

# Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2024/2025

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Concetti base</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1      | Tipi di segnali . . . . .  | 4         |
| 1.2      | Rappresentazione dei sistemi . . . . .                                 | 5         |
| <b>2</b> | <b>Notazioni</b>   | <b>6</b>  |
| <b>3</b> | <b>Modello di sistemi</b>  | <b>8</b>  |
| 3.1      | Approccio classico . . . . .   | 8         |
| 3.2      | Approccio moderno . . . . .  | 8         |
| 3.3      | Obsolescenza . . . . .   | 8         |
| 3.4      | Causalità . . . . .  | 9         |
| 3.5      | Stabilità . . . . .  | 9         |
| 3.5.1    | Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output) . . . . .                | 10        |
| 3.5.2    | Stabilità Asintotica . . . . .   | 11        |
| <b>4</b> | <b>Modello di segnali</b>  | <b>12</b> |
| <b>5</b> | <b>Funzioni in <math>\mathbb{C}</math></b>                             | <b>14</b> |
| 5.1      | Funzione a variabili complesse . . . . .                               | 14        |
| 5.2      | Funzioni complesse . . . . .   | 16        |
| 5.3      | Funzioni polinomiali . . . . .   | 17        |
| 5.3.1    | Risoluzione . . . . .  | 17        |
| <b>6</b> | <b>Segnali</b>   | <b>17</b> |
| 6.1      | Segnali continui . . . . .   | 17        |
| 6.1.1    | Sinusoidale . . . . .  | 18        |
| 6.1.2    | Esponenziali reali . . . . .   | 19        |
| 6.1.3    | Esponenziali complessi . . . . .                                       | 20        |
| 6.2      | Segnali discreti . . . . .   | 22        |
| 6.2.1    | Sinusoidale . . . . .  | 22        |
| 6.2.2    | Esponenziali Reali . . . . .   | 23        |
| 6.2.3    | Esponenziali Complessi . . . . .                                       | 24        |
| 6.3      | Rappresentazione . . . . .   | 26        |
| 6.4      | Problema della periodicità . . . . .                                   | 27        |
| <b>7</b> | <b>Segnali generalizzati</b>   | <b>29</b> |
| 7.1      | Segnali di impulso . . . . .   | 29        |
| 7.1.1    | Finestra rettangolare unitaria . . . . .                               | 31        |
| 7.1.2    | Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario . . . . . | 31        |
| 7.2      | Come si realizza un impulso . . . . .                                  | 32        |
| 7.3      | Derivata dell'impulso . . . . .  | 33        |
| 7.4      | Integrale dell'impulso . . . . .                                       | 34        |
| 7.4.1    | Funzione gradino . . . . .   | 34        |
| 7.4.2    | Funzione rampa . . . . .   | 35        |
| 7.4.3    | Funzione parabolica . . . . .  | 35        |
| 7.4.4    | A cosa servono i segnali canonici . . . . .                            | 36        |
| 7.5      | Proprietà degli impulsi . . . . .                                      | 36        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>8</b>  | <b>Sistemi</b>   | <b>38</b> |
| 8.1       | Proprietà dei sistemi LTI  | 40        |
| 8.1.1     | Linearità  | 40        |
| 8.1.2     | Tempo invarianza   | 41        |
| 8.1.3     | Causalità  | 41        |
| 8.1.4     | Proprietà di stabilità asintotica  | 42        |
| 8.1.5     | Proprietà di BIBO stabilità  | 43        |
| 8.2       | Sistemi descritti da equazioni differenziali                             | 44        |
| 8.2.1     | Risoluzione  | 47        |
| 8.2.2     | Risposta libera (o evoluzione libera)                                    | 48        |
| 8.2.3     | Convergenza dei modi elementari  | 52        |
| 8.2.4     | Dimostrazioni  | 53        |
| 8.2.5     | Prodotto di convoluzione   | 55        |
| 8.2.6     | Risposta impulsiva   | 58        |
| 8.2.7     | Risposta forzata   | 62        |
| 8.2.8     | Risposta totale  | 64        |
| 8.3       | Stabilità in base alle radici  | 64        |
| 8.4       | Risposta in frequenza  | 65        |
| <b>9</b>  | <b>Trasformata unilatera di Laplace (TDL)</b>                            | <b>66</b> |
| 9.1       | Proprietà della trasformata di Laplace                                   | 68        |
| 9.1.1     | Linearità  | 68        |
| 9.1.2     | Traslazione nel tempo (ritardo temporale)                                | 69        |
| 9.1.3     | Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)         | 69        |
| 9.1.4     | Cambio di scala  | 70        |
| 9.1.5     | Proprietà della derivata   | 70        |
| 9.1.6     | Moltiplicazione per una funzione polinomiale                             | 71        |
| 9.1.7     | Integrazione nel tempo   | 71        |
| 9.1.8     | Integrale nel dominio dei complessi                                      | 72        |
| 9.1.9     | Teorema del valore iniziale  | 72        |
| 9.1.10    | Teorema del valore finale  | 72        |
| 9.1.11    | Convoluzione nel dominio del tempo                                       | 72        |
| 9.2       | Trasformate notevoli   | 73        |
| 9.2.1     | Impulso  | 73        |
| 9.2.2     | Gradino  | 74        |
| 9.2.3     | Esponenziale complesso causale   | 74        |
| 9.2.4     | Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale | 75        |
| 9.2.5     | Funzione coseno  | 76        |
| 9.2.6     | Funzione seno  | 77        |
| 9.3       | Risoluzione di sistemi LTI causali                                       | 77        |
| 9.3.1     | Stabilità di sistemi LTI causali   | 80        |
| 9.4       | Antitrasformata di Laplace unilatera                                     | 83        |
| <b>10</b> | <b>Sistemi a blocchi</b>   | <b>91</b> |
| 10.1      | Tipi di sistemi  | 91        |
| 10.1.1    | Sistema in serie   | 91        |
| 10.1.2    | Sistema in parallelo   | 91        |
| 10.1.3    | Sistema di retroazione   | 92        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 10.1.4    | Nodi sommatore  | 92         |
| 10.2      | Controlli   | 93         |
| 10.2.1    | Nomenclatura  | 94         |
| 10.3      | Controllori   | 94         |
| 10.3.1    | Nomenclatura della forma canonica                       | 96         |
| <b>11</b> | <b>Operazioni sui blocchi</b>                           | <b>97</b>  |
| <b>12</b> | <b>Diagrammi di flusso</b>                              | <b>106</b> |
| 12.1      | Nomenclatura  | 106        |
| 12.2      | Regole di trasformazione                                | 107        |
| 12.2.1    | Regola dell'addizione                                   | 107        |
| 12.2.2    | Regola della trasmissione                               | 107        |
| 12.2.3    | Regola della moltiplicazione                            | 107        |
| 12.3      | Passaggio dallo schema a blocchi al diagramma di flusso | 108        |
| <b>13</b> | <b>Diagrammi di Bode</b>                                | <b>116</b> |
| 13.1      | Motivo delle sinusoidi                                  | 116        |
| 13.2      | Rappresentazione del diagramma di Bode                  | 117        |
| 13.2.1    | Risposta in frequenza                                   | 120        |
| 13.3      | Esempi  | 121        |
| 13.3.1    | Operazioni tra numeri complessi                         | 125        |
| 13.3.2    | Logaritmo di un numero complesso                        | 125        |
| 13.4      | Forma di Bode   | 126        |
| 13.5      | Disegno del diagramma di Bode                           | 131        |
| 13.5.1    | Termine costante  | 131        |
| 13.5.2    | Zero o polo nullo                                       | 132        |
| 13.5.3    | Zero o polo reale                                       | 134        |
| 13.5.4    | Polo o zero complesso coniugato                         | 138        |
| 13.5.5    | Esempio   | 141        |
| 13.6      | Comportamento totale di Bode                            | 143        |

# 1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

## 1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.



Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

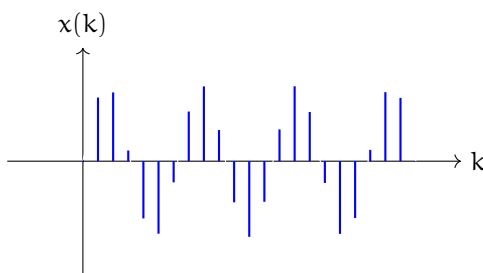


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

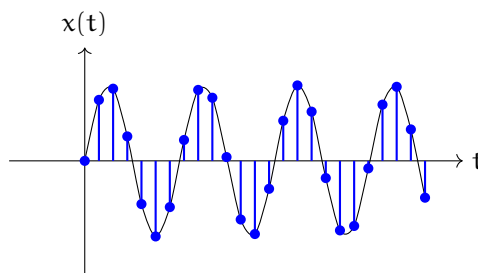


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.



Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni  $(x, y)$ .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale  $(x, y)^3$  per rappresentare ogni colore (R,G,B).

## 1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

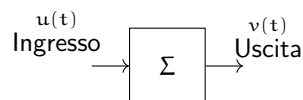


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

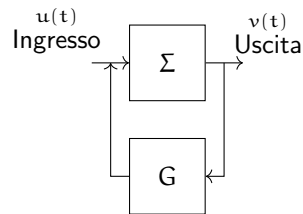


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

## 2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

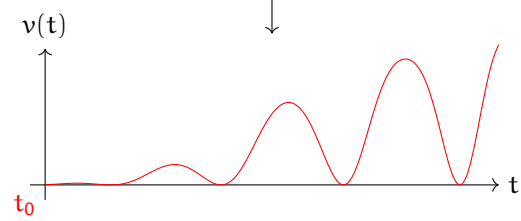
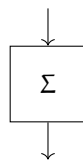
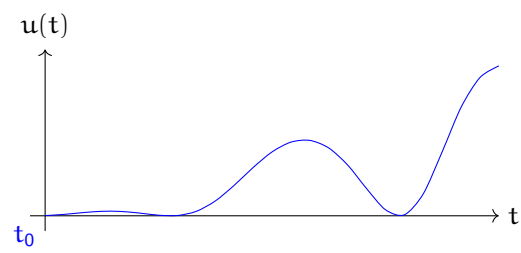
$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1.  $t, \tau, t_i$ : tempo continuo
2.  $k$ : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se  $v_1(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t)$  e  $v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_2(t)$  allora  $v_1(t) + v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t) + u_2(t)$ .
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.



$$t_1 = t_0 + t_n$$

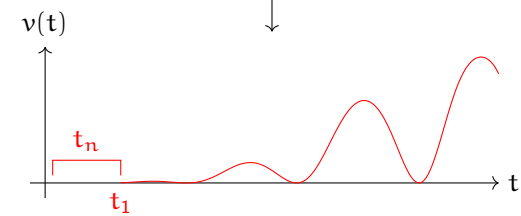
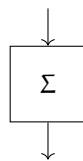
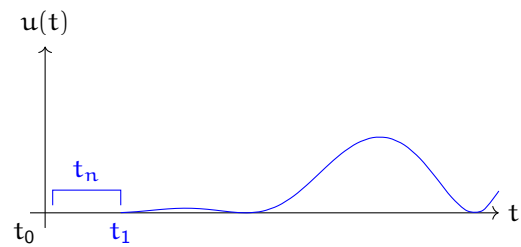


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.



## 3 Modello di sistemi

### 3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

### 3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:



Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

### 3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

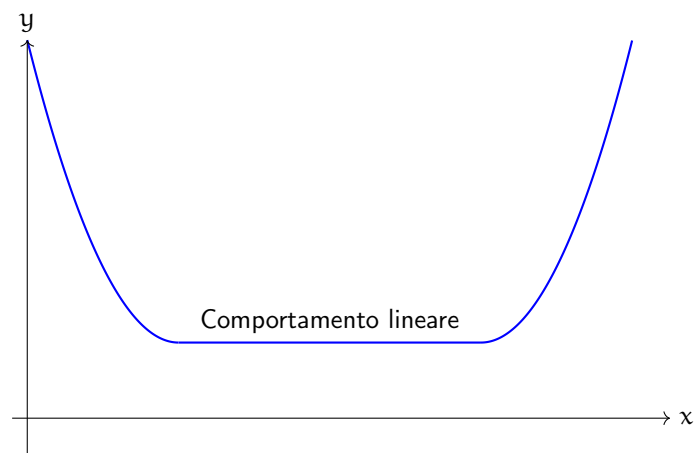


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

### 3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

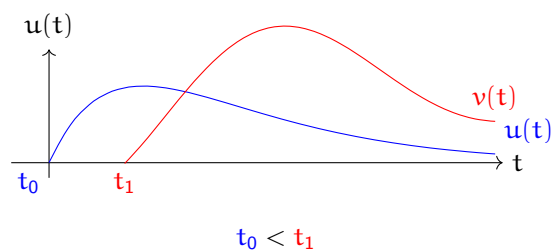


Figura 10: Esempio di causalità

### 3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

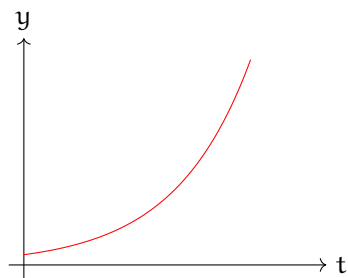


Figura 11: Sistema instabile

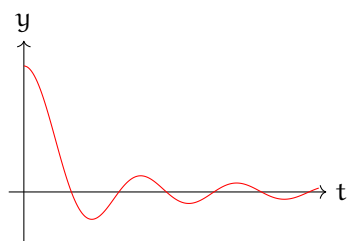


Figura 12: Sistema stabile

Ci sono 2 tipi di stabilità:

- **Stabilità asintotica**  $\rightarrow \forall i \Re \lambda_i < 0$
- **Stabilità BIBO** verificare che  $h(t)$  sia integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < +\infty$$

### 3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $M, N \in \mathbb{R}$  non per forza uguali

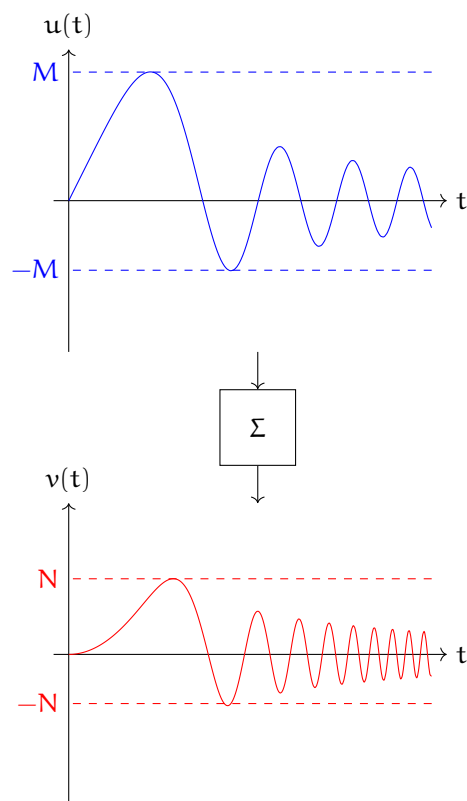


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

### 3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

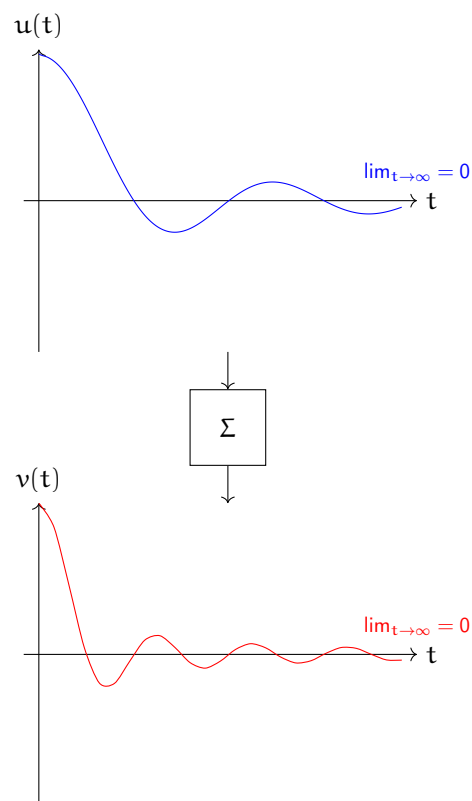


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

## 4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

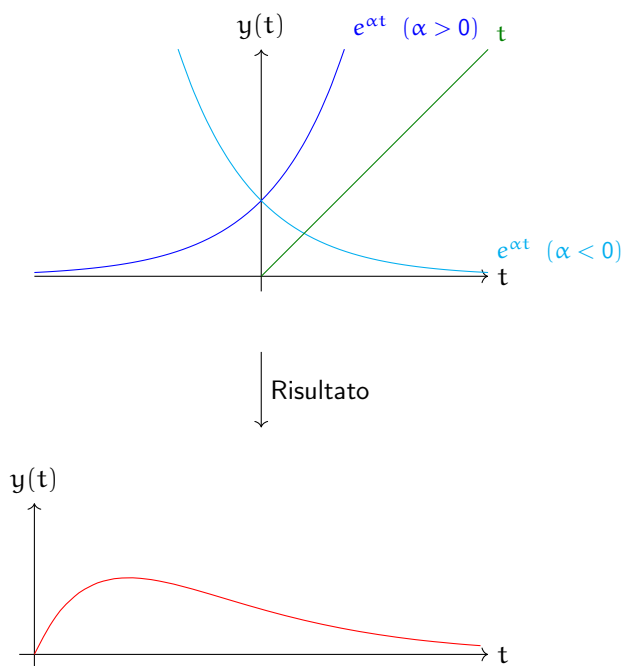


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con  $l = 1$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con  $\alpha < 0$  il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con  $l = 2$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome  $\alpha \in \mathbb{C}$  si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

$\lambda$  è la parte reale

$j\omega$  è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

**Definizione 4.1** (Complesso coniugato). A ogni numero complesso è associato un coniugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

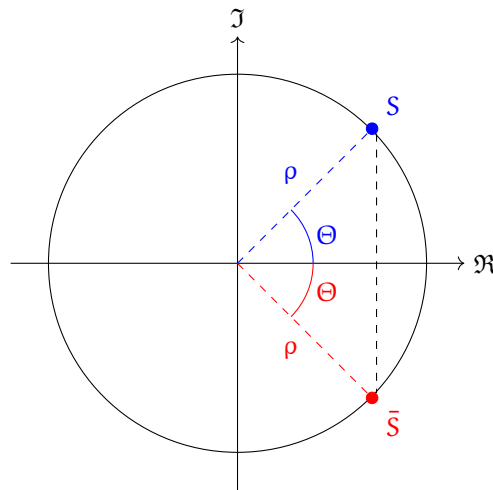


Figura 16: Circonferenza di proiezione

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

## 5 Funzioni in $\mathbb{C}$

### 5.1 Funzione a variabili complesse

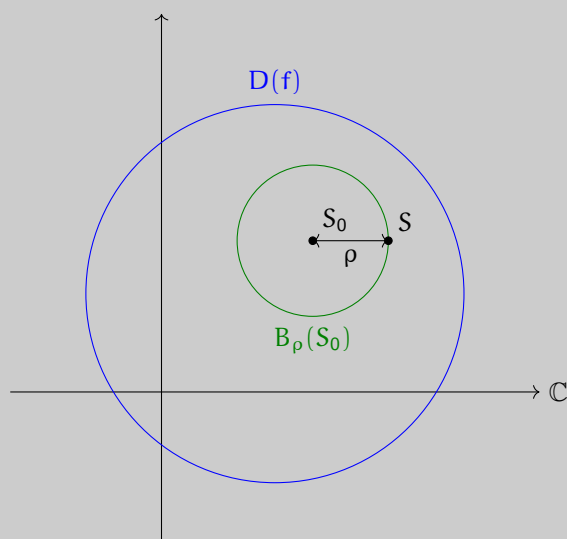
**Definizione 5.1** (Funzione a variabile complessa). Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

**Definizione 5.2** (Punto interno). Un punto  $S_0$  appartenente a un intorno  $D(f) \subseteq \mathbb{C}$  è interno a  $D(f)$  se e solo se esiste un disco  $B_\rho(S_0)$  di raggio  $\rho \in \mathbb{R}_+$  centrato in  $S_0$  tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi  $D(f)$  è un dominio e  $B_\rho(S_0)$  è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$



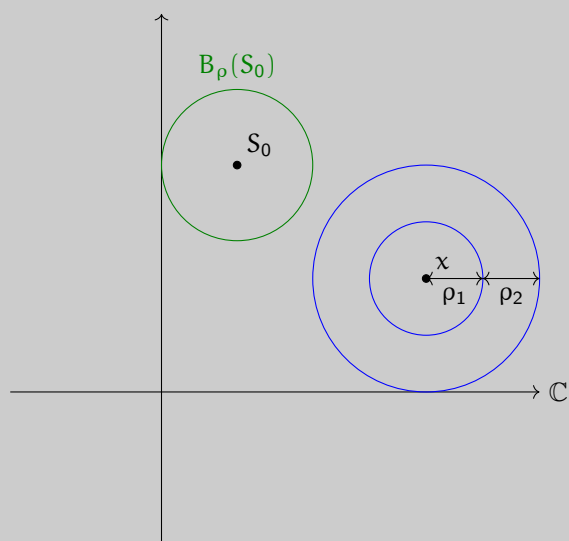
**Definizione 5.3** (Insieme aperto). È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

Ad esempio:

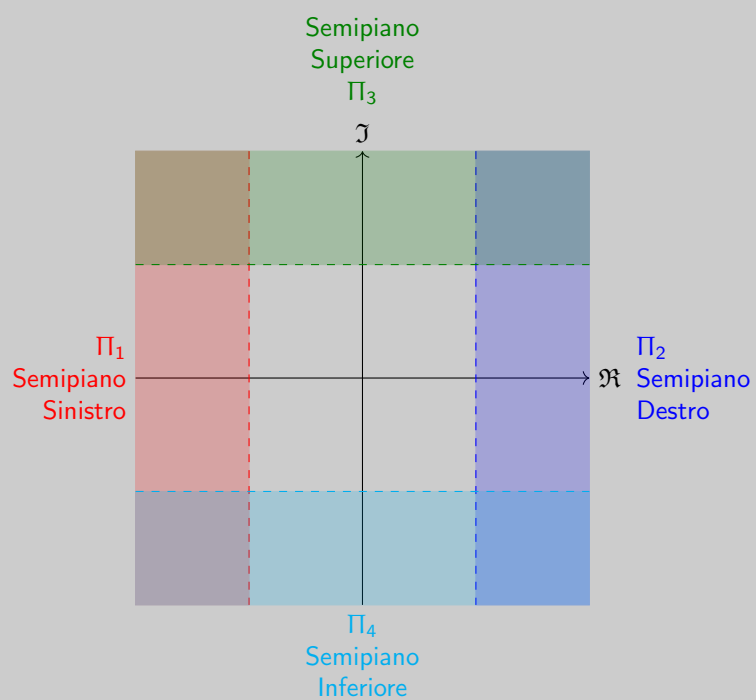
- insieme  $\mathbb{C}$
- insieme  $\emptyset$
- i dischi in un punto  $S_0$ ,  $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto  $x$ ,

$$\{S \in \mathbb{C}, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$





- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



## 5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$

- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad k, n \in \mathbb{Z}$  (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad S, S_0 \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{Z}$  (Serie di potenze)

### 5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con  $n = 2$ :

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con  $n = 3$ :

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

#### 5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

**Teorema 5.1** (Teorema fondamentale delle radici). Ogni polinomio  $P(S)$  a coefficienti complessi di grado  $n > 0$  ha  $n$  **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^r (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:

$s_r$  sono delle radici

$\mu_r$  sono le molteplicità delle radici

$a_n$  è il coefficiente del polinomio

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$$

## 6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

### 6.1 Segnali continui

$$t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

### 6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- $A$  è l'ampiezza
- $\omega$  è la frequenza  $f = \frac{1}{T}$  ( $T$  = periodo )
- $\phi$  è la fase

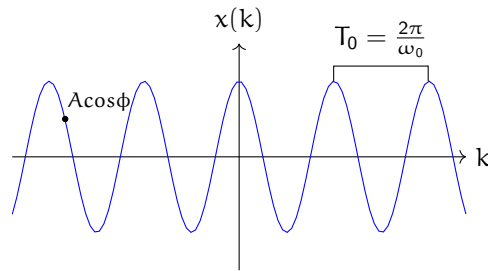


Figura 17: Funzione sinusoidale

#### • Periodico

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

#### • Shift temporale equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\omega_0(t - t_0)] = A \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta \phi})$$

$$A \cos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

- Se  $\phi = 0$  Il segnale assume la seguente forma:

$$A = \cos(\omega_0 t)$$

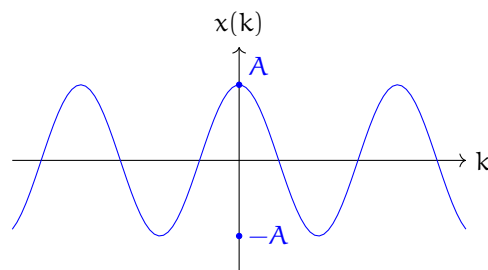


Figura 18: Funzione coseno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A \sin(\omega_0 t) \\ A \cos(\omega_0(t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$

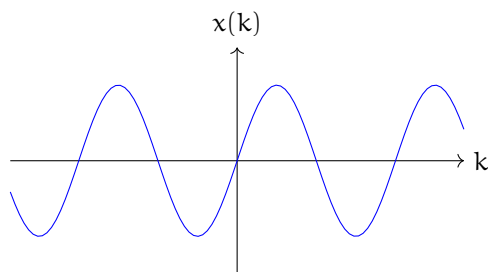


Figura 19: Funzione seno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

### 6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

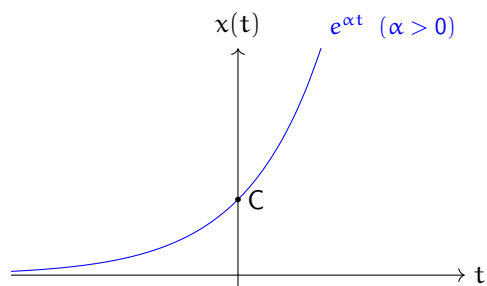


Figura 20: Esempio di segnale

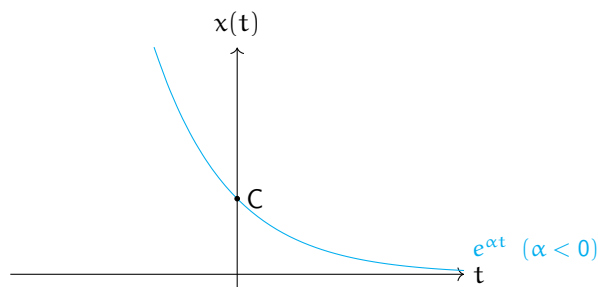


Figura 21: Esempio di segnale

- Shift Temporale

$$C e^{\alpha(t+t_0)} = C e^{\alpha t} \cdot \underbrace{C e^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

### 6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = C e^{\alpha t}$$

$$C = |c| e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_0 \text{ (cartesiana)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_0)t} = \\ &= |c| e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t + \Theta)} \text{ (Eulero)} \end{aligned}$$

**Definizione 6.1** (Eulero). La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_0 t + \Theta)} = \cos(\omega_0 t + \Theta) + j \sin(\omega_0 t + \Theta)$$

$$x(t) = |c| e^{rt} \cdot (\cos(\omega_0 t + \Theta) + j \sin(\omega_0 t + \Theta))$$

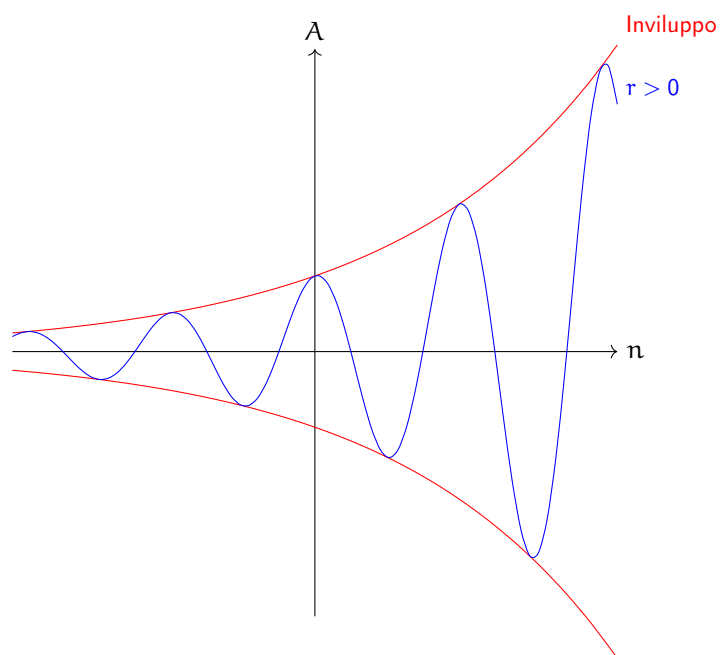


Figura 22: Esponenziale sinusoidale continuo con  $r > 0$

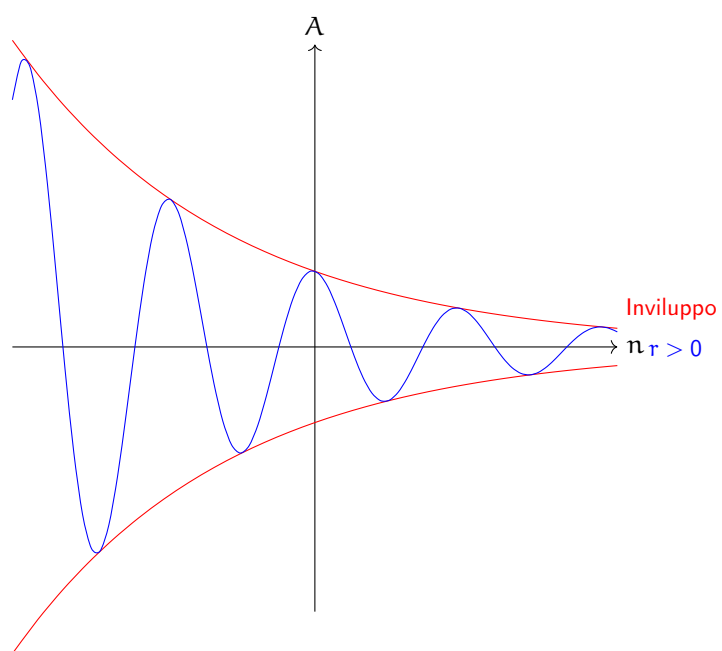


Figura 23: Esponenziale sinusoidale continuo con  $r < 0$

## 6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

### 6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- $A$  è l'ampiezza
- $\Omega_0$  è la frequenza  $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$
- $\phi$  è la fase

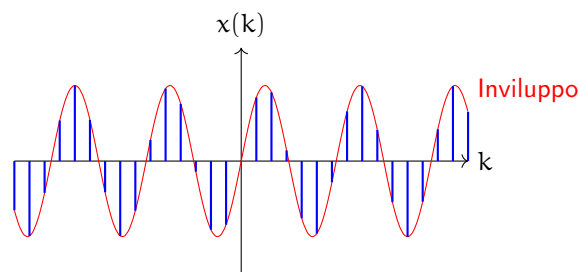


Figura 24: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] = A \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta \phi})$$

- Se  $\phi = 0$  Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] \stackrel{?}{=} A \cos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove  $\phi$  è il rapporto tra  $\phi$  e  $\Omega_0$  è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

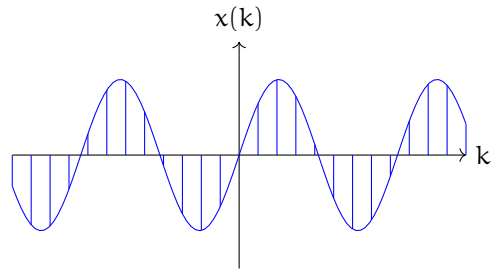


Figura 25: Calcolo del cambio di fase

**Esempio 6.1.**

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m = 1)$$

### 6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^\beta; \quad C, \alpha \in \mathbb{R}$$

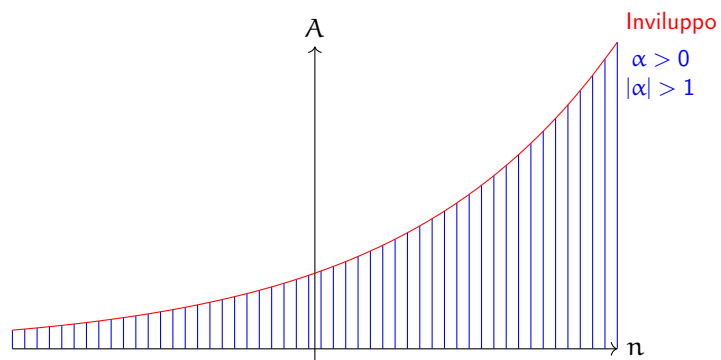


Figura 26: Esponenziale reale con  $\alpha > 0$   $|\alpha| > 1$



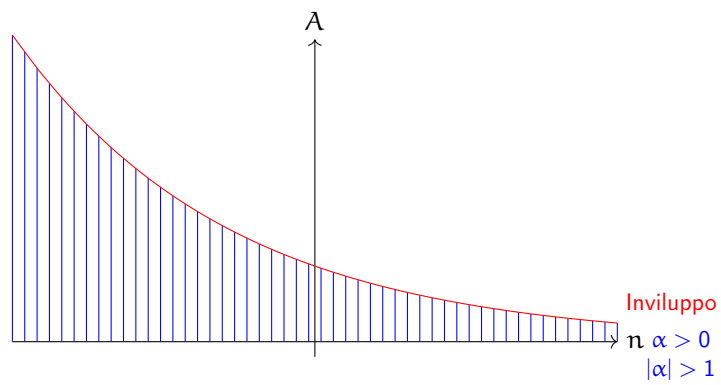


Figura 27: Esponenziale reale con  $\alpha > 0$   $|\alpha| < 1$

### 6.2.3 Esponenziali Complessi

$$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

dove

$$C = |C|e^{j\Theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = |C|e^{j\Theta} \cdot (|\alpha|e^{j\omega_0})^n =$$

$$|C| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \Theta)}$$

Usando la formula di Eulero:

$$x[n] = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot (\cos(\omega_0 n + \Theta) + j\sin(\omega_0 n + \Theta))$$

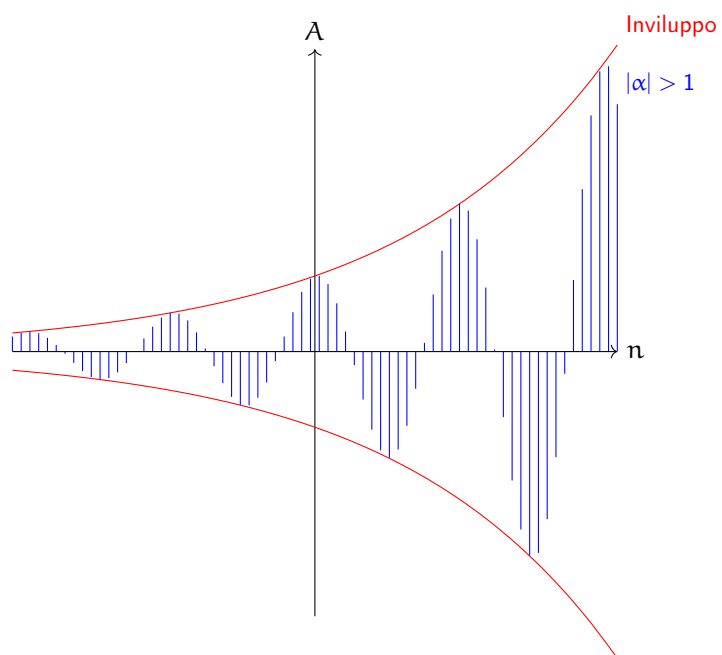


Figura 28: Esponenziale sinusoidale con  $|\alpha| > 1$

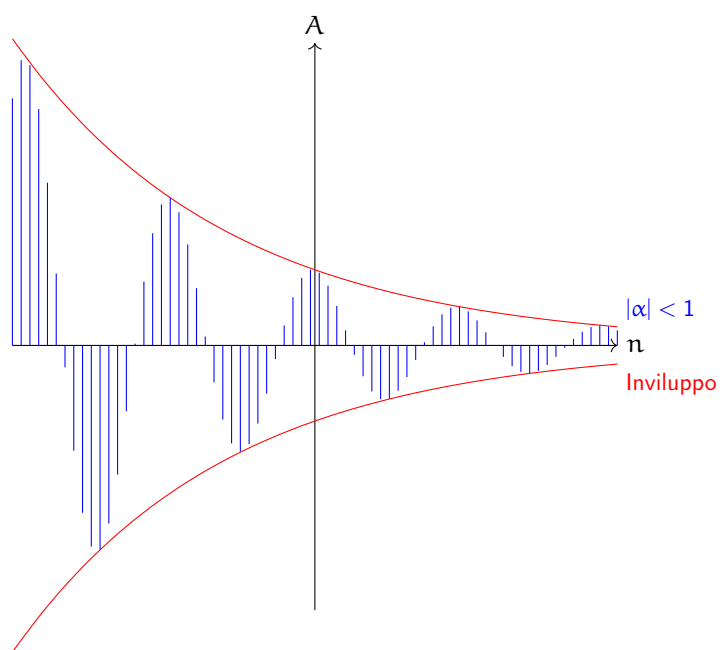


Figura 29: Esponenziale sinusoidale con  $|\alpha| < 1$

### 6.3 Rappresentazione

I segnali che appartengono all'insieme dei complessi sono tridimensionali e sono rappresentati in 2 assi cartesiani diversi, che mostrano lo stesso segnale, ma da 2 punti di vista differenti. Il segnale viene generato da un punto che continua a girare periodicamente su una circonferenza proiettando su entrambi gli assi il suo valore.

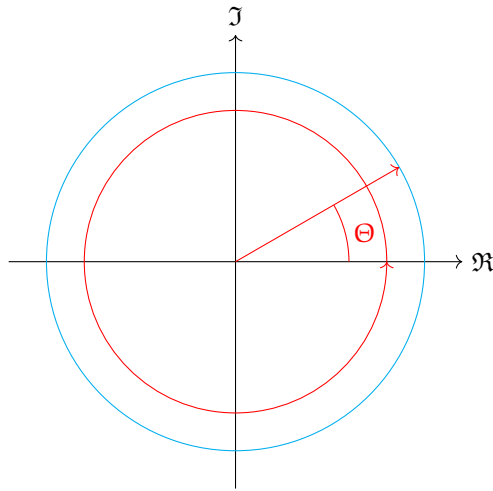


Figura 30: Circonferenza di proiezione

La proiezione sull'asse dei reali è la parte reale del segnale:

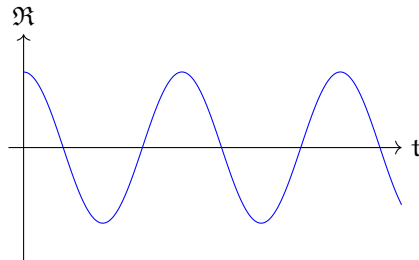


Figura 31: Proiezione su asse reale

La proiezione sull'asse degli immaginari è la parte immaginaria del segnale ed è traslata di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alla parte reale:

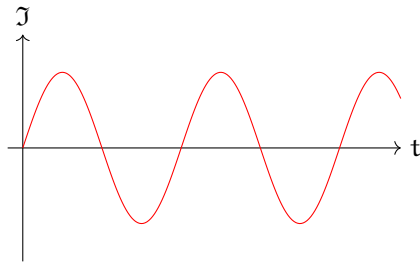


Figura 32: Proiezione su asse immaginario

In 3 dimensioni diventa:

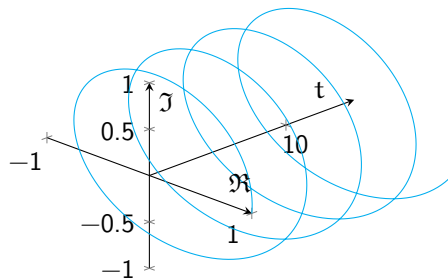


Figura 33: Circonferenza di proiezione in 3D

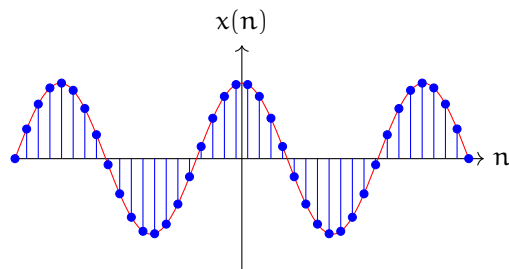
## 6.4 Problema della periodicità

Il problema della periodicità consiste nel fatto che alcuni segnali possono sembrare periodici anche se non lo sono. Ad esempio:

**Esempio 6.2.**

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}} m = 12m$$

Con  $m = 1$ :

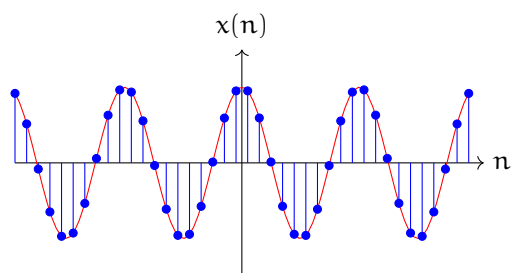
$$T_0 = 12 \cdot 1 = 12 \in \mathbb{Z}$$

Quindi il segnale è periodico.

**Esempio 6.3.**

$$\Omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} m = \frac{31}{4} m$$

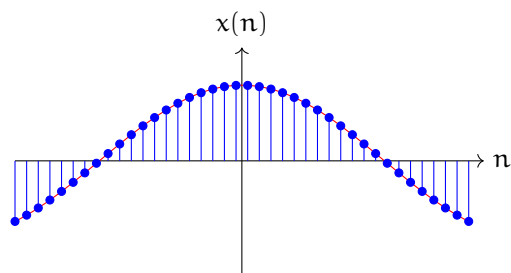
Con  $m = 4$ :

$$T_0 = \frac{31}{4} \cdot 4 = 31 \in \mathbb{Z}$$

**Esempio 6.4.**

$$\Omega_0 = \frac{1}{6}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

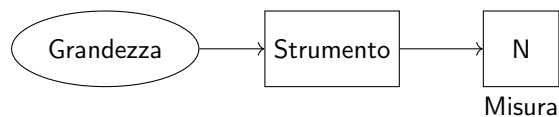
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} m = 2\pi \cdot 6m$$

Non esiste  $m \in \mathbb{Z}$  che mi tolga  $\pi$  dalla formula del periodo, quindi il segnale non è periodico anche se lo sembra

## 7 Segnali generalizzati

Ci sono alcune grandezze che non si possono facilmente calcolare con i segnali tradizionali, quindi analiticamente, ma solo con strumenti appositi.

**Esempio 7.1.** La tensione della corrente elettrica



Per misurare la tensione si usa il multimetro. Queste sono grandezze definite all'interno di un'operazione integrale.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma(t)}_{\text{Grandezza}} \cdot \underbrace{\phi(t)}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{N}_{\text{Misura}}$$

### 7.1 Segnali di impulso

- **Impulso di Dirac** È una funzione con supporto **infinitesimo**, altezza **infinita** e area = 1

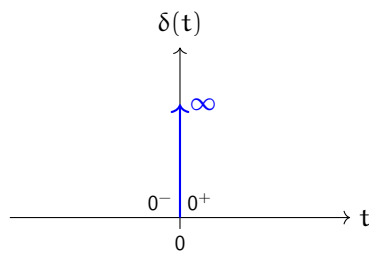


Figura 34: Impulso di Dirac

È definita in  $[0^-, 0^+]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{\text{Impulso}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{1}_{\text{Valore}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Impulso unitario**

Matematicamente non si usa l'impulso di Dirac, ma l'**impulso unitario**.

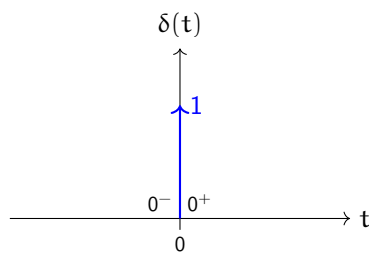


Figura 35: Impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In natura, il segnale che si avvicina di più al segnale di impulso è il seguente:

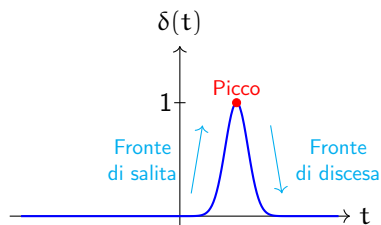


Figura 36: Segnale che si avvicina all'impulso

In ogni caso, non si avvicina mai all'impulso di Dirac, perchè ha sempre un fronte di salita e discesa, quindi non è istantaneo.

### 7.1.1 Finestra rettangolare unitaria

È una funzione che definisce un rettangolo di altezza  $A = 1$  e larghezza  $T$ .



Figura 37: Finestra rettangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se questo segnale è ripetuto nel tempo si chiama **onda quadra**.

Alcune applicazioni possono essere:

- Gestione di motori elettrici
- Equalizzazione di audio

### 7.1.2 Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario

È una funzione che definisce un triangolo di altezza  $A = 1$  e larghezza  $T$ .

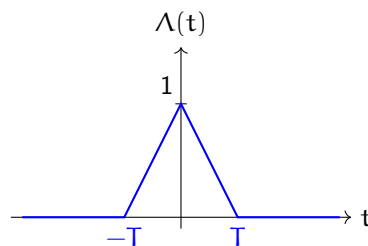


Figura 38: Finestra triangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{se } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Le applicazioni sono le stesse del rettangolo, ma con una forma più armonica (smooth). Si possono anche generare segnali sinusoidali.

## 7.2 Come si realizza un impulso

- Rettangolo:

L'impulso si definisce come una successione di funzioni per cui vengono cambiati dei valori:

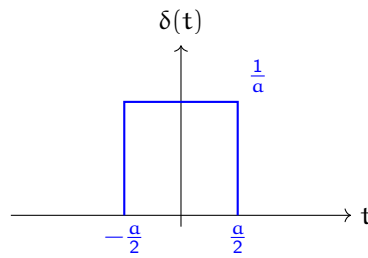


Figura 39: Impulso rettangolare

L'obiettivo è raddoppiare l'altezza e dimezzare la larghezza, mantenendo l'area uguale.

Calcoliamo l'area di questa funzione:

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

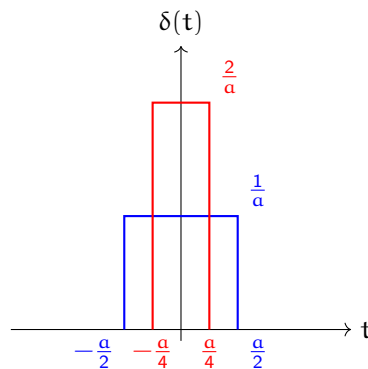


Figura 40: Impulsi rettangolari

E calcoliamo di nuovo l'area

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} = \frac{2a}{4} \cdot \frac{2}{a} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

- Triangolo:

Facciamo la stessa cosa con il triangolo:

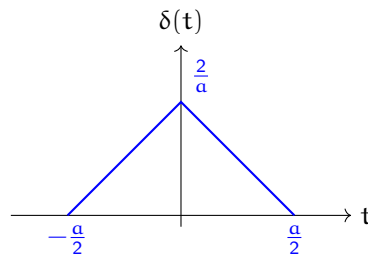


Figura 41: Impulso triangolare

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

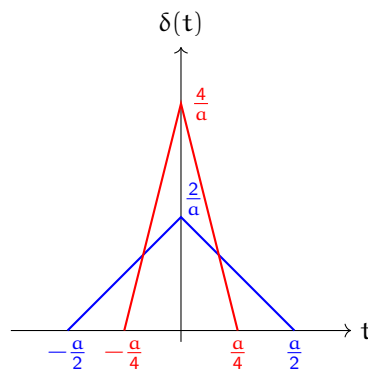


Figura 42: Impulsi triangolari

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

### 7.3 Derivata dell'impulso

Considerando l'impulso come successione di triangoli abbiamo che all'infinito ci sarà un fronte di salita e discesa, quindi la derivata saranno degli impulsi positivi e negativi.

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \dot{\delta}(t) = \delta'(t)$$

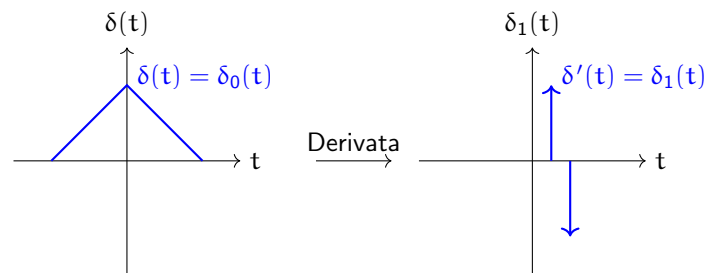


Figura 43: Derivata del segnale triangolare

## 7.4 Integrale dell'impulso

I segnali polinomiali (o segnali canonici) sono definiti come l'integrale di un impulso. È definito come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int \delta_0(t) dt = \delta_{-1}(t)$$

### 7.4.1 Funzione gradino

Si ottiene integrando una volta:

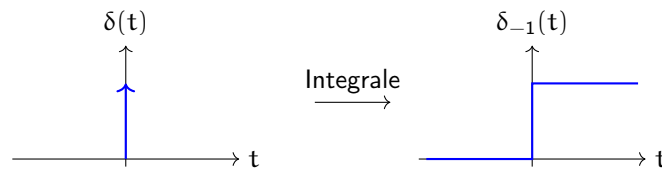


Figura 44: Funzione gradino

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Moltiplicare un segnale per il gradino unitario permette di ottenere la parte positiva del segnale:

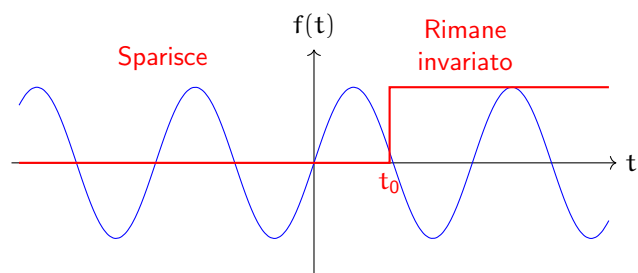


Figura 45: Moltiplicazione per gradino unitario

Si ottiene:

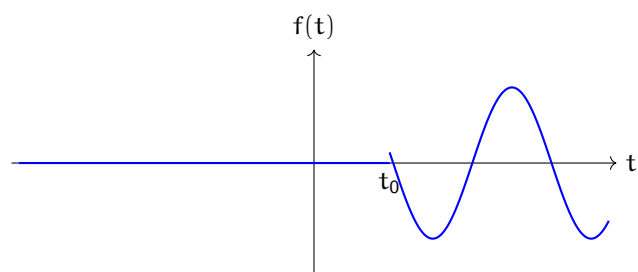


Figura 46: Risultato della moltiplicazione

$$f(t) \cdot \delta_{-1}(t) = f_1(t) \text{ (che è causale)}$$

La funzione del gradino è anche nota come **funzione di Heaviside**.

#### 7.4.2 Funzione rampa

Si ottiene integrando due volte:

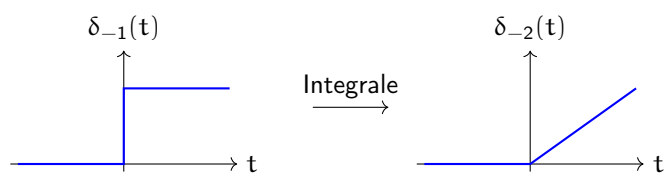


Figura 47: Funzione rampa

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 7.4.3 Funzione parabolica

Si ottiene integrando tre volte:

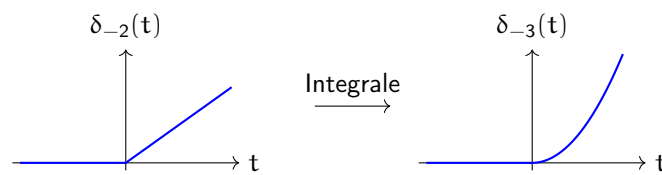


Figura 48: Funzione rampa

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 7.4.4 A cosa servono i segnali canonici

Non si sa cosa contengono i sistemi LTI che si analizzano, perchè si gestiscono solo gli input e gli output.

Di solito si cerca di dare il segnale gradino al sistema e si guarda qual'è la risposta del sistema a questo segnale. Ad esempio:

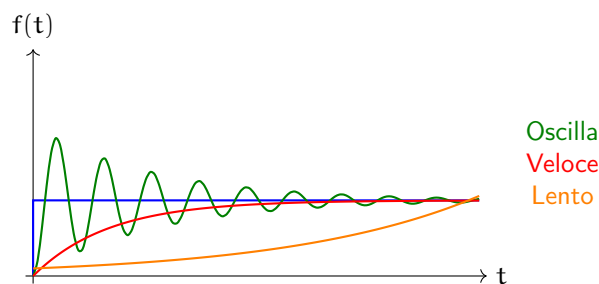


Figura 49: Esempi di risposta di un sistema

**Esempio 7.2.** Il sistema rosso cresce lentamente, ma ad un certo punto arriva a 1, mentre quello arancione è un sistema più lento.

Quello verde è più veloce, ma non arriva mai a regime perchè continua a oscillare e quindi non è asintoticamente stabile, ma potrebbe essere BIBO stabile.

- Per una luce il sistema verde potrebbe andare bene se l'oscillazione non è troppa
- Per un sistema frenante il sistema arancione potrebbe essere troppo lento

## 7.5 Proprietà degli impulsi

È un segnale ideale (canonico) centrato in 0 e definito in  $[0^-, 0^1]$  con altezza 1.

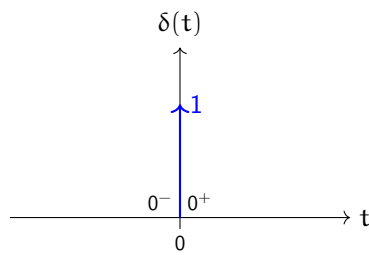


Figura 50: Impulso unitario

- **Pari:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Area unitaria**

Se

$$0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Allora

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1$$

Altrimenti

$$\int_a^b \delta(t) dt = 0$$

Cioè se l'intervallo contiene lo 0, l'area è 1, altrimenti è 0.

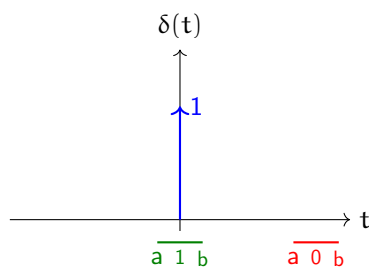


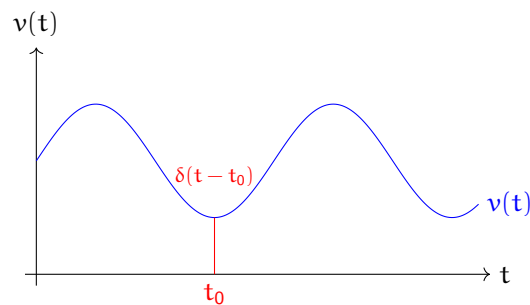
Figura 51: Area dell'impulso

- **Proprietà del campionamento o riproducibilità**

Se  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua in  $t_0 \in \mathbb{R}$ , allora:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Se prendo un impulso traslato in  $t_0$  e lo moltiplico per una funzione ottengo il valore della funzione in quel punto.



Per riuscire a passare dal continuo al discreto si continua a moltiplicare la funzione per un impulso traslato in  $t_0$  e si ottiene il valore della funzione in quel punto.

Questa formula può essere riscritta come:

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau$$

Il valore di una funzione in  $t_0$  l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in  $t_0$ .

## 8 Sistemi

Un sistema è un modello matematico o una formulizzazione di un processo o di un fenomeno fisico che permette di trasformare un input in un output. Ci sono più tipi di sistemi:

- **Sistemi SISO** (Single Input Single Output): Sono sistemi che hanno un solo input e un solo output.
- **Sistemi dinamici**: Sono sistemi che "ricordano" l'input precedente, quindi l'output dipende dall'input attuale e da quello precedente.

**Esempio 8.1.** Un esempio di sistema fisico stabile è il pendolo:

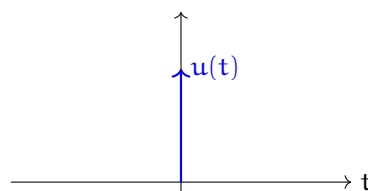


Figura 52: Input

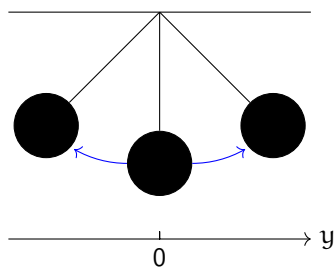


Figura 53: Sistema

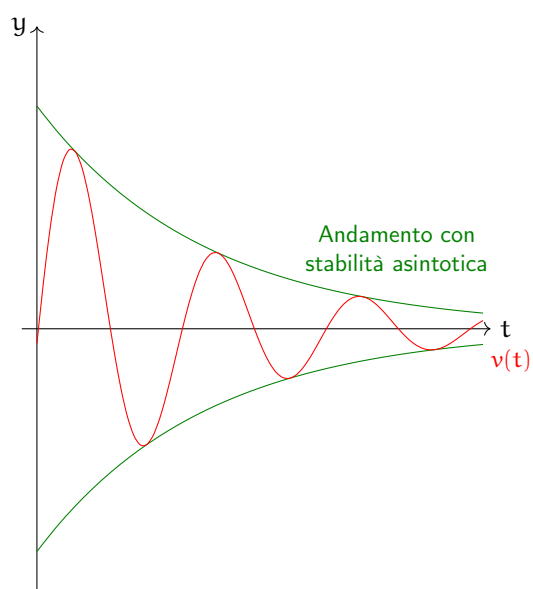


Figura 54: Output

**Esempio 8.2.** Un esempio di sistema fisico instabile è il seguente:

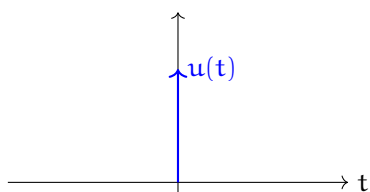


Figura 55: Input



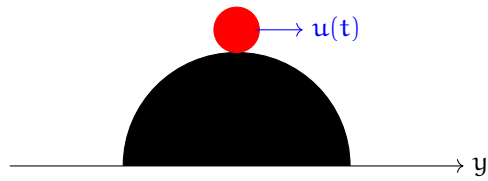


Figura 56: Sistema

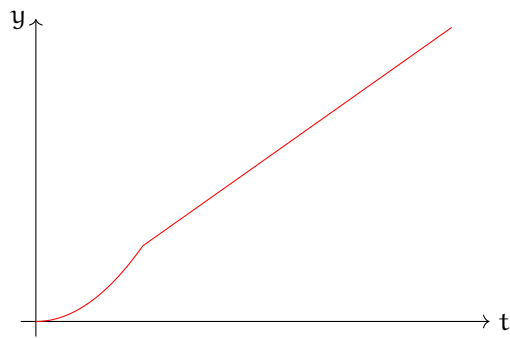


Figura 57: Output

## 8.1 Proprietà dei sistemi LTI

**Definizione 8.1** (Sistema LTI). Un sistema a tempo continuo per cui valgono le proprietà di:

- Linearità
- Tempo invarianza
- Causalità

si definisce **Sistema Lineare Tempo Invariante (LTI)**.

### 8.1.1 Linearità

Se ho un sistema con un primo input  $u_1(t)$  e un secondo input  $u_2(t)$  che insieme fanno un terzo input allora l'output del sistema sarà la combinazione lineare degli output dei due input.

$$\underbrace{\underbrace{a u_1(t)}_{\text{Input 1}} + \underbrace{b u_2(t)}_{\text{Input 2}}}_{\text{Input 3}} \rightarrow \text{Sistema} \rightarrow \underbrace{\underbrace{a \cdot y_1(t)}_{\text{Output 1}} + \underbrace{b \cdot y_2(t)}_{\text{Output 2}}}_{\text{Output 3}}$$

### 8.1.2 Tempo invarianza

Un sistema a tempo continuo è tempo invariante se e solo se:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

### 8.1.3 Causalità

Un sistema si dice causale se e solo se l'uscita all'istante  $\tau$  dipende soltanto dall'ingresso per  $t \leq \tau$  ( $v(\tau)$  dipende solo da  $u(t)$   $t \leq \tau$  e non dipende dai valori successivi). La causa non precede mai l'effetto.

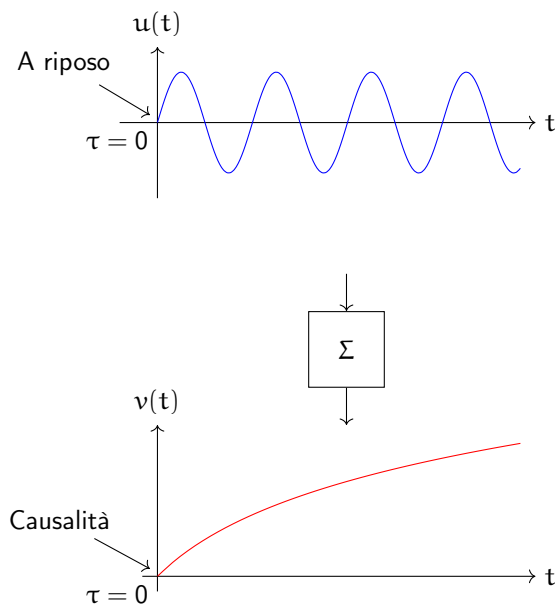


Figura 58: Sistema a riposo

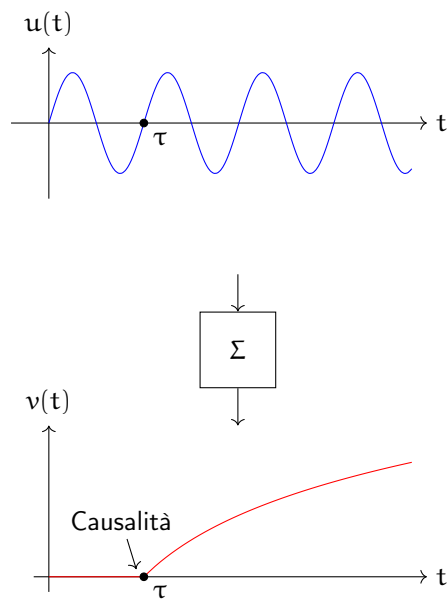


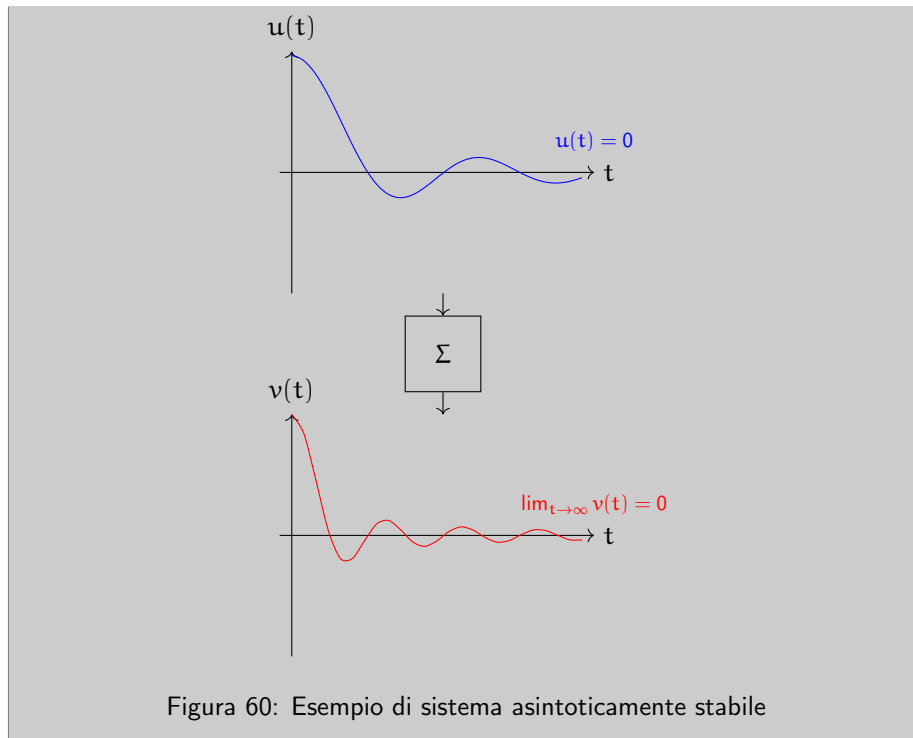
Figura 59: Sistema non a riposo

Per comodità si considerano solo i sistemi a riposo ( $\tau = 0$ ).

#### 8.1.4 Proprietà di stabilità asintotica

**Definizione 8.2.** Un sistema si dice **asintoticamente stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ t.c } u(\tau) = 0, \quad \forall t \leq \tau \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$



Per capire se un sistema è asintoticamente stabile bisogna verificare se ogni soluzione del sistema è minore di 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) < 0$$

### 8.1.5 Proprietà di BIBO stabilità

**Definizione 8.3.** Un sistema si dice **BIBO stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R}, \text{ e } U_u \in \mathbb{R} \text{ t.c se } |u(t)| \leq U_u, \forall t \leq \tau$$

$\Downarrow$

$$\exists U_v > 0 \text{ t.c } |v(t)| \leq U_v, \forall t \geq \tau$$

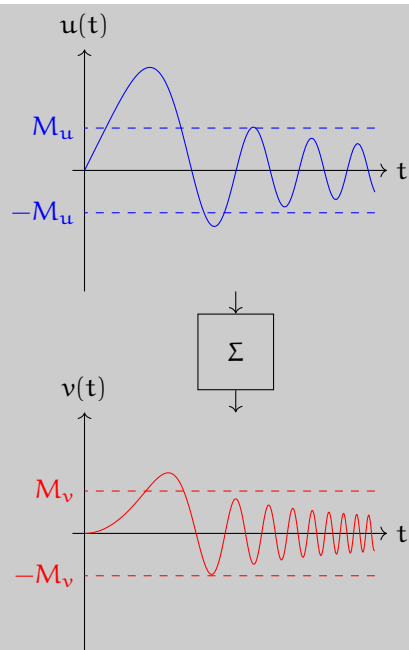


Figura 61: Esempio di sistema stabile BIBO

Ogni sistema asintoticamente stabile è anche BIBO stabile, ma non il contrario.

Per capire se un sistema è BIBO stabile si deve verificare che  $h(t)$  (risposta all'impulso) sia assolutamente integrabile e che abbia un valore finito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

## 8.2 Sistemi descritti da equazioni differenziali

I sistemi che si analizzano in questo corso sono solo un sottoinsieme:

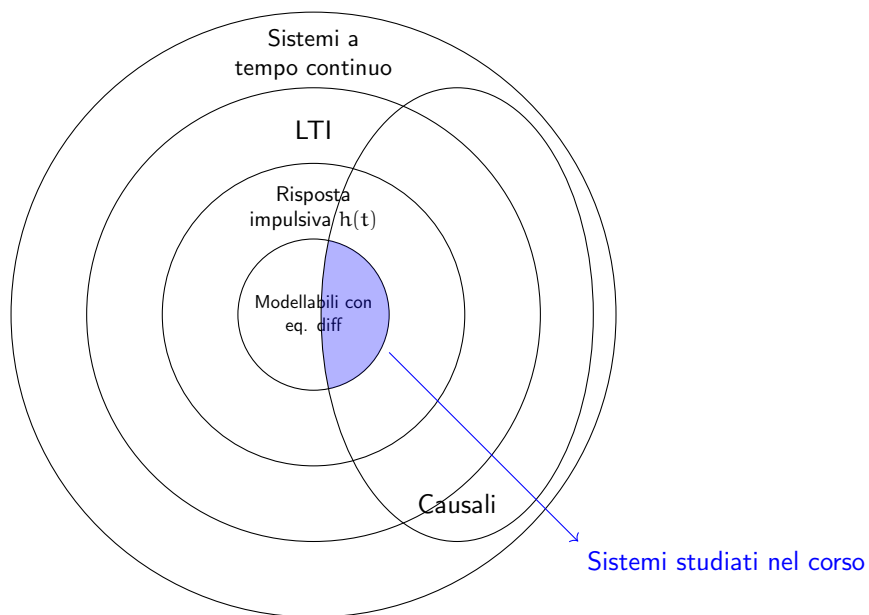


Figura 62: Sistemi LTI

**Esempio 8.3.** Prendiamo come esempio un sistema massa molla smorzatore:

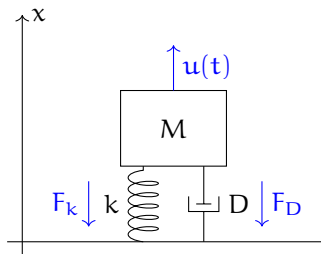


Figura 63: Sistema massa molla smorzatore

Andiamo a vedere le forze in gioco:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$x(t)$  è lo spostamento nel tempo

$$M \cdot a(t) = u(t) - F_k - F_D$$

che equivale a

$$M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = u(t) - k \cdot x(t) - D \cdot \frac{\partial x}{\partial t} *$$

$$\underbrace{M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + D \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + k \cdot x(t)}_{\text{Segnale di uscita}} = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale di ingresso}}$$

\*Il simbolo  $\partial$  indica la derivata parziale. Una derivata parziale è una derivata rispetto ad una funzione a più variabili.

**Esempio 8.4.** Un altro esempio è il sistema RL (Resistenza Induttanza):



Figura 64: Sistema RL

Possiamo descrivere l'input del sistema come:

$$u(t) = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + \underbrace{R \cdot i(t)}_{v(t)}$$

Possiamo descrivere l'output come:

$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\text{Legge di Ohm}} i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

Usando la legge di Ohm ( $V = Ri$ ) possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial v(t)}{\partial t}}_{\text{Segnale d'uscita}} + v(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale d'ingresso}}$$

Quindi in generale possiamo scrivere un sistema LTI come:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t} + a_{n-1} \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} + \dots + a_1 \frac{\partial v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t} + b_{m-1} \frac{\partial^{(m-1)} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Dove:

- $u(t)$  è il segnale di ingresso
- $v(t)$  è il segnale di uscita
- $a_n, b_m \neq 0 \in \mathbb{R}$

Tutto ciò si può riscrivere come:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t} \quad (1)$$

$n$  e  $m$  sono gli ordini delle equazioni differenziali con  $n \geq m$ .

- Se  $n > m$  il sistema è detto **strettamente proprio**
- Se  $n \geq m$  il sistema è detto **proprio**

Ora possiamo inserire all'interno dei sistemi l'equazione differenziale:

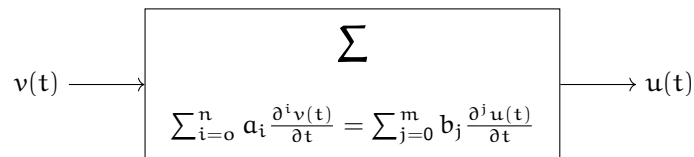


Figura 65: Contenuto del sistema

**Esempio 8.5.** Un esempio di sistema descritto da un'equazione differenziale è il seguente e riprende il sistema massa molla smorzatore dell'esempio 8.3:

$$\underbrace{M}_{\alpha_2} x''(t) + \underbrace{D}_{\alpha_1} x'(t) + \underbrace{K}_{\alpha_0} x(t) = \underbrace{1}_{b_0} u(t)$$

### 8.2.1 Risoluzione

Un sistema descritto da un'equazione differenziale non ha una sola soluzione, a meno che non vengano imposte  $n$  **condizioni iniziali**.

$$\left. v(t) \right|_{t=0^-} \quad \left. \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-}$$

Figura 66: Derivata di ordine  $n - 1$  di  $v(t)$  calcolata al tempo  $t = 0^-$



La soluzione è l'uscita  $v$  del sistema (reale o complessa) che può essere scomposta in:

$$\underbrace{v_t}_{\text{risposta totale}} = \underbrace{v_l}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{v_f}_{\text{Risposta forzata}}$$

- **Risposta libera:** Dipende soltanto dalle condizioni iniziali, quindi è il comportamento del sistema in assenza di input.

$$\text{C.I.} \neq 0$$

$$u(t) = 0$$

- **Risposta forzata:** Dipende solo dall'input del sistema e la maggior parte delle volte è diversa dalla risposta libera.

$$\text{C.I.} = 0$$

$$u(t) \neq 0$$

### 8.2.2 Risposta libera (o evoluzione libera)

Per calcolare la risposta libera del sistema definito in 1 bisogna risolvere l'equazione omogenea ( $= 0$ ) associata, quindi si prende la parte sinistra dell'equazione differenziale e si pone uguale a 0 la parte destra.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Per farlo bisogna definire il **polinomio caratteristico**:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

**Esempio 8.6.** Ad esempio:

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$$

Come prima cosa si toglie la parte destra

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Successivamente si scrive il polinomio caratteristico sostituendo a  $y(t)$  la variabile  $s$  e mettendo come potenza di  $s$  l'ordine della derivata:

$$3s^2 + 2s + 1 = 0$$

Ricordando il teorema fondamentale dell'algebra, cioè che la somma delle molteplicità delle radici è uguale all'ordine del polinomio, si può dire che:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$$

sono le soluzioni del polinomio caratteristico  $P(s)$  con relative molteplicità

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$$

vale che

$$\sum_{i=1}^r \mu_i = r$$

. Si ha quindi:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \underbrace{c_{i,l}}_{\in \mathbb{R}, \mathbb{C}} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}}$$

I valori  $c_{i,l}$  vengono calcolati usando le condizioni iniziali.

**Esempio 8.7.** Prendendo come esempio il sistema definito in 8.3 abbiamo l'equazione:

$$Mx''(t) + Dx'(t) + Kx(t) = 0$$

Poniamo:

$$M = 1, \quad D = 2, \quad K = 1$$

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 + 2s + 1 = \\ &= (s + 1)^2 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

con molteplicità algebrica è  $\mu_1 = 2$ . Quindi si hanno 2 soluzioni coincidenti e una sola radice distinta:  $r = 1$  La risposta libera quindi sarà:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= \sum_{i=1}^1 \sum_{l=0}^1 c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= c_{1,0} e^{-1t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_{1,1} \cdot e^{-1t} \cdot \frac{t^1}{1!} \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} \cdot 1 + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t \end{aligned}$$

**Esempio 8.8.** Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'''(t) + 3v''(t) + 3v'(t) + 1 = 0$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \\ &= (s + 1)^3 \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Il numero di soluzioni è  $r = 1$  con molteplicità  $\mu = 3$ .

La risposta libera è:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &\vdots \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Ora troviamo i coefficienti  $c_{i,l}$  per trovare la risposta libera specifica al nostro caso, considerando i seguenti valori iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \\ v''(0) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo  $t$  con 0 troviamo il valore di  $c_{1,0}$ :

$$\begin{aligned} v_l(0) &= c_{1,0} \cdot e^0 + c_{1,1} \cdot e^0 \cdot 0 + c_{1,2} \cdot e^0 \cdot \frac{0}{2} \\ &= c_{1,0} = 0 \end{aligned}$$

Troviamo il valore di  $c_{1,1}$  derivando la risposta libera:

$$v'_l(t) = -1c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t - c_{1,1} \cdot e^{-t} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t$$

una volta calcolata la derivata, poniamo  $t = 0$

$$\begin{aligned} v'_l(0) &= -c_{1,0} + c_{1,1} - c_{1,1} + c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} \cdot 0 \\ &= -c_{1,0} + c_{1,1} \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Troviamo il valore di  $c_{1,2}$  facendo la derivata seconda:

$$v''_l(t) = 0 + 1 \cdot e^{-t} \cdot t - e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t}$$

poniamo  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} v_l''(0) &= 0 + 1 \cdot 0 - 0 + c_{1,2} \cdot 0 - c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} = 0 \\ &= c_{1,2} = 0 \end{aligned}$$

Quindi alla fine la risposta libera specifica risulta:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \\ &= e^{-t} \cdot t \end{aligned}$$

**Esempio 8.9.** Prendiamo ad esempio un sistema descritto nel seguente modo:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

Vogliamo calcolare la risposta libera del sistema. Per farlo bisogna imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Il primo passo è calcolare il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 + 3s - 4 = 0 \\ &= (s - 1)(s + 4) \end{aligned}$$

Il secondo passo è trovare le radici e le molteplicità:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, & \mu_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -4, & \mu_2 &= 1 \end{aligned}$$

La risposta libera generica si calcola come:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

e nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^t + c_{2,0} \cdot e^{-4t} \\ &= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} \end{aligned}$$

Per trovare la risposta libera specifica bisogna calcolare i coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  derivando e valutando nelle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} v(t) &= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} \\ v'(t) &= c_1 \cdot e^t - 4c_2 \cdot e^{-4t} \end{aligned}$$

Mettiamo a sistema, valutando in  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \\ v'(0) = c_1 \cdot e^0 - 4c_2 \cdot e^0 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -5c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = -\frac{1}{5} \end{cases} & \end{aligned}$$

La risposta libera specifica è quindi:

$$v_l(t) = \frac{1}{5} \cdot e^t - \frac{1}{5} \cdot e^{-4t}$$

**Definizione 8.4.** Le formule più importanti sono:

- **Modello di un sistema:**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

- **Risposta libera:**

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}}_{\text{Modo elementare}}$$

Dove:

$r$  = numero di radici distinte  
 $\mu_i$  = molteplicità della radice  $\lambda_i$   
 $c_{i,l}$  = coefficienti da calcolare

### 8.2.3 Convergenza dei modi elementari

È una funzione che si comporta come un esponenziale, quindi la convergenza dipende dal valore di  $\lambda$ .

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Vale che:

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = 0$  se e solo se  $\Re(\lambda) < 0$ . **Stabilità asintotica**
2.  $m(t)$  è limitato, cioè può prendere solo valori limitati, su  $[0, \infty)$  se e solo se  $\Re(\lambda) \leq 0$ . Se  $\Re(\lambda) = 0$ , allora perché questo valga  $l$  deve essere uguale a 0 **Stabilità semplice**.
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$  in tutti gli altri casi. Quindi:

$$\Re(\lambda) > 0$$

oppure

$$\Re(\lambda) = 0, l \neq 0$$

**Instabilità.**

#### 8.2.4 Dimostrazioni

1.  $\Re(\lambda) < 0$ :

Riscriviamo  $\lambda$  come:

$$\lambda = a + bi = \sigma + j\omega$$

e riscriviamo  $m(t)$  come:

$$m = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!} = (e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}) \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}} \cdot \underbrace{e^{\sigma t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Esponenziale}}$$

con  $a = -\sigma$  diventa:

$$m = \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{at}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}}_{=0} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Limitato}}$$

Il blocco  $e^{j\omega t}$  è un punto che gira su un cerchio di raggio 1, quindi è limitato.

Il blocco  $\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}$  è limitato per  $t = 0$  e quindi  $m(t)$  tende a 0.

2.  $\Re(\lambda) = 0, l = 0$ :

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \frac{t^0}{0!} \cdot e^0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$= e^{j\omega t}$$

che è per definizione limitato in modulo.

$$3. \Re(\lambda) > 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Re(\lambda) = 0 \quad l \neq 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\frac{1}{\sigma} t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{Siccome } \sigma = \Re(\lambda) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$$

**Definizione 8.5.** Un sistema LTI descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

è detto **asintoticamente stabile** (la risposta è asintoticamente stabile) se e solo se ogni suo modo elementare converge a 0, cioè:

$$\forall i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) = 0 \quad m_i = e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

#### Osservazione

È detto **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico,  $P(s)$ , hanno parte reale negativa.

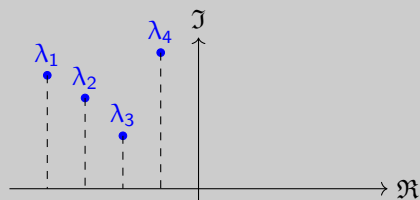


Figura 67: Asintoticamente stabile

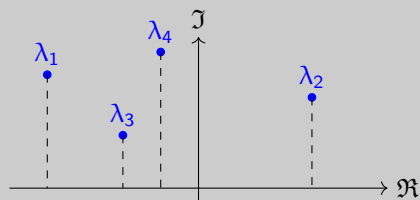
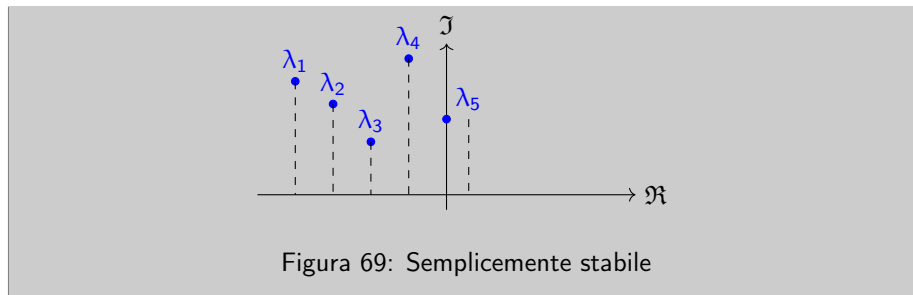


Figura 68: Non asintoticamente stabile



### 8.2.5 Prodotto di convoluzione

Il concetto di correlazione indica quanto due segnali siano simili tra loro e si calcola con il prodotto di convoluzione.

Il concetto di convoluzione è un'operazione tra due segnali che restituisce un terzo segnale.

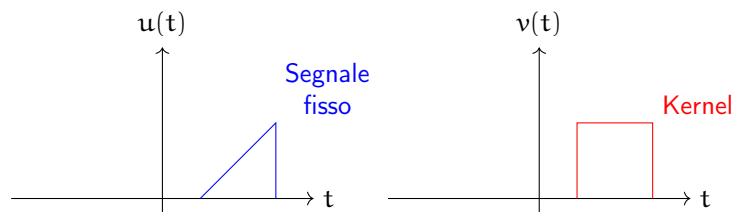


Figura 70: Segnale fisso e kernel

Il **kernel** è un segnale che viene riflesso rispetto all'asse  $y$  e traslato nel tempo  $t$  e moltiplicato per il segnale fisso. Il risultato è un segnale che rappresenta l'area sottesa dal prodotto dei due segnali.

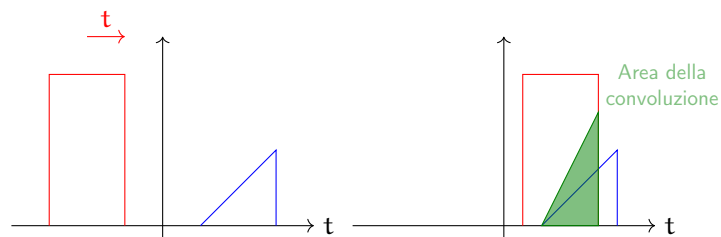


Figura 71: Convoluzione

Il grafico della convoluzione risultante è un segnale che rappresenta il cambiamento nel tempo del prodotto dei due segnali.



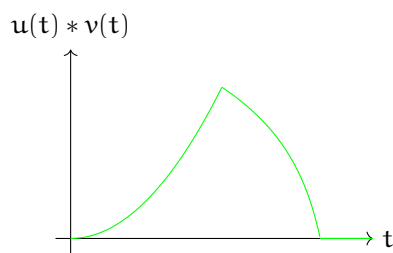


Figura 72: Grafico della convoluzione

**Definizione 8.6.** L'operatore di convoluzione tra due segnali  $u(t)$  e  $v(t)$  è definito come:

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau =$$

$$(v * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \cdot u(\underbrace{t}_{\text{Varia nel tempo}} \underbrace{-\tau}_{\text{Riflessione su y}}) d\tau$$

Il segnale riflesso viene moltiplicato per il segnale  $u(t)$ .

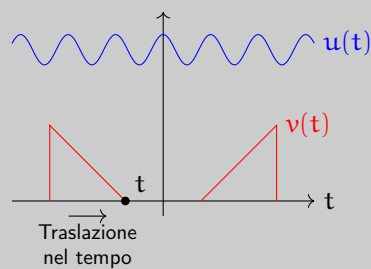


Figura 73: Convoluzione

Se la convoluzione viene effettuata con un impulso, il segnale viene campionato.

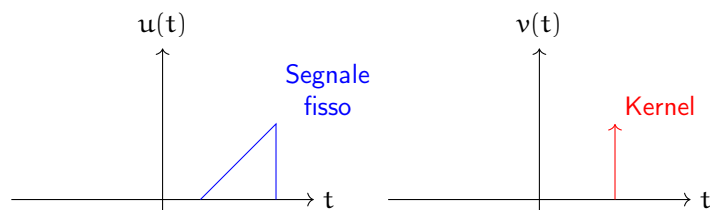


Figura 74: Segnale fisso e kernel

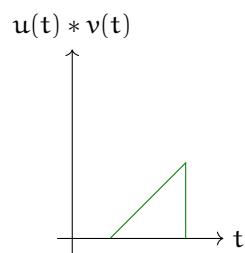
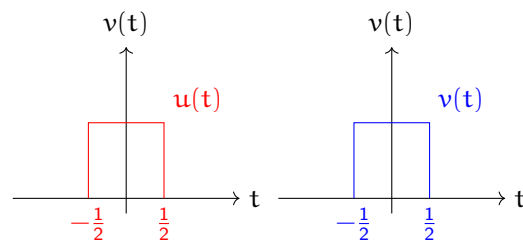


Figura 75: Grafico della convoluzione

**Esempio 8.10.** Ad esempio il segnale triangolo è formato dalla convoluzione di due segnali rettangolari.

$$u(t) = v(t) = \Pi(t)$$

( $\Pi(t)$  è la funzione rettangolo)



1. Scegliere il segnale più semplice
2. Specchiare l'altro segnale rispetto a y ( $f(t) \mapsto f(-t)$ )
3. Traslare il segnale mobile (quello specchiato) nel tempo
4. Spostare  $\forall t$  e calcolare l'integrale (aree sottese)

Il risultato della convoluzione sarà:

$$u(-2) * v(-2) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(-1) * v(-1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(0) * v(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$\vdots$

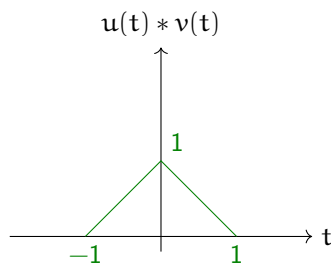


Figura 76: Grafico della convoluzione

### 8.2.6 Risposta impulsiva

**Definizione 8.7.** Dato un sistema a tempo continuo inizialmente a riposo (causale) definiamo la **risposta impulsiva** come l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso uguale all'impulso unitario

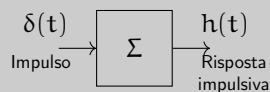


Figura 77: Risposta impulsiva

**Teorema 8.1.** L'uscita  $v(t)$  di un sistema LTI, inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso  $u(t)$  è dato dal seguente prodotto di convoluzione:

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

**Proprietà dell'integrale di convoluzione:**

- **Commutativa:**  $(u * v)(t) = (v * u)(t)$
- **Associativa:**  $(u * v)(t) * w(t) = u(t) * (v * w)(t)$
- **Distributiva** (rispetto alla somma):  $u(t) * (v(t) + w(t)) = (u * v)(t) + (u * w)(t)$

**Osservazione:** Un sistema LTI causale inizialmente a riposo, siccome  $h(t) = 0, t < 0$  (perchè  $\delta(t) = 0, t < 0$ ):

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Per calcolare la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right] \cdot \delta_{-1}(t)$$

dove:

- $d_0$  è il termine costante:  
–  $d_0 \neq 0$  se e solo se il sistema è proprio ( $n = m$ )
- $\delta(t)$  è l'impulso unitario
- $d_{i,l}$  sono i coefficienti della risposta impulsiva (diversi da  $c_{i,l}$  della risposta libera)
- $\frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$  sono i modi elementari e sono gli stessi della risposta libera
- $\delta_{-1}(t)$  è il gradino e serve a moltiplicare per 0 la parte non causale della risposta impulsiva e serve quindi per la causalità

**Esempio 8.11.** Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

Questo sistema ha  $n = m$  perchè è un sistema proprio, quindi:  $d_0 \neq 0$

1. Il primo passo è quello di trovare l'equazione omogenea:

$$v'(t) + 2v(t) = 0$$

2. Poi bisogna calcolare il polinomio caratteristico:

$$P(s) = s + 2 = 0$$

3. Bisogna poi trovare le radici e i modi elementari:

$$\lambda_1 = -2 \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

( $l = 0 \dots \mu_i - 1$ ) i modi elementari sono:

$$m(t) = e^{-2t}$$

4. Scriviamo la risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

5. Riscrivo l'equazione iniziale ponendo:

$$v(t) = h(t) \quad u(t) = \delta(t)$$

L'equazione diventa:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

$\Downarrow$

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

• Calcolo tutte le derivate di  $h(t)$ :

$$h'(t) = \delta_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t)$$

6. Sostituisco  $v(t) \mapsto h(t)$  e  $u(t) \mapsto \delta(t)$

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

$\Downarrow$

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\begin{aligned} & d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) \\ & + 2(d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t)) \\ & = \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

Valutiamo le funzioni in  $t = 0$

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot e^{-2 \cdot 0} \cdot \delta(0) = \delta'(0) + \delta(0)$$

Sposto tutto a sinistra:

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot \delta(0) - \delta'(0) - \delta(0) = 0$$

Raccolgo per  $\delta(0), \delta'(0) \dots \delta^n(t)$  che sono linearmente indipendenti:

$$(d_0 - 1) \cdot \delta'(0) + (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0$$

7. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} (d_0 - 1) \cdot \delta'(0) = 0 \\ (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \end{cases}$$

8. Sostituisco i coefficienti appena trovati

$$\begin{aligned} h(t) &= \underbrace{d_0}_1 \cdot \delta(t) + \underbrace{d_{1,0}}_{-1} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

E questa è la risposta impulsiva del sistema

9. Bisogna calcolare la risposta forzata...

**Esercizio 8.1.** Si vuole calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$2v'(t) - v(t) = u'(t) + 3u(t)$$

Siccome abbiamo la derivata prima sia a sinistra a destra il sistema è proprio ( $n = m$ )  $\rightarrow d_0 \neq 0$ .

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

1. Calcolo le radici usando l'equazione omogenea del polinomio caratteristico:

$$2s - 1 = 0$$

$$2s = 1$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

2. Calcolo la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

3. Riscrivo l'equazione iniziale con  $v(t) = h(t)$ ,  $u(t) = \delta_0(t)$ :

$$2h'(t) - h(t) = \delta_0'(t) + 3\delta_0(t)$$

4. Calcolo le derivate di  $h(t)$ :

$$h'(t) = d_0 \cdot \delta_0'(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t)$$

5. Sostituisco:

$$2 \left[ d_0 \delta'_0(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) \right] - \left[ d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] = \delta'_0(t) + 3\delta_0(t)$$

Togliere tutti i termini  $\delta_{-1}(0^-) = 0$

6. Raccolgo le funzioni indipendenti  $\delta_0(t), \delta'_0(t), \delta''_0(t)$ :

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \delta'_0(t) = \delta'_0(t) \\ 2d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) = 3\delta_0(t) \end{cases}$$

Imponiamo  $t = 0^-$

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \cancel{\delta'_0(0)} = \cancel{\delta'_0(0)} \\ \left( 2d_1 \cdot \underset{=1}{e^{\frac{1}{2} \cdot 0}} \right) \cdot \delta_0(0) = 3\delta_0(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_0 = 1 \\ 2d_1 - d_0 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = \frac{1}{2} \\ d_1 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

7. Scrivo la risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta_0(t) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

8. Calcolo la risposta forzata nell'esercizio 8.2

### 8.2.7 Risposta forzata

**Definizione 8.8.** La risposta forzata vuol dire che l'uscita del sistema dipende solo dall'input di un sistema LTI, causale per un ingresso  $u(t)$  ( $u(t) = 0, t < 0$ ) e si definisce come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

dove:

$u$  = Input

$h$  = Risposta impulsiva

**Esempio 8.12.** Riprendendo l'ultimo punto dell'esempio 8.11, la risposta forzata è:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t^-}^0 u(t) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

**Esercizio 8.2.** Data la risposta impulsiva dell'esercizio 8.1 calcoliamo la risposta forzata con un input  $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$  (gradino alto 3):

$$\begin{aligned} v_f &= (h * u)(t) \\ &= (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta_0(\tau) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \right] \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \delta_0(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta_0(\tau)}_{[0, 0^+]} \cdot \underbrace{\delta_{-1}(t - \tau)}_{[-\infty, t]} d\tau + \frac{21}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{21}{4} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\tau} d\tau \\ &\rightarrow \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^t \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{21}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= v_f(t) \end{aligned}$$

Teniamo fissa la risposta impulsiva  $h(t)$  e trasliamo il gradino  $u(t)$



Figura 78:  $3\delta_{-1}(t - \tau)$  viene traslato



$+\infty$  e  $-\infty$  diventano 0 e  $t$  perchè:

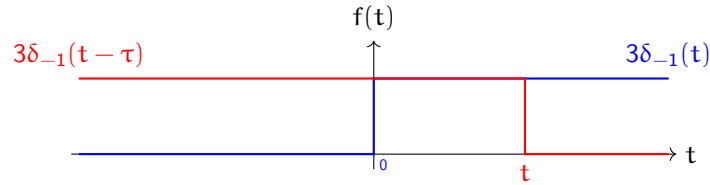


Figura 79:  $3\delta_{-1}(t - \tau)$  viene traslato

### 8.2.8 Risposta totale

Data un'equazione che descrive un sistema LTI:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

la risposta totale si calcola come la somma della risposta libera e forzata:

$$v_t(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

La risposta libera è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$$

La risposta forzata è data da:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (\underbrace{u}_{\text{Input}} * \underbrace{h}_{\text{Risposta impulsiva}})(t) \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

e la risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

### 8.3 Stabilità in base alle radici

Considerando 3 radici si ha:

- **Stabilità asintotica:** Tutte le radici devono avere parte reale minore di 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) < 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{-1}_{\Re(\lambda_1) < 0} + i \quad \underbrace{-2}_{\Re(\lambda_2) < 0} - i \quad \underbrace{-3}_{\Re(\lambda_3) < 0}$$

- **Semplicemente stabile:** Solo una radice ha parte reale uguale a 0:

$$\exists i \quad \Re(\lambda_i) = 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\Re(\lambda_1)=0} + i \quad -2 > 0 - i \quad -3 > 0$$

- **Asintoticamente instabile:** Tutte le radici hanno parte reale minore di 0  
tranne un sottoinsieme che hanno parte reale uguale a 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) \leq 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\Re(\lambda_1=0)} + i \quad \underbrace{0}_{\Re(\lambda_2=0)} - i \quad -3 + i$$

- **Totalmente instabile:** Almeno una radice ha la parte reale maggiore di 0:

$$\exists i \quad \Re(\lambda_i) > 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{1}_{\Re(\lambda_1)>0} + i \quad 0 - i \quad -3 + i$$

## 8.4 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza è la risposta di un sistema LTI a un segnale sinusoidale. Abbiamo visto che gli esponenziali complessi si rappresentano come:

$$Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Questi esponenziali si chiamano **Fasori** perchè vengono rappresentati come vettori rotanti in un piano complesso, come mostrato in figura 30.

$$u(t) = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t} \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow v(t)$$

Figura 80: Fasore

La risposta in frequenza si calcola come la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva  $h(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot Ae^{j(\omega_0(t-\tau) + \phi)} d\tau \\ &= \underbrace{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}}_{\text{Costante}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau}_{|f| < \infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau \right| &< \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot 1 d\tau < \infty
\end{aligned}$$

La risposta in frequenza è quindi:

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau$$

Da questa formula si ha che l'uscita  $v(t)$  è uguale a:

$$v(t) = H(j\omega_0) \cdot A e^{j(\omega_0 t + \phi)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva del sistema e anche la trasformata di Laplace della risposta impulsiva ristretta al solo asse immaginario:

#### Teorema 8.2.

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s), \quad s = j\omega$$

Dove:

$\mathcal{F}$  = Trasformata di Fourier

$\mathcal{L}$  = Trasformata di Laplace

**Esempio 8.13.** Se prendiamo in considerazione un sistema dinamico, come ad esempio il sistema massa-molla-smorzatore dell'esempio 8.3, descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

Per calcolare la soluzione nel dominio del tempo si può fare il passaggio solito fatto fin'ora, oppure si può prendere una scorciatoia e calcolare la trasformata di Laplace delle equazioni algebriche per trovare poi la soluzione in  $\mathbb{C}$  rendendo più semplice il calcolo.

## 9 Trasformata unilatera di Laplace (TDL)

**Definizione 9.1** (Trasformata unilatera di Laplace). Sia  $v(t)$  una funzione generica (non l'uscita di un sistema) con  $t \in \mathbb{R}$  ottenuta da somme di funzioni a variabili reali con valori reali o complessi (ad esempio somma di fasori).

- Localmente sommabile in  $[0, \infty)$  :

$$\int_a^b |v(t)| dt < \infty, \quad \forall a, b \in [0, \infty)$$

- Formata da un insieme finito di segnali polinomiali

Definiamo la trasformata unilatera di Laplace come:

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}[v(t)](s)$$

**N.B.:** Data  $v(t)$  localmente sommabile, non significa che  $V(s)$  sia localmente sommabile

Bisogna ora definire la **Regione di convergenza**:

**Definizione 9.2.** La regione di convergenza è un semipiano positivo definito come:

$$\text{RDC} = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > \alpha\}$$

Dove  $\alpha$  è l'ascissa di convergenza:



**Dimostrazione:** Sia  $v(t)$  una combinazione lineare di esponenziali:

$$v(t) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$$

Vogliamo dimostrare che la regione di convergenza della trasformata di Laplace è un semipiano a destra di  $\alpha$ :

$$\text{RDC} \mathcal{L}[v(t)](s) = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > \alpha\}$$

Dimostro:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt\end{aligned}$$

Prendiamo un preciso  $i \rightarrow \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$   $s = \sigma + j\omega$

$$\begin{aligned}\int_{0-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{0-}^{+\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} \cdot e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) = \frac{1}{\sigma - \sigma_i + j\omega_i - j\omega}\end{aligned}$$

L'integrale converge se  $\sigma_i - \sigma < 0 \rightarrow \sigma > \sigma_i$  e quindi:

$$\begin{aligned}\sigma &= \Re(s) \quad \sigma_i = \Re(\lambda_i) \\ \forall s \in \mathbb{C} \quad \Re(s) &> \Re(\lambda_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \alpha &\geq \max(\Re(\lambda_i))\end{aligned}$$

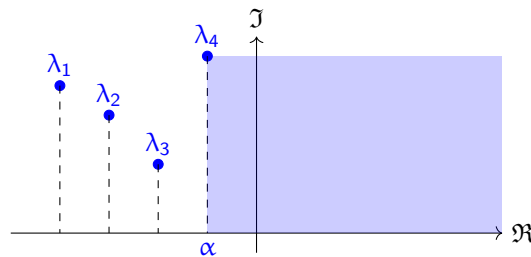


Figura 81: Asintoticamente stabile

Per un sistema LTI stabile RDC contiene sempre l'asse immaginario

## 9.1 Proprietà della trasformata di Laplace

### 9.1.1 Linearità

Siano  $v_1$  e  $v_2$  funzioni che ammettono la trasformata di Laplace e rispettivamente  $V_1$  e  $V_2$  le loro trasformate di Laplace:

$$\begin{aligned}v_1 &\rightarrow V_1(s) \\ v_2 &\rightarrow V_2(s)\end{aligned}$$

allora:  $\alpha v_1(t) + b v_2(t)$  ammette la trasformata di Laplace ed è definita come:

$$\mathcal{L}[\alpha v_1(t) + b v_2(t)](s) = \alpha V_1(s) + b V_2(s)$$

Ha come ascissa di convergenza:

$$\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

### 9.1.2 Traslazione nel tempo (ritardo temporale)

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $v(t - \tau)$ , con  $\tau > 0$  è:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

L'ascissa di convergenza rimane immutata

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{\tau-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau \\ x &= t - \tau \\ t &= x + \tau \\ dt &= dx \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \\ &= e^{-s\tau} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\ &= e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)\end{aligned}$$

### 9.1.3 Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $e^{\lambda t} \cdot v(t)$  è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) = V(s - \lambda)$$

L'ascissa di convergenza rimane spostata:

$$\alpha = \alpha_0 + \Re(\lambda)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda t} \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{(\lambda-s)t} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-\overbrace{(s-\lambda)}^r} t dt \\ &= \mathcal{L}[v(t)](r) \\ &= \mathcal{L}[v(t)](s - \lambda)\end{aligned}$$

### 9.1.4 Cambio di scala

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $v(rt)$  è:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} \cdot V\left(\frac{s}{r}\right)$$

L'ascissa di convergenza viene scalata:

$$\alpha = r \cdot \alpha_0$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(rt)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(rt) \cdot e^{-st} dt \\ x &= rt \\ t &= \frac{x}{r} \\ dt &= \frac{dx}{r} \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s \frac{x}{r}} dx \\ &= \frac{1}{r} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-\frac{s}{r} x} dx \\ &= \frac{\mathcal{L}[v(t)]\left(\frac{s}{r}\right)}{r} \end{aligned}$$

### 9.1.5 Proprietà della derivata

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$  ed esiste ed è finito il limite:  $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ , allora anche la sua derivata  $i$ -esima ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = s^i \cdot V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{i-k-1}$$

L'ascissa di convergenza è minore dell'ascissa di convergenza originale

$$\alpha \leq \alpha_0$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) &= \int_{0-}^{+\infty} \overbrace{\frac{dv(t)}{dt}}^{f'(t)} \cdot \overbrace{e^{-st}}^{g(t)} dt \\ &= v(t) \cdot e^{-st} \Big|_{0-}^{+\infty} - \underbrace{\left(-s \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt\right)}_{\text{TdL}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \overbrace{v(\varepsilon)}^0 \cdot e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} v(\varepsilon) \cdot e^{-s\varepsilon} + s \cdot V(s) \\ &= s \cdot V(s) - v(0^-) \end{aligned}$$

**Dimostrazione per la derivata seconda:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)\right](s) \\
 &= s \cdot \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-} \\
 &= s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-} \\
 &= s^2 \cdot V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-}
 \end{aligned}$$

### 9.1.6 Moltiplicazione per una funzione polinomiale

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $t^i \cdot v(t)$  è:

$$\mathcal{L}[t^i \cdot v(t)](s) = (-1)^i \cdot \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

**Dimostrazione** ( $i = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t \cdot v(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot (-t \cdot e^{-st}) dt \\
 &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt}_{\text{TdL } v(t)} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

### 9.1.7 Integrazione nel tempo

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $\psi(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau$  è:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

E l'ascissa di convergenza è:

$$\alpha = \max(\alpha_0, 0)$$

**Dimostrazione:**

$$v_i(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau \rightarrow v'_i(t) = v(t) \text{ e } v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(\tau) d\tau = 0$$



Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &\stackrel{9.1.5}{=} \mathcal{L}[v_1'(t)](s) \\ &= s \cdot \mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= s \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

### 9.1.8 Integrale nel dominio dei complessi

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , se esiste il  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$ , allora la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](s) ds$$

### 9.1.9 Teorema del valore iniziale

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , ed esiste ed è finito il limite  $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

### 9.1.10 Teorema del valore finale

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , ed esiste ed è finito il limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

### 9.1.11 Convoluzione nel dominio del tempo

Siano  $u(t)$  e  $v(t)$  due funzioni causali (nulle per  $t < 0$ ) che ammettono la trasformata di Laplace  $U(s)$  e  $V(s)$ , allora  $(u * v)(t)$  ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-st} dt \\
 \{u(t) = 0, \quad t < 0\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left( \int_{0^-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \right) d\tau \\
 \text{Sostituisco: } x &= t - \tau, \quad t = x + \tau, \quad dt = dx \\
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left( \int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

## 9.2 Trasformate notevoli

### 9.2.1 Impulso

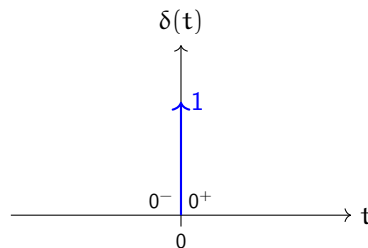


Figura 82: Impulso

- La trasformata di Laplace dell'impulso  $\delta_0(t)$  è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \overset{\text{Proprietà impulso}}{\delta_0(t)} \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-st} \Big|_{t=0} = 1
 \end{aligned}$$

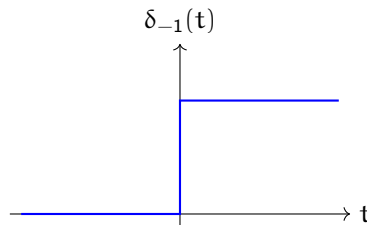
- La trasformata di Laplace di un impulso di altezza  $A$  è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A \cdot \delta_0(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) \\
 &= A
 \end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'impulso ritardato è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t - \tau)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_\tau(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-s\tau}
 \end{aligned}$$

### 9.2.2 Gradino



- La trasformata di Laplace del gradino  $\delta_{-1}(t)$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty; \mu \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_{t=\mu}^{\varepsilon} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-s\varepsilon}}{s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

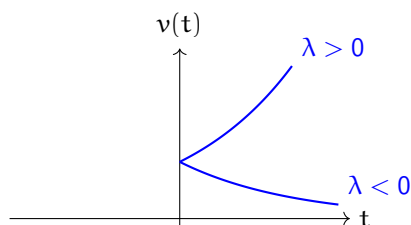
- La trasformata di Laplace del gradino di altezza  $A$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace del gradino ritardato è:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \frac{1}{s}$$

### 9.2.3 Esponenziale complesso causale



- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso causale  $v(t) = e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$  è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$

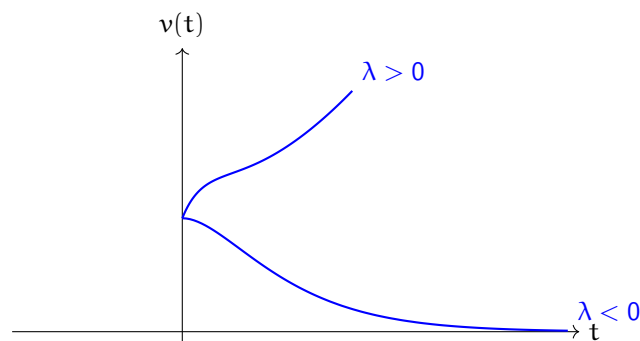
- La trasformata di Laplace dell'esponenziale con una costante  $A$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s - \lambda}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso ritardato è:

$$\mathcal{L} [e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

#### 9.2.4 Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale



La trasformata di Laplace di  $v(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[ \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) &= \frac{1}{l!} \cdot \mathcal{L}[t^l \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \left( \frac{1}{s - \lambda} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{l!(-1)^e}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}}\end{aligned}$$

**Esempio 9.1.** Ad esempio se:

- $l = 1$ , la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L} [t \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

- $l = 2$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t^2}{2} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

**Esempio 9.2.** Alcuni casi speciali sono:

- 

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t}{l!} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{s^{l+1}}$$

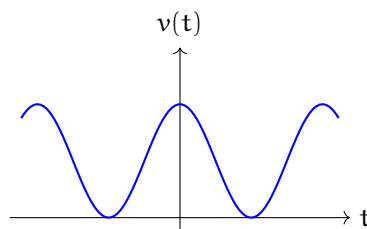
- 

$$\mathcal{L} [t \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{l!}{s^{l+1}}$$

- 

$$\mathcal{L} [e^{-\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{1}{s + \lambda}$$

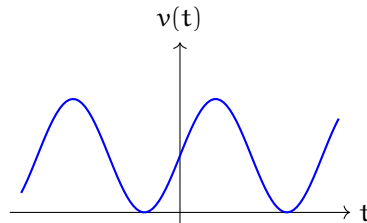
### 9.2.5 Funzione coseno



La trasformata di Laplace di  $\cos(\omega t)$  è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L} \left[ \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] (s) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] (s) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L} [e^{j\omega t}] (s) + \mathcal{L} [e^{-j\omega t}] (s)) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

### 9.2.6 Funzione seno



La trasformata di Laplace di  $\sin(\omega t)$  è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right](s) \\
 &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}](s) \\
 &= \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\
 &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

### 9.3 Risoluzione di sistemi LTI causali

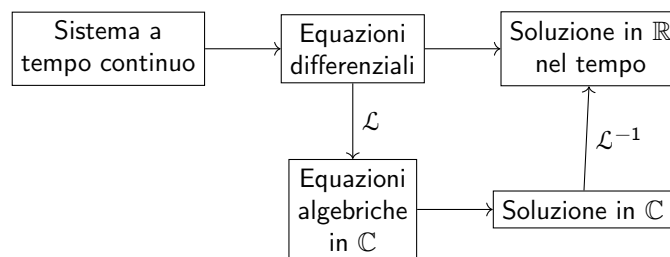


Figura 83: Risoluzione di sistemi LTI causali tramite trasformata di Laplace

Per un sistema LTI causale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Se  $n \geq m$  e  $u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)$ , (cioè  $u(t) = 0$ ,  $t < 0$ ) e consideriamo le  $n - 1$  condizioni iniziali:

$$v(0^-); \frac{dv(0^-)}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}v(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Se  $u(t)$  ammette la trasformata di Laplace  $U(s)$  e  $v(t)$  ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , con  $t \geq 0$  allora si ha che:

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[ \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

Applicando  $n + m$  vale la regola della derivata:

$$a_n \left[ s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-1} \right] +$$

$$a_{n-1} \left[ s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-2} \right] + \dots + a_0 V(s)$$

Imponiamo le condizioni iniziali  $u(t) \Big|_{t=0^-} = 0$ , quindi si ha che le derivate in 0 sono nulle:

$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

Espandendo le sommatorie e raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}_{d(s)} V(s)$$

$$- \overbrace{a_n \cdot v(0^-) \cdot s^{n-1} - \left( a_{n-1} \cdot v(0^-) + a_n \cdot \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) s^{n-2} - \dots}^{p(s)}$$

$$\dots - \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \cdot \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right) =$$

$$= \underbrace{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}_{n(s)} U(s)$$

Sostituendo diventa:

$$d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$  è un polinomio di grado  $m$  che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. È il **polinomio caratteristico** di  $u(t)$
- $d(s)$  è un polinomio di grado  $n$  che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'uscita. È il **polinomio caratteristico** di  $v(t)$

- $p(s)$  è un polinomio di grado  $n - 1$  che dipende dalle condizioni iniziali

$$p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left( \sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \cdot \frac{d^{n-j}v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

- $\frac{p(s)}{d(s)}$  è una funzione razionale che dipende solo dalle condizioni iniziali del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita  $v(t)$ . È la **trasformata di Laplace della risposta libera**:

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$  è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'ingresso  $u(t)$  e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita  $v(t)$  moltiplicati per la trasformata di Laplace di  $u(t)$ . È la **trasformata di Laplace della risposta forzata** siccome una convoluzione diventa un prodotto di trasformate:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$  si chiama **Funzione di trasferimento**  $H(s)$  ed è definita come:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

è il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso  $u(t)$  e dell'uscita  $v(t)$ .  $H(s)$  è definita come la **trasformata di Laplace della risposta impulsiva**

$h(t)$

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + \left( \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}}$$

**Esempio 9.3.** Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

Si può trasformare usando la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^3v(t)}{dt^3} \right] (s) + \mathcal{L} \left[ \frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] (s) = \mathcal{L} \left[ \frac{du(t)}{dt} \right] (s)$$



Applicando la regola della derivata:

$$s^3 V(s) - s^2 v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s - \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} \cdot s^0 + \\ + s^2 V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s^0 = s \cdot U(s)$$

Raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(s^3 + s^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[ s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} \right]}_{p(s)} = \underbrace{s}_{n(s)} \cdot U(s)$$

Quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \\ = \frac{s}{(s^3 + s^2)} \cdot U(s) + \frac{s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt}}{s^3 + s}$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 0; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} \cdot U(s)$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 1; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s} \cdot U(s) + \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2}$$

### 9.3.1 Stabilità di sistemi LTI causali

Considerando la funzione di trasferimento  $H(s)$ , cioè il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso e dell'uscita, si ha che il grado del numeratore è generalmente minore o uguale a quello del denominatore.

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Fattorizzando si ottiene:

$$H(s) = \frac{b_m \overbrace{(s - \beta_1)^{\xi_1} \cdot (s - \beta_2)^{\xi_2} \cdot \dots \cdot (s - \beta_q)^{\xi_q}}^{\text{Radici del numeratore}}}{a_n \underbrace{(s - \alpha_1)^{\mu_1} \cdot (s - \alpha_2)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (s - \alpha_r)^{\mu_r}}_{\text{Radici del denominatore}}}$$

Dove:

$\xi_i$  = molteplicità delle soluzioni del numeratore

$\mu_i$  = molteplicità delle soluzioni del denominatore

$$q \leq m; \quad \sum \xi_i = m; \quad r \leq n; \quad \sum \mu_i = n$$

$$H(s) = k \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

Dove:

$(s - z_i)$  = Zeri della funzione razionale (radici numeratore)

$(s - p_i)$  = Poli della funzione razionale (radici denominatore)

Definiamo uno **zero** di una funzione razionale  $H(s)$  un qualsiasi numero  $\beta \in \mathbb{C}$  tale che  $H(\beta) = 0$ .

Definiamo un **polo** di una funzione razionale  $H(s)$  un qualsiasi numero  $\alpha \in \mathbb{C}$  tale che  $H(\alpha) = \infty$ .

**Definizione 9.3.** Dato  $H(s)$  in forma ridotta (senza radici comuni), siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  con  $r \leq n$  i suoi poli dopo la semplificazione. Se:

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$$

allora il sistema è **BIBO stabile**.

Il sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli stanno nel semipiano complesso negativo.

Per BIBO stabilizzare un sistema bisogna togliere gli zeri  $\lambda_i$  con  $\Re(\lambda_i) > 0$ , semplificandoli dividendo per lo stesso valore.

**Esempio 9.4.** Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

In questo caso abbiamo che  $n < m$ . Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Polinomio caratteristico dell'ingresso}}{\text{Polinomio caratteristico dell'uscita}} \\ &= \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} \\ &= \frac{(s - 1)(s - 4)}{s - 3} \end{aligned}$$

La soluzione è  $\lambda_1 = 3$ , quindi il sistema non è asintoticamente stabile, di conseguenza è instabile.

Per verificare se il sistema è BIBO stabile bisogna vedere se si possono semplificare gli zeri. In questo caso tutte le radici del denominatore (i poli) hanno parte reale maggiore di 0, quindi il sistema non è BIBO stabile.

**Esempio 9.5.** Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento  $H(s)$ :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{(s - 3)(s - 1)}{(s + 2)(s + 1)} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$\Re(\lambda_i) < 0$  quindi il sistema è asintoticamente stabile, di conseguenza anche BIBO stabile.

**Esempio 9.6.** Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u'(t) - 4u(t)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento  $H(s)$ :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} \\ &= \frac{(s - 4)(s - 1)}{(s + 3)(s + 2)(s - 1)} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = 1$$

Siccome  $\Re(\lambda_3) > 0$  il sistema non è asintoticamente stabile.

Controlliamo se il sistema è BIBO stabile:

$$\frac{(s-4)\cancel{(s-1)}}{(s+3)(s+2)\cancel{(s-1)}}$$

Il polo con parte reale minore di 0 si semplifica, quindi il sistema è BIBO stabile, perchè tutti i poli hanno parte reale minore di 0.

## 9.4 Antitrasformata di Laplace unilatera

Prendendo in considerazione la trasformata di Laplace del sistema:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot V(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

si vuole trovare l'antitrasformata, quindi si applicano le seguenti regole considerando soltanto ciò di cui si vuole trovare l'antitrasformata:

- Risposta forzata:

$$\frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- Risposta libera:

$$\frac{p(s)}{d(s)}$$

- Risposta impulsiva:

$$\frac{n(s)}{d(s)}$$

- Risposta totale:

$$\frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

Di conseguenza consideriamo:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- Se  $\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]$  (sistema proprio) bisogna fare la divisione polinomiale e arrivare alla divisione in fratti semplici e infine applicare l'antitrasformata di Laplace.

– **Divisione polinomiale:**

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{con} \quad \deg[r(s)] < \deg[d(s)]$$

Si ha che  $k$  è la trasformata di Laplace dell'impulso:

$$\mathcal{L}[k \cdot \delta_0(t)](s) = k$$

e quindi la sua anti-trasformata è:

$$\mathcal{L}[k \cdot \delta_0(t)](s) = k \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow k \cdot \delta_0(t)$$

**Esempio 9.7.** Considerando la seguente risposta:

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1}$$

si ha che  $m = 2$  e  $n = 2$ , quindi siamo nel caso:

$$\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]$$

quindi bisogna fare la divisione polinomiale:

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \\ &= \frac{6s - 1}{s^2 - s - 1} + 2 \end{aligned}$$

Ora bisogna trasformare in fratti semplici.

- Se  $\deg[n(s)] < \deg[d(s)]$  (sistema strettamente proprio) si può saltare la divisione polinomiale e applicare direttamente l'antitrasformata.

**Decomposizione in fratti semplici:**

$$\frac{r(s)}{d(s)} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s - \alpha_i)^{l+1}}$$

Per trovare i valori di  $c_{i,l}$  si usa la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1}}{ds^{\mu_i-l-1}} \cdot \left( (s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)$$

**Esempio 9.8.** Si vuole scomporre la seguente trasformata di Laplace in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s + 1)^2(s - 2)(s + 5)}$$

Quindi si ha che:

$$V(s) = \frac{A}{(s - 2)} + \frac{B}{(s + 1)} + \frac{C}{(s + 1)^2} + \frac{D}{(s + 5)}$$

dove  $A, B, C, D$  sono le costanti  $c_{i,l}$  e i denominatori sono le radici  $(s - \alpha_i)$  del polinomio  $d(s)$ . Poi si calcolano i valori di  $A, B, C, D$  e si ottiene la decomposizione in fratti semplici.

**Esempio 9.9.** Si vuole scomporre in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{s - 20}{(s + 4)(s - 2)}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -4 & \mu_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 & \mu_2 &= 1\end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$V(s) = \frac{c_{1,0}}{s + 4} + \frac{c_{2,0}}{s - 2} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2}$$

Per trovare  $A$  e  $B$  si può fare in due modi:

1. Fare il denominatore comune e sommare i numeratori

$$\begin{aligned}\frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2} &= \frac{A(s - 2) + B(s + 4)}{(s + 4)(s - 2)} \\ &= \frac{As - 2A + Bs + 4B}{(s + 4)(s - 2)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (A + B)s = 1s \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 4B - 2A = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{s - 20}{(s + 4)(s - 2)} = \frac{4}{s + 4} - \frac{3}{s - 2}$$

2. Si può usare la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i - l - 1} \left( (s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i - l - 1}}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 \\ \alpha_1 &= -4\end{aligned}$$

$$c_{1,0} = A = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d^{1-0-1} \left( (s+4) \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^{1-0-1}} = \frac{-24}{-6} = 4$$

e

$$\begin{aligned}\mu_2 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2\end{aligned}$$

$$c_{2,0} = B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left( \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^{1-0-1}} = \frac{-18}{6} = -3$$

Alla fine si ottiene:

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

### Antitrasformata di Laplace:

Dopo aver applicato tutti i passaggi precedenti si arriva ad avere:

$$V(s) = k + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}}$$

da questa forma si può antitrasformare:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \right] (t) \right] \\ &= k \cdot \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] \end{aligned}$$

**Esempio 9.10.** Consideriamo il seguente sistema:

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0^-) = 0 \\ v'(0^-) = -1 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Si vuole calcolare:

1. Stabilità
2. Risposta libera
  - (a) Nel tempo
  - (b) Nelle frequenze
3. Risposta impulsiva
4. Risposta forzata
5. Risposta totale

1. Stabilità:

Scriviamo l'equazione caratteristica:

$$s^2 - s - 2 = 0$$

Troviamo le soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \mu_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \mu_2 = 1$$

Il sistema non è asintoticamente stabile perchè  $\lambda_1 > 0$ . Per calcolare la BIBO stabilità bisogna calcolare la funzione di trasferimento e vedere se i suoi poli hanno tutti parte reale minore di 0:

$$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{h(s)}{d(s)}}_{H(s)} \cdot U(s)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)}$$

$$= \frac{s+1}{s-2}$$

Non è BIBO stabile perchè  $\lambda_1 = 2$ .

2. Risposta libera:

(a) Nel tempo:

$$s^2 - s - 2 = 0 \rightarrow (s-2)(s+1) = 0$$

$$r = 2$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \mu_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \mu_2 = 1$$

Utilizziamo l'equazione per la risposta libera nel tempo:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

Calcoliamo le derivate:

$$v_l(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

$$v'_l(t) = 2c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{-t}$$



li mettiamo a sistema con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v_1(0) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ v_1'(0) = 2c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$v_1(t) = e^{-t}$$

(b) Nelle frequenze:

Calcoliamo la trasformata di Laplace dell'ingresso e dell'uscita:

$$\mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)](s) = \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)](s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v''(t)](s) &= s^2V(s) - s \cdot \cancel{v(0)} - \cancel{s^0 \frac{dv(0)}{dt}} \\ &= s^2V(s) - s + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v'(t)](s) &= sV(s) - \cancel{s^0 v(0)} \\ &= sV(s) - 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[v(t)](s) = V(s)$$

Quindi l'uscita sarà:

$$s^2V(s) - s + 1 - sV(s) + 1 - 2V(s)$$

L'entrata diventa:

$$\mathcal{L}[u''(t)](s) = s^2U(s) - \cancel{s^1 u(0)} - \cancel{s^0 \frac{du(0)}{dt}}$$

$$\mathcal{L}[u'(t)](s) = sU(s) - \cancel{s^0 u(0)}$$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = U(s)$$

Quindi l'ingresso sarà:

$$s^2U(s) + 2sU(s) + U(s)$$

Tutto il sistema diventa:

$$s^2V(s) - s + 1 - sV(s) + 1 - 2V(s) = s^2U(s) + 2sU(s) + U(s)$$

Raccogliamo per  $V(s)$  e  $U(s)$ :

$$\underbrace{(s^2 - s - 2)}_{\text{Pol. Car. uscita}} V(s) - s + 2 = \underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{Pol. Car. ingresso}} U(s)$$

$$V(s) = \frac{\cancel{s-2}}{(\cancel{s-2})(s+1)} + \frac{(s+1)\cancel{1}}{(s-2)(\cancel{s+1})} \cdot U(s)$$

La trasformata di Laplace di  $u(t)$  è:

$$u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^{-1} [A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](t) = \frac{A}{(s - \lambda)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s + 3}$$

Quindi si ha:

$$\underbrace{V(s)}_{V_t(s)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{s+1}{s-2} \cdot \frac{1}{s+3}}_{\substack{H(s) \\ V_f(s)}}$$

La risposta libera in frequenza è:

$$V_l(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Il numeratore ha grado minore del denominatore, quindi si può antitrasformare passando subito a fare la decomposizione in fratti semplici. Siccome abbiamo una sola radice al denominatore si ha già la forma minima.

Passiamo a fare l'antitrasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s - \lambda} \right] (t) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$V_l(s) = \frac{1}{s + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s + 1}{s - 2}$$

Facciamo divisione polinomiale:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s + 1}{s - 2} \\ &= 1 + \frac{3}{s - 2} \end{aligned}$$

Possiamo calcolare l'antitrasformata di laplace di ogni singolo termine, ottenendo così la risposta impulsiva nel tempo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$h(t) = \delta_0(t) + 3 \cdot e^{2t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

4. Risposta forzata:

$$V_f(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$V_f(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

(a) Il primo metodo è quello di fare il denominatore comune:

$$\begin{aligned} \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} &= \frac{As + 3A + Bs - 2B}{(s-2)(s+3)} \\ &= \frac{(A+B)s + (3A-2B)}{(s-2)(s+3)} \end{aligned}$$

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} (A+B)s = 1s \\ 3A-2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ 3A-2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ 3-3B-2B = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ -5B = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L} \left[ \frac{A}{s-\lambda} \right] (t) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$\left( \frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{2}{5} \cdot e^{-3t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

(b) Il secondo metodo è quello di usare la formula:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left( \frac{d^{\mu_i-1} \cdot \frac{r(s)}{d(s)}}{ds^{\mu_i-1}} \cdot (s-\lambda) \right)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \cdot \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} \cdot (s-2) = \frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \cdot \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} \cdot (s+3) = \frac{2}{5}$$

5. Risposta totale:

$$\begin{aligned} v_t &= \mathcal{L}^{-1}[V_l(s)](t) + \mathcal{L}^{-1}[V_f(s)](t) \\ &= e^{-t} \cdot \delta_{-1}(t) + \left( \frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{2}{5} \cdot e^{-3t} \right) \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= \left( e^{-t} + \frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{2}{5} \cdot e^{-3t} \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

## 10 Sistemi a blocchi

Un sistema è rappresentato da un blocco con un input e un output:

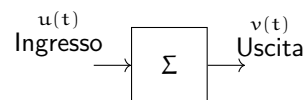


Figura 84: Rappresentazione di un sistema

I sistemi hanno sempre un input e un output perchè consideriamo solo sistemi SISO (Single Input Single Output).

### 10.1 Tipi di sistemi

I sistemi possono essere messi insieme e questo viene fatto in più modi:

#### 10.1.1 Sistema in serie

In un sistema in serie si mettono i sistemi uno dietro l'altro:

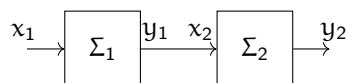


Figura 85: Sistema in serie

$$y_1 = x_2$$

#### 10.1.2 Sistema in parallelo

In un sistema in parallelo si mettono i sistemi uno accanto all'altro:

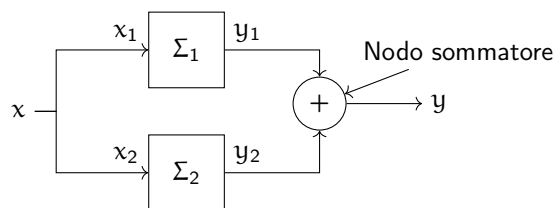


Figura 86: Sistema in parallelo

$$x = x_1 = x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

### 10.1.3 Sistema di retroazione

In un sistema di retroazione l'output di un sistema è l'input di un altro:

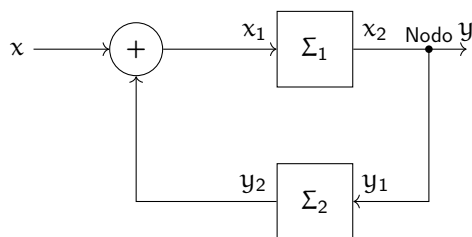


Figura 87: Sistema di retroazione

$$x_1 = x + y_2$$

$$y = y_1 = x_2$$

### 10.1.4 Nodi sommatori

I nodi sommatori hanno un numero indefinito di ingressi e una sola uscita:

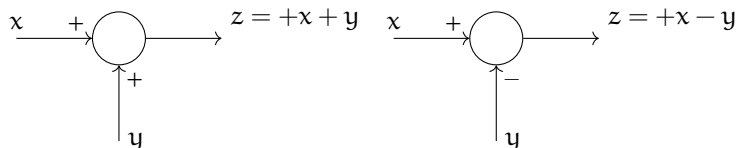


Figura 88: Nodi sommatori con segno diverso

(solitamente viene rappresentato con una X in un cerchio, ma quel simbolo lo useremo per rappresentare il prodotto).

## 10.2 Controlli

Un controllo è un sistema a tempo continuo con un ingresso e un'uscita e può essere di due tipi:

- **Controllo ad anello aperto:** l'uscita non torna nell'ingresso

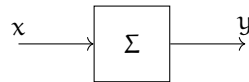


Figura 89: Controllo ad anello aperto

- **Controllo ad anello chiuso:** l'uscita torna nell'ingresso

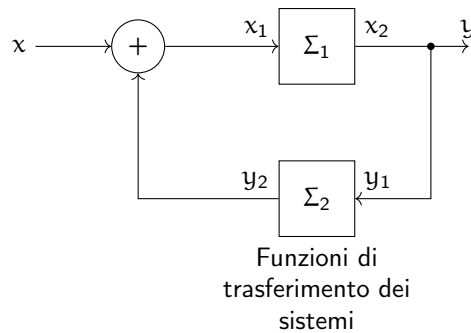


Figura 90: Controllo ad anello chiuso

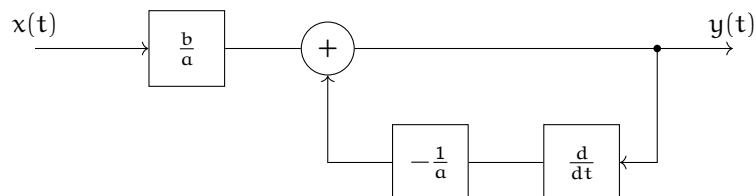
(un esempio è il termostato)

**Esempio 10.1.** Prendiamo ad esempio la seguente equazione:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t)$$

Il diagramma a blocchi è:



### 10.2.1 Nomenclatura

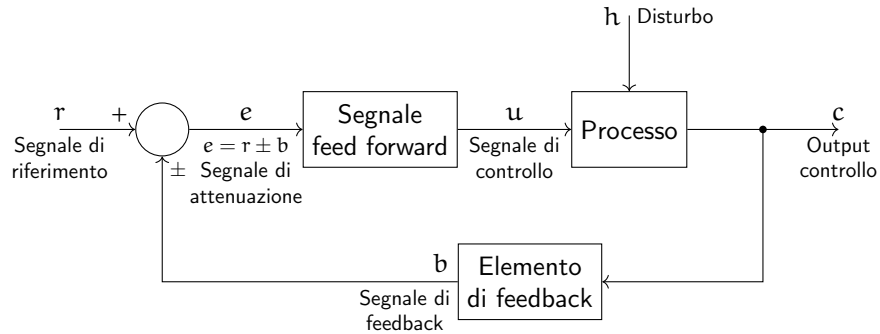


Figura 91: Nomenclatura di un sistema di controllo

Il segnale di attuazione viene chiamato:

- **Feedback negativo:** Quando:

$$e = r - b$$

- **Feedback positivo:** Quando:

$$e = r + b$$

### 10.3 Controllori

I controllori sono di 3 tipi e vanno a definire le regole di controllo:

- **Proporzionale (P):** L'output è proporzionale all'errore

$$u(t) = K_P \cdot e$$

- **Derivativo (D):** L'output è proporzionale alla derivata dell'errore

$$u(t) = K_D \cdot \frac{de}{dt}$$

- **Integrativo (I):** L'output è proporzionale all'integrale dell'errore

$$u(t) = K_I \cdot \int e \, dt$$

I tre controllori possono essere combinati e si rappresentano con la concatenazione delle lettere:

- **PD:** Proporzionale-Derivativo
- **PI:** Proporzionale-Integrativo
- **DI:** Derivativo-Integrativo

- **PID**: Proporzionale-Integrativo-Derivativo

$$u_{PID} = K_P \cdot e + K_D \cdot \frac{de}{dt} + K_I \cdot \int e dt$$

Un sistema può essere tradotto dal tempo continuo al tempo discreto, attraverso un campionatore:

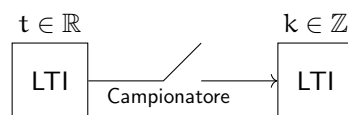
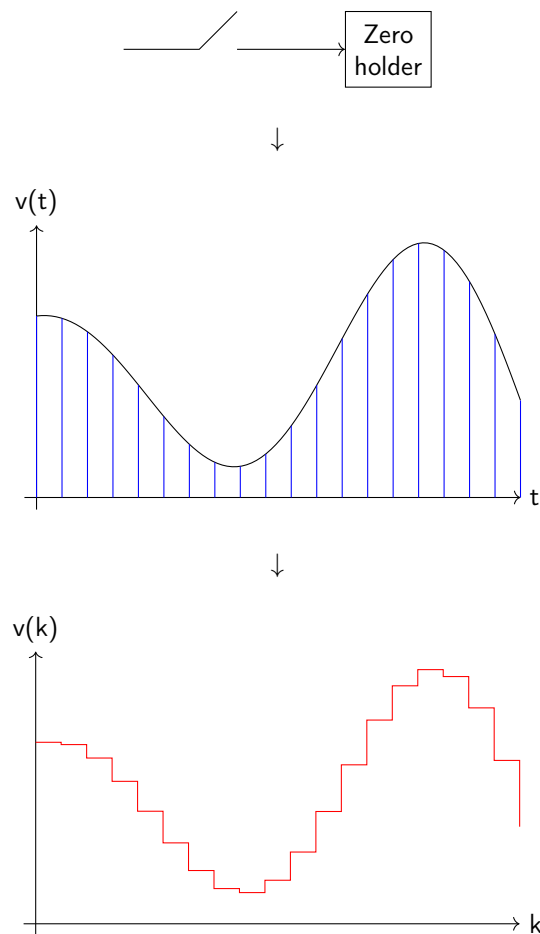


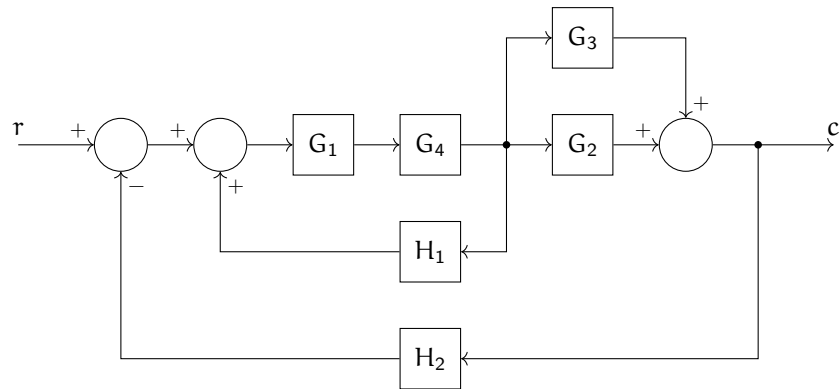
Figura 92: Campionamento di un sistema

Oltre al campionatore si utilizza anche un componente chiamato **zero holder**, che è un componente che mantiene il valore del segnale invariato fino all'istante successivo.





**Esempio 10.2.** Prendiamo ad esempio il seguente sistema iniziale:



Vogliamo ottenere un sistema in forma canonica, cioè un sistema con un solo nodo, ad esempio:

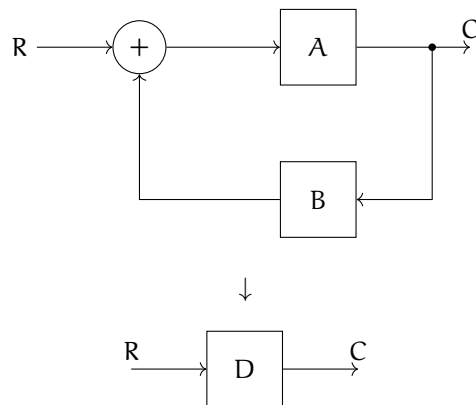


Figura 93: Sistema in forma canonica

### 10.3.1 Nomenclatura della forma canonica

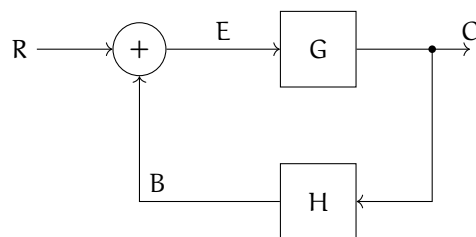


Figura 94: Nomenclatura della forma canonica

- G: Funzione di trasferimento discreta

- H: Funzione di trasferimento di feedback
- GH: Funzione di trasferimento dell'anello (loop)
- $\frac{C}{R}$ : Funzione di trasferimento dell'anello chiuso ed è definita come:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} = \frac{\text{Equazione caratteristica dell'ingresso}}{\text{Equazione caratteristica dell'uscita}}$$

- $\frac{E}{R}$ : Rapporto del segnale di attuazione (errore) ed è definito come:

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm GH}$$

- $\frac{B}{R}$ : Rapporto di feedback ed è definito come:

$$\frac{B}{R} = \frac{GH}{1 \pm GH}$$

L'obiettivo è quello di semplificare il sistema finchè non si ottiene una forma canonica.

**Esempio 10.3.** Se prendiamo ad esempio il sistema massa-molla-smorzatore l'equazione sarà:

$$\begin{aligned} M \cdot a &= \sum F \\ &= F_{\text{ext}} - Kx - bx' \\ \underbrace{F_{\text{ext}}}_{\text{Ingresso}} &= \underbrace{kx + bx' + Ms''}_{\text{Uscita}} \\ \downarrow \mathcal{L}X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s) \\ &= kX(s) + bsX(s) + Ms^2X(s) \\ X(s) &= \frac{F_{\text{ext}}}{\underbrace{(k + bs + Ms^2)}_A} \end{aligned}$$

Il sistema di questo esempio è il seguente:

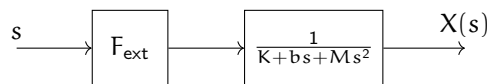
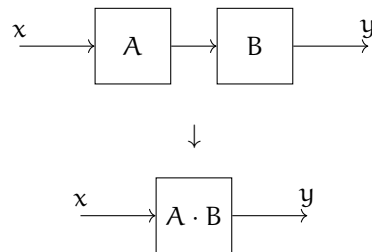


Figura 95: Sistema massa-molla-smorzatore

## 11 Operazioni sui blocchi

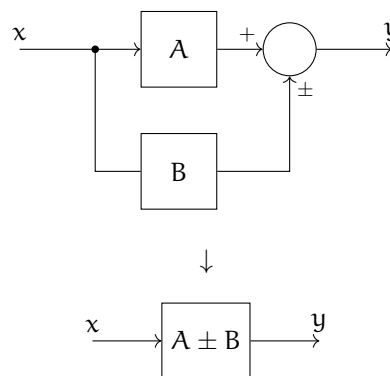
I blocchi possono essere combinati tra loro in diversi modi:

1. **Combinazione di blocchi in serie:** Dati due blocchi A e B si ottiene un nuovo blocco il cui contenuto è il prodotto dei due blocchi:

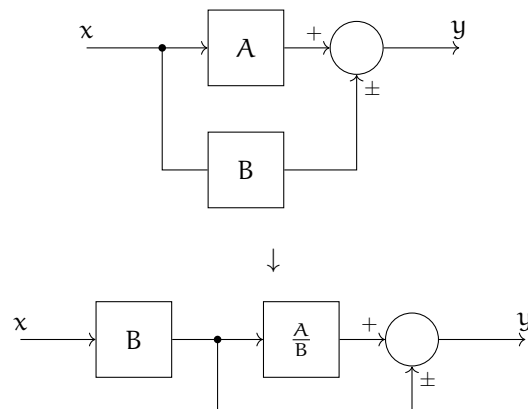


Questo perchè avere due sistemi in serie equivale a fare una convoluzione, di conseguenza un prodotto di sistemi.

2. **Combinazione di blocchi in parallelo:** Dati due blocchi A e B si ottiene un nuovo blocco il cui contenuto è la somma dei due blocchi:

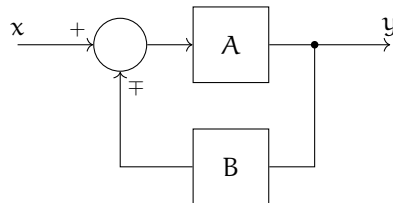


- (a) **Rimozione di un blocco parallelo:** Dato un blocco A in parallelo con un blocco B si può rimuovere la connessione parallela sostituendola con il rapporto tra i 2 blocchi

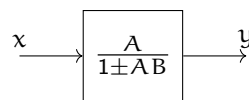


3. **Rimozione di un anello feedback:** Dato un blocco  $A$  in feedback con un blocco  $B$  si può rimuovere la connessione di feedback sostituendola con:

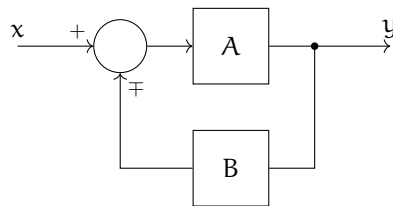
$$\frac{A}{1 \pm AB}$$



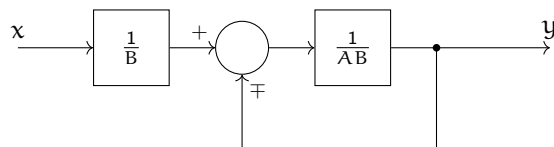
↓



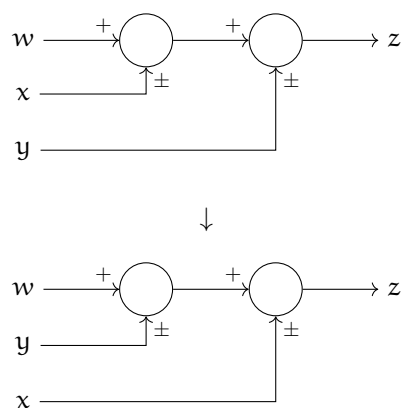
- (a) **Rimozione dal loop:**



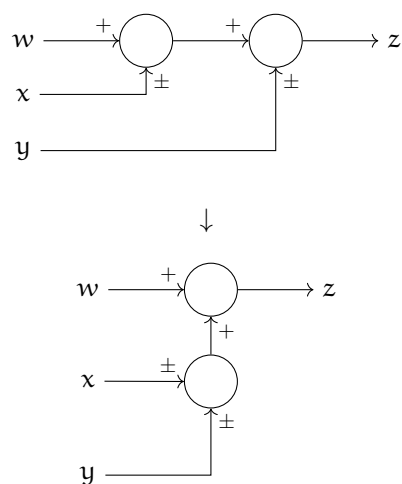
↓



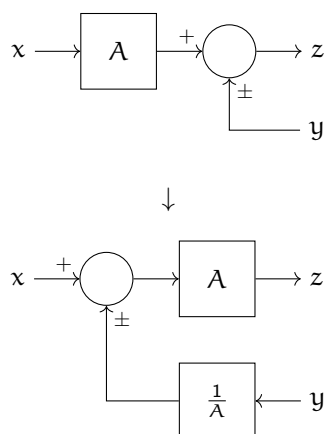
4. **Riorganizzazione degli input nel nodo sommatore:**



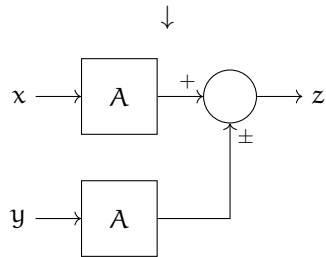
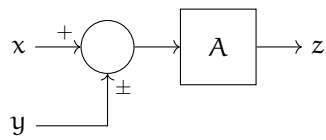
(a) Riorganizzazione dei nodi sommatori:



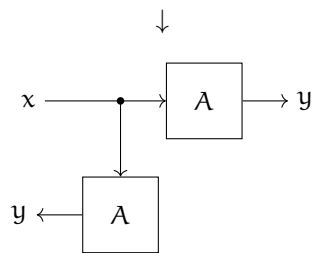
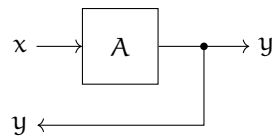
5. Spostamento dei nodi somma prima del blocco:



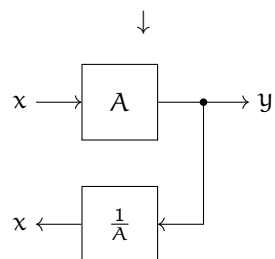
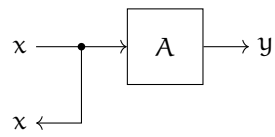
6. Spostamento dei nodi somma dopo il blocco:



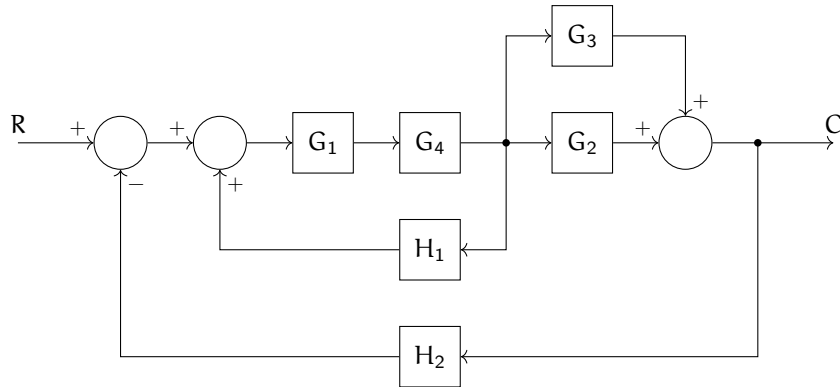
7. Spostamento di un nodo prima di un blocco:



8. Spostamento di un nodo dopo un blocco:

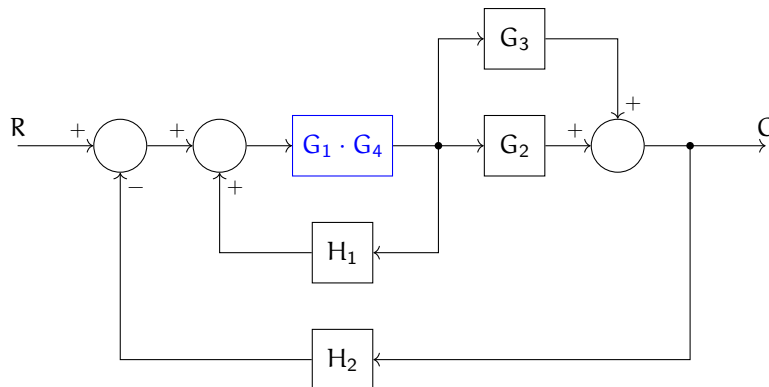


**Esempio 11.1.** Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

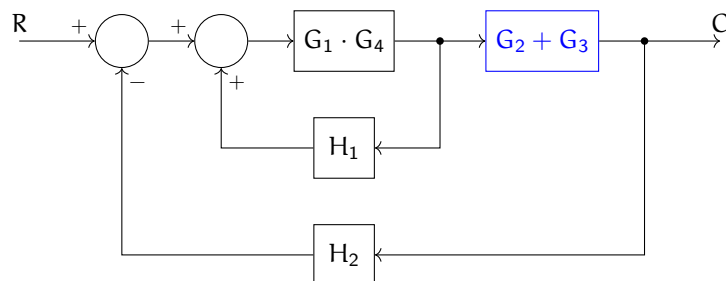


L'obiettivo è quello di trasformare tutto questo sistema in un unico blocco per poter poi fare la trasformata di Laplace.

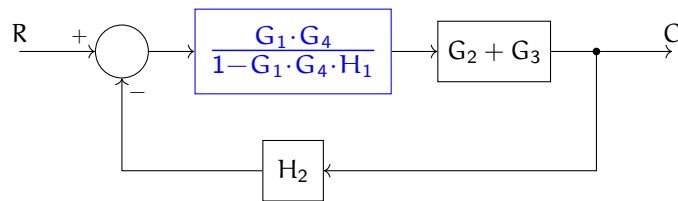
1. Applicare la trasformazione delle serie per ogni blocco in serie:



2. Applicare la trasformazione dei blocchi in parallelo per ogni blocco in parallelo:



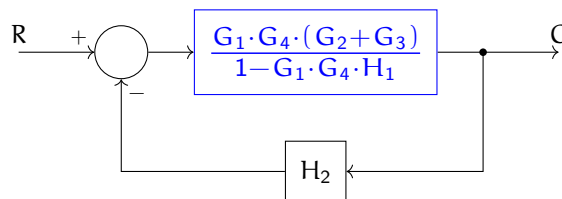
3. Applicare la trasformazione di retroazione per ogni blocco in retroazione:



4. Applicare la trasformazione dello spostamento dei nodi/nodi sommatori:

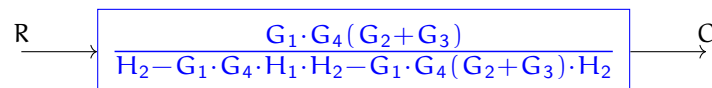
In questo caso non serve

5. Ripetere i passaggi fino ad ottenere un unico blocco:



Il sistema finale è dato da:

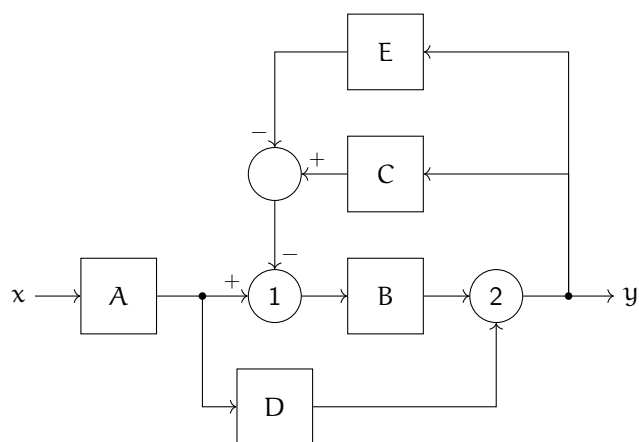
$$\begin{aligned} & \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1} \cdot H_2} = \\ & = \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 - \cancel{G_1 \cdot G_4} \cdot H_1} \cdot \frac{1 - \cancel{G_1 \cdot G_4} \cdot H_1}{[1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1 - G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)] \cdot H_2} = \\ & = \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{H_2 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1 \cdot H_2 - G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3) \cdot H_2} = \end{aligned}$$



Questo è il sistema finale in forma canonica.

**Esempio 11.2.** Consideriamo il seguente sistema:





dove:

$$A = \frac{1}{s}$$

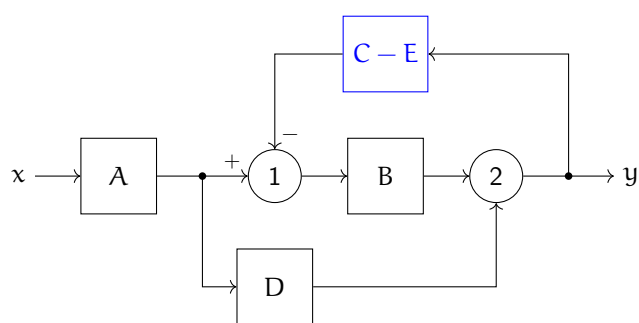
$$B = s^2$$

$$C = \frac{(s-2)(s+1)}{s^2}$$

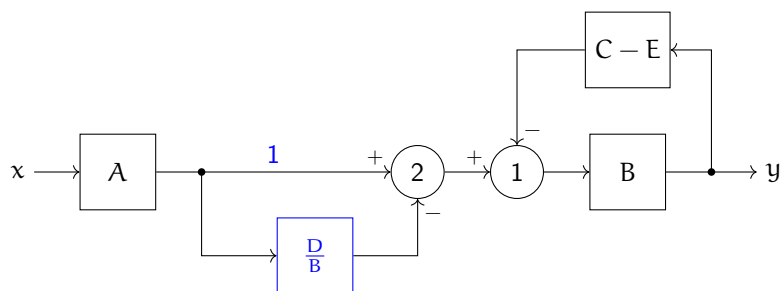
$$D = s + 2$$

$$E = \frac{1}{s^2}$$

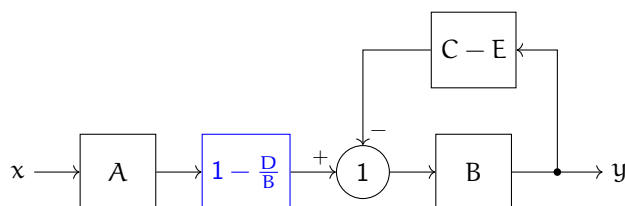
I passaggi sono i seguenti:



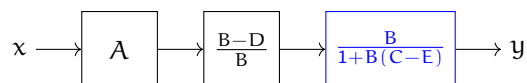
1.



2.



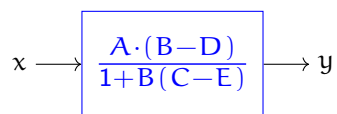
3.



4.

5. Il sistema finale è dato da:

$$A \cdot \frac{B-D}{B} \cdot \frac{B}{1+B(C-E)}$$



Alla fine la funzione di trasferimento del sistema sarà:

$$\begin{aligned} \frac{A \cdot (B-D)}{1+B(C-E)} &= \frac{\frac{1}{s} \cdot (s^2 - (s+2))}{1 + \left( s^2 \cdot \left( \frac{(s-2)(s+1)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \right) \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{s} \cdot (s^2 - s + 2)}{1 + (s-2)(s+1) - 1} \end{aligned}$$

## 12 Diagrammi di flusso

### 12.1 Nomenclatura

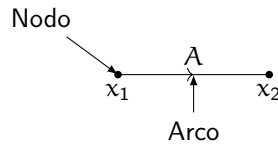
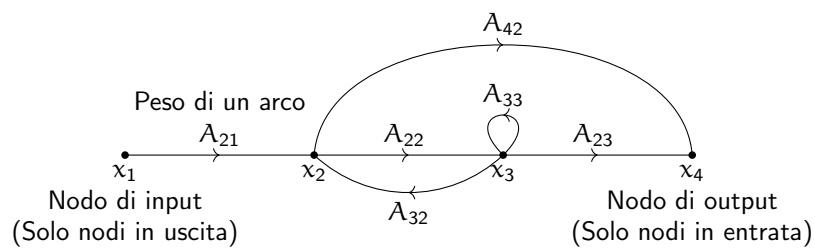


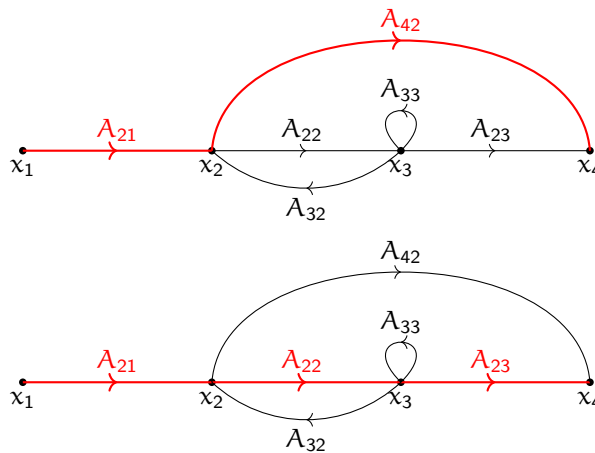
Figura 96: Nomenclatura base

Prendiamo ad esempio il seguente diagramma:

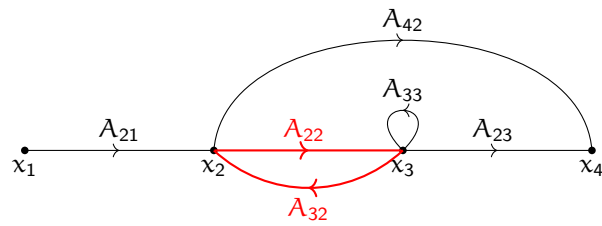


Definiamo:

- **Percorso in avanti:** Un cammino che unisce un nodo di ingresso ad un nodo di uscita



- **Percorso ad anello:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo senza passare più volte per nodi intermedi. Si dice **self loop** quando passa più volte per lo stesso nodo.



- **Guadagno:** Prodotto di tutti i pesi degli archi lungo un percorso

## 12.2 Regole di trasformazione

### 12.2.1 Regola dell'addizione

$$\sum x_i \cdot A_i = y$$

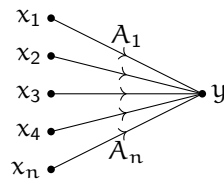


Figura 97: Regola dell'addizione

### 12.2.2 Regola della trasmissione

$$y_i = x \cdot A_i$$

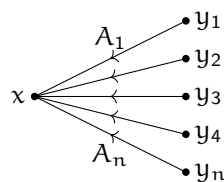


Figura 98: Regola della trasmissione

### 12.2.3 Regola della moltiplicazione

$$y = x_1 \cdot A \cdot x_2 \cdot B \dots$$

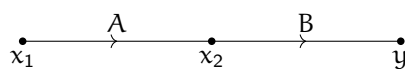
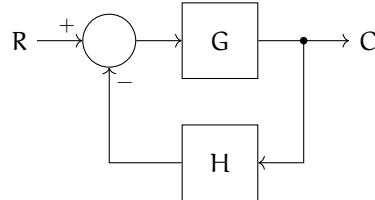


Figura 99: Regola della moltiplicazione

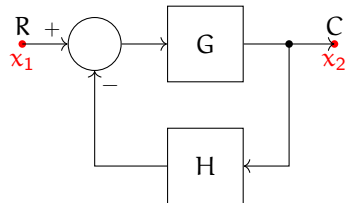
## 12.3 Passaggio dallo schema a blocchi al diagramma di flusso

Prendiamo uno schema a blocchi base:

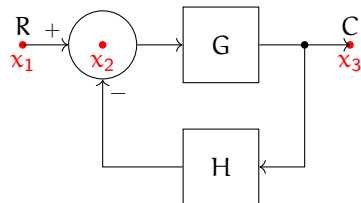


Per convertire questo schema in un diagramma di flusso dobbiamo seguire le seguenti regole:

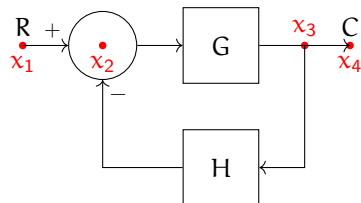
1. Individuare i nodi di ingresso e di uscita



2. Per ogni nodo somma si aggiunge un nodo



3. Per ogni nodo dello schema a blocchi si aggiunge un nodo al diagramma di flusso



4. Unisco i nodi con archi il cui peso è la funzione dentro al blocco. Se tra i due nodi non c'è un blocco, l'arco avrà peso 1

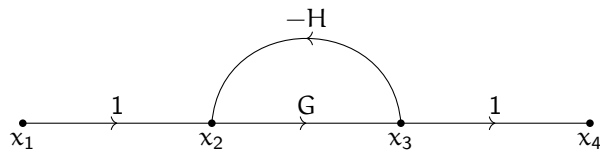


Figura 100: Diagramma di flusso

L'obiettivo anche in questo caso è quello di ridurre il diagramma di flusso ad un unico arco per ottenere la funzione di trasferimento:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm H \cdot G}$$

**Definizione 12.1** (Formula di Mason). La funzione di trasferimento è data da:

$$T = \frac{\sum_i p_i \Delta_i}{\Delta}$$

dove:

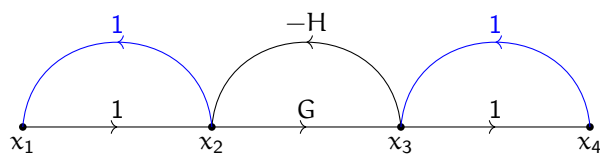
- $p_i$ : È il guadagno dell' $i$ -esimo percorso in avanti.
- $\Delta$ : È il discriminante del sistema ed è definito come:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j p_{j,k} \\ &= 1 - \sum_j p_{j,1} + \sum_j p_{j,2} - \sum_j p_{j,3} + \dots \\ &= 1 - \left( \begin{array}{l} \text{somma dei guadagni} \\ \text{di tutti gli archi} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{somma dei guadagni} \\ \text{dei prodotti degli anelli che} \\ \text{non si toccano due a due} \end{array} \right) + \\ &\quad \left( \begin{array}{l} \text{Somma dei guadagni} \\ \text{dei prodotti degli anelli che} \\ \text{non si toccano tre a tre} \end{array} \right) + \dots \end{aligned}$$

Dove  $p_{j,k}$  è il  $j$ -esimo prodotto dei percorsi di ordine  $k$  che non si toccano.

- $\Delta_i$ : Sono i discriminanti in cui i pesi degli archi che toccano il percorso vengono messi a 0.

**Esempio 12.1.** Prendiamo ad esempio il seguente diagramma di flusso:



Il percorso 1 è:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

Il percorso 1,1 è:

$$P_{1,1} = P_1^1 = A_{1,1} = A_1^1 = (x_2, x_3) = -GH$$

Ci sarebbero anche gli anelli che hanno guadagno 1, ma non vengono considerati.

$$P_{2,1} = P_2^1 = A_{2,1} = A_2^1 = (x_1, x_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ora si può calcolare il discriminante:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) + (0) = 1 + GH$$

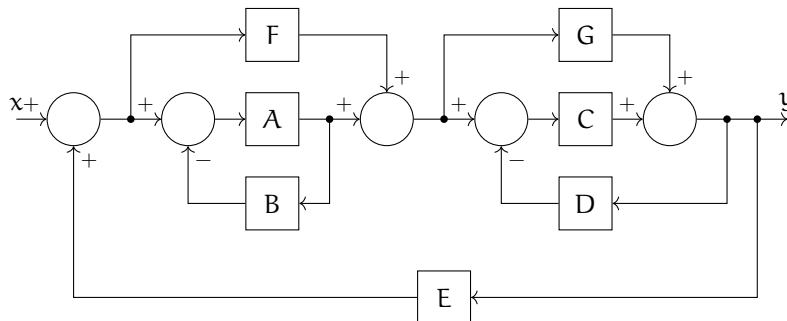
Annullo tutti gli archi che toccano il percorso 1:

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{P_{1,1}}^0 = 1 - 0 = 1$$

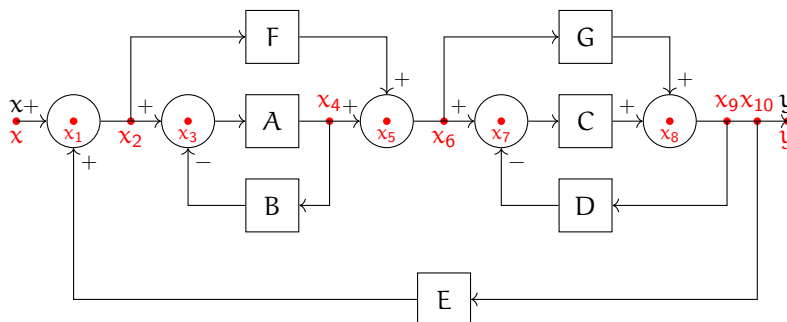
Ora si può calcolare la funzione di trasferimento:

$$T = \frac{\sum_1 P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G \cdot 1}{1 + GH} = \frac{G}{1 + GH}$$

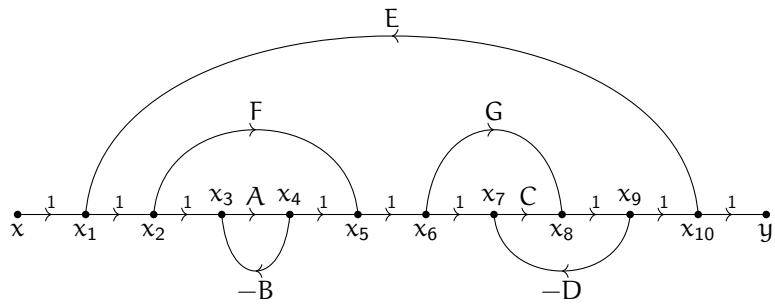
**Esempio 12.2.** Prendiamo ad esempio il seguente schema a blocchi:



Deriviamo i nodi del diagramma di flusso:



Rappresentiamo il diagramma di flusso:



Le due rappresentazioni sono equivalenti.

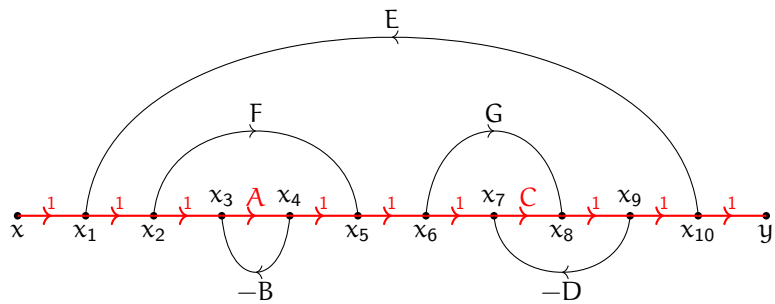
Utilizziamo la formula di Mason per calcolare la funzione di trasferimento:

1. Troviamo tutti i percorsi:

(a)

$$P_1 = AC$$

I nodi coinvolti sono:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$

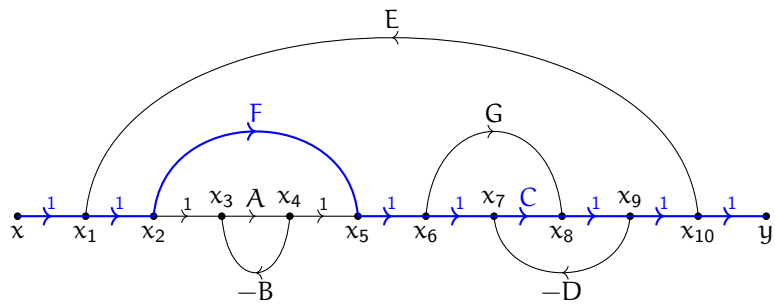


(b)

$$P_2 = FC$$

I nodi coinvolti sono:  $(x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$

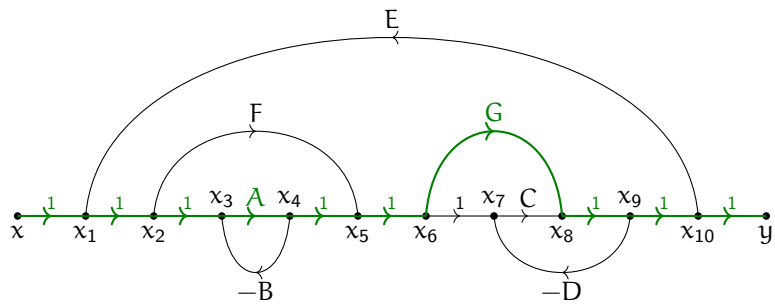




(c)

$$P_3 = AG$$

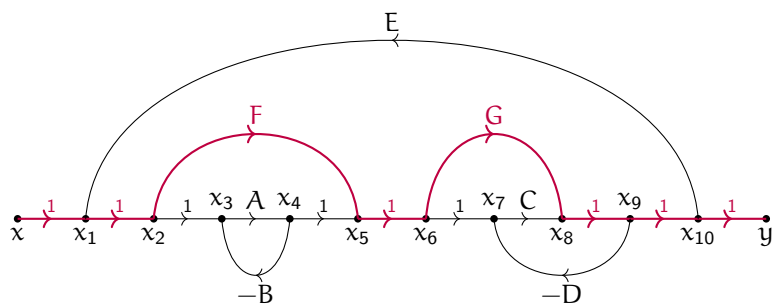
I nodi coinvolti sono:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10})$



(d)

$$P_3 = FG$$

I nodi coinvolti sono:  $(x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10})$

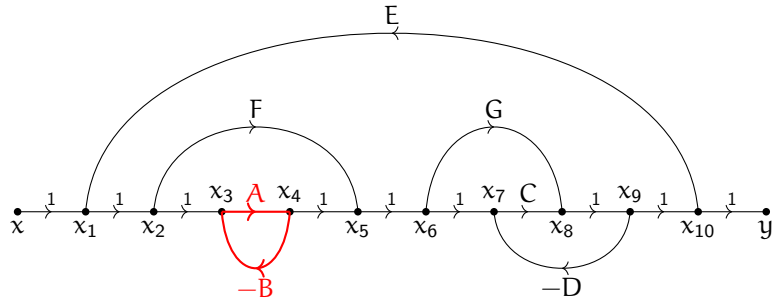


2. Troviamo tutti gli anelli:

- Anelli di ordine 1

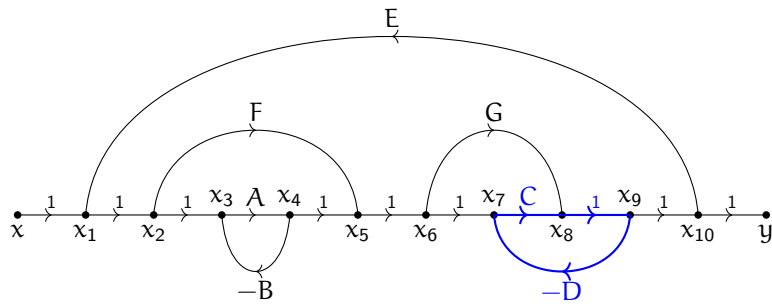
(a)

$$A_1^1 = -AB \quad (x_3, x_4)$$



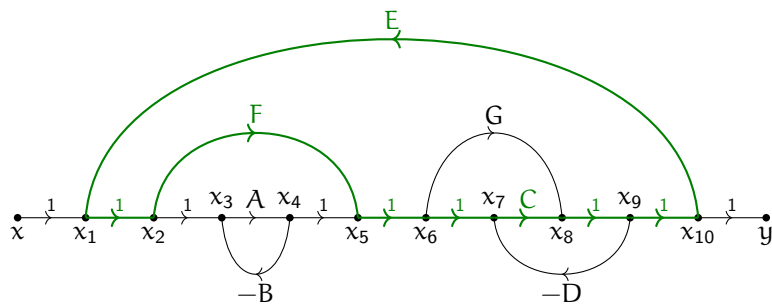
(b)

$$A_2^1 = -CD \quad (x_7, x_8, x_9)$$



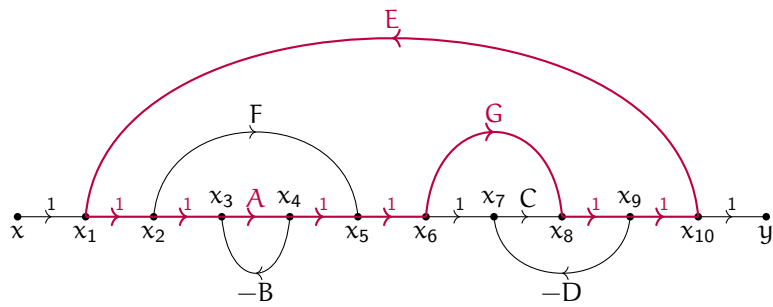
(c)

$$A_3^1 = FCE \quad (x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$



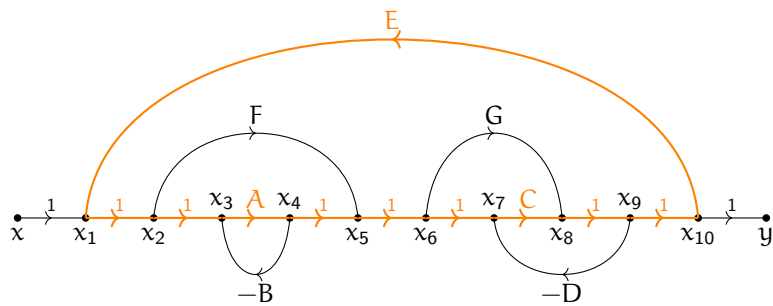
(d)

$$A_4^1 = FGE \quad (x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10})$$



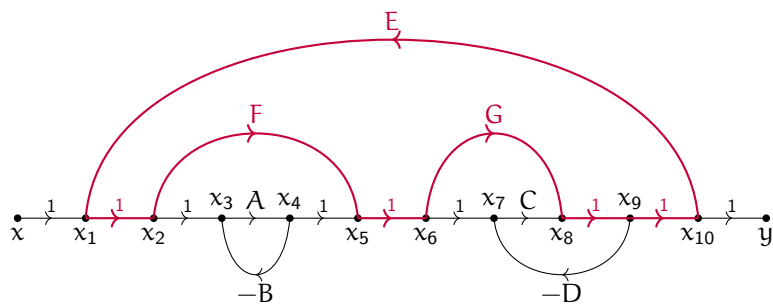
(e)

$$A_5^1 = ACE \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$$



(f)

$$A_6^1 = AGE \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10})$$



• Anelli di ordine 2:

|         | Anelli | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $A_1^1$ | -AB    |       |       | ×     | ×     |       |       |       |       |       |          |
| $A_2^1$ | -CD    |       |       |       |       |       |       | ×     | ×     | ×     |          |
| $A_3^1$ | FCE    | ×     | ×     |       |       | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     |          |
| $A_4^1$ | FGE    | ×     | ×     |       |       | ×     | ×     |       | ×     | ×     | ×        |
| $A_5^1$ | ACE    | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     | ×        |
| $A_6^1$ | AGE    | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     | ×     |       | ×     | ×     | ×        |

Si controlla ogni arco con ogni altro arco (a 2 a 2) e si controlla se hanno nodi in comune. Se non hanno nodi in comune si moltiplicano i guadagni degli archi.

$$A_1^2 = (-AB) \cdot (-CD) = ABCD$$

$$A_2^2 = (-AB) \cdot FCE = -ABCEF$$

$$A_3^2 = (-AB) \cdot FGE = -ABEFG$$

Ora si controlla a 3 a 3:

Non esistono nodi di ordine 3, quindi non esistono triplette di archi che non si toccano.

3. Calcoliamo il discriminante:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 + A_5^1 + A_6^1) + (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\ &= 1 - (-AB - CD + FCE + FGE + ACE + AGE) + \\ &\quad (ABCD - ABCEF - ABEFG) \\ &= 1 + AB + CD - FCE - FGE - ACE - AGE + \\ &\quad ABCD - ABCEF - ABEFG\end{aligned}$$

4. Calcoliamo i discriminanti di tutti i percorsi:

$$P_1 = AC$$

$$\Delta_1 = 1 + \cancel{AB} + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1$$

$$P_2 = FC$$

$$\Delta_2 = 1 + AB + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1 + AB$$

$$P_3 = AG$$

$$\Delta_3 = 1 + \cancel{AB} + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1$$

$$P_4 = FG$$

$$\Delta_4 = 1 + AB + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1 + AB$$

5. Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta} \\ &= \frac{AC \cdot 1 + FC \cdot (1 + AB) + AG \cdot 1 + FG \cdot (1 + AB)}{1 + AB + CD - FCE - FGE - ACE - AGE + ABCD - ABCEF - ABEFG} \\ &= \frac{AC + FC + FCAB + AG + FG + FGAB}{1 + AB + CD - FCE - FGE - ACE - AGE + ABCD - ABCEF - ABEFG} \end{aligned}$$

## 13 Diagrammi di Bode

Questo diagramma ci aiuta a capire il comportamento del sistema al variare della frequenza del segnale di ingresso. In particolare ci permette di capire come si comporta un sistema descritto da segnali **sinusoidali**.

### 13.1 Motivo delle sinusoidi

I sistemi descritti da segnali sinusoidali sono utili perchè vedremo che qualsiasi segnale può essere rappresentato come una somma di sinusoidi.

Un sistema LTI causale permette le seguenti operazioni:

- $u(t) \cdot a$
- $\frac{du(t)}{dt}$
- $\int u(t) dt$
- $u_1(t) + u_2(t)$

L'output del sistema è un onda scalata rispetto all'ampiezza o ritardata rispetto al tempo.

**Esempio 13.1.** Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

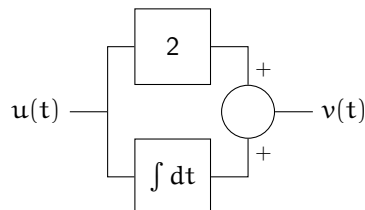


Figura 101: Esempio di sistema

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \alpha\text{Hz}$$

Calcoliamo l'ingresso:

$$\begin{aligned} v(t) &= 2 \cdot u(t) + \int u(t) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

Utilizziamo un'**identità trigonometrica**, cioè:

$$\begin{aligned} a \sin(x) + b \cos(x) &= \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \rho) \end{aligned}$$

dove:  $\rho = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$   $a \geq 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \overbrace{2}^a \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \overbrace{2}^b \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \text{atan}\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{8} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \text{atan}(-1)\right) \\ &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\ &= A \cdot \sin(\omega + \phi) \end{aligned}$$

## 13.2 Rappresentazione del diagramma di Bode

Il diagramma di bode permette di rappresentare il comportamento di un sistema LTI formato da sinusoidi, di seguito guardiamo un diagramma semi-logaritmico (cioè con un asse lineare e uno logaritmico) che rappresenta l'ampiezza (grafico in alto) e la fase (grafico in basso) di un sistema LTI:

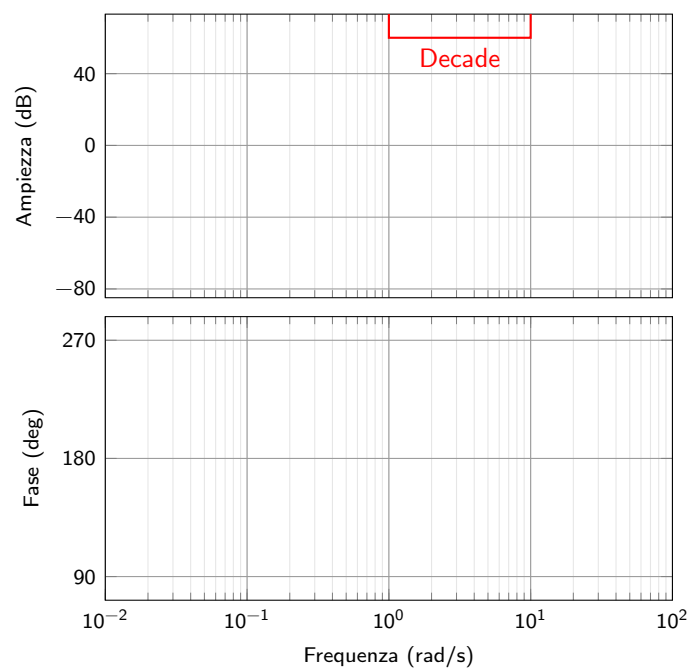


Figura 102: Diagramma di Bode

**Osservazione:**

Il decibel dB è un unità di misura inventata nel 1920 per misurare quanto si disperde il segnale acustico su una transmission unit ( $1\text{TU} = 10 \log_{10} \Delta_{\text{Potenza}}$ ). Quindi un decibel è il minimo di potenza che un orecchio umano può percepire.

$$\text{Potenza} = \text{Ampiezza}^2$$

$$1\text{bel} = 1\text{TU} = 10 \log_{10} A^2 = 20 \log_{10} A$$

$$1\text{dB} = \frac{1}{10}\text{bel}$$

**Esempio 13.2.** Riprendiamo l'esempio 13.1:

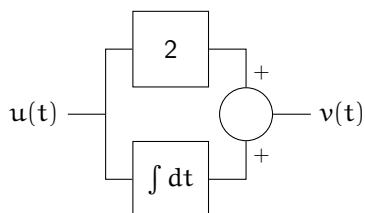
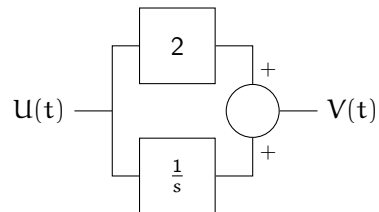


Figura 103: Esempio di sistema

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \omega = \frac{1}{2}$$

$$v(t) = 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right)$$

Studiamo il sistema in frequenza:



$$V(s) = \left(2 + \frac{1}{s}\right) U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s+1}{s} \quad \text{Funzione di trasferimento del sistema}$$

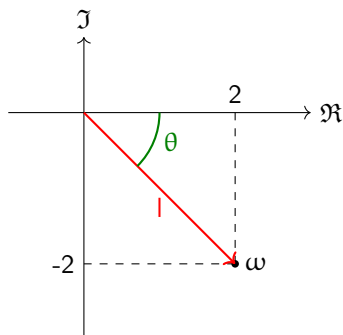
$s$  è un numero complesso:

$$s = \sigma + j\omega$$

Con la risposta in frequenza la  $s$  diventa  $s = j\omega$ , quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\ &= \frac{2j\omega}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} \\ &= 2 - \frac{1}{\omega} \cdot j \\ \omega &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La risposta del sistema nel piano dei complessi è:





dove:

$$\text{Ampiezza} = l = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$$

$$\text{Fase} = \theta = \text{atan2}(\Im, \Re)$$

$$\text{atan2}(\sigma, j\omega) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \text{se } \sigma > 0, \omega \in \mathbb{R} \\ \text{segno}(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{se } \sigma = 0, \omega \neq 0 \\ \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot \text{segno}(\omega) & \text{se } \sigma < 0, \text{ o } \sigma = 0, \omega \geq 0 \end{cases}$$

Il diagramma di Bode sarà:

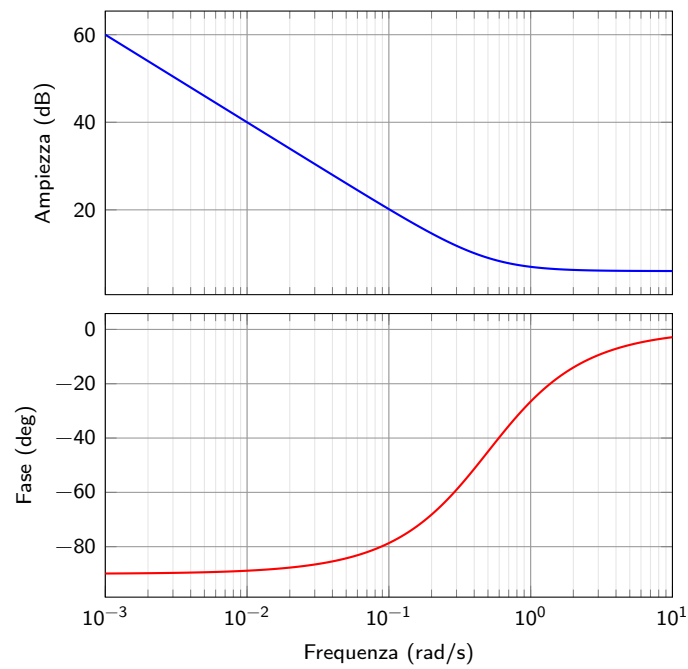


Figura 104: Diagramma di Bode

### 13.2.1 Risposta in frequenza

Si parte dal sistema con un input preciso:

$$u(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\omega_0 t} e^{j\phi}$$

dove:

$$A \in \mathbb{R}_+$$

$$\phi, \omega_0 \in \mathbb{R}$$

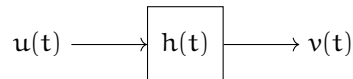
Questo input viene messo in un sistema BIBO stabile e riceviamo un output  $v(t)$ .  
Poi calcoliamo:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \downarrow s = j\omega_0 \\ &= \mathcal{L}[h(t)](s) \Big|_{s=j\omega_0} \end{aligned}$$

Se in input avessimo degli esponenziali o delle sinusoidali, l'output cambia solo per un fattore di scala o di fase:

**Esempio 13.3.** Se consideriamo un **fasore**:

$$u(t) = A e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$



$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot A e^{j\phi} \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= A \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= A \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) \\ &= A \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \cdot A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \\ &= A \cdot A(\omega) \cdot e^{j(\phi+\varphi(\omega))} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

dove:

$A$  = Ampiezza di  $u(t)$

$A(\omega)$  = Ampiezza della risposta in frequenza

$\phi$  = Fase di  $u(t)$

$\varphi(\omega)$  = Fase della risposta in frequenza

Notiamo che la frequenza di  $u(t)$ , cioè  $\omega$ , rimane invariata.

### 13.3 Esempi

**Esempio 13.4.** Consideriamo l'esempio 13.1 nel dominio del tempo:

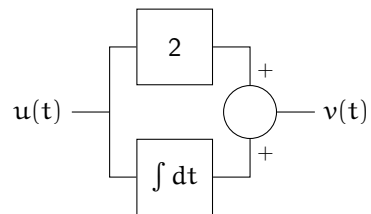
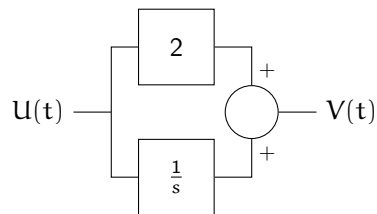


Figura 105: Esempio di sistema

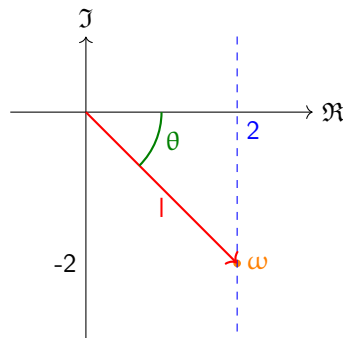
$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\
 v(t) &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\
 &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\text{rad}\right)
 \end{aligned}$$

Possiamo andare a trasformare il sistema nel dominio delle frequenze:



$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\
 s &= \cancel{\sigma} + j\omega = j\omega \\
 \omega &= \frac{1 \text{ rad}}{2 \text{ s}} = \frac{1}{2} \text{ Hz} \frac{V(t)}{U(t)} = \frac{2s + 1}{s} \\
 &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\
 &= 2 - \frac{1}{\omega}j \\
 \omega &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Il grafico sul piano complesso sarà:



Sappiamo che:

- L'ampiezza  $l$  vale:

$$l = |\sigma + j\omega| = |\sigma| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$$

- La fase  $\theta$  vale:

$$\theta = \arg(\sigma + j\omega) = \text{atan2}(\Im, \Re)$$

$$\arg(\sigma + j\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \sigma > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \sigma = 0, \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \sigma = 0, \omega < 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi & \sigma < 0, \omega \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \pi & \sigma < 0, \omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{segno}(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\arg(\sigma + j\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \sigma > 0 \\ \text{segno}(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \sigma = 0, \omega \neq 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot \text{segno}(\omega) & \sigma < 0 \end{cases}$$

Se volessimo disegnare il grafico del punto trovato sul grafico dei complessi esso diventa:

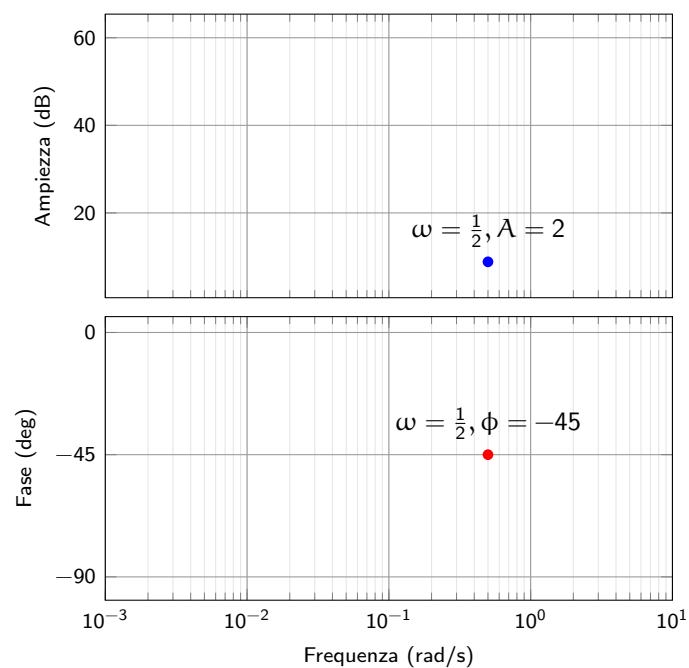


Figura 106: Singolo punto nel diagramma di Bode

Se il nostro punto andasse più in basso, cioè  $\omega$  diventa più piccolo, allora la fase diventa più piccola fino a  $-90$  gradi. Se invece il punto va più in alto, cioè  $\omega$  diventa più grande, allora la fase diventa più grande fino a  $0$  gradi.

Per ogni frequenza  $\omega$  abbiamo un'ampiezza e una fase diversa e si vuole rappresentare questo grafico in un diagramma di Bode:

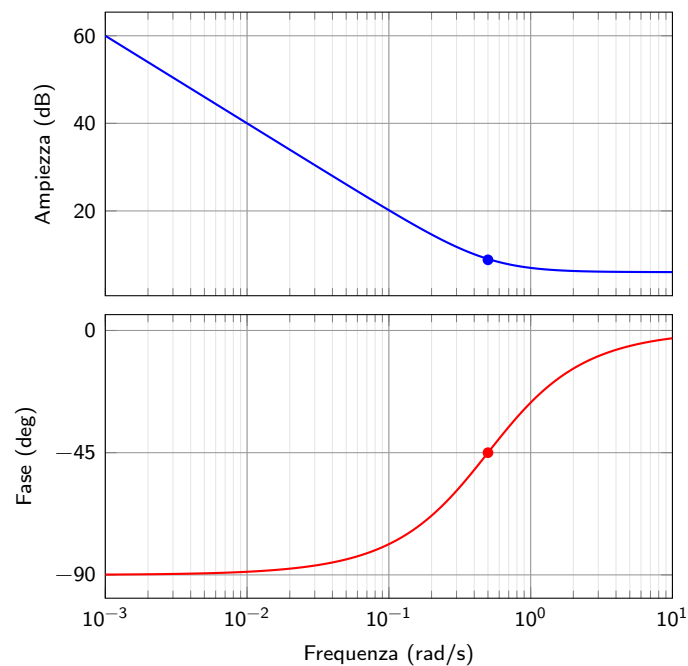


Figura 107: Diagramma di Bode

### 13.3.1 Operazioni tra numeri complessi

Siano  $a, b \in \mathbb{C}$

$$1. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\arg(a \cdot b) = \arg(a) + \arg(b)$$

$$2. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$

$$3. |a^\mu| = |a|^\mu$$

$$\arg(a^\mu) = \mu \cdot \arg(a)$$

### 13.3.2 Logaritmo di un numero complesso

Il logaritmo di un numero complesso  $s$  è quel numero  $x \in \mathbb{C}$  tale che:

$$\ln(s) = x \iff s = e^x$$

Se scriviamo  $s$  come:

$$s = \rho e^{j\theta}$$

e  $x$  in forma polare:

$$x = \sigma + j\omega$$

Abbiamo che:

$$s = e^x \rightarrow \rho e^{j\theta} = e^{\sigma + j\omega}$$

$$e^{\ln(\rho)} \cdot e^{j\theta} = e^\sigma \cdot e^{j\omega}$$

Da questo otteniamo:

$$\begin{aligned}\ln(\rho) &= \sigma \\ \theta &= \omega\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\ln(s) &= x \\ &= \ln(\rho) + j\theta \\ &= \ln|s| + j \cdot \arg(s)\end{aligned}$$

### 13.4 Forma di Bode

Sappiamo che la funzione di trasferimento è calcolata come il rapporto tra il polinomio caratteristico dell'ingresso e il polinomio caratteristico dell'uscita:

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{\sum_j b_j s^j}{\sum_i a_i s^i} \cdot U(s) \\ &= k \cdot \frac{(s - z_1)^{\mu_1} \cdot (s - z_2)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (s - z_l)^{\mu_l}}{(s - p_1)^{\nu_1} \cdot (s - p_2)^{\nu_2} \cdot \dots \cdot (s - p_r)^{\nu_r}} \\ &= \text{Costante} \cdot \frac{\text{Zeri di } H(s), \text{ radici del numeratore}}{\text{Poli di } H(s), \text{ radici del denominatore}}\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \text{molteplicità degli zeri} \\ \nu_i &= \text{molteplicità dei poli} \\ l &\leq m, \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l = m \\ r &\leq n, \quad \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = n\end{aligned}$$

Da questa funzione di trasferimento vogliamo trovare la **forma di Bode**. Riscriviamo la funzione di trasferimento come:

$$H(s) = k_b \cdot \frac{\prod_i (1 + s\tau_i')^{\mu_i'} \cdot \prod_k \left(1 + 2\zeta_k' \frac{s}{\omega_{n,k}'} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k}')^2}\right)^{\mu_k'}}{(s^{\nu_i}) \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k \left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

Questa è detta **forma di Bode**, dove:

- $k_b$ : È il termine costante chiamato **Guadagno di Bode**
- $s^{\nu_i}$ : Raggruppa tutte le radici nulle:

$$\frac{s^s}{s^n} = \frac{1}{s^{-1}}$$

- $(1 + s\tau_i)^{\mu_i}$ : Raggruppa la singola radice reale:

$$(s + 1)$$

- $\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}$ : Raggruppa la singola radice complessa coniugata

- $\tau$ : Costante di tempo

Per arrivare alla forma di Bode bisogna raccogliere tutte le "costanti":

1. Poli e zeri nulli:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= 4 \frac{s^3 + s^2 - 2s}{s^3 + s^4} \\
 &= 4 \frac{s (s^2 + s - 2)}{s^2 (s + 1)} \quad \text{nulli} \\
 &= 4 \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Forma di Bode}} \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s + 1}
 \end{aligned}$$

La forma di Bode è:

$$\frac{1}{s^v}$$

2. Poli e zeri reali

$$\begin{aligned}
 H(s) &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s + 1} \\
 \Delta &= b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 9 > 0 \quad \checkmark \\
 H(s) &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s + 1} \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(s - 1)(s + 2)}{s + 1} \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(-1)(1 - s) \cdot (+2)(1 + \frac{s}{2})}{(1)(1 + s)} \\
 &= \frac{4 \cdot (-1) \cdot (2)}{(1)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - s)(1 + \frac{s}{2})}{(1 + s)} \\
 &= -8 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - s)(1 + \frac{s}{2})}{(1 + s)}
 \end{aligned}$$

Siamo arrivati ad una forma di Bode:

$$k_b \cdot \frac{1}{s^v} \cdot \frac{(1 + s\tau'_1)^{\mu'_1} (1 + s\tau'_2)^{\mu'_2}}{(1 + s\tau_1)^{\mu_1}}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 k_b &= -8 \\
 \frac{1}{s^v} &= \text{Zero nullo} \\
 \tau'_1 &= -1 \\
 \tau'_2 &= \frac{1}{2} \\
 \tau_1 &= 1
 \end{aligned}$$

3. Poli e zeri complessi coniugati

$$\begin{aligned}
 z &= \sigma + j\omega \\
 \bar{z} &= \sigma - j\omega
 \end{aligned}$$



Abbiamo che:

$$\begin{aligned}
 & (s - (\sigma + j\omega))^{\mu} \cdot (s - (\sigma - j\omega))^{\mu} \\
 &= (s^2 - s\sigma + sj\omega - s\sigma - sj\omega + |z|^2)^{\mu} \\
 &= (s^2 - 2s\sigma + |z|^2)^{\mu} \\
 &= |z|^{2\mu} \left( 1 - 2\frac{\sigma}{|z|^2}s + \frac{s^2}{|z|^2} \right)^{\mu} \\
 &= |z|^{2\mu} \left( 1 - 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)^{\mu}
 \end{aligned}$$

Dove:

$$\begin{aligned}
 \zeta - \frac{\sigma}{|z|} &= \frac{-\Re(z)}{|z|} = \text{Coefficiente di smorzamento} \\
 \omega_n &= |z| = \text{Pulsazione naturale}
 \end{aligned}$$

**Esempio 13.5.** Prendiamo ad esempio il sistema:

$$(s - (2 + j))^2 (s - (2 - j))^2$$

Calcoliamo la forma di Bode:

$$\begin{aligned}
 & (s - (2 + j))^2 (s - (2 - j))^2 \\
 &= (s^2 - 2s + sj - 2s - sj + |2 + j|^2)^2 \\
 &= (s^2 - 4s + 5)^2 \\
 &= 5 \left( 1 - \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5} \right) \cdot 5 \left( 1 - \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5} \right) \\
 &= (5)^2 \left( 1 - \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5} \right)^2
 \end{aligned}$$

Dobbiamo trovare  $\omega_n$ :

$$\omega_n = \sqrt{\omega_n^2} = \sqrt{5}$$

La formula diventa:

$$5^2 \left( 1 - \frac{4}{\sqrt{5}}s + \frac{s^2}{(\sqrt{5})^2} \right)^2$$

Dobbiamo trovare  $\zeta$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{2\zeta}{\omega_n} &= -\frac{4}{\sqrt{5}} \\
 \frac{2\zeta}{\cancel{\sqrt{5}}} &= -\frac{4}{\cancel{\sqrt{5}}} \\
 \zeta &= -\frac{\cancel{4}^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

La formula diventa:

$$5^2 \left( 1 + 2 \underbrace{\left( -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{\zeta} \underbrace{\frac{s}{\sqrt{5}}}_{\omega_n} + \underbrace{\frac{s^2}{(\sqrt{5})^2}}_{\omega_n^2} \right)$$

**Esempio 13.6.** Prendiamo in considerazione un trinomio:

$$5 \left( 1 - \frac{2}{5}s + \frac{3}{5}s^2 \right)$$

Troviamo  $\omega_n$  e  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{5}{3}} \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} &= -\frac{2}{5} \\ \zeta &= -\frac{1}{5\omega_n} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

La formula diventa:

$$5 \left( 1 + 2 \left( -\frac{1}{\sqrt{15}} \right) \frac{s}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + \frac{s^2}{\left( \sqrt{\frac{5}{3}} \right)^2} \right)$$

**Attenzione:**

**Non tutti i trinomi sono complessi coniugati**

Quello che si vuole fare una volta trovata la forma di bode è quella di trasformare tutto in frequenza:

$$H(s) \rightarrow H(j\omega)$$

Quindi la forma di Bode in frequenza diventa:

$$H(j\omega) = k_b \frac{\prod_i (1+j\omega\tau'_i)^{\mu'_i} \cdot \prod_k \left( 1+j2\zeta'_k \frac{\omega}{\omega'_{n,k}} - \frac{\omega^2}{(\omega'_{n,k})^2} \right)^{\mu'_k}}{(j\omega)^\nu \prod_i (1+j\omega\tau_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k \left( 1+j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{n,k}} - \frac{\omega^2}{(\omega_{n,k})^2} \right)^{\mu_k}}$$

**Esempio 13.7.** Vogliamo portare in forma di bode la seguente funzione di

trasferimento:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^3 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2} \\ &= \frac{s(s^2 - 2s - 8)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)} \end{aligned}$$

Il delta del numeratore è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 36 > 0$$

È maggiore di 0, quindi si può semplificare.

Il delta del denominatore è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$$

È minore di 0, quindi non si può semplificare.

$$\begin{aligned} &= \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{(s - 4)(s + 2)}{s(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{(-4)\left(1 - \frac{s}{4}\right) \cdot (2)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s \cdot (2)\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} \\ &= -4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{4}\right)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

Questa è la forma di Bode.

Ora vogliamo trovare tutte le costanti:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{s}{4}\right) &\rightarrow \tau_1 = -\frac{1}{4} \\ \left(1 + \frac{s}{2}\right) &\rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2} \\ \left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right) &\rightarrow \omega_n^2 = 2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} = -1 &\rightarrow \frac{2\zeta}{\sqrt{2}} = -1 \rightarrow \zeta = \frac{-1 \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

**Esempio 13.8.** Prendiamo ad esempio la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{5 \cdot (s^2 - 5s + 2s)}{s^2 \cdot (s + 3)^2} \\ &= \frac{5 \cdot 2s \left( \frac{s^2}{2s} - \frac{5}{2s}s + 1 \right)}{9 \cdot s^2 \left( \frac{s}{3} + 1 \right)^2} \\ &= \frac{12s}{9} \cdot \frac{\left( 1 - \frac{1}{5}s + \frac{s^2}{2s} \right)}{s^2 \left( 1 + \frac{s}{3} \right)^2} \end{aligned}$$

Si arriva ad una forma del tipo:

$$k_b \cdot \frac{\text{Radici}}{\text{Radici}}$$

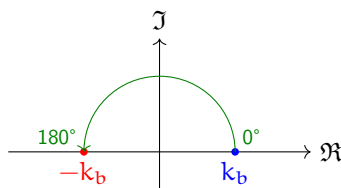
Si raccolgono tutte le costanti per arrivare alla forma di Bode.

## 13.5 Disegno del diagramma di Bode

Ci sono 4 possibili diagrammi di Bode:

1. Termine costante  $k_b$
2. Uno zero o un polo nullo  $s^\mu$  dove  $\mu$  è la molteplicità
3. Uno zero o un polo reale  $(1 + \tau s)^\mu$  dove  $\tau$  è la costante di tempo
4. Uno zero o un polo complesso coniugato  $\left( 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)^\mu$  dove  $\zeta$  è il coefficiente di smorzamento e  $\omega_n$  è la pulsazione naturale

### 13.5.1 Termine costante



**Definizione 13.1.** Si calcola l'ampiezza:

$$A = |H(j\omega)| = |k_b| = k_b$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10} (|k_b|)$$

E la fase:

$$\phi = \text{atan2}(\sigma + j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } k_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } k_b < 0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } k_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } k_b < 0 \end{cases}$$

Se prendiamo  $k_b = 10$  avremo:

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(10) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$\phi(\omega) = 0^\circ$$

Se prendiamo  $k_b = -10$  avremo:

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(10) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$\phi(\omega) = -180^\circ$$

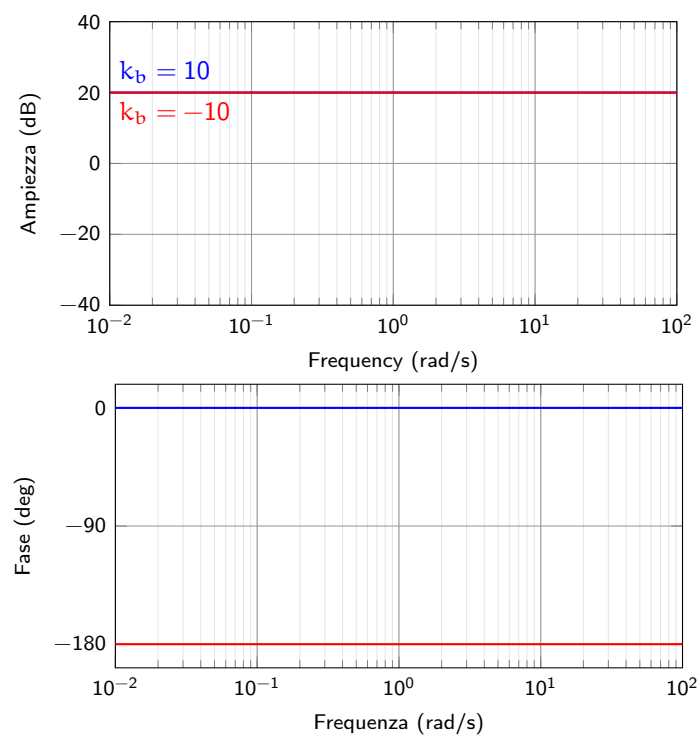


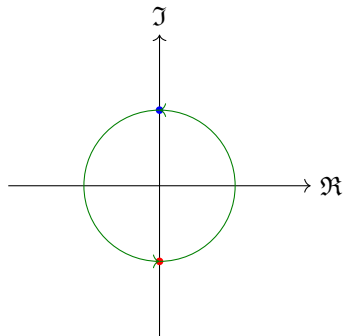
Figura 108: Diagramma con  $k_b = 10$  e  $k_b = -10$

### 13.5.2 Zero o polo nullo

$$H(s) = H(j\omega) \rightarrow (j\omega)^\mu$$

dove:

$$\mu \in \mathbb{Z}, \quad \mu > 0 \text{ per gli zeri, } \mu < 0 \text{ per i poli}$$



**Definizione 13.2.**

$$|H(j\omega)| = |(j\omega)^\mu| = |\omega|^\mu = \omega^\mu$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(j\omega)|_{\text{dB}} \\ &= 20 \log_{10}(\omega^\mu) \\ &= 20\mu \log_{10}(\omega) \end{aligned}$$

È una retta che passa per  $(10^0, 0)$  e cresce (o decresce) di  $20\mu$  dB/decade.

La fase:

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(j\omega)^\mu = \mu \cdot \text{atan2}(j\omega) = \mu \cdot 90^\circ$$

È una retta costante.

Consideriamo i seguenti zeri ( $s^1$ ) e poli ( $s^{-1}$ ) di  $H(s)$

| $\omega$  | $s^1$ | $s^{-1}$ | $s^{-2}$ |
|-----------|-------|----------|----------|
| $10^{-2}$ | -40   | 40       | 80       |
| $10^{-1}$ | -20   | 20       | 40       |
| $10^0$    | 0     | 0        | 0        |
| $10^1$    | 20    | -20      | -40      |
| $10^2$    | 40    | -40      | -80      |

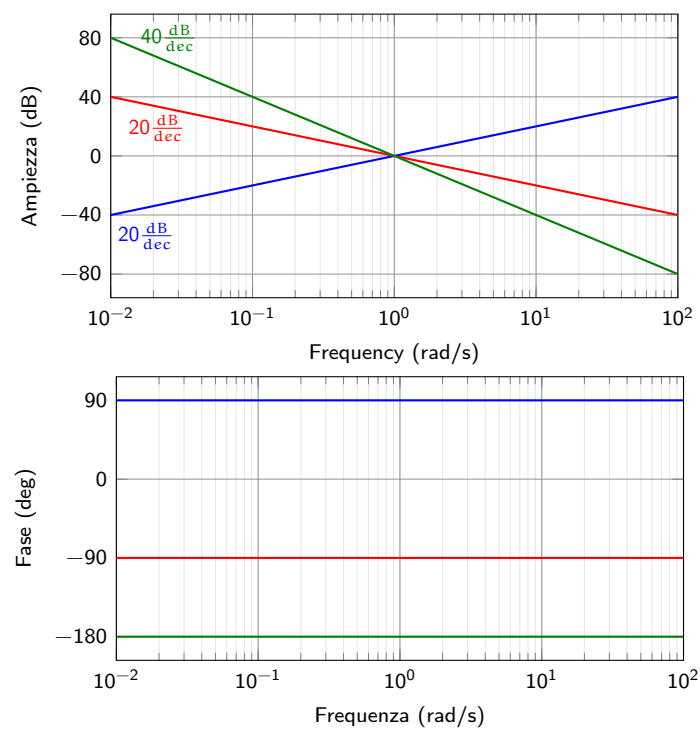
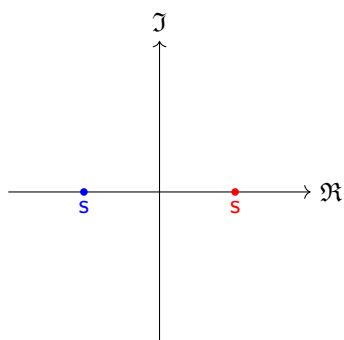


Figura 109: Diagramma di Bode con  $s^1$ ,  $s^{-1}$  e  $s^{-2}$

### 13.5.3 Zero o polo reale

$$H(s) \rightarrow (1 + \tau s)^\mu$$



Abbiamo che un polo si può scrivere come:

$$\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

con:

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

Quindi il polo in  $j\omega$  si può scrivere come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

La parte reale e immaginaria sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \Re &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ \Im &= \frac{-\frac{\omega}{\omega_0}j}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

**Definizione 13.3.** L'ampiezza e la fase sono:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 20 \log_{10} \left( \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \right) \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(\Re, \Im) \\ &\downarrow \\ A(\omega) &= -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \\ \phi(\omega) &= \text{atan2} \left( -\frac{\omega}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

Se consideriamo le seguenti omega:

- $\omega \ll \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -20 \log_{10} (\sqrt{1}) = 0 \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(0) = 0 \end{aligned}$$

- $\omega = \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -20 \log_{10} (\sqrt{2}) = -3\text{dB} \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(-1) = -45^\circ \end{aligned}$$

- $\omega \gg \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -20 \log_{10} \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = -20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}} \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(-\infty) \approx -90^\circ \end{aligned}$$

Consideriamo un polo di  $H(s)$

$$\left( 1 + \frac{s}{10} \right)^{-1}$$



Calcoliamo  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

$$\tau = \frac{1}{10} \rightarrow \omega_0 = 10$$

Prima di  $\omega_0$  la funzione è nulla e successivamente cresce o decresce di 20 dB/decade.

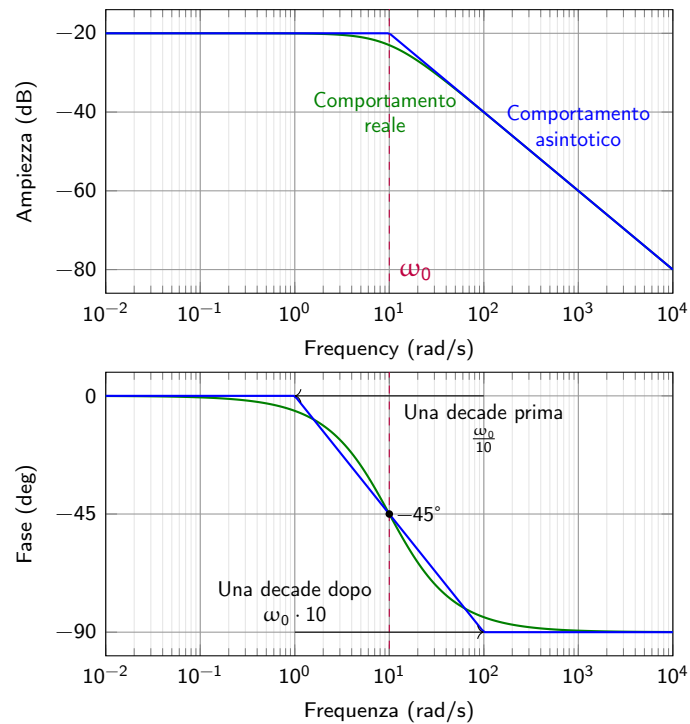


Figura 110: Diagramma di Bode di un polo reale:  $\left(1 + \frac{s}{10}\right)^{-1}$

Consideriamo uno zero di  $H(s)$

$$\left(1 + \frac{s}{10}\right)^1$$

$$\omega_0 = 10$$

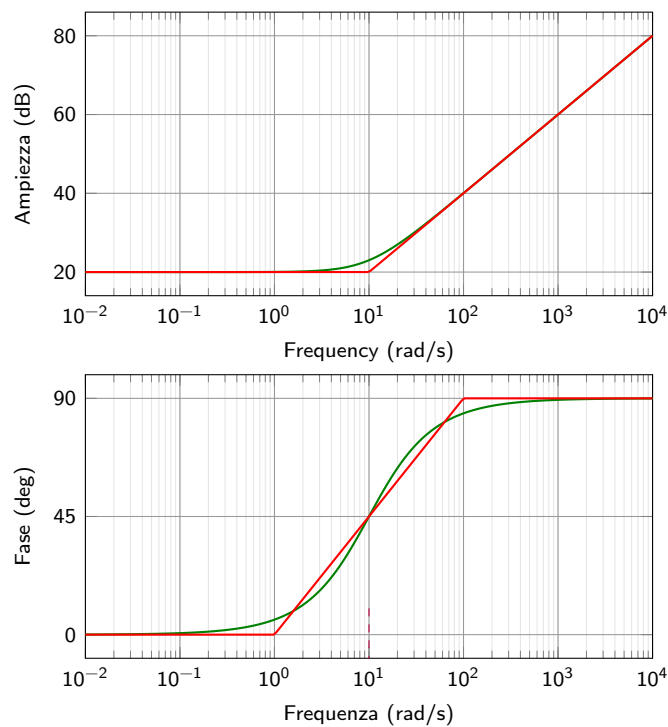


Figura 111: Diagramma di Bode di uno zero reale:  $(1 + \frac{s}{10})^1$

La formula generale per calcolare l'ampiezza e la fase è:

- $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega) = 0$$

$$\phi(\omega) = 0$$

- $\omega \gg \omega_0$

$$A(\omega) = 20 \cdot \log_{10} (\omega|\tau|)^\mu$$

$$= 20 \cdot \mu (\log_{10}(\omega) + \log_{10}(|\tau|))$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(\omega\tau)^\mu$$

$$= \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ$$

Il comportamento della decade prima e dopo si descrive come:

$$\text{Decade prima} = \left( \frac{\omega_0}{10}, 0^\circ \right)$$

$$\text{Decade dopo} = (10 \cdot \omega_0, \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ)$$

**Definizione 13.4.**

$$A(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega |\tau|) = 20 \cdot \mu (\log_{10}(\omega) + \log_{10}(|\tau|)) & \omega > \omega_n \end{cases}$$

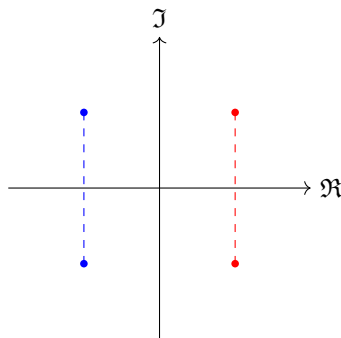
$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

La fase non cambia drasticamente.

Si prende  $(\frac{\omega_n}{10}, 0^\circ)$  e  $(10\omega_n, \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ)$  e si traccia una retta tra i due punti.

**13.5.4 Polo o zero complesso coniugato**

$$H(s) \rightarrow \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$$



I valori sono a coppie. Bisogna considerare sia la pulsazione naturale  $\omega_n$  che il coefficiente di smorzamento  $\zeta$ .

Consideriamo un polo:

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

se la portiamo in forma di bode abbiamo:

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

Si può passare a  $s = j\omega$  per ottenere:

$$\frac{1}{1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fattorizzando si ottiene:

$$\Re = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Im = \frac{-2j \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Consideriamo i seguenti casi:

- $\omega \ll \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20 \log_{10}(\sqrt{1}) = 0$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(0) = 0$$

- $\omega = \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(2\zeta)$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

Si distinguono 4 casi:

- $\zeta = 0.5$

$$A = 0$$

- $\zeta > 0.5$

Il grafico passa per  $\omega_0$

- $\zeta < 0.5$

Si presenta un picco di risonanza

- $\zeta = 0$

Si ha una discontinuità

- $\omega \gg \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

$$= -40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2} \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$= \text{atan2}(+\infty) = -180^\circ$$

È una retta che decresce di 40 dB/decade.

Prendiamo ad esempio il polo:

$$\left( 1 + 2j \left( \frac{1}{5} \right) \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{4} \right)^{-1}$$

con:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \zeta &= \frac{1}{5} \\ \omega_n &= 2\end{aligned}$$

Il picco di risonanza si calcola come:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 1.92$$

Più  $\zeta$  è piccolo, più il picco di risonanza diventa grande.

La massima ampiezza si calcola come:

$$M_r = 20 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left( 2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) = 8.14$$

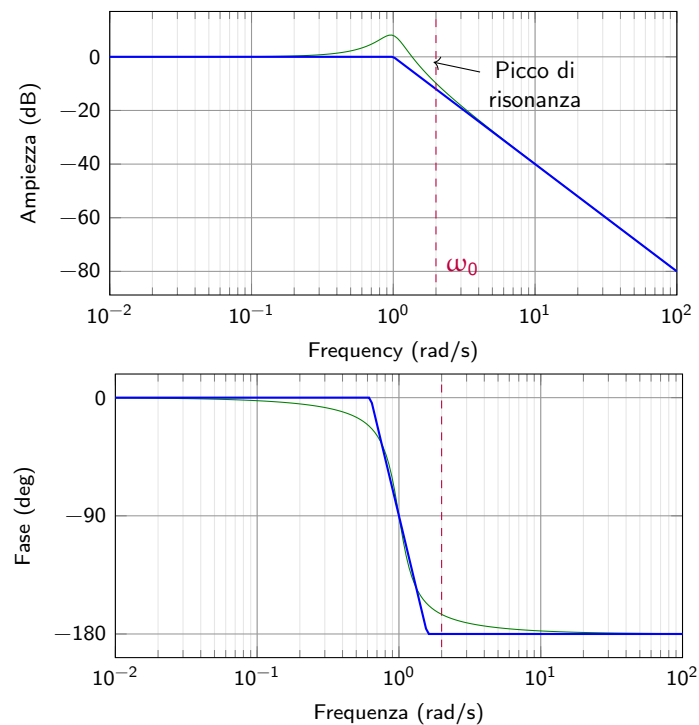


Figura 112: Diagramma di Bode di un polo complesso coniugato

Le formule generali per calcolare l'ampiezza e la fase sono:

- $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega) = 0$$

$$\phi(\omega) = 0$$

- $\omega \gg \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = 40 \cdot \mu (\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_n)$$

$$= 40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad \phi(\omega) = \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ$$

Si distinguono 4 casi:

–  $\zeta = 0$

Si ha un asintoto verticale in  $A(\omega)$  in  $\omega_n$

–  $0 < \zeta < 0.5$

Si ha un picco di risonanza che vale:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

e una massima ampiezza di:

$$M_r = 20 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left( 2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

Il picco di risonanza si trova in  $(\omega_r, M_r)$

–  $\zeta = 0.5$

Si ha che  $A(\omega) = 0$

–  $0.5 < \zeta < 1$

Passa sotto il grafico asintotico

### Definizione 13.5.

$$A(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 40 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) = 40 \cdot \mu [\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_n)] & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Per la transizione di fasi bisogna calcolare:

$$\left( \frac{1}{5^{|\zeta|}} \cdot \omega_n, 0^\circ \right); \left( 5^{|\zeta|} \cdot \omega_n, \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ \right)$$

oppure

$$\left( \frac{\omega_n}{10}, 0^\circ \right); (10 \cdot \omega_n, \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ)$$

e si traccia la retta che li collega.

Se  $0 < \zeta \leq \frac{1}{2}$  c'è un picco di risonanza,

$$(\omega_r, \mu_r)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = 20 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left( 2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

### 13.5.5 Esempio

**Esempio 13.9.** Prendiamo in considerazione la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 (s + 1) (s^2 + 3s + 16)}{2s - 1}$$

1. Portare in forma di bode:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 64 = -55 < 0$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2(1) \left(1 + \frac{s}{1}\right)^1 (16) \left(\frac{16}{16} + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)^1}{(-1) \left(+1 - \frac{2}{1}s\right)^1} \\ &= -16 \frac{s^2(1+s) \left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)}{(1-2s)} \end{aligned}$$

Disegniamo  $k_b$

$$A = 20 \cdot \log_{10}(|-16|) = 24$$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } -16 > 0 \\ -180^\circ & \text{se } -16 < 0 \end{cases} = -180^\circ$$

Disegniamo  $(1+s)$

$$\mu = 1$$

$$\tau = 1$$

$$\omega = \frac{1}{|\tau|} = 1$$

$$A = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 20 \cdot \mu \log_{10}(\omega |\tau|) = 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Disegniamo  $s^2$

$$\mu = 2$$

$$A = 20 \cdot \mu \log_{10}(\omega) = 40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$$

$$\phi = \mu \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

Disegnamo  $\left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)$

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \omega_n &= \sqrt{16} = 4 \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} &= \frac{3}{16} \rightarrow \zeta = \frac{3}{16} \cdot \frac{\omega_n}{2} = \frac{3}{8} \\ A &= \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 40 \cdot \mu \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega > \omega_n \end{cases} \\ \omega_r &= \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 3.5 \\ M_r &= 20 \cdot \mu \log_{10}\left(2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}\right) = 8.14 \\ \phi &= \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 180^\circ \cdot \mu \cdot \text{segno}(\zeta) = 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}\end{aligned}$$

Disegnamo  $(1 - 2s)$

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \tau &= -2 \\ \omega_n &= \frac{1}{|\tau|} = \frac{1}{2} \\ A &= \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 20 \cdot \mu \log_{10}(\omega |\tau|) = 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} & \omega > \omega_n \end{cases} \\ \phi &= \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ = -90^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}\end{aligned}$$

## 13.6 Comportamento totale di Bode

Una volta disegnati i singoli grafici si sommano assieme:

**Esempio 13.10.** Riprendiamo l'esempio 13.9

1.

$$\begin{aligned}10^0 &\leftarrow \text{Zero reale e zero nullo} \\ 4 &\leftarrow \text{Zero complesso coniugato} \\ -0.5 &\leftarrow \text{Polo reale}\end{aligned}$$

Scriviamo una tabella con le decadi più vicine per vedere meglio l'andamento:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix} (0.1) \\ 10^{-1} \end{smallmatrix} & 0.5 & \begin{smallmatrix} (1) \\ 10^0 \end{smallmatrix} & 4 & \begin{smallmatrix} (10) \\ 10^1 \end{smallmatrix} \end{array}$$



2. Andiamo a calcolare il valore di ciascun termine dei valori trovati e sommiamo i contributi per ogni blocco Andamento in tabella:

| $\omega$                            | $10^{-1}$ | 0.5 | $10^0$ | 4   | $10^1$ |
|-------------------------------------|-----------|-----|--------|-----|--------|
| $k_b \frac{dB}{dec}$                | 0         | 0   | 0      | 0   | 0      |
| zero- $\mathbb{R}_1 \frac{dB}{dec}$ | 0         | 0   | 0      | 20  | 20     |
| zero-nullo $_1 \frac{dB}{dec}$      | 40        | 40  | 40     | 40  | 40     |
| zero-cc $_1 \frac{dB}{dec}$         | 0         | 0   | 0      | 0   | 40     |
| Polo- $\mathbb{R}_1 \frac{dB}{dec}$ | 0         | 0   | -20    | -20 | -20    |
| Totale                              | 40        | 40  | 20     | 40  | 80     |

3. Si fa il grafico delle ampiezze considerando gli omega che abbiamo calcolato:

| $\omega$   | $10^{-1}$ | 0.5 | $10^0$ | 4   | $10^1$ |
|--|-----------|-----|--------|-----|--------|
| $k_b (dB)$   | 24        | 24  | 24     | 24  | 24     |
| zero- $\mathbb{R}_1 (20 \cdot \log(\omega \cdot  \tau ), \tau = 1)$                      | 0         | 0   | 0      | 12  | 20     |
| zero-nullo $_1 (40 \cdot \log(\omega))$  | -40       | -12 | 0      | 24  | 40     |
| zero-cc $_1 (40 \cdot \log(\frac{\omega}{\omega_n}), \zeta = \frac{3}{8}, \omega_n = 4)$ | 0         | 0   | 0      | 0   | 16     |
| Polo- $\mathbb{R}_1 (-20 \cdot \log(\omega \cdot  \tau ), \tau = -2)$                    | 0         | 0   | -6     | -18 | -26    |
| Totale (dB)  | -16       | 12  | 18     | 42  | 74     |

4. Si fa il grafico delle fasi facendo lo stesso ragionamento fatto per le ampiezze, ma considerando solo il valore asintotico:

| $\omega$             | $10^{-1}$ | 0.5  | $10^0$ | 4    | $10^1$ |
|----------------------|-----------|------|--------|------|--------|
| $k_b$                | -180      | -180 | -180   | -180 | -180   |
| zero- $\mathbb{R}_1$ | 0         | 0    | 0      | 90   | 90     |
| zero-nullo $_1$      | 180       | 180  | 180    | 180  | 180    |
| zero-cc $_1$         | 0         | 0    | 0      | 0    | 180    |
| Polo- $\mathbb{R}_1$ | 0         | 0    | 90     | 90   | 90     |
| Totale               | 0°        | 0°   | 90°    | 180° | 360°   |