Esame 09/2021

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

Considerare i seguenti sistemi conduttori:

A) un guscio sferico di raggi **R1=0.1cm, R2=0.9cm, R3=1cm** sulla cui superficie interna è stata depositata una densità superficiale di carica $\sigma=-10^{-10}$ C/m

B) una lastra piana indefinita caricata con un densità superficiale di carica $\sigma=-10^{-10}$ C/m

1. Per entrambi i sistemi, si mostri l'applicazione del teorema di Gauss:
   - disegnare le superfici gaussiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo elettrico **E** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **E(r)**
   - disegnare le linee di campo
   - disegnare, in modo schematico, le superfici equipotenziali.

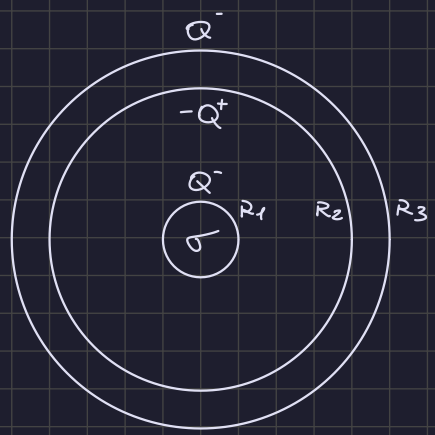
Sistema A

$R_1 = 10^{-3}\,m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\,m$

$R_3 = 10^{-2}\,m$

$\sigma = -10^{-10}\ \frac{C}{m}$

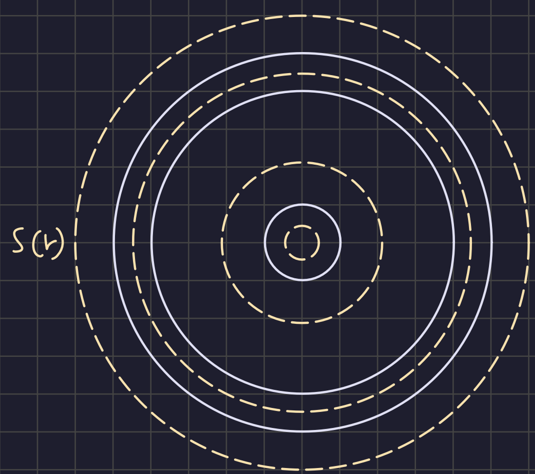


$$\sigma = \frac{Q}{sup} \rightarrow Q = \sigma \cdot sup$$

$$Q = \sigma \cdot 4\pi R_1^2 = -4\pi\, 10^{-10} \cdot 10^{-6} = -4\pi\, 10^{-16} = -1.2 \cdot 10^{-15}\,C$$

Th Gauss $\qquad \Phi = \oint_{sup} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Per calcolare il campo elettrico bisogna scegliere una superficie su cui sia costante in modo da poterlo tirare fuori dall'integrale. Queste superfici si chiamano superfici di Gauss e in questo caso sono dei gusci sferici di raggio r siccome si c'è una simmetria sferica e il campo è radiale



$$\overset{cost}{\oint_{S(r)}} E(r)\, dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

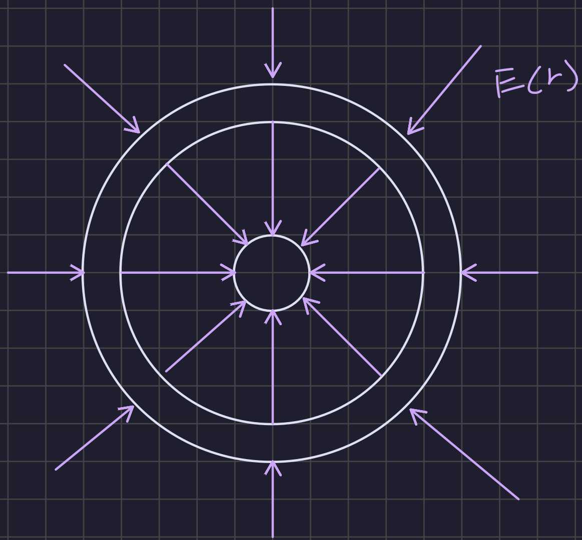
$$E(r) \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

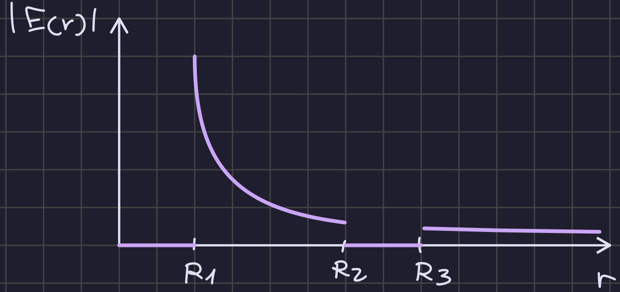
$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

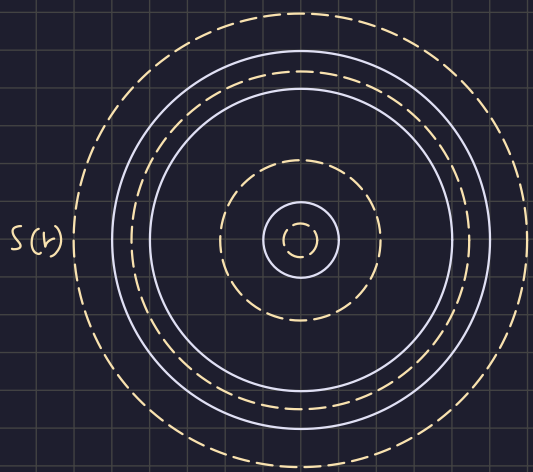
Le cariche interne sono 0 all'interno del conduttore e Q all'esterno e nella cavità, questo perchè in un conduttore le cariche si distribuiscono solo sulla superficie

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \lor R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } R_1 \le r \le R_2 \lor r \ge R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$





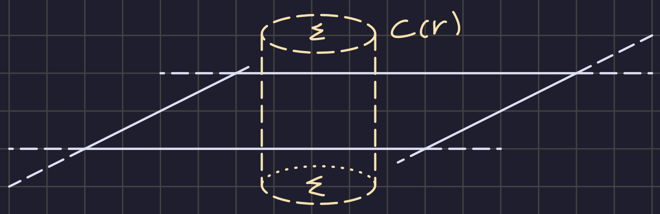
Le superfici equipotenziali sono le superfici su cui il potenziale è costante, quindi anche il campo è costante e di conseguenza le superfici equipotenziali sono gusci sferici di raggio r: S(r)



Sistema B

$\sigma = -10^{-10} \frac{C}{m}$

In questo sistema le superfici gaussiane sono dei cilindri di raggio r tagliati a metà in orizzontale dal piano. Vengono usate queste superfici perchè si ha una simmetria piana, cioè l'unica distinzione nello spazio è la distanza dal piano e quindi il campo ha linee perpendicolari al piano e alle basi del cilindro, sulle quali è anche costante.



Siccome il campo è perpendicolare soltanto alle basi Σ del cilindro si ha:

$$\phi = \phi_{Lati} + \phi_{Basi}$$

$$= 0 + \phi_{Basi}$$

$$= 2\Sigma \cdot E$$

$$\downarrow$$

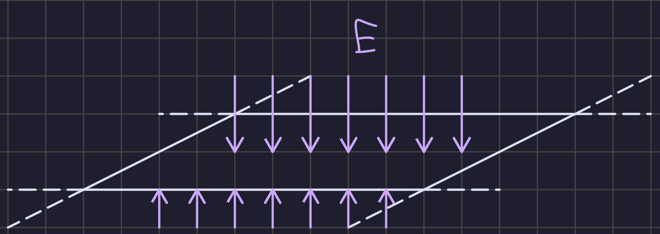
$$E\, 2\Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 2\Sigma}$$

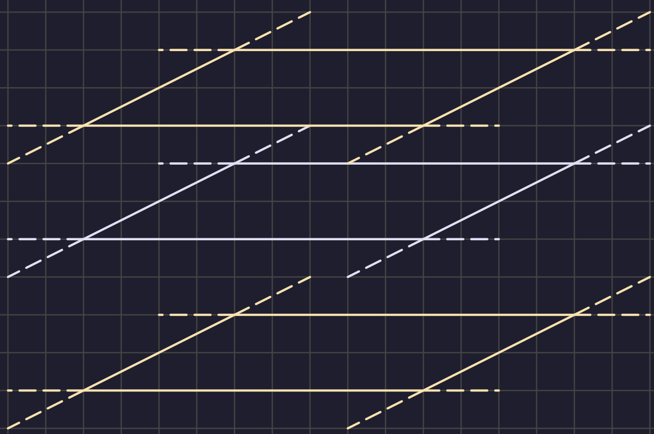
$$Q_{int} = \sigma \Sigma$$

$$\downarrow$$

$$E = \frac{\sigma \cancel{\Sigma}}{\varepsilon_0 2 \cancel{\Sigma}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$



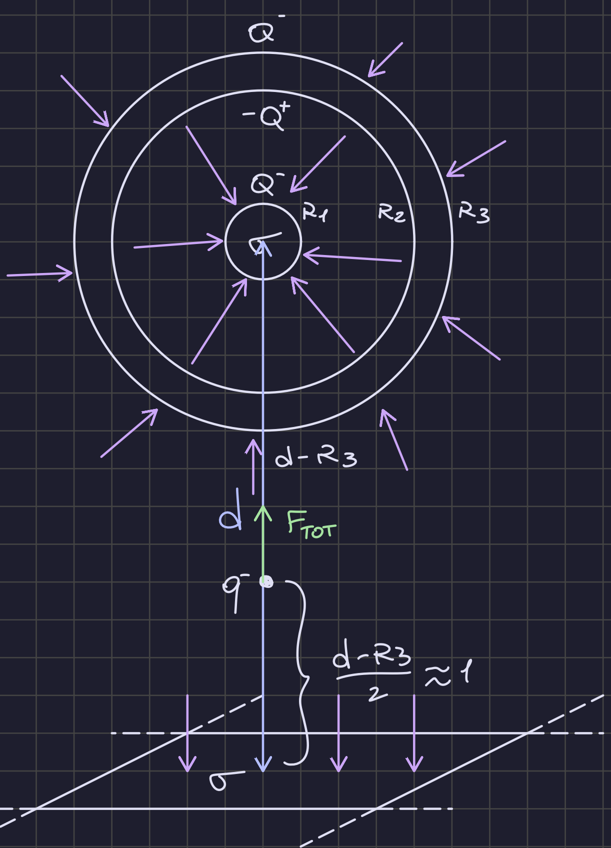
Le superfici equipotenziali sono dei piani paralleli al piano indefinito



Considerare la situazione in cui il guscio sferico sia posizionato a una distanza di **d=2m** dalla lastra piana (distanza rispetto al centro della sfera).
In una posizione equidistante dai due conduttori vi è, libero di muoversi, un elettrone.

2. Calcolare il valore della forza **F** agente sull'elettrone in MODULO DIREZIONE VERSO!!!
3. Calcolare il lavoro del campo per far arrivare l'elettrone al termine del suo percorso.
4. Ridiscutere il punto 3) nel caso in cui lo spazio sia totalmente riempito di dielettrico **K=2**

$q = e^- = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$



$$\vec{F}_{TOT} = \Sigma \vec{F} = \Sigma q\vec{E}$$

$\downarrow$

$$F_{TOT} = F_S + F_L$$

$$F_S = qE_S\left(\frac{d-R_3}{2}\right) \qquad F_L = qE_L$$

$$\approx qE_S(1) \qquad = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$= q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \qquad = 9\cdot 10^{-19}\,N$$

$$= 1.8\cdot 10^{-24}\,N$$

$$= 1.8\cdot 10^{-24}\,N + 9\cdot 10^{-19}\,N = 9\cdot 10^{-19}\,N$$

$$L = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad [J]$$

$\downarrow$

$$L = L_L - L_S$$

$$= \int_1^2 qE_L\,dr - \int_1^2 qE_S(r)\,dr$$

$$= q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \int_1^2 q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}$$

$$= 5.6\cdot 10^{-6}\,J$$

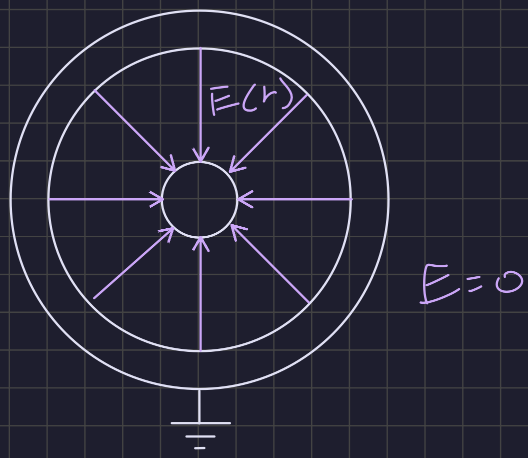
Se lo spazio fosse riempito di dielettrico con k = 2, allora si ha che:

$$E_K = \frac{E_0}{K} \rightarrow L_K = \frac{L_{TOT}}{K}$$

Si consideri il solo sistema A), nel vuoto.

La superficie esterna del conduttore viene collegata a terra.

5. descrivere il sistema all'equilibrio
6. ricavare l'espressione del potenziale elettrostatico V(r)
7. calcolare l'energia del sistema.



Le cariche sulla superficie esterna si spostano a terra, quindi sulla superficie esterna non si hanno più cariche e di conseguenza il campo esterno diventa nullo. Il sistema interno rimane invariato perchè la superficie esterna agisce da gabbia di Faraday

$$V(B)-V(A) = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{s}$$

$$V(r)-V(R_3) = -\int_{R_3}^{r} E_s(r)\,dr$$

$$V(r) = \cancel{V(R_3)} - \int_{R_3}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_3}^{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{R_3}\right)\ [V] \quad \text{se } R_1 \leq r \leq R_2$$

$$U_{TOT} = U_{int} + \cancel{U_{est}}$$

$$= \int_{Vol} u_E\,d\tau \qquad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = 4\pi r^2\,dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_3(r)^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{4^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}}} \cancel{4\pi r^2} \, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

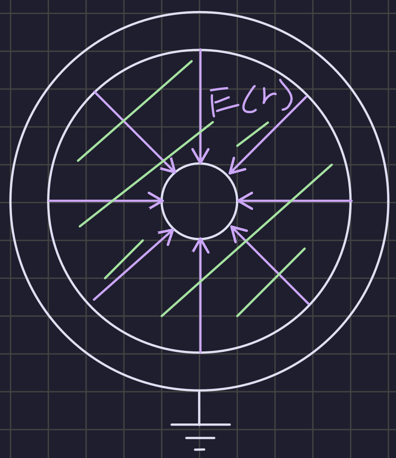
$$= 6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Lo spazio interno è ora riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=2**

8. descrivere il fenomeno
9. ricavare il vettore spostamento elettrico **D** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!)

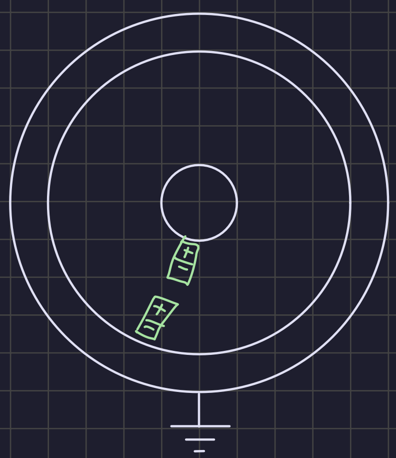
$K = 2$

$$E_K = \frac{E_0}{K} \qquad V_K = \frac{V_0}{K}$$



$E = 0$

I dipoli si allineano sulla superficie R_1 e sulla superficie R_2:



Il vettore spostamento si ottiene con il teorema di Gauss per i dielettrici. Anche in questo caso come superfici di Gauss scelgo dei gusci sferici di raggio r:

$$\oint_{sup} \vec{D} \, d\vec{S} = Q_{libere}$$

$$\oint_{S(r)} D(r)\, dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{lib}$$

$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{4\pi r^2}$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$