Esercizi risposta libera

1. Calcolare la risposta libera del sistema a tempo continuo (LTI) descritto come:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = \frac{du(t)}{dt},$$

considerando le seguenti condizioni inziali:

$$v(0^-) = 2 \qquad \frac{dv(0^-)}{dt} = 0.$$

Equazione del sistema:

$$v''(t) + v'(t) + v(t) = u'(t)$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0^-) = 2 \\ v'(0^-) = 0 \end{cases}$$

Equazione omogenea del polinomio caratteristico

$$P(s) = s^2 + s + 1 = 0$$

Soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad r = 2 \quad (\text{num. soluzioni})$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \mu_{1,2} = 1 \quad (\text{molteplicità})$$

Risposta libera generica

$$V_L(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \left(c_{1,0} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t} \cdot \frac{t^0}{0!} \right) + \left(c_{2,0} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t} \cdot \frac{t^0}{0!} \right)$$

$$= c_{1,0} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t} + c_{2,0} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t}$$

Derivata della risposta libera

$$v_L(t) = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t} + c_2 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t}$$

$$v_L'(t) = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + c_2 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

Calcolo dei coefficienti c_1 e c_2

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)0^-} + c_2 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)0^-} \\ v'(0^-) = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)0^-} \cdot \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + c_2 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)0^-} \cdot \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(0^-) = c_1 \cdot e^{0^-} + c_2 \cdot e^{0^-} \\ V'(0^-) = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_1 \cdot e^{0^-} + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_2 \cdot e^{0^-} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 + c_2 \\ v'(0^-) = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_1 + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = 2 \\ v'(0^-) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_1 + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-c_2) + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ \left(-1+\sqrt{3}i\right) - \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_2 + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ -\sqrt{3}i\, c_2 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = -\frac{1}{\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} = 1 - \frac{\sqrt{3}i}{-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - 1 + \frac{\sqrt{3}i}{-3} = 1 + \frac{\sqrt{3}i}{-3} \\ c_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}i}{-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}i}{-3} \\ c_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}i}{-3} \end{cases}$$

Risposta libera specifica:

$$v_c(t) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}\,i}{-3}\right) \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}\,i}{-3}\right) \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

2. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 3\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t), \\ \frac{dv(0^-)}{dt} = 2 \\ v(0^-) = 1 \end{cases}$$

(a) Se ne discuta la stabilità

(b) si calcoli la risposta libera nel tempo.

b) Risposta libera

Equazione del sistema

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t)$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} v'(0^-) = 2 \\ v(0^-) = 1 \end{cases}$$

Equazione omogenea del polinomio caratteristico

$$P(s) = s^2 + 3s + 2 = 0$$

Soluzioni:

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2$ $\quad r = 2$ (numero soluzioni)

$\lambda_2 = -1$ $\quad \mu_{1,2} = 1$ (molteplicità)

Risposta libera generica:

$$v_c(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-2t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_2 \cdot e^{-t} + \frac{t^0}{0!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

Derivate della risposta

$$v(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

$$v'(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \cdot (-2) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot (-1)$$

$$= -2c_1 \cdot e^{-2t} - c_2 \cdot e^{-t}$$

Calcolo dei coefficienti c_1 e c_2

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 \cdot e^{-2 \cdot 0^-} + c_2 \cdot e^{0^+} \\ v'(0^-) = -2c_1 \cdot e^{-2 \cdot 0^-} - c_2 \cdot e^{0^+} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 + c_2 \\ v'(0^-) = -2c_1 - c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = 1 \\ v'(0^-) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -2(1 - c_2) - c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -2 + 2c_2 - c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

Risposta libera specifica

$$v_L(t) = -3e^{-2t} + 4e^{-t}$$

a) Stabilitá

Per verificare se il sistema é asintoticamente stabile bisogna vedere se il limite di t che tende ad infinito dei modi elementari di ogni soluzione fa 0

$\forall i \lim_{t \to \infty} m_i(t) = 0$ Questo é verificato se e solo se $\forall i \; Re(\lambda_i) < 0$

Nel nostro caso tutte le soluzioni sono minori di 0 e il sistema é stabile.

3. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 5\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = \frac{du(t)}{dt} - bu(t), \\ \frac{dv(0^-)}{dt} = 0 \\ v(0^-) = 1 \end{cases}$$

e le seguenti condizioni inziali:

(a) Discutere la stabilità al variare di b,

(b) si calcoli la risposta libera nel tempo.

b) Risposta libera

Equazione del sistema

$$v''(t) + 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - bu(t)$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} v(0^-) = 1 \\ v'(0^-) = 0 \end{cases}$$

Equazione omogenea del polinomio caratteristico

$$P(s) = s^2 + 5s + 4 = 0$$

Soluzioni

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -\frac{8}{2} = -4 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -4$ $\quad r = 2$ (numero di soluzioni)

$\lambda_2 = -1$ $\quad \mu_{1,2} = 1$ (molteplicitá)

Risposta libera generica

$$v_L(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-4t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^0}{0!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-4t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

Derivata della risposta

$$v(t) = c_1 \cdot e^{-4t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

$$v'(t) = c_1 \cdot e^{-4t} \cdot (-4) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot (-1)$$

$$= -4c_1 \cdot e^{-4t} - c_2 \cdot e^{-t}$$

Calcolo dei coefficienti c_1 e c_2

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 \cdot e^{-4 \cdot 0^-} + c_2 \cdot e^{-0^-} \\ v'(0^-) = -4c_1 \cdot e^{-4 \cdot 0^-} - c_2 \cdot e^{-0^-} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 + c_2 \\ v'(0^-) = -4c_1 - c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = 1 \\ v'(0^-) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -4c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -4(1-c_2) - c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -4 + 4c_2 - c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Risposta libera specifica

$$v(t) = -\frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{4}{3} e^{-t}$$

a) Stabilitá

Per verificare se il sistema é asintoticamente stabile bisogna vedere se il limite di t che tende ad infinito dei modi elementari di ogni soluzione fa 0

$\forall_i \lim_{t \to \infty} m_i(t) = 0$ Questo é verificato se e solo se $\forall_i \; Re(\lambda_i) < 0$

Nel nostro caso tutte le soluzioni sono minori di 0 e il sistema é stabile.

Al variare di b il sistema rimane stabile perché da b dipende solo l'input, di conseguenza le soluzioni dell'equazione omogenea del polinomio caratteristico non cambiano.