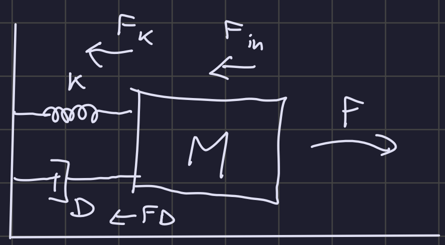
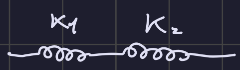
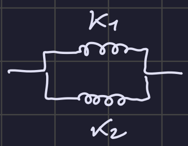
Sistema massa-molla-smorzatore



molle

- serie 

$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$

- parallelo 

$k = k_1 + k_2$

smorzatore

- serie 

$d = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$

- parallelo 
$d = d_1 + d_2$

Equazione del sistema

$$\underbrace{M}_{a_2} x''(t) + \underbrace{D}_{a_1} x'(t) + \underbrace{K}_{a_0} x(t) = \underbrace{F}_{b_0}(t)$$

$$\downarrow$$

$$a_1 \cdot \frac{d^2 x(t)}{d^2 t} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_0 F(t)$$

Data questa equazione prendiamo un sistema d'esempio:

es1: Radici reali coincidenti

$M = 2$
$D = 3$
$K = 1$

$$2x''(t) + 3x'(t) + x(t) = F(t)$$

Consideriamo solo la risposta libera:

$$P(s) = 2s^2 + 3s + 1 = 0$$

Soluzioni:

$$(2s+1)(s+1)=0$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad r=2$ (numero di soluzioni)

$\lambda_2 = -1$ $\quad \mu_{1,2}=1$ (molteplicitá)

Entrambe le soluzioni hanno parte reale < 0, di conseguenza il sistema é asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0^-)=1 \\ x'(0^-)=0 \end{cases}$$

Risposta libera generica

$$v_L(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_2 \, e^{-t} \cdot \frac{t^0}{0!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

$$= A \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + B\,e^{-t}$$

Calcolo le derivate

$$v(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + B\,e^{-t}$$

$$v'(t) = -\frac{1}{2} A \cdot e^{-\frac{1}{2}t} - B\,e^{-t}$$

Calcolo i coefficienti

$$\begin{cases} v(0^-) = A \cdot e^{-\frac{1}{2}0^-} + B\,e^{-0^-} = 1 \\ v'(0^-) = -\frac{1}{2} A \cdot e^{-\frac{1}{2}0^-} - B\,e^{-0^-} = 0 \end{cases}$$

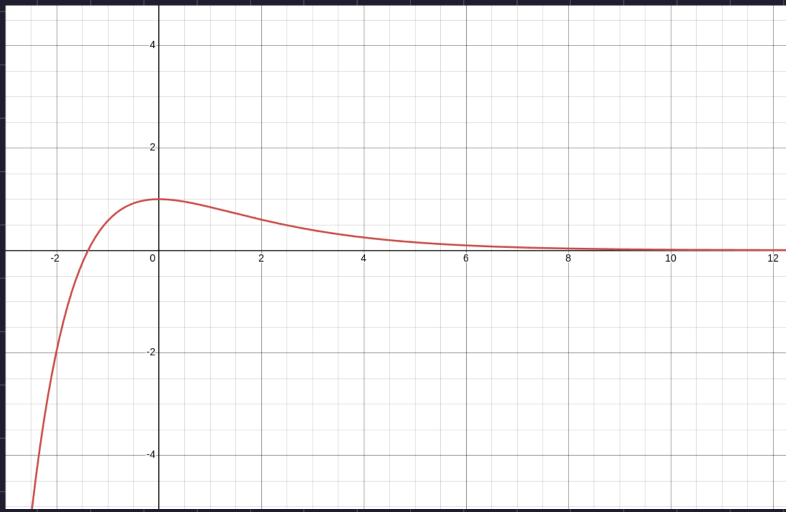
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -\frac{1}{2} A - B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B \\ -\frac{1}{2}(1-B) - B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Risposta libera specifica

$$V_c(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t} \longrightarrow$$



Questo é un sistema sovrasmorzato perché cala velocemente

ES2: radici reali coincidenti

$M = 1$
$K = 4$
$D = 4$

$$C.I = \begin{cases} x(0^-) = 1 \\ x'(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$$

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

$$(s+2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \qquad r = 1 \qquad \mu_1 = 2$$

$\forall i \ \ Re(\lambda_i) < 0$

Sistema asintoticamente stabile, quindi anche BIBO stabile

$$V_c(t) = c_{1,0} \cdot e^{-2t} + c_{1,1} \cdot e^{-2t} \cdot t$$

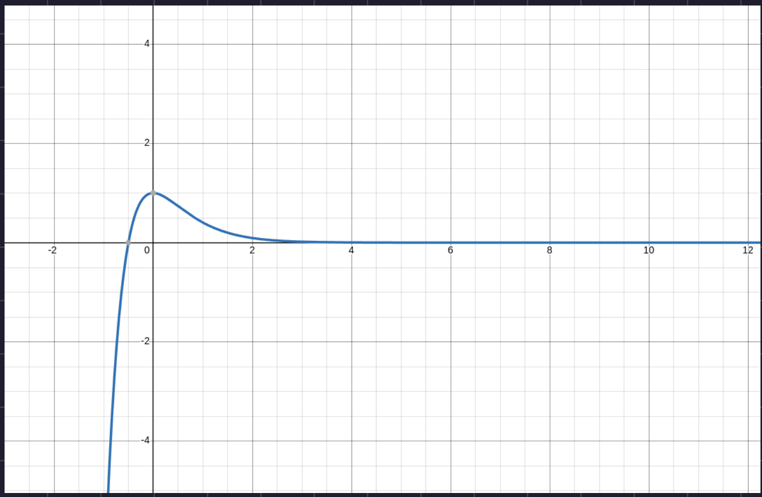
$$= Ae^{-2t} + Be^{-2t} \cdot t$$

$$V_c'(t) = -2A \cdot e^{-2t} - 2Be^{-2t}\, t + Be^{-2t}$$

$$\begin{cases} V_c(0^-) = Ae^{-2\cdot 0^-} + Be^{-2\cdot 0^-} \cdot 0^- = 1 \\ V_c'(0^-) = -2A \cdot e^{-2\cdot 0^-} - 2Be^{-2\cdot 0^-}\, 0^- + Be^{-2\cdot 0^-} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$v_L(t) = e^{-2t} + 2e^{-2t}\cdot t \longrightarrow$$



Questo sistema si chiama criticamente - smorzato perché decresce molto più velocemente

ES3: soluzioni complesse coniugate

$M = 1$
$K = 3$
$D = 2$

$$C.I = \begin{cases} x(0^-) = 1 \\ x'(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = 0$$

$$s^2 + 2s + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}\, i}{2} = \frac{-\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{2}\cdot i}{\cancel{2}} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$\lambda_1 = -1 - i\sqrt{2}$ $\qquad \nu = 2$

$\lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}$ $\qquad \mu_{1,2} = 1$

Il sistema é asintoticamente stabile, quindi anche BIBO stabile

$\forall i \ \ Re(\lambda_i) < 0$

$$v_L(t) = C_{1,0} \cdot e^{(-1-i\sqrt{2})t} + C_{2,0}\, e^{(-1+i\sqrt{2})t}$$
$$= A \cdot e^{(-1-i\sqrt{2})t} + B\, e^{(-1+i\sqrt{2})t}$$

$$v_L'(t) = (-1-i\sqrt{2})\, A\, e^{(-1-i\sqrt{2})t} + (-1+i\sqrt{2})\, B\, e^{(-1+i\sqrt{2})t}$$

$$\begin{cases} v_L(0^-) = A \cdot e^{(-1-i\sqrt{2})0^-} + B\, e^{(-1+i\sqrt{2})0^-} = 1 \\ v_L'(0^-) = (-1-i\sqrt{2})\, A\, e^{(-1-i\sqrt{2})0^-} + (-1+i\sqrt{2})\, B\, e^{(-1+i\sqrt{2})0^-} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ (-1-i\sqrt{2})A + (-1+i\sqrt{2})B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B \\ (-1 - i\sqrt{2})(1 - B) + (-1 + i\sqrt{2})B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\, i \\ B = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\, i \end{cases}$$

$$V_c(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i\right) e^{(-1 - i\sqrt{2})t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} i\right) e^{(-1 + i\sqrt{2})t}$$

Formula di eulero $e^{(\alpha \pm j\omega)t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t)\right)$

$\downarrow$

$$e^{(-1 \mp i\sqrt{2})t} = e^{-1 \cdot t}\left(\cos(\sqrt{2}\, t) \mp i \sin(\sqrt{2}\, t)\right)$$

$$V_c(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i\right) e^{-t}\left(\cos(\sqrt{2}\, t) - i \sin(\sqrt{2}\, t)\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} i\right) e^{-t}\left(\cos(\sqrt{2}\, t) + i \sin(\sqrt{2}\, t)\right)$$

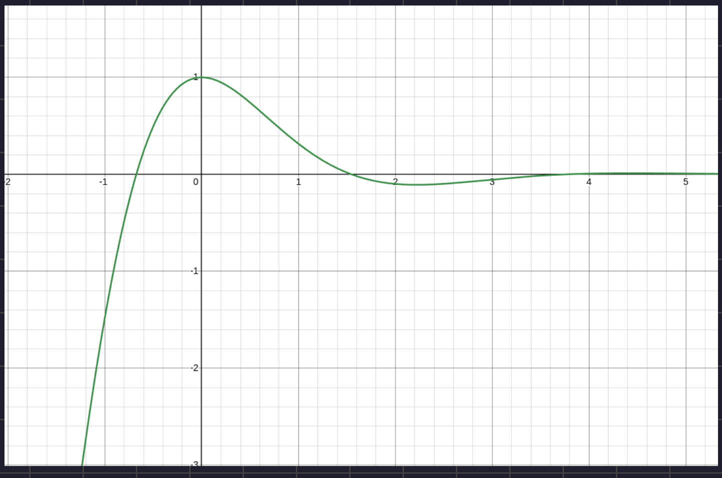
Termini oscillatori

Ci si aspetta che il sistema oscilli un po' prima di diventare stabile

Si può riscrivere come:

$$V_c(t) = e^{-t}\left(\cos(\sqrt{2}\, t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\, t)\right)$$

Questo sistema si chiama sotto smorzato perché da negativo torna positivo



ES4: Radici immaginarie pure $(Re = 0)$

$M = 1$
$K = 3$
$D = 0$

$C.I = \begin{cases} x(0^-) = 1 \\ x'(0^-) = 0 \end{cases}$

$$x''(t) + 3x(t) = 0$$

$$s^2 + 3 = 0$$

$\lambda_1 = -\sqrt{3}\,i$ $\quad r = 2$

$\lambda_2 = \sqrt{3}\,i$ $\quad \mu_{1,2} = 1$

Il sistema non é asintoticamente stabile neanche semplicemente stabile, perché c'é piú di 1 soluzione con parte reale $= 0$

$\left(\forall_i \; Re(\lambda_i) < 0 \;\; o \;\; se \right.$
$\left. \exists \lambda \; t.c. \; Re(\lambda_i) = 0 \;\wedge\; \mu(\lambda_i) = 1 \right)$

$$v_c(t) = A e^{(-\sqrt{3}i)t} + B e^{(\sqrt{3}i)t}$$

$$v_c'(t) = (-\sqrt{3}\,i) A e^{(-\sqrt{3}i)t} + (\sqrt{3}\,i) B e^{(\sqrt{3}i)t}$$

$$\begin{cases} v_c(0^-) = A e^{(-\sqrt{3}i)0^-} + B e^{(\sqrt{3}i)0^-} = 1 \\ v_c'(0^-) = (-\sqrt{3}\,i) A e^{(-\sqrt{3}i)0^-} + (\sqrt{3}\,i) B e^{(\sqrt{3}i)0^-} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -\sqrt{3}i\,A + \sqrt{3}i\,B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

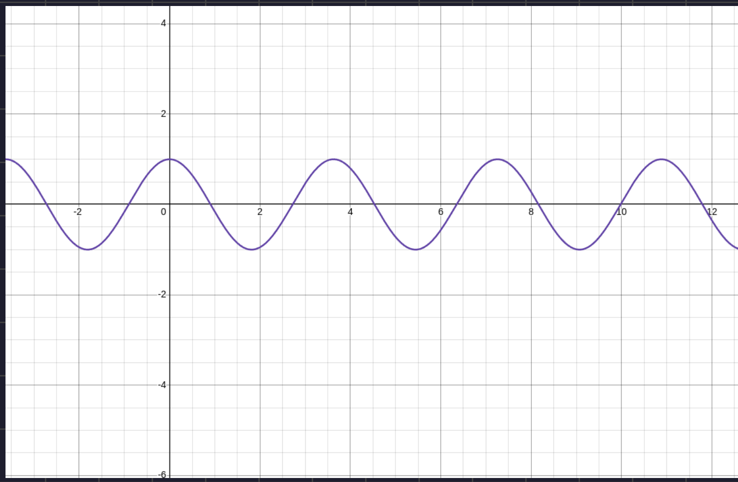
$$v_c(t) = \frac{1}{2} e^{(-\sqrt{3}i)t} + \frac{1}{2} e^{(\sqrt{3}i)t}$$

$$\left(\frac{e^{(-\sqrt{3}i)t} + e^{-(\sqrt{3}i)t}}{2} \right) = \cos$$

eulero
↓

$$v_c(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{3}t) + i\sin(\sqrt{3}\,t)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{3}t) - i\sin(\sqrt{3}\,t)\right)$$

$v_L(t) = \cos(\sqrt{3}\, t) \rightarrow$



Esempio domanda d'esame

$$\begin{cases} v''(t) + v'(t) - 2v(t) = u'(t) - u(t) & \text{eq} \\ \left.\begin{matrix} v'(0^-) = 0 \\ v(0^-) = 3 \end{matrix}\right\} \text{C.I} \\ u(t) = e^{-2t}\, \delta_{-1}(t) & u(t) \end{cases}$$

1. Discutere la stabilità
2. Risposta libera nel tempo
3. Risposta forzata nel tempo
4. Risposta totale nel tempo

1. $v''(t) + v'(t) - 2v(t) = 0$

$s^2 + s - 2 = 0$

$(s-1)(s+2) = 0$

$\lambda_1 = -2 \qquad r = 2$

$\lambda_2 = 1 \qquad \mu_{1,2} = 1$

Il sistema è instabile perché una delle 2 radici hanno parte reale maggiore di 0

É BIBO stabile? $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$

2. $v_c(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{t}$

$v_c'(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2 \cdot e^{t}$

$$\begin{cases} v_c(0^-) = c_1 \cdot e^{-2\cdot 0^-} + c_2 \cdot e^{0^-} = 3 \\ v_c'(0^-) = -2c_1 e^{-2\cdot 0^-} + c_2 \cdot e^{0^-} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 3 - c_2 \\ -2(3-c_2) + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$v_c(t) = e^{-2t} + 2e^{t}$

$= \left(e^{-2t} + 2e^{t}\right) \delta_{-1}(t)$ (non serve)

3. $v_F(t) = (h * u)(t)$

Risposta impulsiva

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$d_0 = 0$ perché il sistema non é proprio

$h(t) = \left(d_1 e^{-2t} + d_2 e^{t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$

Riscrivo l'equazione originale

$$h''(t)+h'(t)-2h(t)=\delta_1-\delta_0(t)$$

Calcolo le derivate della risposta impulsiva

$$h(t)=(d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\cdot\delta_{-1}(t)$$

$$h'(t)=(-2d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\delta_{-1}(t)+\underline{\overset{t=0}{(d_1e^{-2t}+d_2e^{t})}}\cdot\delta_0(t)$$

(prima di derivare impongo t=0 solo per gli impulsi) | obbligatorio

$$=(-2d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\delta_{-1}(t)+(d_1+d_2)\delta_0(t)$$

$$h''(t)=(4d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\delta_{-1}(t)+(-2d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\delta_0(t)$$

$$+(d_1+d_2)\delta_1(t)$$

(non pongo t=0 per gli impulsi perché non serve h''')

riscriviamo senza considerare i gradini, perché non servono nella soluzione finale (shortcut)

$$h''(t)\quad(-2d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\delta_0(t)+(d_1+d_2)\delta_1(t)+$$

$$h'(t)\quad+(d_1e^{-2t}+d_2e^{t})\cdot\delta_0(t)+$$

$$-2h(t)\quad-2\cdot0=\delta_1(t)-\delta_0(t)$$

Poniamo t=0 solo agli esponenti

$$h''(t)\quad(-2d_1\cancel{e^{-2t}}+d_2\cancel{e^{t}})\delta_0(t)+(d_1+d_2)\delta_1(t)+$$

$$h'(t)\quad+(d_1\cancel{e^{-2t}}+d_2\cancel{e^{t}})\cdot\delta_0(t)+$$

$$-2h(t)\quad-2\cdot0=\delta_1(t)-\delta_0(t)$$

Risolviamo il sistema raccogliendo $\delta_0(t)$ e $\delta_1(t)$

$$\begin{cases} (-2d_1 + d_2 + d_1 + d_2)\, \cancel{\delta_0(t)} = -1\, \cancel{\delta_0(t)} \\ (d_1 + d_2)\, \cancel{\delta_{-1}(t)} = \cancel{\delta_{-1}(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 0 \end{cases}$$

$$h(t) = e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

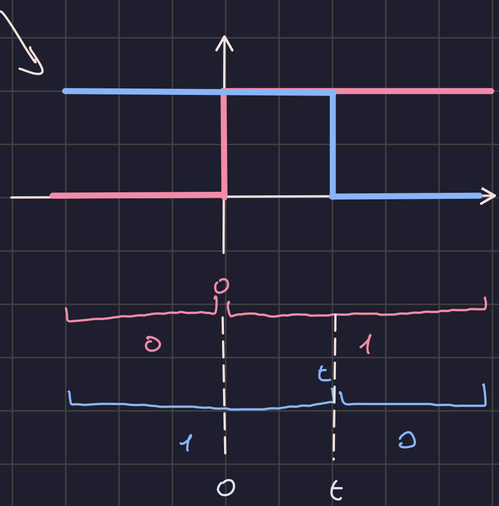
($u(t)$ dato dal testo)

Risposta forzata

$$v_F(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot e^{-2(t-\tau)}\, \delta_{-1}(t-\tau)\, d\tau$$

(visto che ci sono i gradini proviamo a modificare gli estremi



$$= \int_0^t e^{-2\tau} \cdot e^{-2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \int_0^t \cancel{e^{-2\tau}} \cdot e^{-2t} \cdot \cancel{e^{2\tau}}\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-2t}\, d\tau$$

$$= e^{-2t} \int_0^t 1\, d\tau$$

$$= e^{-2t} \cdot t$$

$$v_F(t) = e^{-2t} \cdot t$$

$$= (e^{-2t} \cdot t) \cdot \delta_{-1}(t)$$ (non serve)

4.

$$v_t = v_L + v_F$$

$$V_t = e^{-2t} + 2e^{t} + e^{-2t} \cdot t$$

$$= \left(e^{-2t} + 2e^{t} + e^{-2t} \cdot t \right) \cdot \delta_{-1}(t) \quad \text{(non serve)}$$