

# **Fisica II**

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

Corso di Claudia Daffara  
2° Semestre 2024/2025

# Indice

<b>1 Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1 Campo e forza . . . . .	3
<b>2 Elettrostatica</b>	<b>3</b>
2.1 Materia . . . . .	4
2.2 Elettrificazione . . . . .	5
2.3 Elettrostatica nel vuoto . . . . .	8
2.3.1 Interazione di Coulomb . . . . .	9
2.3.2 Sistema di più cariche . . . . .	10
2.3.3 Campo elettrostatico . . . . .	12
2.4 Energia potenziale elettrostatica . . . . .	14
2.5 (Campo) Potenziale elettrostatico . . . . .	15
2.5.1 Calcolo del potenziale . . . . .	16
2.5.2 Potenziale della carica puntiforme . . . . .	16
2.5.3 Potenziale di più cariche . . . . .	17
2.6 Linee di campo . . . . .	18
2.7 Superfici equipotenziali . . . . .	19
2.8 Teorema di Gauss . . . . .	19
2.8.1 Flusso del campo $\vec{E}$ . . . . .	21
2.9 Applicazione del teorema di Gauss . . . . .	24
2.9.1 Simmetria sferica . . . . .	24
2.9.2 Simmetria cilindrica . . . . .	29
2.9.3 Simmetria rispetto ad un piano indefinito . . . . .	32
2.10 Elettrostatica nei conduttori . . . . .	35
2.10.1 Proprietà dei conduttori in equilibrio elettrostatico . . . . .	35
2.10.2 Cavità in un conduttore . . . . .	37
2.11 Capacità elettrostatica . . . . .	43
2.11.1 Conduttore isolato . . . . .	43
2.11.2 Conduttore non isolato . . . . .	43
2.11.3 Capacità nei condensatori . . . . .	45
2.12 Calcolo del campo potenziale . . . . .	47
2.12.1 Simmetria sferica . . . . .	47
2.13 Elettrostatica nei dielettrici . . . . .	50
2.13.1 Polarizzazione . . . . .	50
2.13.2 Equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici . . . . .	55
2.13.3 Teorema di Gauss nei dielettrici . . . . .	57
2.14 Energia elettrostatica . . . . .	58
2.14.1 Energia di N cariche discrete . . . . .	58
2.14.2 Energia in un sistema continuo . . . . .	59
2.14.3 Energia con N conduttori . . . . .	59
2.14.4 Processo di carica del condensatore . . . . .	60
2.14.5 Densità di energia . . . . .	62
<b>3 Elettrodinamica</b>	<b>64</b>
3.1 Corrente elettrica . . . . .	65
3.1.1 Forza elettromotrice . . . . .	65
3.1.2 Intensità di corrente . . . . .	68
3.1.3 Densità di corrente . . . . .	69

3.2	Legge di Ohm . . . . .	70
3.3	Potenza elettrica . . . . .	73
3.4	Reti lineari (o circuiti elementari) . . . . .	74
3.4.1	Collegamento di resistori . . . . .	76
3.4.2	Partitore resistivo . . . . .	78
3.4.3	Leggi di Kirchhoff . . . . .	80
3.5	Reti non lineari (o circuiti RC) . . . . .	84
3.5.1	Collegamento di condensatori . . . . .	84
3.5.2	Partitore capacitivo . . . . .	85
3.5.3	Processo di carica e scarica del condensatore . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Magnetostatica</b>	<b>89</b>
4.1	Fatti sperimentali . . . . .	89
4.2	Forza magnetica (di Lorentz) . . . . .	92
4.2.1	Dipolo magnetico . . . . .	95
4.2.2	Applicazione della forza magnetica . . . . .	95
4.3	Teorema di Ampere . . . . .	98
4.3.1	Applicazione del teorema di Ampere . . . . .	100
4.3.2	Interazione meccanica tra due fili . . . . .	111
4.3.3	Osservazioni . . . . .	115
4.4	Flusso del campo magnetico . . . . .	116
4.4.1	Induttanza . . . . .	117
4.4.2	Calcolo dell'induttanza . . . . .	118
4.5	Prima legge elementare di Laplace . . . . .	120
4.6	Densità di energia magnetica . . . . .	122
<b>5</b>	<b>Elettromagnetismo</b>	<b>123</b>
5.1	Fatti sperimentali . . . . .	123
5.2	Legge del flusso di Faraday . . . . .	124
5.3	Circuito mobile di Faraday . . . . .	127
5.3.1	Bilancio energetico del sistema . . . . .	131
5.3.2	Circuito mobile con un condensatore . . . . .	132
5.4	Induzione elettromagnetica . . . . .	133
5.5	Circuito RL . . . . .	134
5.6	Energia intrinseca della corrente . . . . .	137
5.6.1	Energia di un sistema di circuiti . . . . .	138
5.7	Campo magnetico indotto . . . . .	139

# 1 Introduzione

L'oggetto principale dello studio di questo corso è la **forza elettromagnetica**  $\vec{F}_{em}$ , più precisamente la **teoria di campo**.

**Definizione utile 1.1.** La forza è l'interazione tra due oggetti.

In natura esistono solo 4 forze che governano tutto ciò che è misurabile:

- Forza di gravità (osservata quando negli oggetti interagenti c'è massa)
- Forza elettromagnetica (osservata quando negli oggetti interagenti c'è carica)
- Forza elettronucleare forte
- Forza elettronucleare debole

Le ultime due riguardano la materia microscopica. Le prime due invece riguardano la materia macroscopica e sono forze **a lungo raggio**, cioè ha effetto anche a distanza.

Lo studio della forza elettromagnetica si può fare attraverso degli strumenti che approssimano il comportamento delle entità al livello macroscopico senza preoccuparci della natura microscopica.

## 1.1 Campo e forza

In fisica 1 si sono studiati i concetti delle forze, cioè ciò che agisce su un corpo con una massa, ad esempio la caduta di un grave che è attratto dalla Terra per la forza di gravità. La visione dei campi è una visione più generale e rappresenta la proprietà di un ambiente di interagire con un corpo, ad esempio un **campo** di gravità.

# 2 Elettrostatica

Facendo esperimenti che non sono analizzabili con i concetti della fisica 1 si arriva a capire che c'è una nuova interazione, la **forza elettrostatica** che ha 2 forme:

- Forza attrattiva
- Forza repulsiva

Gli oggetti sono divisi in due classi:

- Carica positiva
- Carica negativa

Gli oggetti della stessa classe si respingono, mentre quelli di classe diversa si attraggono.

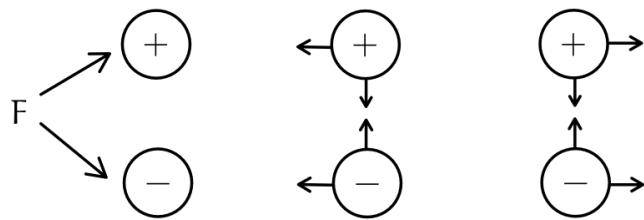


Figura 1: Tipi di carica

**Definizione 2.1** (Carica elettrica). È chiamata **carica elettrica** q la proprietà che ha il corpo di esprimere la forza elettrostatica. Le proprietà di questa carica elettrica sono **indipendenti** dal meccanismo che l'ha generata, cioè può essere generata in modo diverso, ma ha sempre le stesse proprietà. Questo implica che la carica è **preesistente** in natura.

## 2.1 Materia

L'atomo è formato da un nucleo centrale composto da protoni, carichi positivamente, e da neutroni, senza carica. Intorno al nucleo si ha una regione in cui c'è la probabilità di trovare un'altra particella, carica negativamente, chiamata elettrone.

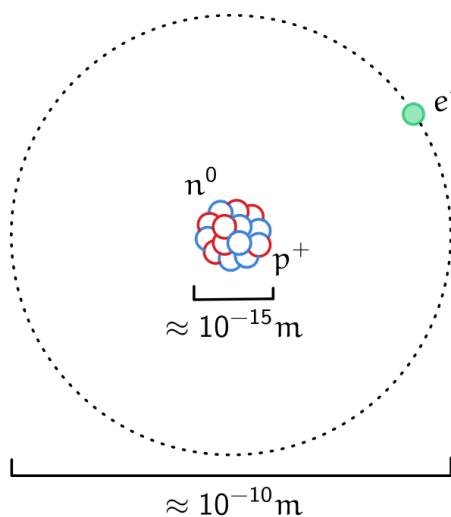


Figura 2: Struttura dell'atomo

La carica totale dell'atomo è nulla, quindi è **neutro** e di conseguenza la carica del nucleo è uguale alla carica degli elettroni, per la precisione il numero di protoni è uguale al numero di elettroni.  $Z$  è il numero atomico, cioè il numero di protoni.

Elettrone e protone hanno, in modulo, la stessa carica:

$$|q_{e^-}| = q_{p^+}$$

L'elettrone è una **particella elementare**, indivisibile e la sua carica è detta **carica elementare**, cioè la più piccola unità di carica osservabile e vale:

$$e^- = 1.6 \times 10^{-19} C$$

La **carica elettrica** in natura è quindi **quantizzata**, ovvero deve essere un multiplo della carica dell'elettrone. Inoltre la carica non si può generare, si può **solo trasferire**.

**Definizione 2.2** (Legge di conservazione della carica). In un sistema isolato, cioè che non interagisce con altri sistemi, la carica totale  $Q$  si conserva.

Le componenti della materia hanno due comportamenti:

- **Conduttore**: ad esempio il metallo, in cui gli elettroni sono liberi di muoversi
- **Dielettrico** (isolante): ad esempio il vetro, in cui le cariche non sono libere di muoversi, quindi vincolate, cioè non si riescono a strappare gli elettroni dall'atomo. Se si avvicina una carica positiva al dielettrico si avrà una deformazione delle cariche, ma non si ha una separazione di carica:

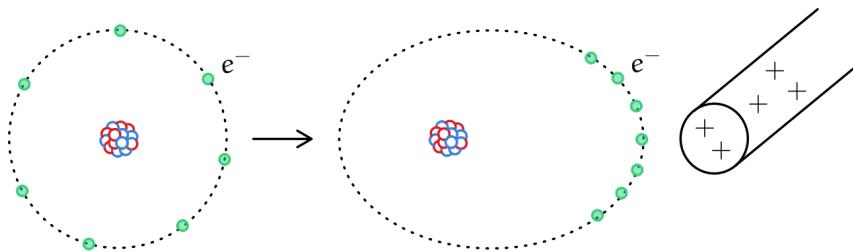


Figura 3: Deformazione delle cariche

## 2.2 Elettrificazione

L'elettrificazione è il trasferimento di carica da un corpo all'altro. Ci sono 3 meccanismi di elettrificazione:

- **Strofinio**: Si prende una bacchetta di vetro e un panno di lana e si strofina la bacchetta con il panno. La bacchetta, inizialmente, non è carica e meccanicamente con lo strofinio si strappano gli elettroni dagli atomi della bacchetta. La bacchetta diventa carica positivamente e il panno negativamente. Si avranno quindi le cariche  $q^+$  della bacchetta e  $q^-$  del panno. Per la legge di conservazione della carica si ha:

$$|q^-| = q^+$$

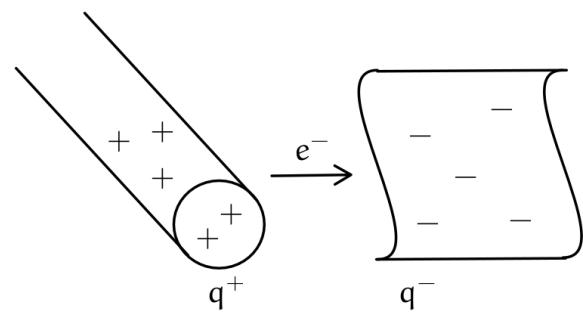


Figura 4: Strofinio

- **Induzione elettrostatica:** Con la precedente bacchetta caricata positivamente si avvicina un oggetto metallico e si nota che le cariche negative  $-Q$  del metallo si avvicinano il più possibile alla bacchetta respingendo le cariche positive  $+Q$  creando una **separazione di carica per induzione**. La carica totale rimane nulla perché non sono migrati elettroni.

$$|-Q| = +Q$$

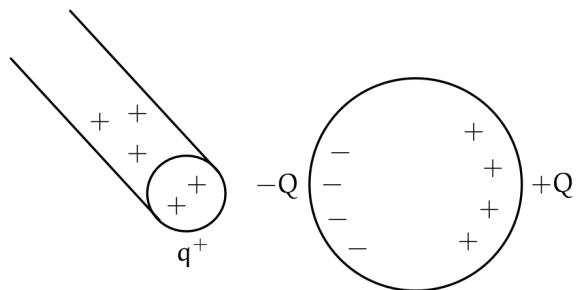


Figura 5: Induzione elettrostatica

Se si allontana l'oggetto metallico si avrà una separazione meno potente.

Per misurare la carica elettrica si usa l'**elettroscopio**. È un oggetto metallico collegato a delle lamelle metalliche chiamate foglie:

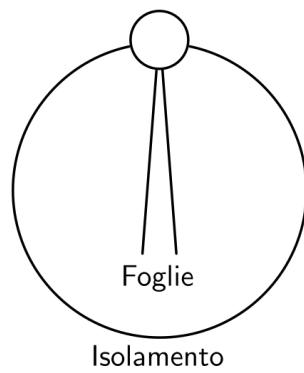


Figura 6: Elettroscopio

Si misura la carica avvicinando la bacchetta e si osserva la forza repulsiva tra le foglie dovuta alla repulsione tra le cariche positive della bacchetta e dell'elettroscopio:

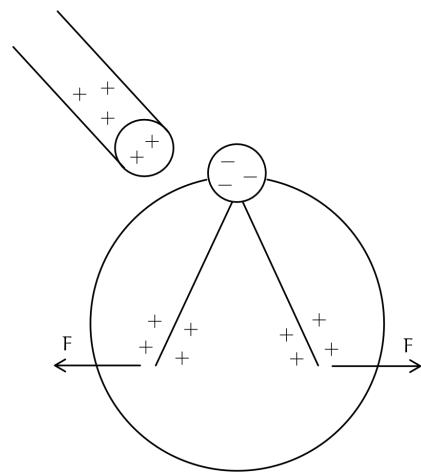


Figura 7: Elettroscopio durante una misurazione

Se si allontana la bacchetta la separazione delle foglie diminuisce.

- **Contatto** Se si prende un oggetto metallico caricato positivamente e si mette a contatto con un filo conduttore le cariche si sposteranno sul filo, elettrificandolo:

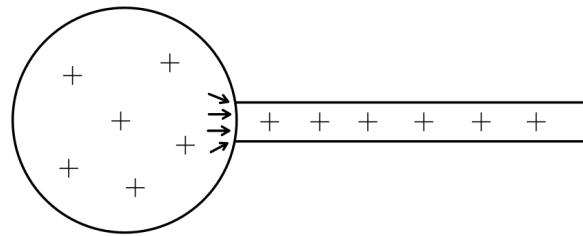


Figura 8: Elettrificazione per contatto

Se si attacca il filo a terra l'oggetto si scarica perché le cariche migrano verso la terra, cioè un conduttore immensamente più grande e quindi la carica si distribuisce su tutta la superficie della terra e sull'oggetto metallico rimane una carica **approssimativamente nulla**:

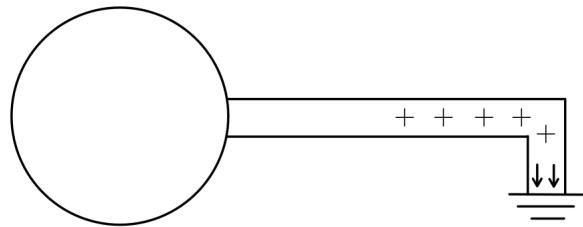


Figura 9: Scarica a terra

### 2.3 Elettrostatica nel vuoto

#### Fatti sperimentali:

Si crea un esperimento che permette di osservare il fenomeno che si vuole modellare. Si prende una bilancia di torsione formata da un filo torcente a cui è appesa un'asta con una carica  $q_1^+$  su un'estremità. Se si avvicina una carica dello stesso segno  $q_2^+$  si osserva che viene applicata una forza repulsiva  $\vec{F}_{el}$  che fa torcere il filo con un momento torcente:

$$\tau_{filo} = (k\theta) = \tau_{el} = \vec{d} \times \vec{F}$$

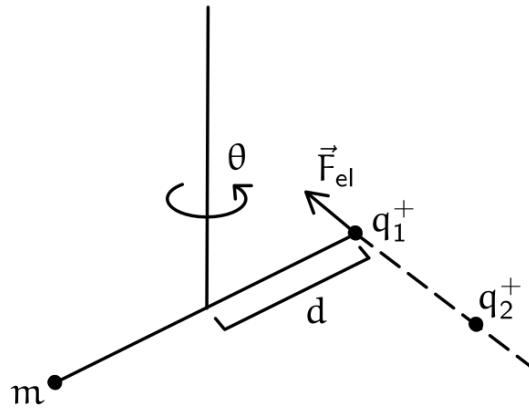


Figura 10: Bilancia di torsione

### 2.3.1 Interazione di Coulomb

Dai fatti sperimentali si nota che il modulo della forza è proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le cariche:

$$|F_{el}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Si osserva anche che la forza elettrica  $F_{el}$  è una forza **centrale**, cioè la forza è diretta lungo la retta che congiunge le due cariche.

$k$  è la costante di Coulomb e vale:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove  $\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \frac{F}{N \cdot m^2}$  è la costante dielettrica del vuoto.

L'unità di misura della carica è il Coulomb:

$$[q] = C$$

Consideriamo la terna cartesiana con due cariche positive  $q_1^+$  e  $q_2^+$  descritte dai raggi vettori  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ . Sulla carica  $q_2^+$  viene applicata una forza  $\vec{F}_{12}$

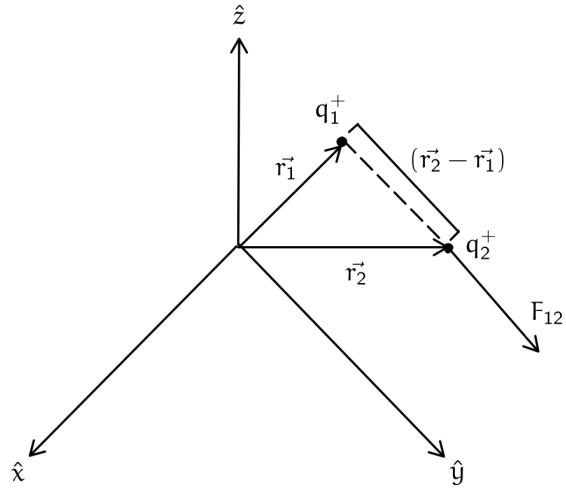


Figura 11: Forza elettromagnetica

Notazione:

- Chiamo il vettore che va da  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$   $\vec{r}_{12}$ .
- Il versore è indicato con  $\hat{\mathbf{r}}$  e rappresenta il vettore unitario:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}$$

Calcoliamo la forza  $\vec{F}_{12}$  che agisce su  $q_2^+$  da  $q_1^+$ :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad [\text{N}]$$

### 2.3.2 Sistema di più cariche

Con più cariche si osserva che vale il principio di sovrapposizione, cioè due fenomeni si sommano in modo lineare; e vale la terza legge di Newton, cioè l'azione-reazione ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ).

Consideriamo un sistema discreto con  $n$  cariche  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e osserviamo la carica  $q_0$ . Ognuna di queste cariche sarà descritta dal suo raggio vettore.

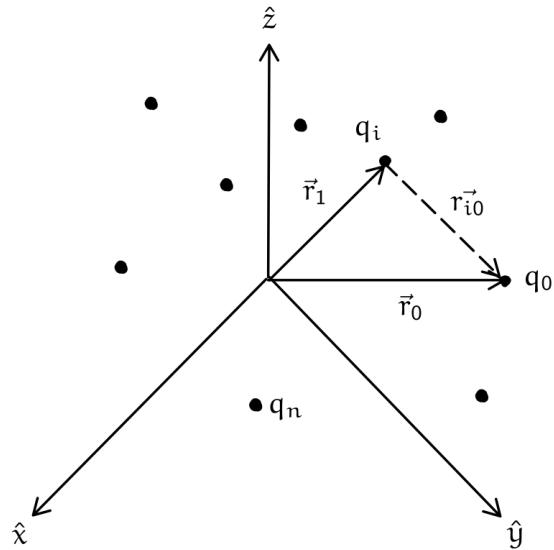


Figura 12: Forza elettromagnetica con più cariche

La forza che la carica  $q_i$  agisce su  $q_0$  è:

$$\vec{F}_{i0} = \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}_{i0}}{r_{i0}^2}$$

dove  $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_i$ .

Applichiamo questa formula osservando una ad una tutte le cariche come abbiamo fatto per  $q_0$  per calcolare la forza totale applicata sulla carica  $q_0$ :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}_{i0}}{r_{i0}^2} \quad [\text{N}]$$

Questa forza ha direzione uguale alla somma delle forze.

Un'informazione si propaga con una **velocità finita**, cioè non istantaneamente. La velocità massima di propagazione è la velocità della luce  $c$  e vale:

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Consideriamo lo stesso sistema di cariche, ma con la carica  $q_0$  spostata ad una distanza molto lontana e consideriamo le altre cariche come cariche che si muovono. Si osserva che le cariche che si muovono cambiano il valore della forza  $\vec{F}_{\text{tot}}$  e dalla formula si vede che la forza cambia istantaneamente, ma in realtà la forza viene trasmessa dopo un tempo di propagazione (che la formula non tiene in considerazione).

Questa problematica si risolve con il concetto di **campo elettrostatico**.

### 2.3.3 Campo elettrostatico

Dalla formula della forza elettrostatica si può notare che la forza è proporzionale alla carica osservata  $q_0$ :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}_{i0}}{r_{i0}^2} \propto q_0$$

Quindi la forza è proporzionale alla carica osservata e dalla distanza di questa carica:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}(\vec{r}_0)$$

Dove  $\vec{E}$  è il **campo elettrostatico posizionato in  $r_0$**  della carica osservata  $q_0$ .

Prendiamo in considerazione il seguente sistema in cui la particella  $Q$  è la **sorgente di campo** e la particella  $q$  è la **carica di prova**:

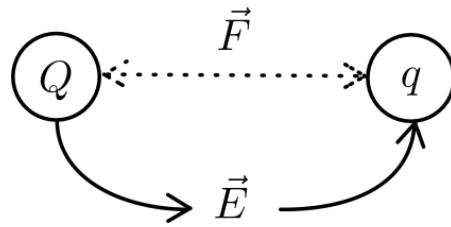


Figura 13: Campo elettrostatico

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}}{q}$$

Questa è la **definizione operativa** di campo, cioè serve una carica di prova per misurare il campo.

**Definizione 2.3.** Il campo di una singola carica puntiforme  $Q$ , posizionata per comodità nell'origine, considerata una particella di test  $q$  ad una distanza  $\vec{r}$  è definito come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \left[ \frac{N}{C} \right]$$

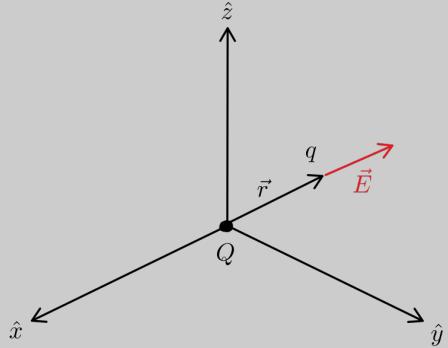


Figura 14: Campo elettrostatico

**Definizione 2.4.** Il campo di un sistema discreto di  $n$  cariche  $q_1, q_2, \dots, q_n$  è definito come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \hat{r}_i \quad \left[ \frac{N}{C} \right]$$

per il **principio di sovrapposizione**.

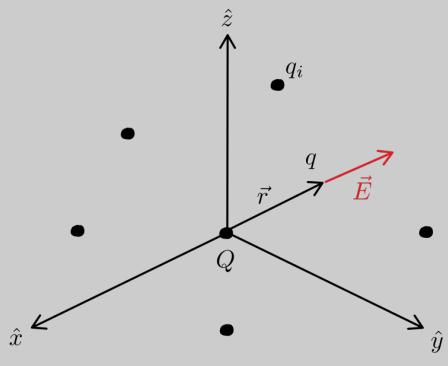


Figura 15: Campo elettrostatico con più cariche

**Definizione utile 2.1.** Il **lavoro elementare** è definito come:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

dove  $d\vec{l}$  è il vettore spostamento.

- Il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dai punti di inizio e fine.
- Il lavoro in un percorso chiuso è nullo:

$$\oint d\vec{l} = 0$$

- Esiste una funzione di stato  $U$  tale che il lavoro per andare da  $A$  a  $B$  è uguale al negativo del lavoro per andare da  $B$  a  $A$ :

$$\exists U \mid L_{AB} = -\Delta U$$

dove  $U$  è l'**energia potenziale**.

## 2.4 Energia potenziale elettrostatica

La **forza elettrostatica**  $\vec{F}_{el}$  è una forza **conservativa**, cioè il lavoro per spostare una carica da un punto  $A$  a un punto  $B$  è indipendente dal percorso e dipende solo dai punti di inizio e fine.

Per calcolare il lavoro per spostare una carica  $q$  da un punto  $A$  a un punto  $B$  si usa la seguente formula:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B d\vec{L} = \int_{\text{curva}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{l}}_{dr} \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) \\ &= -\Delta U \end{aligned}$$

dove  $U$  è l'**energia potenziale elettrostatica**:

$$U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{costante} \quad [\text{J}]$$

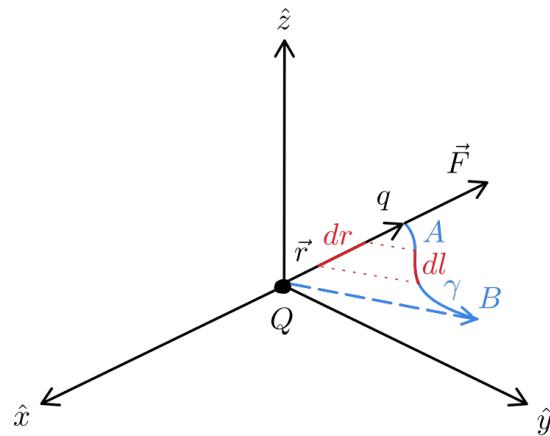


Figura 16: Energia potenziale

Se poniamo l'energia all'infinito uguale a 0, allora  $U$  è il lavoro che fa il campo (la forza elettrostatica) per allontanare una particella all'infinito, cioè per distruggere il sistema:

$$U_{-\infty} = 0 \rightarrow U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} = -(U_\infty - U_r)$$

- Con cariche uguali l'energia è positiva perché la forza è repulsiva e si allontana la carica verso l'infinito.
- Con cariche opposte l'energia è negativa perché la forza è attrattiva e si avvicina la carica, allontanandosi dall'infinito.

## 2.5 (Campo) Potenziale elettrostatico

Dalla forza abbiamo definito l'equivalente, ma sottoforma di campo:

$$\vec{F} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Si può definire un campo anche per l'energia potenziale:

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{F} & \longrightarrow & \vec{E} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta U & \longrightarrow & \Delta V \\
 \text{Energia} & & \text{Campo} \\
 \text{elettrostatica} & & \text{potenziale}
 \end{array}$$

**Definizione 2.5.** Il campo potenziale è definito come la differenza di energia di una carica  $q$  unitaria:

$$V(F) := \Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} \quad [V]$$

L'unità di misura è il Volt.

Quindi come  $\Delta U_{AB} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ , così si avrà:

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [V]$$

Di conseguenza il lavoro sulla carica  $q$  è:

$$L_q = -q \Delta V \quad [J]$$

### 2.5.1 Calcolo del potenziale

$V(\vec{r})$  è un campo definito a meno di una costante (come l'energia), ma si sceglie un punto di riferimento (uno **zero**) che chiamiamo ad esempio  $\vec{r}_0$  e poniamo  $V(\vec{r}_0) = V_0$ . Successivamente si calcola il potenziale come  $V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$ :

$$\begin{cases} V(\vec{r}_0) = V_0 = 0 \\ V(\vec{r}) - V_0 = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

Si calcola quindi il campo prendendo come punto di riferimento il punto  $\vec{r}_0$

### 2.5.2 Potenziale della carica puntiforme

Ricordando la definizione di campo eletrostatico:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Il potenziale si calcola come:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) - V_0 &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{l} \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad [V] \end{aligned}$$

dove  $r_0$  è un punto di riferimento e  $V_0$  è il potenziale in quel punto.

Si può prendere  $r_0 = \infty$ , quindi  $V_\infty = 0$  e si ottiene:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [V]$$

### 2.5.3 Potenziale di più cariche

Consideriamo un insieme di cariche discrete  $\{q_i\}_N$  vale il **principio di sovrapposizione** anche per il potenziale ed esso è definito tramite il campo. Gli operatori somma e integrale commutano e quindi si ottiene:

$$V_{\text{tot}} = \sum V_i$$

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

e quindi:

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

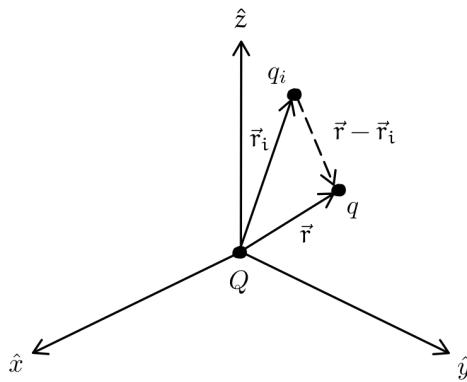


Figura 17: Potenziale di più cariche

In questo modo spostando l'origine degli assi il potenziale non cambia.

Se si avesse un volume tutte le sommatorie diventerebbero integrali:

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Abbiamo quindi che:

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} & \longrightarrow & \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{test}}} \\ \text{conservativo} \downarrow & & \downarrow \text{conservativo} \\ \Delta U & \longrightarrow & \Delta V = \frac{\Delta U}{q_{\text{test}}} \\ \text{Energia} & & \text{Campo} \\ \text{elettrostatica} & & \text{potenziale} \end{array}$$

$$L_q = -\Delta U \rightarrow L_q = -q\Delta V$$

La circuitazione in un percorso chiuso è nulla:

**Definizione 2.6** (Prima equazione di Maxwell). Il campo è conservativo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

quindi  $\vec{E}$  è **conservativo**.

## 2.6 Linee di campo

Sono linee tangenti al campo elettrostatico  $\vec{E}$  in ogni punto e dirette nel verso del campo. Hanno le seguenti caratteristiche:

- Sono continue, quindi non si interrompono mai
- Escono dalle cariche positive e entrano nelle cariche negative
- Sono linee aperte, cioè non si chiudono mai
- In una carica positiva puntiforme sono radiali uscenti

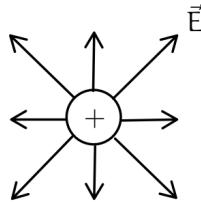


Figura 18: Linee di campo su una carica positiva

- In una carica negativa puntiforme sono radiali entranti

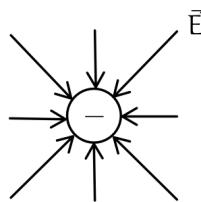


Figura 19: Linee di campo su una carica negativa

- Le cariche sono l'origine delle linee di campo, se si hanno delle linee chiuse vuol dire che non c'è una sorgente
- Le linee di campo non si intersecano mai

## 2.7 Superfici equipotenziali

Sono luoghi di punti (superficie bidimensionale) a potenziale costante:

$$V(\vec{r}) = \text{costante} \rightarrow \Delta V = 0 \rightarrow L = 0 \quad \text{sulla superficie}$$

Se il lavoro è nullo, allora la forza è perpendicolare alla superficie  $\vec{F} \perp d\vec{l}$ . Quindi le superfici equipotenziali sono perpendicolari al campo elettrico perché:

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow \vec{F} \perp \vec{E}$$

Quindi si nota che per una carica puntiforme la superficie equipotenziale è una sfera. Il campo elettrico punta sempre verso potenziali minori perché il lavoro è positivo:

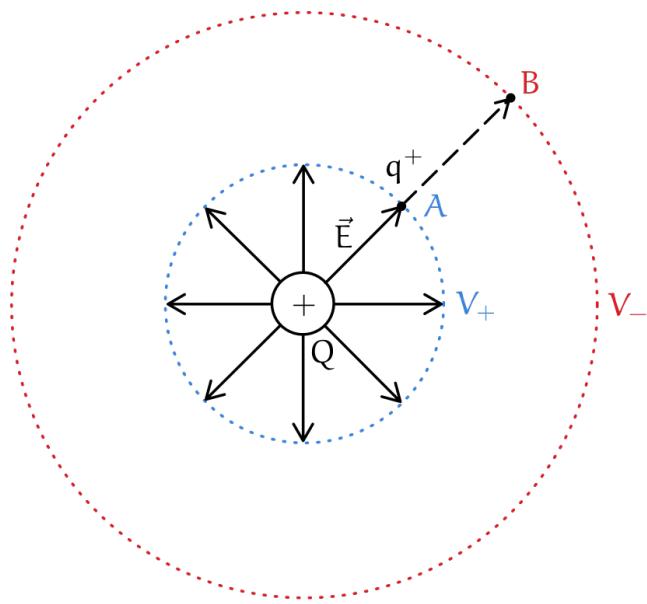


Figura 20: Superfici equipotenziali

$$L = -q^+ (V_B - V_A) > 0 \quad \text{con } V_B < V_A$$

## 2.8 Teorema di Gauss

Si può calcolare il campo elettrostatico  $\vec{E}$  di un'entità più complicata, come ad esempio un filo, un cilindro ecc..., che presentano **situazioni di simmetria**. Questo calcolo non viene fatto direttamente tramite integrali, ma tramite il **teorema di Gauss**. Le simmetrie che analizziamo sono:

- **Simmetria sferica:** Un sistema **isotropo**, cioè che non varia in base alla direzione. Ad esempio una sfera, una carica puntiforme oppure un condensatore sferico.

- **Simmetria cilindrica:** Un sistema che non varia in base alla rotazione intorno ad un asse. Ad esempio un cilindro **indefinito** (di lunghezza non definita) oppure un filo indefinito.
- **Simmetria rispetto ad un piano:** Un sistema che non varia in base alla traslazione lungo un piano.

Tutte queste sono geometrie in cui sono distribuite cariche e avranno una certa densità di carica:

- Carica puntiforme  $q$  [C]
- Densità lineare  $\lambda$  [ $\frac{C}{m}$ ] per una linea
- Densità superficiale  $\sigma$  [ $\frac{C}{m^2}$ ] per una superficie
- Densità volumetrica  $\rho$  [ $\frac{C}{m^3}$ ] per un volume

**Osservazione:** Moltiplicare un campo per una superficie equivale a calcolare un **flusso**, cioè contare le linee di campo per la superficie ortogonale. Se prendiamo un campo di una carica puntiforme notiamo che al variare della distanza  $\vec{r}$  il valore del campo varia. Se invece moltiplichiamo il campo per la superficie di una sfera, si ottiene un flusso che è costante e non dipende da  $\vec{r}$ :

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \hat{r}$$

**Definizione utile 2.2** (Angolo piano). L'angolo piano  $d\alpha$  è definito come un elemento di linea  $dl$  della circonferenza diviso per il raggio:

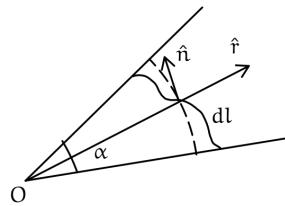


Figura 21: Angolo piano

$$d\alpha = \frac{\vec{dl} \cdot \hat{n} \cdot \hat{r}}{r}$$

**Definizione utile 2.3** (Angolo solido). L'angolo solido  $d\Omega$  è definito come un elemento di superficie  $dS$  della sfera diviso per il raggio al quadrato:

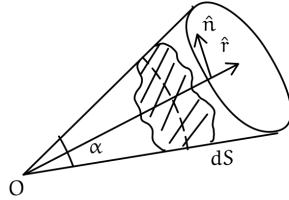
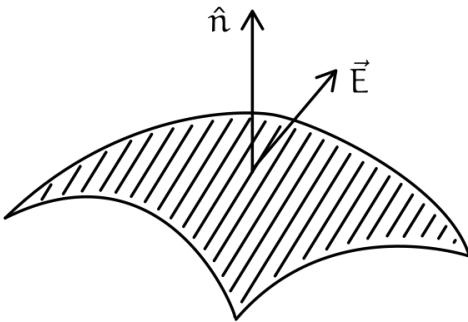


Figura 22: Angolo solido

$$d\Omega = \frac{dS \cdot \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

### 2.8.1 Flusso del campo $\vec{E}$

Consideriamo una superficie con concavità verso il basso definita come la sua orientazione  $\hat{n}$  (normale) e la sua area  $dS$ .



$$d\vec{S} = \hat{n} \cdot dS$$

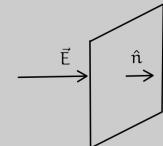
Figura 23: Superficie

**Definizione 2.7** (Flusso elementare). Il flusso elementare  $d\Phi$  è definito come il prodotto scalare tra il campo e la superficie:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [V \cdot m]$$

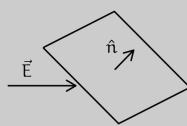
Il flusso di una superficie si ottiene integrando:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



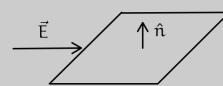
$$d\Phi > 0$$

(a) Flusso positivo (massimo)



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \cos \theta$$

(b) Flusso generico



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0$$

(c) Flusso nullo

Figura 24: Esempi di flusso

**Esempio 2.1.** Consideriamo una carica puntiforme  $q$  e una superficie  $dS$

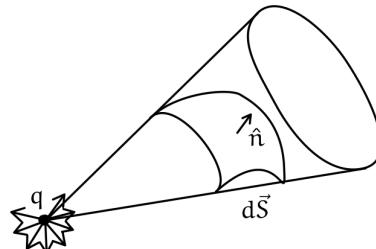


Figura 25: Flusso di una carica puntiforme

Il flusso del campo elettrostatico è:

$$d\Phi = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S}}_{d\Omega} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Osserviamo che il flusso dipende solo da  $d\Omega$ , cioè dall'angolo solido, e non dalla distanza  $r$  della superficie dalla carica.

**Esempio 2.2.** Consideriamo una superficie chiusa:

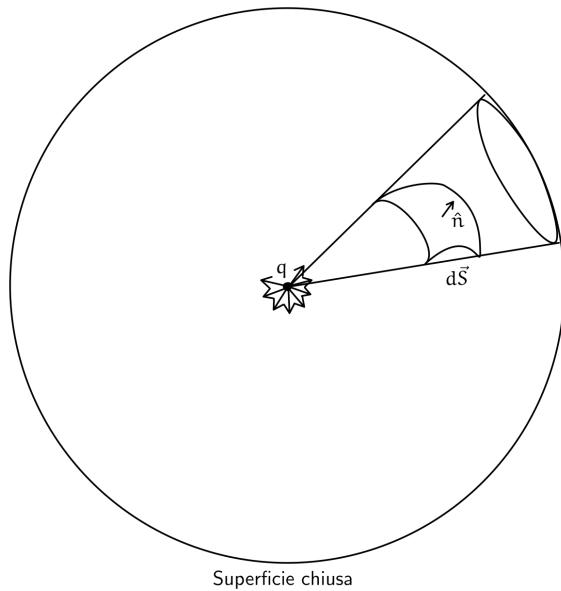


Figura 26: Flusso di una superficie chiusa

il flusso del campo elettrostatico è:

$$\Phi = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\oint d\Omega}_{=4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

L'integrale su una superficie chiusa dell'angolo piano è uguale a  $2\pi$ , quindi l'integrale su una superficie chiusa dell'angolo solido è uguale a  $4\pi$ .

Il flusso quindi non dipende dalla superficie e dimostra il teorema di Gauss.

**Teorema 2.1** (Teorema di Gauss). Il flusso  $\Phi(\vec{E})$  del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso una superficie chiusa **qualsiasi**  $S$  è uguale alla somma delle cariche interne alla superficie diviso  $\epsilon_0$ :

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\substack{\text{superficie chiusa} \\ \text{QUALUNQUE}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interne}}}{\epsilon_0}$$

Le cariche esterne non contano perché quando esse entrano nella superficie, ad un certo punto escono, quindi il flusso è nullo. Se all'interno della superficie c'è una sorgente (quindi cariche interne) esse non entrano mai perché sono già dentro, quindi escono e il flusso è positivo.

## 2.9 Applicazione del teorema di Gauss

Siccome il teorema di Gauss dice che il flusso non dipende dalla superficie si prende una superficie particolarmente simmetrica chiamata **superficie di Gauss** che rende facilmente calcolabile il flusso, grazie al campo costante su tutta la superficie. Per calcolare il campo  $\vec{E}$  siccome esso è costante e parallelo alla normale (grazie alla superficie scelta) si può tirare fuori dall'integrale per ottenere un prodotto tra l'incognita  $\vec{E}$  e un integrale geometrico.

**Definizione 2.8** (Seconda equazione di Maxwell).

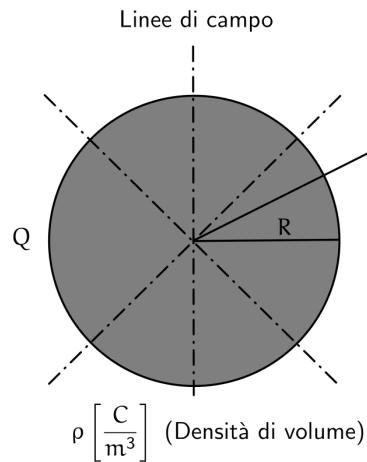
$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \oint_{\text{Sup}} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{Interne}}}{\epsilon_0}$$

Le linee di campo sono aperte

### 2.9.1 Simmetria sferica

Le caratteristiche necessarie sono:

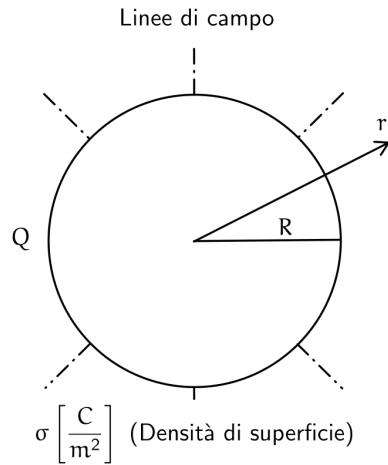
- Distribuzione di carica con simmetria sferica. Potrebbe essere una:
  - Carica di volume  $\rho$



$$Q = \rho \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{Volume sfera}} \quad [\text{C}]$$

Figura 27: Simmetria sferica di volume

- Carica di superficie  $\sigma$



$$Q = \sigma \cdot \overbrace{4\pi R^2}^{\text{Superficie sfera}} \quad [\text{C}]$$

Figura 28: Simmetria sferica di superficie

Se la carica  $\{Q\}$  è a simmetria sferica, allora il campo  $\vec{E}$  sarà a simmetria sferica. Questo campo sarà **radiale** e dipenderà solo da  $r$ :

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

**Esempio 2.3.** Consideriamo una carica positiva  $Q^+$  distribuita su una superficie. L'obiettivo è quello di cercare una superficie di Gauss in cui il campo elettrico sia costante. Siccome dipende solo da  $r$  esso sarà costante solo nelle superfici sferiche  $S(r)$  di raggio  $r$ .

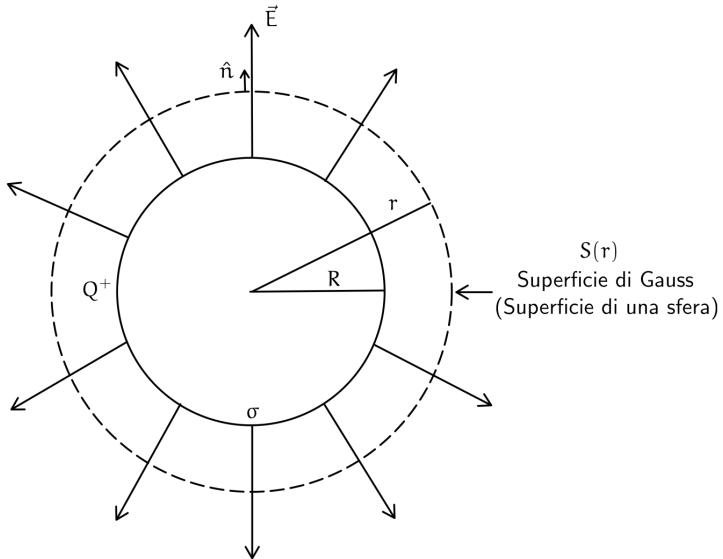


Figura 29: Carica distribuita su una superficie sferica

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{E}) &= \oint_{S(r)} \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dS \\
 &= \oint_{S(r)} E(r) dS \\
 &= E(r) \underbrace{\oint_{S(r)} dS}_{\text{Sup sfera}} \\
 &= E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

Dove:

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} Q & \text{se } r \geq R \text{ (esterno)} \\ 0 & \text{se } r < R \text{ (interno)} \end{cases}$$

Quindi:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases} \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

In  $r = R$  il campo vale:

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il grafico del campo elettrico è:

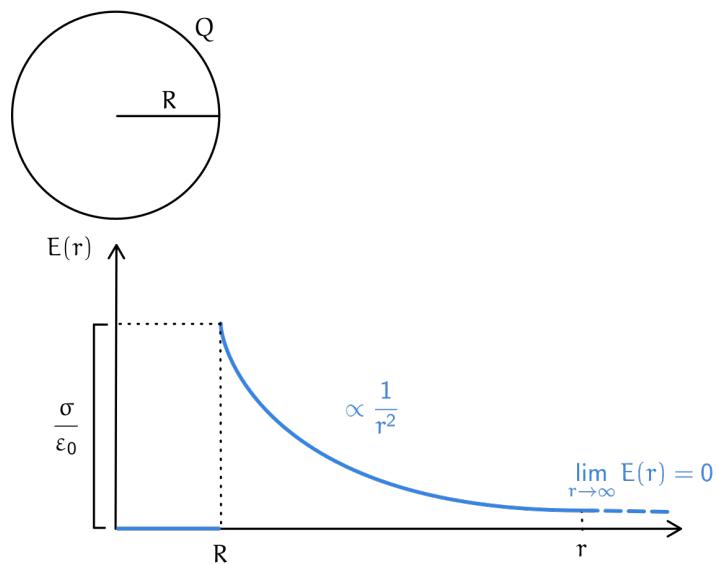


Figura 30: Grafico del campo elettrico

**Esempio 2.4.** Consideriamo una carica positiva  $Q^+$  distribuita su un volume. L'obiettivo è quello di cercare una superficie di Gauss in cui il campo elettrico sia costante. Siccome dipende solo da  $r$  esso sarà costante solo nelle sfere  $S(r)$  di raggio  $r$ .

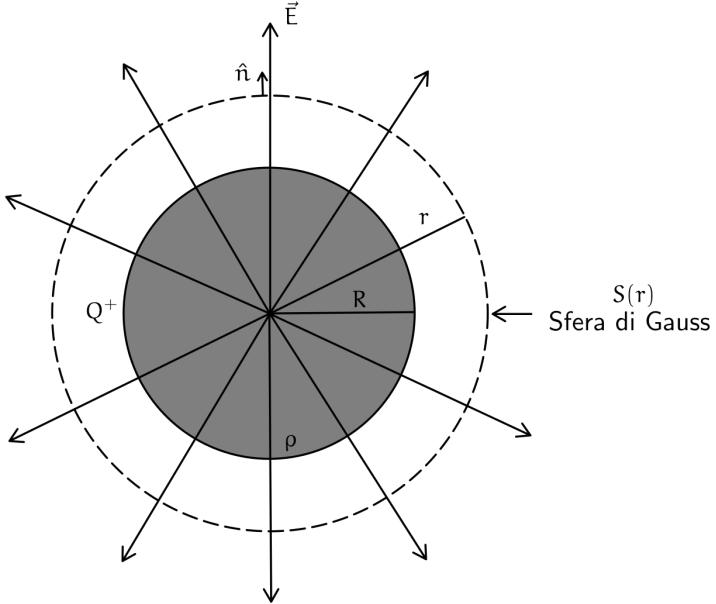


Figura 31: Carica distribuita su un volume sferico

Siccome la sfera all'interno non è più vuota come nell'esempio precedente, ma è piena il valore di  $Q_{\text{int}}$  esterno rimane invariato, ma all'interno si ha:

$$Q_{\text{Int}} = \begin{cases} Q & \text{se } r \geq R \\ \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{se } r < R \end{cases}$$

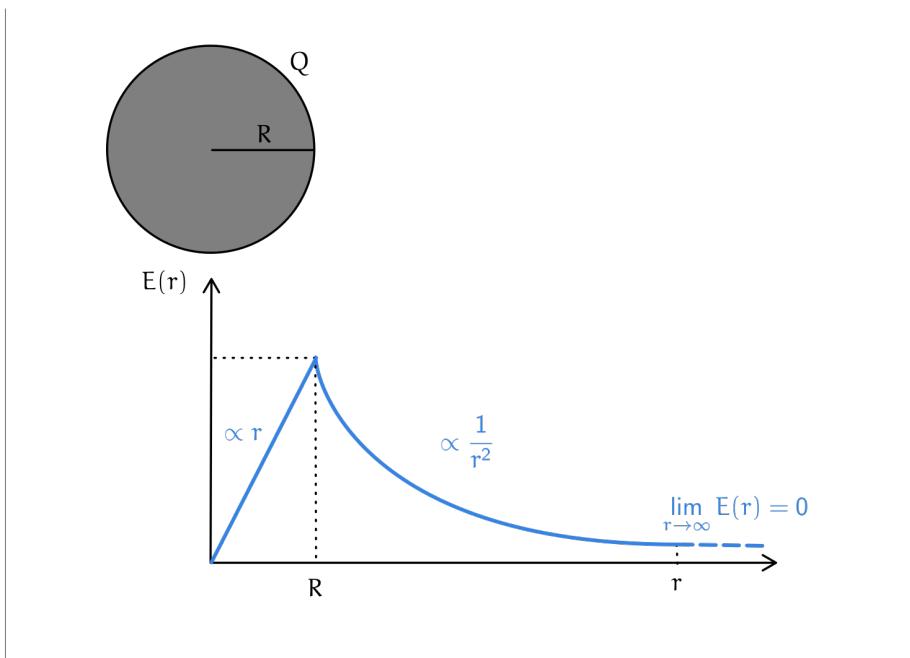
Quindi:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r & \text{se } r < R \end{cases} \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

In  $r = R$  il campo vale:

$$E(R) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot R$$

Il grafico del campo elettrico è:



### 2.9.2 Simmetria cilindrica

Le possibili simmetrie sono:

- Filo indefinito con distribuzione di carica lineare  $\lambda$
- Cilindro
  - Con distribuzione di carica sulla superficie
  - Con distribuzione di carica nel volume

La caratteristica principale è la **simmetria attorno all'asse del sistema**. La superficie di Gauss in cui il campo è costante è un cilindro di raggio  $r$  e altezza  $h$ .

**Esempio 2.5.** Consideriamo una carica  $\lambda^+$  distribuita su un filo indefinito:

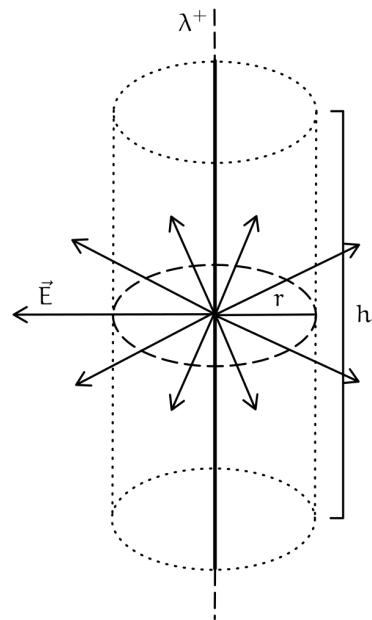


Figura 32: Carica distribuita su un filo indefinito

Il flusso del campo è il flusso delle basi (che essendo parallele al campo radiale vale 0) più il flusso laterale:

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{\text{Basi}} + \Phi_{\text{Laterale}} = 0 + E \cdot 2\pi rh = \frac{Q_{\text{Int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Quindi il campo è:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Il grafico del campo elettrico è:

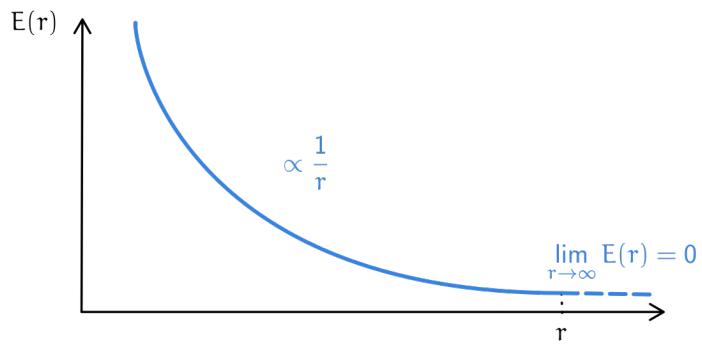


Figura 33: Grafico del campo elettrico

**Esempio 2.6.** Consideriamo una carica  $\sigma^+$  distribuita su un cilindro indefinito di raggio  $R$ :

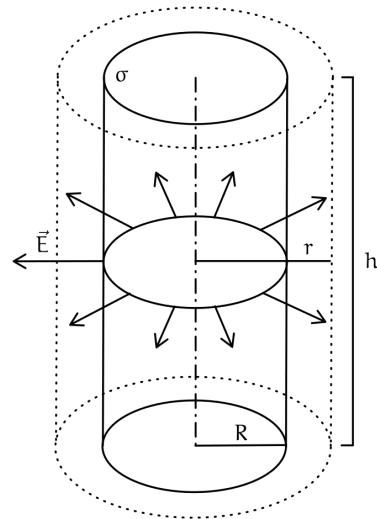


Figura 34: Carica distribuita su un cilindro di raggio  $R$

Il flusso del campo è lo stesso del caso precedente, ma con  $Q_{\text{Int}}$  diverso:

$$Q_{\text{Int}} = \begin{cases} \sigma \cdot 2\pi Rh & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases}$$

Quindi il campo è:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases}$$

Il grafico del campo elettrico è:

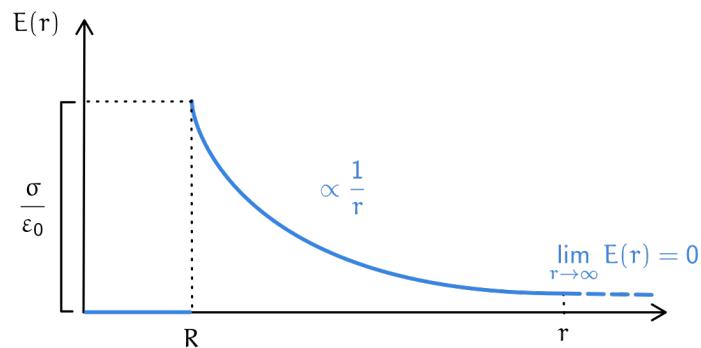


Figura 35: Grafico del campo elettrico

### 2.9.3 Simmetria rispetto ad un piano indefinito

Consideriamo un piano indefinito con una distribuzione di carica superficiale positiva  $\sigma^+ \left[ \frac{C}{m^2} \right]$ . L'unico grado di libertà è la distanza dal piano. L'elemento di campo è definito come:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Se consideriamo un elemento di carica che agisce su un punto p allora, siccome il piano è indefinito, ci sarà un elemento di carica simmetrico che genera un campo con componente orizzontale uguale e opposta a quella dell'elemento precedente. Di conseguenza il campo totale sarà perpendicolare al piano:

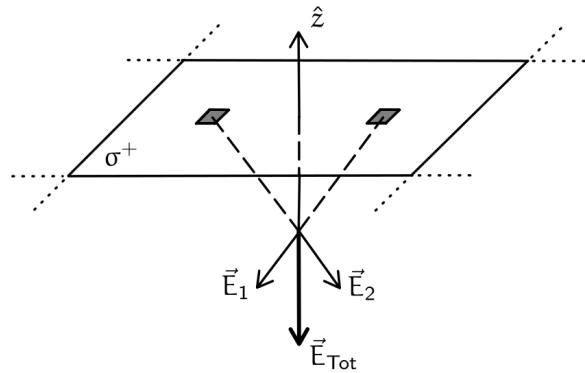


Figura 36: Carica distribuita su un piano indefinito

Il campo avrà questa forma:

$$\vec{E} = E(z)\hat{z}$$

La superficie di Gauss da considerare è un cilindro che si trova metà sopra e metà sotto il piano:

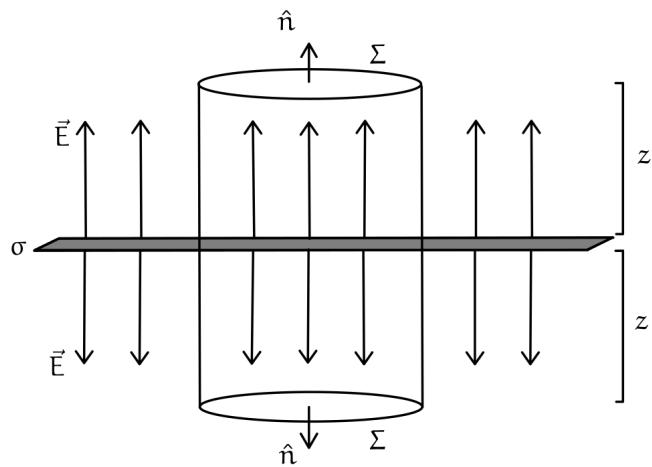


Figura 37: Superficie di Gauss per un piano indefinito

Il flusso del sistema sarà il flusso delle basi più il flusso dei lati, ma il flusso laterale sarà nullo:

$$\Phi = \Phi_{\text{Basi}} + \Phi_{\text{Laterale}} = 2E(z)\Sigma + 0 = \frac{Q_{\text{Int}}}{\epsilon_0} = \frac{\Sigma\sigma}{\epsilon_0}$$

Quindi il campo è:

$$E = \frac{\sigma^\pm}{2\epsilon_0}$$

La particolarità di questo campo è che non dipende dalla distanza, quindi è un campo costante.

**Esempio 2.7.** Vogliamo analizzare il campo elettrico tra due piani indefiniti distanti  $h$  uno carico positivamente e l'altro negativamente.

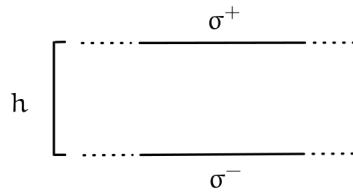


Figura 38: Carica distribuita su due piani indefiniti

Il sistema, per il principio di sovrapposizione, è uguale a:

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$$

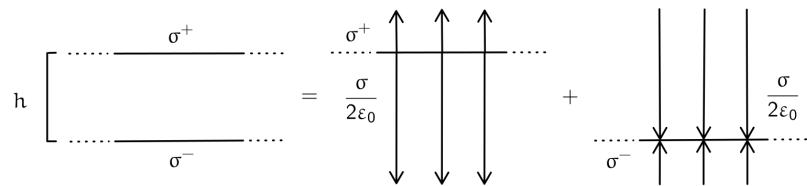


Figura 39: Sovrapposizione di due piani

Dal teorema di Gauss abbiamo che il campo è costante e vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

quindi:

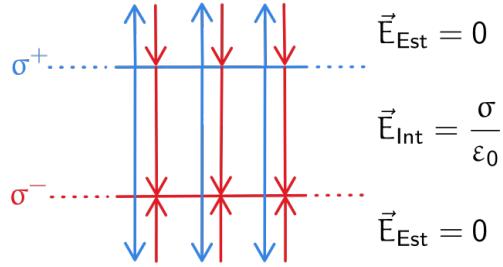


Figura 40: Risultato della sovrapposizione di due piani

Notiamo che all'esterno dei piani il campo è nullo, mentre al centro è la somma dei due campi con verso dal positivo al negativo.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Le linee di campo sono quindi:

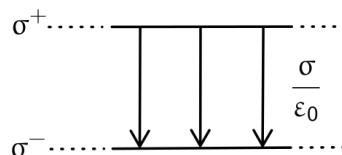


Figura 41: Linee di campo tra due piani

## 2.10 Elettrostatica nei conduttori

Un materiale conduttore ha le **cariche libere di muoversi**. Se si avvicina un campo elettrico sulle cariche viene esercitata una forza. Per un momento ci sarà del caos, ma poi le cariche si sposteranno fino a quando non si raggiunge l'equilibrio, e solo in quel momento si studia il comportamento delle cariche.

### 2.10.1 Proprietà dei conduttori in equilibrio elettrostatico

1. **Prima proprietà**: Il campo totale interno in un conduttore è 0:

$$E_{\text{Interno}} = 0$$

Consideriamo un conduttore immerso in un campo chiamato **campo esterno**. Le cariche sono libere di muoversi, quindi quelle positive andranno nella direzione del campo, mentre quelle negative andranno nella direzione opposta al campo.

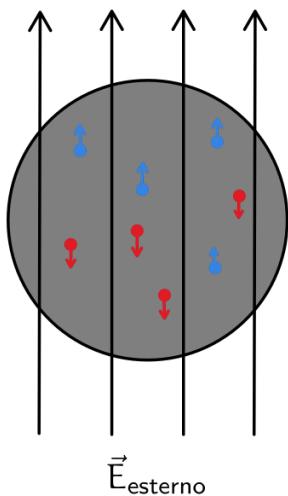


Figura 42: Campo esterno in un conduttore

Si nota quindi una separazione di carica che creerà un **campo indotto**.

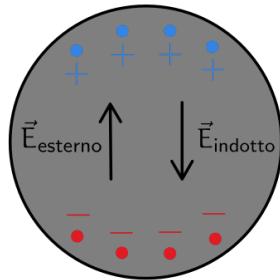


Figura 43: Campo indotto in un conduttore

Vale il principio di sovrapposizione e quindi all'interno del conduttore si avrà la somma dei due campi:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{est}} + E_{\text{ind}}$$

Ad un certo punto si raggiungerà l'equilibrio, quindi le cariche non si muovono più, di conseguenza il campo è nullo.

2. **Seconda proprietà:** Siccome il campo è nullo, il potenziale è costante su tutto il conduttore:

$$V - V_0 = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V = \text{costante}$$

3. **Terza proprietà:** Siccome il campo interno è nullo, la carica interna in un conduttore in equilibrio è 0 (dal teorema di Gauss)  $Q_{\text{Int}} = 0$  :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{Int}}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow Q_{\text{Int}} = 0$$

Quindi le **cariche si distribuiscono solo in superficie**

4. **Quarta proprietà:** Il campo nella superficie di un conduttore è ortogonale alla superficie e vale sempre:

$$\vec{E}_{\text{sup}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

(Teorema di Coulomb)

Notiamo quindi che il conduttore in equilibrio elettrostatico distorce il campo nel seguente modo:

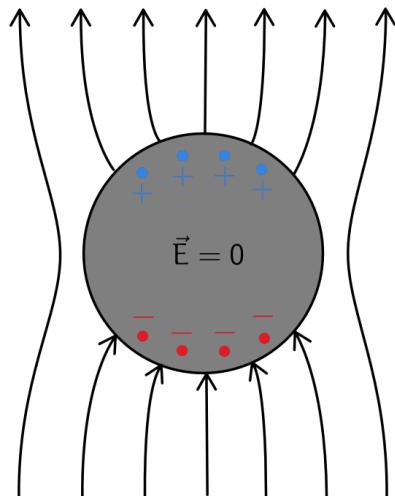


Figura 44: Campo in un conduttore in equilibrio

### 2.10.2 Cavità in un conduttore

La cavità non dipende dalla geometria del conduttore. Un esempio di un conduttore con una cavità è il seguente (un guscio):

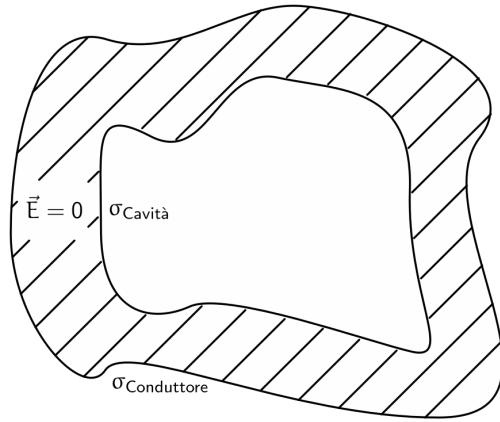


Figura 45: Conduttore con una cavità

Carichiamo un conduttore con una cavità **vuota** con una carica  $Q$ . Questa carica si distribuirà sulla superficie del conduttore e ha le seguenti proprietà:

1. La densità nella superficie della cavità è scarica:

$$\sigma_{\text{Cavità}} = 0$$

quindi se si deposita una carica sul guscio, l'interno non può essere caricato

2. Il campo all'interno della cavità è nullo:

$$E_{\text{Cavità}} = 0$$

**Dimostrazione:** Per il teorema di Gauss posiziono una superficie di Gauss all'interno del conduttore, quindi:

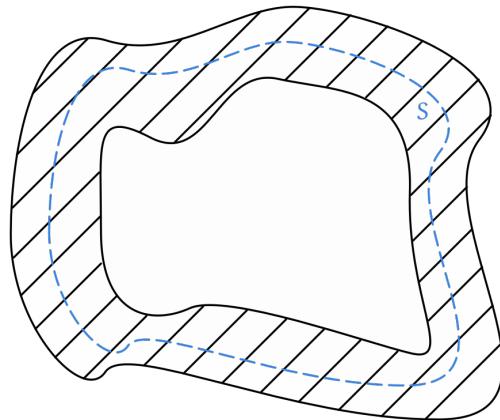


Figura 46: Superficie di Gauss in un conduttore con cavità

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int totale}}}{\epsilon_0}$$

Il campo vale 0 perchè la superficie di Gauss si trova all'interno del conduttore, quindi:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow Q_{\text{Cavità}} = 0$$

La carica totale è nulla, però si potrebbe avere una situazione con una carica positiva e negativa che si annullano. Se per assurdo si avesse una separazione di carica, con carica totale nulla:

$$q^+ + q^- = 0$$

allora ci sarebbe un campo interno:

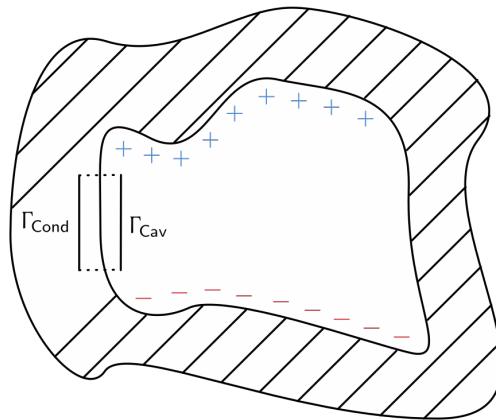


Figura 47: Dimostrazione del campo nullo in un conduttore con cavità

per l'equazione di Maxwell sappiamo che:

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_{\text{Conduttore}}} \vec{E} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{Cavità}}} \vec{E}}_{=0} \neq 0$$

E questo è assurdo, quindi il campo è nullo.

Le linee di campo sono:

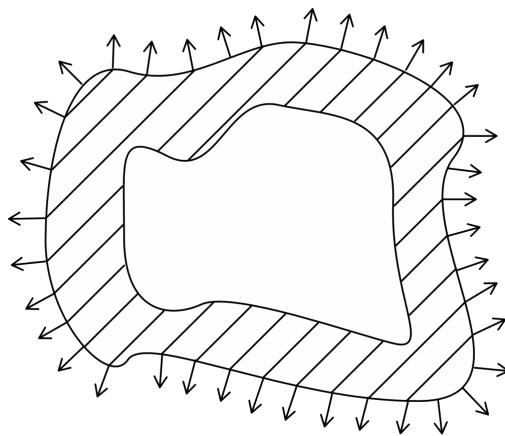


Figura 48: Linee di campo in un conduttore con cavità

Questa superficie con una cavità agisce come uno **schermo elettrostatico** ( o gabbia di Faraday) perchè il campo all'interno è nullo.

Consideriamo ora un conduttore con una cavità **carica**, ciò vuol dire che nella cavità è presente un conduttore carico e questa carica si distribuisce sulla superficie:

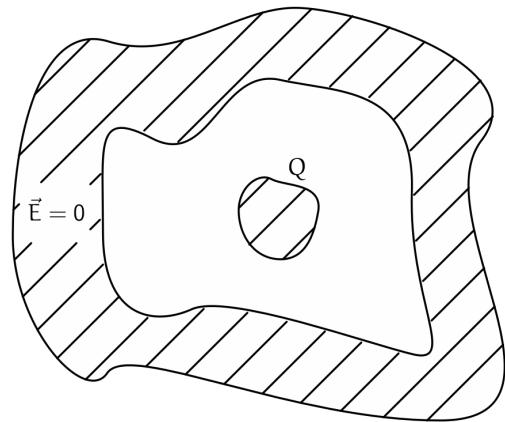


Figura 49: Conduttore con una cavità carica

Per Gauss posiziono una superficie all'interno del conduttore con la cavità, quindi:

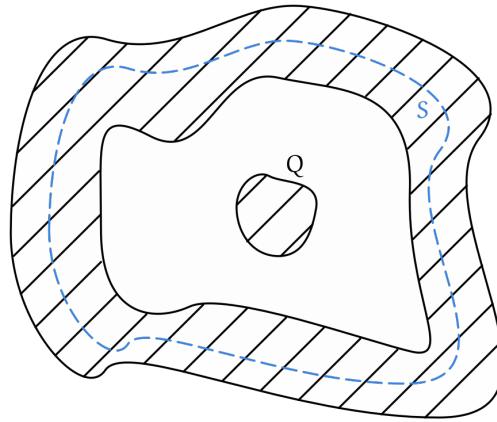


Figura 50: Superficie di Gauss in un conduttore con cavità carica

$$\oint_S \underbrace{\vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Visto che la carica deve essere 0, compare **per induzione** una carica uguale ed opposta a quella della cavità:

$$Q_{Indotta} = -Q_{Cavità}$$

Però la carica si conserva, quindi compare sempre per induzione una carica  $Q$  sulla superficie esterna:

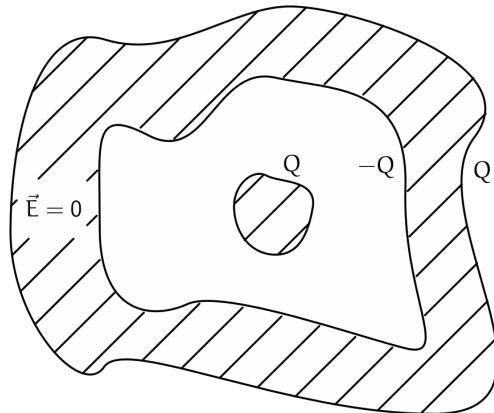


Figura 51: Induzione in un conduttore con cavità carica

Le linee di campo sono:

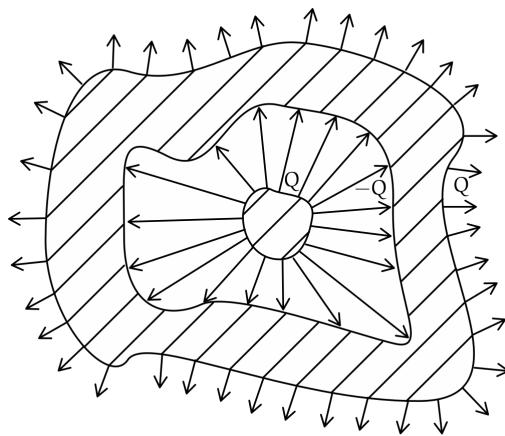


Figura 52: Linee di campo in un conduttore con cavità carica

Se viene aggiunta una carica all'esterno il sistema **nella cavità** non cambia perchè la superficie agisce come uno schermo. All'esterno invece le cariche si sommano.

**Esempio 2.8.** Consideriamo il seguente sistema:

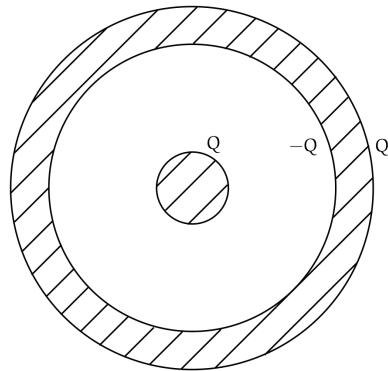


Figura 53: Conduttore con cavità sferica carica

Se si mette al contatto il conduttore interno con il conduttore esterno si ottiene il sistema del conduttore con una cavità perchè i due conduttori agiscono come se fossero uno solo:

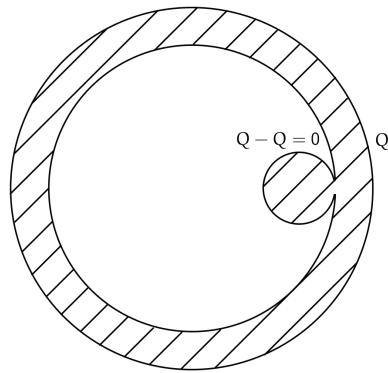


Figura 54: Trasformazione del condensatore in un conduttore con cavità carica

## 2.11 Capacità elettrostatica

Un carica  $\{dq\}$  genera un campo

$$d\vec{E} = \frac{\{dq\}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

e un potenziale

$$dV = \frac{\{dq\}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [V]$$

Osserviamo che c'è una linearità tra la carica e il potenziale, quindi  $V$  è proporzionale a  $Q$  e il coefficiente di proporzionalità è la **capacità**.

### 2.11.1 Conduttore isolato

Consideriamo un qualsiasi conduttore isolato con una carica  $Q$  e un potenziale  $V$  costante.

**Definizione 2.9.** Si definisce **capacità elettrostatica**  $C$  di un conduttore isolato la quantità di carica  $Q$  trasferita al conduttore da un potenziale  $V$

$$C = \frac{Q}{V} \quad [F] \text{ (Farad)}$$

La capacità dipende solo dalla geometria e dal materiale.

### 2.11.2 Conduttore non isolato

Consideriamo due conduttori, uno con carica  $Q$  e uno con carica  $-Q$  in **induzione completa**, cioè tutte le linee di campo del primo oggetto vanno nel secondo oggetto. Per avere ciò bisogna eliminare ogni interazione con l'esterno e l'unica opzione è inserire il primo oggetto nella cavità del secondo.

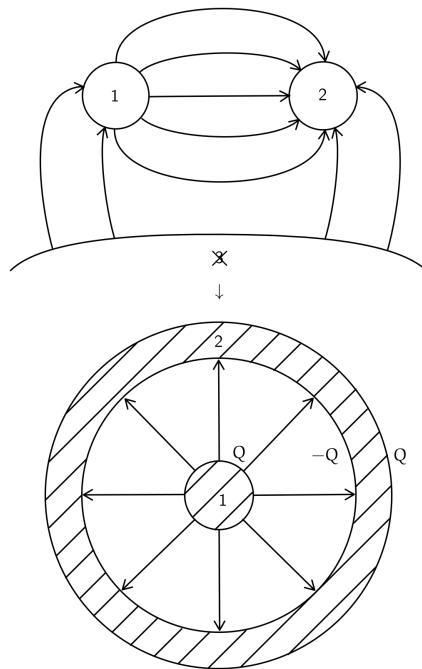


Figura 55: Isolamento di un conduttore

Un **Condensatore** è un sistema di due conduttori in induzione completa. In un condensatore i due conduttori si dicono **armature** o **lastre**.

Nella pratica si distinguono 3 casi (in questo corso):

1. **Condensatore sferico:** Si hanno due sfere, una nella concavità dell'altra

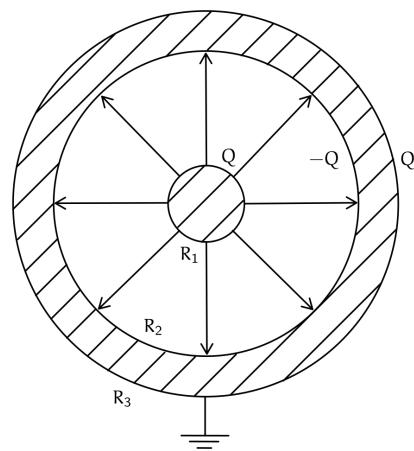


Figura 56: Condensatore sferico

2. **Condensatore cilindrico:** È una struttura tubolare, in cui se il raggio è molto minore della lunghezza del tubo allora si può **approssimare** come un'induzione completa:

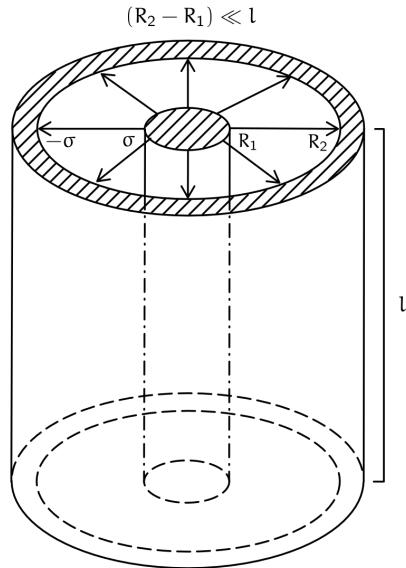


Figura 57: Condensatore cilindrico

3. **Condensatore piano:** È formato da due lastre piane parallele separate da una distanza  $h$  con una certa area  $A$ . Anche in questo caso se le lastre sono molto grandi rispetto alla distanza si può approssimare come un'induzione completa.

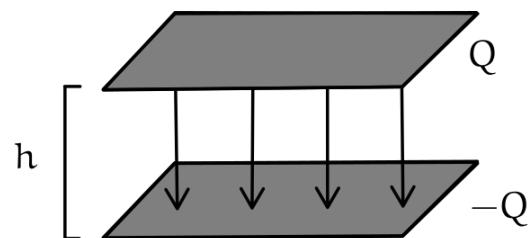


Figura 58: Condensatore piano

### 2.11.3 Capacità nei condensatori

Consideriamo un condensatore:

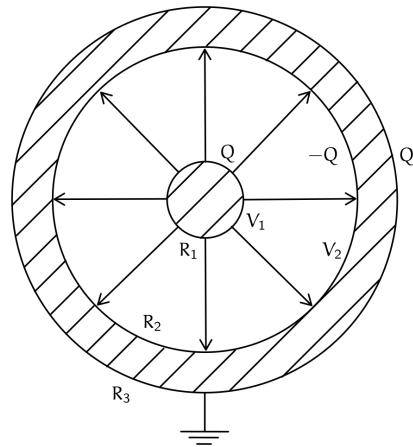


Figura 59: Condensatore sferico

La capacità è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (\text{presa positiva})$$

**Esempio 2.9.** Calcoliamo la capacità del condensatore piano nel vuoto, indicato con il seguente simbolo:

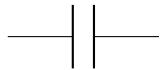


Figura 60: Condensatore piano

Consideriamo un piano con carica positiva e uno con carica negativa e area  $A$ :

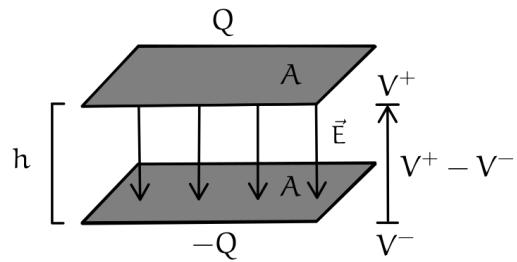


Figura 61: Potenziale di un condensatore piano

Il campo è solo all'interno e vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La capacità è:

$$C = \frac{Q}{V^+ - V^-}$$

Ora bisogna calcolare la differenza di potenziale tra le due lastre ricordando la definizione di potenziale:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

quindi (Il campo è negativo perché la sua direzione è opposta a quella del potenziale):

$$V^+ - V^- = - \int_{-h}^{+h} \left( -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h \quad [V]$$

Di conseguenza la capacità è:

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \frac{\epsilon_0 A}{h} \quad [F]$$

## 2.12 Calcolo del campo potenziale

### 2.12.1 Simmetria sferica

Il campo di una superficie sferica è:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

La definizione di potenziale è:

$$V(r) - V_{\text{Riferimento}} = - \int_{\gamma}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_0}^r \vec{E}(r) dr$$

dove  $V_{\text{Riferimento}} = V(\infty) \rightarrow V(\infty) = 0$ . Il potenziale di riferimento **può** essere preso all'infinito soltanto per sistemi in cui **non** ci sono cariche all'infinito.

Quindi il calcolo del potenziale diventa:

$$V(r) - \underbrace{V_{\text{Riferimento}}}_{=0} = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \left( \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [V]$$

(solo per  $r > R$ ). Il grafico è:

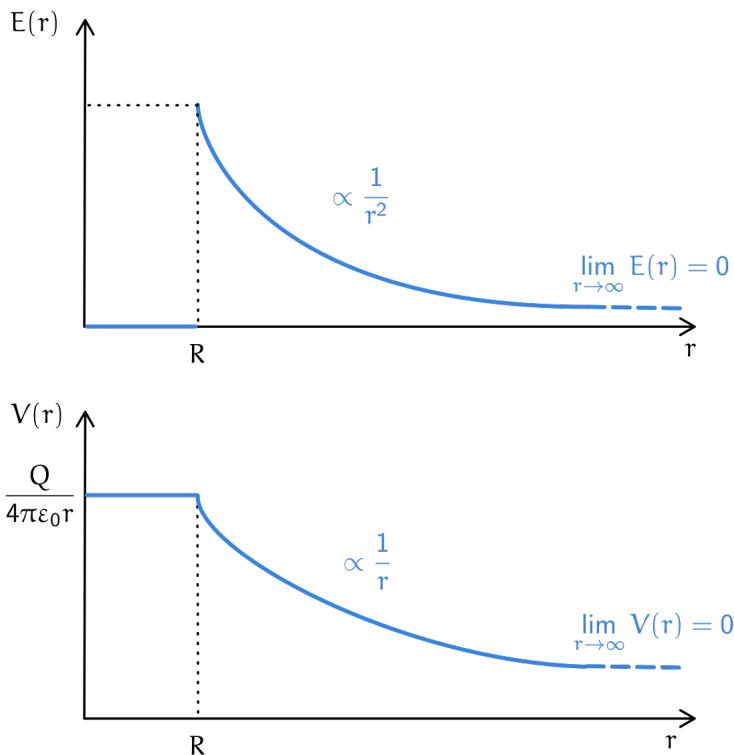


Figura 62: Grafico del potenziale

**Definizione 2.10.** Il potenziale si calcola come:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq R \\ \text{Costante} & r < R \end{cases}$$

Con il potenziale si può calcolare la capacità come:

$$C = \frac{Q}{V_{\text{Sup}}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R \quad [\text{F}]$$

**Esempio 2.10** (Potenziale di un condensatore sferico). Consideriamo un condensatore sferico con carica  $Q$  in cui il raggio del conduttore sferico interno è  $R_1$  e i raggi del conduttore sferico esterno sono  $R_2$  e  $R_3$ . Il campo è:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad R_1 < r < R_2$$

Il campo è nullo nei seguenti casi:

$$\vec{E} = 0 \rightarrow \begin{cases} r < R_1 \\ R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

quindi all'interno del conduttore.

Il potenziale sarà:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [V] \quad \text{Nella cavità}$$

All'interno dei conduttori il potenziale vale:

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

La capacità è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(R_2) - V(R_1)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad [F]$$

**Esempio 2.11** (Potenziale in un filo indefinito). Consideriamo un filo indefinito conduttore con carica  $\lambda$ . Il campo è:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Il potenziale è calcolato come:

$$V(r) - V(r_{\text{rif}}) = - \int_{r_{\text{rif}}}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln(r) - \ln(r_{\text{rif}}))$$

Vogliamo che il punto di riferimento renda nullo il potenziale, quindi:

$$V(r_{\text{rif}}) = 0$$

quindi il punto di riferimento è un punto qualunque

$$r_{\text{rif}} \neq \infty$$

Il grafico del potenziale è:

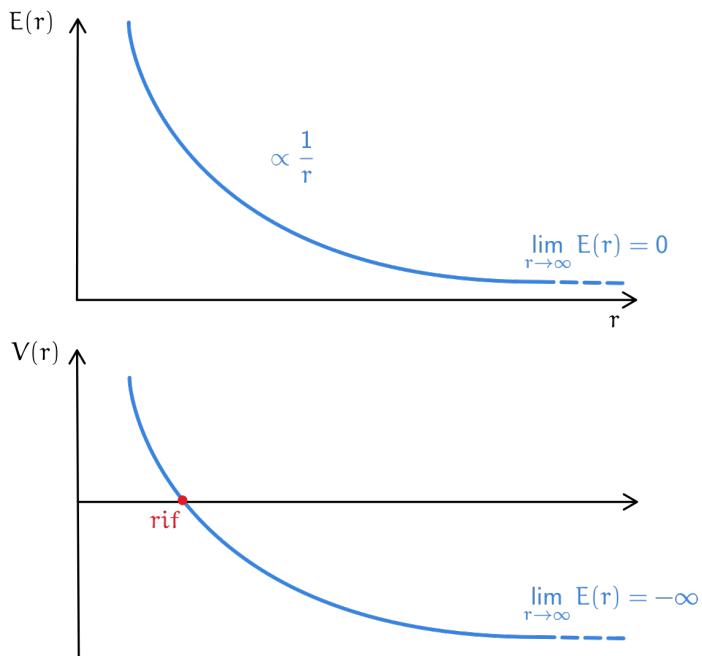


Figura 63: Grafico del potenziale

## 2.13 Elettrostatica nei dielettrici

### 2.13.1 Polarizzazione

I dielettrici hanno cariche vincolate.

1. Consideriamo un atomo neutro, applichiamo un campo e osserviamo che le cariche negative si spostano in direzione del campo:

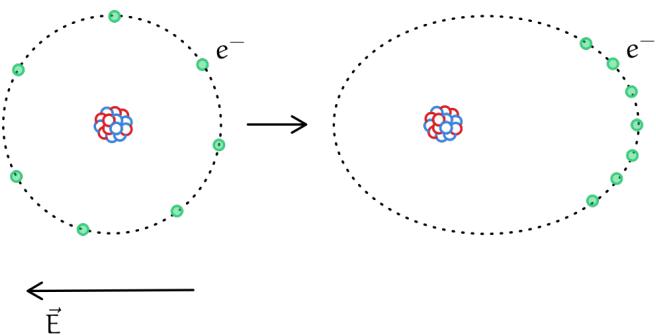


Figura 64: Atomo in un campo

Questo sistema si può modellare nel seguente modo:

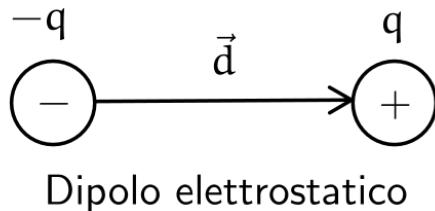


Figura 65: Dipolo elettrico

Due cariche opposte  $q$  e  $-q$  rigidamente separate da una distanza  $\vec{d}$  formano un **dipolo elettrico** (che produce un campo). Questo oggetto è caratterizzato dal **momento di dipolo elettrostatico**:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Quindi il materiale si **polarizza**, cioè si è creata una separazione di carica rigidamente separata.

2. Alcune molecole sono già polarizzate e si chiamano **molecole polari**, ad esempio l'acqua:

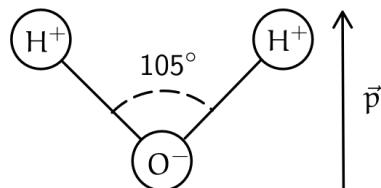


Figura 66: Molecola di acqua

3. Quando si ha un insieme di molecole polarizzate casualmente si ha un materiale globalmente neutro:

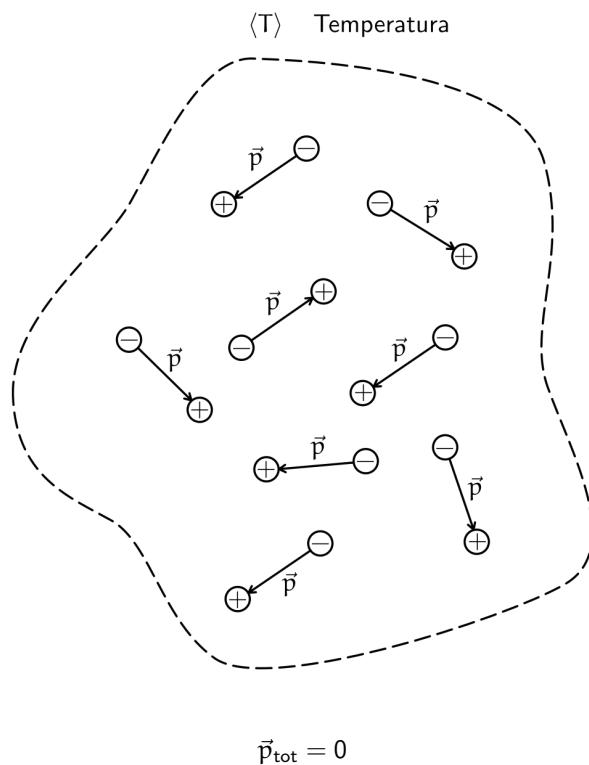


Figura 67: Molecole polarizzate casualmente

Se si applica un campo esterno si ha una polarizzazione del materiale, i momenti di dipolo si allineano per rotazione e il materiale si **polarizza per orientamento**:

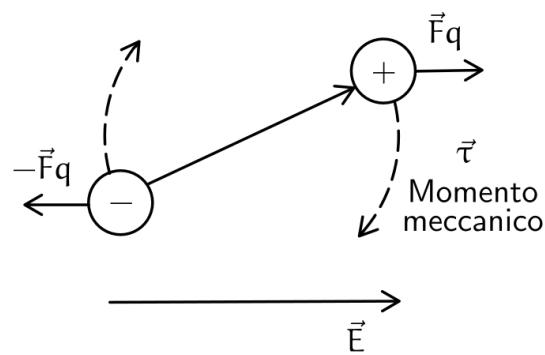


Figura 68: Polarizzazione per orientamento

Si introduce un oggetto chiamato **campo di polarizzazione** che misura la polarizzazione del materiale per unità di volume:

$$\mathbb{P}(r) = \text{Momento di dipolo per unità di volume}$$

**Esercizio 2.1** (Esperimento condensatore con dielettrico). Consideriamo un condensatore piano e carichiamo le lastre (collegandole ad una batteria)

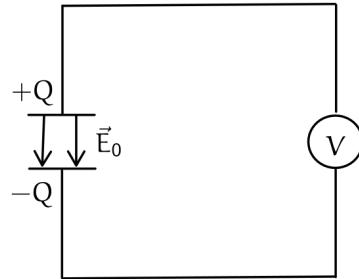


Figura 69: Circuito con un condensatore

Sappiamo che nel vuoto:

- $Q = C_0 V_0$
- $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$
- $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$

Poi stacchiamo il circuito, e quindi il sistema diventa isolato, cioè la carica si conserva  $Q_{\text{tot}} = \text{Costante}$ :

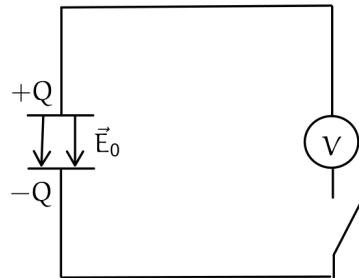


Figura 70: Circuito con un condensatore isolato

Riempiamo il condensatore con materiale dielettrico. Osserviamo che il potenziale nel dielettrico scala di un fattore  $k$  (diminuisce):

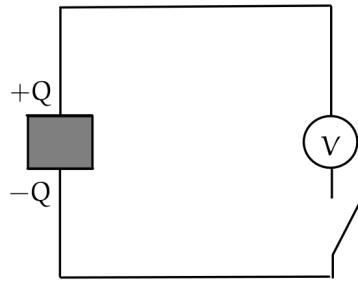


Figura 71: Circuito con un condensatore e dielettrico

$$V_k = \frac{V_0}{k} < V_0$$

Quindi la differenza di potenziale tra le armature diminuisce, quindi la capacità aumenta di  $k$  :

$$C_k = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{V_0}{k}} = kC_0$$

La  $k$  è tipica del materiale dielettrico e si chiama **costante dielettrica**. (Il vuoto è un dielettrico con  $k_{vuoto} = 1$ ).

Se il potenziale diminuisce, il campo diminuisce:

$$V_k < V_0 \Rightarrow E_k = \frac{E_0}{k} < E_0$$

Quindi si è formato un campo opposto indotto  $E_{Indotto}$  che si somma al campo  $E_0$  e quindi il campo totale è:

$$E_k = E_0 + E_{Indotto}$$

All'interno del dielettrico si è formata una carica di polarizzazione opposta:

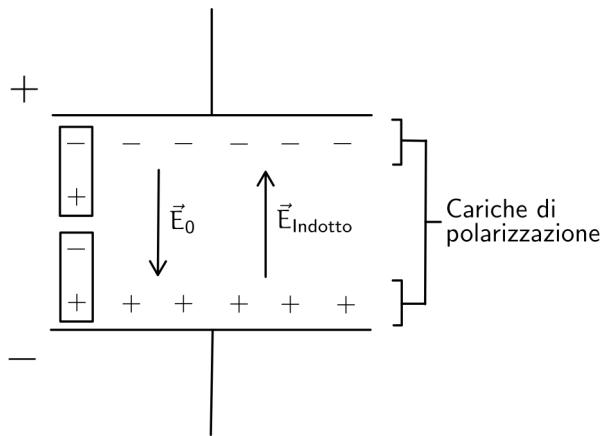


Figura 72: Cariche di polarizzazione

### 2.13.2 Equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici

Consideriamo un condensatore piano:

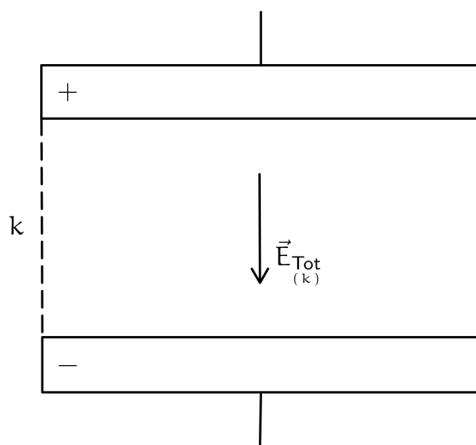


Figura 73: Condensatore piano con dielettrico

Con il teorema di Gauss prendiamo un cilindro di Gauss che ha una base nell'armatura e una nel dielettrico:

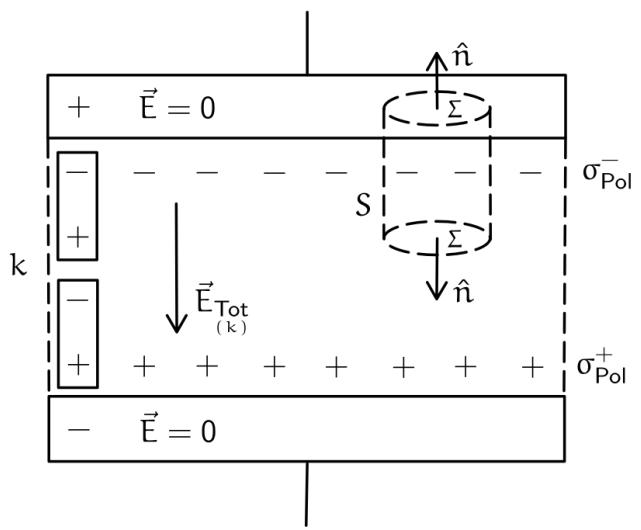


Figura 74: Superficie di Gauss in un condensatore piano con dielettrico

Applichiamo Gauss all'interno del cilindro calcolando il flusso:

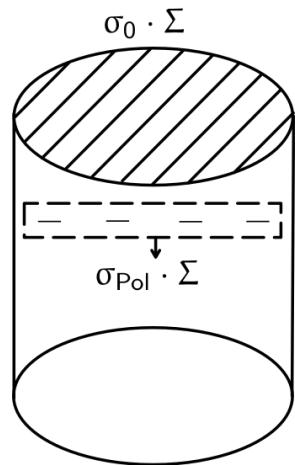


Figura 75: Flusso del campo elettrico in un condensatore piano con dielettrico

$$\begin{aligned}
\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \vec{E}_{\text{Conduttore}} \Sigma + \vec{E}_{\text{Dielettrico}} \Sigma \\
&= 0 + E_{\text{Dielettrico}} \Sigma \\
&= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\
&= \frac{\sigma_0 \Sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{pol}} \Sigma}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Quindi il campo totale è:

$$E_k = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}$$

Di conseguenza un dipolo induce una carica opposta di polarizzazione:

$$|\sigma_{\text{Pol}}| = |\sigma_0| \frac{k-1}{k}$$

Consideriamo un volume unitario  $\text{Vol}_1$  con superfici unitarie  $\Sigma_1$ . Il numero di dipoli all'interno del volume per il momento del dipolo è la polarizzazione  $\mathbb{P}$ :

$$\frac{\#\text{atomi}}{\text{Vol}} \cdot \underbrace{\vec{p}}_{q \vec{d}} = \mathbb{P}$$

Quindi abbiamo che le cariche di polarizzazione sono equivalenti alla polarizzazione:

$$|\sigma_{\text{Pol}}| = \mathbb{P}$$

In termini generali:

$$\sigma_{\text{Pol}} = \mathbb{P} \cdot \hat{n}$$

Le cariche di polarizzazione si formano sulle superfici del dielettrico.

### 2.13.3 Teorema di Gauss nei dielettrici

Prendiamo in considerazione un condensatore piano riempito con un dielettrico, abbiamo che il flusso del campo elettrico è:

$$\oint_S \vec{E} = \underbrace{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Sigma}_Q - \underbrace{\frac{\sigma_{\text{Pol}}}{\epsilon_0} \Sigma}_{\text{Flusso di } \vec{P}}$$

Quindi abbiamo il teorema di Gauss:

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} - \vec{P}) \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{Libere}}$$

Il campo  $(\epsilon_0 \vec{E} - \vec{P})$  si chiama **spostamento dielettrico** o **induzione**  $\vec{D}$ .

- Nel vuoto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{Tot}}}{\epsilon_0}$$

dove le cariche totali sono:

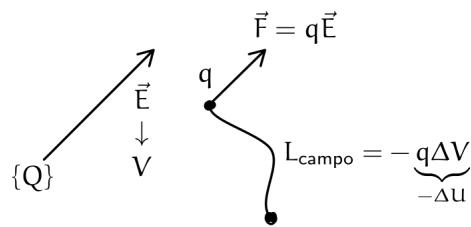
$$Q_{\text{Tot}} = Q_{\text{Libere}} + Q_{\text{Polarizzazione}}$$

- Nel dielettrico:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{Libere}}$$

## 2.14 Energia elettrostatica

Se un campo agisce su una carica essa sentirà una forza, quindi si può calcolare un'energia



$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{Costante}$$

Figura 76: Energia elettrostatica

**Definizione 2.11.** L'energia di un sistema è il lavoro esterno per costruire il sistema

- In un sistema discreto ci saranno N cariche discrete  $q_i$
- In un sistema continuo ci sarà una carica continua  $\rho$

### 2.14.1 Energia di N cariche discrete

Si calcola il lavoro esterno per portare la prima carica  $q_1$  dall'infinito

$$L_1 = 0$$

Il lavoro è nullo perché è la prima carica.

La seconda carica  $q_2$  trova un campo, quindi il suo lavoro è

$$L_2 = q_2 \Delta V_1$$

Il potenziale è quello del campo della prima carica. Sappiamo che  $V_\infty = 0$ , quindi:

$$L_2 = q_2 \Delta V_1 = q_2 V_1(r_2) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Per l'n-esima carica  $q_n$  il lavoro è:

$$L_n = q_n V_1(r_n) + q_n V_2(r_n) + \dots + q_n V_{n-1}(r_n)$$

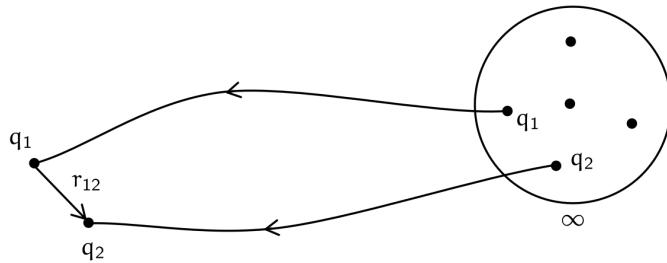


Figura 77: Energia di un sistema discreto

L'energia del sistema è quindi:

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r \pi \epsilon_0 r_{ij}} \quad [J] \end{aligned}$$

#### 2.14.2 Energia in un sistema continuo

Il procedimento è lo stesso del sistema discreto, solo che le sommatorie diventeranno integrali e le cariche diventeranno densità di carica:

$$\sum \rightarrow \int q_i \rightarrow \rho d\tau = dq$$

Quindi:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_{vol} \int_{vol} \frac{\rho(r_1) \rho(r_2) d\tau_1 d\tau_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} \quad [J]$$

#### 2.14.3 Energia con N conduttori

Applichiamo la formula dell'energia in un sistema continuo

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{sup} \sigma V_0 dS \\ &= \frac{1}{2} V_0 \underbrace{\int_{sup} \sigma dS}_{Q_0} \\ &= \frac{1}{2} V_0 Q_0 \quad [J] \end{aligned}$$

Quindi l'energia di un conduttore è:

$$\begin{aligned} U_{\text{cond}} &= \frac{1}{2} QV \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2} CV^2 \end{aligned}$$

Se consideriamo N conduttori l'energia è la somma delle energie dei singoli conduttori:

$$U_{\text{Tot}} = \sum_{i=1}^N U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

Un condensatore è semplicemente un sistema di due conduttori in induzione completa, quindi

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) \\ &= \frac{1}{2} Q \Delta V \\ &= \frac{1}{2} C \Delta V^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$

#### 2.14.4 Processo di carica del condensatore

Un condensatore diventa tale solo dopo che viene caricato, quindi all'inizio è semplicemente un'insieme di conduttori:

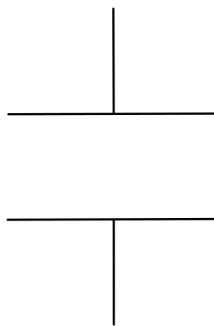


Figura 78: Condensatore non carico

Per caricare il condensatore si prende una carica positiva  $q^+$  e si sposta da un armatura all'altra:

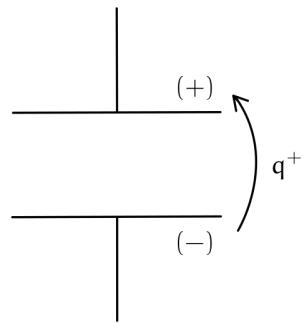


Figura 79: Condensatore carico

Una volta spostata la prima carica (che non compie lavoro) si crea un potenziale dovuto alla carica  $q^+$  e lo spostamento delle altre quantità di carica  $dq$  compie lavoro:

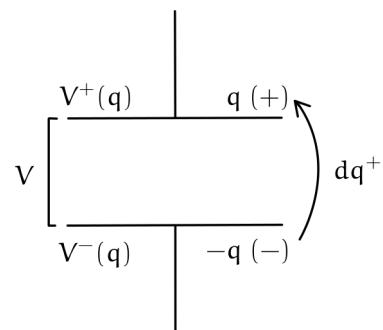


Figura 80: Potenziale di un condensatore piano

Il lavoro è:

$$dL = V(q)dq$$

Si continua con questo procedimento finché non si arriva alla carica desiderata  $Q_{\text{Finale}}$ :

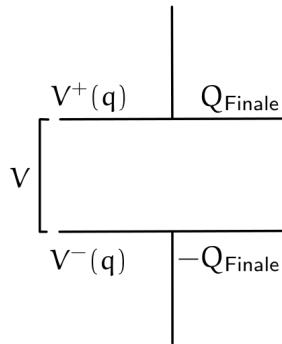


Figura 81: Condensatore completamente carico

Il lavoro totale sarà:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{esterno}} &= \int_{\text{Inizio}}^{\text{Fine}} dL \\
 &= \int_0^{Q_{\text{Finale}}} V(q) dq \\
 &= \int_0^{Q_{\text{Finale}}} \frac{q}{C} dq \\
 &= \frac{q^2}{2C} \Big|_0^{Q_{\text{Finale}}} \\
 &= \frac{Q_{\text{Finale}}^2}{2C} \\
 &= U_{\text{Sistema}}
 \end{aligned}$$

Quindi l'energia del sistema è il lavoro esterno per costruirlo:

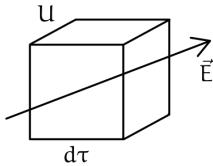
$$U_{\text{Sistema}} = L_{\text{esterno}}$$

**Definizione utile 2.4.** L'energia è il lavoro per costruire qualcosa, in questo caso il condensatore.

#### 2.14.5 Densità di energia

L'energia  $U_{\text{el}}$  è **localizzata nel campo**  $\vec{E}$  con densità:

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$



$$u = \frac{U}{\text{vol}}$$

Figura 82: Densità di energia

**Esempio 2.12.** Consideriamo un conduttore sferico con una carica  $Q$ . Il campo è:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

La densità di energia della sfera carica è:

$$u_E = \begin{cases} \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$

E l'energia del sistema è:

$$U = \frac{1}{2} Q V_{\text{Cond}} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad [J]$$

Questa è anche l'energia del campo in tutto lo spazio dove c'è campo  $E \neq 0$ :

$$\begin{aligned} U &= \int_{\text{Ovunque}} u_E d\tau \\ &= \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad [J] \end{aligned}$$

**Esercizio 2.2.** Calcolare l'energia di un conduttore sferico cavo:

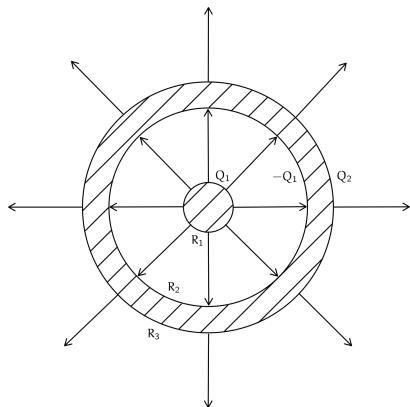


Figura 83: Conduttore sferico cavo

L'energia sarà la somma dei seguenti sistemi

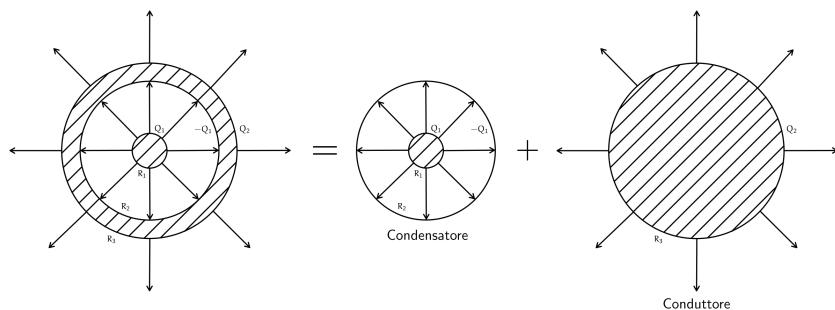


Figura 84: Somma dei sistemi isolati

Quindi:

$$C_{\text{Condens. Sfer.}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C_{\text{Condutt. Sfer.}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$U = \frac{Q_1^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{2C} = \frac{Q_1^2(R_2 - R_1)}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2} + \frac{Q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad [\text{J}]$$

Se aggiungiamo del dielettrico all'esterno la capacità aumenta, quindi l'energia diminuisce perché si esegue del lavoro di polarizzazione:

$$U_k = \frac{Q^2}{2C} = \frac{U_0}{k}$$

### 3 Elettrodinamica

Nell'elettrodinamica viene introdotto il **tempo** quindi molte considerazioni fatte per l'elettrostatica non sono più valide.

Ricordiamo le equazioni di Maxwell nel caso **stazionario**:

- Le cariche isolate sono sorgenti del campo elettrico  $\vec{E}$

$$\oint_{\text{Sup}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{Tot}}}{\epsilon_0}$$

In termini locali:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Il campo  $\vec{E}$  è conservativo

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

cioè in un circuito chiuso  $\Gamma$  il lavoro è nullo. In termini locali:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Ora introduciamo il **tempo** e notiamo che:

- La prima equazione vale sempre, perché anche nel tempo le cariche sono sorgenti.
- Per la seconda invece non si può dire la stessa cosa, perché per avere delle cariche in movimento su un circuito chiuso il lavoro non può essere nullo, quindi:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

di conseguenza questa equazione di Maxwell andrà modificata.

### 3.1 Corrente elettrica

#### 3.1.1 Forza elettromotrice

Consideriamo un conduttore ad un certo potenziale  $V^+$  e un secondo conduttore con un potenziale  $V^-$  **minore del primo** (il meno non indica che è negativo, ma che è minore):

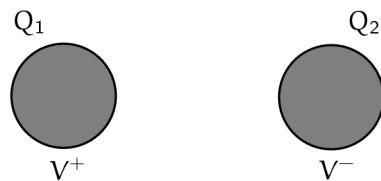


Figura 85: Conduttori con un potenziale

Se i due conduttori vengono collegati da un filo conduttore si avrà un potenziale costante:

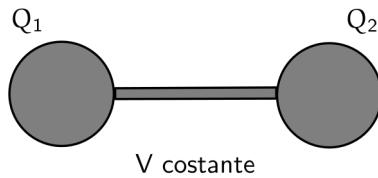


Figura 86: Conduttori collegati a potenziale costante

Ma cosa succede prima che il conduttore raggiunga l'equilibrio?

Si forma un campo dal potenziale  $V^+$  al potenziale  $V^-$  e quindi si avrà un moto di cariche:

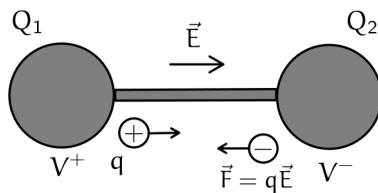


Figura 87: Stabilizzazione del potenziale

Lo spostamento delle cariche azzera il potenziale secondo il seguente grafico:

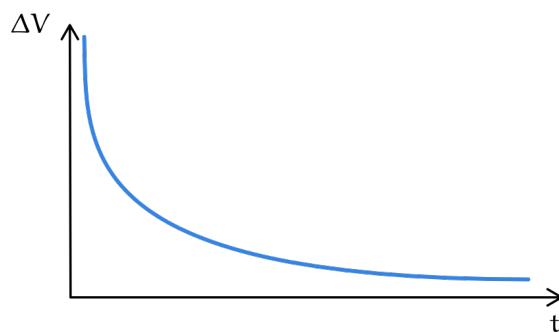


Figura 88: Grafico di stabilizzazione del potenziale

Per mantenere le cariche  $q$  in moto, ad esempio in un circuito, bisogna avere un **lavoro esterno** che va contro il campo elettrico e che riporta le cariche da  $V^-$  a  $V^+$ . Questo lavoro esterno è fornito da un generatore e si chiama **forza elettromotrice**  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \int_{A^-}^{B^+} \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = V_B^+ - V_A^- \quad [V]$$

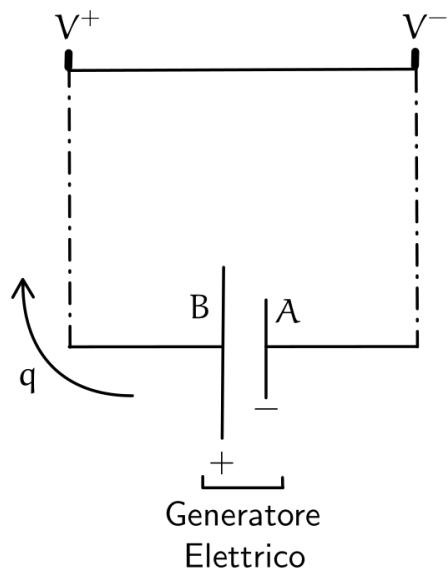
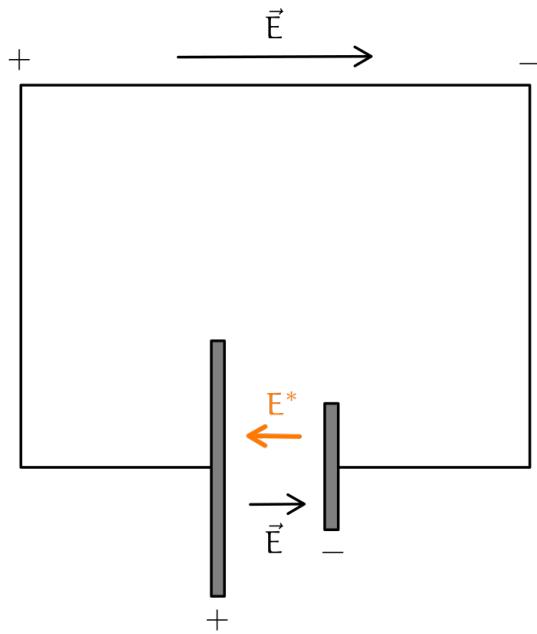


Figura 89: Forza elettromotrice

La forza elettromotrice è nota anche come FEM (Forza ElettroMotrice), tensione o differenza di potenziale.

Se espandiamo il circuito osserviamo che:



$$E^* = \frac{F^*}{q}$$

Figura 90: Forza elettromotrice nel dettaglio

La forza elettromotrice può essere espressa anche come:

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

E la prima equazione di Maxwell diventa:

**Definizione 3.1** (Prima equazione di Maxwell per il campo elettrico nel tempo).

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad [V]$$

### 3.1.2 Intensità di corrente

La corrente elettrica è un insieme di cariche in moto. L'intensità di corrente  $i$  è definita come la quantità di carica che **attraversa una data superficie** per unità di tempo:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad [A] \text{ (Ampere)}$$

Il verso della corrente è convenzionalmente quello del moto delle cariche positive.

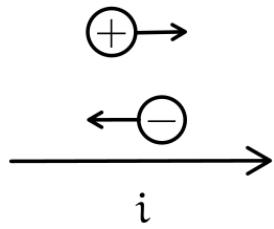


Figura 91: Intensità di corrente

### 3.1.3 Densità di corrente

**Esempio 3.1.** La superficie del conduttore influisce sulla corrente di carica:

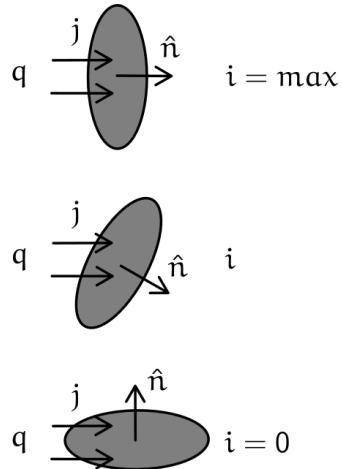


Figura 92: Densità di corrente

La densità di corrente  $\vec{j}$  è definita come la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria **ortogonale alla direzione** delle cariche in moto. L'unità di misura è  $[\frac{A}{m^2}]$ . Quindi la corrente  $i$  è il flusso di densità di corrente  $\vec{j}$ :

$$i = \int_{\text{Sup}} \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

Al livello microscopico la quantità di carica  $q_e$  è quella che passa attraverso una superficie unitaria  $dS$  con una certa velocità  $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$  in un unità di tempo:

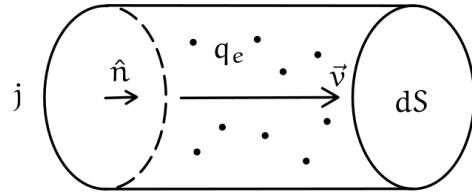


Figura 93: Densità di corrente al livello microscopico

$$\vec{j} = N q_e \vec{v}_{\text{Deriva}}$$

Mentre invece la corrente  $i$  è la carica nell'unità di tempo sulla superficie:

$$i = N q_e \vec{v}_{\text{Deriva}} \cdot \hat{n} dS$$

È detta corrente stazionaria (o **corrente continua**) una corrente con intensità costante:

$$i = \text{costante}$$

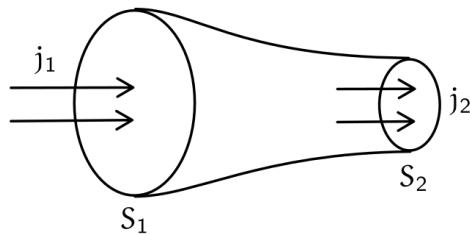


Figura 94: Corrente stazionaria

Quindi se si ha la stessa intensità ma sezioni di dimensione diversa, sarà la densità di corrente a cambiare:

$$i_1 = i_2$$

$$j_1 \neq j_2$$

$$j_1 S_1 = j_2 S_2$$

### 3.2 Legge di Ohm

Consideriamo un circuito con un generatore e un interruttore aperto concentrandoci sul cavo conduttore:

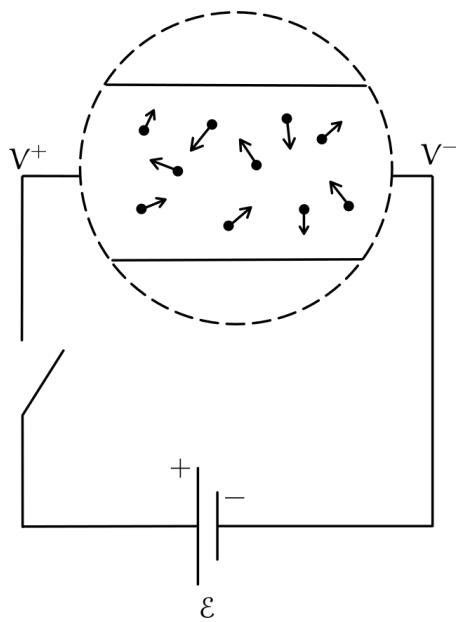


Figura 95: Circuito elementare

Ogni oggetto materiale ha una certa temperatura, quindi all'interno del conduttore le cariche elementari sono in moto casuale con una certa velocità, di cui la media è nulla:

$$\langle \vec{v}_{\text{Termica}} \rangle = 0$$

Questo moto è chiamato **agitazione termica**. Invece la velocità quadratica media non è nulla e rappresenta la **temperatura**:

$$\langle v^2 \rangle \neq 0$$

all'aumentare della temperatura aumenta l'agitazione termica.

Se chiudiamo l'interruttore si osserva una corrente  $i$  che corrisponde al moto **ordinato** delle cariche nella direzione da  $V^+$  a  $V^-$ . La velocità di questo moto si chiama **velocità di deriva** e non è nulla:

$$\langle v_{\text{deriva}} \rangle \neq 0 \quad \text{Moto ordinato di cariche}$$

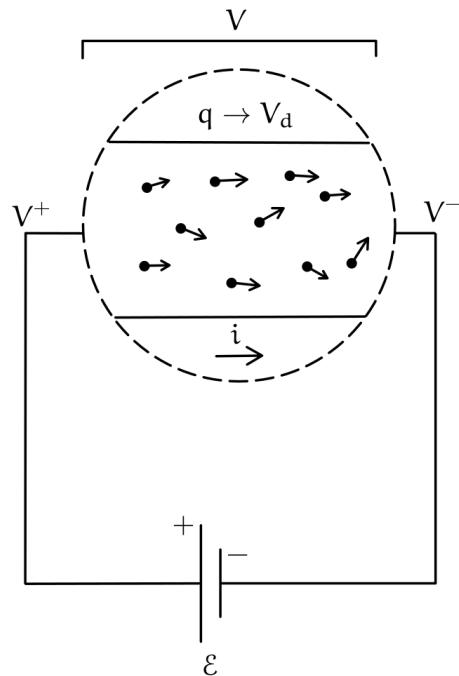


Figura 96: Circuito conduttore con velocità di deriva

Se si aumenta la temperatura a parità di differenza di potenziale si avrà minore velocità di deriva, quindi minore corrente. Questo fenomeno è dovuto al fatto che l'agitazione termica aumenta la **resistenza elettrica** del conduttore, cioè le cariche urtano più spesso gli atomi del conduttore e quindi si ha una minore velocità di deriva. Il simbolo della resistenza è il seguente:



Figura 97: Simbolo della resistenza

Si osserva quindi che l'intensità di corrente  $i$  è lineare alla differenza di potenziale  $V$ :

$$V = Ri$$

dove  $R$  è la resistenza elettrica, cioè un coefficiente che dipende dal materiale, dalla temperatura e dalla geometria, misurato in Ohm [ $\Omega$ ]:

$$R = \frac{l}{s} \cdot \rho$$

dove:

$l$  = lunghezza del conduttore

$s$  = sezione del conduttore

$\rho$  = resistività del materiale [ $\Omega m$ ]

Consideriamo un conduttore elementare di sezione infinitesima  $dS$  e di lunghezza  $dl$  con una tensione  $dV$ :

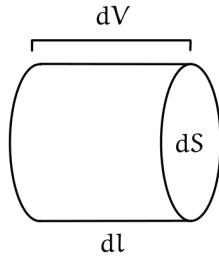


Figura 98: Conduttore elementare

Osserviamo che:

$$dV = R \cdot di$$

E sappiamo che:

$$dV = E \cdot dl$$

$$di = j \cdot dS R = \frac{dl}{dS} \cdot \rho$$

Sostituiamo e si ottiene:

$$\begin{aligned} E \cdot dl &= \rho \frac{dl}{dS} \cdot j \cdot dS \\ \vec{E} &= \rho \vec{j} \end{aligned}$$

**Definizione 3.2** (Legge di Ohm). Il campo elettrico genera una densità di corrente  $\vec{j}$  locale e il coefficiente di proporzionalità è la **resistività**  $\rho$  del materiale:

$$\vec{E} = \rho \vec{j}$$

quindi:

$$\vec{j} = \vec{E} \cdot \sigma$$

dove  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  e si chiama **conducibilità elettrica**.

Dalla legge di Ohm si ricava che da una forza si ottiene una velocità e non una accelerazione, e questo è dovuto agli urti delle cariche con gli atomi del conduttore. Quindi:

$$\Delta p = F \Delta t$$

### 3.3 Potenza elettrica

Consideriamo una resistenza con una differenza di potenziale  $V$  ai capi:

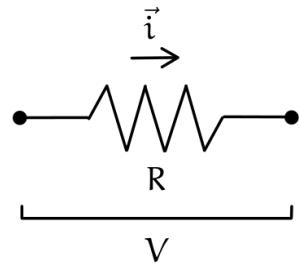


Figura 99: Resistenza con differenza di potenziale

Sappiamo che il lavoro elettrico è dato da:

$$dL = Vdq$$

che è il lavoro esterno che compie il generatore per mantenere la corrente. La potenza  $P$  è definita come il lavoro per unità di tempo, quindi la potenza elettrica è:

$$P_{\text{Elettrica}} = \frac{dL}{dt} = \frac{Vdq}{dt} = Vi$$

Nel caso di una resistenza si parla di **potenza dissipata** ( $V = Ri$ ):

$$P_{\text{Dissipata}} = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad [W]$$

Se invece consideriamo un generatore si parlerà di **potenza erogata** ( $V = \mathcal{E}$ ), cioè:

$$P_{\text{Erogata}} = \mathcal{E}i$$

Si osserva da un circuito elementare che la potenza erogata è uguale alla potenza dissipata:

$$\mathcal{E}i = r_{\text{int}}i^2 + Ri^2$$

### 3.4 Reti lineari (o circuiti elementari)

Una rete lineare è composta nel seguente modo:

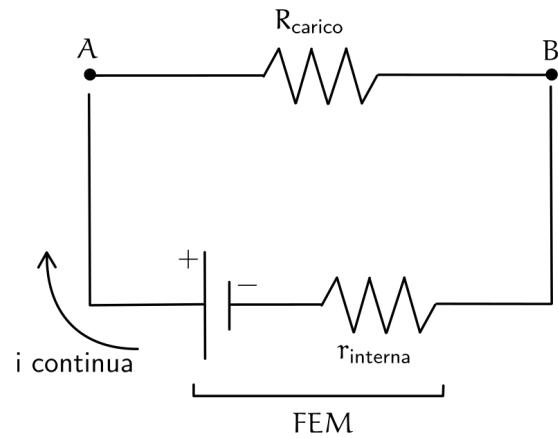


Figura 100: Rete lineare

Il **bilancio energetico** (o legge di Ohm generalizzata) è:

$$\mathcal{E} = \sum V_i = \underbrace{V_R}_{Ri} + \underbrace{V_r}_{ri}$$

Quindi la corrente è la stessa in tutti i punti della rete, cioè la corrente è continua.  
Il grafico della tensione facendo la circuitazione della rete, partendo dalla lastra positiva del generatore fino alla lastra negativa è la seguente:

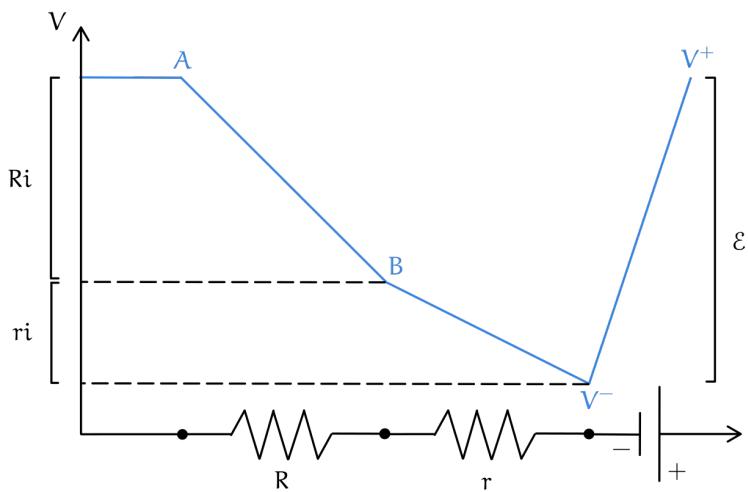


Figura 101: Grafico della tensione

L'intensità di corrente  $i$  è facilmente calcolabile utilizzando la legge di Ohm generalizzata:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad [A]$$

La differenza di potenziale tra i due capi A e B è data anch'essa dalla legge di Ohm:

$$V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - ri < \mathcal{E} \quad [V]$$

E questo indica che la tensione  $V_A - V_B$  è minore della tensione del generatore. Un altro modo per scrivere l'equazione è sostituire  $i$ :

$$V_A - V_B = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R}}$$

A **circuito aperto** si ha che  $R \rightarrow \infty$ , allora  $V_{AB} = \mathcal{E}$  e  $i = 0$ .

**Definizione utile 3.1.** Ricordiamo che  $V = \frac{U}{q}$ , quindi il bilancio energetico per unità di carica in  $V$  è:

$$V : \underbrace{\mathcal{E} = Ri + ri}_{q=1} \quad [V]$$

Per una quantità di carica generica  $dq = idt$  si avrà quindi un bilancio in  $U$ :

$$U : \mathcal{E}idt = Ri^2 dt + ri^2 dt \quad [J]$$

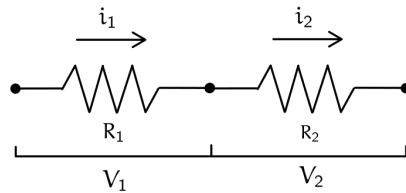
Ricordando che la potenza è  $P = \frac{dU}{dt}$  il bilancio energetico in  $P$  è:

$$P : \mathcal{E}i = Ri^2 + ri^2 \quad [W]$$

### 3.4.1 Collegamento di resistori

I collegamenti si dividono in due tipi:

- **Serie:** I collegamenti in serie portano la stessa corrente:



$$i_1 = i_2$$

Figura 102: Collegamento in serie

Si vuole rappresentare una serie di resistori come un unico resistore equivalente  $R_{eq}$ :

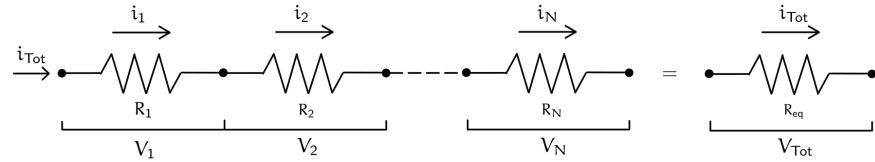


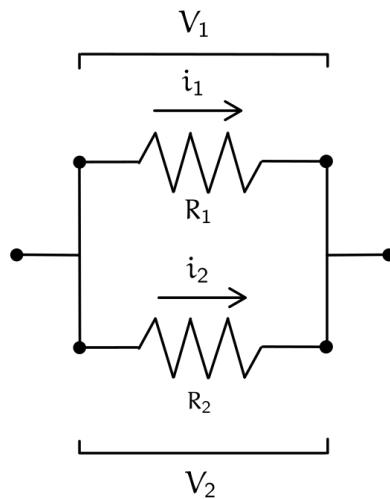
Figura 103: Resistore equivalente in serie

$$V_{Tot} = R_{eq} i_{Tot} = \sum V_i = \sum (R_i \underbrace{i_i}_{i_{Tot}}) = i \sum R_i$$

Quindi la resistenza equivalente della serie è:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i \quad [\Omega]$$

- **Parallelo:** I collegamenti in parallelo portano la stessa tensione:



$$V_1 = V_2$$

Figura 104: Collegamento in parallelo

Si vuole rappresentare un insieme di resistori in parallelo come un unico resistore equivalente  $R_{eq}$ :

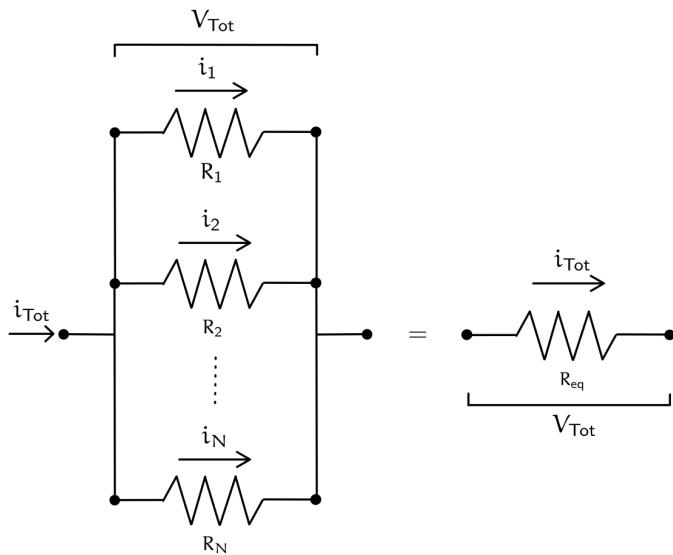


Figura 105: Resistore equivalente in parallelo

$$i_{\text{Tot}} = \sum_k i_k = \sum_k \frac{V}{R_k} = V \sum_k \frac{1}{R_k} = \frac{V_{\text{Tot}}}{R_{\text{eq}}}$$

Quindi la resistenza equivalente del parallelo è:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad [\Omega]$$

### 3.4.2 Partitore resistivo

- **Partitore in tensione:**

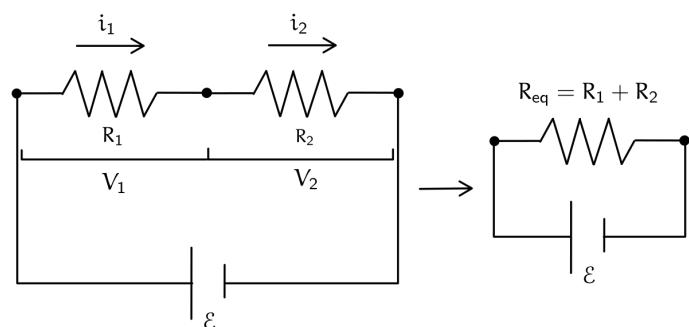


Figura 106: Partitore in tensione

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$i = i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} \quad [A]$$

Ai capi di  $R_1$  è ripartita **linearmente** una tensione  $V_1$  che è proporzionale alla resistenza  $R_1$ .

$$V_1 = R_1 i_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mathcal{E}$$

Lo stesso vale per la resistenza  $R_2$ :

$$V_2 = R_2 i_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E}$$

- **Partitore in corrente:**

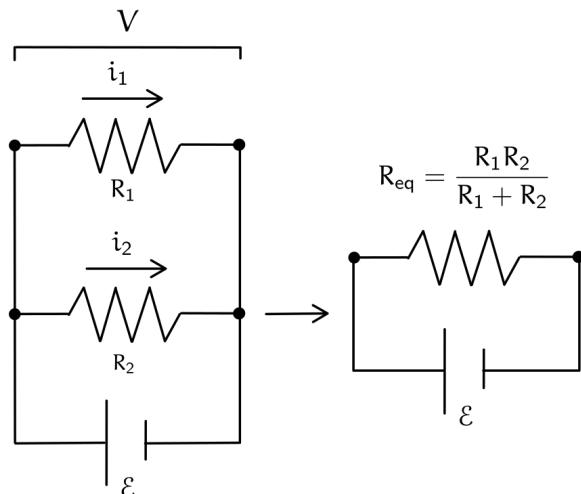


Figura 107: Partitore in corrente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V = V_1 = V_2$$

La corrente è ripartita **linearmente** tra le due resistenze  $R_1$  e  $R_2$ :

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Per quanto riguarda le potenze dissipate sappiamo che la potenza è locale, quindi per calcolare la potenza totale si possono sommare le potenze locali:

$$P_{\text{Tot}} = \sum P_k$$

- Per la serie:

$$P_{\text{Tot}} = P_1 + P_2 = R_1 i^2 + R_2 i^2 = (R_1 + R_2) i^2 = R_{\text{eq}} i^2$$

Quindi:

$$P_1 = R_1 i^2$$

oppure anche:

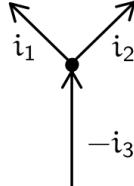
$$P_{\text{Tot}} = R_{\text{eq}} i_{\text{Tot}}^2$$

- Per il parallelo (ricordiamo che  $i = \frac{V}{R}$ ):

$$P_{\text{Tot}} = P_1 + P_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = \frac{V^2}{R_1} + \frac{V^2}{R_2} = V^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

### 3.4.3 Leggi di Kirchhoff

- **Conservazione della carica:** La somma delle correnti che entrano in un nodo è zero:



$$\sum i_k = 0$$

Figura 108: Conservazione della carica

- **Conservazione dell'energia:** (Una maglia è un circuito chiuso con un verso). La somma degli elementi attivi è uguale alla somma degli elementi passivi:

$$\underbrace{\sum \mathcal{E}_k}_{\text{Generatori "attivi"}} = \underbrace{\sum R_k i_k}_{\text{Resistori "passivi"}}$$

I segni vengono presi in base al verso della maglia:

- **Corrente:**

- \* Se la corrente è nello stesso verso della maglia, allora è positiva

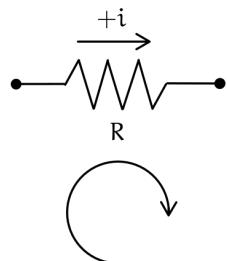


Figura 109: Verso della corrente nella maglia

- \* Se la corrente è nel verso opposto alla maglia, allora è negativa

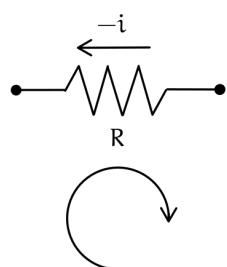


Figura 110: Verso della corrente nella maglia

**- Generatore:**

- \* Se il generatore è nel verso della maglia, allora è positivo

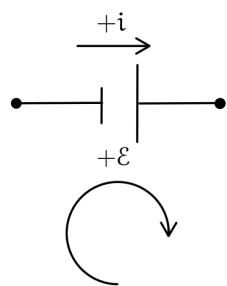


Figura 111: Verso del generatore nella maglia

- \* Se il generatore è nel verso opposto alla maglia, allora è negativo

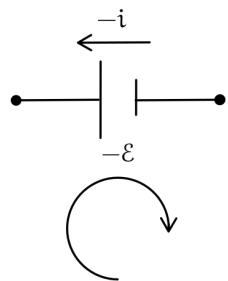


Figura 112: Verso del generatore nella maglia

**Esempio 3.2.** Consideriamo il circuito seguente:

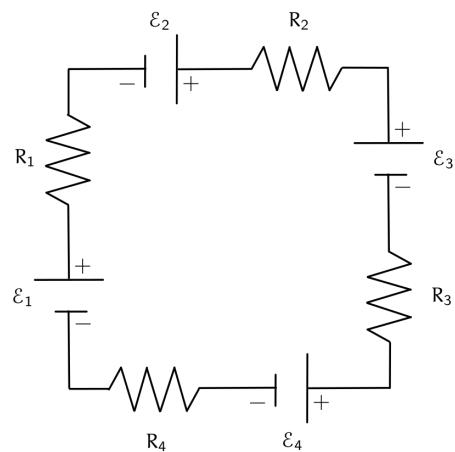


Figura 113: Circuito esempio

1. Trovare il verso della maglia

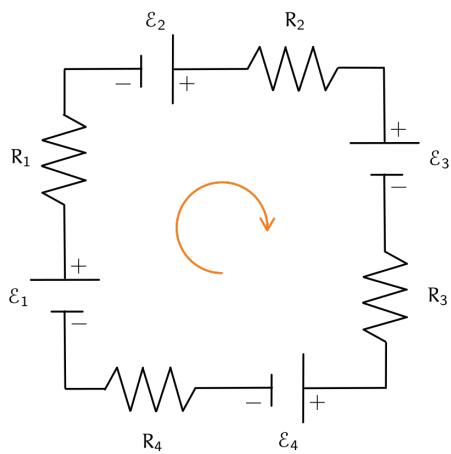
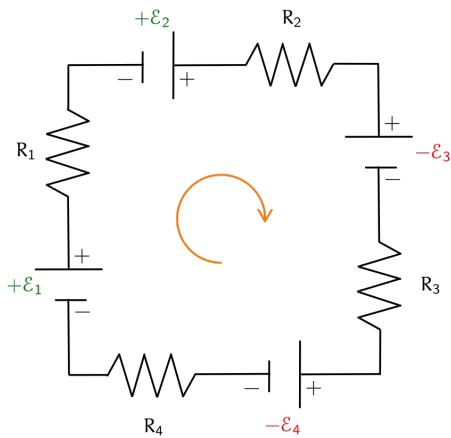


Figura 114: Verso della maglia

2. Trovare il verso della corrente

3. Trovare i segni delle FEM



$$(+\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4)$$

Figura 115: Segni delle FEM

4. Trovare i segni degli elementi passivi

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_4$$

Il risultato finale è quindi:

$$(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4) = (R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_4)$$

### 3.5 Reti non lineari (o circuiti RC)

#### 3.5.1 Collegamento di condensatori

- **Condensatori in serie:** Avranno la stessa carica  $Q$ . Una serie di condensatori si comportano come un unico condensatore equivalente:

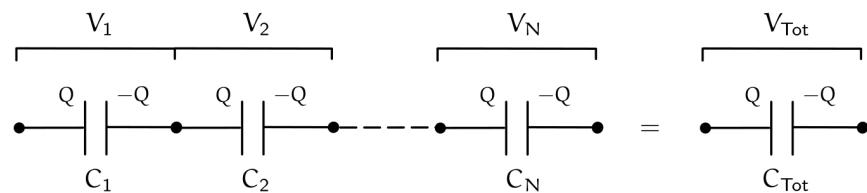


Figura 116: Condensatori in serie

Ricordando la definizione di capacità  $C = \frac{Q}{\Delta V}$  che nei circuiti scriviamo come  $C = \frac{Q}{V} \rightarrow V = \frac{Q}{C}$ . Il potenziale totale è:

$$V_{\text{Tot}} = \sum V_i = \sum \frac{Q_i}{C_i}$$

Siccome la carica è la stessa, la tensione totale diventa:

$$V_{\text{Tot}} = Q \sum \frac{1}{C_i}$$

Quindi la capacità totale sarà:

$$C_{\text{Tot}} = \left( \sum \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

Si nota che la capacità di condensatori in serie **diminuisce**.

- **Condensatori in parallelo:** I condensatori in parallelo hanno lo stesso potenziale  $V$ :

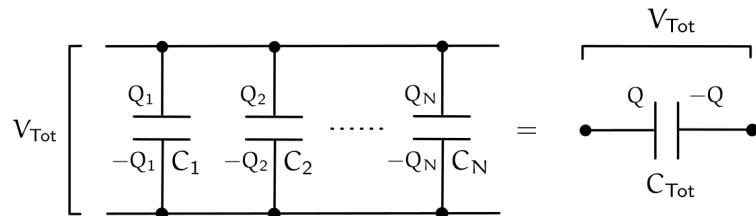


Figura 117: Condensatori in parallelo

Anche i condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore equivalente. La carica totale sarà la somma di tutte le cariche:

$$Q_{\text{Tot}} = \sum Q_i = \sum C_i V_i$$

Siccome il potenziale è lo stesso, la carica totale diventa:

$$Q_{\text{Tot}} = V \sum C_i$$

Quindi la capacità totale sarà:

$$C_{\text{Tot}} = \sum C_i$$

Si nota che la capacità di condensatori in parallelo **aumenta**.

### 3.5.2 Partitore capacitivo

Sfrutta il collegamento in serie. Consideriamo la stessa carica  $Q$ , cioè  $C_i V_i$  è costante. La tensione è ripartita **inversamente proporzionale** alla capacità:

$$V_i = \frac{Q}{C_i} = \frac{C_{\text{Tot}}}{C_i}$$

### 3.5.3 Processo di carica e scarica del condensatore

- **Scarica:** Si vuole trovare la legge oraria di  $i$ ,  $Q$  e  $V$ :

$$i(t) \quad Q(t) \quad V(t)$$

Consideriamo il seguente circuito con un condensatore carico e un interruttore

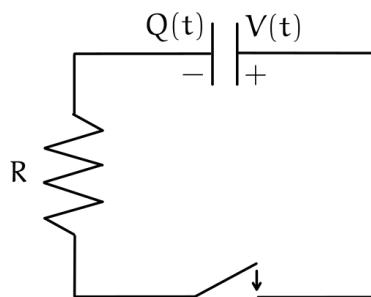


Figura 118: Circuito con condensatore carico

Consideriamo il tempo  $t_0$  il tempo in cui chiudiamo l'interruttore:

$$t_0 = 0 \rightarrow Q(0) = Q_0$$

La chiusura dell'interruttore in un circuito con un condensatore carico modella la scarica del condensatore. La corrente scorre dal + al -:

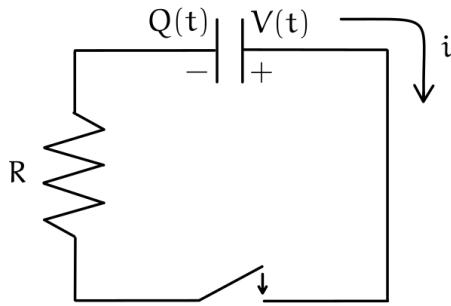


Figura 119: Corrente che scorre dal + al -

Il potenziale ai capi del condensatore è:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

e la corrente:

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

Ai capi del resistore la corrente vale (Legge di Ohm):

$$i = \frac{V_R(t)}{R}$$

Si potrebbe dire che  $V_C(t) = V_R(t)$ , ma questo **non vale** perché il segnale non si propaga istantaneamente, quindi si ha un ritardo. Si può approssimare a  $V_C(t) = V_R(t)$  solo se il circuito è piccolo rispetto allo spazio che deve percorrere l'informazione o se il fenomeno è sufficientemente veloce.

Da questo si ricava la seguente equazione differenziale:

**Definizione 3.3** (Legge di scarica di un condensatore).

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

che rappresenta un moto esponenziale decrescente. La soluzione è:

Porto a sinistra tutto ciò che non dipende dal tempo

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Integro dall'entrambe le parti:

$$\int_{Q_0 \text{ (Inizio)}}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = - \int_{t_0=0 \text{ (Inizio)}}^t \frac{dt}{RC}$$

$$\ln Q \Big|_{Q_0}^{Q(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln Q - \ln Q_0 = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$RC = \tau$  è detto **tempo di decadimento** del fenomeno.

Il grafico della carica è il seguente:

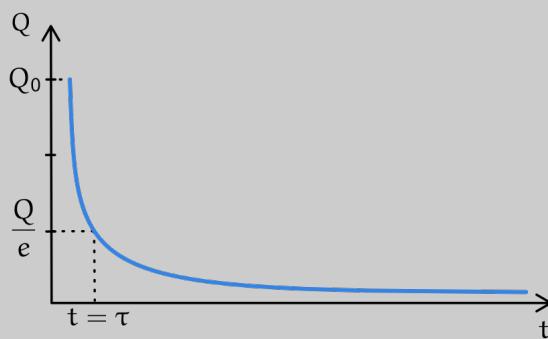


Figura 120: Grafico della carica

La corrente e il potenziale hanno lo stesso andamento:

$$i(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

- **Carica:** Si vuole trovare la legge oraria di  $i$ ,  $Q$  e  $V$ . Consideriamo il seguente circuito con un condensatore scarico, un interruttore e un generatore:

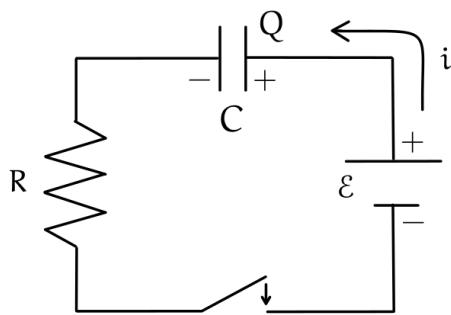


Figura 121: Circuito con condensatore scarico

$$t_0 = 0 \quad Q_0 = 0$$

$$i = +\frac{dQ}{dt}$$

La corrente scorre verso il condensatore e gli fornisce la carica. Le leggi sono le stesse della scarica, tranne la legge di Ohm che diventa:

**Definizione 3.4** (Legge di carica di un condensatore).

$$\mathcal{E}V_R + V_C = Ri + \frac{Q}{C}$$

Il grafico della carica è il seguente:

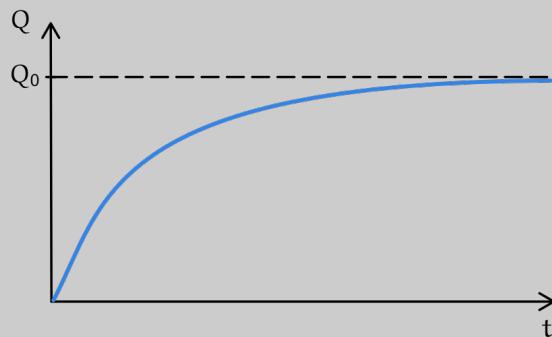


Figura 122: Grafico della carica

La legge esponenziale è quella che caratterizza il fenomeno, cioè **quanto**

**manca** a raggiungere la carica massima  $Q_0$ :

$$Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

La corrente è massima all'inizio e decresce esponenzialmente:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Quindi corrente ed esponenziale hanno un andamento esponenziale decrescente.

## 4 Magnetostatica

### 4.1 Fatti sperimentali

Si osserva che ci sono alcuni **materiali** (ossidi di ferro: FeO, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) che esercitano un nuovo tipo di forza. Questa forza può essere di due tipi:

- **Attrattiva (+)**
- **Repulsiva (-)**

Gli effetti di questa forza sono **localizzati ai poli** (Nord e Sud).

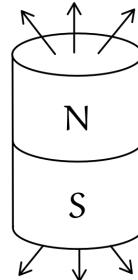


Figura 123: Poli magnetici

Se si considera un oggetto, di questi materiali, piccolo tale da non perturbare il sistema, si osserva che questo oggetto non rimane statico, ma **si orienta**. Questo oggetto "di test" è chiamato **ago magnetico**:

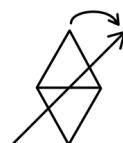


Figura 124: Ago magnetico

Si deduce che esiste un effetto **magnetico** nel pianeta Terra.

**Esempio 4.1** (Esperimento della calamita spezzata). Si considera un oggetto magnetico, una calamita, e la si spezza in due parti. Si osserva che si ottengono due calamite, ognuna con un polo Nord e un polo Sud.

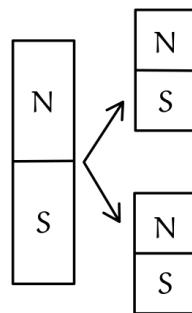


Figura 125: Calamita spezzata

Se si spezza ulteriormente si nota che **non è possibile separare i due poli magnetici**.

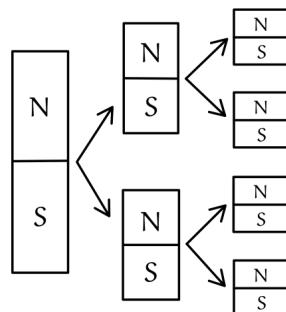


Figura 126: Calamita spezzata

Non esistono monopoli magnetici, nel senso che non è mai stato osservato, quindi non esiste la sorgente singola di un campo magnetico. Non si avranno linee di campo magnetico  $\vec{B}$  aperte, ma sempre **chiuse** e da questo si deduce che il flusso attraverso la superficie chiusa è nullo:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\text{Sup}} \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{S} = 0$$

Questa è la **prima equazione di Maxwell**.

**Definizione 4.1** (Seconda equazione di Maxwell). Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\text{Sup}} \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{S} = 0$$

Questo vuol dire che non esistono cariche magnetiche isolate. Un campo a linee chiuse è chiamato campo **solenoidale**.

**Esempio 4.2** (Esperimento di Ørsted). Si considera un filo percorso da una corrente  $i$  e si fa passare attraverso un dielettrico pieno di piccoli aghi magnetici si osserva che si dispongono lungo linee chiuse. Si osserva quindi che la corrente elettrica  $i$  è **sorgente** di un campo magnetico  $\vec{B}$ .

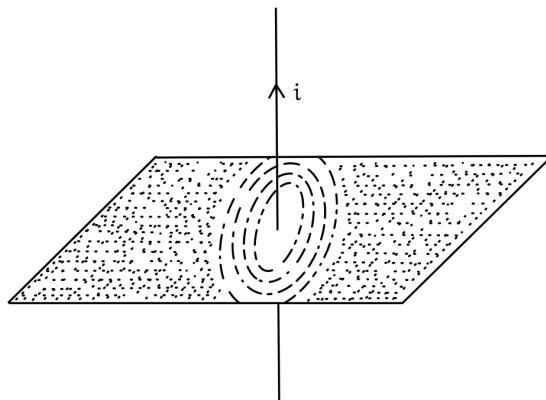


Figura 127: Esperimento di Ørsted

Ricordando che la corrente è un flusso di cariche in moto. Se una carica è ferma si genera un campo elettrico  $\vec{E}$ , mentre se la carica si muove si forma un campo elettromagnetico  $\vec{B}$ .

Ampère scoprì che il campo magnetico è dovuto al flusso degli elettroni all'interno dell'atomo:

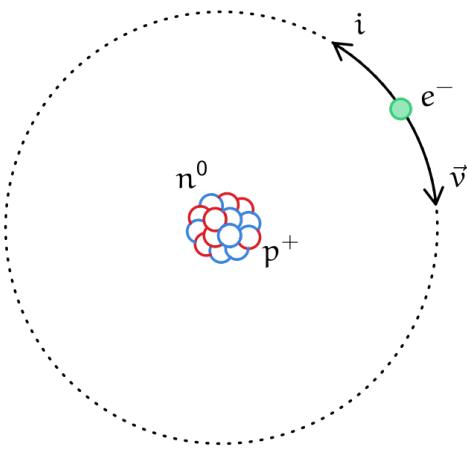


Figura 128: Micro-corrente Amperiana in un atomo

Quindi nei magneti si hanno delle **micro-correnti Amperiane**.

## 4.2 Forza magnetica (di Lorentz)

Consideriamo uno schema in cui si ha come sorgenti di campo le correnti e le cariche. Si ha un campo magnetico  $\vec{B}$  e degli oggetti su cui agisce (una forza), ovvero correnti e cariche. Si svolgono degli esperimenti analoghi a quelli per l'elettrostatica, cioè con la bilancia di torsione, per **osservare** le proprietà del campo magnetico.

Consideriamo un campo  $\vec{B}$  e mettiamo una carica  $q$  ferma. Osserviamo che se la carica è ferma non si ha nessuna interazione:

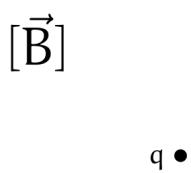


Figura 129: Carica ferma

Mettiamo la carica in moto con una velocità  $\vec{v}$  e si osserva che si ha un'interazione con il campo magnetico:

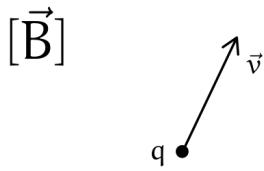


Figura 130: Carica in moto

Si osserva che la forza:

- È perpendicolare al campo:  $\vec{F} \perp \vec{B}$ .
- È perpendicolare alla velocità:  $\vec{F} \perp \vec{v}$ .
- È proporzionale alla carica, alla velocità e al campo magnetico:

$$\vec{F} = q, |\vec{v}|, |\vec{B}|$$

Quindi da queste proprietà si deduce che la forza di Lorentz magnetica è:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad [\text{N}]$$

Siccome questa forza è centripeta, **non compie lavoro**, di conseguenza non esiste potenziale magnetico.

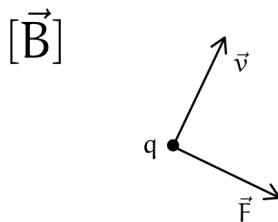


Figura 131: Forza magnetica

Se si considera una particella carica  $q$  che si muove all'interno di un campo  $\vec{B}$  e un campo  $\vec{E}$ . Si osserva che vale il principio di sovrapposizione, quindi i due campi si sommano e si osserva una forza totale (la vera forza di Lorentz).

**Definizione 4.2** (Forza di Lorentz). La forza di Lorentz è la somma della forza elettrica e della forza magnetica.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad [\text{N}]$$

Questa è la forza che agisce su una sola carica.

**Esempio 4.3.** Consideriamo un filo percorso da una corrente  $i$ . Si avrà una densità di corrente (quantità di carica per una superficie unitaria)

$$\vec{j} = N \cdot q \cdot \vec{v}_{\text{Deriva}} \rightarrow i = jS$$

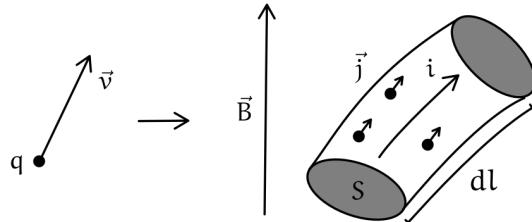


Figura 132: Corrente in un filo

Il campo magnetico agisce sul filo  $dl$  e si osserva una forza totale magnetica sul filo ottenuta sommando tutte le particelle all'interno del volume:

$$d\vec{F} = \sum_{S_{\text{vol}}} q\vec{v}_q \times \vec{B} = \underbrace{\vec{j}S}_{i} dl \times \vec{B} = idl \times \vec{B}$$

osserviamo che la forza è in relazione macroscopica alla corrente  $i$ .

**Definizione 4.3** (Seconda legge elementare di Laplace). La forza magnetica su un filo percorso da una corrente  $i$  è:

$$d\vec{F} = idl \times \vec{B} \quad [\text{N}]$$

Questa è la forza che agisce su un gruppo di cariche.

**Definizione utile 4.1.** La convenzione per rappresentare un vettore tridimensionale è la seguente:



Figura 133: Vettore tridimensionale

Quindi si ha la vista dall'alto e dal basso:

- Vettore uscente  $\odot$
- Vettore entrante  $\otimes$

#### 4.2.1 Dipolo magnetico

C'è un'analogia con il dipolo elettrico.

**Definizione 4.4** (Dipolo magnetico). Il dipolo magnetico è una **spira** elementare percorsa da una corrente  $i$ .

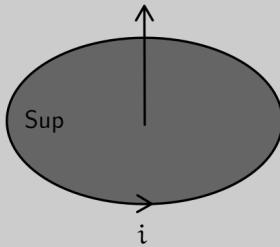


Figura 134: Dipolo magnetico

Il **momento di dipolo magnetico** è definito come:

$$\vec{\mu} = i\vec{S}$$

Il verso segue la regola della mano destra. Il momento si orienta nel verso del campo magnetico  $\vec{B}$ , proprio come gli aghi magnetici.

#### 4.2.2 Applicazione della forza magnetica

Andiamo ad analizzare:

- Una spira
- Il moto di cariche
- Effetto Hall

**Esempio 4.4.** Consideriamo una spira immersa in un campo magnetico esterno  $\vec{B}$ :

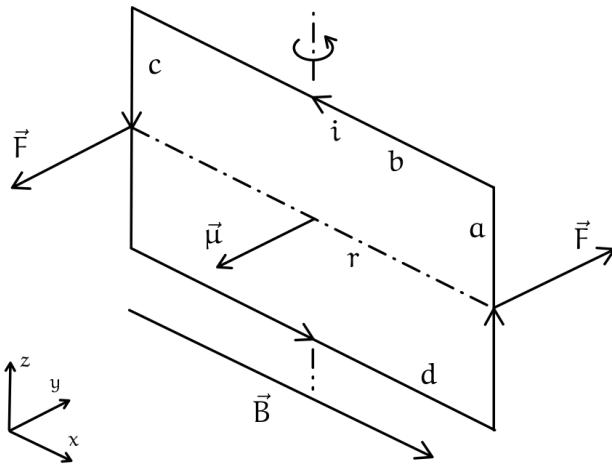


Figura 135: Spira immersa in un campo magnetico

Per vedere cosa succede alla spira si può utilizzare la seconda legge di Laplace ( $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$ ). Sul tratto a si avrà una forza entrante, mentre il tratto b è parallelo al campo magnetico e quindi non subisce nessuna forza. Il tratto c ha una forza uscente, mentre il tratto d è parallelo al campo magnetico e quindi non subisce nessuna forza. La somma delle forze è nulla perché la spira non trasla, ma costituiscono un momento  $\tau \neq 0$  perché sono una coppia di forze.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = b\vec{F} = \underbrace{iab}_{\mu} \vec{B}$$

Il momento magnetico è uscente e al centro della spira, quindi il momento meccanico esterno è:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Questo vuol dire che  $\mu$  si corica su  $\vec{B}$ . Un dipolo in un campo magnetico si allinea con il campo magnetico.

La spira ha ruotato:

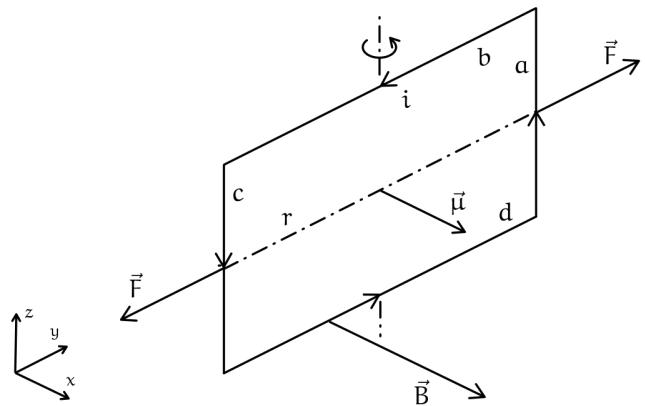
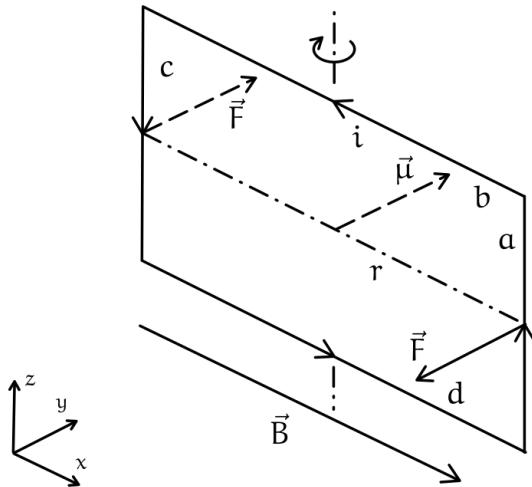


Figura 136: Spira immersa in un campo magnetico

Il momento meccanico è nullo e anche la somma delle forze:

$$\vec{\tau} = 0 \quad \sum \vec{F} = 0$$

Però la spira continua a ruotare per inerzia:



Il momento magnetico ha invertito il verso e quindi la spira continuerà a ruotare in verso orario.

Questo è un oscillatore armonico.

Per analogia con il dipolo elettrico, l'energia del dipolo magnetico è:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Anche le linee di campo magnetico sono analoghe a quelle elettriche, l'unica differenza è che quelle elettriche sono linee aperte e quelle magnetiche sono linee chiuse, quindi si ha:

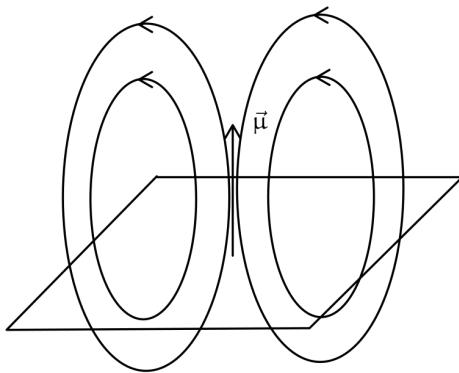


Figura 137: Linee di campo magnetico

### 4.3 Teorema di Ampere

Studiamo come le sorgenti producono il campo  $\vec{B}$  in particolari situazioni di simmetria. In elettrostatica si aveva un sistema di cariche, mentre in magnetostatica si ha un sistema di correnti.

**Osservazione:** Se consideriamo un filo indefinito con una corrente, sappiamo che il campo ha linee chiuse a **simmetria cilindrica** e quindi il campo magnetico è circolare. Bisogna però stabilire il verso del campo magnetico e questo si fa seguendo la regola della mano destra, cioè se la corrente è verso l'alto, il campo magnetico è antiorario:

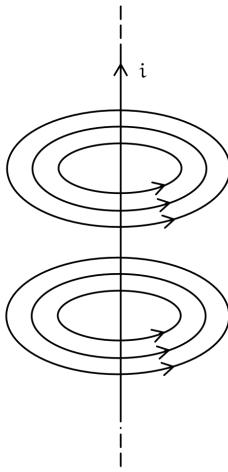


Figura 138: Verso del campo magnetico

L'intensità del campo è proporzionale alla corrente e inversamente proporzionale alla distanza dal filo:

$$|\vec{B}| \propto i \quad |\vec{B}| \propto \frac{1}{r}$$

e questo vuol dire che il campo magnetico su una linea di campo è costante. Quindi se si moltiplica il campo per il perimetro (si fa la circuitazione di  $\vec{B}$ ) si ottiene una costante, cioè un invariante:

**Definizione 4.5** (Prima equazione di Maxwell per il campo magnetico).

$$\oint_{\Gamma_{\text{Circonferenza}}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

dove:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = \text{Permeabilità magnetica del vuoto}$$

$i$  = Corrente che attraversa la superficie delimitata dalla circonferenza

Siccome la circuitazione del campo è costante, si può parametrizzare il campo come:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

**Teorema 4.1** (Teorema di Ampere). La circuitazione del campo è il flusso del suo rotore (teorema di Stokes).

$$\oint_{\Gamma_{\text{Qualunque}}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{Concatenate Totali}}$$

Dove le **sorgenti concatenate** sono le seguenti:

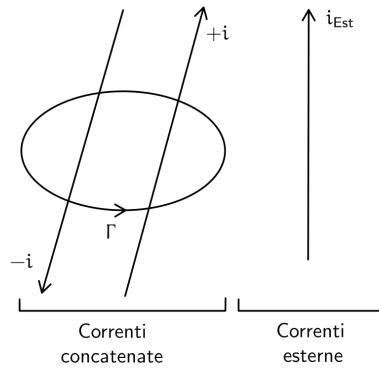


Figura 139: Sorgenti concatenate

Questo teorema dimostra che le sorgenti di  $\vec{B}$  sono le correnti.

In termini locali:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

#### 4.3.1 Applicazione del teorema di Ampere

**Esempio 4.5.** Calcoliamo il campo magnetico in un cavo indefinito di raggio  $R$  con una corrente  $i$  nel **volume**:

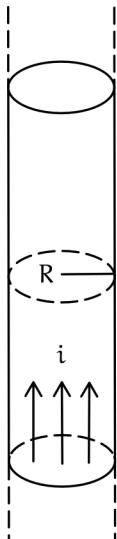


Figura 140: Cavo indefinito

L'obiettivo è calcolare il campo magnetico  $\vec{B}(r)$  in tutte le regioni di spazio.

Sappiamo che in una simmetria cilindrica le linee di campo magnetico sono chiuse e sono circonferenze centrate sull'asse. Scegliamo come **linea Amperiana**  $\Gamma(r)$  le circonferenze di raggio  $r$ :

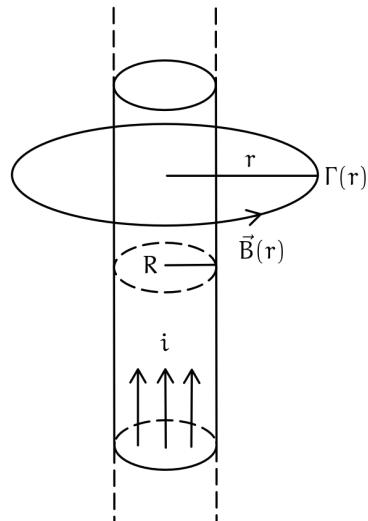


Figura 141: Linea Amperiana

$$\oint_{\Gamma_{\text{qualsiasi}}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{Conc}}$$

Il campo sulla linea Amperiana è costante e quindi  $\vec{B}$  si può tirare fuori dall'integrale:

$$\vec{B} \oint_{\Gamma(r)} d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 i_{\text{Conc}}$$

dove:

$$i_{\text{Conc}} = \begin{cases} i & \text{se } r \geq R \\ j\pi r^2 & \text{se } r < R \end{cases}$$

$$\left( j = \frac{i}{\pi R^2} \right)$$

Quindi si ha:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{se } r \geq R \\ \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j}{2} r & \text{se } r < R \end{cases} \quad [\text{T}]$$

Il grafico del campo magnetico è il seguente:

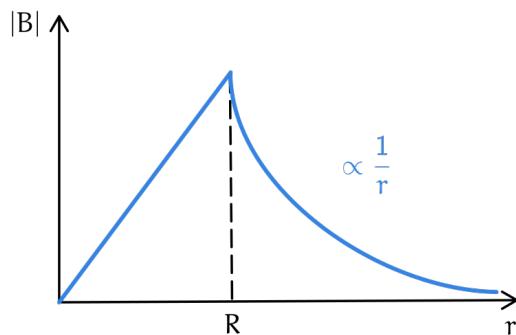


Figura 142: Grafico del campo magnetico

**Esempio 4.6.** Se consideriamo un cavo indefinito cilindrico di raggio  $R$  percorso da una corrente  $i$  che scorre in **superficie**

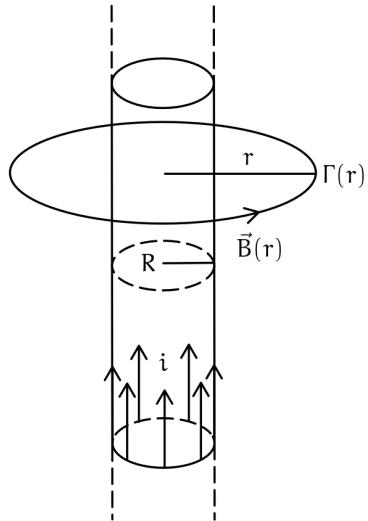


Figura 143: Cavo indefinito cilindrico

si avrà una densità di corrente  $j$  superficiale:

$$j = \frac{i}{2\pi r}$$

Consideriamo le circonferenze di raggio  $r$  come linea Amperiana  $\Gamma(r)$ :

$$\oint_{\Gamma(r)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r = \mu_0 i_{\text{Conc}}$$

dove:

$$i_{\text{Conc}} = \begin{cases} i & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases}$$

Quindi si ha:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r < R \end{cases} \quad [\text{T}] \quad (\text{Tesla})$$

**Esempio 4.7.** Consideriamo una linea indefinita con una corrente  $i$ , si avrà lo stesso svolgimento del cavo cilindrico, ma senza distinzione tra linea Amperiana esterna e interna.

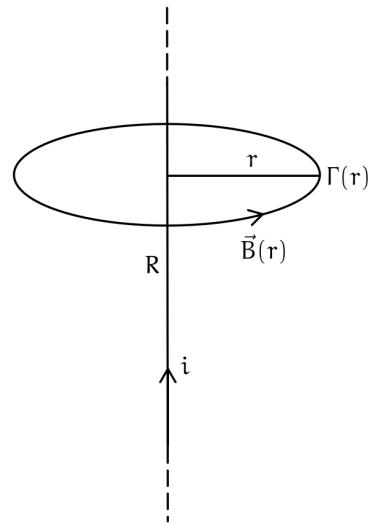


Figura 144: Linea indefinita

Quindi:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad [T]$$

In sostanza, dall'esterno non si riesce a distinguere l'interno del filo, quindi il campo magnetico è lo stesso.

**Esempio 4.8.** Consideriamo un cavo con una guaina (trascurabilmente sottile) in cui scorre una corrente opposta:

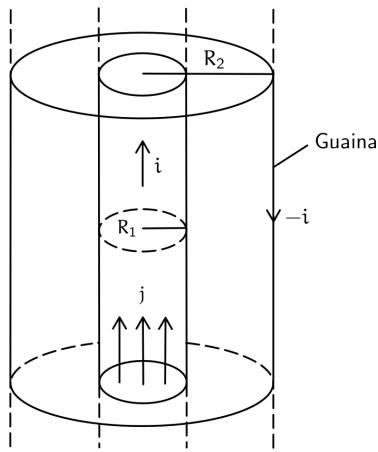


Figura 145: Cavo con guaina

Si distinguono 3 regioni:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j}{2} r & \text{se } r < R_1 \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{se } R_1 \leq r < R_2 \\ i - i = 0 & \text{se } r \geq R_2 \end{cases}$$

Il grafico del campo magnetico è il seguente:

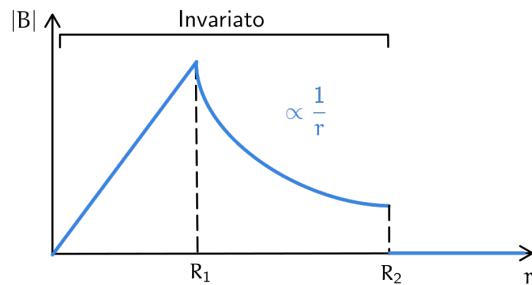


Figura 146: Grafico del campo magnetico

**Esempio 4.9.** Consideriamo un sistema di spire rettangolari arrotolate secondo un solenoide toroidale:

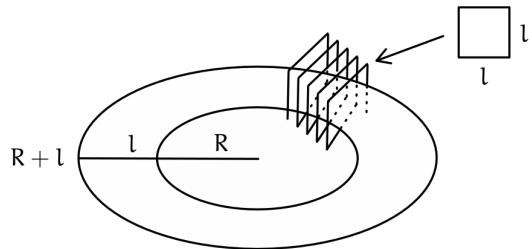


Figura 147: Solenoide toroidale

Si vuole calcolare il campo magnetico  $\vec{B}(r)$ .

Si ha una simmetria cilindrica, quindi consideriamo come linee Amperiane dei cerchi centrati nell'asse:

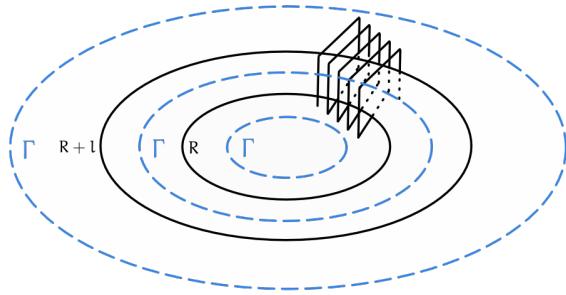


Figura 148: Linea Amperiana toroidale

Si hanno quindi 3 regioni distinte:

- **Interna alla cavià del toroide:**  $r < R$

Corrente totale nulla

$$i_{\text{Conc}} = 0$$

- **Interna al toroide:**  $R < r < R + l$

La corrente totale è la corrente che si incontra per ogni spira, quindi se il numero di spire è  $N$  e la corrente è  $i$ :

$$i_{\text{Conc}} = Ni$$

- **Esterno al toroide:**  $r > R + l$

Corrente totale nulla perché si vede una corrente in un verso e una in un altro verso se si immaginano delle spire molto alte e di conseguenza si cancellano.

$$i_{\text{Conc}} = 0$$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} & \text{se } R \leq r \leq R + l \\ 0 & \text{se } r > R + l \end{cases}$$

In una spira si ha un campo magnetico del tipo:

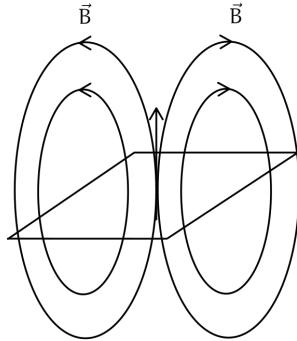


Figura 149: Campo magnetico in una spira

Se si aggiungono più spire in parallelo si avrà un campo magnetico più grande:

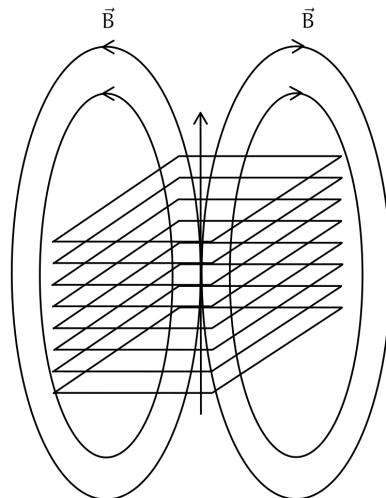


Figura 150: Campo magnetico in più spire

Il grafico del campo magnetico del solenoide toroidale è il seguente:

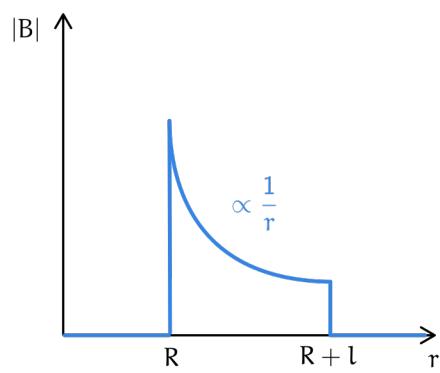


Figura 151: Grafico del campo magnetico

**Esempio 4.10.** Consideriamo un solenoide rettilineo indefinito percorso da una corrente  $i$ :

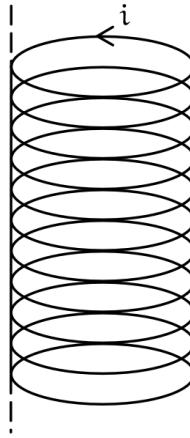


Figura 152: Solenoide rettilineo

Il numero di spire per unità di lunghezza è  $n$ :

$$n = \frac{N_{\text{spire}}}{\text{Unità di lunghezza}}$$

Conosciamo il campo di una spira:

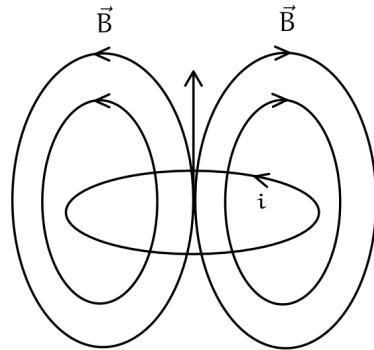


Figura 153: Campo magnetico in una spira

Se si aggiungono altre spire si nota che il campo si cancella:

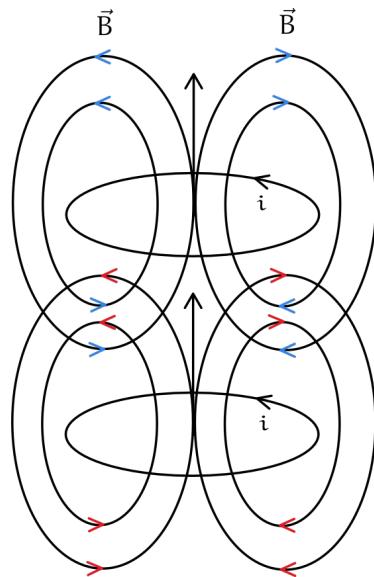


Figura 154: Campo magnetico in più spire

Quindi osserviamo che nel solenoide rettilineo indefinito il campo non riesce mai a chiudersi, di conseguenza c'è soltanto un campo interno:

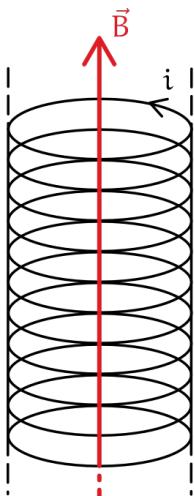
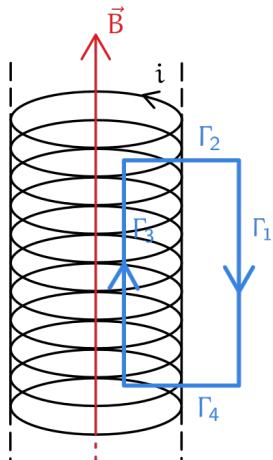


Figura 155: Campo magnetico in un solenoide rettilineo

In pratica questo solenoide confina il campo magnetico all'interno di una regione.

Consideriamo come linea Amperiana un rettangolo che attraversa sia il centro del solenoide sia l'esterno:



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

Figura 156: Linea Amperiana in un solenoide rettilineo

Spezziamo l'integrale in 4 parti:

$$\underbrace{\int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\parallel \text{ Esterno}} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\perp} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\perp} + \underbrace{\int_{\Gamma_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\parallel \text{ Interno}} = 0 + 0 + 0 + Bl = \mu_0 i \underbrace{nl}_{\text{Spire in } \Gamma_4}$$

↓

$$Bl = \mu_0 i n l$$

$$B = \mu_0 i n$$

#### 4.3.2 Interazione meccanica tra due fili

**Esempio 4.11.** Consideriamo una carica positiva  $q^+$  ad una certa distanza  $r = d$  da un filo indefinito percorso da una corrente  $i$ :

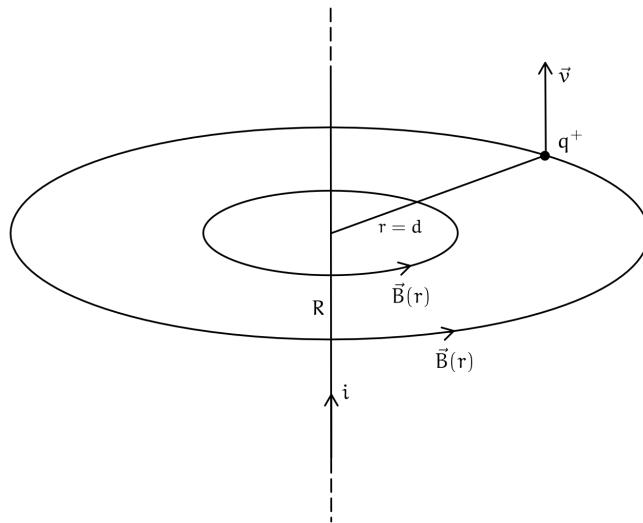


Figura 157: Carica e filo

Quale forza agisce sulla carica?

Il campo è esattamente la linea di campo del filo che passa per la carica. La forza applicata alla carica è:

$$|F_{su q}| = qvB(r = d)$$

$$= \frac{qv\mu_0 i}{2\pi d} \quad [N]$$

Si ha quindi una **forza attrattiva**:

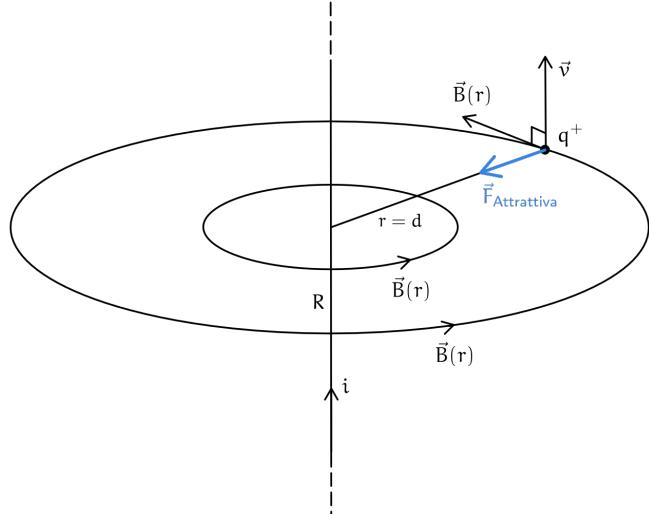


Figura 158: Forza attrattiva

Se si avesse una carica negativa  $q^-$  si avrebbe una forza repulsiva:

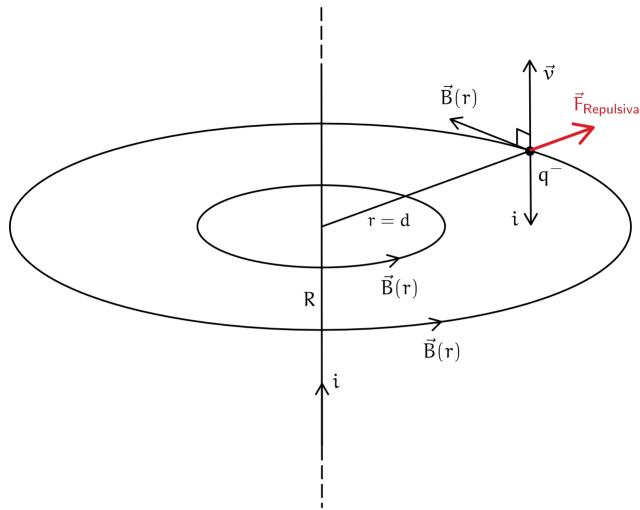


Figura 159: Forza repulsiva

Ciò vuol dire che la carica negativa si muove e quindi forma una corrente.

**Esempio 4.12.** Consideriamo due fili paralleli percorsi da correnti  $i_1$  e  $i_2$  ad una certa distanza  $r = d$  l'uno dall'altro:

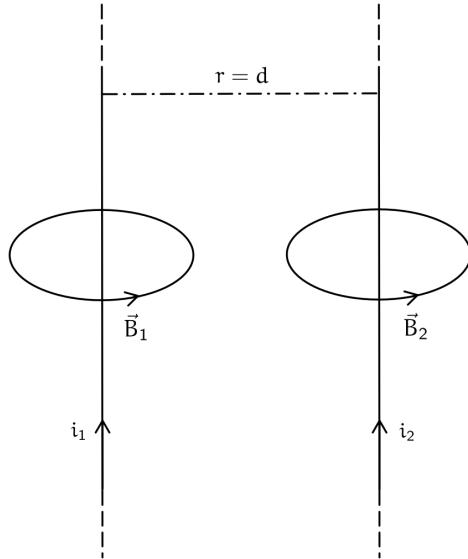


Figura 160: Interazione tra due fili

Sull'elemento di corrente agisce la forza di Laplace (seconda legge di Laplace):

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}_{\text{Esterno}}$$

Su  $i_2$  agisce il campo magnetico  $\vec{B}_1$  prodotto da  $i_1$ :

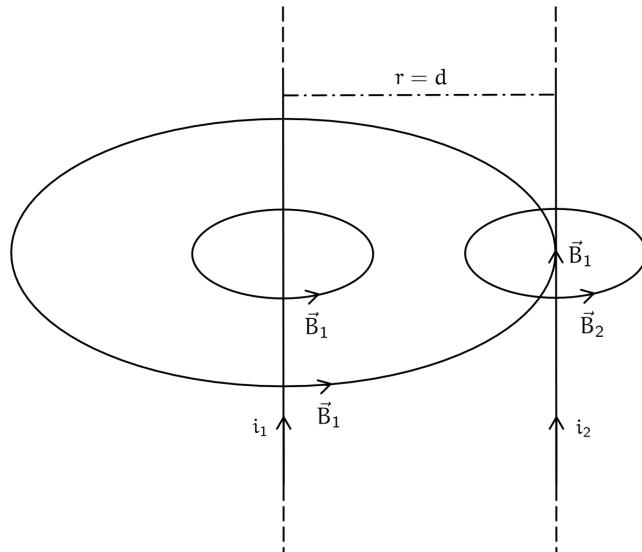


Figura 161: Sul filo  $i_2$  agisce il campo magnetico  $\vec{B}_1$

La forza che agisce su  $i_2$  (per unità di lunghezza) è:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{i_2} &= i_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1 (r = d) \\ &= i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} d\vec{l} \quad [\text{N}] \end{aligned}$$

Con direzione **attrattiva** verso il filo  $i_1$ :

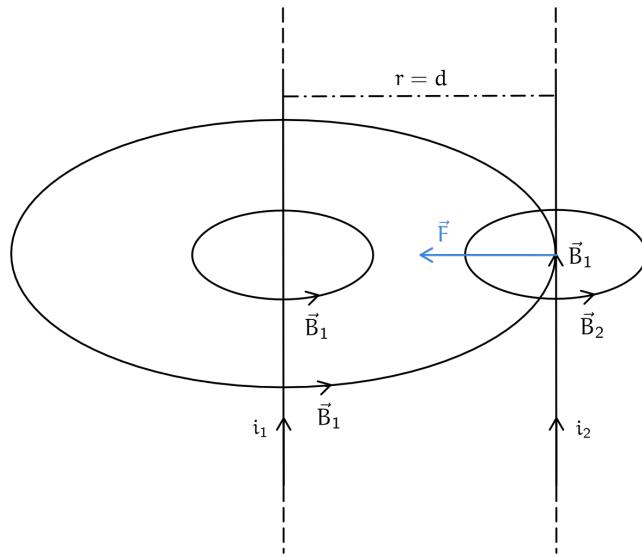


Figura 162: Forza sul filo  $i_2$

Anche sul filo  $i_1$  agisce una forza  $d\vec{F}_{i_1}$  prodotta dal campo magnetico  $\vec{B}_2$  prodotto da  $i_2$  e sarà uguale e opposta alla forza  $d\vec{F}_{i_2}$  (per il principio di azione e reazione):

$$d\vec{F}_{i_1} = i_1 d\vec{l} \times \vec{B}_2 (r = d) = i_1 \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} d\vec{l} = -d\vec{F}_{i_2}$$

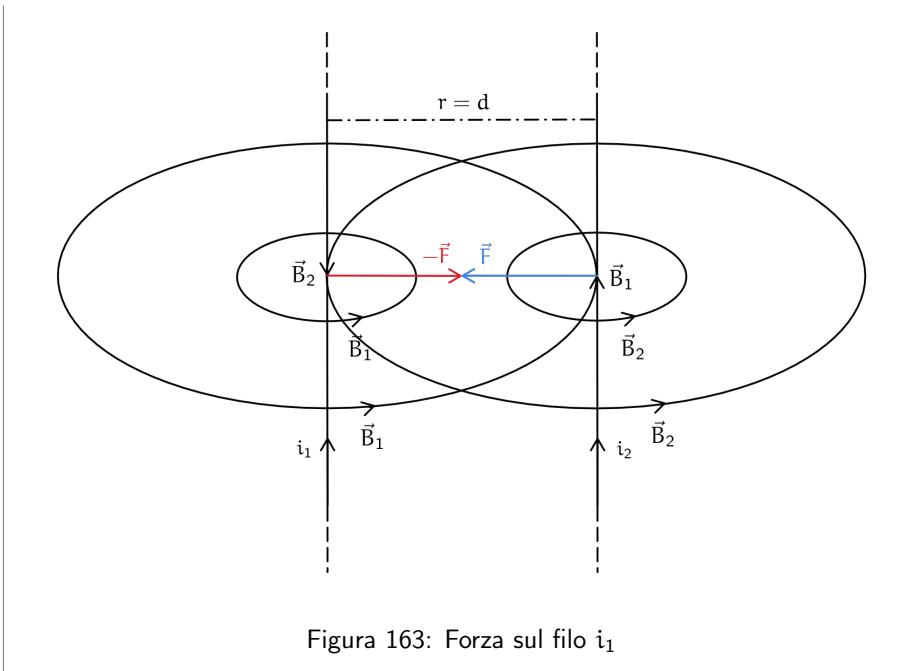


Figura 163: Forza sul filo  $i_1$

#### 4.3.3 Osservazioni

Si osserva che due fili paralleli con una corrente che scorre:

- Nello stesso verso si **attraggono**:

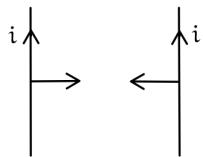


Figura 164: Forza attrattiva

- Nel verso opposto si **repellono**:

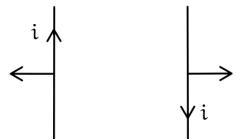


Figura 165: Forza repulsiva

Un filo con una corrente si può vedere come una carica in movimento:

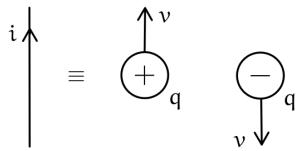


Figura 166: Corrente come cariche in movimento

Di conseguenza si può considerare il filo come una carica in movimento:

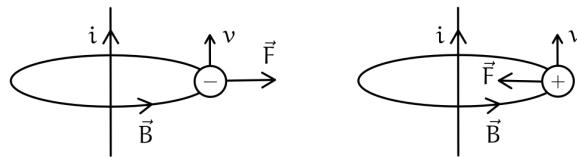


Figura 167: Filo come cariche in movimento

da cui segue la seguente relazione:

$$|F| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \Leftrightarrow |F| = qvB$$

#### 4.4 Flusso del campo magnetico

Il flusso elementare è sempre definito come il numero di linee di campo sono ortogonali ad una superficie:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{S} \quad [\text{Wb}] \quad (\text{Weber})$$

Di conseguenza il flusso del campo magnetico attraverso una superficie  $S$  è:

$$\Phi(B) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{S}$$

Il flusso di un campo magnetico su una superficie chiusa è sempre nullo, perché il campo magnetico ha linee di campo chiuse, quindi ciò che entra esce e non si ha un flusso netto. Mentre nel caso del campo elettrico si avevano linee radiali e quindi ciò che usciva non rientrava mai. Quindi:

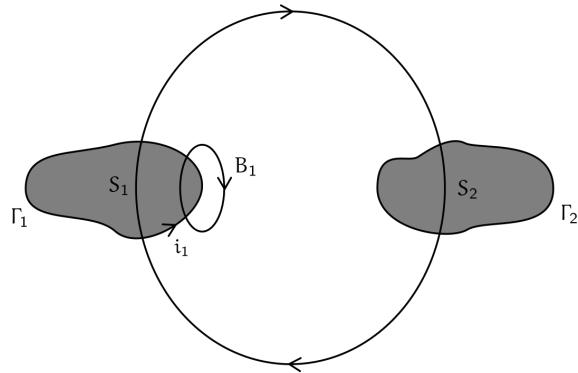
**Definizione 4.6** (Seconda equazione di Maxwell per il campo magnetico).

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{S} = 0$$

In termini locali si ha:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Se si considerano due circuiti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  il campo magnetico si concatena tra i due circuiti e si può calcolare il flusso sulla superficie  $S_2$  applicato dal circuito  $\Gamma_1$ :



$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} d\vec{S} \propto i_1$$

Figura 168: Flusso sulla superficie  $S_2$

Sappiamo che  $B \propto i$  e quindi il flusso è proporzionale alla corrente e ad un oggetto che dipende dalla distanza dei circuiti e dalla forma dei circuiti. Questo oggetto è il **coefficiente di mutua induzione**  $M_{12}$ :

$$\Phi_{12} = M_{12} i_1$$

Si può anche calcolare il flusso inverso:

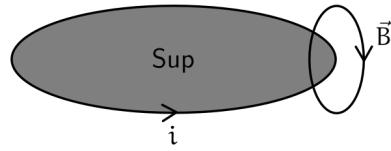
$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \hat{n} d\vec{S} \propto i_2 = M_{21} i_2$$

Il coefficiente di mutua induzione è **simmetrico**, cioè:

$$M_{12} = M_{21} \quad [\text{H}] \quad (\text{Henry})$$

#### 4.4.1 Induttanza

Consideriamo un singolo circuito, si può calcolare il flusso del campo prodotto dalla spira, su se stessa:



$$\Phi = \int_{\text{Sup}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = Li$$

Figura 169: Autoflusso

Dove L è l'**induttanza** della spira (o coefficiente di autoinduzione) misurato in [H] Henry.

Nei circuiti il simbolo dell'induttanza è il seguente:

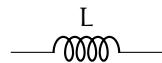


Figura 170: Induttanza

#### 4.4.2 Calcolo dell'induttanza

I passaggi per calcolare l'induttanza sono i seguenti:

- **Solenoido toroidale:**

Per calcolare l'induttanza si risolve l'integrale della definizione di autoflusso, si isola la corrente e tutto ciò che rimane è l'induttanza.

$$\Phi(B) = \int_S B \cdot \hat{n} dS = \dots = Li$$

- **Solenoido rettilineo indefinito**

Sappiamo che il campo magnetico è uniforme e vale:

$$B = \mu_0 n i$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza.

Per calcolare l'induttanza si calcola il flusso:

$$\Phi_{\text{spira}} = B \cdot \text{Area spira}$$

Il flusso totale (per unità di lunghezza) è:

$$\Phi_{\text{Tot}} = n \Phi_{\text{spira}} = n B \cdot (\pi R^2) = n (\mu_0 n i) (\pi R^2) = \underbrace{\mu_0 n^2 \pi R^2 i}_{\text{Induttanza}} \quad [\text{Wb}]$$

In questo caso l'induttanza è per unità di lunghezza.

- **Filo indefinito:**

In un filo indefinito **non** ha senso chiedersi qual'è l'induttanza, cioè il flusso concatenato a se stesso:

$$\Phi = L i$$

Perchè se non si considera soltanto una parte finita del filo, allora il flusso sarà infinito.

**Esempio 4.13.** Consideriamo un solenoide toroidale di raggio  $R$  e lunghezza  $l$ :

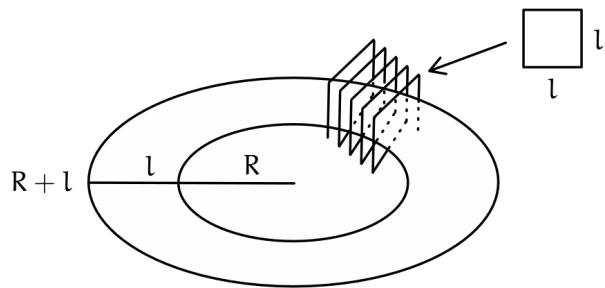


Figura 171: Solenoide toroidale

Sappiamo che il campo scorre soltanto all'interno delle spire

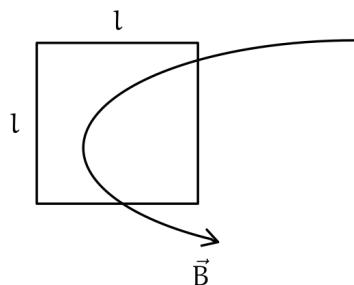


Figura 172: Campo magnetico in un solenoide toroidale

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \quad [T]$$

Il flusso totale è il flusso attraverso una spira moltiplicato per il numero di spire:

$$\Phi_{\text{Tot}} = N \Phi_{\text{1 spira}}$$

$$\Phi_{\text{spira}} = \int_{S_{\text{spira}}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Per risolvere questo integrale dobbiamo calcolarlo "a pezzi" calcolando un elemento di superficie della spira:

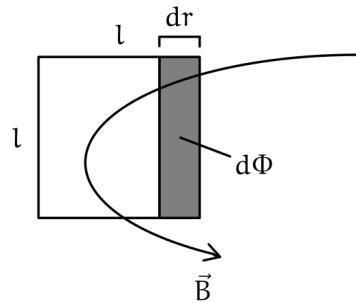


Figura 173: Elemento di superficie della spira

$$d\Phi = B(r)l dr$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{spira}} &= \int_{S_{\text{spira}}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \\ &= \int_R^{R+l} B(r)l dr \\ &= \int_R^{R+l} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} l dr \\ &= \frac{\mu_0 N i l}{2\pi} \int_R^{R+l} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 N i l}{2\pi} [\ln(R+l) - \ln(R)] \\ &= \frac{\mu_0 N i l}{2\pi} \ln\left(\frac{R+l}{R}\right) \quad [\text{Wb}]\end{aligned}$$

$$\Phi_{\text{Tot}} = N\Phi_{\text{spira}} = N \cdot \frac{\mu_0 N i l}{2\pi} \ln\left(\frac{R+l}{R}\right)$$

L'induttanza (o coefficiente di autoinduzione) è:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{R+l}{R}\right) \quad [\text{H}]$$

#### 4.5 Prima legge elementare di Laplace

Si hanno sorgenti (correnti o cariche in moto) che generano un campo (cioè un mediatore di forza) e si hanno gli oggetti su cui agisce il campo (correnti o cariche

in moto). Si ha un'analogia con l'elettrostatica:

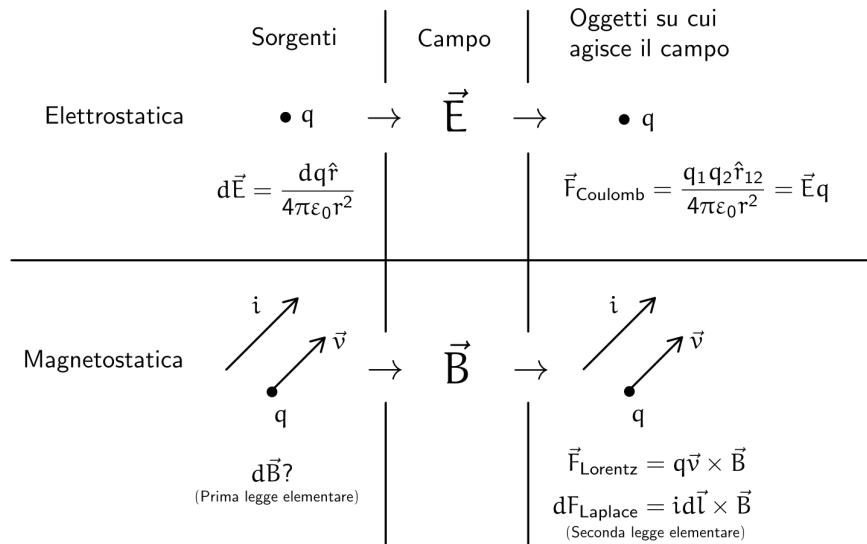


Figura 174: Analogia con l'elettrostatica

Osserviamo che manca un modo per calcolare direttamente il campo magnetico  $d\vec{B}$ . Questa è la **prima legge elementare di Laplace**.

**Definizione 4.7** (Prima legge elementare di Laplace). Considerando il seguente sistema:

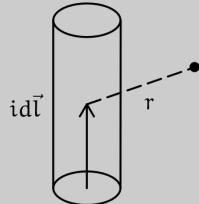


Figura 175: Rappresentazione della prima legge elementare di Laplace

La prima legge elementare di Laplace afferma che il campo magnetico  $d\vec{B}$  prodotto da un elemento di corrente  $id\vec{l}$  in un punto  $r$  è dato da:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

La direzione del campo magnetico è data dalla regola della mano destra:

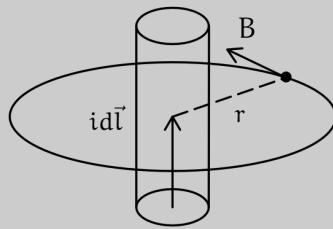


Figura 176: Direzione del campo magnetico

Il campo di una singola carica in moto è:

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \quad [\text{T}]$$

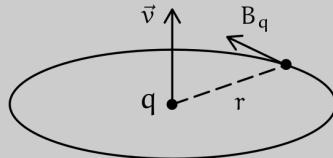
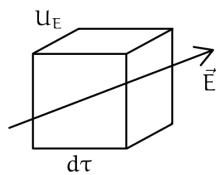


Figura 177: Campo magnetico di una singola carica in moto

#### 4.6 Densità di energia magnetica

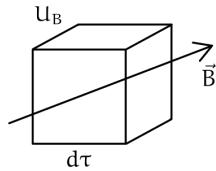
Nell'elettrostatica abbiamo osservato che se un volume di spazio elementare  $d\tau$  è attraversato da un campo  $\vec{E}$ , allora si può calcolare l'energia elettristica ed era chiamata densità di energia elettrica:



$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

Figura 178: Densità di energia elettrica

Anche nel caso della magnetostatica se si ha un volume di spazio  $d\tau$  attraversato da un campo  $\vec{B}$  si può calcolare la **densità di energia magnetica**:



$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad [\text{J/m}^3]$$

Figura 179: Densità di energia magnetica

## 5 Elettromagnetismo

### 5.1 Fatti sperimentali

Faraday si è chiesto se il campo magnetico può generare una corrente elettrica. Alcuni esperimenti sono i seguenti:

1. Si prende una spira su cui scorre una corrente  $i$  e un campo magnetico  $B$  stazionario. Se si mette in moto una seconda spira scarica si osserva una corrente indotta nella spira scarica:

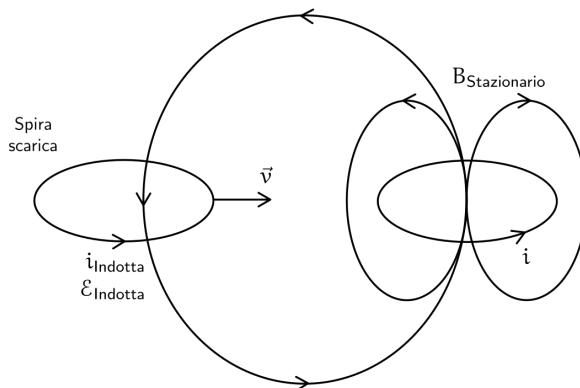


Figura 180: Spira scarica in moto

Se si ha una corrente indotta, allora si ha una forza elettromotrice indotta.

2. Si prende una spira scarica e al posto di muoverla verso il campo magnetico, si muove il campo magnetico verso la spira. Si osserva che si ha una corrente indotta nella spira scarica.

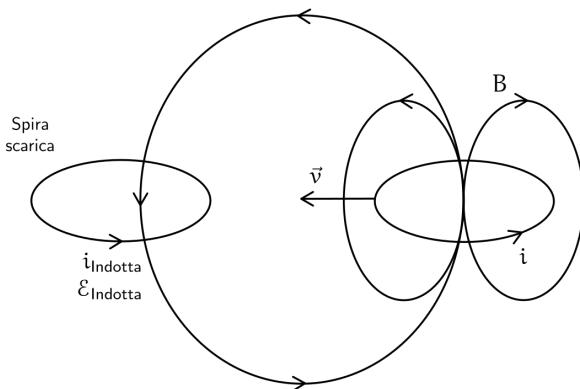


Figura 181: Spira con campo magnetico in moto

3. Si considera una spira scarica e una seconda spira con una corrente variabile  $i(t)$ . Se varia la corrente, allora varia il campo magnetico che di conseguenza sarà non stazionario  $B(t)$ . Si osserva una corrente indotta nella spira scarica e quindi una forza elettromotrice indotta.

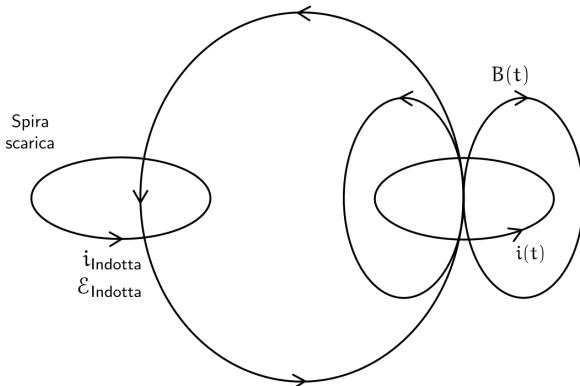
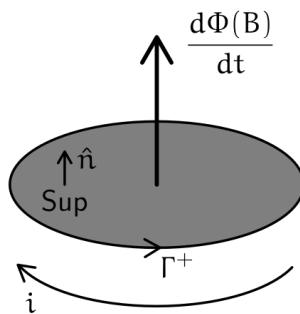


Figura 182: Spira con corrente variabile

Se la spira scarica si muove verso il campo magnetico si ha una forza di Lorentz che agisce sulle cariche della spira e le mette in moto. Se invece è il campo magnetico a muoversi verso la spira, **non è la forza di Lorentz** a mettere in moto le cariche, ma è un nuovo fenomeno chiamato **induzione elettromagnetica**.

## 5.2 Legge del flusso di Faraday

Una variazione del flusso di campo magnetico nel tempo  $B(t)$  produce una forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}$ :



$$\mathcal{E}_{\text{Indotta}} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad [\text{V}]$$

Figura 183: Legge del flusso di Faraday

Il segno negativo è dovuto al fatto che la corrente indotta si **oppone alla variazione del flusso magnetico**. Questo fenomeno è chiamato **legge di Lenz**, quindi l'effetto è tale da opporsi alla causa che lo produce.

- Se si ha un aumento di flusso in un verso, si osserva una forza elettromotrice nel senso opposto e un campo magnetico indotto che si oppone all'aumento del flusso:

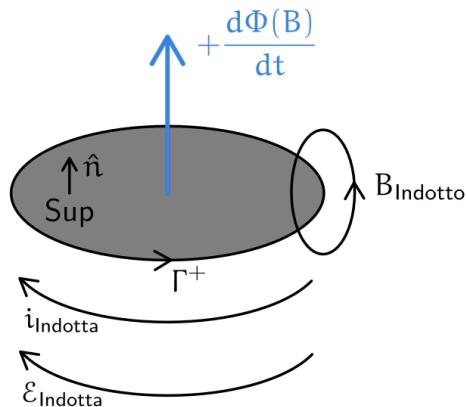


Figura 184: Aumento di flusso

- Se si ha una diminuzione di flusso in un verso, si osserva una forza elettromotrice nel senso opposto e un campo magnetico indotto che si oppone alla diminuzione del flusso:

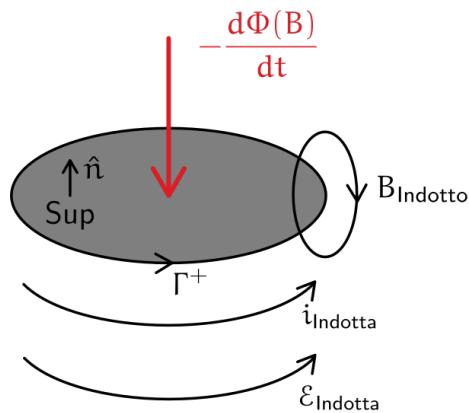


Figura 185: Diminuzione di flusso

L'elemento di flusso è calcolato come:

$$d\Phi(B) = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad [\text{Wb}]$$

Per variare il flusso si può:

- Variare il campo magnetico  $B$
- Variare la superficie  $S$
- Variare l'angolo tra il campo magnetico e la superficie

In tutti e tre i casi si ha una variazione del flusso magnetico e quindi si ha una forza elettromotrice indotta.

La legge di Faraday può essere scritta in forma integrale:

**Definizione 5.1** (Prima equazione di Maxwell per il campo elettrico nel tempo).

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↓

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

In termini locali:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### 5.3 Circuito mobile di Faraday

Il circuito mobile di Faraday è composto da un circuito a U con un'asta conduttrice che si può muovere lungo il circuito. Questo circuito è un trasformatore di energia meccanica in energia elettrica. Si hanno quindi due resistenze in serie: il filo e l'asta:

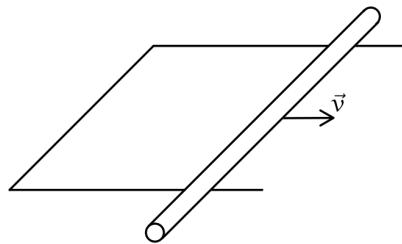


Figura 186: Circuito mobile di Faraday

Quando l'asta si muove, si ha una variazione dell'area del circuito e quindi nel flusso magnetico. Immersiamo il circuito in un campo magnetico  $\vec{B}$  perpendicolare al piano del circuito:

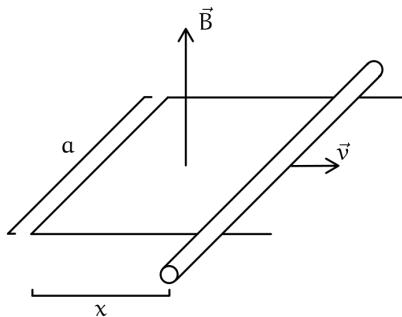


Figura 187: Circuito mobile di Faraday con campo magnetico

La variazione del flusso magnetico genera una forza elettromotrice indotta **localizzata sull'asta** (cioè l'elemento che fa variare il flusso). Di conseguenza i seguenti sistemi sono equivalenti:

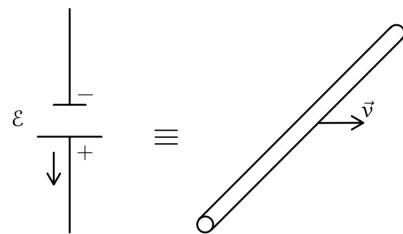


Figura 188: Circuito mobile di Faraday equivalente

Calcoliamo il flusso del circuito mobile:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B(ax) \quad [Wb]$$

Deriviamo il flusso rispetto al tempo per ottenere la forza elettromotrice indotta (ricordiamo che la derivata dello spazio  $x$  rispetto al tempo è la velocità  $v$ ):

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bav = |\mathcal{E}| \quad [V]$$

La forza elettromotrice indotta risultante è soltanto il modulo, senza il verso. Per ottenere il verso bisogna assegnare un'orientamento al circuito, ad esempio:

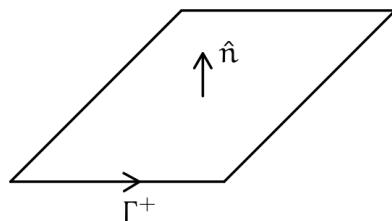


Figura 189: Orientamento del circuito mobile di Faraday

Quindi il verso della forza elettromotrice indotta è:

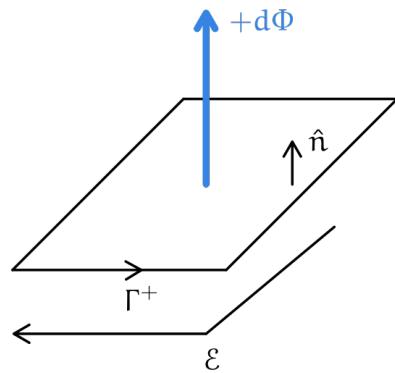


Figura 190: Verso della forza elettromotrice indotta

Nel circuito mobile si avrà un campo magnetico indotto sull'asta che si oppone alla variazione del flusso magnetico, quindi si ha una forza elettromotrice e una corrente indotta che si oppongono al moto dell'asta:

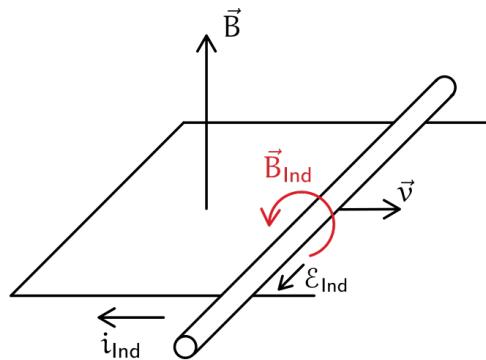


Figura 191: Forza elettromotrice indotta

Il circuito può essere chiuso con qualsiasi componente; consideriamo una resistenza:

$$R_{\text{circuito (totale)}} = \dots \quad [\Omega]$$

Si otterrà quindi il seguente **schema del circuito** mobile:

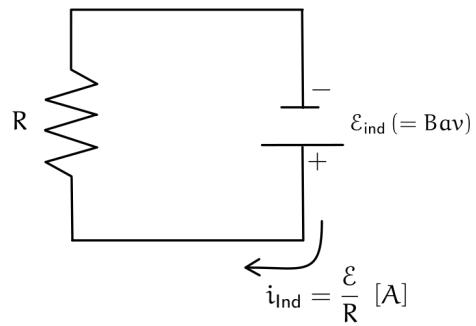


Figura 192: Schema del circuito mobile di Faraday

Si ha quindi una carica immersa in un campo e quindi la carica è soggetta ad una forza che tenta di fermare il moto dell'asta:

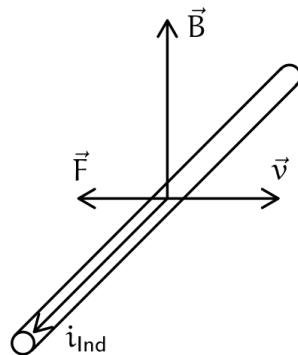


Figura 193: Forza di attrito elettromagnetico

$$dF = id\vec{l} \times \vec{B}$$

Questa forza è chiamata **forza di attrito elettromagnetico** e vale:

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= iaB \quad [\text{N}] \\ &= \frac{\epsilon}{R} aB \\ &= \frac{Bav}{R} aB \\ &= \frac{B^2 a^2 v}{R} \end{aligned}$$

(perchè sono tutte ortogonali tra loro)

### 5.3.1 Bilancio energetico del sistema

- In fisica 1 la potenza è il lavoro nel tempo ( $\frac{dL}{dt}$  [W]):

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$dL = F \cdot dS$$

- In fisica 2 la potenza è la stessa cosa ma abbiamo che:

$$L = -q\Delta V$$

quindi la potenza è:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Vi$$

dove  $V$  può essere:

$$V_R, \quad V_L, \quad V_C, \quad \mathcal{E}$$

Calcoliamo la potenza **dissipata** dalla resistenza  $R$  nel circuito mobile:

$$\begin{aligned} P_R &= (V_R i) \\ &= i^2 R \\ &= \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 R \\ &= \left(\frac{Bav}{R}\right)^2 R \\ &= \frac{B^2 a^2 v^2}{R} \quad [W] \end{aligned}$$

La potenza **erogata** dal generatore è:

$$\begin{aligned} P_E &= V_E i \\ &= \mathcal{E}_{\text{Indotta}} i \\ &= (Bav) \cdot \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) \\ &= (Bav) \cdot \left(\frac{Bav}{R}\right) \\ &= \frac{B^2 a^2 v^2}{R} \quad [W] \end{aligned}$$

Per tenere in moto la barra a velocità costante  $v$  serve una forza uguale e contraria all'attrito che la vuole fermare. Quindi la potenza **meccanica** dell'asta è:

$$\begin{aligned} P_{\text{Asta}} &= F \cdot v \\ &= iaB \cdot v \\ &= \frac{B^2 a^2 v}{R} \cdot v \\ &= \frac{B^2 a^2 v^2}{R} \quad [W] \end{aligned}$$

Osserviamo che la potenza dissipata dalla resistenza  $R$  è uguale alla potenza erogata dal generatore  $E$  e alla potenza meccanica dell'asta, quindi tutta la potenza meccanica dell'asta viene trasformata in potenza elettrica, di conseguenza questo sistema è un trasformatore.

### 5.3.2 Circuito mobile con un condensatore

Siccome il circuito mobile si può chiudere con qualsiasi componente, consideriamo un circuito mobile chiuso con un condensatore:

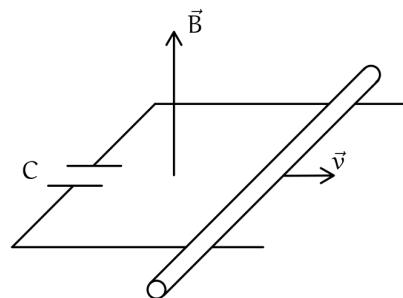


Figura 194: Circuito mobile di Faraday con condensatore

Lo schema del circuito è il seguente:

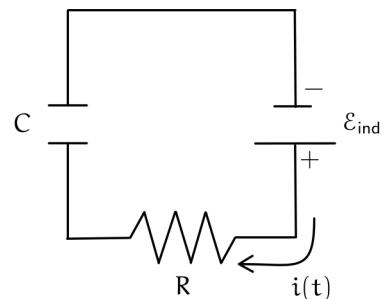


Figura 195: Schema del circuito mobile di Faraday con condensatore

(Nel circuito c'è sempre una resistenza  $R$  che rappresenta la resistenza del filo e dell'asta). Osserviamo che questo è un circuito  $RC$  e l'andamento nel tempo è il seguente:

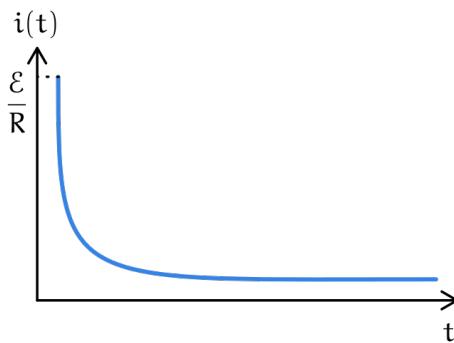


Figura 196: Grafico dell'andamento della corrente

Le potenze si calcolano come nel caso precedente, ma ora la corrente varia nel tempo. Siccome l'andamento va all'infinito, si integra la potenza nell'intervallo di tempo  $[0, \infty]$  e si osserva che la potenza viene dissipata completamente dalla resistenza  $R$  e dal condensatore  $C$ .

#### 5.4 Induzione elettromagnetica

Abbiamo già visto che la variazione di flusso ha un effetto duale:

- Un conduttore in movimento in un campo magnetico produce una forza elettromotrice indotta dovuta alla forza di Lorentz che agisce sulle cariche del conduttore.
- La stessa cosa succede quando è il campo magnetico a muoversi verso il conduttore. Questo fenomeno però è nuovo ed è l'**induzione elettromagnetica**.

Osserviamo più da vicino il sistema del circuito mobile di Faraday:

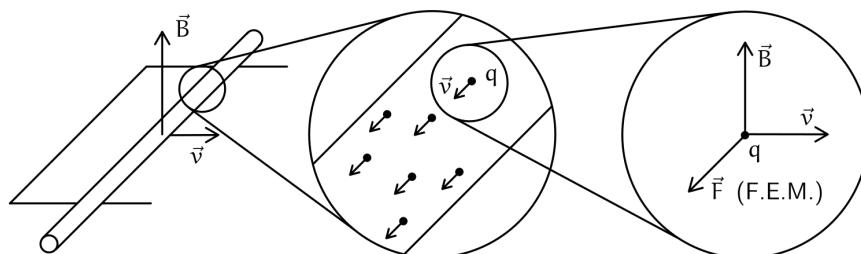


Figura 197: Osservazione del circuito mobile di Faraday

La forza elettromotrice indotta è data dall'azione della forza di Lorentz sulle cariche:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\text{Asta}} v \mathbf{B} \\ &= \int_0^a v \mathbf{B} = v \mathbf{B} a\end{aligned}$$

Se invece è il campo magnetico  $\mathbf{B}(t)$  a variare (con qualsiasi legge) si ha:

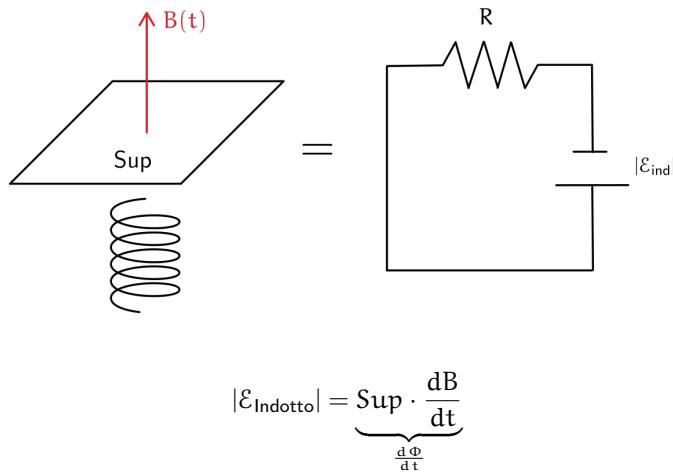


Figura 198: Forza elettromotrice indotta da un campo magnetico variabile

## 5.5 Circuito RL

Abbiamo visto che se si fa scorrere una corrente  $i$  in un circuito si ha un campo che **arrotola** la corrente secondo la regola della mano destra e quindi si ha un autoflusso, cioè un'induttanza  $L$ :

$$\Phi = L i$$

Se la corrente varia  $i(t)$ , allora varierà anche l'autoflusso  $\Phi(t)$  e si avrà una forza elettromotrice **sempre opposta** alla variazione della corrente:

$$i(t) \Rightarrow \Phi(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{Opposta a } i(t)}$$

e si chiama forza **forza contro elettromotrice**:

$$\mathcal{E}_{\text{Contro}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Se si considera un circuito con una resistenza  $R$  e un generatore  $\mathcal{E}$  con un interruttore, se si chiude l'interruttore si ha una variazione della corrente:

$$i : 0 \mapsto i$$

e quindi si avrà una forza contro elettromotrice che si rappresenta con un induttore:

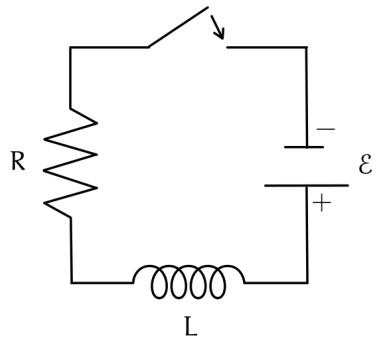


Figura 199: Circuito RL

e vale la legge di Ohm generalizzata:

$$\mathcal{E} = \mathbf{R}\mathbf{i}$$

che adattandola al circuito RL si ottiene:

**Definizione 5.2** (Legge di Ohm del circuito RL).

$$\mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{i}$$

La legge di Ohm del circuito RL rappresenta un circuito di accensione. Un circuito di spegnimento è rappresentato da:

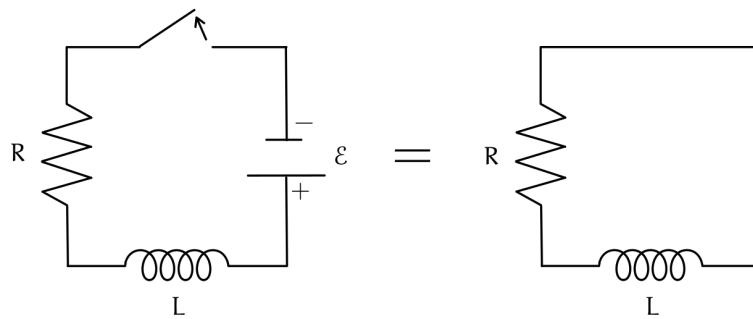


Figura 200: Circuito RL di spegnimento

$$-L \frac{di}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{i}$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine omogenea. La soluzione di questa equazione è:

$$\begin{aligned} -L \frac{di}{dt} &= Ri \\ L \frac{di}{dt} + Ri &= 0 \\ \frac{di}{i} &= -\frac{R}{L} dt \\ \int \frac{di}{i} &= -\frac{R}{L} \int dt \\ \ln |i| &= -\frac{R}{L} t \end{aligned}$$

Quindi lo spegnimento segue un andamento esponenziale:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

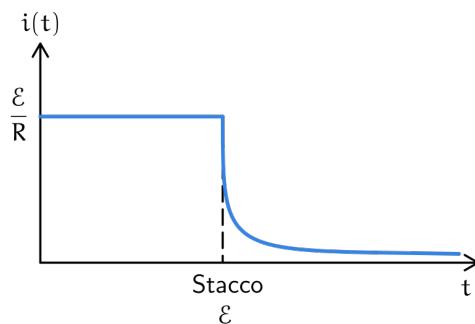


Figura 201: Andamento della corrente durante lo spegnimento

E anche per l'accensione si ha un andamento esponenziale:

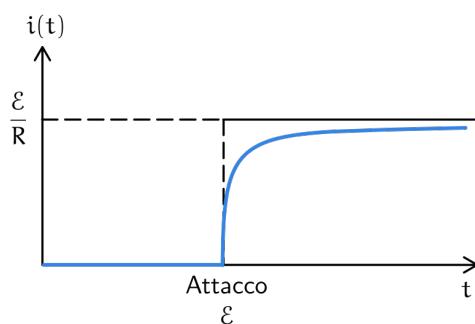


Figura 202: Andamento della corrente durante l'accensione

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

(Attenzione: l'andamento esponenziale è del **raggiungimento dell'equilibrio**, che nello spegnimento è il valore  $i = 0$  e nell'accensione è il valore  $i = i_0$ ).

- Se si trascura l'autoinduzione, si ha un circuito senza induttanza L
- Se non si trascura l'autoinduzione, si ha un circuito con un'induttanza L

## 5.6 Energia intrinseca della corrente

Consideriamo un circuito RL con induttanza non trascurabile:

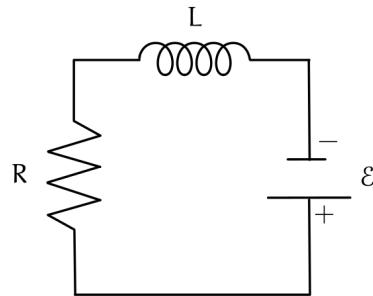


Figura 203: Circuito RL

L'intensità di questo circuito varia nel tempo:  $i : 0 \mapsto i_{\text{regime}}$ . L'induttanza in accensione applica un attrito, quindi si ha una forza contro elettromotrice. Ricordando la definizione di potenza  $P = Vi = \frac{dL}{dt}$  [W] si ha:

$$-\mathcal{E}_L i = P$$

L'energia del sistema è il lavoro fatto per costruirlo. Quindi si può riscrivere come:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

E si ha Faraday declinato per l'autoflusso:

$$\mathcal{E}_{\text{Faraday Autoflusso}} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

Quindi il lavoro totale per "creare" i a regime sarà:

$$\begin{aligned} \text{Lavoro} &= \int_0^\infty P(t) dt \\ &= \int_0^\infty Li \frac{di}{dt} dt \end{aligned}$$

Gli apici vanno da quando la corrente non c'è (0), fino alla fine ( $\infty$ ). Il risultato dell'integrale è:

$$\text{Lavoro} = \frac{1}{2} Li^2 = U_{\text{intrinseca}} \quad [\text{J}]$$

Ciò vuol dire che se si ha un circuito scarico e si vuole caricare si deve fare un lavoro pari a  $\frac{1}{2}Li^2$ . Da questo consegue che un solenoide e anche i condensatori sono sistemi di accumulo di energia.

### 5.6.1 Energia di un sistema di circuiti

Se si hanno N circuiti:

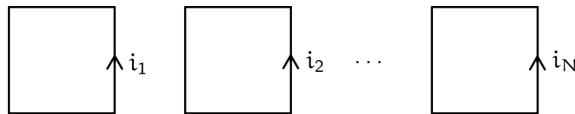
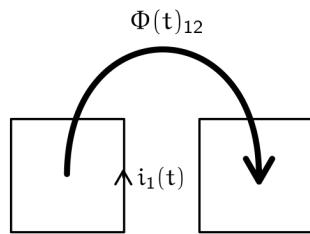


Figura 204: Sistema di N circuiti

Quando in un circuito scorre una corrente  $i$  si ha un campo magnetico con un flusso che, **se varia**, induce una forza elettromotrice su un circuito vicino (**mutua induzione**), o più precisamente nella regione di spazio in cui il flusso varia:



$$\Phi_{12} = Mi_1 \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

Figura 205: Mutua induzione tra circuiti

La presenza di un circuito con un flusso variabile induce una forza elettromotrice su un circuito vicino. Se si hanno N circuiti, si ha una forza elettromotrice su ogni circuito  $i_n$  che dipende da tutti gli altri circuiti  $i_m$ , si avrà quindi una potenza che dipende dal coefficiente di mutua induzione  $V_M$ . La potenza è calcolata come:

$$\begin{aligned} P &= -V_M i \\ &= -M \frac{di_1}{dt} \cdot i_2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\int P dt = Mi_1 i_2$$

L'energia intrinseca totale di un sistema di circuiti è la somma delle energie dei singoli circuiti più una parte di energia dovuta alla mutua induzione di ogni coppia

**inserita una sola volta:**

$$U_{\text{Totale}} = \sum_k^N \frac{1}{2} L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,m}^N M_{km} i_k i_m$$

Il primo  $\frac{1}{2}$  fa parte dell'energia intrinseca di ogni circuito, il secondo  $\frac{1}{2}$  serve soltanto per non contare due volte l'energia di mutua induzione ( $M_{12} = M_{21}$ ).

## 5.7 Campo magnetico indotto

Come la variazione del flusso magnetico genera una forza elettromotrice indotta, anche la **variazione della forza elettromotrice genera un campo magnetico indotto**.

**Definizione 5.3** (Prima equazione di Maxwell per il campo magnetico nel tempo).

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(E)}{dt}$$

dove  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(E)}{dt}$  è la **corrente di spostamento**.

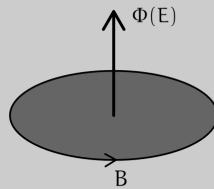


Figura 206: Campo elettrico indotto

In termini locali:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Se non c'è materia ( $\rho = 0$  e  $j = 0$ ) le equazioni di Maxwell sono simmetriche e quindi si ha:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Mettendo insieme le equazioni di Maxwell si ottiene l'**equazione delle onde elettromagnetiche** (Equazione di Alembert), la cui soluzione è un **onda che si propaga nello spazio** con la velocità della luce. Il campo  $\vec{B}$  oscilla ortogonalmente al campo  $\vec{E}$  con la stessa frequenza:

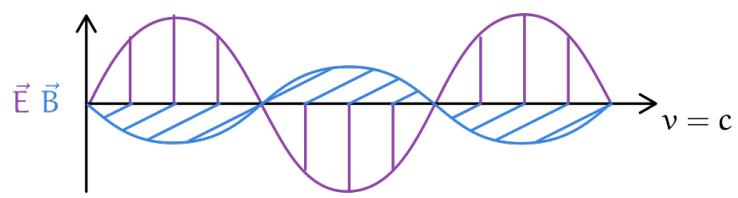


Figura 207: Onda elettromagnetica

Quest'onda è la luce e la frequenza rappresenta il colore.