

## Pumping lemma linguaggi context free

ESERCIZIO 2.1. Si dimostri che il linguaggio non è context free.

$$L = \{ 0^{2n} 1 0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Intuitivamente questo linguaggio non è context free perchè le grammatiche possono gestire soltanto funzioni lineari. Per dimostrare che un linguaggio non è context free bisogna mostrare che vale la negazione del pumping lemma:

$$\forall k \in \mathbb{N}. \exists z \in L. |z| > k. \forall u, v, w, x, y. \wedge \begin{cases} z = uvwx y \\ |uvwx| \leq k \\ |vx| > 0 \end{cases}$$

Le condizioni di appartenenza al linguaggio sono le seguenti

$$z = 0^i 1 0^j \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. i = 2h \wedge j = h^2$$

Considero una stringa nel linguaggio più lunga di  $k$ :

$$z = 0^{2k} 1 0^{k^2} \quad h = k \quad (\text{Nei numeri naturali non ci sono vincoli su } k)$$

$$|z| = 2k + k^2 + 1 > k$$

Le possibili suddivisioni della stringa sono le seguenti



1)  $vx \in 0^{2k}$

$$\exists i \in \mathbb{N}. z = uv^i wx^i y \rightarrow z = 0^{2k + |vx|(i-1)} 1 0^{k^2}$$

$$i=2 \rightarrow z = 0^{2k + |vx|} 1 0^{k^2}$$

$$z \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2k + |vx| = 2h \\ k^2 = h^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = k$$

$$\Rightarrow 2k + |vx| = 2k$$

$$\Rightarrow |vx| = 0 \quad \text{Viola le condizioni del PL}$$

2)  $v \in 0^{2k} \wedge x \in 0^{k^2}$

$$\exists i \in \mathbb{N}. z = 0^{2k + |v|(i-1)} 1 0^{k^2 + |x|(i-1)}$$

$$i=2 \rightarrow z = 0^{2k+|v|} 1 0^{k^2+|x|}$$

$$z \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2k+|v| = 2h \\ k^2+|x| = h^2 \end{cases}$$

Per le condizioni del pumping lemma  $|vx| > 0$  quindi sicuramente il numero di simboli aumenta e quindi  $h > k$ , cioè:

$$\exists m \in \mathbb{N}. h = k+m \Rightarrow \begin{cases} 2k+|v| = 2(k+m) \\ k^2+|x| = (k+m)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k+|v| = 2k+2m \\ k^2+|x| = k^2+m^2+2km \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cancel{k}+|v| = 2\cancel{k}+2m \\ \cancel{k}^2+|x| = \cancel{k}^2+m^2+2km \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |v| = 2m \\ |x| = m^2+2km > k \end{cases}$$

$$\Rightarrow |vwx| = |v|+|x|+|w| \geq |x| > k$$

Se  $|vwx| < k$   $z \notin L$

$$3) \quad vx \in 0^{k^2}$$

$$\exists i \in \mathbb{N}. z = uv^iwx^iy \rightarrow z = 0^{2k} 1 0^{k^2+|vx|(i-1)}$$

$$i=2 \rightarrow z = 0^{2k} 1 0^{k^2+|vx|}$$

$$z \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2k = 2h \\ k^2+|vx| = h^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = k$$

$$\Rightarrow \cancel{k}^2+|vx| = \cancel{k}^2$$

$$\Rightarrow |vx| = 0 \quad \text{Viola le condizioni del PL}$$

Quindi il linguaggio non è context free