Esame 20/06/2022

1. **(6 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}.$$

   (a) Si calcoli, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il rango rk$A$ di A.
   (b) Si calcoli il determinante det$A$ di A.
   (c) Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che A possiede una inversa.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{21}(2) \\ E_{31}(-1) \\ \sim \\ E_{41}(-1+a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 0 & 0 & 2 & a^2+2a-3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_2(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 0 & 0 & 2 & a^2+2a-3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{32}(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a^2+2a-3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_3\left(\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a^2+2a-3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{43}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+2a-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_4\left(\frac{1}{a^2+2a-3}\right) \\ \sim \\ a \neq -3 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(A) = 4$ se $a \neq -3 \wedge a \neq 1$

$a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rk}(A_1) = 3 \quad \text{se } a = 1$$

$a = -3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rk(A_{-3}) = 3 \quad \text{se } a = -3$$

b)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{bmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -a & 2+a & 2-a \\ 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2+a \\ 1+a & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -a & 2-a \end{pmatrix} + (1+a)(-1+a)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a & 2+a \end{pmatrix} - 2\left((1+a)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a & 2+a \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}\right)$$

$$= -2(-4a-2) + (1+a)(-1+a)(-2) - 2\left((1+a)(-2) + 2(2a+1)\right) =$$

$$= 8a + 4 + 2 - 2a^2 - 2(2a) =$$

$$= 8a + 4 + 2 - 2a^2 - 4a =$$

$$= -2a^2 + 4a + 6$$

c) A possiede un'inversa se $\det \neq 0$

$$-2a^2 + 4a + 6 \neq 0$$

$$a^2 - 2a + 3 \neq 0$$

$$(a-3)(a+1) \neq 0$$

$a \neq 3$

$a \neq -1$

A possiede un'inversa se $a \neq 3 \wedge a \neq -1$

2. **(12 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.

(b) Si verfichi che la matrice B è diagonalizzabile e si scrivano la matrice diagonale D e la matrice invertibile S tali che $B = SDS^{-1}$.

(c) Utilizzando la diagonalizzazione, si calcoli il prodotto B^5.

a)

$$\det(B-\lambda I_4) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = (-1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 2$

$$E(\lambda_1) = N(B+1I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_2(\tfrac{1}{3})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_4(\tfrac{1}{5})}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 0 \\ x_4 = s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -\frac{3}{5}s \\ x_3 = -\frac{3}{5}s \\ x_4 = s \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ é una base di $E(-1)$

$$E(\lambda_2) = N(B-2I_4) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_1(-\tfrac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_2(-\tfrac{1}{3})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{41}(-5)}{\overset{E_{31}(3)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = s \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é una base di } E(2)$$

b) La matrice é diagonalizzabile se $m_i = d_i$

$m_1 = 2 \quad m_2 = 2$

$d_1 = dim(E(-1)) = n - rk(E(-1)) = 4-2=2$

$d_2 = dim(E(2)) = n - rk(E(2)) = 4-2=2$

La matrice é diagonalizzabile

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $B^5 = S D^5 S^{-1}$

$$D^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_2(-\frac{5}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_{42}(-1)}{\overset{E_{32}(\frac{3}{5})}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_3(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{43}(-\frac{5}{3})}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{23}\left(\tfrac{5}{3}\right)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^5 = S D^5 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 32 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 32 \end{bmatrix}$$

3. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli la H-trasposta M^H di M.

(b) Si determinino una base di $C(M)$ e una base di $N(M^H)$ su $\mathbb{C}$.

(c) Si scriva una base di $\mathbb{C}^3$ che contiene le colonne di M.

a) $M^H = \begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ -2i+1 & 2 & -2i \end{pmatrix}$

b) $$\begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix} \underset{E_{31}(i)}{\overset{E_{21}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ 0 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_2(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $C(M)$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ -2i+1 & 2 & -2i \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_1(i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ -2i+1 & 2 & -2i \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{21}(2i-1)} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 4+i & 1-4i \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_2\left(\frac{4-i}{17}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - ix_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - ix_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = ti \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $N(M^H)$

c)

$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $\mathbb{C}^3$ che contiene le 2 colonne di M

4. **(4 punti)** Vero o falso? Si motivi la risposta!

(a) Il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ammette soltanto la soluzione banale $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente dipendente.

a) FALSO perché per il teorema di Rouché-Capelli il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U \mid 0_v)$$

ammette infinite soluzioni perché l'ultima colonna non é dominante e almeno una colonna di U non é dominante.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ VERO