Esame 22/06/23

DOMANDA 1 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Un esperimento fornisce i seguenti risultati numerici: 1,4,5,5,15. I valori di media e mediana sono rispettivamente:

a) 6 e 5 [✓]
b) 5 e 6
c) 5 e 5
d) 4 e 5
e) Non rispondo

$$m = \frac{1+4+5\cdot 2+15}{5} = 6$$

$$M = 5$$

DOMANDA 2 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Si consideri l'esperimento aleatorio relativo al lancio di due dadi a sei facce. Consideriamo gli eventi A = "almeno un dado dà un punteggio maggiore o uguale a 4" e B = "la somma dei due punteggi è 4". Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $A^C \cap B$ = “il punteggio di un dado è 3 e l'altro è 1”
b) $A \cap B^C$ = “il punteggio di un dado è 3 e l'altro è 1”
c) $B \subseteq A^C$ [✓]
d) $B^C \subseteq A$
e) Non rispondo

$B \subseteq A^C \rightarrow$ "Se la somma dei 2 dadi é 4, allora nessun dado ha un punteggio maggiore o uguale a 4"

DOMANDA 3 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Due eventi A e B sono indipendenti, e tali che $\mathbb{P}(A^C) = {}^1/_3$, $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^5/_6$. Allora $\mathbb{P}(B)$ vale:

a) 1/3
b) 1/2 [✓]
c) 2/3
d) 1/6
e) Non rispondo

$$P(A^c) = \frac{1}{3} \quad P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)(1 - P(A))$$

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}}{1/3} = \frac{1}{\cancel{6}_2} \cdot \cancel{3}^1 = \frac{1}{2}$$

DOMANDA 4 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ, e supponiamo che $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1)$. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a) $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$
b) $\lambda = 2$
c) $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 1 / 2$
d) $\lambda = 1$ [✓]
e) Non rispondo

$$P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^0}{0!} = \cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^1}{1!}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{\lambda}{1}$$

$$\lambda = 1$$

DOMANDA 5 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Si consideri un campione casuale $X_1,\ldots,X_n$ di ampiezza 'n', dove X_i indica il peso di un individuo di una data popolazione di animali, e si supponga che sia stato estratto da una popolazione normale di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, entrambi ignoti. Supponendo di aver osservato un campione di n=10 dati, tale per cui $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 50$ e $\sum_{i=1}^{10} x_i = 20$, allora la stima di massima verosimiglianza per la varianza è:

- Risposta aperta: 1

$$S^2_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{10} \sum_{1}^{10} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{10} \left(\sum_{1}^{10} x_i^2 - 2 \sum_{1}^{10} x_i \cdot \sum_{1}^{10} \bar{x} + \sum_{1}^{10} \bar{x}^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \left(\sum_{1}^{10} x_i^2 - 2 \sum_{1}^{10} x_i \cdot \frac{\sum_{1}^{10} x_i}{n} + \frac{\left(\sum_{1}^{10} x_i\right)^2}{n} \right) = \frac{1}{10} \left(50 - 2 \cdot 20 \cdot \frac{20}{10} + \frac{20^2}{10} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} (50 - 80 + 40) = \frac{50-40}{10} = 1$$

DOMANDA 6 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Sia $X_1,\dots,X_5$ un campione aleatorio di taglia 5 estratto da una distribuzione di Poisson di parametro incognito λ. Si considerino i seguenti stimatorio per λ:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5} \qquad T_2 = \frac{X_1 + X_5}{2} \qquad T_3 = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{6}$$

a) $MSE(T_1) < MSE(T_3) < MSE(T_2)$ [✓]
b) $MSE(T_2) < MSE(T_3) < MSE(T_1)$
c) $MSE(T_3) < MSE(T_2) < MSE(T_1)$
d) $MSE(T_1) < MSE(T_2) < MSE(T_3)$
e) Non rispondo

$$MSE(T) = Var(T) + b^2(T) \qquad b(T) = E(T) - \lambda$$

$$MSE(T_1) = Var(T_1) + (E(T_1) - \lambda)^2 =$$

$$= Var\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}\right) + \left(E\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}\right) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{25}\sum_1^5 Var(X_i) + \left(\frac{1}{5}\sum_1^5 E(X_i) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{25} 5\lambda + \left(\frac{5\lambda}{5} - \lambda\right)^2 = \frac{5}{25}\lambda + 0 = \frac{\lambda}{5}$$

$$MSE(T_2) = Var(T_2) + (E(T_2) - \lambda)^2 =$$

$$= Var\left(\frac{X_1+X_5}{2}\right) + \left(E\left(\frac{X_1+X_5}{2}\right) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_1^2 Var(X_i) + \left(\frac{1}{2}\sum_1^2 E(X_i) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{2\lambda}{4} + \left(\frac{2\lambda}{2} - \lambda\right)^2 = \frac{\lambda}{2}$$

$$MSE(T_3) = Var(T_3) - (E(T_3) - \lambda)^2 =$$

$$= Var\left(\frac{X_1+2X_2+X_3+X_4+X_5}{6}\right) - \left(E\left(\frac{X_1+2X_2+X_3+X_4+X_5}{6}\right) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{36}\left(Var(x_1) + 4\,Var(x_2) + \sum_{3}^{6} Var(x_i)\right) - \left(\frac{1}{6}\left(E(x_1) + 2E(x_2) + \sum_{3}^{6} E(x_i)\right) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\lambda + 4\lambda + 3\lambda\right) - \left(\frac{1}{6}\left(\lambda + 2\lambda + 3\lambda\right) - \lambda\right)^2 =$$

$$= \frac{8\lambda}{36} - \left(\frac{6\lambda}{6} - \lambda\right)^2 = \frac{4}{18}\lambda = \frac{2}{9}\lambda$$

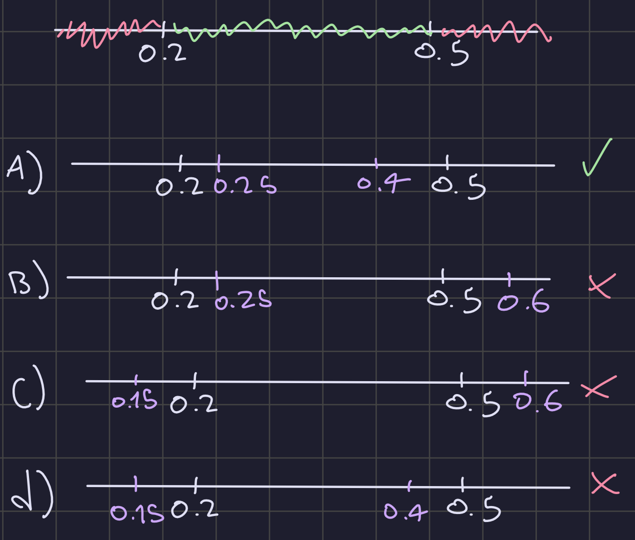
$$MSE(T_1) = \frac{\lambda}{5} \quad MSE(T_2) = \frac{\lambda}{2} \quad MSE(T_3) = \frac{2}{9}\lambda$$

$$MSE(T_1) \le MSE(T_3) \le MSE(T_2)$$

<u>DOMANDA 7</u> (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Vogliamo stimare la media incognita μ di una variabile aleatoria con distribuzione normale di varianza nota pari a 1. Usando un campione $x_1,\ldots,x_n$ estratto da tale distribuzione otteniamo l'intervallo di confidenza bilaterale al 99% pari a (0.2,0.5). Se ora, usando lo stesso campione, calcoliamo l'intervallo di confidenza bilaterale al 95%, quale dei seguenti risultati è il solo possibile?

a) (0.25,0.4) [✓]
b) (0.25,0.6)
c) (0.15,0.6)
d) (0.15,0.4)
e) Non rispondo



DOMANDA 8 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

Per verificare l'efficacia di un farmaco per il controllo dell'insulina viene utilizzato un gruppo di volontari. In una prima fase viene loro somministrata una sostanza inerte, in una seconda fase viene somministrato il farmaco. Quale tipo di test è opportuno usare per analizzare i dati?

a) Un test di confronto di medie per due pp. normali nel caso di campioni accoppiati [✓]
b) Un test sulla varianza di una popolazione normale
c) Un test "t" su una media di una popolazione normale
d) Un test di confronto di medie per due popolazioni normali indipendenti
e) Non rispondo

DOMANDA 9 (2 punti se giusta, -0.67 se errata)

La probabilità di successo in un gioco è ½. Qual è approsimativamente la probabilità di vincere almeno 60 volte in 100 ripetizioni indipendenti?

- Risposta aperta: 0,025 (soglia di errore al millesimo)

?