Esercitazione in classe sulle curve

✍ **Esercizio 2.1.1.** *Sia γ la curva piana una cui parametrizzazione in coordinate polari è $\rho(\vartheta) = \vartheta^2 + 1$, on $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Dopo aver disegnato sommariamente il sostegno di γ, determinare i versori tangente e normale al sostegno di γ nel punto $\gamma(\pi)$ e scrivere un'equazione della retta tangente nello stesso punto.*

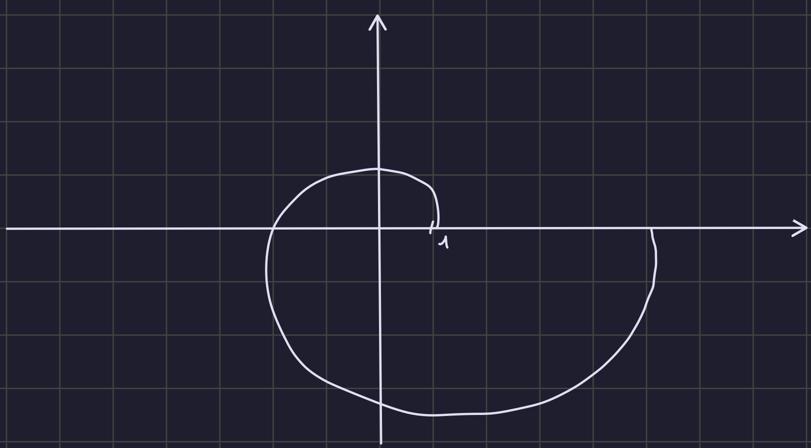
$$\rho(\theta) = \theta^2 + 1 \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

In coordinate cartesiane equivale a

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = (\theta^2+1)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = (\theta^2+1)\sin\theta \end{cases}$$

coordinate polari

Diamo valori a caso a theta e plottiamo il grafico a grandi linee



Rappresenta la curva

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \left((\theta^2+1)\cos\theta, (\theta^2+1)\sin\theta\right)$$

$$\gamma'(\theta) = \left(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta, \; 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\right)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{4\theta^2\cos^2\theta \cancel{- 4\theta(\theta^2+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta^2+1)^2\sin\theta + 4\theta^2\sin^2\theta \cancel{+ 4\theta(\theta^2+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta^2+1)^2\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{4\theta^2 + (\theta^2+1)^2}$$

Tangente:

$$T(\theta) = \frac{\gamma'(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\|} = \frac{\left(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta, \; 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\right)}{\sqrt{4\theta^2 + (\theta^2+1)^2}}$$

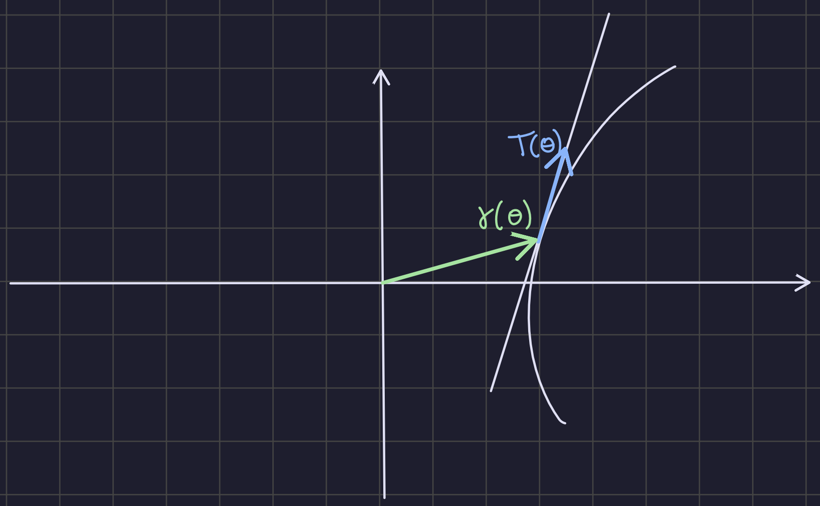
$$T(\pi) = \frac{(-2\pi, -(\pi^2+1))}{\sqrt{4\pi^2 + (\pi^2+1)^2}}$$

Direzione della tangente in pi

In R² il versore normale è il versore tangente ruotato di 90°

$$N(\pi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} T(\pi)$$

Per trovare la retta tangente alla curva bisogna trovare quel vettore che sposta lo spazio vettoriale formato dal vettore tangente sopra la curva e quel vettore è proprio $\gamma(\theta)$



Quindi la retta tangente è:

$$\gamma(\pi) + t\gamma'(\pi)$$

Componente x del vettore tangente

$$\begin{cases} x(t) = -(\pi^2+1) - t\,2\pi \\ y(t) = 0 - t(\pi^2+1) \end{cases}$$

Componente y del vettore tangente

$$-\frac{x+(1+\pi^2)}{2\pi} = t$$

$$y = \frac{x+(1+\pi^2)}{2\pi}(\pi^2+1)$$

$$y = \frac{\pi^2+1}{2\pi}x + \frac{(\pi^2+1)^2}{2\pi}$$

✍ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare l'integrale (curvilineo) di*

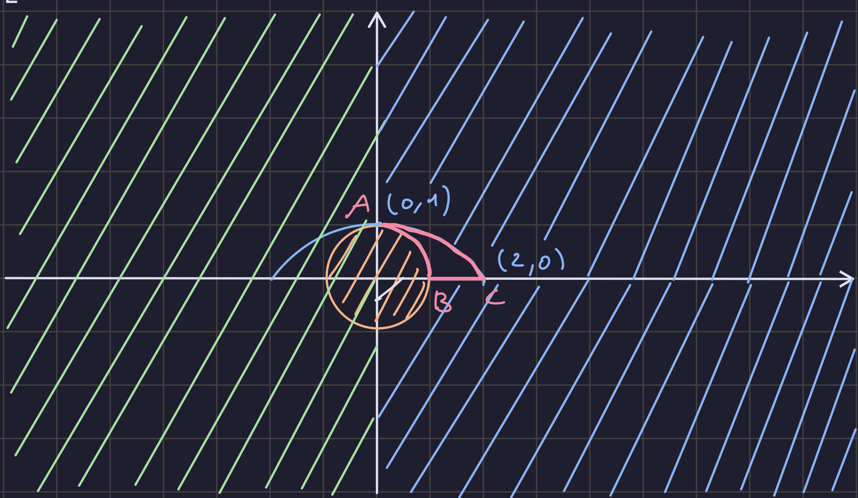
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ il cui sostegno è il bordo ∂E di

$$E = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\right\}$$

e determinare la retta tangente a γ nel punto $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

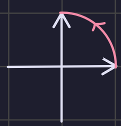
Disegnamo l'insieme E



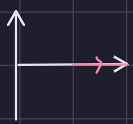
Consideriamo solo l'area rossa

Integriamo lungo le 3 curve parametrizzate:

$$\gamma_{BA}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\gamma_{BC}(t) = (t, 0) \qquad t \in [1,2]$$



$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{4}\right)$$

Integriamo

$$\int_{\gamma_{BA}} F\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4+\cos^2 t}} \underbrace{\cancel{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}}_{|\gamma'(\theta)| = 1}\, dt$$

$$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$w = \cos^2 t$$

$$dw = -2\cos t \sin t\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2\cos t \sin t\, dt}{\sqrt{4+\cos^2 t}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4+w}}\, dw = -(4+w)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[-\sqrt{4+\cos^2 t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2+\sqrt{5}$$

Retta tangente a γ in (1,3/4) (γ(1))

$$\gamma(t) \begin{cases} \gamma_{BA} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{BC} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{AC} \xrightarrow{\checkmark} \end{cases} \left(1, \frac{3}{4}\right) \in \gamma_{AC}$$

$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1-\frac{t^2}{4}\right) \to t \mid \gamma_{AC}(t) = \left(1, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow t = 1$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \frac{3}{4} \end{cases} \dots$$

$$\gamma'_{AC}(t) = \left(1, -\frac{t}{2}\right)$$

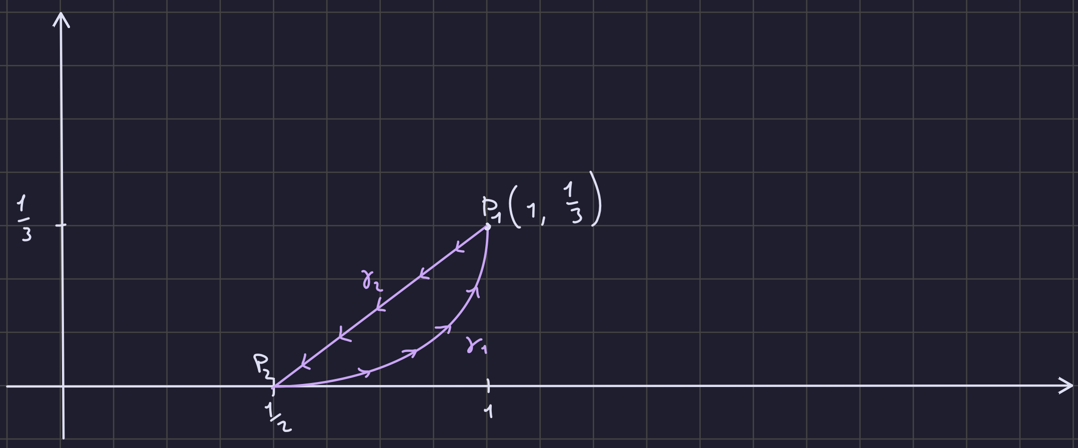
$$r_{TAN}(t) = \gamma_{AC}(t) + s\gamma'_{AC}(t) \quad s \in \mathbb{R}$$

$$r_{Tan}(1) = \gamma_{AC}(1) + s\gamma'_{AC}(1) = r_{TAN}(s) = \begin{cases} x(s) = 1+s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = 1+s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases} \to \begin{cases} s = x-1 \\ y = \frac{3}{4} - \frac{x-1}{2} \end{cases} \to y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \quad \text{retta tangente}$$

✍ **Esercizio 2.1.2.** *Determinare una parametrizzazione della curva chiusa γ che si ottiene percorrendo prima da sinistra verso destra il grafico di $f(x) = (1/3)(2x-1)^{3/2}$ per $1/2 \leq x \leq 1$ e poi da destra a sinistra il segmento congiungente gli estremi del grafico di f stessa. Disegnare quindi il sostegno di γ e calcolarne la lunghezza.*

$F(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}$ $\quad F'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{1/2}$ $\quad F''(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(2x-1)^{1/2}} > 0$ concavitá verso l'alto



$$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{1}{3}(2t-1)^{3/2}\right) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} \longleftarrow t \in [0,1] \quad (1-t)p_1 + tp_2$$

$$= \left((1-t) + \frac{t}{2}, \frac{1-t}{3}\right) \quad t \in [0,1]$$

Le due rette sono definite nello stesso intervallo, quindi in t = 1/2 si avrà un valore corrispondente a 2 rette contemporaneamente, e noi non vogliamo questo, ma vogliamo che gamma2 sia collegata a gamma1. Cambiamo di nuovo parametrizzazione

$$\gamma_1(t) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \to t = As + B \to \begin{cases} \frac{1}{2} = A\cdot 0 + B \\ 1 = A\cdot\frac{1}{2} + B\end{cases} \to \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = 1\end{cases}$$

$$t = s + \frac{1}{2}$$

$$\gamma_1(s) = \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}(2s+1-1)^{3/2}\right)$$

$$= \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}(2s)^{3/2}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} s = 0 \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ s = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{3}\right)\end{bmatrix} \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

La parametrizzazione è corretta

$$\gamma_2(t) \quad t \in [0,1] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to t = As + B$$

$$\begin{cases} 0 = A\cdot\frac{1}{2} + B \\ 1 = A\cdot 1 + B\end{cases} \to \begin{cases} A = 2 \\ B = -1\end{cases} \qquad t = 2s - 1$$

$$\gamma_2(t) = \left((1-2s+1) + \frac{2s-1}{2}, \frac{(1-2s+1)}{3}\right)$$

$$= \left(2 - 2s + s - \frac{1}{2},\ \frac{2(1-s)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - s,\ \frac{2(1-s)}{3}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} s = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{3}\right) \\ s = 1 \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{bmatrix} s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \left(s + \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}(2s)^{3/2}\right) & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \left(\frac{3}{2} - s,\ \frac{2(1-s)}{3}\right) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

I passaggi per cambiare parametro sono:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$$[c, d] \xrightarrow{\ C^1\ } \quad (\text{Mappa monotona})$$

$t \in [a, b]$

$s \in [c, d]$

$$t = As + B \to \begin{cases} a = Ac + B \\ b = Ad + B \end{cases} \to \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases}$$

✍ **Esercizio 2.2.6.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea)* $\int_\alpha z\, ds$, *ove* α *è la curva di parametrizzazione* $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. *Si determini inoltre il piano normale ad* α *nel punto* $(-\pi, 0, \pi)$ *(ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).*

$$\int_{\alpha(t)} F(x, y, z) \overbrace{ds}^{\text{spazio}} = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\, |\alpha'(t)|\, dt$$

$$F(x, y, z) = z$$

$$\alpha(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t)$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)$$

$z = t$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\, |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} t \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2t\cos t}\sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t + 1}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2+2}\, dt = \left[\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \left(t^2+2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\pi} = \frac{\left(4\pi^2+2\right)^{3/2} - 2^{3/2}}{3}$$

Calcoliamo il piano normale in $(-\pi, 0, \pi)$

$$\alpha(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t) \Rightarrow (-\pi, 0, \pi) \leftrightarrow t = \pi$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)$$

Cerchiamo una direzione tangente alla curva in π

$$\alpha'(\pi) = (-1, -\pi, 1)$$

L'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(-\pi, 0, \pi) \rightarrow r = (-\pi, 0, \pi) + s(-1, -\pi, 1)$

Bisogna trovare il piano perpendicolare alla retta tangente

Metodo 1:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-s_1 - \pi s_2 + s_3 = 0 \qquad s_1 = \underset{k}{\underset{\uparrow}{s_3}} - \pi \underset{t}{\underset{\uparrow}{s_2}}$$ Teorema rouche capelli

$$\begin{pmatrix} k - \pi t \\ t \\ k \end{pmatrix} \longrightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}}_{\text{Vettore che sposta il piano nel punto interessato}} + \underbrace{k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Piano perpendicolare alla retta tangente (piano normale)}} \rightarrow \begin{cases} x(k,t) = -\pi + k - \pi t \\ y(k,t) = t \\ z(k,t) = \pi + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\pi + z - \pi - \pi y \\ t = y \\ k = z - \pi \end{cases} \rightarrow \quad z - x - \pi y = 2\pi$$

Metodo 2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Trasciniamo lo spazio affine nell'origine, così non bisogna calcolare il vettore che trasla lo spazio nel punto della retta tangente

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - (-\pi) \\ y \\ z - \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-(x + \pi) - \pi y + z - \pi = 0$$

$$z - x - \pi y = 2\pi$$

✍ **Esercizio 3.6.2.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$x^{3/2} + (xy)^{3/2}$$

$$F(x,y) = \sqrt{x^3} + \sqrt{(xy)^3}$$

Dominio

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \to \begin{matrix} x: [0, +\infty) \\ y: [0, +\infty) \end{matrix}$$

Derivata

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{xy}\; y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{xy}\; x$$

Le derivate parziali esistono e sono continue, quindi la funzione è differenziabile

✍ **Esercizio 3.6.3.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(x,y) \neq 0: \quad \frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{2xy^3(x^4+y^4) - x^2y^3\, 4x^3}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{3y^2x^2(x^4+y^4) - 2xy^3\, 4y^3}{(x^4+y^4)^2}$$

Le derivate parziali sono continue per (x,y) ≠ 0

$$(x,y) = (0,0): \quad \frac{\partial}{\partial x} F(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{F(0,k) - F(0,0)}{k} = \lim_{k\to} \frac{0-0}{k} = 0$$

$$\lim_{(h,k)=(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)\,h-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)=(0,0)} \frac{\frac{h^2k^3}{h^4+k^4}-0-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)=(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} = \text{Non esiste}$$

$$\Big\downarrow\ h=k$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^5}{2h^4\sqrt{2h^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{2\sqrt{2}\,|h|} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

✍ **Esercizio 3.3.7.** *Calcolare*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3 - 2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2}$$

$$\text{se } (x,0) \to \lim_{x\to 0} \frac{0-0\cdot\cos(x)}{x^2} = 0$$

$$\text{se } (0,y) \to \lim_{y\to 0} \frac{0-0\,\cos(2y)}{y^2} = 0$$

Il limite, fissato x e fissato y esiste, quindi bisogna trovare un'altra sequenza che non tenda a 0

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}} - 2\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2}}$$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^{\frac{2}{3}}} = 0$$

$$\sin(x^2y) = x^2y + o(x^2y)$$
$$\cos(x+2y) = 1 + o(x+2y)$$
$$\downarrow$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y}$$

$$\downarrow\ f\to 0 \iff |f|\to 0$$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1} \le \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y} = 0 \quad \text{(esiste)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

$$\downarrow\ f\to 0 \iff |f|\to 0$$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy^3|}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x,y| = 0 \quad \text{(esiste)}$$

Quindi il limite esiste

Un altro modo è quello di usare le coordinate polari

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos\theta\,\sin^3\theta - 2\sin(\rho^3\cos^2\theta\,\sin\theta)\cos(\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)}{\rho^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^2 \underbrace{\cos\theta\,\sin^3\theta}_{\in[-1,1]} - 2\lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^3\cos^2\theta\,\sin\theta)\cos(\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta)}{\rho^2}$$

$$\downarrow$$

$$\circ \qquad -2 \lim_{\rho \to 0} \frac{\sin(\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta) \cos(\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)}{\rho^2}$$

$\downarrow$ Approssimo seno e coseno con l'argomento

$$\lim_{\rho \to 0} \rho \cos^2\theta \sin\theta = 0$$

$= 0$ quindi esiste

✍ **Esercizio 3.3.14.** *Si consideri la funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^2 (y - x)}{(x^2 + y^2)^\alpha}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

Si determini se esiste (e in caso affermativo si calcoli)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

quando $\alpha = 1$ *e quando* $\alpha = 2$.

Passiamo in coordinate polari

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta (\sin\theta - \cos\theta)}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho \to 0} \rho^{3-2\alpha} \cos^2\theta (\sin\theta - \cos\theta)$$

$$\begin{cases} \text{Se } 3 - 2\alpha > 0 & \text{esiste e fa } 0 \\ \text{altrimenti} & \text{non esiste} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \text{se } \alpha < \frac{3}{2} & \text{esiste e fa } 0 \\ \text{altrimenti} & \text{non esiste} \end{cases}$$

✍ **Esercizio 3.6.5.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x, y) = |x| \log(1 + y)$$

è differenziabile in (0,0).

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| \log(1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{|x|}{1+y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|h| \log(1+k) - \cancel{|0| \log(1)} \cancel{- 0h - 0k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

Trasformo in coordinate polari

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho |\cos\theta| \log(1+\rho \sin\theta)}{\rho}$$

$$\downarrow \quad f \to 0 \iff |f| \to 0$$

$$0 \leq \lim_{\rho \to 0} |\cos\theta| \, |\log(1+\rho\sin\theta)| \leq \lim_{\rho \to 0} |\log(1+\rho\sin\theta)| = 0$$

Metodo 2:

✍ **Esercizio 3.6.2.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$x^{3/2} + (xy)^{3/2}$$

$x \geq 0$
$y \geq 0$

$$x^{\frac{3}{2}} \left(1 + y^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - y^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}\right)$$

Le derivate parziali sono continue, quindi la funzione è differenziabile

✍ **Esercizio 3.1.6.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \arcsin \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{4xy}{x^2+y}\right)$$

$$\mathbb{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leq \frac{4xy}{x^2+y^2} \leq 1 \,,\; (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

$$-1 \leq \frac{4xy}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$-x^2 - y^2 \leq 4xy \leq x^2 + y^2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4xy \geq 0 \end{cases}$$

Trasformo in coordinate polari

$$\begin{cases} \rho^2 + 4\rho^2 \cos\theta \sin\theta \geq 0 \\ \rho^2 - 4\rho^2 \cos\theta \sin\theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (1 + 4\cos\theta \sin\theta) \geq 0 \\ \rho^2 (1 - 4\cos\theta\sin\theta) \geq 0 \end{cases}$$

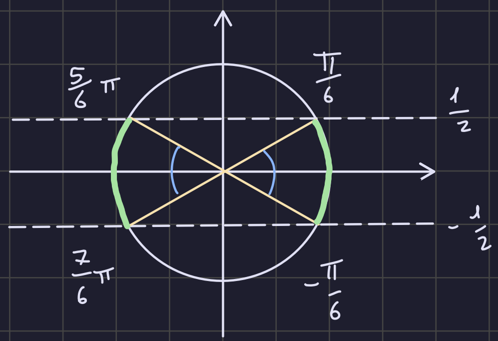
ρ^2 é sempre positivo

$$\begin{cases} 1 + 2\sin(2\theta) \geq 0 \\ 1 - 2\sin(2\theta) \geq 0 \end{cases}$$

$2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$\begin{cases} \sin(2\theta) \geq -\frac{1}{2} \\ \sin(2\theta) \leq \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \quad \sin(2\theta) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

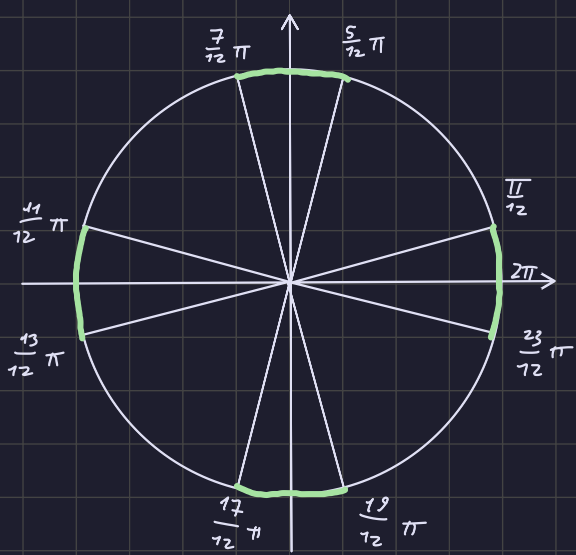
$\downarrow$



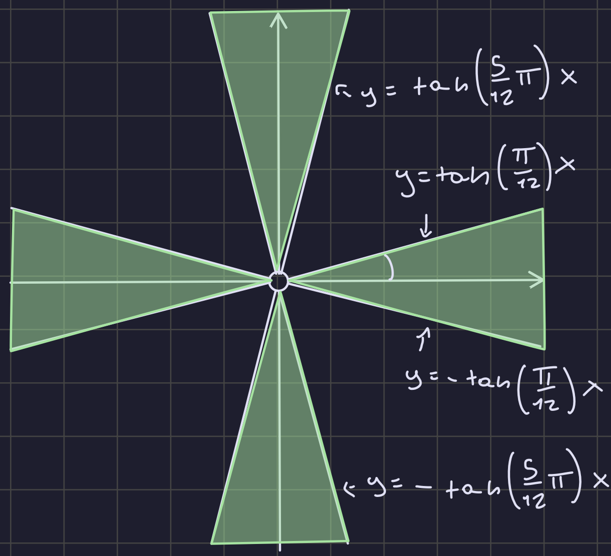
intervallo consentito

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \frac{5}{12}\pi + k\pi \leq \theta \leq \frac{7}{12}\pi + k\pi \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



Dominio:



$y = \tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)x$
$y = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)x$
$y = -\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)x$
$y = -\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)x$

✍ **Esercizio 3.8.2.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

a) si verifichi che non è differenziabile in (0,1)
b) si calcolino tutte le derivate direzionali $D_v f(0,1)$ (v versore di $\mathbb{R}^2$)

$$F(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1 = \left(x^2(y-1)\right)^{\frac{1}{3}} + 1 = \left(x^2y - x^2\right)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$F(0,1) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x,1) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ F(0,y) = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \to \overline{\nabla} F(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(h,1+k) - F(0,1) - \langle \overline{\nabla} F(0,1), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k} + 1 - 1 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow{h=k} \lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}|h|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Non esiste)}$$

$$D_v F(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{t}$$

Non si può usare la formula del gradiente

$$v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$ Tutti i vettori di norma 1

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{F(t\cos\theta, 1+t\sin\theta) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2\cos^2\theta \; t\sin\theta} + 1 - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3\cos^2\theta \sin\theta}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}\sqrt[3]{\cos^2\theta \sin\theta}}{\cancel{t}}$$

$$= \sqrt[3]{\cos^2\theta \sin\theta}$$

✍ **Esercizio 3.8.3.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

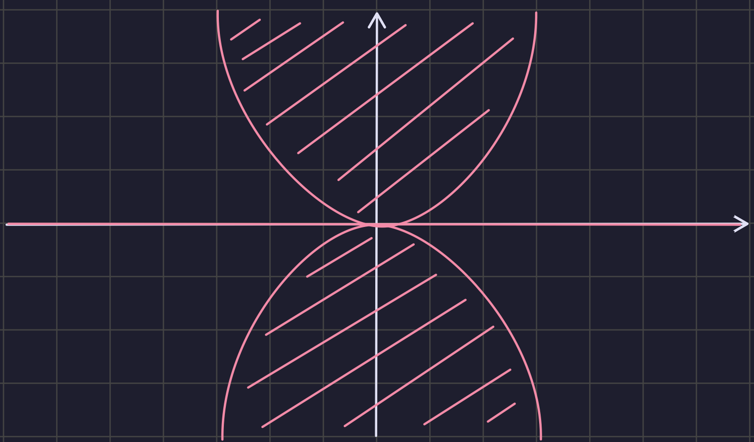
si calcoli $D_v f(0,0)$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$ *versore e si verifichi che*

$$D_v f(0,0) = < \nabla f(0,0), v > .$$

La funzione è differenziabile in (0,0)?

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & y < -x^2 \wedge y > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

▨ = 1



$F(0,0) = 1$

$$D_v f(0,0) = \frac{\overbrace{f(t\cos\theta, t\sin\theta)}^{=1} - 1}{t} \longrightarrow (t, mt) \ \exists t \,|\, |mt| > t^2 ?$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t, mt) - 1}{t} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x, 0) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x, x^3) = 0$$

$$\Downarrow$$

Non continua

✍ **Esercizio 3.9.6.** *La temperatura nel punto (x, y) in una regione del piano xy è T (misurata in gradi centigradi), dove*

$$T(x, y) = x^2 \, e^{-y}.$$

In quale direzione aumenta più rapidamente la temperatura nel punto $(2, 1)$? Con quale rapidità aumenta T in quella direzione?

$$T(x,y) = x^2 e^{-y}$$

$$T(2,1) = 4e^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2x e^{-y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -x^2 e^{-y}$$

$$\nabla T(2,1) = (4e^{-1}, -4e^{-1}) = 4e^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Direzione: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Rapidità: $4e^{-1} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 4e^{-1} \cdot \sqrt{2}$

✍ **Esercizio 3.9.3.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3) \qquad \alpha \in \mathbb{R};$$

si determini α *in modo che:*

a) la direzione di massima crescita in $(0,1)$ sia lungo la tangente alla parabola $y = (x+1)^2$ nel verso negativo dell'asse x;
b) il piano tangente in $(0,1)$ sia perpendicolare alla retta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = z$.