Esame 29/02/24

Esercizio 1. (8 PUNTI) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Trovare tutti gli autovalori di A.

(b) Calcolare le molteplicità algebriche m_i e le molteplicità geometriche d_i per ogni autovalore di A.

(c) Calcolare una base per ogni autospazio della matrice A.

(d) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e, in caso affermativo, determinarla.

a) $\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-1-\lambda)\left((2-\lambda)(3-\lambda) - (-2\cdot(-1))\right) - \left(-2(3-\lambda) - (-2\cdot 2)\right) - 2\left(-2(-1) - (2-\lambda)2\right) =$

$= (-1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) - (-2 + 2\lambda) - 2(-2 + 2\lambda) =$

$= -4 + 5\lambda - \lambda^2 - 4\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 3(-2 + 2\lambda) =$

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 + 6 - 6\lambda =$

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 =$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 2 =$

$= -\lambda^2(\lambda - 1) + 3\lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) =$

$= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) =$

$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$

$= -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) =$

$= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

b) $m_1 = 2 \quad m_2 = 1$

$$d_1 = \dim(E(\lambda_1)) = n - rk(N(\lambda_1)) = 3 - 1 = 2$$

$$rk(N(\lambda_1)) = rk\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{E_1(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = n - rk(N(\lambda_2)) = 3 - 2 = 1$$

$$rk\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_1(-\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-2)}{\overset{E_{21}(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \overset{E_2(-\frac{3}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \overset{E_{32}(\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t - s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di: $E(\lambda_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}t = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di: $E(\lambda_2)$

d) Una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori é formata dall'unione delle basi degli autospazi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ essendo composta da 3 elementi é una base di $\mathbb{R}^3$

Esercizio 2. (9 Punti) Si consideri la matrice $B_t = \begin{pmatrix} -t & -t & 1+t \\ -t & 1 & 1+2t \\ t & t & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, con $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare una forma ridotta di B_t per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sia $t = 0$; trovare tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo $B_0 x = 0$, dove $x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$ è il vettore delle incognite.

(c) Sia $t = 2$; scrivere esplicitamente il sistema lineare per cui B_2 è la matrice aumentata e stabilire se tale sistema ammette zero, una o infinite soluzioni.

(d) Sia $t = 1$; stabilire se B_1 è invertibile e, in caso affermativo, determinare l'inversa.

a)

$t \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} -t & -t & 1+t \\ -t & 1 & 1+2t \\ t & t & 0 \end{pmatrix} \underset{t\neq 0}{\overset{E_1(-\frac{1}{t})}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1+t}{t} \\ -t & 1 & 1+2t \\ t & t & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-t)}{\overset{E_{21}(t)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1+t}{t} \\ 0 & 1+t & t \\ 0 & 0 & -1+t \end{pmatrix} \underset{t\neq -1}{\overset{E_2(\frac{1}{1+t})}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1+t}{t} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1+t} \\ 0 & 0 & -1+t \end{pmatrix} \overset{E_3(-\frac{1}{1+t})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1+t}{t} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1+t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ se $t \neq 0$ e $t \neq -1$

$t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$t = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(1)}{\overset{E_{21}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_2(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = t \end{cases} = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ sono le soluzioni del sistema lineare

c)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice in forma ridotta é:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1+t}{t} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1+t} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il sistema non ammette soluzioni perché la colonna dei termini noti é dominante (Teorema di Rouché-Capelli)

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1+t}{t} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1+t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ é invertibile se $\det \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_{31}(-1)}{\overset{E_{21}(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_3(\frac{1}{2})}{\overset{E_2(\frac{1}{2})}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{13}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{23}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{12}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

La matrice inversa é: $$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (9 Punti) Si consideri la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$.

(a) Calcolare la dimensione dello spazio delle colonne $C(C)$ della matrice C e, se $\dim C(C) \neq 0$, trovare una base di $C(C)$.

(b) Calcolare la dimensione dello spazio nullo $N(C)$ della matrice C e, se $\dim N(C) \neq 0$, trovare una base di $N(C)$.

(c) Stabilire se il sistema lineare $Cx = b$ ammette zero, una o infinite soluzioni, dove $b = \begin{pmatrix} 2 & -i & -4i+12 \end{pmatrix}^T$ è il vettore dei termini noti e $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ è il vettore delle incognite. Nel caso in cui il sistema ammetta soluzioni, determinare tutte le soluzioni.

(d) Determinare se il vettore $b = \begin{pmatrix} 2 & -i & -4i+12 \end{pmatrix}^T$ appartiene allo spazio delle colonne $C(C)$ della matrice C.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{31}(-12)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{E_{31}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim(C(C)) = 2$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $C(C)$

b) $\dim(N(C)) = n - rk(C) = 2 - 2 = 0$

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -i \\ 12 & 2 & -4i+12 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -i \\ 12 & 2 & -4i+12 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{31}(-12)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & -4 & -4i \end{array}\right) \underset{\sim}{E_2(-1)}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -4 & -4i \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{32}(4)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Il sistema lineare ammette una sola soluzione

$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 1 \\ x_2 = i \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} i + 1 \\ x_2 = i \end{cases}$

d) $$C(C) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\middle|\; C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = c \right\}$$

per il punto c) esiste una sola soluzione al sistema $Cx = b$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i + 1 \\ i \end{pmatrix}$ quindi $b \in C(C)$

Esercizio 4. (4 Punti) Vero o Falso? Giustificare la risposta.

(a) I vettori $v = (-1 \quad i \quad 2)^T, w = (5i \quad -5 \quad 0)^T \in \mathbb{C}^3$ sono ortogonali rispetto al prodotto interno standard di $\mathbb{C}^3$.

(b) Sia $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, allora $z^2 = -4$.

(c) Lo spazio vettoriale $\mathbb{C}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a due nell'indeterminata x è isomorfo a $\mathbb{C}^3$.

a) $(v|w) = v^H \cdot w = (-1 \; -i \; 2) \begin{pmatrix} 5i \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5i + 5i + 0 = 0$ VERO

b) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i$

$z^2 = 2\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4(0+i) = 4i$

FALSO

c) Vero perche $\mathbb{C}^2[x] = \alpha x_1^2 + \beta x_2 + \gamma$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \mathbb{C}^3$ hanno la stessa dimensione