

Architettura degli elaboratori

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Hardware	2
1.2	Campionamento dei dati	2
2	Sistemi di codifica	3
2.1	Codifica di informazioni non numeriche	3
2.2	Numeri interi assoluti	3
2.3	Numeri interi relativi	4
2.3.1	Codifica a modulo + segno	4
2.3.2	Codifica in complemento a 2	5
3	Numeri razionali	6
3.1	Codifica in virgola fissa	7
3.1.1	Errore percentuale	7
3.2	Codifica in virgola mobile	8
3.2.1	Divisione di bit tra segno, mantissa ed esponente	8
4	Modelli	10
4.1	Tabelle di verità	12
4.1.1	Operatore prodotto	12
4.1.2	Operatore somma	12
4.1.3	Operatore negazione	12
5	Transistor	12
5.1	Transistor CMOS	12
5.1.1	Transistor N	12
5.1.2	Transistor P	13
5.1.3	Circuito di negazione (NOT)	13
5.1.4	Circuito del prodotto (AND)	14
5.1.5	Circuito della somma (OR)	14
6	Espressione in somma di prodotti	15
6.1	Riduzione	16
6.2	Terminologia	16
7	Assorbimento	17
7.1	Mappe di Karnaugh	18
8	Metodo di Quine-McCluskey	20
8.1	Esempio con funzione completamente specificata	20

1 Introduzione

L'informatica è nata per la risoluzione di problemi di calcolo, in particolare quelli di calcolo numerico. Per questo motivo i primi computer erano macchine che eseguivano operazioni aritmetiche. Per risolvere questi problemi si usano degli algoritmi che sono una sequenza di istruzioni semplici che portano poi a risolvere problemi di complessità variabile. Anche gli algoritmi hanno una complessità che deve essere adeguata alla risoluzione del problema.

1.1 Hardware

Un algoritmo deve essere trasformato in un processo di calcolo automatico, quindi deve essere implementato tramite hardware. Ci sono due tipi di hardware:

- **Embedded** che è un hardware dedicato ad un singolo compito. Ad esempio il microonde.
- **General purpose** non si sa l'utilizzo finale, quindi ha funzionalità generali ampliate dal software installato. L'hardware general purpose è programmabile attraverso il software. Un esempio è il PC.

In base al tipo di hardware l'algoritmo viene implementato in diversi modi:

- **Algoritmo** → **Software**: Tramite un linguaggio di programmazione
- **Algoritmo** → **Hardware embedded**: Tramite linguaggi di basso livello come C, Assembly o il sistema operativo.
- **Algoritmo** → **Hardware**: Tramite sintesi logica

1.2 Campionamento dei dati

Ogni cosa nel mondo è rappresentabile da funzioni continue nel tempo $f(t)$, ma con risorse finite è impossibile rappresentare infiniti dati, bisogna quindi campionarli.

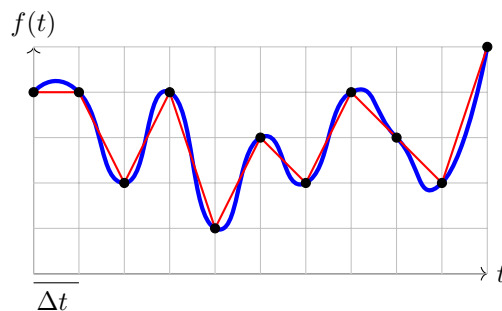


Figura 1: Funzione casuale continua nel tempo

Per campionare la funzione nella figura 1 bisogna scegliere un intervallo di tempo Δt e prendere un valore della funzione ogni Δt . In questo caso le linee verticali rappresentano il **campionamento**, mentre quelle orizzontali rappresentano la **discretizzazione o quantizzazione**. La linea rossa è una spezzata approssimata della funzione continua, infatti per il teorema di Shannon:

Teorema 1 *Deciso il grado di errore da voler compiere, esistono una precisa frequenza di campionamento e un intervallo di discretizzazione che garantiscono quell'errore.*

Il sistema di calcolo è ora diventato digitale, cioè elabora i segnali numerici in ingresso per produrre segnali numerici in uscita.

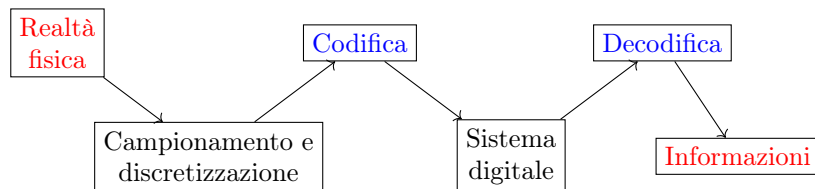


Figura 2: Dalla realtà fisica al sistema digitale

2 Sistemi di codifica

Ogni sistema digitale lavora in base binaria, quindi entrano N bit ed escono M bit. I bit in uscita devono essere codificati per realizzare delle informazioni. Ci sono 2 tipi di informazioni:

- **Informazioni intelleggibili:** sono già chiare agli esseri umani, come un testo scritto.
- **Informazioni non intelleggibili:** hanno bisogno di macchine per essere riprodotte, come le casse per l'audio.

2.1 Codifica di informazioni non numeriche

Ogni informazione deve avere un codice univoco in modo che il sistema digitale non possa sbagliare a decodificarla. Date M informazioni si ricavano $n = \log_2(M)$ codici disponibili per rappresentarle.

Esempio 2.1

Con $M = 7$ informazioni:

- $n = \log_2(7) \approx 3$ bit
- $2^3 = 8$ codici disponibili

2.2 Numeri interi assoluti

I numeri interi assoluti rappresentano solo i valori da 0 a $2^n - 1$, dove n è il numero di bit disponibile.

La codifica da base decimale a base binaria prende il nome di **codifica a modulo**

Esempio 2.2

Si deve convertire il numero 57_{10} in base binaria

$$n = \log_2(57) = 6 \text{ bit (minimi)}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^i - 1 = 63 \text{ (codici massimi)}$$

Si eseguono i seguenti passaggi:

1. Si sottraggono le potenze di 2 partendo da $n - 1$.

- Se la potenza 2^i è minore o uguale del numero, allora si moltiplica per 1.
- Se la potenza 2^i è maggiore del numero, allora si moltiplica per 0.

2. Le sottrazioni continuano fino a quando si giunge a 0.

$$57_{10} - 1 \cdot 2^5 = 25_{10} - 1 \cdot 2^4 = 9_{10} - 1 \cdot 2^3 = 1_{10} - 0 \cdot 2^2 = 1_{10} - 0 \cdot 2^1 = 1_{10} - 1 \cdot 2^0$$

$$57 = 111001$$

2.3 Numeri interi relativi

La codifica più ovvia per i numeri interi relativi è la codifica a **modulo + segno**. Tuttavia rappresenta varie problematiche, per cui si preferisce usare la codifica in **complemento a 2**.

2.3.1 Codifica a modulo + segno

$$\text{Intervallo: } -2^{n-1} \leq N \leq 2^{n-1} - 1$$

Il segno si rappresenta con un bit, 0 per il positivo e 1 per il negativo. Il bit più significativo è il bit del segno, mentre i bit meno significativi rappresentano il modulo.

1 bit: segno \pm	7 bit: modulo
-----------------------	---------------

Considerando l'esempio 2.2 si hanno le seguenti rappresentazioni:

$$\begin{aligned} +57_{10} &= \mathbf{0} | 111001_2 \\ -57_{10} &= \mathbf{1} | 111001_2 \end{aligned}$$

Sorge però un problema quando si vuole rappresentare il valore 0_{10} , che in binario risulterebbe:

$$\begin{aligned} +0_{10} &= \mathbf{0} | 000000_2 \\ -0_{10} &= \mathbf{1} | 000000_2 \end{aligned}$$

Inoltre le somme che passano dal positivo al negativo e viceversa risultano errate.

2.3.2 Codifica in complemento a 2

$$\text{Intervallo: } -2^{n-1} \leq N \leq 2^{n-1} - 1$$

La codifica in complemento a 2 rimuove tutti i problemi della codifica in modulo + segno. Questa codifica infatti rende le somme molto più semplici. La somma facile infatti è l'obiettivo di questa codifica e parte dell'idea di trovare la codifica di -1, pertanto si cerca di formulare $-1 + 1 = 0$.

Obiettivo	Risultato
$ \begin{array}{r} ????_2 + \\ 0001_2 = \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1111_2 + \\ 0001_2 = \end{array} $
$0000_2 =$	0000_2

Se si considera il numero di bit $n = 4$, allora l'intervallo di valori è $-2^3 \leq N \leq 2^3 - 1$:

$0_{10} = 0000_2$	$-1_{10} = 1111_2$
$1_{10} = 0001_2$	$-2_{10} = 1110_2$
$2_{10} = 0010_2$	$-3_{10} = 1101_2$
$3_{10} = 0011_2$	$-4_{10} = 1100_2$
$4_{10} = 0100_2$	$-5_{10} = 1011_2$
$5_{10} = 0101_2$	$-6_{10} = 1010_2$
$6_{10} = 0110_2$	$-7_{10} = 1001_2$
$7_{10} = 0111_2$	$-8_{10} = 1000_2$

I valori nel complemento a 2 ciclano, quindi se si somma 1 a 7 si ottiene -8.

Esempio 2.3

Sottrazione con il complemento a 2: $43 - 17 = 25$

$$n = 7 \text{ bit}$$

1. Per prima cosa si prende il valore assoluto del numero negativo 17_{10} e si converte in binario.

$$17_{10} = 0010001_2$$

2. Si inverte il numero trovato.

$$!(0010001_2) = 1101110_2 = -18_{10}$$

3. Si somma 1 al numero trovato.

$$\begin{array}{r}
1101110 + \\
0000001 = \\
\hline
1101111 \\
1101111_2 = -17_{10}
\end{array}$$

4. Si somma il numero trovato al numero positivo.

$$\begin{array}{r} 0010001 + \\ 1101111 = \\ \hline 10011010 \end{array}$$

5. Il risultato ottenuto è:

$$10011010$$

Si osserva che c'è un bit in più rispetto a quelli disponibili (quello in grassetto), vuol dire che risulta in overflow^a, quindi si scarta il bit più significativo e si ottiene:

$$0011010_2 = 26_{10}$$

che è il risultato corretto.

^aIndica il "traboccamento", cioè se viene superato il limite massimo l'overflow è un errore, non perchè sia sbagliata la somma, ma perchè il risultato non è codificabile con il numero di bit disponibili

Estensione del numero con il complemento a 2

- Se un numero è **positivo** va esteso con gli **0**

$+57_{10} +$	$0111001_2 +$
$+7_{10} =$	0000 $111_2 =$
<hr/>	
$+64_{10}$	1000010_2

- Se un numero è **negativo** va esteso con gli **1**

$+57_{10} +$	$0111001_2 +$
$-7_{10} =$	1111 $111_2 =$
<hr/>	
$+50_{10}$	10110010_2

3 Numeri razionali

I numeri razionali sono composti da una parte intera e una parte frazionaria. Si possono codificare in 2 modi:

- **Virgola fissa**(fixed point): viene usata maggiormente nei sistemi embedded quando si sa a priori il numero più grande e la precisione che si vuole ottenere
- **Virgola mobile**(floating point): viene usata maggiormente nei sistemi general purpose.

3.1 Codifica in virgola fissa

Esempio 3.1

Si hanno a disposizione 8 bit: 4 per la parte intera e 4 per la parte frazionaria. Vogliamo decodificare il numero 0110.1011_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & +6 & & \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & & & \end{array}$$
$$+6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 6 + \frac{11}{16} = \frac{107}{16} = 6.6875$$

Se si vuole codificare un numero da decimale a binario bisogna tenere in considerazione che non è certo che il numero sia razionale anche in base 2, quindi bisogna approssimare per rappresentarlo.

Esempio 3.2

Prendiamo in considerazione $+4 + \frac{3}{5}$, in questo caso bisogna andare "a tentoni" e trovare la rappresentazione binaria che approssima con il minor errore possibile.

$$\begin{aligned} 4_{10} &= 0100_2 \\ 0.1001 &= \frac{9}{10} \Delta - \frac{3}{80} \\ 0.0111 &= \frac{7}{16} \Delta - \frac{4}{80} \\ 0.0110 &= \frac{3}{8} \Delta - \frac{9}{40} \\ \underline{0.1010} &= \frac{5}{8} \Delta - \frac{1}{40} \end{aligned}$$

Δ rappresenta l'errore, quindi la rappresentazione più vicina è 0100.1010_2 . Però non è stato rappresentato $\frac{3}{5}$, ma $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$.

Questo metodo è pesante perchè bisogna controllare più alternative.

3.1.1 Errore percentuale

Bisogna decidere se calcolarlo rispetto alla parte intera o a quella frazionaria. Nel seguente esempio viene calcolato l'errore percentuale rispetto alla parte frazionaria dell'esempio 3.2.

Esempio 3.3

$$\frac{1}{40} : \frac{3}{5} = \frac{1}{40} * \frac{5}{3} = \frac{1}{24} \approx 0.052\%$$

Il massimo errore che si può fare è l'overflow.

3.2 Codifica in virgola mobile

Gli standard della virgola mobile sono: IEEE 754. Questo standard è stato rivisto molte volte e ora viene usato da tutte le codifiche per i numeri in virgola mobile.

Il numero viene separato in 3 parti:

- **S**: Segno
- **e**: Esponente
- **M**: Mantissa

La struttura del numero è quindi:

$$N = \pm \cdot M^{\pm e}$$

Questo permette di dividere il numero in modo da poter scegliere quanti bit dedicare alla mantissa e quanti all'esponente. Si riscontrano però i seguenti problemi:

- Bisogna scegliere la base in cui fare la codifica \rightarrow base 2
- Bisogna scegliere la divisione di bit tra *segno*, *mantissa* e *esponente* \rightarrow 1 *S*, 23 *M*, 8 *e*
- La rappresentazione deve essere univoca \rightarrow 1. ...2
- Bisogna trovare un modo per rappresentare gli errori

Se la mantissa e la base sono in base 2 la moltiplicazione e la divisione sono agevolate tramite l'utilizzo dello *shift*.

- $0110 \cdot 2 = 1100$ è uno shift a sinistra in binario.

$$\begin{array}{c} 0110 \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ 1100 \end{array}$$

- $1010/2 = 0101$ è uno shift a destra in binario.

$$\begin{array}{c} 1010 \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ 0101 \end{array}$$

3.2.1 Divisione di bit tra segno, mantissa ed esponente

Un numero è rappresentabile in 2 modi:

- Singola precisione 32 bit \rightarrow float
- Doppia precisione 64 bit \rightarrow double

Prendiamo in considerazione 32 bit, ora dobbiamo decidere quanti bit dedicare alla mantissa e all'esponente.

$$2^{\pm e}$$

$$\begin{aligned} |e| &= 4bit = 2^{+7} \\ 5bit &= 2^{+15} \\ 6bit &= 2^{+31} \\ 7bit &= 2^{+63} \\ 8bit &= 2^{+127} \end{aligned}$$

L'impatto dei bit sull'esponente è doppiamente esponenziale, quindi cresce tantissimo.

- **8 bit** all'esponente, quindi l'esponente può assumere valori da -127 a $+127$.
- **23 bit** alla mantissa, quindi la mantissa può assumere valori da 0 a $2^{23} - 1$
- **1 bit** al segno.

1 bit: segno \pm	8 bit: esponente	23 bit: mantissa
-----------------------	------------------	------------------

Per la rappresentazione univoca la mantissa si codifica in virgola fissa. Cioè si parte da una mantissa con un **punto fisso** e dividendo o moltiplicando (shift) si può spostare la virgola per arrivare alla forma **1.00000...** e questa forma è la rappresentazione univoca.

Questa operazione si chiama **normalizzazione** e visto che la rappresentazione è sempre la stessa l' 1 . non viene rappresentato, quindi viene inserito nella mantissa solo tutto ciò che viene dopo.

$$\begin{aligned} 11111111 &\pm\infty \\ 11111110 &+127 \\ &\dots \\ 00000000 &\pm 0 \\ &\dots \\ 00000001 &-126 \\ 00000000 &-127 \end{aligned}$$

Figura 3: Range dell'esponente

Si è deciso di codificare l'esponente in **Eccesso 127**. Quindi per rappresentare lo zero si usa come esponente il minore numero possibile: $1 \cdot 2^{-127} = 0$. Per codificare i numeri si somma 127 al numero desiderato e visto che i numeri possibili ora vanno da -127 a $+127$ se codifichiamo il risultato in modulo avremo dei numeri da 0 a 256 .

Esempio 3.4

Si vuole decodificare il seguente numero:

$$1\ 01110111\ 0110\dots 0$$

$$M = -(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) * 2 = -(\frac{11}{8}) * 2^e$$

$$E = (1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64) - 127 = 119 - 127 = -8$$

$$N = -\frac{11}{8} * 2^{-8}$$

Esempio 3.5

Codifica $+(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}) * 2^{+34}$

1. Sappiamo già che il numero è positivo quindi:

$$S = 0$$

2. Calcoliamo la mantissa:

$$4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \underbrace{100}_{4_{10}} . \underbrace{10010\dots 0}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}}$$

3. La mantissa va normalizzata moltiplicando per 4:

$$100.10010\dots 0 * 2^{+2} = 1.0010010\dots 0$$

$$M = 0010010\dots 0$$

4. Calcoliamo l'esponente:

$$\bullet\ 0\ 00000000\ 0\dots 0 = +0$$

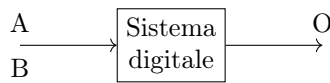
$$\bullet\ 1\ 00000000\ 0\dots 0 = -0$$

Quando l'esponente è tutto 1 e la mantissa tutta 0 allora equivale a *infinito* + o - in base al primo bit. Se invece la mantissa è diversa da 0 con esponente tutti 1 allora rappresenta un errore NaN.

Somma:

4 Modelli

Per un progetto bisogna creare un **modello** che rappresenti il sistema. Boole ha cercato di rappresentare tutte le algebre. Lo ha fatto attraverso una quintupla: $\langle B^n, \cdot, +, \{0, 1\} \rangle$



- B^n è l'insieme di valori
- $\{0, 1\}$ è l'alfabeto (sistema binario)
- "." e "+" sono 2 operatori

Bool garantisce che si può creare qualsiasi funzione utilizzando soltanto i 2 operatori:

$$f(B^n) \rightarrow B^m$$

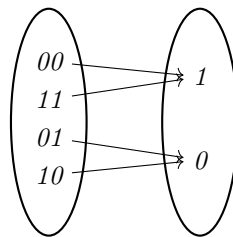
Esempio 4.1

Si vuole creare un modello con 2 bit in entrata e 1 in uscita:

$$n = 2 \quad m = 1$$

$$O = 1 \leftrightarrow A = B$$

$$f(B^2) \rightarrow B$$



Per mappare i valori in ingresso con quelli di uscita si usa una **tabella di verità**:

A	B	O
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chiamiamo **mintermine** un punto dello spazio booleano in ingresso in cui la funzione vale 1. Il **maxtermine** è il contrario. L'insieme di mintermini $\{m_0^a, m_3\}$ si chiama **ON-SET**. L'insieme dei maxtermini $\{m_1, m_2\}$ si chiama **OFF-SET**. Basta uno dei due insiemi (ON-SET, OFF-SET) per definire la funzione.

$$m_3 = A \cdot B$$

Dire che m_3 è il prodotto delle due variabili è un modo corretto per rappresentarlo.

$$m_0 = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Per rappresentare il mintermine basta fare il prodotto delle variabili se valgono 1 o delle variabili negate se valgono 0.

Per rappresentare la funzione si può usare la somma dei mintermini:

$$O = m_0 + m_3 = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B = 0$$

Questa rappresentazione viene detta: Espressione in somma di prodotti

Teorema 2 Dato un ON-SET c'è sempre una sola espressione in somma di prodotti che lo rappresenti.

^a m_n : n è il valore in modulo del relativo numero binario, m sta per modulo. $m_3 = 11_2$

4.1 Tabelle di verità

4.1.1 Operatore prodotto

A	B	O
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4.1.2 Operatore somma

A	B	O
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4.1.3 Operatore negazione

A	O
0	1
1	0

5 Transistor

È un "comando di accensione" che permette di accendere o spegnere un circuito.

5.1 Transistor CMOS

5.1.1 Transistor N

Mette in collegamento 2 punti:

- Se la corrente è 0V allora non c'è collegamento
- Se la corrente è 3V allora c'è collegamento

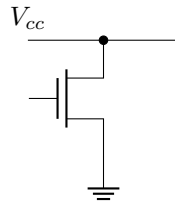


Figura 4: Transistor N

5.1.2 Transistor P

Mette in collegamento 2 punti:

- Se la corrente è 0V allora c'è collegamento
- Se la corrente è 3V allora non c'è collegamento

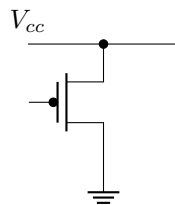
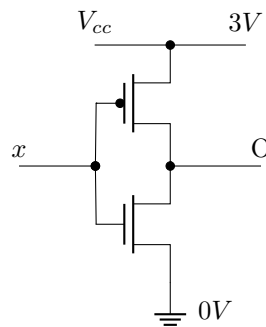


Figura 5: Transistor P

5.1.3 Circuito di negazione (NOT)

Si realizza con un transistor P e uno N in serie.



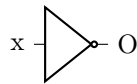
La tabella della verità è:

x	O
0V	3V
3V	0V

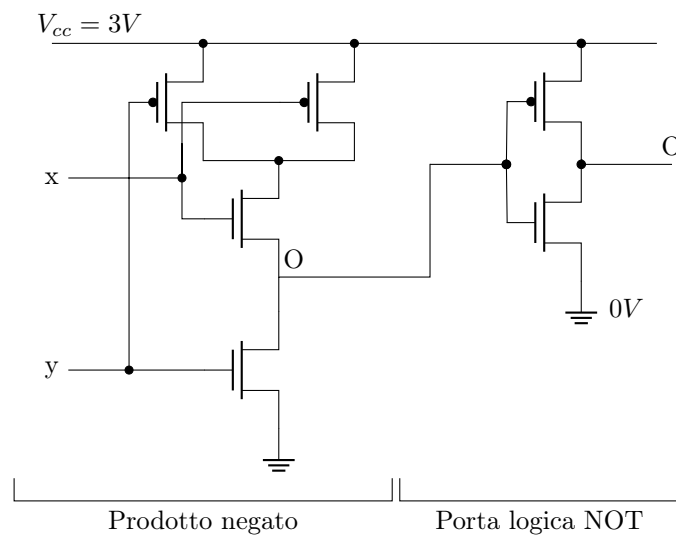
Se assegnamo ad ogni valore un numero binario:

x	O
0	1
1	0

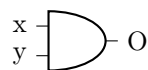
Si può notare che è la funzione di negazione rappresentata con la seguente porta logica:



5.1.4 Circuito del prodotto (AND)



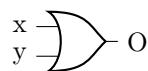
Il prodotto negato più il NOT è uguale ad un AND:



La tabella della verità è:

x	y	O
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5.1.5 Circuito della somma (OR)

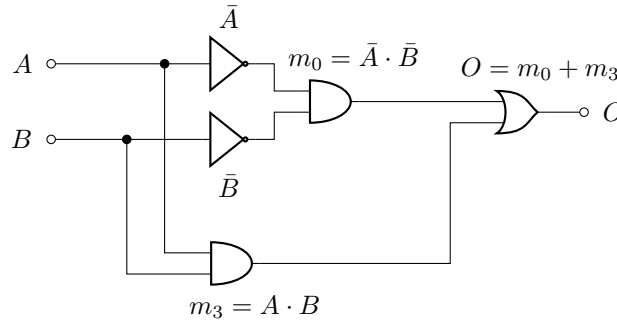


La tabella della verità è:

x	y	O
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

6 Espressione in somma di prodotti

Il seguente circuito è un esempio di espressione in somma di prodotti dell'esempio 4.1:



I circuiti devono spesso tenere conto di alcune specifiche da ottimizzare:

- **Area:** minor numero di porte logiche
- **Latency:** più porte logiche si attraversano più sarà il ritardo
- **Power:** più porte logiche si attraversano più sarà il consumo
- **Safety:** più porte logiche si attraversano più sarà la probabilità di errore

Prendiamo in considerazione la funzione $f(B^3)^1 \rightarrow B$:

X	Y	Z	O
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ON-SET = $\{m_1, m_3, m_5, m_7\}$

La funzione rappresentata con un'espressione in somma di prodotti è:

$$O = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 = \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ$$

Proviamo a stimare le dimensioni di questo circuito. Si utilizza il concetto di **letterale** che è una coppia chiave-valore. La funzione O è composta da 12

¹Il numero di funzioni booleane possibili è $2^{2^3} = 256$ e il valore cresce esponenzialmente con l'aumento dei bit

letterali e questo numero è in relazione con il numero di transistor nel senso che se una funzione ha più letterali di un'altra si può già sapere che avrà bisogno di un minor numero di transistor.

6.1 Riduzione

La regola principale della riduzione è l'assorbimento: Preso un prodotto P moltiplicato ad un letterale a e la somma di questo prodotto, ma con il letterale negato \bar{a} allora il risultato è $P \cdot (a + \bar{a})$ dove $(a + \bar{a})$ fa sempre 1, quindi rimane P .

$$aP + \bar{a}P = P \cdot (a + \bar{a}) = P$$

$$2 \cdot (|P| + 1) \Rightarrow |P|$$

Quindi se prendiamo come riferimento la funzione O si può applicare la regola dell'assorbimento per ridurre il numero di letterali:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{X}\bar{Y}Z & + & \bar{X}YZ & + & X\bar{Y}Z & + & XYZ \\ \swarrow & & \downarrow & & \swarrow & & \downarrow \\ \bar{X}Z(\bar{Y} + Y) & + & XZ(\bar{Y} + Y) & & & & \end{array}$$

E riapplicando la regola si arriva al minimo:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}Z & + & XZ \\ \swarrow & & \downarrow \\ Z(\bar{X} + X) & & \\ & & Z \end{array}$$

6.2 Terminologia

Ogni mintermine è un prodotto (o implicante), ma dopo aver applicato la regola di assorbimento non è più un mintermine, ma soltanto prodotto (o implicante).

$$\bar{Z}\bar{Y}Z \rightarrow \bar{X}Z$$

La Y non c'è più nel risultato dell'assorbimento, ciò vuol dire che non ci interessa il suo valore perchè non varia il risultato. Si può scrivere sia 11 che $1 - 1$

Quindi ad esempio:

$$Z = - - 1 = 4 \text{ mintermini: } \{001, 011, 101, 111\}$$

Definizione 6.1

Implicante primo è un implicante non contenuto in nessun altro implicante

7 Assorbimento

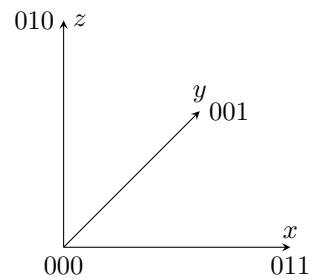
Definizione 7.1

La **distanza di Hamming** è il numero di bit che differenziano 2 codici.

$0110 \rightarrow 0101$ distanza di Hamming = 2

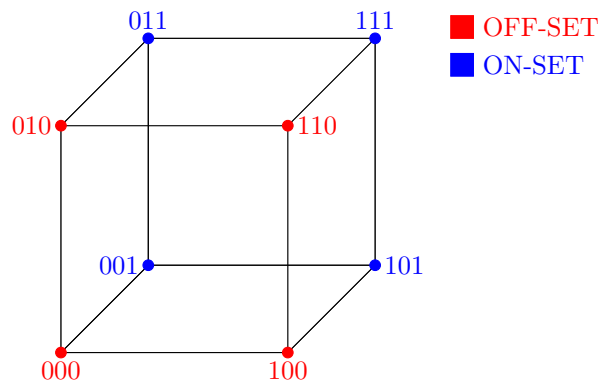
$010 \rightarrow 011$ distanza di Hamming = 1

Prendendo come riferimento la funzione $f(B^3)^1 \rightarrow B$ definita precedentemente (che chiameremo O) si può guardare la funzione come se fosse sul piano cartesiano con centro in un punto qualsiasi. Ogni punto adiacente al centro è un punto con distanza di Hamming = 1.

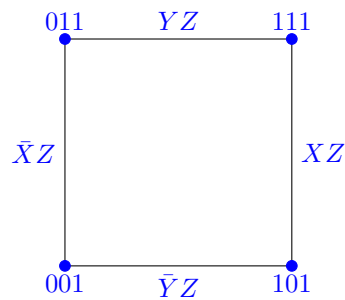


L'assorbimento può essere fatto soltanto tra gli ON-SET con distanza di Hamming = 1. Per effettuare l'assorbimento ci si posiziona nel punto di un mintermine e si "guarda" in tutte le direzioni per eventuali altri mintermini con cui fare il prodotto.

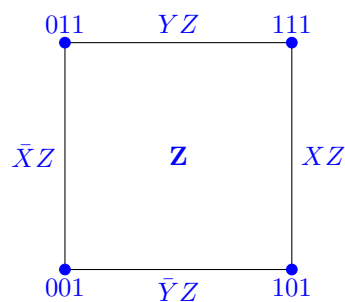
Nella seguente figura i vertici rossi rappresentano gli OFF-SET e i vertici blu rappresentano gli ON-SET.



Si trascura la faccia del cubo con l'OFF-SET per rendere la rappresentazione più semplice. Prendendo coppie di vertici dell'ON-SET sullo stesso lato del cubo si può fare il prodotto tra i 2 mintermini:



Ora si può fare l'assorbimento anche tra i prodotti ottenuti dall'assorbimento:



Si arriva quindi a dire che Z è un **implicante primo** perchè non c'è nessun altro implicante che lo contiene.

Definizioni utili 7.1

Quando si parla di implicante si può anche dire **sottocubo** e l'implicante primo può essere chiamato anche **sottocubo di dimensione massima**.

Implicante = Sottocubo

Implicante primo = Sottocubo di dimensione massima

Esistono condizioni favorevoli (come la funzione O) in cui un implicante primo contiene tutti i mintermini della funzione.

Ci sono più tipi di implicanti primi:

- **Essenziali:** includono almeno un mintermine che non è coperto da nessun altro implicante primo (fanno parte della soluzione finale).
- **Non essenziali:** Implicanti primi che coprono mintermini coperti anche da altri implicanti. Si identificano con l'**algoritmo di copertura**

7.1 Mappe di Karnaugh

Karnaugh ha creato una mappa che permette di rappresentare su un piano tutte le variabili booleane (nel caso della funzione O si mettono i valori del cubo nella tabella) in modo da poter fare l'assorbimento in modo più semplice. I valori posti sopra le celle sono messi in modo che siano a distanza di Hamming = 1. Nella seguente mappa di Karnaugh si possono vedere i valori della funzione O :

$X \backslash Y$	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

In questa mappa si può vedere che Z è un implicante primo (o sottocubo di dimensione massima). Le mappe di Karnaugh sono come una sfera, quindi se si va oltre il bordo si torna dall'altra parte.

Un altro esempio di mappa di Karnaugh è il seguente:

Esempio 7.1

Prendiamo in considerazione una funzione casuale a 4 variabili:

$X \backslash Y$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	1	0
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

Si può verificare che ci sono 3 implicanti primi essenziali:

- \bar{V} : essenziale
- XY : essenziale perchè copre 1101
- XZ : essenziale perchè copre 1011

$$O = \bar{V} + XY + XZ \quad (5 \text{ letterali})$$

Per capire quali sono gli implicanti primi bisogna raggruppare gli 1 in rettangoli più grandi possibile, ma sempre di grandezza 2^n (2, 4, 8, 16, ...). Per ciascun raggruppamento bisogna trovare le variabili che non cambiano il loro valore. Per il raggruppamento rosso:

- X cambia valore, passando da 0 in 0000 e 0100 a 1 in 1100 e 1000, quindi deve essere esclusa.

- Y cambia valore, passando da 0 in 0000 e 1000 a 1 in 0100 e 1100, quindi deve essere esclusa.
- Z cambia valore, passando da 0 in 0000 a 1 in 0010, quindi deve essere esclusa.
- \bar{V} mantiene lo stesso stato in tutto il gruppo, quindi deve essere inclusa nel prodotto risultante

Lo stesso ragionamento viene applicato per tutti i gruppi, fino ad arrivare al risultato finale.

Le mappe di Karnaugh sono utili soltanto se le variabili sono meno di 5, altrimenti bisogna usare più mappe.

8 Metodo di Quine-McCluskey

Questo metodo ha 2 versioni:

- Funzioni completamente specificate
- Funzioni parzialmente specificate

Si divide in 2 fasi:

1. Si espande il più possibile il problema per cercare il massimo grado di minimizzazione. (ad esempio trattando un *don't care* come 1 per permettere ulteriori ottimizzazioni)
2. Bisogna capire quali servono veramente.

8.1 Esempio con funzione completamente specificata

Esempio 8.1

Prendiamo una funzione completamente specificata

$$O = f(x, y, z, w) = \{m_1, m_4, m_5, m_6, m_7, m_9, m_{11}, m_{14}, m_{15}\}$$

m	$x y z w$
1	0 0 0 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
9	1 0 0 1
11	1 0 1 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

36 Letterali.

L'unico caso in cui due stringhe sono a distanza di Hamming = 1 è quando

il numero di 1 differisce di uno.

Il metodo di Quine-McCluskey riordina le m in base al numero di 1 che contengono, questo è il primo passo:

m	$x y z w$
1	0 0 0 1 \checkmark
4	0 1 0 0 \checkmark
5	0 1 0 1 \checkmark
6	0 1 1 0 \checkmark
9	1 0 0 1 \checkmark
7	0 1 1 1 \checkmark
11	1 0 1 1 \checkmark
14	1 1 1 0 \checkmark
15	1 1 1 1 \checkmark

Si individuano i gruppi che sono a distanza di Hamming 1. Nel prossimo passo confrontiamo i gruppi con 1 bit = 1 e con 2 bit = 1, se sono a distanza di Hamming 1 allora si mette don't care nel bit che cambia. Nella prima colonna c'è la coppia di m che viene confrontata.

m	$x y z w$
1, 5	0 - 0 1 A
1, 9	- 1 0 0 B
4, 5	0 1 0 - \checkmark
4, 6	0 1 - 0 \checkmark
5, 7	0 1 - 1 \checkmark
6, 7	1 0 1 - \checkmark
6, 14	- 1 1 0 \checkmark
9, 11	1 0 - 1 C
7, 15	- 1 1 1 \checkmark
11, 15	1 - 1 1 D
14, 15	1 1 1 - \checkmark

Tutti i mintermini della tabella 8.1 sono coperti da un implicante della tabella 8.1.

Ora si può semplificare anche la tabella 8.1 se i don't care sono nella stessa variabile:

m	$x y z w$
4, 5, 6, 7	0 1 - - E
6, 7, 14, 15	- 1 1 - F

I valori senza \checkmark sono implicanti primi perchè non sono coperti da nessun altro implicante della tabella 8.1. Anche i 2 valori nella tabella 8.1 sono implicanti primi.

Implicanti primi: A, B, C, D, E, F

$$A = 0 - 01 = \bar{X}\bar{Z}W$$

$$B = -001 = \bar{Y}\bar{Z}W$$

$$C = 10-1 = X\bar{Y}W$$

$$D = 1-11 = XZW$$

$$E = 01-- = \bar{X}Y$$

$$F = -11- = YZ$$

16 Letterali.

Ad ogni passo del metodo di Quine-McCluskey diminuisce il numero di letterali.

Ora bisogna trovare gli implicant primari essenziali

m	A	B	C	D	E	F
1	1	1				
4					1	
5	1				1	
6					1	1
7					1	1
9		1	1			
11			1	1		
14						1
15				1		1

E ed F sono essenziali perchè coprono m_4 e m_{14} . Inoltre E ed F coprono anche m_5, m_6, m_7 e m_6, m_7, m_{14}, m_{15} .

Tenendo in mente le m coperte, la tabella diventa:

	A	B	C	D
m_1	1	1		
m_9		1	1	
m_{11}			1	1

Eulistica È un metodo per trovare la soluzione corretta, ma non garantisce che sia ottima.

Se si cancella ad esempio m_1, m_9 perchè coperti da B , allora B domina A e C domina D per la regola di **dominanza per colonne**. Prendendo la colonna con più elementi ho più probabilità di trovare la soluzione ottima.

$$O = E + F + B + C = \bar{X}Y + YZ + \bar{Y}\bar{Z}W + X\bar{Y}W$$

10 Letterali.

La **pseudo-essenzialità** è l'essenzialità dopo aver già fatto un'ottimizzazione.

Esempio 8.2

Dominanza per righe

	A	B	C	D
α	1		1	
β	1			1
γ		1	1	1
δ		1	1	
ϵ	1	1		1

- β dominato da ϵ
- δ dominato da γ

Dobbiamo prendere β e δ perchè cancellando A e D si cancellano anche γ ed ϵ perchè sono dominati. La tabella diventa:

	A	B	C	D
α	1		1	
β	1			1
δ		1	1	

Si fa finta che B e D siano essenziali (essenzialmente scelti a caso)