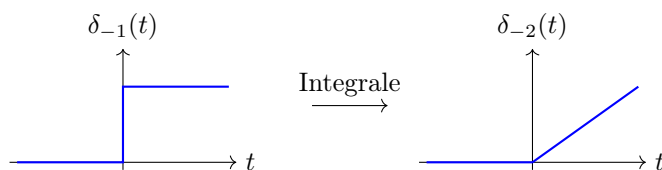


Figura 47: Funzione rampa

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 7.4.3 Funzione parabolica

Si ottiene integrando tre volte:

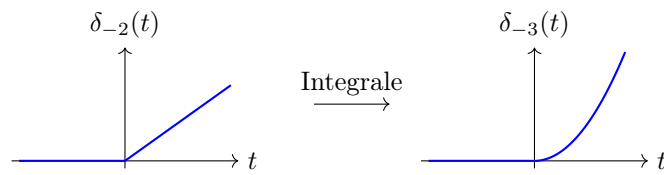


Figura 48: Funzione rampa

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 7.4.4 A cosa servono i segnali canonici

Non si sa cosa contengono i sistemi LTI che si analizzano, perchè si gestiscono solo gli input e gli output.

Di solito si cerca di dare il segnale gradino al sistema e si guarda qual'è la risposta del sistema a questo segnale. Ad esempio:

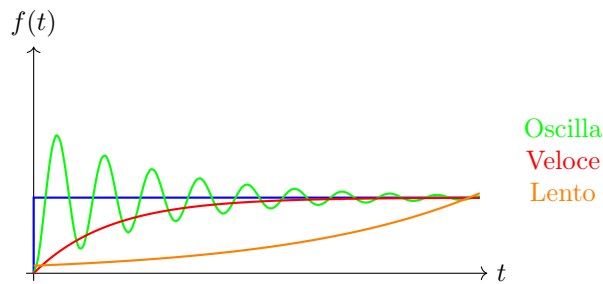


Figura 49: Esempi di risposta di un sistema

**Esempio 7.2.** Il sistema rosso cresce lentamente, ma ad un certo punto arriva a 1, mentre quello arancione è un sistema più lento.

Quello verde è più veloce, ma non arriva mai a regime perchè continua a oscillare e quindi non è asintoticamente stabile, ma potrebbe essere BIBO stabile.

- Per una luce il sistema verde potrebbe andare bene se l'oscillazione non è troppa
- Per un sistema frenante il sistema arancione potrebbe essere troppo lento

## 7.5 Proprietà degli impulsi

È un segnale ideale (canonico) centrato in 0 e definito in  $[0^-, 0^+]$  con altezza 1.

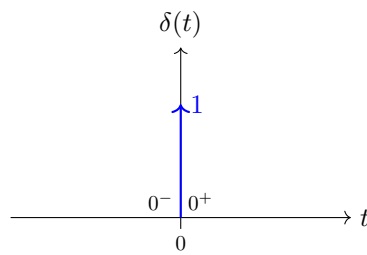


Figura 50: Impulso unitario

- **Pari:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Area unitaria**

Se

$$0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Allora

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1$$

Altrimenti

$$\int_a^b \delta(t) dt = 0$$

Cioè se l'intervallo contiene lo 0, l'area è 1, altrimenti è 0.

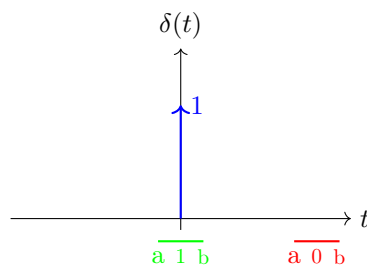


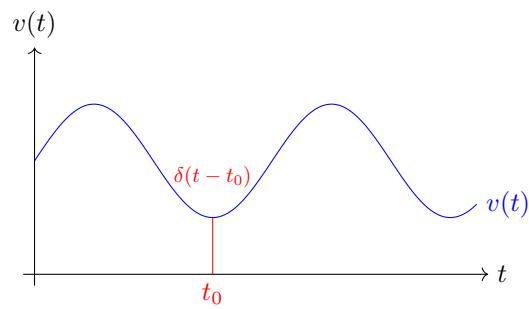
Figura 51: Area dell'impulso

- **Proprietà del campionamento o riproducibilità**

Se  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua in  $t_0 \in \mathbb{R}$ , allora:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Se prendo un impulso traslato in  $t_0$  e lo moltiplico per una funzione ottengo il valore della funzione in quel punto.



Per riuscire a passare dal continuo al discreto si continua a moltiplicare la funzione per un impulso traslato in  $t_0$  e si ottiene il valore della funzione in quel punto.

Questa formula può essere riscritta come:

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau$$

Il valore di una funzione in  $t_0$  l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in  $t_0$ .