

Esercitazione in classe sulle curve

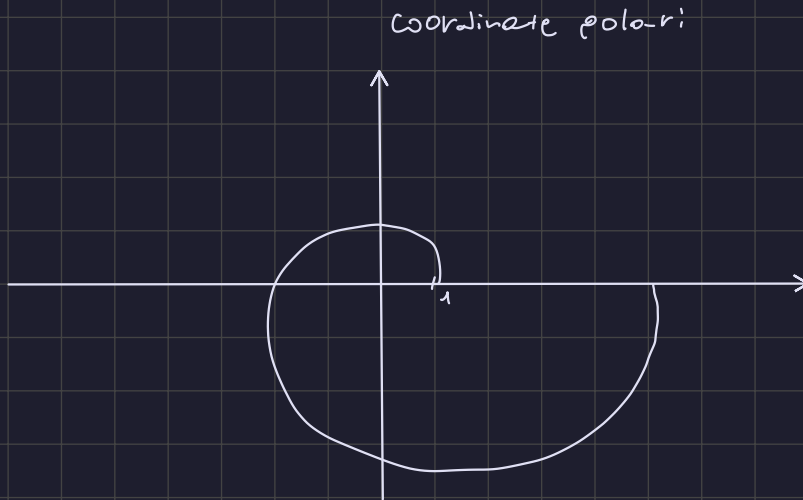
▣ **Esercizio 2.1.1.** Sia γ la curva piana la cui parametrizzazione in coordinate polari è $\rho(\vartheta) = \vartheta^2 + 1$, on $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Dopo aver disegnato sommariamente il sostegno di γ , determinare i versori tangente e normale al sostegno di γ nel punto $\gamma(\pi)$ e scrivere un'equazione della retta tangente nello stesso punto.

$$\rho(\theta) = \theta^2 + 1 \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

In coordinate cartesiane equivale a

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta = (\theta^2 + 1) \cos \theta \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = (\theta^2 + 1) \sin \theta \end{cases}$$

Diamo valori a caso a θ e plottiamo il grafico a grandi linee



Rappresenta la curva

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = ((\theta^2 + 1) \cos \theta, (\theta^2 + 1) \sin \theta)$$

$$\gamma'(\theta) = (2\theta \cos \theta - (\theta^2 + 1) \sin \theta, 2\theta \sin \theta + (\theta^2 + 1) \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\| &= \sqrt{4\theta^2 \cos^2 \theta - 4\theta(\theta^2 + 1) \cos \theta \sin \theta + (\theta^2 + 1)^2 \sin^2 \theta +} \\ &\quad + 4\theta^2 \sin^2 \theta + 4\theta(\theta^2 + 1) \cos \theta \sin \theta + (\theta^2 + 1)^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{4\theta^2 + (\theta^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Tangente:

$$T(\theta) = \frac{\gamma'(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\|} = \frac{(2\theta \cos \theta - (\theta^2 + 1) \sin \theta, 2\theta \sin \theta + (\theta^2 + 1) \cos \theta)}{\sqrt{4\theta^2 + (\theta^2 + 1)^2}}$$



$$T(\pi) = \frac{(-2\pi, -(\pi^2 + 1))}{\sqrt{4\pi^2 + (\pi^2 + 1)^2}}$$

Direzione della tangente in π

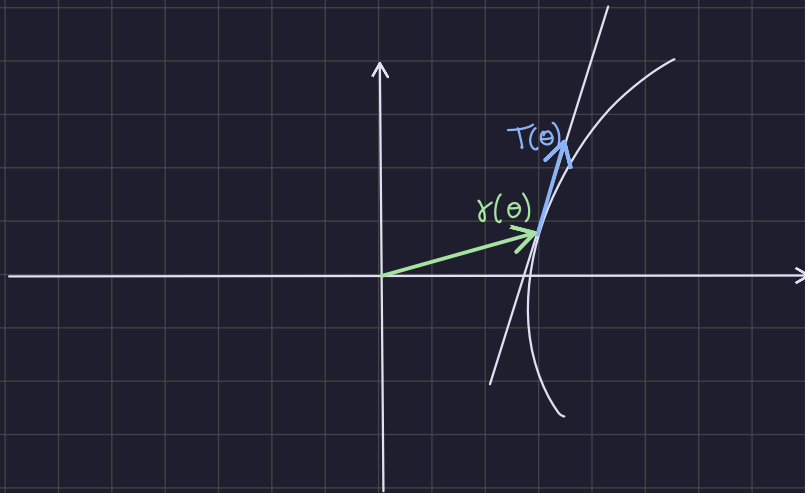
In \mathbb{R}^2 il versore normale è il versore tangente ruotato di 90°

$$N(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T(\pi)$$

↓

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Per trovare la retta tangente alla curva bisogna trovare quel vettore che sposta lo spazio vettoriale formato dal vettore tangente sopra la curva e quel vettore è proprio $\gamma(\theta)$



Quindi la retta tangente è:

$$\gamma(\pi) + t \gamma'(\pi)$$

$$\begin{cases} x(t) = -(\pi^2 + 1) - t \cdot 2\pi \\ y(t) = 0 - t(\pi^2 + 1) \end{cases}$$

↙ Componente x del vettore tangente

↙ Componente y del vettore tangente

$$-\frac{x + (1 + \pi^2)}{2\pi} = t$$

$$y = \frac{x + (1 + \pi^2)}{2\pi} (\pi^2 + 1)$$

$$y = \frac{\pi^2 + 1}{2\pi} x + \frac{(\pi^2 + 1)^2}{2\pi}$$

✎ **Esercizio 2.2.4.** Calcolare l'integrale (curvilineo) di

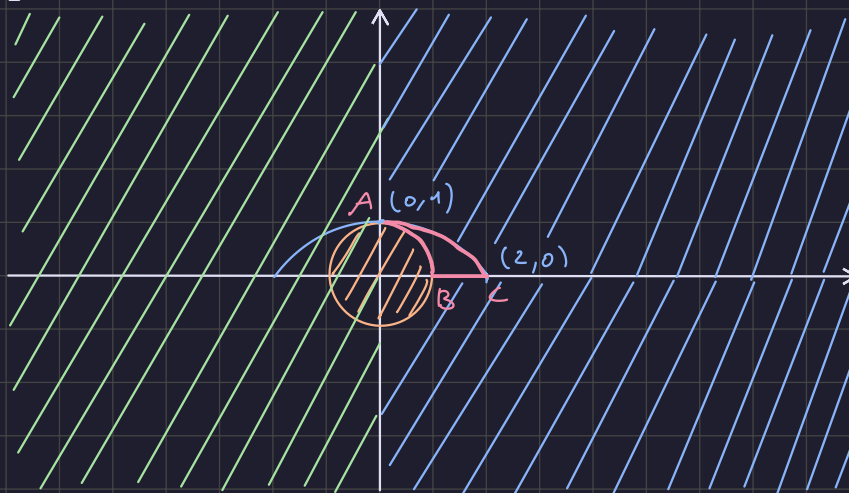
$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ il cui sostegno è il bordo ∂E di

$$E = \left\{ (x, y) : \underline{x \geq 0}, \underline{x^2 + y^2 \geq 1}, \underline{0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}} \right\}$$

e determinare la retta tangente a γ nel punto $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

Disegniamo l'insieme E



Consideriamo solo l'area rossa

Integriamo lungo le 3 curve parametrizzate:

$$\gamma_{BA}(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\gamma_{BC}(t) = (t, 0) \quad t \in [1, 2]$$



$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{4}\right)$$



Integriamo

$$\int_{\gamma_{BA}} F ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4 + \cos^2 t}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt$$

$$F(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$|\gamma'(t)| = 1$$

$$\begin{aligned} w &= \cos^2 t \\ dw &= -2 \cos t \sin t dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \cos t \sin t dt}{\sqrt{4 + \cos^2 t}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{4+w}} dw = -(4+w)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[-\sqrt{4+\omega^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 + \sqrt{5}$$

Retta tangente a γ in $(1, 3/4)$ ($\gamma(1)$)

$$\gamma(t) \begin{cases} \gamma_{BA} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{BC} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{AC} \xrightarrow{\checkmark} \end{cases} \left(1, \frac{3}{4}\right) \in \gamma_{AC}$$

$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{4}\right) \rightarrow t \mid \gamma_{AC}(t) = \left(1, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow t = 1$$

$$\downarrow \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\gamma'_{AC}(t) = \left(1, -\frac{t}{2}\right)$$

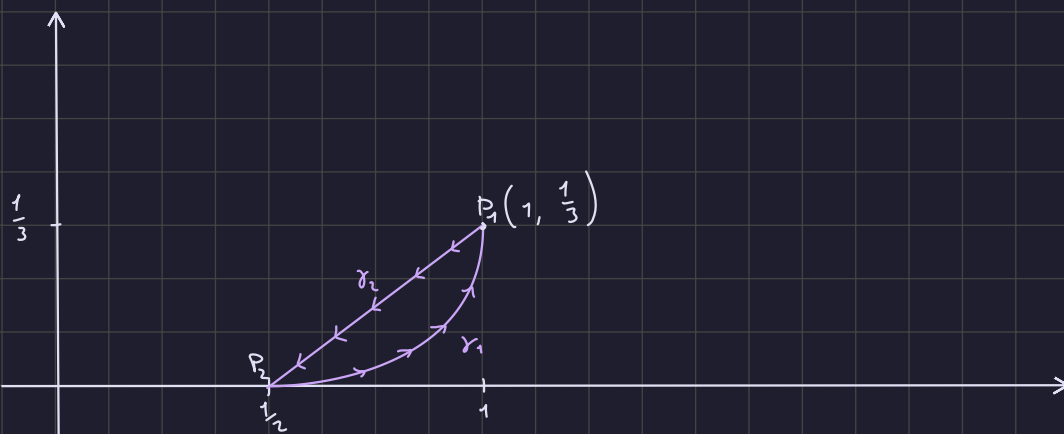
$$r_{TAN}(t) = \gamma_{AC}(t) + s \gamma'_{AC}(t) \quad s \in \mathbb{R}$$

$$r_{TAN}(1) = \gamma_{AC}(1) + s \gamma'_{AC}(1) = r_{TAN}(s) = \begin{cases} x(s) = 1 + s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = 1 + s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = x - 1 \\ y = \frac{3}{4} - \frac{x-1}{2} \end{cases} \rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \quad \text{retta tangente}$$

▣ **Esercizio 2.1.2.** Determinare una parametrizzazione della curva chiusa γ che si ottiene percorrendo prima da sinistra verso destra il grafico di $f(x) = (1/3)(2x-1)^{3/2}$ per $1/2 \leq x \leq 1$ e poi da destra a sinistra il segmento congiungente gli estremi del grafico di f stessa. Disegnare quindi il sostegno di γ e calcolarne la lunghezza.

$$F(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{3/2} \quad F'(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{1/2} \quad F''(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{(2x-1)^{1/2}} > 0 \quad \text{concavità verso l'alto}$$



$$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{1}{3} (2t-1)^{3/2} \right) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow t \in [0, 1] \quad (1-t)p_1 + tp_2$$

$$= \left((1-t) + \frac{t}{2}, \frac{1-t}{3} \right) \quad t \in [0, 1]$$

Le due rette sono definite nello stesso intervallo, quindi in $t = 1/2$ si avrà un valore corrispondente a 2 rette contemporaneamente, e noi non vogliamo questo, ma vogliamo che γ_2 sia collegata a γ_1 . Cambiamo di nuovo parametrizzazione

$$\gamma_1(t) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2} \right] \quad \rightarrow \quad t = As + B \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = A \cdot 0 + B \\ 1 = A \cdot \frac{1}{2} + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_1(s) = \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2s + 1 - 1)^{3/2} \right) \quad \leftarrow t = s + \frac{1}{2}$$

$$= \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2s)^{3/2} \right) \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} s=0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \\ s=\frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{3} \right) \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{La parametrizzazione} \\ \text{è corretta} \end{array} \quad s \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

$$\gamma_2(t) \quad t \in [0, 1] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \rightarrow t = As + B$$

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \frac{1}{2} + B \\ 1 = A \cdot 1 + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases} \quad \nearrow \quad t = 2s - 1$$

$$\gamma_2(t) = \left((1-2s+1) + \frac{2s-1}{2}, \frac{(1-2s+1)}{3} \right)$$

$$= \left(2 - 2s + s - \frac{1}{2}, \frac{2(1-s)}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - s, \frac{2(1-s)}{3} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{3} \right) \\ s = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \end{array} \right] s \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2s)^{\frac{3}{2}} \right) & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \\ \left(\frac{3}{2} - s, \frac{2(1-s)}{3} \right) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \end{cases}$$

I passaggi per cambiare parametro sono:

$$\begin{array}{ccc} \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^h & & \\ [c, d] \xrightarrow{\uparrow} c', \text{ (mappa monotona)} & & \\ \downarrow & & \\ \begin{array}{l} t \in [a, b] \\ s \in [c, d] \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{l} t = As + B \rightarrow \begin{cases} a = Ac + B \\ b = Ad + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases} \end{array} \end{array}$$

Esercizio 2.2.6. Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea) $\int_{\alpha} z ds$, ove α è la curva di parametrizzazione $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(-\pi, 0, \pi)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).

$$\int_{\alpha(t)} F(x, y, z) \overset{\text{specie}}{ds} = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt$$

\uparrow
 $F(x, y, z) = z$

$$\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt = \int_0^{2\pi} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2} dt = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (t^2 + 2)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{(4\pi^2 + 2)^{3/2} - 2^{3/2}}{3}$$

Calcoliamo il piano normale in $(-\pi, 0, \pi)$

$$\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t) \Rightarrow (-\pi, 0, \pi) \leftrightarrow t = \pi$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

Cerchiamo una direzione tangente alla curva in π

$$\alpha'(\pi) = (-1, -\pi, 1)$$

L'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(-\pi, 0, \pi) \rightarrow r = (-\pi, 0, \pi) + s(-1, -\pi, 1)$

Bisogna trovare il piano perpendicolare alla retta tangente

Metodo 1:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-s_1 - \pi s_2 + s_3 = 0$$

$$s_1 = s_3 - \pi s_2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ k & t \end{matrix}$$

Teorema di Rouché-Capelli

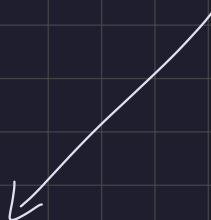
$$\begin{pmatrix} k - \pi t \\ t \\ k \end{pmatrix} \rightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x(k, t) = -\pi + k - \pi t \\ y(k, t) = t \\ z(k, t) = \pi + k \end{cases}$$

Vettore che
sposta il piano
nel punto
interessato

Piano perpendicolare
alla retta tangente
(piano normale)



$$\begin{cases} x = -\pi + z - \pi - \pi y \\ t = y \\ w = z - \pi \end{cases} \rightarrow z - x - \pi y = 2\pi$$

Metodo 2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Trasciniamo lo spazio affine nell'origine, così non bisogna calcolare il vettore che trasla lo spazio nel punto della retta tangente

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - (-\pi) \\ y \\ z - \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-(x + \pi) - \pi y + z - \pi = 0$$

$$z - x - \pi y = 2\pi$$