Fisica II

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

Corso di Claudia Daffara
2° Semestre 2024/2025

Indice

1 Introduzione

L'oggetto principale dello studio di questo costo è la **forza elettromagnetica** $\vec{F}_{em}$, più precisamente la **teoria di campo**.

Definizione utile 1.1. La forza è l'interazione tra due oggetti.

In natura esistono solo 4 forze che governano tutto ciò che è misurabile:

- Forza di gravità (osservata quando negli oggetti interagenti c'è massa)
- Forza elettromagnetica (osservata quando negli oggetti interagenti c'è carica)
- Forza elettronucleare forte
- Forza elettronucleare debole

Le ultime due riguardano la materia microscopica. Le prime due invece riguardano la materia macroscopica e sono forze **a lungo raggio**, cioè ha effetto anche a distanza.

Lo studio della forza elettromagnetica si può fare attraverso degli strumenti che approssimano il comportamento delle entità al livello macroscopico senza preoccuparci della natura microscopica.

1.1 Campo e forza

In fisica 1 si sono studiati i concetti delle forze, cioè ciò che agisce su un corpo con una massa, ad esempio la caduta di un grave che è attratto dalla Terra per la forza di gravità. La visione dei campi è una visione più generale e rappresenta la proprietà di un ambiente di interagire con un corpo, ad esempio un **campo** di gravità.

2 Elettrostatica

Facendo esperimenti che non sono analizzabili con i concetti della fisica 1 si arriva a capire che c'è una nuova interazione, la **forza elettrostatica** che ha 2 forme:

- Forza attrattiva
- Forza repulsiva

Gli oggetti sono divisi in due classi:

- Carica positiva
- Carica negativa

Gli oggetti della stessa classe si respingono, mentre quelli di classe diversa si attraggono.

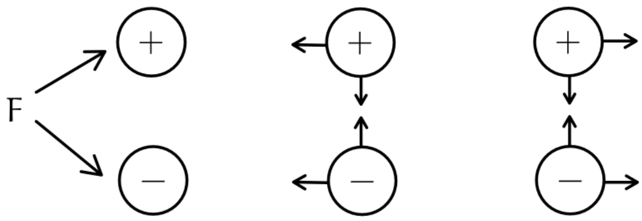


Figura 1: Tipi di carica

Definizione 2.1 (Carica elettrica)**.** È chiamata **carica elettrica** q la proprietà che ha il corpo di esprimere la forza elettrostatica. Le proprietà di questa carica elettrica sono **indipendenti** dal meccanismo che l'ha generata, cioè può essere generata in modo diverso, ma ha sempre le stesse proprietà. Questo implica che la carica è **preesistente** in natura.

2.1 Materia

L'atomo è formato da un nucleo centrale composto da protoni, carichi positivamente, e da neutroni, senza carica. Intorno al nucleo si ha una regione in cui si ha la probabilità di trovare un'altra particella, carica negativamente, chiamata elettrone.

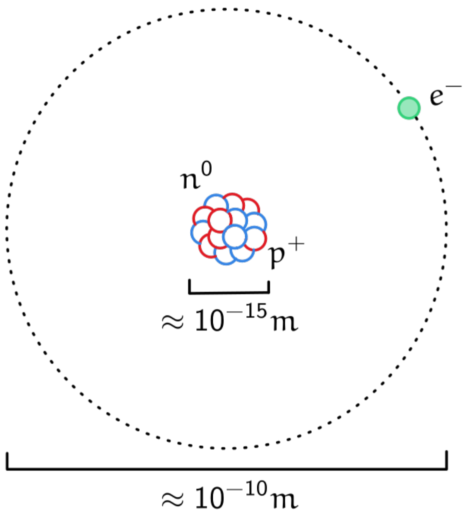


Figura 2: Struttura dell'atomo

La carica totale dell'atomo è nulla, quindi è **neutro** e di conseguenza la carica del nucleo è uguale alla carica degli elettroni, per la precisione il numero di protoni è uguale al numero di elettroni. Z è il numero atomico, cioè il numero di protoni.

Elettrone e protone hanno, in modulo, la stessa carica:

$$|q_{e^-}| = q_{p^+}$$

L'elettrone è una **particella elementare**, indivisibile e la sua carica è detta **carica elementare**, cioè la più piccola unità di carica osservabile e vale:

$$e^- = 1.6 \times 10^{-19} \mathrm{C}$$

La **carica elettrica** in natura è quindi **quantizzata**, ovvero deve essere un multiplo della carica dell'elettrone. Inoltre la carica non si può generare, si può **solo trasferire**.

Definizione 2.2 (Legge di conservazione della carica)**.** In un sistema isolato, cioè che non interagisce con altri sistemi, la carica totale Q si conserva.

I componenti della materia hanno due comportamenti:

- **Conduttore**: ad esempio il metallo, in cui gli elettroni sono liberi di muoversi
- **Dielettrico** (isolante): ad esempio il vetro, in cui le cariche non sono libere di muoversi, quindi vincolate, cioè non si riesce a strappare gli elettroni dall'atomo. Se si avvicina una carica positiva al dielettrico si avrà una deformazione delle cariche, ma non si ha una separazione di carica:

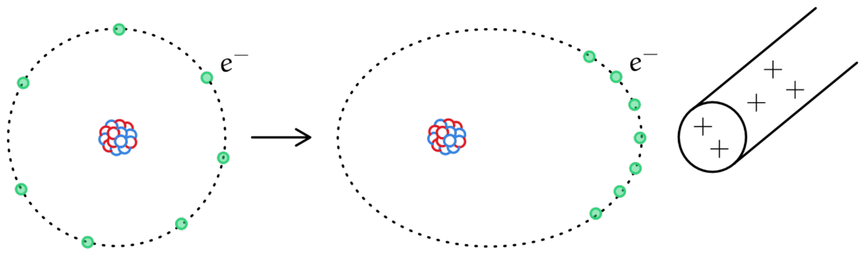


Figura 3: Deformazione delle cariche

2.2 Elettrificazione

L'elettrificazione è il trasferimento di carica da un corpo all'altro. Ci sono 3 meccanismi di elettrificazione:

- **Strofinio**: Si prende una bacchetta di vetro e un panno di lana e si strofina la bacchetta. La bacchetta, inizialmente, non è carica e meccanicamente con lo strofinio si strappano gli elettroni dagli atomi. La bacchetta diventa carica positivamente e il panno negativamente. Si avranno quindi le cariche q^+ della bacchetta e q^- del panno. Per la legge di conservazione della carica si ha:

$$|q^-| = q^+$$

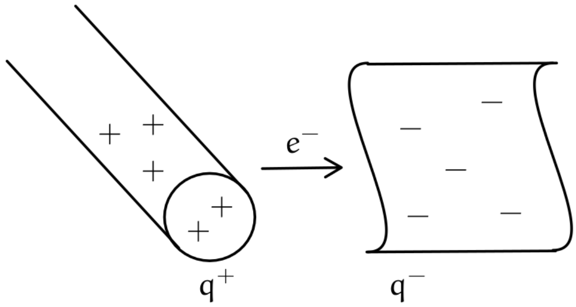


Figura 4: Strofinio

- **Induzione elettrostatica**: Con la precedente bacchetta caricata positivamente si avvicina un oggetto metallico e si nota che le cariche negative $-Q$ del metallo si avvicinano il più possibile alla bacchetta respingendo le cariche positive $+Q$ creando una **separazione di carica per induzione**. La carica totale rimane nulla perchè non sono migrati elettroni.

$$|-Q| = +Q$$

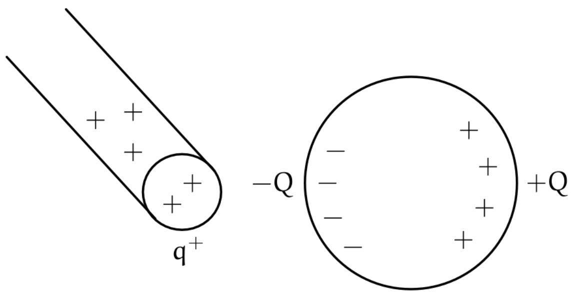


Figura 5: Induzione elettrostatica

Se si allontana l'oggetto metallico si avrà una separazione meno potente.

L'**elettroscopio** si usa per misurare la carica elettrica. È un oggetto metallico collegato a delle lamelle metalliche chiamate foglie:

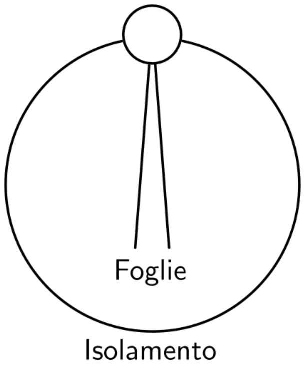


Figura 6: Elettroscopio

Si misura la carica avvicinando la bacchetta e si osserva la forza repulsiva tra le foglie dovuta alla repulsione tra le cariche positive della bacchetta e dell'elletroscopio:

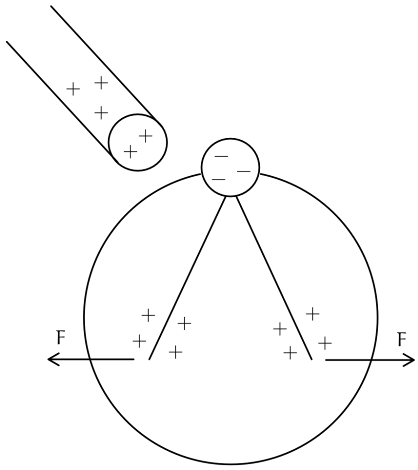


Figura 7: Elettroscopio durante una misurazione

Se si allontana la bacchetta la separazione delle foglie diminuisce.

- **Contatto** Se si prende un oggetto metallico caricato positivamente e si mette a contatto con un filo conduttore le cariche si sposteranno sul filo, elettrificandolo:

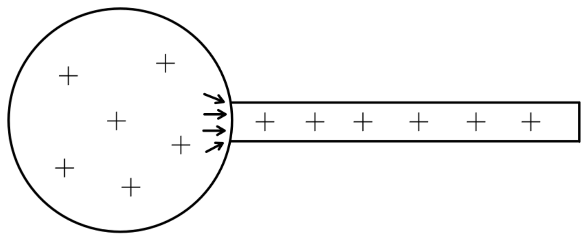


Figura 8: Elettrificazione per contatto

Se si attacca il filo a terra l'oggetto si scarica perchè le cariche migrano verso la terra, cioè un conduttore immensamente più grande e quindi la carica si distribuisce su tutta la superficie della terra e sull'oggetto metallico rimane una carica **approssimativamente nulla**:

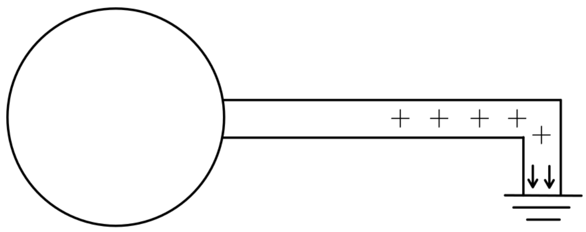


Figura 9: Scarica a terra

2.3 Elettrostatica nel vuoto

Fatti sperimentali:

Si crea un esperimento che permette di osservare il fenomeno che si vuole modellare. Si prende una bilancia di torsione formata da un filo torcente a cui è appesa un'asta con una carica q_1^+ su un'estremità. Se si avvicina una carica dello stesso segno q_2^+ si osserva che viene applicata una forza repulsiva $\vec{F}_{el}$ che fa torcere il filo con un momento torcente:

$$\tau_{filo} = (k\theta) = \tau_{el} = \vec{d} \times \vec{F}$$

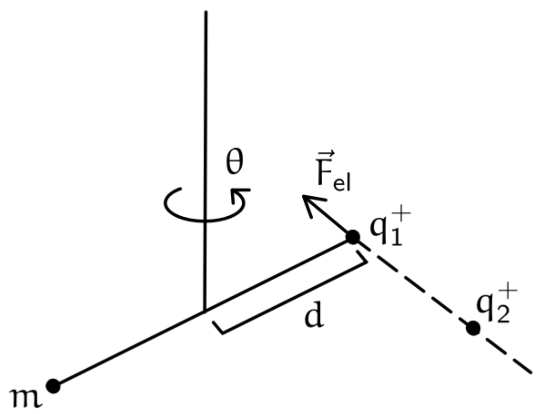


Figura 10: Bilancia di torsione

2.3.1 Interazione di Coulomb

Dai fatti sperimentali si nota che il modulo della forza è proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le cariche:

$$|F_{el}| = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Si osserva anche che la forza elettrica F_{el} è una forza **centrale**, cioè la forza è diretta lungo la retta che congiunge le due cariche.

k è la costante di Coulomb e vale:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto. L'unità di misura della carica è il Coulomb:

$$[q] = C$$

Consideriamo la terna cartesiana con due cariche positive q_1^+ e q_2^+ descritte dai raggi vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Sulla carica q_2^+ viene applicata una forza $\vec{F}_{12}$

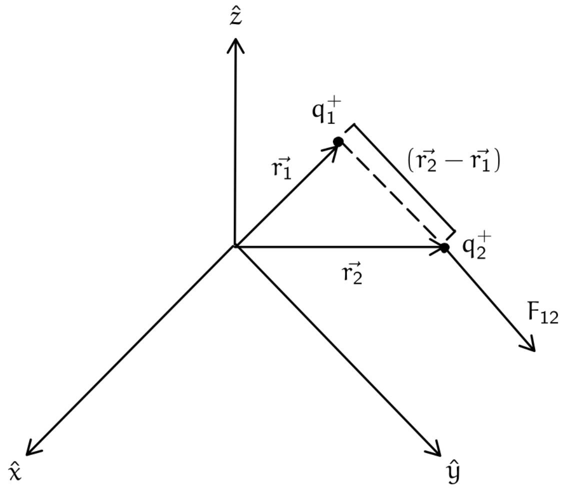


Figura 11: Forza elettromagnetica

Notazione:

- Chiamo il vettore che va da $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ $\vec{r}_{12}$.
- Il versore è indicato con $\hat{r}$ e rappresenta il vettore unitario:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Calcoliamo la forza $\vec{F}_{12}$ che agisce su q_2^+ da q_1^+:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12} \quad [N]$$

2.3.2 Sistema di più cariche

Con più cariche si osserva che vale il principio di sovrapposizione, cioè due fenomeni si sommano in modo lineare; e vale la terza legge di Newton, cioè l'azione-reazione $\left(\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\right)$.

Consideriamo un sistema discreto con n cariche $q_1, q_2, \ldots, q_n$ e osserviamo la carica q_0. Ognuna di queste cariche sarà descritta dal suo raggio vettore.

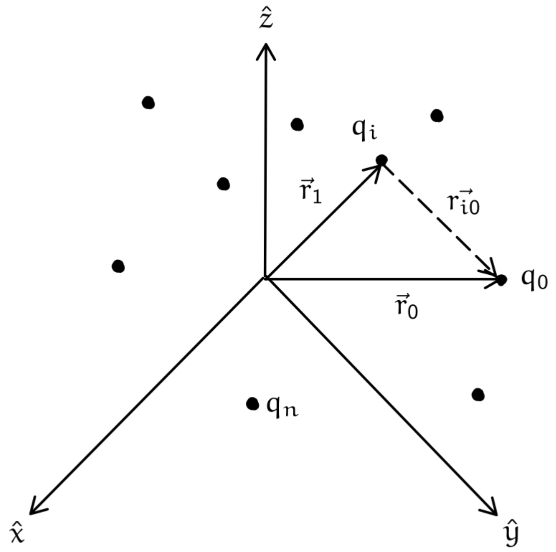


Figura 12: Forza elettromagnetica con più cariche

La forza che la carica q_i agisce su q_0 è:

$$\vec{F}_{i0} = \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}_{i0}}{r_{i0}^2}$$

dove $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_i$.

Applichiamo questa formula osservando una ad una tutte le cariche come fatto per q_0 per calcolare la forza totale applicata sulla carica q_0:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}_{i0}}{r_{i0}^2} \quad [\mathrm{N}]$$

Questa forza ha direzione uguale alla somma delle forze.

Un'informazione si propaga con una **velocità finita**, cioè non istantaneamente. La velocità massima di propagazione è la velocità della luce c e vale:

$$c = 3 \times 10^8 \, \frac{m}{s}$$

Consideriamo lo stesso sistema di cariche, ma con la carica q_0 spostata ad una distanza molto lontana e consideriamo le altre cariche come cariche che si muovono. Si osserva che le cariche che si muovono cambiano il valore della forza $\vec{F}_{tot}$ e dalla formula si vede che la forza cambia istantaneamente, ma in realtà la forza viene trasmessa dopo un tempo di propagazione (che la formula non tiene in considerazione).

Questa problematica si risolve con il concetto di **campo elettrostatico**.

2.3.3 Campo elettrostatico

Dalla formula della forza elettrostatica si può notare che la forza è proporzionale alla carica osservata q_0:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}_{i0}}{r_{i0}^2} \propto q_0$$

Quindi la forza è proporzionale alla carica osservata e dalla distanza di questa carica:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}\left(\vec{r}_0\right)$$

Dove $\vec{E}$ è il **campo elettrostatico posizionato in** r_0 della carica osservata q_0.

Prendiamo in considerazione il seguente sistema in cui la particella Q è la **sorgente di campo** e la particella q è la **carica di prova**:

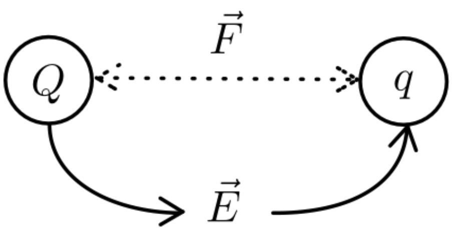


Figura 13: Campo elettrostatico

$$\vec{F} = q\vec{E}\left(\vec{r}\right)$$
$$\vec{E}\left(r\right) = \frac{\vec{F}}{q}$$

Questa è la **definizione operativa** di campo, cioè serve una carica di prova per misurare il campo.

Definizione 2.3. Il campo di una singola carica puntiforme Q, posizionata per comodità nell'origine, considerata una particella di test q ad una distanza $\vec{r}$ è definito come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

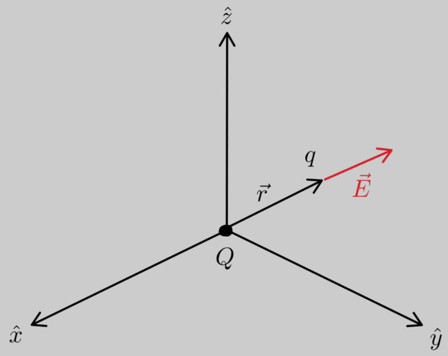


Figura 14: Campo elettrostatico

Definizione 2.4. Il campo di un sistema discreto di n cariche $q_1, q_2, \ldots, q_n$ è definito come:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\cdot\hat{r}_i \qquad \left[\frac{N}{C}\right]$$

per il **principio di sovrapposizione**.

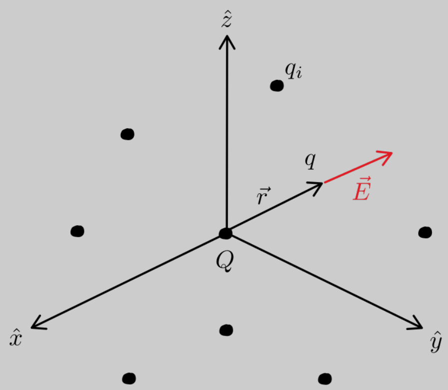


Figura 15: Campo elettrostatico con più cariche

Definizione utile 2.1. Il **lavoro elementare** è definito come:

$$dL = \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

dove $\vec{dl}$ è il vettore spostamento.

- Il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dai punti di inizio e fine.
- Il lavoro in un percorso chiuso è nullo:

$$\oint d\vec{l} = 0$$

- Esiste una funzione di stato U tale che il lavoro per andare da A a B è uguale al negativo del lavoro per andare da B a A:

$$\exists U \mid L_{AB} = -\Delta U$$

dove U è l'**energia potenziale**.

2.4 Energia potenziale elettrostatica

La **forza elettrostatica** $\vec{F}_{el}$ è una forza **conservativa**, cioè il lavoro per spostare una carica da un punto A a un punto B è indipendente dal percorso e dipende solo dai punti di inizio e fine.

Per calcolare il lavoro per spostare una carica q da un punto A a un punto B si usa la seguente formula:

$$\begin{aligned}
L_{AB} &= \int_A^B d\vec{L} = \int_{\text{curva}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{l}}_{dr} \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{r_A}^{r_B} \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) \\
&= -\Delta U
\end{aligned}$$

dove U è l'**energia potenziale elettrostatica**:

$$U = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{costante} \quad [J]$$

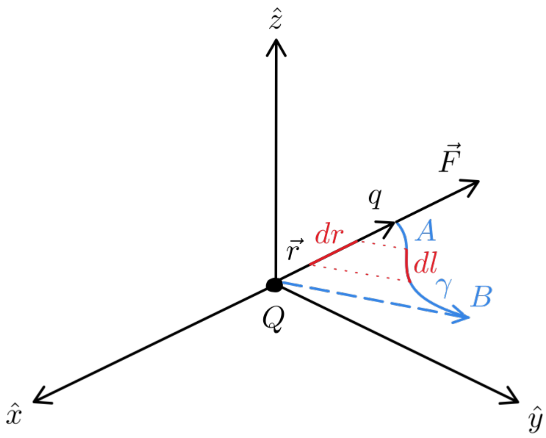


Figura 16: Energia potenziale

Se poniamo l'energia all'infinito uguale a 0, allora U è il lavoro che fa il campo (la forza elettrostatica) per allontanare una particella all'infinito, cioè per distruggere il sistema:

$$U_{-\infty} = 0 \rightarrow U = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\left(U_\infty - U_r\right)$$

- Con cariche uguali l'energia è positiva perchè la forza è repulsiva e si allontana la carica verso l'infinito.
- Con cariche opposte l'energia è negativa perchè la forza è attrattiva e si avvicina la carica, allontanandosi dall'infinito.

2.5 (Campo) Potenziale elettrostatico

Dalla forza abbiamo definito l'equivalente, ma sottoforma di campo:

$$\vec{F} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Si può definire un campo anche per l'energia potenziale:

$$\begin{tikzcd}
\vec{F} \arrow[r] \arrow[d] & \vec{E} \arrow[d, dashed] \\
\underset{\text{elettrostatica}}{\underset{\text{Energia}}{\Delta U}} \arrow[r] & \underset{\text{potenziale}}{\underset{\text{Campo}}{\Delta V}}
\end{tikzcd}$$

Definizione 2.5. Il campo potenziale è definita come la differenza di energia di una carica q unitaria:

$$V(F) := \Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} \quad [V]$$

L'unità di misura è il Volt.

Quindi come $\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F}\, dl$, così si avrà:

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_{\substack{A \\ \gamma}}^{B} \vec{E}\, dl \quad [V]$$

Di conseguenza il lavoro sulla carica q è:

$$L_q = -q\Delta V \quad [J]$$

2.5.1 Calcolo del potenziale

$V(\vec{r})$ è un campo definito a meno di una costante (come l'energia), ma si sceglie un punto di riferimento (uno **zero**) che chiamiamo ad esempio $\vec{r}_0$ e poniamo $V(\vec{r}_0) = V_0$. Successivamente si calcola il potenziale come $V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$:

$$\begin{cases} V(\vec{r_0}) = V_0 \rightarrow = 0 \\ V(\vec{r}) - V_0 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, dl \end{cases}$$

Si calcola quindi il campo prendendo come punto di riferimento il punto $\vec{r}_0$

2.5.2 Potenziale della carica puntiforme

Ricordando la definizione di campo elettrostatico:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Il potenziale si calcola come:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) - V_0 &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, dl \\ &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot dl \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \quad [V] \end{aligned}$$

dove r_0 è un punto di riferimento e V_0 è il potenziale in quel punto.

Si può prendere $r_0 = \infty$, quindi $V_\infty = 0$ e si ottiene:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad [V]$$

2.5.3 Potenziale di più cariche

Consideriamo un insieme di cariche discrete $\{q_i\}_N$ vale il **principio di sovrapposizione** anche per il potenziale ed esso è definito tramite il campo. Gli operatori somma e integrale commutano e quindi si ottiene:

$$V_{tot} = \sum V_i$$

dove:

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

e quindi:

$$V_{tot}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

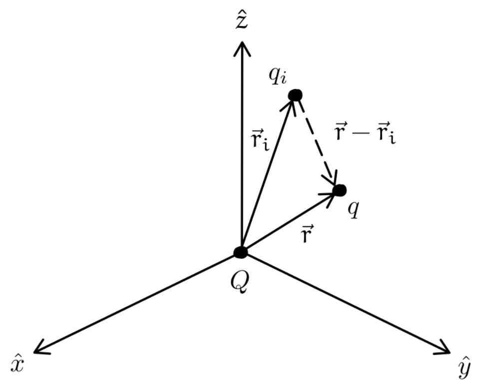


Figura 17: Potenziale di più cariche

In questo modo spostando l'origine degli assi il potenziale non cambia.

Se si avesse un volume tutte le sommatorie diventerebbero integrali:

$$V_{tot}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Abbiamo quindi che:

$$\begin{tikzcd}
\vec{F} \arrow[r] \arrow[d, "\text{conservativo}"'] & \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{test}} \arrow[d, "\text{conservativo}"] \\
\underset{\text{Energia elettrostatica}}{\Delta U} \arrow[r] & \underset{\text{Campo potenziale}}{\Delta V = \frac{\Delta U}{q_{test}}}
\end{tikzcd}$$

$$L_q = -\Delta U \rightarrow L_q = -q\Delta V$$

La circuitazione in un percorso chiuso è nulla:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot dl = 0$$

Figura 18: Equazione di Maxwell

quindi $\vec{E}$ è **conservativo**.

2.6 Linee di campo

Sono linee tangenti al campo elettrostatico $\vec{E}$ in ogni punto e dirette nel verso del campo. Hanno le seguenti caratteristiche:

- Sono continue, quindi non si interrompono mai
- Escono dalle cariche positive e entrano nelle cariche negative
- Sono linee aperte, cioè non si chiudono mai
- In una carica positiva puntiforme sono radiali

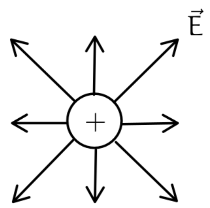


Figura 19: Linee di campo su una carica positiva

- In una carica negativa puntiforme sono radiali e entrano nella carica

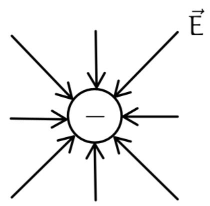


Figura 20: Linee di campo su una carica negativa

- Le cariche sono l'origine delle linee di campo, se si hanno delle linee chiuse vuol dire che non c'è una sorgente
- Le linee di campo non si intersecano mai

2.7 Superfici equipotenziali

Sono luoghi di punti (superficie bidimensionale) a potenziale costante:

$$V(\vec{r}) = \text{costante} \rightarrow \Delta V = 0 \rightarrow L = 0 \quad \text{sulla superficie}$$

Se il lavoro è nullo, allora la forza è perpendicolare alla superficie $\vec{F} \perp d\vec{l}$. Quindi le superfici equipotenziali sono perpendicolari al campo elettrico perchè:

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow \vec{F} \perp \vec{E}$$

Quindi si nota che per una carica puntiforme la superficie equipotenziale è una sfera. Il campo elettrico punta sempre verso potenziali minori perchè il lavoro è positivo:

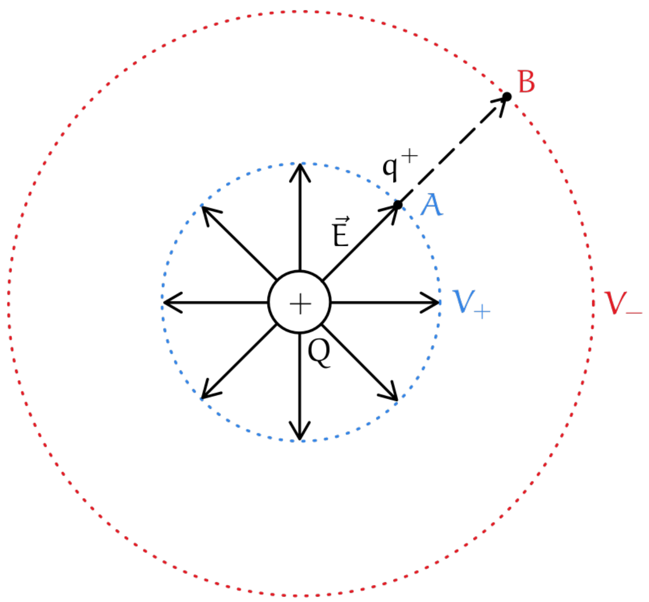


Figura 21: Superfici equipotenziali

$$L = -q^+ (V_B - V_A) > 0 \quad \text{con } V_B < V_A$$

2.8 Teorema di Gauss

Si può calcolare il campo elettrostatico $\vec{E}$ di un'entità più complicata, come ad esempio un filo, un cilindro ecc..., che presentano **situazioni di simmetria**. Questo calcolo non viene fatto direttamente tramite integrali, ma tramite il **teorema di Gauss**. Le simmetrie che analizziamo sono:

- **Simmetria sferica**: Un sistema **isotropo**, cioè che non varia in base alla direzione. Ad esempio una sfera, una carica puntiforme oppure un condensatore sferico.

- **Simmetria cilindrica**: Un sistema che non varia in base alla rotazione intorno ad un asse. Ad esempio un cilindro **indefinito** (di lunghezza non definita) oppure un filo.

- **Simmetria rispetto ad un piano**: Un sistema che non varia in base alla traslazione lungo un piano.

Tutte queste sono geometrie in cui sono distribuite cariche e avranno una certa densità di carica:

- Carica puntiforme q $[C]$
- Densità lineare λ $\left[\frac{C}{m}\right]$ per una linea
- Densità superficiale σ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ per una superficie
- Densità volumetrica ρ $\left[\frac{C}{m^3}\right]$ per un volume

Osservazione: Moltiplicare un campo per una superficie equivale a calcolare un **flusso**, cioè contare le linee di campo per la superficie ortogonale. Se prendiamo un campo di una carica puntiforme notiamo che al variare della distanza $\vec{r}$ il valore del campo varia. Se invece moltiplichiamo il campo per la superficie di una sfera, si ottiene un flusso che è costante e non dipende da $\vec{r}$:

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q\hat{r}}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0\cancel{r^2}} \cdot \cancel{4\pi r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot \hat{r}$$

Definizione utile 2.2 (Angolo piano)**.** L'angolo solido $d\alpha$ è definito come un elemento di linea dl di circonferenza diviso per il raggio:

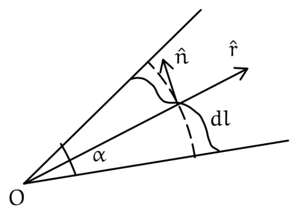


Figura 22: Angolo piano

$$d\alpha = \frac{\vec{dl} \cdot \hat{n} \cdot \hat{r}}{r}$$

Definizione utile 2.3 (Angolo solido)**.** L'angolo solido $d\Omega$ è definito come un elemento di superficie dS diviso per il raggio al quadrato:

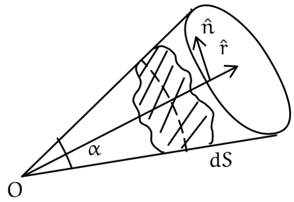
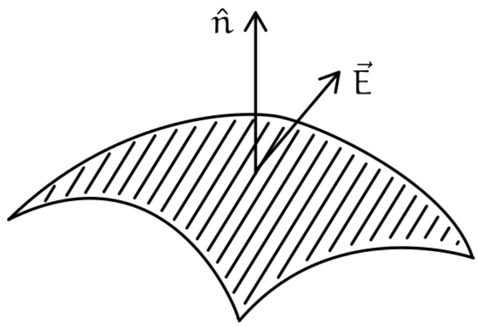


Figura 23: Angolo solido

$$d\Omega = \frac{dS \cdot \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

2.8.1 Flusso del campo $\vec{E}$

Consideriamo una superficie con concavità verso il basso definita come la sua orientazione $\hat{n}$ (normale) e la sua area dS.



$$d\vec{S} = \hat{n} \cdot dS$$

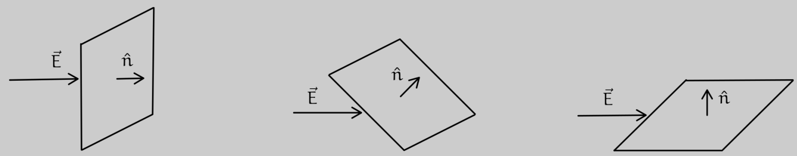
Figura 24: Superficie

Definizione 2.6 (Flusso elementare)**.** Il flusso elementare $d\Phi$ è definito come il prodotto scalare tra il campo e la superficie:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [V \cdot m]$$

Il flusso di una superficie si ottiene integrando:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$d\Phi > 0$

(a) Flusso positivo

$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \cos\theta$

(b) Flusso generico

$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0$

(c) Flusso nullo

Figura 25: Esempi di flusso

Esempio 2.1. Consideriamo una carica puntiforme q e una superficie dS

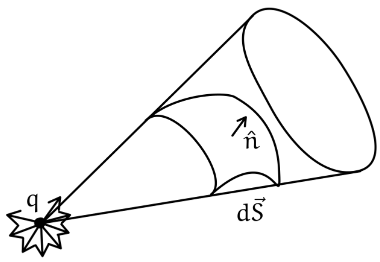


Figura 26: Flusso di una carica puntiforme

Il flusso del campo elettrostatico è:

$$d\Phi = \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S}}_{d\Omega} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Osserviamo che il flusso dipende solo da $d\Omega$, cioè dall'angolo solido, e non dalla distanza r della superficie dalla carica.

Esempio 2.2. Consideriamo una superficie chiusa:

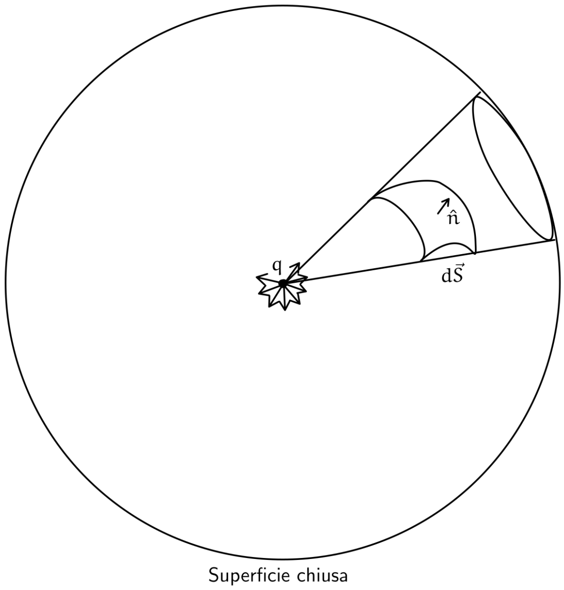


Figura 27: Flusso di una superficie chiusa

il flusso del campo elettrostatico è:

$$\Phi = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\oint d\Omega}_{=4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

L'integrale su una superficie chiusa dell'angolo piano è uguale a 2π, quindi l'integrale su una superficie chiusa dell'angolo solido è uguale a 4π.

Il flusso quindi non dipende dalla superficie. Questa è la dimostrazione del teorema di Gauss.

Teorema 2.1 (Teorema di Gauss)**.** Il flusso $\Phi(\vec{E})$ del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa **qualsiasi** S è uguale alla somma delle cariche interne alla superficie diviso ε_0:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\text{superficie chiusa QUALUNQUE}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interne}}}{\varepsilon_0}$$

Le cariche esterne non contano perchè quando esse entrano nella superficie, ad un certo punto escono, quindi il flusso è nullo. Se all'interno della superficie c'è una sorgente (quindi cariche interne) esse non entrano mai perchè sono già dentro, quindi escono e il flusso è positivo.

2.9 Applicazione del teorema di Gauss

Siccome il teorema di Gauss dice che il flusso non dipende dalla superficie si prende una superficie particolarmente simmetrica chiamata **superficie di Gauss** che rende facilmente calcolabile il flusso, grazie al campo costante su tutta la superficie. Per calcolare il campo $\vec{E}$ siccome esso è costante e parallelo alla normale (grazie alla superficie scelta) si può tirare fuori dall'integrale per ottenere un prodotto tra l'incognita $\vec{E}$ e un integrale geometrico.

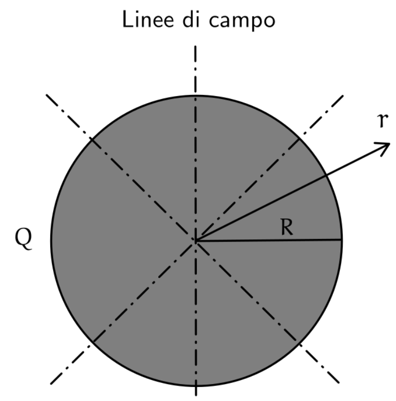
$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \oint_{\text{Sup}} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{Interne}}}{\varepsilon_0}$$

Figura 28: Equazione di Maxwell

2.9.1 Simmetria sferica

Le caratteristiche necessarie sono:

- Distribuzione di carica con simmetria sferica. Potrebbe essere una:
  - Carica di volume ρ

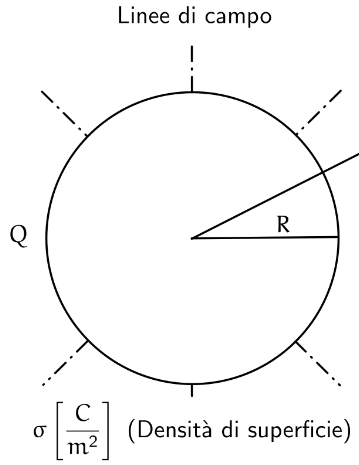


$\rho\left[\frac{C}{m^3}\right]$ (Densità di volume)

$$Q = \rho \cdot \overbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}^{\text{Volume sfera}} \qquad [C]$$

Figura 29: Simmetria sferica di volume

  - Carica di superficie σ



$$Q = \sigma \cdot \overbrace{4\pi R^2}^{\text{Superficie sfera}} \qquad [C]$$

Figura 30: Simmetria sferica di superficie

Se la carica $\{Q\}$ è a simmetria sferica, allora il campo $\vec{E}$ sarà a simmetria sferica. Questo campo sarà **radiale** e dipenderà solo da $\vec{r}$:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Esempio 2.3. Consideriamo una carica positiva Q^+ distribuita su una superficie. L'obiettivo è quello di cercare una superficie di Gauss in cui il campo elettrico sia costante. Siccome dipende solo da r esso sarà costante solo nelle superfici sferiche $S(r)$ di raggio r.

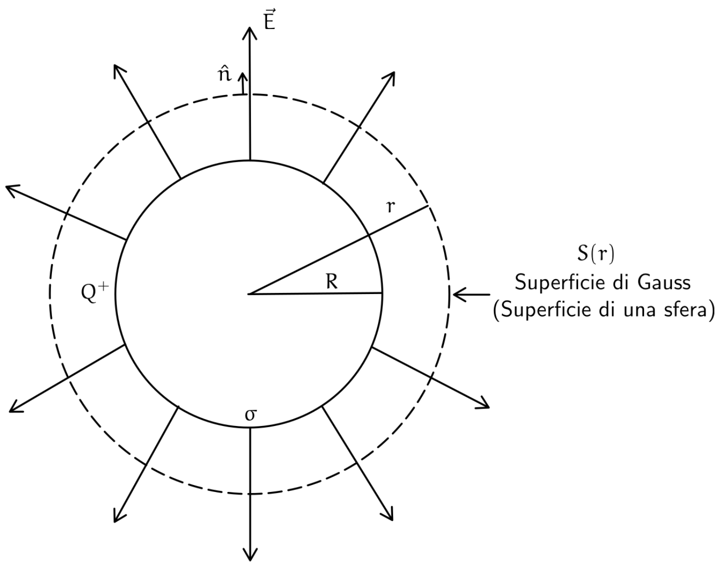


Figura 31: Carica distribuita su una superficie sferica

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{E}) &= \oint_{S(r)} \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot_{S(r)} dS \\
&= \oint_{S(r)} E(r) dS \\
&= E(r) \overbrace{\oint_{S(r)} dS}^{\text{Sup sfera}} \\
&= E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Dove:

$$
Q_{\text{int}} = \begin{cases} Q & \text{se } r \geqslant R \text{ (esterno)} \\ 0 & \text{se } r < R \text{ (interno)} \end{cases}
$$

Quindi:

$$
E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geqslant R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m}\right]
$$

In $r = R$ il campo vale:

$$
E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}
$$

Il grafico del campo elettrico è:

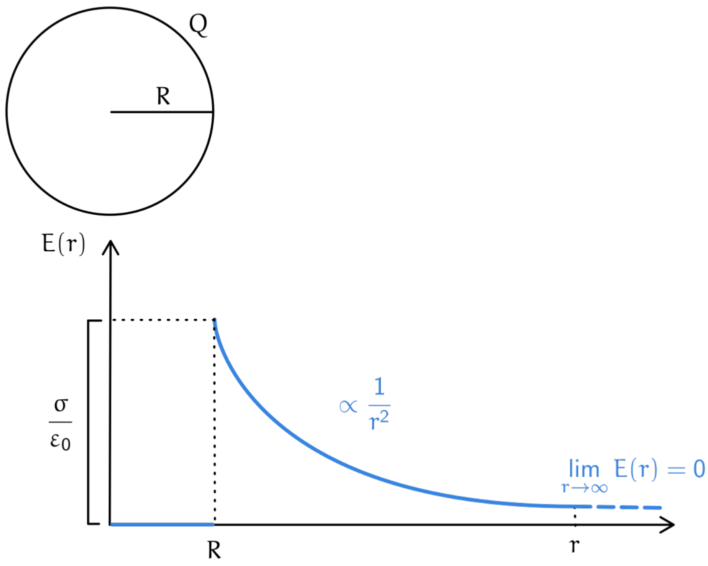


Figura 32: Grafico del campo elettrico

Esempio 2.4. Consideriamo una carica positiva Q^+ distribuita su un volume. L'obiettivo è quello di cercare una superficie di Gauss in cui il campo elettrico sia costante. Siccome dipende solo da r esso sarà costante solo nelle sfere $S(r)$ di raggio r.

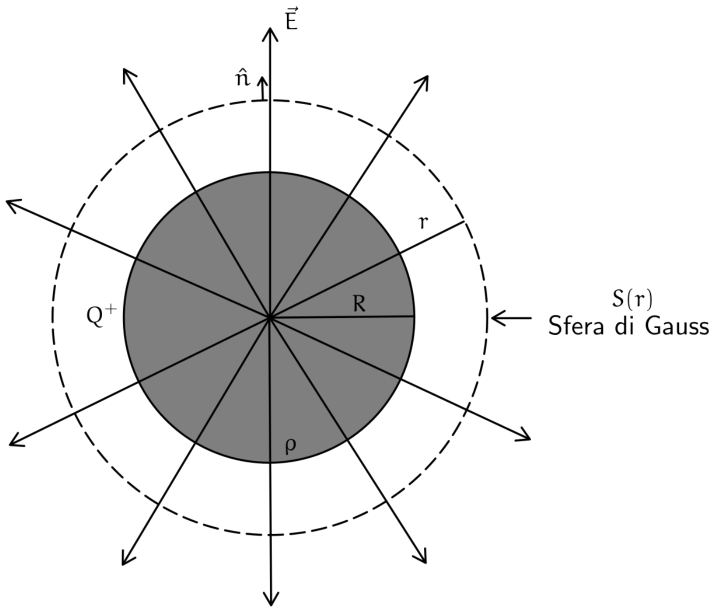


Figura 33: Carica distribuita su un volume sferico

Siccome la sfea all'interno non è più vuota come nell'esempio precedente, ma è piena il valore di Q_{int} esterno rimane invariato, ma all'interno si ha:

$$Q_{Int} = \begin{cases} Q & \text{se } r \geqslant R \\ \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{se } r < R \end{cases}$$

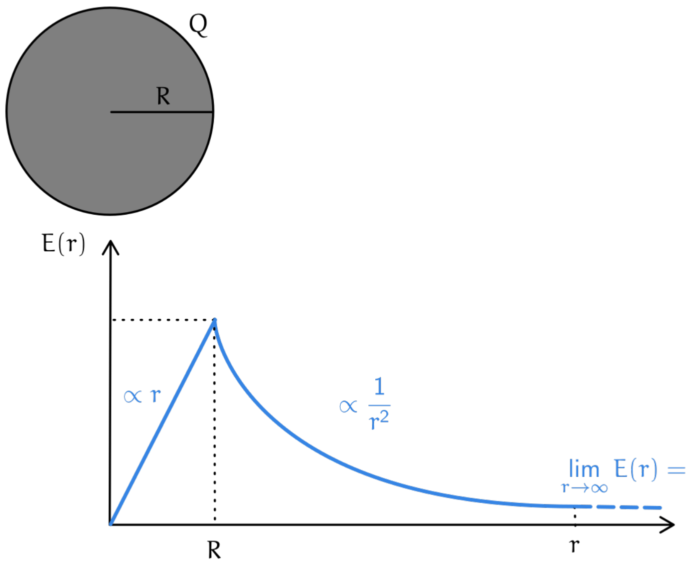
Quindi:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geqslant R \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot r & \text{se } r < R \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

In $r = R$ il campo vale:

$$E(R) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot R$$

Il grafico del campo elettrico è:



2.9.2 Simmetria cilindrica

Le possibili simmetrie sono:

- Filo indefinito con distribuzione di carica lineare λ
- Cilindro
  - Con distribuzione di carica sulla superficie
  - Con distribuzione di carica nel volume

La caratteristica principale è la **simmetria attorno all'asse del sistema**. La superficie di Gauss in cui il campo è costante è un cilindro di raggio r e altezza h.

Esempio 2.5. Consideriamo una carica λ^+ distribuita su un filo indefinito:

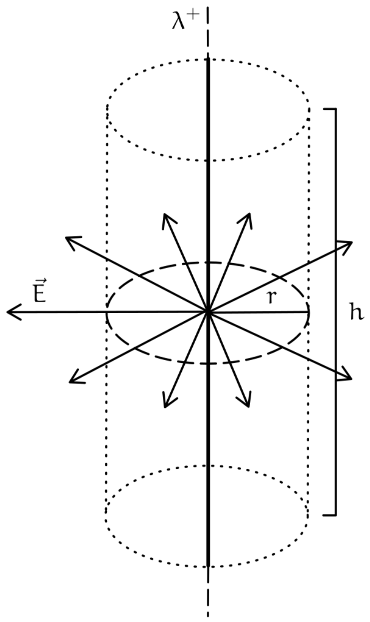


Figura 34: Carica distribuita su un filo indefinito

Il flusso del campo è il flusso delle basi (che essendo perpendicolari al campo radiale vale 0) più il flusso laterale:

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{\text{Basi}} + \Phi_{\text{Laterale}} = 0 + E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{\text{Int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

Quindi il campo è:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Il grafico del campo elettrico è:

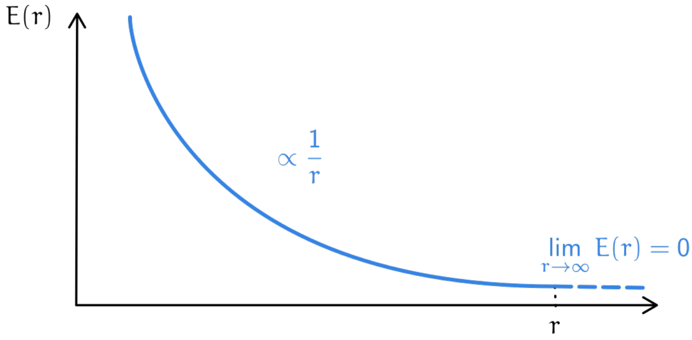


Figura 35: Grafico del campo elettrico

Esempio 2.6. Consideriamo una carica σ^+ distribuita su un cilindro di raggio R e altezza h:

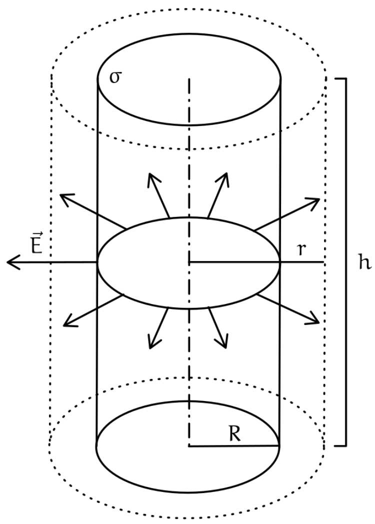


Figura 36: Carica distribuita su un cilindro di raggio R e altezza h

Il flusso del campo è lo stesso del caso precedente, ma con Q_{Int} diverso:

$$Q_{Int} = \begin{cases} \sigma \cdot 2\pi R h & \text{se } r \geqslant R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases}$$

Quindi il campo è:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & \text{se } r \geqslant R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases}$$

Il grafico del campo elettrico è:

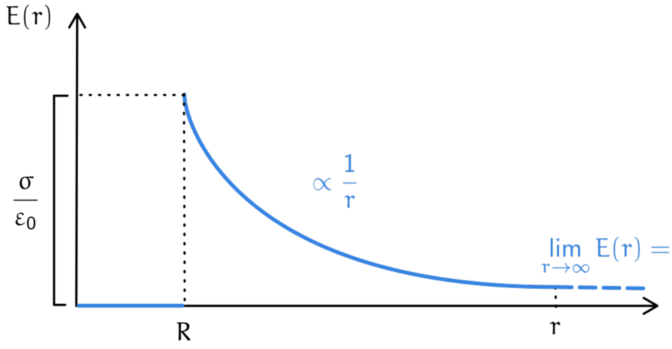


Figura 37: Grafico del campo elettrico

2.9.3 Simmetria rispetto ad un piano indefinito

Consideriamo un piano indefinito con una distribuzione di carica superficiale positiva σ^+ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$. L'unico grado di libertà è la distanza dal piano. L'elemento di campo è definito come:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Se consideriamo un elemento di carica che agisce su un punto p, allora siccome il piano è indefinito ci sarà un elemento di carica simmetrico che genera un campo con componente orizzontale uguale e opposto a quella dell'elemento precedente. Di conseguenza il campo totale sarà perpendicolare al piano:

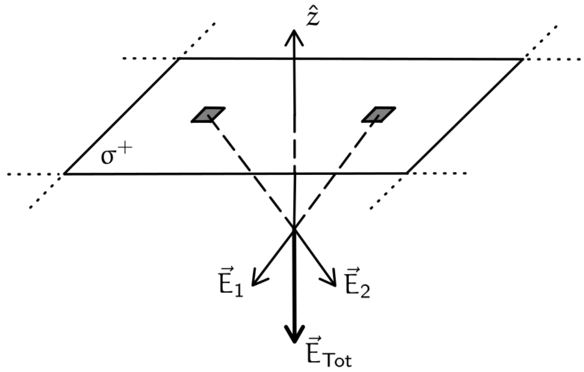


Figura 38: Carica distribuita su un piano indefinito

Il campo avrà questa forma:

$$\vec{E} = E(z)\hat{z}$$

La superficie di Gauss da considerare è un cilindro che si trova metà sopra e metà sotto il piano:

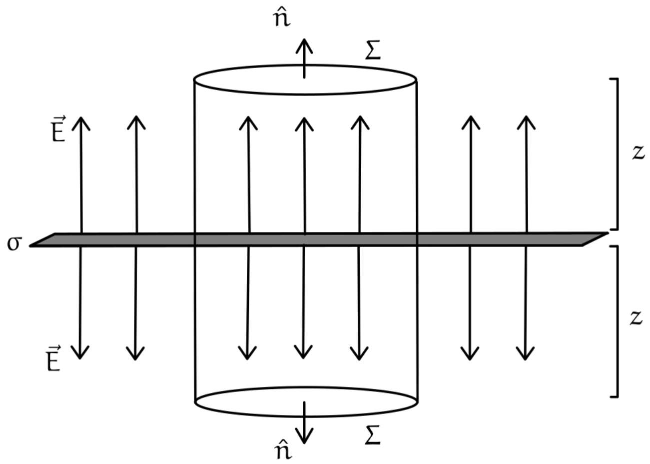


Figura 39: Superficie di Gauss per un piano indefinito

Il flusso del sistema sarà il flusso delle basi più il flusso dei lati, ma il flusso laterale sarà nullo:

$$\Phi = \Phi_{\text{Basi}} + \Phi_{\text{Laterale}} = 2E(z)\cancel{\Sigma} + 0 = \frac{Q_{\text{Int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\cancel{\Sigma}\sigma}{\varepsilon_0}$$

Quindi il campo è:

$$E = \frac{\sigma^{\pm}}{2\varepsilon_0}$$

La particolarità di questo campo è che non dipende dalla distanza, quindi è un campo costante.

Esempio 2.7. Vogliamo analizzare il campo elettrico tra due piani indefiniti distanti h uno caricato positivamente e l'altro negativamente.

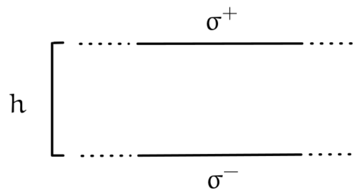


Figura 40: Carica distribuita su due piani indefiniti

Il piano, per il principio di sovrapposizione, è uguale a:

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$$

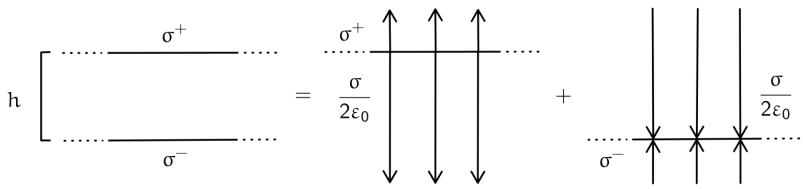


Figura 41: Sovrapposizione di due piani

Dal teorema di Gauss abbiamo che il campo è costante e vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

quindi:

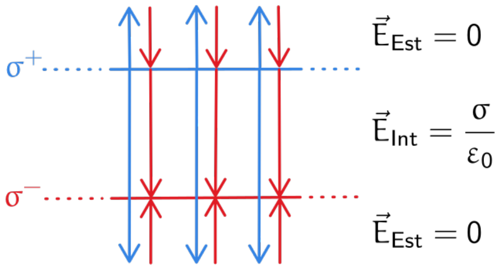


Figura 42: Risultato della sovrapposizione di due piani

Notiamo che all'esterno dei piani il campo è nullo, mentre al centro è la somma dei due campi con verso dal positivo al negativo.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Le linee di campo sono quindi:

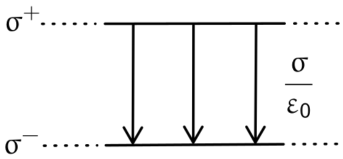


Figura 43: Linee di campo tra due piani

2.10 Elettrostatica nei conduttori

Un materiale conduttore ha **le cariche libere di muoversi**. Se si avvicina un campo elettrico e sulle cariche viene esercitata una forza. Per un momento ci sarà del caos, ma poi le cariche si sposteranno fino a quando non si raggiunge l'equilibrio, in quel momento si studia il comportamento delle cariche.

2.10.1 Proprietà dei conduttori in equilibrio elettrostatico

1. **Prima proprietà**: Il campo totale interno in un conduttore è 0:

$$E_{Interno} = 0$$

   Consideriamo un conduttore immerso in un campo chiamato **campo esterno**. Le cariche sono libere di muoversi, quindi quelle positive andranno nella direzione del campo, mentre quelle negative andranno nella direzione opposta al campo.

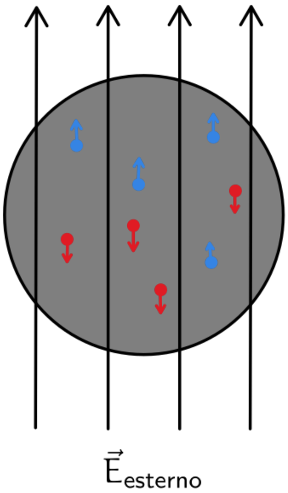


Figura 44: Campo esterno in un conduttore

Si nota quindi una separazione di carica che creerà un **campo indotto**.

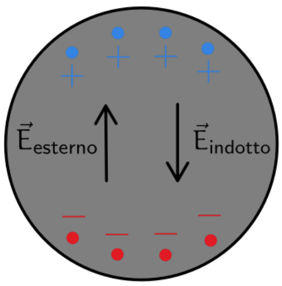


Figura 45: Campo indotto in un conduttore

Vale il principio di sovrapposizione e quindi all'interno del conduttore si avrà la somma dei due campi:

$$E_{tot} = E_{est} + E_{ind}$$

Ad un certo punto si raggiungerà l'equilibrio, quindi le cariche non si muovono più, di conseguenza il campo è nullo.

2. **Seconda proprietà**: Siccome il campo è nullo, il potenziale è costante su tutto il conduttore:

$$V - V_0 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \cancel{\vec{E}} \cdot d\vec{l}$$
$$V = \text{costante}$$

3. **Terza proprietà**: Siccome il campo interno è nullo, la carica interna in un conduttore in equilibrio è 0 (dal teorema di Gauss) $Q_{Int} = 0$:

$$\oint_S \vec{\cancel{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow Q_{int} = 0$$

   Quindi **le cariche si distribuiscono solo in superficie**

4. **Quarta proprietà**: Il campo nella superficie di un conduttore è ortogonale alla superficie e vale sempre:

$$\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

   (Teorema di Coulomb)

Notiamo quindi che il conduttore in equilibrio elettrostatico distorce il campo nel seguente modo:

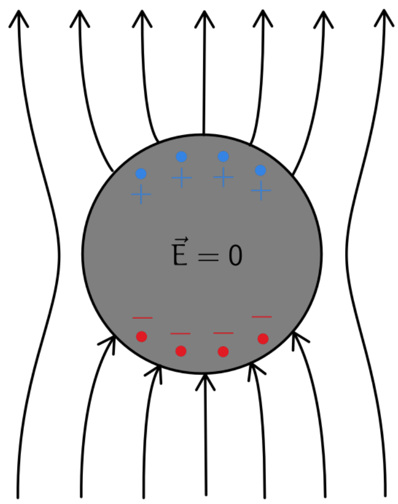


Figura 46: Campo in un conduttore in equilibrio

2.10.2 Cavità in un conduttore

La cavità non dipende dalla geometria del conduttore. Un esempio di un conduttore con una cavità è il seguente (un guscio):

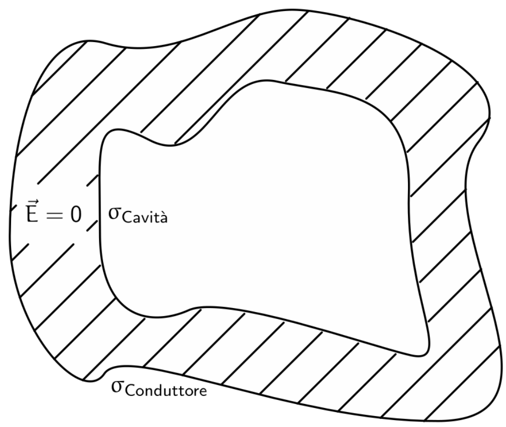


Figura 47: Conduttore con una cavità

Carichiamo un conduttore con una cavità **vuota** con una carica Q. Questa carica si distribuirà sulla superficie del conduttore e ha le seguenti proprietà:

1. La densità nella superficie della cavità è scarica:

$$\sigma_{\text{Cavità}} = 0$$

   quindi se si deposita una carica sul guscio, l'interno non può essere caricato

2. Il campo all'interno della cavità è nullo:

$$E_{\text{Cavità}} = 0$$

   Dimostrazione: Per il teorema di Gauss posiziono una superficie di Gauss all'interno del conduttore, quindi:

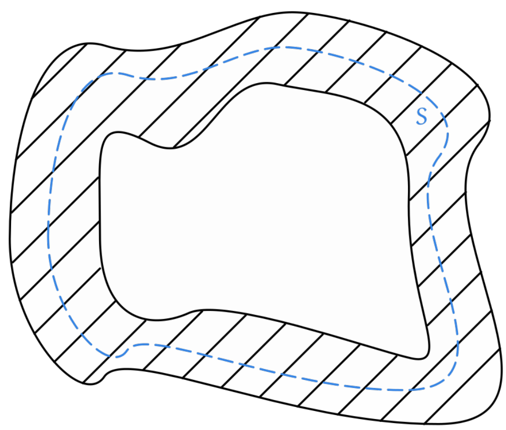


Figura 48: Superficie di Gauss in un conduttore con cavità

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int } \textbf{totale}}}{\varepsilon_0}$$

Il campo vale 0 perchè la superficie di Gauss si trova all'interno del conduttore, quindi:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow Q_{\text{Cavità}} = 0$$

La carica totale è nulla, però si potrebbe avere una situazione con una carica positiva e negativa che si annullano. Se per assurdo si avesse una separazione di carica, con carica totale nulla:

$$q^+ + q^- = 0$$

allora ci sarebbe un campo interno:

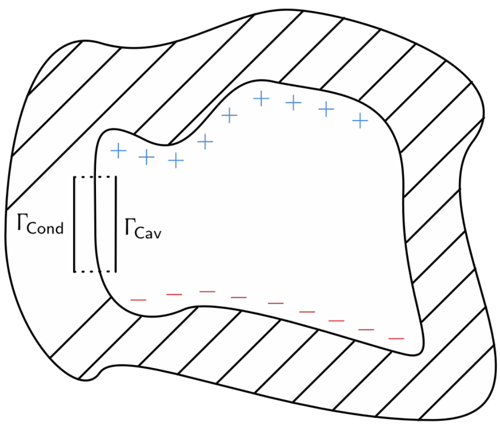


Figura 49: Dimostrazione del campo nullo in un conduttore con cavità

per l'equazione di Maxwell sapppiamo che:

$$\int_\Gamma E \cdot dl = \int_{\Gamma_{\text{Conduttore}}} E + \underbrace{\cancel{\int_{\Gamma_{\text{Cavità}}} E}}_{=0} \neq 0$$

E questo è assurdo, quindi il campo è nullo.

Le linee di campo sono:

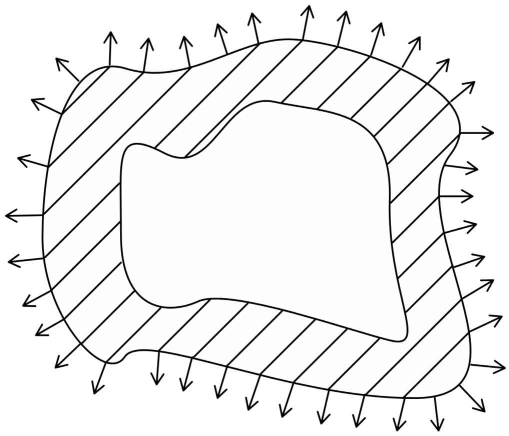


Figura 50: Linee di campo in un conduttore con cavità

Questa superficie con una cavità agisce come uno **schermo elettrostatico** (o gabbia di Faraday) perchè il campo all'interno è nullo.

Consideriamo ora un conduttore con una cavità **carica**, ciò vuol dire che nella cavità è presente un conduttore carico e questa carica si distribuisce sulla superficie:

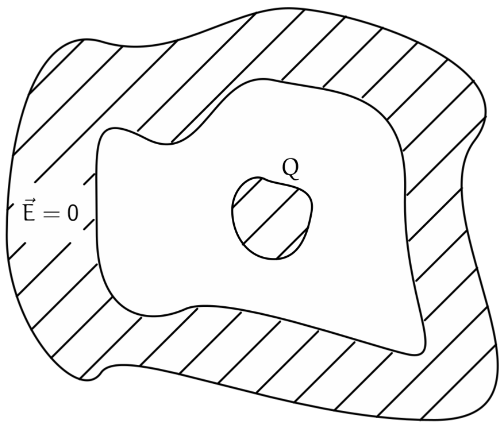


Figura 51: Conduttore con una cavità carica

Per Gauss posiziono una superficie all'interno del conduttore con la cavità, quindi:

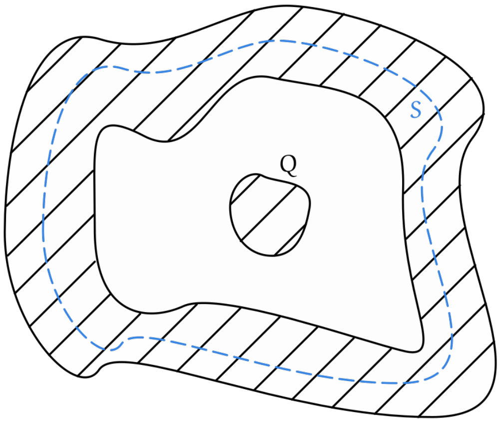


Figura 52: Superficie di Gauss in un conduttore con cavità carica

$$\oint_S \underbrace{\vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Visto che la carica deve essere 0, compare **per induzione** una carica uguale ed opposta a quella della cavità:

$$Q_{\text{Indotta}} = -Q_{\text{Cavità}}$$

Però la carica si conserva, quindi compare sempre per induzione una carica Q sulla superficie esterna:

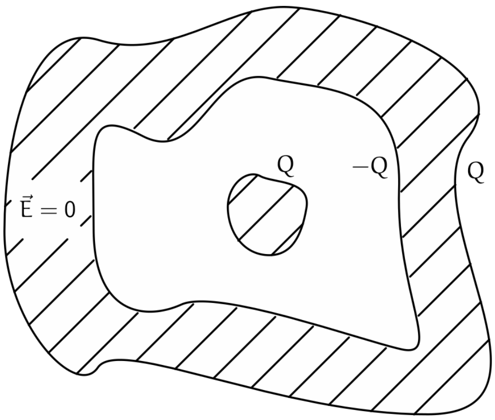


Figura 53: Induzione in un conduttore con cavità carica

Le linee di campo sono:

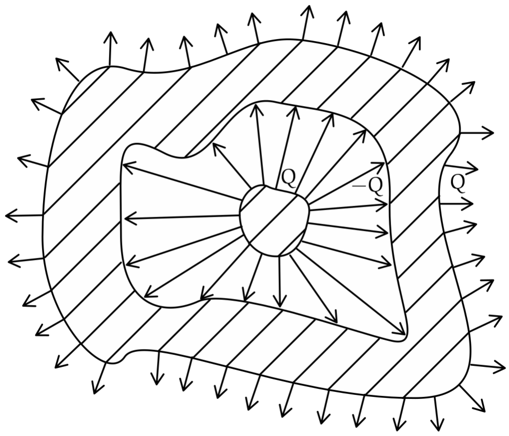


Figura 54: Linee di campo in un conduttore con cavità carica

Se viene aggiunta una carica all'esterno il sistema **nella cavità** non cambia perchè la superficie agisce come uno schermo. All'esterno invece le cariche si sommano.

Esempio 2.8. Consideriamo il seguente sistema:

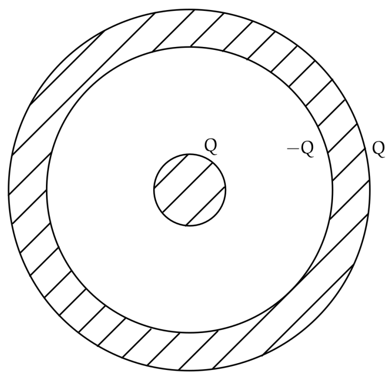


Figura 55: Conduttore con cavità sferica carica

Se si mette al contatto il conduttore interno con il conduttore esterno si ottiene il sistema del conduttore con una cavità perchè i due conduttori agiscono come se fossero uno solo:

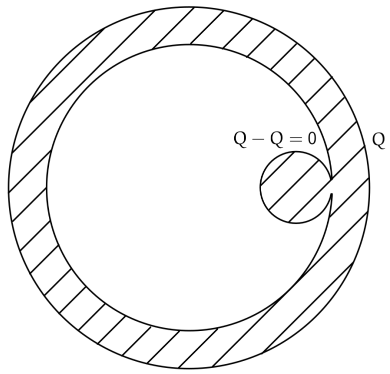


Figura 56: Trasformazione del condensatore in un conduttore con cavità carica

2.11 Capacità elettrostatica

Un carica $\{dq\}$ genera un campo

$$d\vec{E} = \frac{\{dq\}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

e un potenziale

$$dV = \frac{\{dq\}}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad [V]$$

Osserviamo che c'è una linearità tra la carica e il potenziale, quindi V è proporzionale a Q e il coefficiente di proporzionalità è la **capacità**.

2.11.1 Conduttore isolato

Consideriamo un qualsiasi conduttore isolato con una carica Q e un potenziale V costante.

Definizione 2.7. Si definisce **capacità elettrostatica** C di un conduttore isolato la quantità di carica Q tarsferita al conduttore da un potenziale V

$$C = \frac{Q}{V} \qquad [F] \ \text{(Farad)}$$

La capacità dipende solo dalla geometria e dal materiale.

2.11.2 Conduttore non isolato

Consideriamo due conduttori, uno con carica Q e uno con carica $-Q$ in **induzione completa**, cioè tutte le linee di campo del primo oggetto vanno nel secondo oggetto. Per avere ciò bisogna eliminare ogni interazione con l'esterno e l'unica opzione è inserire il primo oggetto nella cavità del secondo.

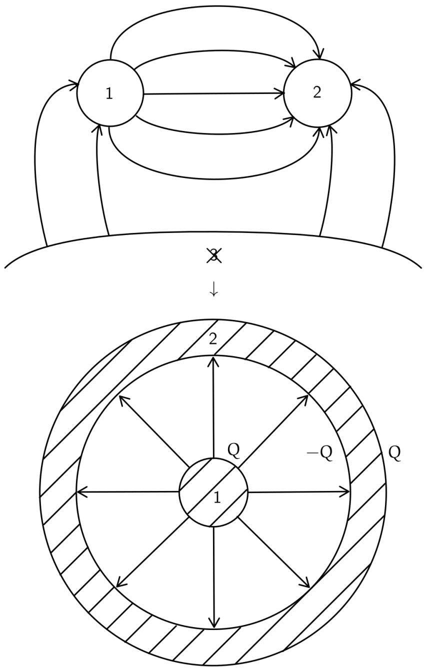


Figura 57: Isolamento di un conduttore

Un **Condensatore** è un sistema di due conduttori in induzione completa. In un condensatore i due conduttori si dicono **armature** o **lastre**.

Nella pratica si distinguono 3 casi (in questo corso):

1. **Condensatore sferico**: Si hanno due sfere, una nella concavità dell'altra

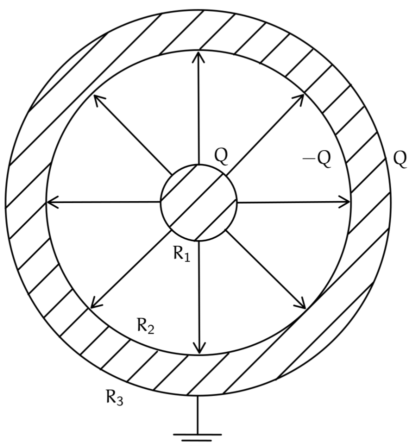


Figura 58: Condensatore sferico

2. **Condensatore cilindrico**: È una struttura tubolare, in cui se il raggio è molto minore della lunghezza del tubo allora si può **approssimare** come un induzione completa:

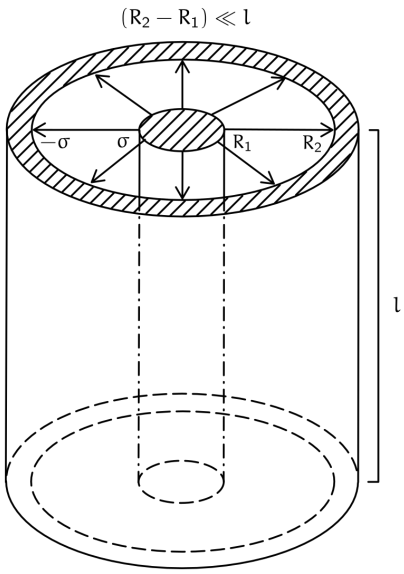


Figura 59: Condensatore cilindrico

3. **Condensatore piano**: È formato da due lastre piane parallele separate da una distanza h con una certa area A. Anche in questo caso se le lastre sono molto grandi rispetto alla distanza si può approssimare come un induzione completa.

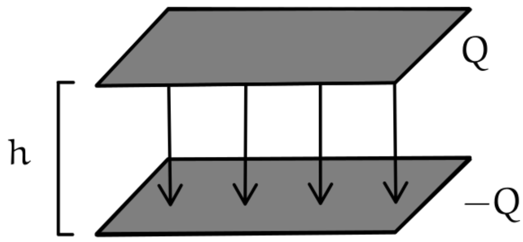


Figura 60: Condensatore piano

2.11.3 Capacità nei condensatori

Consideriamo un condensatore:

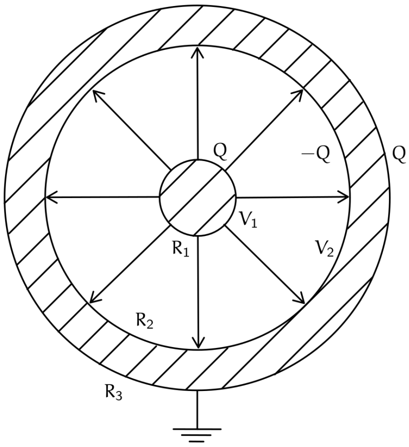


Figura 61: Condensatore sferico

La capacità è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad \text{(presa positiva)}$$

Esempio 2.9. Calcoliamo la capacità del condensatore piano nel vuoto, indicato con il seguente simbolo:

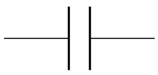


Figura 62: Condensatore piano

Consideriamo un piano con carica positiva e uno con carica negativa e area A:

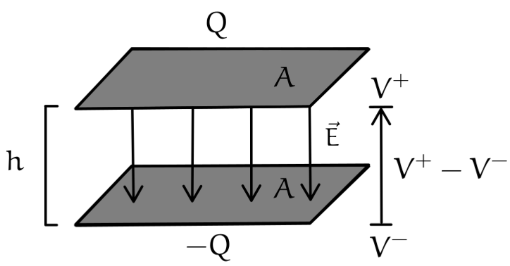


Figura 63: Potenziale di un condensatore piano

Il campo è solo all'interno e vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La capacità è:

$$C = \frac{Q}{V^+ - V^-}$$

Ora bisogna calcolare la differenza di potenziale tra le due lastre ricordando la definizione di potenziale:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

quindi (Il campo è negatico perchè la sua direzione è opposta a quella del potenziale):

$$V^+ - V^- = -\int_-^+ \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h \quad [V]$$

Di conseguenza la capacità è:

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h} = \frac{\varepsilon_0 A}{h} \quad [F]$$

2.12 Calcolo del campo potenziale

2.12.1 Simmetria sferica

Il campo di una superficie sferica è:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r \geqslant R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

La definizione di potenziale è:

$$V(r) - V_{\text{Riferimento}} = -\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{E}(r)\, dr$$

dove $V_{\text{Riferimento}} = V(rif) \to V(\infty) = 0$. Il potenziale di reiferimento **può** essere preso all'infinito soltanto per sistemi in cui **non** ci sono cariche all'infinito.

Quindi il calcolo del potenziale diventa:

$$V(r) - \underbrace{\cancel{V_{\text{Riferimento}}}}_{=0} = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = -\left(\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Bigg|_\infty^r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad [V]$$

(solo per $r > R$). Il grafico è:

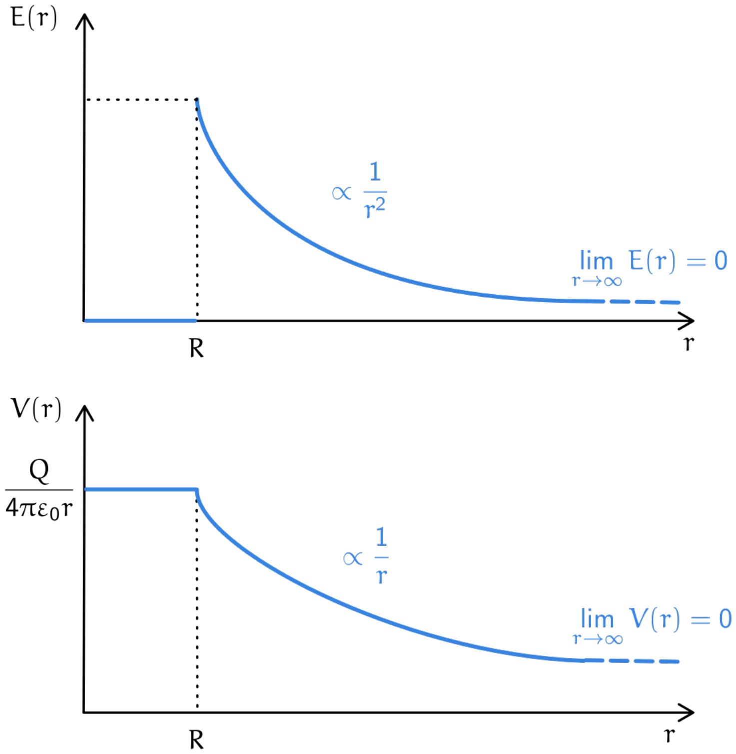


Figura 64: Grafico del potenziale

Definizione 2.8. Il potenziale si calcola come:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \geqslant R \\ \text{Costante} & r < R \end{cases}$$

Con il potenziale si può calcolare la capacita come:

$$C = \frac{Q}{V_{\text{Sup}}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R \quad [\text{F}]$$

Esempio 2.10 (Potenziale di un condensatore sferico)**.** Consideriamo un condensatore sferico con carica Q in cui il raggio del conduttore sferico interno è R_1 e i raggi del conduttore sferico sono R_2 e R_3. Il campo è:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad R_1 < r < R_2$$

Il campo è nullo nei seguenti casi:

$$\vec{E} = 0 \rightarrow \begin{cases} r < R_1 \\ R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

quindi all'interno del conduttore.

Il potenziale sarà:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad [V] \quad \text{Nella cavità}$$

All'interno dei conduttori il potenziale vale:

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$
$$V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

La capacità è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(R_2) - V(R_1)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad [F]$$

Esempio 2.11 (Potenziale in un filo indefinito)**.** Consideriamo un filo indefinito conduttore con carica λ. Il campo è:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Il potenziale è calcolato come:

$$V(r) - \underbrace{\cancel{V(rif)}}_{=0} = -\int_{rif}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln(r) - \ln(rif)\right)$$

Vogliamo che il punto di riferimento renda nullo il potenziale, quindi:

$$V(rif) = 0$$

quindi il punto di riferimento è un punto qualunque

$$rif \neq \infty$$

Il grafico del potenziale è:

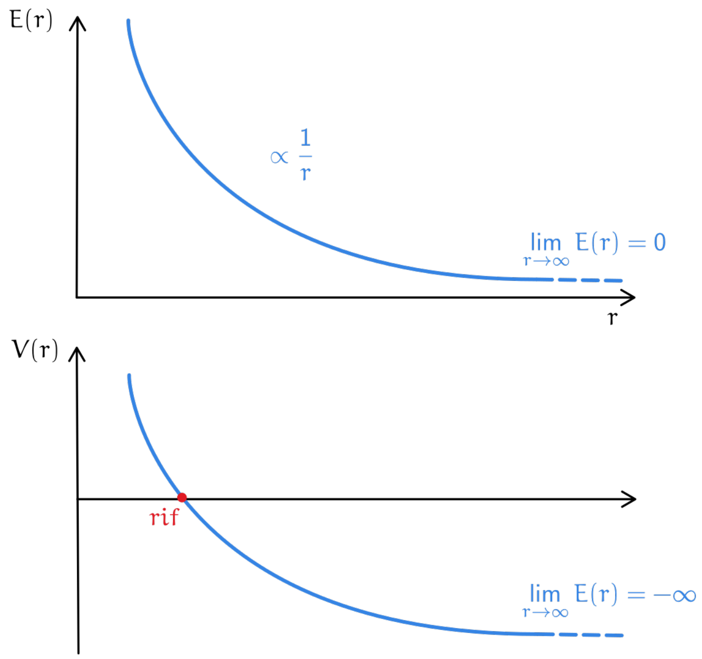


Figura 65: Grafico del potenziale

2.13 Elettrostatica nei dielettrici

2.13.1 Polarizzazione

I dielettrici hanno cariche vincolate.

1. Consideriamo un atomo neutro, applichiamo un campo e osserviamo che le cariche negative si separano in direzione del campo:

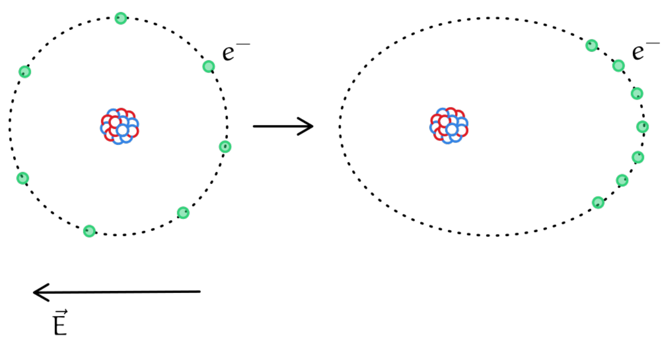


Figura 66: Atomo in un campo

Questo sistema si può modellare nel seguente modo:

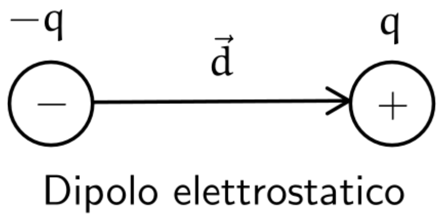


Figura 67: Dipolo elettrico

Due cariche opposte q e $-q$ rigidamente separate da una distanza $\vec{d}$ formano un **dipolo elettrico** (che produce un campo). Questo oggetto è caratterizzato dal **momento di dipolo elettrostatico**:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Quindi il materiale si **polarizza**, cioè si è creata una separazione di carica rigidamente separata.

2. Alcune molecole sono già polarizzate e si chiamano **molecole polari**, ad esempio l'acqua:

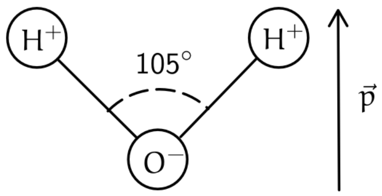


Figura 68: Molecola di acqua

3. Quando si ha un insieme di molecole polarizzate casualmente si ha un materiale globalmente neutro:

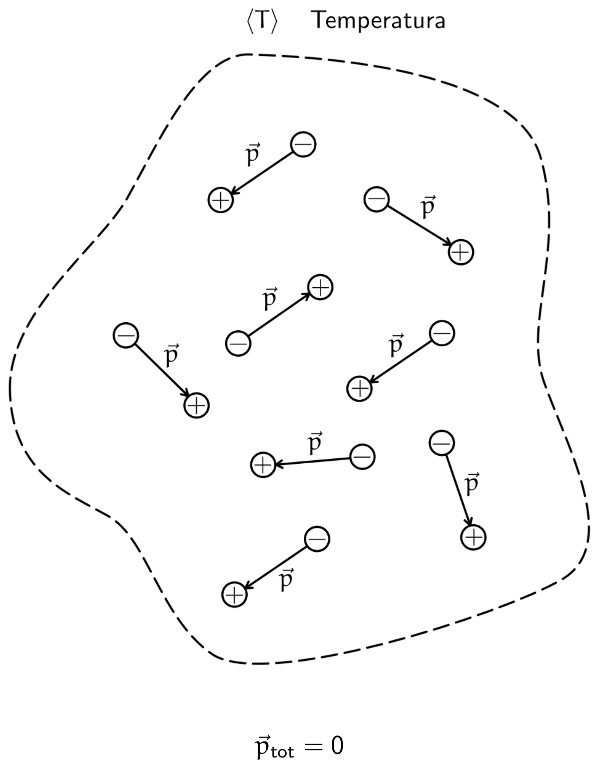


Figura 69: Molecole polarizzate casualmente

Se si applica un campo esterno si ha una polarizzazione del materiale i momenti di dipolo si allineano per rotazione e il materiale si **polarizza per orientamento**:

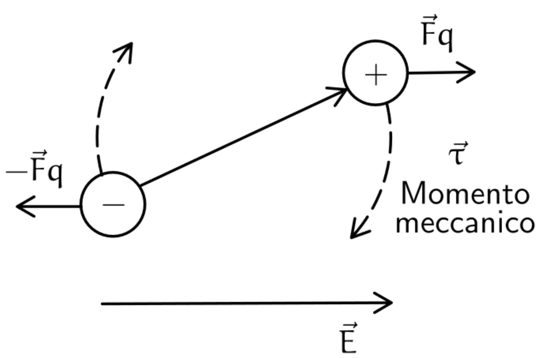


Figura 70: Polarizzazione per orientamento

Si introduce un oggetto chiamato **campo di polarizzazione** che misura la polarizzazione del materiale per unità di volume:

$$\mathbb{P}(r) = \text{Momento di dipolo per unità di volume}$$

Esercizio 2.1 (Esperimento condensatore con dielettrico)**.** Consideriamo un condensatore piano e carichiamo le lastre (collegandole ad una batteria)

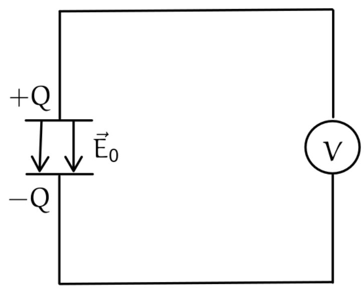


Figura 71: Circuito con un condensatore

Sappiamo che nel vuoto:

- $Q = C_0 V_0$
- $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{h}$
- $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

Poi stacchiamo il circuito, e quindi il sistema diventa isolato, cioè la carica si conserva $Q_{tot} = \text{Costante}$:

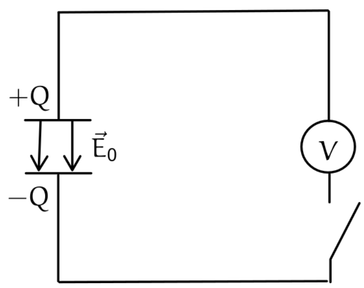


Figura 72: Circuito con un condensatore isolato

Riempiamo il condensatore con materiale dielettrico. Osserviamo che il potenziale nel dielettrico scala di un fattore k (diminuisce):

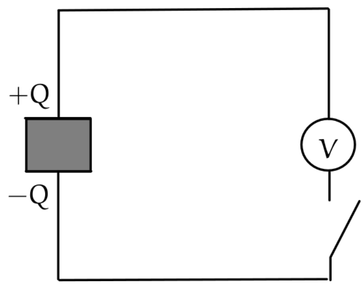


Figura 73: Circuito con un condensatore e dielettrico

$$V_k = \frac{V_0}{k} < V_0$$

Quindi la differenza di potenziale tra le armature diminuisce, quindi la capacità aumenta di k :

$$C_k = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{V_0}{k}} = kC_0$$

La k è tipica del materiale dielettrico e si chiama **costante dielettrica**. (Il vuoto è un dielettrico con $k_{\text{vuoto}} = 1$).

Se il potenziale diminuisce, il campo diminuisce:

$$V_k < V_0 \Rightarrow E_k = \frac{E_0}{k} < E_0$$

Quindi si è formato un campo opposto indotto E_{Indotto} che si somma al campo E_0 e quindi il campo totale è:

$$E_k = E_0 + E_{\text{Indotto}}$$

All'interno del dielettrico si è formata una carica di polarizzazione opposta:

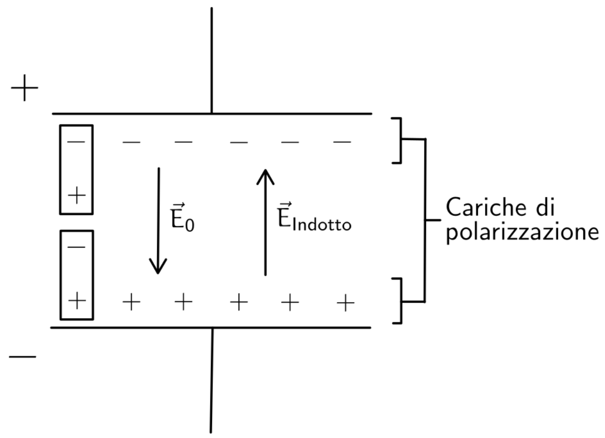


Figura 74: Cariche di polarizzazione

2.13.2 Equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici

Consideriamo un condensatore piano:

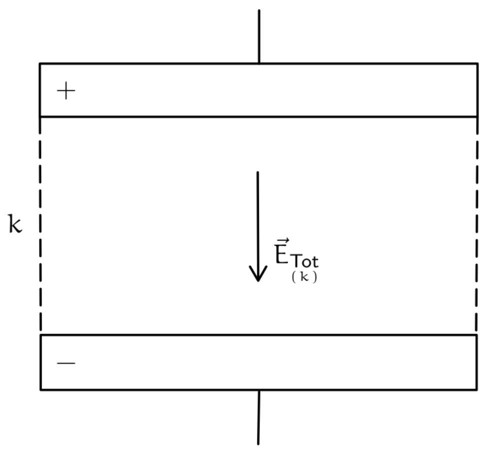


Figura 75: Condensatore piano con dielettrico

Con il teorema di Gauss prendiamo un cilindro di Gauss che ha una base nell'armatura e una nel dielettrico:

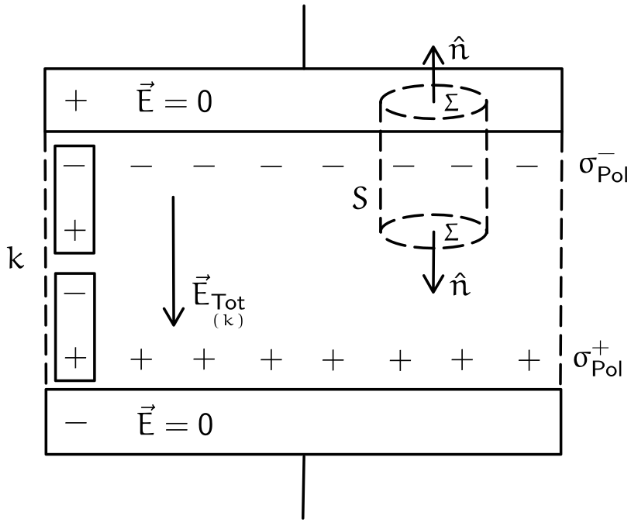


Figura 76: Superficie di Gauss in un condensatore piano con dielettrico

Applichiamo Gauss all'interno del cilindro calcolando il flusso:

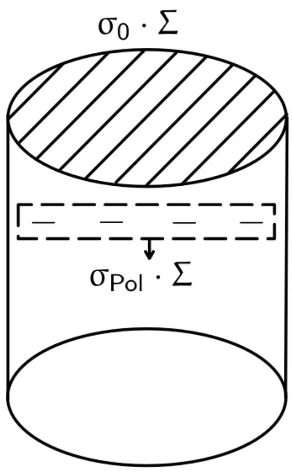


Figura 77: Flusso del campo elettrico in un condensatore piano con dielettrico

$$
\begin{aligned}
\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \vec{E}_{\substack{\text{Tot}\\ \text{Conduttore}}} \Sigma + \vec{E}_{\substack{\text{Tot}\\ \text{Dielettrico}}} \Sigma \\
&= 0 + E_{\substack{\text{Tot}\\ \text{Dielettrico}}} \Sigma \\
&= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\
&= \frac{\sigma_0 \cancel{\Sigma}}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{pol}} \cancel{\Sigma}}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Quindi il campo totale è:

$$E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\varepsilon_0}$$

Di conseguenza un dipolo induce una carica opposta di polarizzazione:

$$|\sigma_{\text{Pol}}| = |\sigma_0| \frac{k-1}{k}$$

Consideriamo un volume unitario Vol_1 con superfici unitarie Σ_1. Il numero di dipoli all'interno del volume per il momento del dipolo è la polarizzazione $\mathbb{P}$:

$$\frac{\#\text{atomi}}{Vol} \cdot \underbrace{\vec{p}}_{q\vec{d}} = \mathbb{P}$$

Quindi abbiamo che le cariche di polarizzazione sono equivalenti alla polarizzazione:

$$|\sigma_{\text{Pol}}| = \mathbb{P}$$

In termini generali:

$$\sigma_{\text{Pol}} = \mathbb{P} \cdot \hat{n}$$

Le cariche di polarizzazione si formano sulle superfici del dielettrico.

2.13.3 Teorema di Gauss

Prendiamo in considerazione un condensatore piano riempito con un dielettrico, abbiamo che il flusso del campo elettrico è:

$$\oint \vec{E} = \underbrace{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Sigma}_{Q} - \underbrace{\frac{\sigma_{\text{Pol}}}{\varepsilon_0} \Sigma}_{\text{Flusso di } \vec{\mathbb{P}}}$$

Quindi abbiamo il teorema di Gauss:

$$\oint \left(\varepsilon_0 \vec{E} - \vec{\mathbb{P}} \right) \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{Libere}}$$

Il campo $\left(\varepsilon_0 \vec{E} - \vec{\mathbb{P}} \right)$ si chiama **spostamento dielettrico** o **induzione** $\vec{D}$.

- Nel vuoto:

  $$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{Tot}}}{\varepsilon_0}$$

  dove le cariche totali sono:

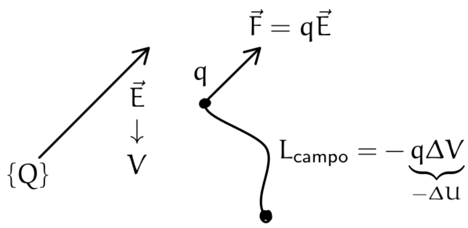
  $$Q_{\text{Tot}} = Q_{\text{Libere}} + Q_{\text{Polarizzazione}}$$

- Nel dielettrico:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{Libere}}$$

2.14 Energia elettrostatica

Se un campo agisce su una carica essa sentirà una forza, quindi si può calcolare un'energia



$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{Costante}$$

Figura 78: Energia elettrostatica

> **Definizione 2.9.** L'energia di un sistema è il lavoro esterno per costruire il sistema
>
> - In un sistema discreto ci saranno N cariche discrete q_i
> - In un sistema continuo ci sarà una carica continua ρ

2.14.1 Energia di N cariche discrete

Si calcola il lavoro esterno per portare la prima carica q_1 dall'infinito

$$L_1 = 0$$

Il lavoro è nullo perchè è la prima carica.

La seconda carica q_2 trova un campo, quindi il suo lavoro è

$$L_2 = q_2 \Delta V_1$$

Il potenziale è quello del campo della prima carica. Sappiamo che $V_\infty = 0$, quindi:

$$L_2 = q_2 \Delta V_1 = q_2 V_1(r_2) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Per l'n-esima carica q_n il lavoro è:

$$L_n = q_n V_1(r_n) + q_n V_2(r_n) + \ldots + q_n V_{n-1}(r_n)$$

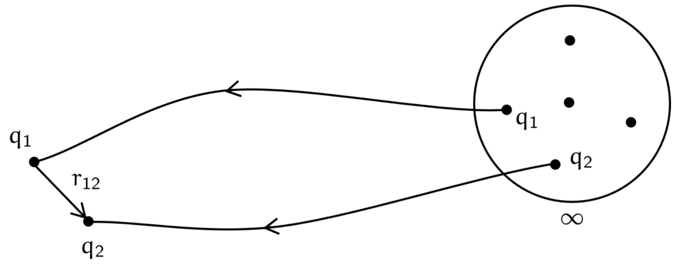


Figura 79: Energia di un sistema discreto

L'energia del sistema è quindi:

$$
\begin{aligned}
U_{el} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \quad [J]
\end{aligned}
$$

2.14.2 Energia in un sistema continuo

Il procedimento è lo stesso del sistema discreto, solo che le sommatorie diventeranno integrali e le cariche diventeranno densità di carica:

$$
\sum \to \int \qquad q_i \to \rho d\tau = dq
$$

Quindi:

$$
U_{el} = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}}\int_{\text{vol}} \frac{\rho(r_1)\rho(r_2)\, d\tau_1 d\tau_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \quad [J]
$$

2.14.3 Energia con N conduttori

Applichiamo la formula dell'energia in un sistema continuo

$$
\begin{aligned}
U_{el} &= \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho V \, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_{\text{sup}} \sigma V_0 \, dS \\
&= \frac{1}{2} V_0 \underbrace{\int_{\text{sup}} \sigma \, dS}_{Q_0} \\
&= \frac{1}{2} V_0 Q_0 \quad [J]
\end{aligned}
$$

Quindi l'energia di un conduttore è:

$$\begin{aligned} U_{\text{cond}} &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2}CV^2 \end{aligned}$$

Se consideriamo N conduttori l'energia è la somma delle energie dei singoli conduttori:

$$U_{\text{Tot}} = \sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Un condensatore è semplicemente un sistema di due conduttori in induzione completa, quindi

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2 + V_2) \\ &= \frac{1}{2}Q\Delta V \\ &= \frac{1}{2}C\Delta V^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$

2.14.4 Processo di carica del condensatore

Un condensatore diventa tale solo dopo che viene caricato, quidi all'inizio è semplicemente un'insieme di conduttori:

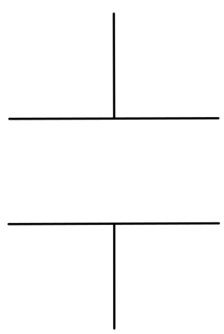


Figura 80: Condensatore non carico

Per caricare il condensatore si prende una carica positiva q^+ e si sposta da un armatura all'altra:

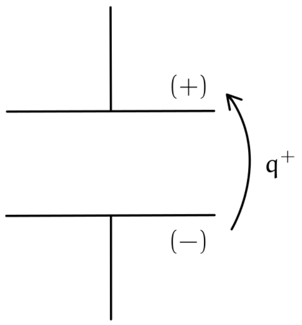


Figura 81: Condensatore carico

Una volta spostata la prima carica (che non compie lavoro) si crea un potenziale dovuto alla carica q^+ e lo spostamento delle altre quantità di carica dq compie lavoro:

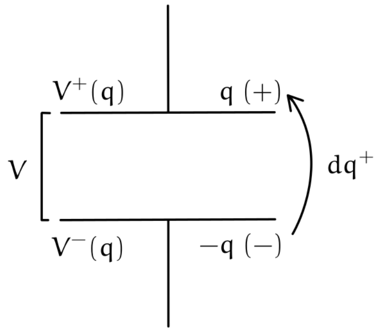


Figura 82: Potenziale di un condensatore piano

Il lavoro è:

$$dL = V(q)dq$$

Si continua con questo procedimento finchè non si arriva alla carica desiderata Q_{Finale}:

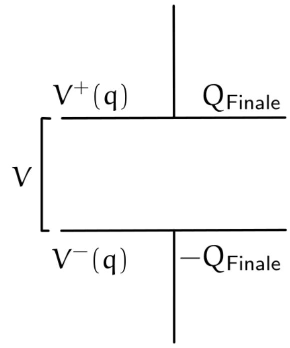


Figura 83: Condensatore completamente carico

Il lavoro totale sarà:

$$\begin{aligned}
L_{\substack{\text{tot}\\\text{esterno}}} &= \int_{\text{Inizio}}^{\text{Fine}} dL \\
&= \int_0^{Q_{\text{Finale}}} V(q)\, dq \\
&= \int_0^{Q_{\text{Finale}}} \frac{q}{C}\, dq \\
&= \left.\frac{q^2}{2C}\right|_0^{Q_{\text{Finale}}} \\
&= \frac{Q^2_{\text{Finale}}}{2C} \\
&= U_{\text{Sistema}}
\end{aligned}$$

Quindi l'energia del sistema è il lavoro esterno per costruirlo:

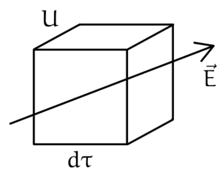
$$U_{\text{Sistema}} = L_{\substack{\text{tot}\\\text{esterno}}}$$

Definizione utile 2.4. L'energia è il lavoro per costruire qualcosa, in questo caso il condensatore.

2.14.5 Densità di energia

L'energia U_{el} è **localizzata nel campo** $\vec{E}$ con densità:

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$



$$u = \frac{U}{vol}$$

Figura 84: Densità di energia

Esempio 2.12. Consideriamo un conduttore sferico con una carica Q. Il campo è:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r \geqslant R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

La densità di energia della sfera carica è:

$$u_E = \begin{cases} \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^{\cancel{2}} r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} & r \geqslant R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

E l'energia del sistema è:

$$U = \frac{1}{2}QV_{\text{Cond}} = \frac{1}{2}Q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \quad [J]$$

Questa è anche l'energia del campo in tutto lo spazio dove c'è campo $E \neq 0$:

$$\begin{aligned} U &= \int_{\text{Ovunque}} u_E \, d\tau \\ &= \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 \, dr \\ &= \int_R^\infty \frac{Q^2}{\cancel{32}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0 \cancel{r^2}} \cdot \cancel{4}\pi \cancel{r^2} \, dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \quad [J] \end{aligned}$$

Esercizio 2.2. Calcolare l'energia di un conduttore sferico cavo:

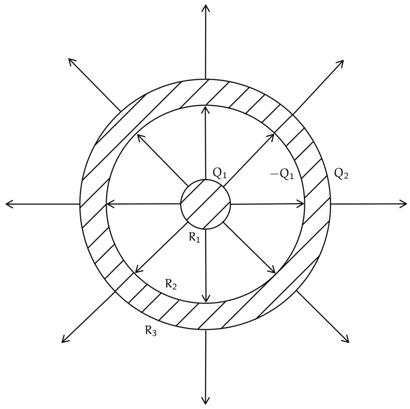


Figura 85: Conduttore sferico cavo

L'energia sarà la somma dei seguenti sistemi

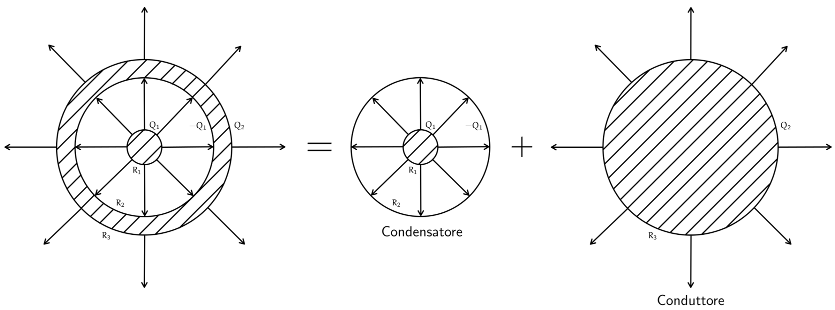


Figura 86: Somma dei sistemi isolati

Quindi:

$$C_{\text{Condens. Sfer.}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C_{\text{Condutt. Sfer.}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$U = \frac{Q_1^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{2C} = \frac{Q_1^2(R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2} + \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \quad [J]$$

Se aggiungiamo del dielettrico all'esterno la capacità aumenta, quindi l'energia diminuisce perchè si esegue del lavoro di polarizzazione:

$$U_k = \frac{Q^2}{2C} = \frac{U_0}{k}$$

3 Elettrodinamica

Nell'elettrodinamica viene introdotto il **tempo** quindi tutte le considerazioni fatte per l'elettrostatica non sono più valide.

Ricordiamo le equazioni di maxwell nel caso **stazionario**:

- Cioè le cariche isolate sono sorgenti del campo elettrico $\vec{E}$

$$\oint_{\mathsf{Sup}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\mathsf{Tot}}}{\varepsilon_0}$$

- Il campo $\vec{E}$ è conservativo

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

  cioè in un circuito chiuso Γ il lavoro è nullo

Ora introduciamo il **tempo** e notiamo che:

- La prima equazione vale sempre, perchè anche nel tempo le cariche sono sorgenti.
- Per la seconda invece non si può dire la stessa cosa, perchè per avere delle cariche in movimento su un circuito chiuso il lavoro non è nullo, quindi:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

  e quindi questa equazione andrà modificata.

3.1 Corrente elettrica

3.1.1 Forza elettromotrice

Consideriamo un conduttore ad un certo potenziale V^+ e un secondo conduttore con un potenziale V^- **minore del primo** (il meno non indica che è negativo, ma che è minore):

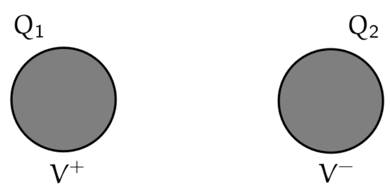


Figura 87: Conduttori con un potenziale

Se i due conduttori vengono collegati da un filo conduttore si avrà un potenziale costante:

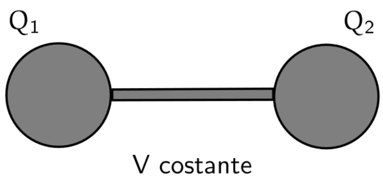


Figura 88: Conduttori collegati a potenziale costante

Ma cosa succede prima che il condutttore raggiunga l'equilibrio?

Si forma un campo dal potenziale V^+ al potenziale V^- e quidi si avrà un moto di cariche:

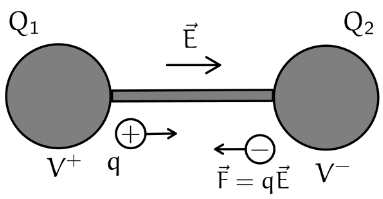


Figura 89: Stabilizzazione del potenziale

Lo spostamento delle cariche azzera il potenziale secondo il seguente grafico:

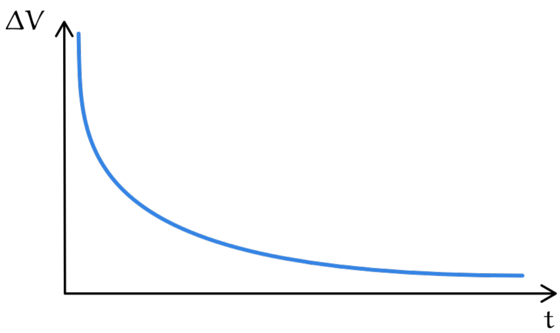


Figura 90: Grafico di stabilizzazione del potenziale

Per mantenere le cariche q in moto, quindi un circuito, bisogna avere un **lavoro esterno** che va contro il campo elettrico che riporta le cariche da V^- a V^+. Questo lavoro esterno è fornito da un generatore e si chiama **forza elettromotrice** $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \int_{A^-}^{B^+} \frac{\vec{F}}{q} \cdot \vec{dl} = V_B^+ - V_A^- \quad [V]$$

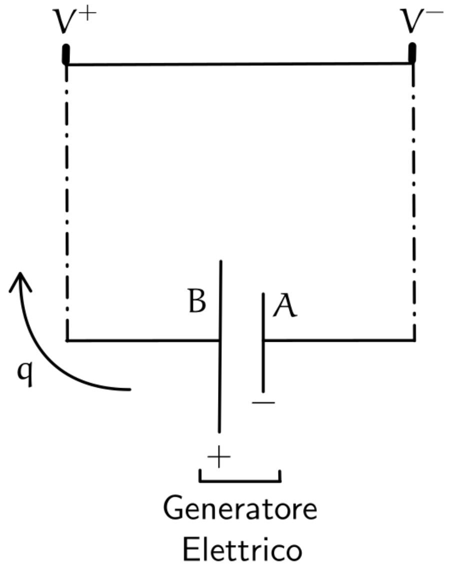
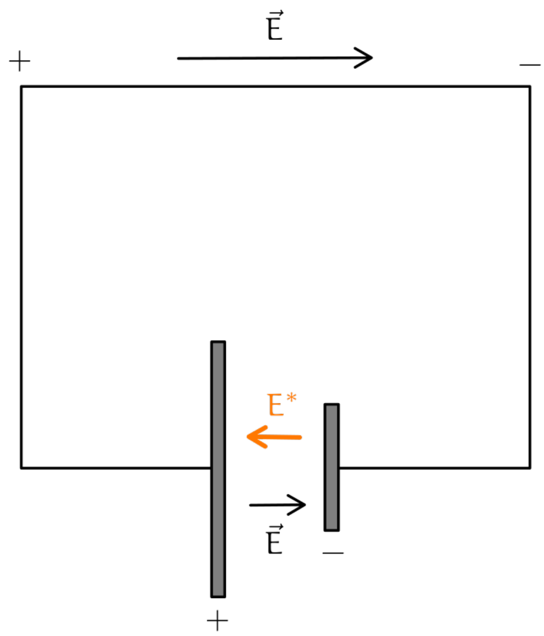


Figura 91: Forza elettromotrice

La forza elettromotrice è nota anche come FEM (Forza ElettroMotrice), tensione o differenza di potenziale.

Se espandiamo il circuito osserviamo che:



$$E^* = \frac{F^*}{q}$$

Figura 92: Forza elettromotrice nel dettaglio

Quindi la forza elettromotrice può essere espressa anche come:

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} E \cdot dl$$

E la seconda equazione di Maxwell diventa:

$$\oint_{\Gamma} E \cdot dl = \mathcal{E} \quad [V]$$

3.1.2 Intensità di corrente

La corrente elettrica è un insisme di cariche in moto. L'intensità di corrente i è definita come la quantità di carica che **attraversa una data superficie** per unità di tempo:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad [A] \text{ (Ampere)}$$

Il verso della corrente è convenzionalmente quello del moto delle cariche positive.

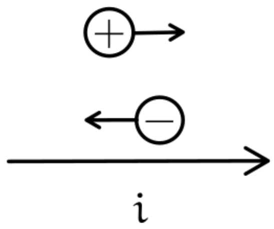


Figura 93: Intensità di corrente

3.1.3 Densità di corrente

Esempio 3.1. La superficie del conduttore influisce sulla corrente di carica:

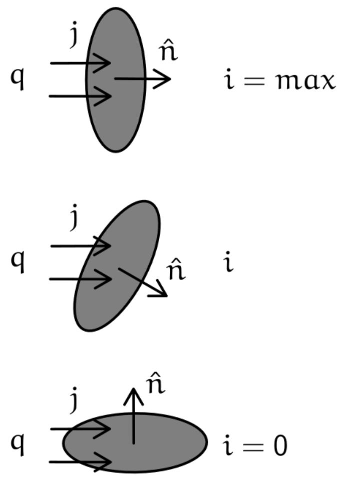


Figura 94: Densità di corrente

La densità di corrente $\vec{j}$ è definita come la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria **ortogonale alla direzione** delle cariche in moto. L'unità di misura è $\left[\frac{A}{m^2}\right]$. Quindi la corrente i è il flusso di densità di corrente $\vec{j}$:

$$i = \int_{Sup} \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

Al livello microscopico la quantità di carica q_e è quella che passa attraverso una superficie unitaria dS con una certa velocità $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$ in un unità di tempo:

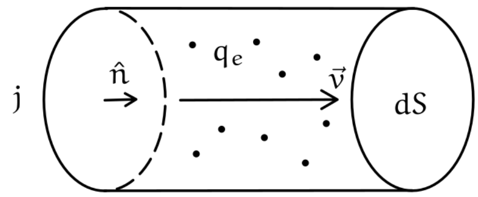


Figura 95: Densità di corrente al livello microscopico

$$\vec{j} = Nq_e\vec{v}_{\text{Deriva}}$$

Mentre invece la corrente i è la carica nell'unità di tempo sulla superficie:

$$i = Nq_e\vec{v}_{\text{Deriva}} \cdot \hat{n}dS$$

È detta corrente stazionaria (o **corrente continua**) una corrente con intensità costante:

$$i = costante$$

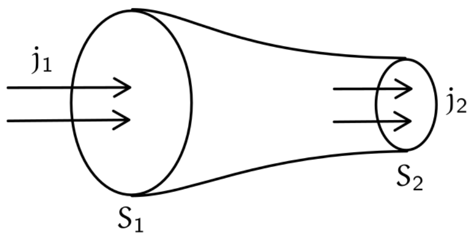


Figura 96: Corrente stazionaria

Quindi se si ha la stessa intensità ma sezioni di dimensione diversa, sarà la densità di corrente a cambiare:

$$i_1 = i_2$$

$$j_1 \neq j_2$$

$$j_1S_1 = j_2S_2$$

3.2 Legge di Ohm

Consideriamo un circuito con un generatore e un interruttore aperto concentrandoci sul cavo conduttore:

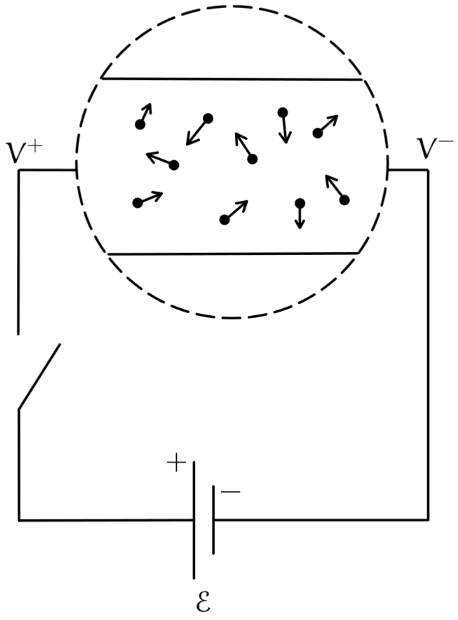


Figura 97: Circuito elementare

Ogni oggetto materiale ha una certa temperatura, quindi all'interno del conduttore le cariche elementari sono in moto casuale con una certa velocità, di cui la media è nulla:

$$\langle \vec{v}_{\text{Termica}} \rangle = 0$$

Questo moto è chiamato **agitazione termica**. Invece la velocità quadratica media non è nulla e rappresenta la **temperatura**:

$$\left\langle v^2 \right\rangle \neq 0$$

all'aumentare della temperatura aumenta l'agitazione termica.

Se chiudiamo l'interruttore si osserva una corrente i che corrisponde al moto **ordinato** delle cariche nella direzione da V^+ a V^-. La velocità di questo moto si chiama **velocità di deriva** e non è nulla:

$$\langle v_{\text{deriva}} \rangle \neq 0 \quad \text{Moto ordinato di cariche}$$

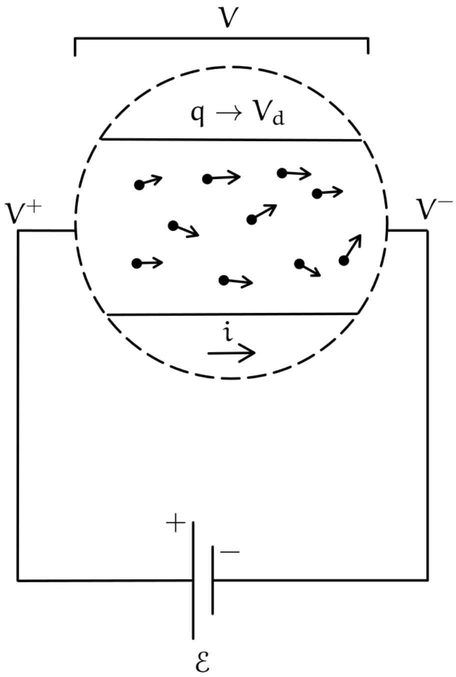


Figura 98: Circuito conduttore con velocità di deriva

Se si aumenta la temperatura a parità di differenza di potenziale si avrà minore velocità di deriva, quindi minore corrente. Questo fenomeno è dovuto al fatto che l'agitazione termica aumenta la **resistenza elettrica** del conduttore, cioè le cariche urtano più spesso gli atomi del conduttore e quindi si ha una minore velocità di deriva. Il simbolo della resistenza è il seguente:

Figura 99: Simbolo della resistenza

Si osserva quindi che l'intensità di corrente i è lineare alla differenza di potenziale V:

$$V = Ri$$

dove R è la resistenza elettrica, cioè un coefficiente che dipende dal materiale, dalla temperatura e dalla geometria, misurato in Ohm $[\Omega]$:

$$R = \frac{l}{s} \cdot \rho$$

dove:

$$l = \text{lunghezza del conduttore}$$
$$s = \text{sezione del conduttore}$$
$$\rho = \text{resistività del materiale} \quad [\Omega m]$$

Consideriamo un conduttore elementare di sezione infinitesima dS e di lunghezza dl con una tensione dV:

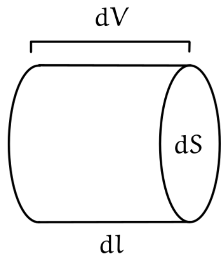


Figura 100: Conduttore elementare

Osserviamo che:

$$dV = R \cdot di$$

E sappiamo che:

$$dV = E \cdot dl$$

$$di = j \cdot dSR \quad = \frac{dl}{dS} \cdot \rho$$

Sostituiamo e si ottiene:

$$E\cancel{dl} = \rho \frac{\cancel{dl}}{\cancel{dS}} \cdot j\cancel{dS}$$

$$\vec{E} = \rho\vec{j}$$

Definizione 3.1 (Legge di Ohm)**.** Il campo elettrico genera una densità di corrente $\vec{j}$ locale e il coefficiente di proporzionalità è la **resistività** ρ del materiale:

$$\vec{E} = \rho\vec{j}$$

quindi:

$$\vec{j} = \vec{E} \cdot \sigma$$

dove $\sigma = \frac{1}{\rho}$ e si chiama **conducibilità elettrica**.

Dalla legge di Ohm si ricava che da una forza si ottiene una velocità e non una accelerazione, e questo è dovuto agli urti delle cariche con gli atomi del conduttore. Quindi:

$$\Delta p = F\Delta t$$

3.3 Potenza elettrica

Consideriamo una resistenza con una differenza di potenziale V ai capi:

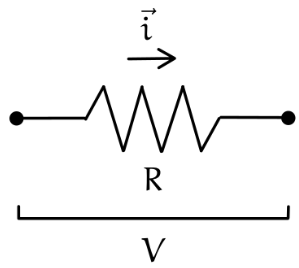


Figura 101: Resistenza con differenza di potenziale

Sappiamo che il lavoro elettrico è dato da:

$$dL = Vdq$$

che è il lavoro esterno che compie il generatore per mantenere la corrente. La potenza P è definita come il lavoro per unità di tempo, quindi la potenza elettrica è:

$$P_{\text{Elettrica}} = \frac{dL}{dt} = \frac{Vdq}{dt} = Vi$$

Nel caso di una resistenza si parla di **potenza dissipata** ($V = Ri$):

$$P_{\text{Dissipata}} = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad [W]$$

Se invece consideriamo un generatore si parlerà di **potenza erogata** ($V = \mathcal{E}$), cioè:

$$P_{\text{Erogata}} = \mathcal{E}i$$

Si osserva da un circuito elementare che la potenza erogata è uguale alla potenza dissipata:

$$\mathcal{E}i = r_{int}i^2 + Ri^2$$

3.4 Reti lineari (o circuiti elementari)

Una rete lineare è composta nel seguente modo: Il **bilancio energetico** (o legge di Ohm generalizzata) è:

$$\mathcal{E} = \sum V_i = \underbrace{Ri}_{V_R} + \underbrace{ri}_{V_r}$$

Quindi la corrente è la stessa in tutti i punti della rete, cioè la corrente è continua. Il grafico della tensione facendo la circuitazione della rete, partendo dalla lastra positiva del generatore fino alla lastra negativa è la seguente: L'intensità di corrente i è facilmente calcolabile utilizzando la legge di Ohm generalizzata:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad [A]$$

La differenza di potenziale tra i due capi A e B è data anch'essa dalla legge di Ohm:

$$V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - ri < \mathcal{E} \quad [V]$$

E questo indica che la tensione $V_A - V_B$ è minore della tensione del generatore. Un altro modo per scrivere l'equazione è sostituire i:

$$V_A - V_B = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{ri}{R}}$$

A **circuito aperto** si ha che $R \to \infty$, allora $V_{AB} = \mathcal{E}$ e $i = 0$.

Definizione utile 3.1. Ricordiamo che $V = \frac{U}{q}$, quindi il bilancio energetico per unità di carica in V è:

$$V: \underbrace{\mathcal{E} = Ri + ri}_{q=1} \quad [V]$$

Per una quantità di carica generica $dq = idt$ si avrà quindi un bilancio in U:

$$U: \mathcal{E}idt = Ri^2dt + ri^2dt \quad [J]$$

Ricordando che la potenza è $P = \frac{dL}{dt}$ il bilancio energetico in P è:

$$P: \mathcal{E}i = Ri^2 + ri^2 \quad [W]$$

3.4.1 Collegamento di resistori

I collegamenti si dividono in due tipi:

- **Serie**: I collegamenti in serie portano la stessa corrente:

  $$i_1 = i_2$$

  Si vuole rappresentare una serie di resistori come un unico resistore equivalente R_{eq}:

  $$V_{Tot} = R_{eq}i_{Tot} = \sum V_i = \sum (R \underbrace{i_i}_{i_{Tot}}) = i \sum R_i$$

  Quindi la resistenza equivalente della serie è:

  $$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i \quad [\Omega]$$

- **Parallelo**: I collegamenti in parallelo portano la stessa tensione:

  $$V_1 = V_2$$

  Si vuole rappresentare un insieme di resistori in parallelo come un unico resistore equivalente R_{eq}:

  $$i_{Tot} = \sum_k i_k = \sum_k \frac{\overbrace{V_k}^{V}}{R_k} = V \sum_k \frac{1}{R_k} = \frac{V_{Tot}}{R_{eq}}$$

  Quindi la resistenza equivalente del parallelo è:

  $$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \quad [\Omega]$$

3.4.2 Partitore resistivo

- **Partitore in tensione**:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$i = i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} \quad [A]$$

Ai capi di R_1 la tensione è ripartita **linearmente** una tensione V_1 che è proporzionale alla resistenza R_1.

$$V_1 = R_1 i_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\mathcal{E}$$

Lo stesso vale per la resistenza R_2:

$$V_2 = R_2 i_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}$$

- **Partitore in corrente**:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V = V_1 = V_2$$

La corrente è ripartita **linearmente** tra le due resistenze R_1 e R_2:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Per quanto riguarda le potenze dissipate sappiamo che la potenza è locale, quindi per calcolare la potenza totale si possono sommare le potenze locali:

$$P_{Tot} = \sum P_k$$

- Per la serie:

$$P_{Tot} = P_1 + P_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = (R_1 + R_2) i^2 = R_{eq} i^2$$

Quindi:

$$P_1 = R_1 i^2$$

oppure anche:

$$P_{Tot} = R_{eq} i_{Tot}^2$$

- Per il parallelo (ricordiamo che $i = \frac{V}{R}$):

$$P_{Tot} = P_1 + P_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = \frac{V^2}{R_1} + \frac{V^2}{R_2} = V^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$