Esercizi: set 8

1.1

L'intervallo di confidenza al 99.7% per la lunghezza media (in cm) dei salti di una rana è $(12.64, 14.44)$. Quale delle seguenti affermazioni è un'interpretazione corretta di 'confidenza al 99.7%'?

- ☐ Il 99.7% delle rane fa salti di una lunghezza tra i 12.64 cm e i 14.44 cm.
- ☐ La lunghezza media dei salti di una rana prenderà valori in $(12.64, 14.44)$ con probabilità 0.997.
- ☒ Se costruiamo molti intervalli di confidenza, a partire da diversi campioni di dati osservati, il 99.7% di essi conterrà il valore reale della lunghezza media dei salti di una rana.
- ☐ Il 99.7% degli intervalli di confidenza, costruiti a partire da diversi campioni di dati osservati, avranno come estremi 12.64 e 14.44.

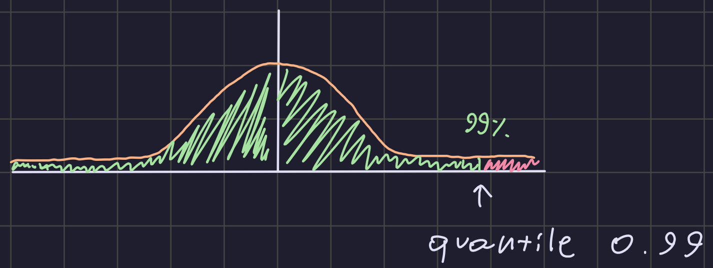
Intervalli che contengono la media della popolazione μ

Intervalli che non la contengono (il 0,3%)

1.2

Nella tabella della funzione di ripartizione della normale standard sono raccolti i valori $\Phi(x)$, che corrispondono ai valori dell'area che rimane sotto la curva della densità gaussiana sull'intervallo $(-\infty, x]$. Usando questa tabella, quale valore dell'area bisogna cercare per ricavare il quantile $z_\bullet$ necessario per determinare un intervallo di confidenza unilaterale al 99% per la media di una popolazione normale con varianza nota?

- ☐ 0.95
- ☒ 0.99
- ☐ 0.975
- ☐ 0.995



1.3

Si consideri un campione, di ampiezza n, estratto da una popolazione normale con media μ e varianza σ^2, entrambe incognite. La formula

$$\left(\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}\right),$$

per l'intervallo di confidenza bilaterale al $(1-\alpha)100\%$ per la media μ, è valida

- ☐ solo se n è grande;
- ☐ solo se n è piccolo;
- ☒ per qualsiasi valore di n;
- ☐ solo per valori grandi di α.

1.4

Si consideri un campione, di ampiezza n, estratto da una popolazione normale con media μ incognita e varianza σ^2 nota. L'ampiezza dell'intervallo di confidenza bilaterale al $(1-\alpha)100\%$ per la media μ

- ☐ dipende dal campione di dati, oltre che dalla taglia n del campione;
- ☒ dipende dalla taglia n del campione, ma non dal valore dei dati;
- ☐ ha distribuzione normale;
- ☐ ha distribuzione t di Student.

1.5

Sia Δ la lunghezza dell'intervallo di confidenza bilaterale al $(1-\alpha)100\%$ per la media di un campione di n dati estratto da una $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 nota. Impiegando un campione di $4n$ dati, a parità di α e σ^2, la lunghezza dell'intervallo di confidenza bilaterale è

- ☐ 4Δ;
- ☐ $\frac{\Delta}{4}$;
- ☒ $\frac{\Delta}{2}$;
- ☐ bisogna conoscere il valore di σ^2 per poterlo dire.

4n:

$$\Delta = \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{4n}} - \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{4n}}$$

$$\Delta = \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{2\sqrt{n}} - \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{2\sqrt{n}}$$

$$\Delta = \cancel{\bar{x}} - \cancel{\bar{x}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{2\sqrt{n}} \cdot 2$$

$$\Delta = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$$

n:

$$\Delta = \bar{x} - \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \cdot 2$$

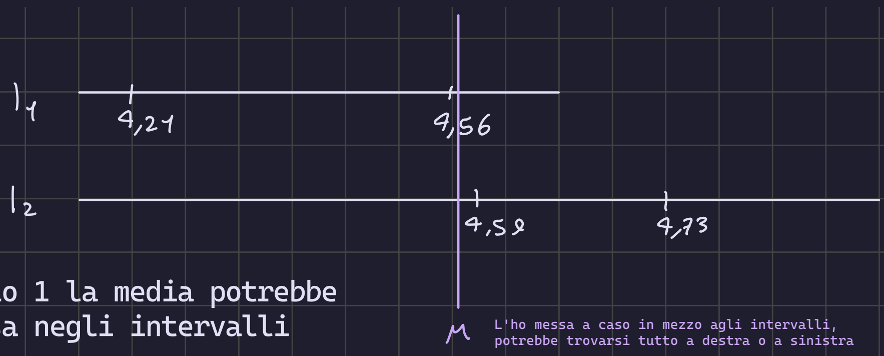
$$\Delta = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \cdot 2$$

Con 4n Δ è la metà

1.6

Si vuole stimare la media μ di una variabile con distribuzione normale di varianza incognita. Calcolando l'intervallo di confidenza bilaterale al 95% su un campione di ampiezza 20, si ottiene $I_1 = (4.21, 4.56)$. Si ricalcola quindi l'intervallo di confidenza bilaterale al 95% su un secondo campione, sempre di ampiezza 20, ottenendo $I_2 = (4.59, 4.73)$. Da questi dati si può concludere che

- ☐ la media μ è certamente compresa tra 4.56 e 4.59;
- ☐ la media μ cade in uno dei due intervalli I_1, I_2 con probabilità almeno del 10%;
- ☒ la media μ potrebbe non appartenere a nessuno dei due intervalli I_1, I_2;
- ☐ è stato commesso un errore nelle misurazioni o nei calcoli, perché I_1 e I_2 non possono essere disgiunti.



Come nell'esercizio 1 la media potrebbe non essere compresa negli intervalli

L'ho messa a caso in mezzo agli intervalli, potrebbe trovarsi tutto a destra o a sinistra

1.7

Vogliamo stimare la media incognita μ di una variabile aleatoria con distribuzione normale di varianza nota pari a 1. Usando un campione $x_1, \ldots, x_n$ estratto da tale distribuzione otteniamo l'intervallo di confidenza bilaterale al 95% pari a $(0.25, 0.59)$. Se ora, *usando lo stesso campione*, calcoliamo l'intervallo di confidenza bilaterale al 99%, quale dei seguenti risultati è il solo possibile?

- ☐ $(0.31, 0.53)$
- ☒ $(0.19, 0.65)$
- ☐ $(0.31, 0.65)$
- ☐ $(0.19, 0.53)$

È l'unico che allarga l'intervallo in entrambe le direzioni

1.8

Il numero di televisori che escono ogni giorno da una certa linea di produzione si distribuisce come una variabile aleatoria normale con deviazione standard pari a 17.4. La media giornaliera della linea di produzione, determinata su un campione di 20 giorni, è 452.3. Gli estremi di un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la media giornaliera della produzione sono

- ☐ 452.3 ± 9.4;
- ☐ 452.3 ± 13.8;
- ☒ 452.3 ± 7.63;
- ☐ non calcolabili; i dati forniti non sono sufficienti per poter rispondere.

$\sigma = 17.4 \qquad \bar{x} = 452,3$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 452,3 \pm 1.96 \cdot \frac{17,4}{\sqrt{20}} = 452,3 \pm 7,63$$

1.9

Un ricercatore, incaricato di stimare la percentuale di famiglie italiane che hanno più di un computer, dopo aver rilevato che il 27% di un campione costituito da 492 famiglie ha dichiarato di possedere più di un computer, fornisce l'intervallo di confidenza $(0.2308, 0.3092)$, ma omette di dire il livello di confidenza. Qual è il livello di confidenza associato a questo intervallo?

- ☐ 0.90
- ☒ 0.95
- ☐ 0.98
- ☐ 0.99

L'intervallo di confidenza per una popolazione di Bernoulli é

$n = 492$

$\hat{q} = 0.27$

$$0.3092 = \hat{q} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{q}(1-\hat{q})}{n}}$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = (0.3092 - 0.27) \cdot \sqrt{\frac{492}{0.27 \cdot (1-0.27)}}$$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \qquad P(z > 1,96) = \frac{\alpha}{2} \qquad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \qquad \alpha = 0,05$

1.10

La quantità di stoffa usata per produrre poltrone è distribuita come una variabile aleatoria normale. Su un campione casuale di 15 poltrone, si è riscontrato che l'ammontare medio del materiale è 912 centimetri quadrati, con una deviazione standard di 64 centimetri quadrati. Gli estremi di un intervallo di confidenza bilaterale al 99% per la quantità media di stoffa usata sono

- ☐ 912 ± 44.3;
- ☐ 912 ± 42.6;
- ☒ 912 ± 49.2;
- ☐ 912 ± 46.8.

$\bar{x} = 912 \text{ cm}^2$ $\quad \hat{S} = 64 \text{ cm}^2$

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = 912 \pm 2.98 \cdot \frac{64}{\sqrt{15}} = 912 \pm 49{,}2$$

2.1

Per rilevare il grado di apprezzamento della mensa universitaria, viene intervistato un campione di 100 studenti, 67 dei quali dichiarano di apprezzare la qualità del cibo servito in mensa. Si indichi con q la probabilità che uno studente scelto a caso tra tutti gli iscritti apprezzi il cibo servito in mensa.

(a) Usando i dati forniti dal problema, si determini l'intervallo di confidenza al 95% per q.

(b) Quanto deve essere grande il campione di studenti intervistati, affinché l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per q sia più piccola di 0.04?

a) $n = 100$ $\quad q = 0.67$ $\quad \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

$$q \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} = 0.67 \pm 2{,}576 \cdot \sqrt{\frac{0.67(1-0{,}67)}{100}} = (0{,}578,\ 0{,}762)$$

b)

```
alpha <- 1 - 0.95
z <- -qnorm(alpha/2)
q <- 0.67
n <- 2124

upper <- q + z * sqrt((q*(1-q))/n)
lower <- q - z * sqrt((q*(1-q))/n)
cat("(", lower, ",", upper, ")\n")

diff <- upper - lower
diff
```

2.2

Una casa farmaceutica vuole determinare il tempo medio di risposta dell'organismo all'assunzione di un nuovo antidolorifico per i dolori articolari. Il farmaco viene provato su 10 individui, i quali iniziano ad avvertire effetti positivi dopo i tempi che seguono, misurati in minuti:

$$35 \quad 24 \quad 51 \quad 42 \quad 40 \quad 33 \quad 37 \quad 41 \quad 44 \quad 29.$$

Si assuma che il tempo di risposta abbia distribuzione normale di media μ e varianza σ^2, entrambe incognite. Determinare gli intervalli di confidenza (bilaterali e unilaterali) al 95% e al 99% per μ.

```r
n <- 10
tempo <- c(35, 24, 51, 42, 40, 33, 37, 41, 44, 29)

mean <- mean(tempo)
sd <- sd(tempo)

alpha1 <- 0.95
alpha2 <- 0.99

i1 <- data.frame(
  upper = mean + qt(alpha1, n-1) * sd/sqrt(n),
  lower = mean - qt(alpha1, n-1) * sd/sqrt(n),
  biupper = mean + qt(1 - (1-alpha1)/2, n-1) * sd/sqrt(n),
  bilower = mean - qt(1 - (1-alpha1)/2, n-1) * sd/sqrt(n)
)

i2 <- data.frame(
  lower = mean - qt(alpha2, n-1) * sd/sqrt(n),
  upper = mean + qt(alpha2, n-1) * sd/sqrt(n),
  biupper = mean + qt(1 - (1-alpha2)/2, n-1) * sd/sqrt(n),
  bilower = mean - qt(1 - (1-alpha2)/2, n-1) * sd/sqrt(n)
)

cat("95% ( -inf,", i1$lower, ") (", i1$upper, ", inf ) (", i1$bilower, ",", i1$biupper, ")\n")
cat("99% ( -inf,", i2$lower, ") (", i2$upper, ", inf ) (", i2$bilower, ",", i2$biupper, ")\n")
```