Insiemi produttivi

Esercizio 3.1. *Dimostrare che l'insieme* $\mathrm{REC} = \{\, i \mid W_i \text{ ricorsivo} \,\}$ *è un insieme produttivo.*

$REC = \{x \mid W_x \text{ ricorsivo}\}$

Dimostro che REC è produttivo riducendolo funzionalmente a $\overline{K} \leq REC \equiv K \leq \overline{REC}$

- $x \in K \Leftrightarrow g(x) \notin REC$ ($W_{g(x)}$ non ricorsivo) $\longrightarrow K$
- $x \notin K \Leftrightarrow g(x) \in REC$ ($W_{g(x)}$ ricorsivo) $\nearrow \emptyset$, $\searrow \mathbb{N}$ Banale

Definiamo la funzione parziale ricorsiva psi:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \wedge y \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \overset{?}{\equiv} \begin{cases} \varphi_y(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

```
input(x,y)
stopx = false
stopy = false
costruisci phi_x
costruisci phi_y
while !stopx {
  esegui next step di phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    stopx = true
  }
}
while !stopy {
  esegui next step di phi_y(y)
  if phi_y(y) ha terminato {
    stopy = true
  }
}
return 1
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \psi(x,y)\downarrow \Leftrightarrow y \in K$

  $\overset{\text{def } K}{\Rightarrow} \psi(x,y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_y(y)\downarrow$

  $\overset{smn}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(y) \Leftrightarrow \varphi_y(y)\downarrow$

  $\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = K$

  $\overset{\text{def REC}}{\Rightarrow} g(x) \notin REC$

$$- x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$$

$$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$$

$$\overset{\text{def REC}}{\Rightarrow} x \in REC$$

Quindi REC è produttivo.

ESERCIZIO 3.2. *Sia* $A = \{\ x \mid \varphi_x(x) = 0\ \}$, *dimostrare che il suo complementare è un insieme produttivo.*

$$\bar{A} = \{x \mid \varphi_x(x) \neq 0\}$$

Bisogna dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A} \equiv K \preceq A$ quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow$ Ha terminato con 0
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in \bar{A} \rightarrow$ Non ha terminato con 0

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 0
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

Per riduzione funzionale:

$$- x \in K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\downarrow = 0$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \in A \equiv g(x) \notin \bar{A}$$

$$- x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$$

$$\Rightarrow g(x) \notin A \equiv g(x) \in \bar{A}$$

Quindi il complemento di A è produttivo

Esercizio 3.4. *Sia* $A = \{ x \mid W_x = \emptyset \}$, *dimostrare che tale insieme è produttivo.*

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\bar{K} \leq A \equiv K \leq \bar{A}$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow W_x \neq \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$

- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow W_x = \emptyset$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y .\ \psi(x,y)\downarrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y .\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N}$

$\overset{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y .\ \psi(x,y)\uparrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y .\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$

$\overset{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi A è produttivo

ESERCIZIO 3.5. *Sia* $A = \{ x \mid W_x \neq \mathbb{N} \}$, *dimostrare tale insieme è produttivo.*

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\bar{K} \leq A \equiv K \leq \bar{A}$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow W_x = \mathbb{N}$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow W_x \neq \mathbb{N} \rightarrow \emptyset$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{def\ \psi}{\Rightarrow} \forall y .\ \psi(x,y)\downarrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y .\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

$\overset{def\ W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N}$

$\overset{def\ g(x)}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \overset{def\ \psi}{\Rightarrow} \forall y .\ \psi(x,y)\uparrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y .\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

$\overset{def\ W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$

$\overset{def\ g(x)}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi A è produttivo

Esercizio 3.6. *Dimostrare che l'insieme* $A = \{ x \mid |W_x| < \omega \}$ *è un insieme produttivo.*

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$$\overline{K} \leq A \equiv K \leq \overline{A}$$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow |W_x| = \omega$ termina su tutti gli input
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow |W_x| < \omega$ termina su un insieme finito di input

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{\text{def } K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\downarrow$

  $\overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y \,.\, \psi(x,y)\downarrow$

  $\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y \,.\, \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

  $\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N} \Rightarrow |W_{g(x)}| = \omega$

  $\overset{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y \,.\, \psi(x,y)\uparrow$

  $\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y \,.\, \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

  $\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset \Rightarrow |W_{g(x)}| < \omega$

  $\overset{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi A è produttivo

ESERCIZIO 3.7. *Sia* $B = \{ i \mid \exists y \, . \, \varphi_i(y) \downarrow \wedge \varphi_y(i) \downarrow \wedge \varphi_i(y) = \varphi_y(i) \}$ *dimostrare che il suo complementare è un insieme produttivo.*

$\overline{B} = \{ i \mid \forall y . \varphi_i(y) \uparrow \vee \varphi_y(i) \uparrow \vee \varphi_i(y) \neq \varphi_y(i) \}$

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\overline{K} \leq \overline{B} \equiv K \leq B$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \in B \rightarrow \exists y . \varphi_i(y) \downarrow = \varphi_y(i) \downarrow$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \notin B$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x, y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{def K}{\Rightarrow} \varphi_x(x) \downarrow$
  $\overset{def \psi}{\Rightarrow} \forall y . \psi(x, y) \downarrow$
  $\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y . \varphi_{g(x)}(y) \downarrow$
  $\overset{y = g(x)}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(g(x)) \downarrow \quad (\exists y . \varphi_i(y) \downarrow = \varphi_y(i) \downarrow \wedge i = y)$
  $\overset{def B}{\Rightarrow} g(x) \in B$

- $x \notin K \overset{def \psi}{\Rightarrow} \forall y . \psi(x, y) \uparrow$
  $\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y . \varphi_{g(x)}(y) \uparrow \Rightarrow \nexists i . \varphi_{g(x)}(i) \downarrow$
  $\overset{def B}{\Rightarrow} g(x) \notin B$

Quindi il complemento di B è produttivo

Esercizio 3.9. *Sia* $A = \{ x \mid |\text{RANGE}(\varphi_x)| < \omega \}$*, dimostrare che è un insieme produttivo.*

Questo insieme è intuitivamente produttivo perchè la quantità di output della funzione calcolata da x deve essere finita. Questo non è possibile da calcolare perchè bisognerebbe controllare ogni possibile input per avere l'insieme degli output. Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna creare una funzione parziale ricorsiva psi su cui si può applicare il teorema smn e mostrare la riduzione funzionale dell'insieme A all'insieme complemento di K: $\bar{K} \leq A \equiv K \leq \bar{A}$ dove il complemento di A è il seguente:

$$\bar{A} = \{ x \mid |range(\varphi_x)| = \omega \}$$

Si vuole arrivare a mostrare che se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow |range(\varphi_x)|$ é infinito
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow |range(\varphi_x)|$ é finito

La funzione parziale ricorsiva psi è la seguente:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per dimostrare che questa funzione è parziale ricorsiva fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x; // Esiste una procedura algoritmica che la costruisce

while true {
  // Esegue un singolo passo della macchina x
  esegui il prossimo passo di phi_x(x)
  // Se la macchina termina allora x è in K e ritorna y
  // Se non termina il loop continua e se non termina mai diverge
  is phi_x(x) ha terminato {
    return y
  }
}
```

Siccome la funzione psi è parziale ricorsiva, si può applicare smn:

$\xRightarrow{smn} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

Ora dimostro per riduzione funzionale che A è produttivo:

- $x \in K \xRightarrow{\text{def } K} \varphi_x(x)\downarrow$

$\xRightarrow{\text{def } \psi} \forall y.\ \psi(x,y)\downarrow \wedge \psi(x,y) = y$

$\xRightarrow{smn} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow \wedge \varphi_{g(x)}(y) = y$

$\xRightarrow{\text{def range}} \forall y.\ range(\varphi_{g(x)}) = y$

$\Rightarrow |range(\varphi_{g(x)})| = \mathbb{N} = \omega$

$\xRightarrow{\text{def } A} g(x) \notin A$

- $x \notin K \xRightarrow{\text{def } K} \varphi_x(x)\uparrow$

$\xRightarrow{\text{def } \psi} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$

$$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$$

$$\overset{def\ range}{\Rightarrow} \quad range(\varphi_{g(x)}) = \emptyset$$

$$\Rightarrow |range(\varphi_{g(x)})| = 0 < w$$

$$\overset{def\ A}{\Rightarrow} g(x) \in A$$

Quindi $x \in K \iff g(x) \notin A$ cioè A si riduce al complemento di K e quindi A è produttivo.

Esercizio 3.10. *Dimostrare che il seguente insieme è produttivo*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x| \leq 5\}$$

Questo insieme è intuitivamente produttivo perchè per calcolare l'insieme di tutti i programmi che terminano con meno di 5 input (compreso) bisognerebbe controllare tutti i possibili programmi e questa cosa non è calcolabile. Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna creare una funzione parziale ricorsiva psi su cui si può applicare il teorema smn e mostrare la riduzione funzionale dell'insieme A all'insieme complemento di K: $\bar{K} \leq A \equiv K \leq \bar{A}$ dove il complemento di A è il seguente:

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x| > 5\}$$

Si vuole arrivare a mostrare che se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow |W_x > 5| \rightarrow W_x = \mathbb{N}$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow |W_x \leq 5| \rightarrow W_x = \emptyset$

La funzione parziale ricorsiva psi è la seguente:

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} 1 & se\ x \in K \\ \uparrow & altrimenti \end{cases}$$

Per dimostrare che questa funzione è parziale ricorsiva fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x; // Esiste una procedura algoritmica che la costruisce

while true {
  // Esegue un singolo passo della macchina x
  esegui il prossimo passo di phi_x(x)
  // Se la macchina termina allora x è in K
  // Se non termina il loop continua e se non termina mai diverge
  is phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome la funzione psi è parziale ricorsiva, si può applicare smn:

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\Psi(x, y) = \varphi_{g(x)}(y)$

Ora dimostro per riduzione funzionale che A è produttivo:

- $x \in K \overset{def\ K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\downarrow$

$$\overset{def\ \Psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \Psi(x,y)\downarrow$$

$$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$$

$$\overset{def\ W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N}$$

$\Rightarrow |W_{g(x)}| = w > 5$

$\overset{def\,A}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

$- \; x \notin K \overset{def\,K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\uparrow$

$\overset{def\,\psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

$\overset{def\,W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$

$\Rightarrow |W_{g(x)}| = 0 \leq 5$

$\overset{def\,A}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi $x \in K \iff g(x) \notin A$ cioè A si riduce al complemento di K e quindi A è produttivo.

Esercizio 3.11. *Dimostrare che il seguente insieme è produttivo*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \subseteq \{4\}^{\mathbb{N}}\}$$

Questo insieme è intuitivamente produttivo perchè bisognerebbe trovare tutti i possibili programmi che hanno come dominio un sottoinsieme di tutte le possibili potenze di 4. I programmi da trovare sono infiniti, quindi l'insieme non è calcolabile e di conseguenza è produttvo. Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna creare una funzione parziale ricorsiva psi su cui si può applicare il teorema smn e mostrare la riduzione funzionale dell'insieme A all'insieme complemento di K: $\bar{K} \leq A \equiv K \leq \bar{A}$ dove il complemento di A è il seguente:

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \not\subseteq \{4\}^{\mathbb{N}}\}$$

Si vuole arrivare a mostrare che se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow W_x \not\subseteq \{4\}^{\mathbb{N}} \rightarrow W_x = \mathbb{N}$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow W_x \subseteq \{4\}^{\mathbb{N}} \rightarrow W_x = \emptyset$ (L'insieme vuoto è sottoinsieme di tutti gli insiemi)

La funzione parziale ricorsiva psi è la seguente:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per dimostrare che questa funzione è parziale ricorsiva fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x; // Esiste una procedura algoritmica che la costruisce

while true {
  // Esegue un singolo passo della macchina x
  esegui il prossimo passo di phi_x(x)
  // Se la macchina termina allora x è in K
  // Se non termina il loop continua e se non termina mai diverge
  is phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome la funzione psi è parziale ricorsiva, si può applicare smn:

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

Ora dimostro per riduzione funzionale che A è produttivo:

- $x \in K \overset{\text{def } K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\downarrow$

$$\overset{\text{def } \Psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \Psi(x,y)\downarrow$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$$

$$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N} \not\subseteq \{4\}^{\mathbb{N}}$$

$$\overset{\text{def } A}{\Rightarrow} g(x) \notin A$$

- $x \notin K \overset{\text{def } K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\uparrow$

$$\overset{\text{def } \Psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \Psi(x,y)\uparrow$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$$

$$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset \subseteq \{4\}^{\mathbb{N}}$$

$$\overset{\text{def } A}{\Rightarrow} g(x) \in A$$

Quindi $x \in K \Leftrightarrow g(x) \notin A$ cioè A si riduce al complemento di K e quindi A è produttivo.

Esercizio 3.12. *Sia* $A = \{\, x \mid W_x = \{\, y \mid y \text{ primo} \,\}\,\}$, *dimostrare che è un insieme produttivo.*

Questo insieme è intuitivamente produttivo perchè bisogna controllare che il dominio di x sia composto da tutti i numeri primi e quindi non è calcolabile. Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna creare una funzione parziale ricorsiva psi su cui si può applicare il teorema smn e mostrare la riduzione funzionale dell'insieme A all'insieme complemento di K: $\bar{K} \leq A \equiv K \leq \bar{A}$
dove il complemento di A è il seguente:

$$\bar{A} = \{x \mid W_x \neq \{y \mid y \text{ primo}\}\} = \{x \mid W_x = \{y \mid y \text{ non primo}\}$$

Si vuole arrivare a mostrare che se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow W_x$ contiene almeno un numero primo

- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow W_x$ contiene solo numeri primi

La funzione parziale ricorsiva psi è la seguente:

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \lor y \text{ primo} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per dimostrare che questa funzione è parziale ricorsiva fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
// Se y è primo la condizione è vera quindi si può ritornare 1
if y primo {
  return 1
}

// Se y non è primo si controlla se x è in K
costruisci phi_x // Esiste una procedura algoritmica che la costruisce
while true {
  esegui il prossimo passo di phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome la funzione psi è parziale ricorsiva, si può applicare smn:

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\Psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

Ora dimostro per riduzione funzionale che A è produttivo:

- $x \in K \overset{def K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\downarrow$

$\overset{def \Psi}{\Rightarrow} \forall y .\ \Psi(x,y)\downarrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y .\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

$\Rightarrow \exists y .\ y$ non primo $.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

$\overset{def A}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \overset{def K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\uparrow$

$\overset{def \Psi}{\Rightarrow} \forall y .\ \Psi(x,y)\downarrow \Leftrightarrow y$ primo

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y .\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow y$ primo

$\overset{def W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \{y \mid y \text{ primo}\}$

$\overset{def A}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi $x \in K \Leftrightarrow g(x) \notin A$ cioè A si riduce al complemento di K e quindi A è produttivo.