

Pumping lemma linguaggi context free

ESERCIZIO 2.1. Si dimostri che il linguaggio non è context free.

$$L = \{ 0^{2n} 1 0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Intuitivamente questo linguaggio non è context free perché le grammatiche possono gestire soltanto funzioni lineari. Per dimostrare che un linguaggio non è context free bisogna mostrare che vale la negazione del pumping lemma:

$$\forall k \in \mathbb{N}. \exists z \in L. |z| > k. \forall u, v, w, x, y. \wedge \begin{cases} z = uvwxy \\ |uvw| \leq k \\ |vx| > 0 \end{cases}$$

Le condizioni di appartenenza al linguaggio sono le seguenti

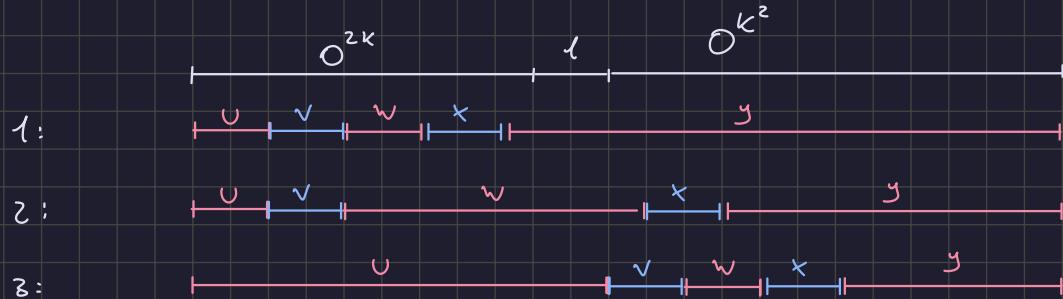
$$z = 0^i 1 0^{j^2} \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. i = zh \wedge j = h^2$$

Considero una stringa nel linguaggio più lunga di k :

$$z = 0^{2k} 1 0^{k^2} \quad h = k \quad (\text{Nei numeri naturali non ci sono vincoli su } k)$$

$$|z| = 2k + k^2 + 1 > k$$

Le possibili suddivisioni della stringa sono le seguenti



$$1) \quad vx \in 0^{2k}$$

$$\exists i \in \mathbb{N}. z = uv^i w x^i y \rightarrow z = 0^{2k + |vx|(i-1)} 1 0^{k^2}$$

$$i=2 \rightarrow z = 0^{2k+|vx|} 1 0^{k^2}$$

$$z \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2k + |vx| = zh \\ k^2 = h^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = k$$

$$\Rightarrow 2k + |vx| = 2k$$

$$\Rightarrow |vx| = 0 \quad \text{Viola le condizioni del PL}$$

$$2) \quad v \in 0^{2k} \wedge x \in 0^{k^2}$$

$$\exists i \in \mathbb{N}. z = 0^{2k + |v|(i-1)} 1 0^{k^2 + |x|(i-1)}$$

$$i=2 \rightarrow z = 0^{2k+|v|} 1^0^{k^2+|x|}$$

$$z \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2k+|v|=2h \\ k^2+|x|=h^2 \end{cases}$$

Per le condizioni del pumping lemma $|vx| > 0$ quindi sicuramente il numero di simboli aumenta e quindi $h > k$, cioè:

$$\begin{aligned} \exists m \in \mathbb{N}. \quad h = k+m &\Rightarrow \begin{cases} 2k+|v|=2(k+m) \\ k^2+|x|=(k+m)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2k+|v|=2k+2m \\ k^2+|x|=k^2+m^2+2km \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} |v|=2m \\ |x|=m^2+2km > k \end{cases} \\ &\Rightarrow |vwx|=|v|+|x|+|w| \geq |x| > k \end{aligned}$$

Se $|vwx| < k$ $z \notin L$

$$3) \quad vx \in 0^{k^2}$$

$$\exists i \in \mathbb{N}. \quad z = uv^iwx^iy \rightarrow z = 0^{2k} 1^0^{k^2+|vx|(i-1)}$$

$$i=2 \rightarrow z = 0^{2k} 1^0^{k^2+|vx|}$$

$$z \in L \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2k = 2h \\ k^2+|vx|=h^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow h=k$$

$$\rightarrow k^2+|vx|=k^2$$

$$\Rightarrow |vx|=0 \quad \text{Viola le condizioni del PL}$$

Quindi il linguaggio non è context free