Esame 14/07/2023

ELETTROSTATICA

Si consideri un sistema di gusci sferici di raggi **R1=0.1cm, R2=0.9cm, R3=1cm** sulla cui superficie interna ~~R3~~ R1 è depositata una densità di carica **σ=10⁻¹⁰ C/m²**

1. Applicare il teorema di Gauss – giustificando ogni passaggio – per calcolare il campo elettrico **E**. Disegnare il grafico **E(r)** e le linee di campo.
2. Ricavare l'espressione del potenziale elettrostatico **V(r)** nella regione esterna.

$R_1 = 10^{-3}\ m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\ m$

$R_3 = 10^{-2}\ m$

$\sigma = \frac{Q}{sup} = 10^{-10}\ \frac{C}{m^2}$

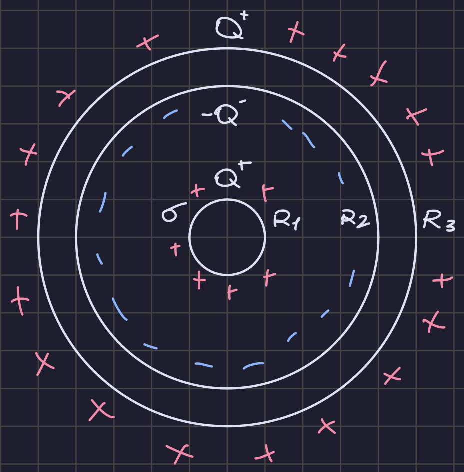
$Q = \sigma \cdot sup$

$= 10^{-10}\ \frac{C}{\cancel{m^2}} \cdot 4\pi R_1^2\ \cancel{m^2}$

$= 4\pi R_1^2 \cdot 10^{-10}\ C$

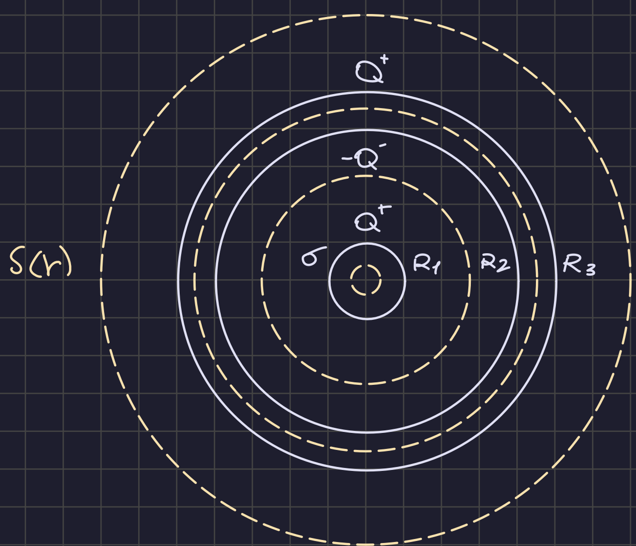
$= 4\pi \cdot 10^{-6-10}\ C$

$= 4\pi \cdot 10^{-16}\ C = 1.25 \cdot 10^{-15}\ C$



Th. Gauss: $\oint_{Sup} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{interne}}{\varepsilon_0}$

Per calcolare l'integrale scelgo una superficie Gauss su cui il campo è costante, in questo caso le superfici sono gusci sferici di raggio r: S(r).



Siccome il campo sulla superficie è costante si può tirare fuori dall'integrale.

$\oint_{S(r)} E(r)\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

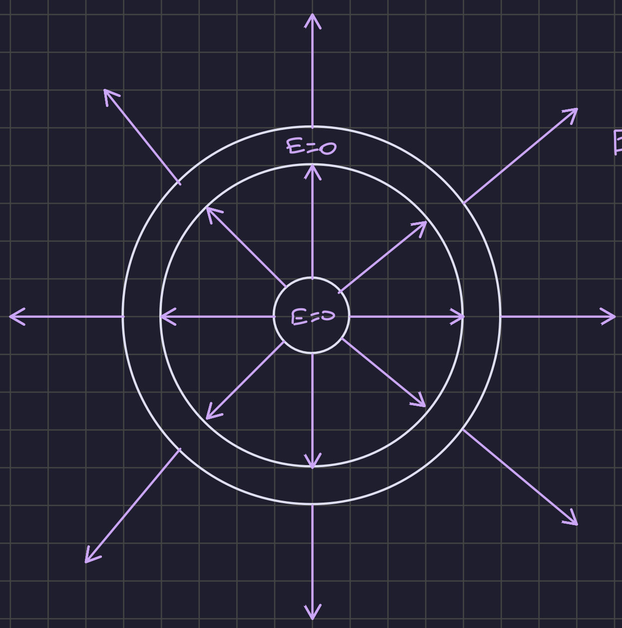
cost

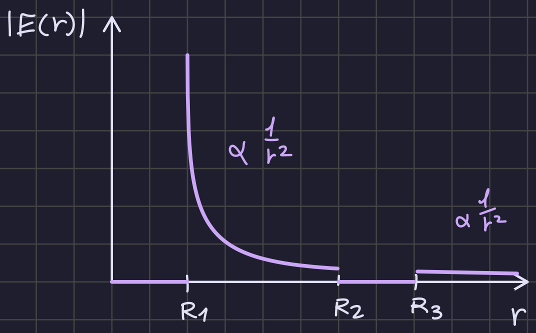
$$E(r)\oint_{S(r)} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La corrente si distribuisce soltanto sulla superficie

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \longrightarrow E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \vee R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} & \text{se } R_1 \le r \le R_2 \vee r \ge R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$





$$V(A) - V(B) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$$

Per calcolare il potenziale bisogna prendere un punto di riferimento r_0. Per calcolare il potenziale pongo prendo in considerazione il potenziale nel punto di riferimento a 0

$$V(r_0) = 0 \rightarrow r_0 = \infty$$

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\, dr$$

$$V(r) - 0 = -\int_{r_0}^{r} E(r)\, dr$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\, dr$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \left(-\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{r_0}} \right)$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \left(-\frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r} \quad V \qquad \text{se } r \geq R_3$$

Successivamente, sul conduttore esterno (R3) viene depositata la quantità di carica **Q=–10^{-10} C**.

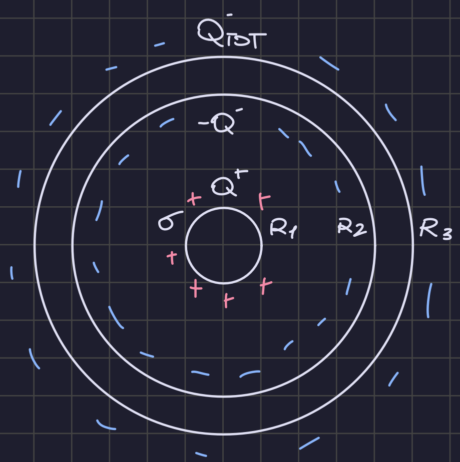
3. Descrivere la nuova situazione di equilibrio elettrostatico calcolando la distribuzione di carica – commentare anche la nuova situazione riguardo al campo elettrostatico.
4. Calcolare l'energia **U** del sistema e dire dov'è localizzata.

$$Q_{est} = -10^{-10} C$$

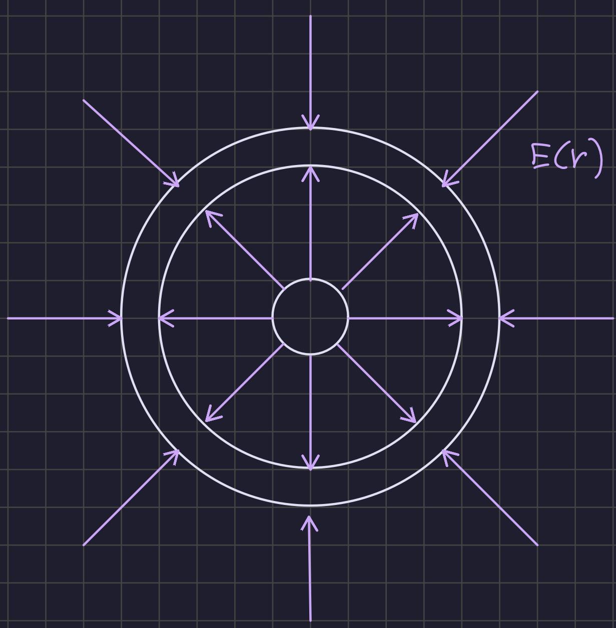
$$Q_{TOT} = Q_{est} + Q_{R3}$$

$$= -10^{-10} + 1.25 \cdot 10^{-15}$$

$$= -10^{-12} C$$



Le cariche all'esterno si sommano per il principio di sovrapposizione, mentre il sistema all'interno della cavità rimane invariato perchè il conduttore esterno agisce da gabbia di Faraday. La nuova carica esterna risulta negativa, quindi il campo all'esterno diventa radiale entrante.



Distribuzioni di carica:

$$\sigma_{R1} = \sigma_{R2} = 10^{-10}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_{R3} = \frac{Q_{TOT}}{4\pi R_3^2} = \frac{-10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-4}} = -\frac{1}{4\pi} \cdot 10^{-8} \approx -8 \cdot 10^{-10}\ \frac{C}{m^2}$$

L'energia di un sistema è il lavoro esterno per costruirlo

$$U = \int_{Vol} \mu_E\, d\tau = \int_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, d\tau \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

$$U_{TOT} = U_{int} + U_{EST}$$

$$U_{int} = \int_{Vol} \mu_E\, d\tau \qquad \left[\begin{array}{l} \tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ d\tau = 4\pi r^2\, dr \end{array}\right] \qquad U_{est} = \int_{Vol} \mu_E\, d\tau$$

$$= \int_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2\, d\tau \qquad\qquad = \int_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2\, d\tau$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{\varepsilon_0^2 4^2\pi^2 r^4} 4\pi r^2\, dr \qquad\qquad = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{\varepsilon_0^2 4^2\pi^2 r^4} 4\pi r^2\, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{\cancel{\varepsilon_0^2} \cancel{4^2}\cancel{\pi^2} \cancel{r^4}} \cancel{4\pi r^2}\, dr \qquad\qquad = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{\cancel{\varepsilon_0^2} \cancel{4^2}\cancel{\pi^2} \cancel{r^4}} \cancel{4\pi r^2}\, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr \qquad\qquad = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr \qquad\qquad = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \qquad\qquad = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$= -7.8 \cdot 10^{-20}\ [J] \qquad\qquad = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

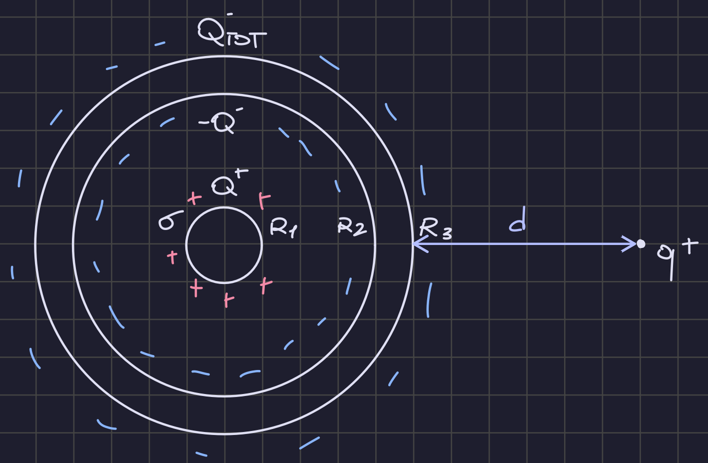
$$= 7 \cdot 10^{-19}\ [J]$$

$$U_{TOT} = -7.8 \cdot 10^{-20} + 7 \cdot 10^{-19} = 6.22 \cdot 10^{-19}\ [J]$$

L'energia è localizzata dove c'è campo, quindi in tutto lo spazio.

Una particella **q positiva** viene posizionata a distanza **d** dalla superficie esterna.

5. Ricavare (senza calcoli numerici) il lavoro del campo elettrico **L** per far compiere alla carica il suo percorso.



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\downarrow$$

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

$$L = \int_{R_3}^{R_3+d} qE(r)\,dr$$

$$= q\int_{R_3}^{R_3+d} E(r)\,dr$$

$$= q\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\int_{R_3}^{R_3+d} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{qQ}{\varepsilon_0 4\pi}\left(-\frac{1}{R_3+d} + \frac{1}{R_3}\right) [J]$$

(Il campo è conservativo $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$)

$$= -q\int_{R_3}^{R_3+d} \nabla V(r)\,dr$$

$$= -q\left(-V(R_3+d) + V(R_3)\right)$$

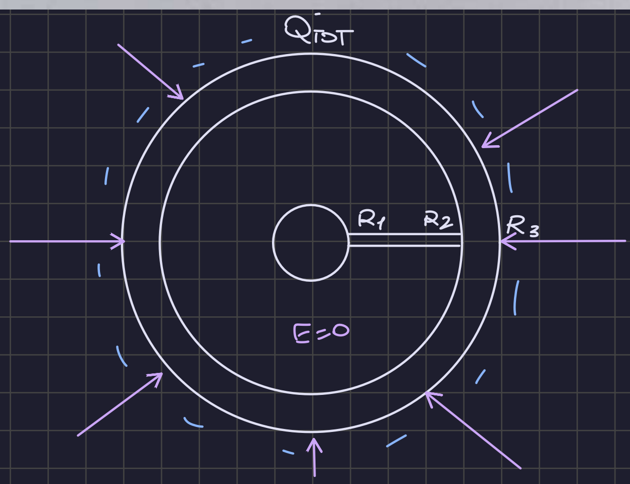
$$= q\left(V(R_3+d) - V(R_3)\right)$$

$$= q\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\cdot\frac{1}{R_3+d} - \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\cdot\frac{1}{R_3}\right)$$

$$= \frac{qQ}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{1}{R_3+d} - \frac{1}{R_3}\right) \quad [J]$$

I gusci R1 e R2 vengono messi in collegamento con un filo di rame.

6. Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare la capacità del sistema.



La carica che era depositata sulla superficie R_1 si sposta attraverso il filo e si distribuisce anche sulla superficie R_2, quindi non c'è più nessun campo indotto internamente.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$= \frac{Q}{V(R_3)}$$

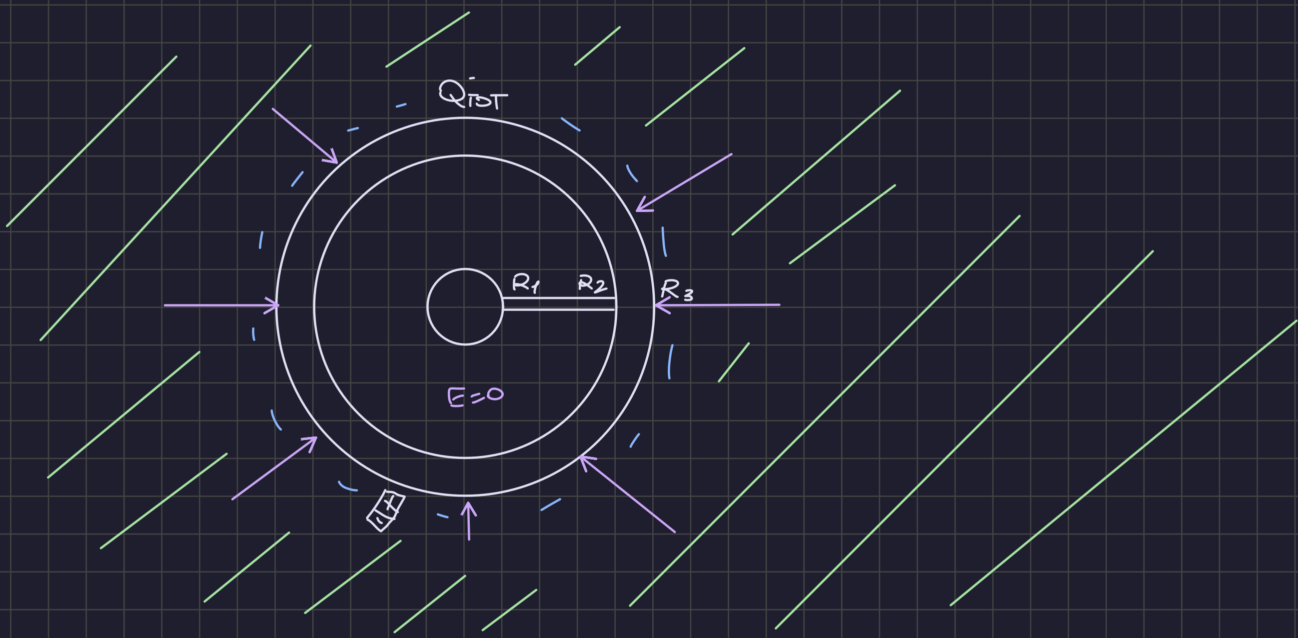
$$= \cancel{Q} \cdot \frac{\varepsilon_0 4\pi R_3}{\cancel{Q}}$$

$$= \varepsilon_0 4\pi R_3 \approx 1.1 \cdot 10^{-12} \quad [F]$$

Lo <u>spazio esterno</u> è riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K**

7. Calcolare il campo spostamento dielettrico **D** e le cariche di polarizzazione.
8. Ridiscutere brevemente il punto 4.

K =



$$\oint_{Sup} \vec{D}\, d\vec{S} = Q_{libere}$$

Per il teorema di gauss scelgo una superficie che renda D costante in modo da tirarlo fuori dall'integrale.
Le superfici sono gusci sferici di raggio r.

$$\oint_{S(r)} D(r)\, dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \oint_{S(r)} dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{libere}$$

$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{4\pi r^2}$$

$$\sigma_{pol} = \frac{Q(k-1)}{4\pi r^2 k} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Siccome internamente il campo è diventato nullo, allora l'energia interna del sistema è nulla, quindi l'energia totale del sistema è soltanto l'energia esterna.

MAGNETOSTATICA

Un cavo conduttore di raggio **R_1=2mm** è percorso da una corrente elettrica stazionaria **i=5mA** parallela all'asse e distribuita uniformemente sul volume.

1. Si mostri l'applicazione del teorema di Ampere:
   - disegnare le linee amperiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo magnetico **B** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **B(r)**
   - disegnare le linee di campo

$$R_1 = 2 \cdot 10^{-3} \ m$$

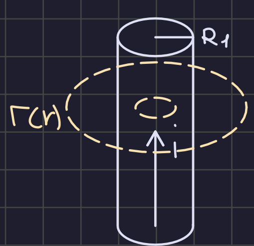
$$i = 5 \cdot 10^{-3} \ A$$

$$j = \frac{i}{sup} = \frac{i}{\pi R_1^2} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

$$i_c(r) = j \pi r^2$$
$$= \frac{i}{\cancel{\pi} R_1^2} \cancel{\pi} r^2$$
$$= i \frac{r^2}{R_1^2}$$

Thm Am $\quad \oint_\Gamma \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c$

Per calcolare l'integrale scelgo una linea amperiana che renda il campo magnetico costante, cioè dei cerchi di raggio r

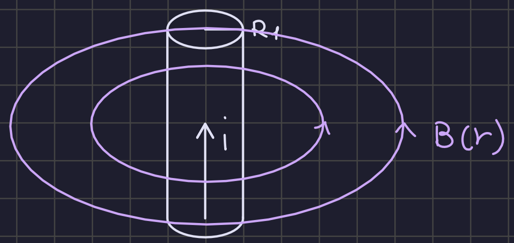


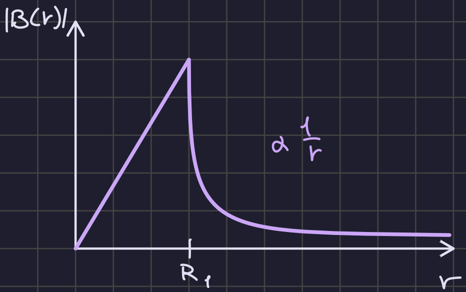
$$\oint_{\Gamma(r)} \overset{\text{cost.}}{B(r)} \, dr = \mu_0 \, i_c$$

$$B(r)\int_{\Gamma(r)} dr = \mu_0 i_c$$

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 i_c$$

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i_c}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} & \text{se } r < R_1 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{se } r > R_1 \end{cases} \qquad [T]$$





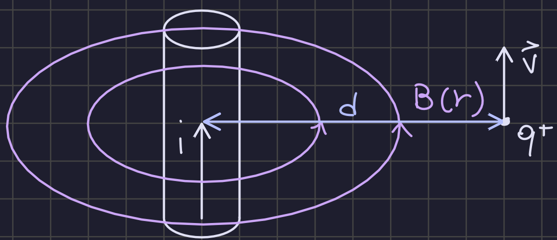
A distanza **d=5m** dall'asse del conduttore viene posta una particella carica **q=10^{-10} C** in moto con velocità **v=15ms^{-1}** in direzione parallela a quella della corrente del conduttore

2. Calcolare la forza **F** agente sulla particella (MODULO DIREZIONE VERSO!!!)

$q = 10^{-10}\,C$

$d = 5\,m$

$V = 15\,\frac{m}{s}$



La forza che agisce sulla carica è la forza di Laplace

$$\vec{F}_{Laplace} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

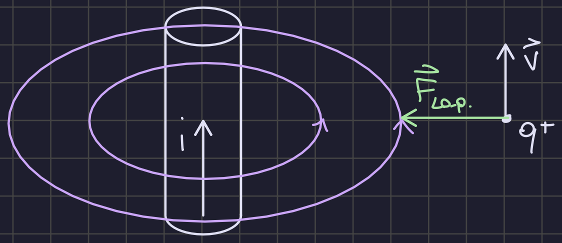
$$= 10^{-10}\cdot 15 \times B(d)$$

$$= 15\cdot 10^{-10}\,\frac{\mu_0 i_c}{2\pi d}$$

$$= 15\cdot 10^{-10}\cdot \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot i\,\frac{r^2}{R_1^2}}{10\pi}$$

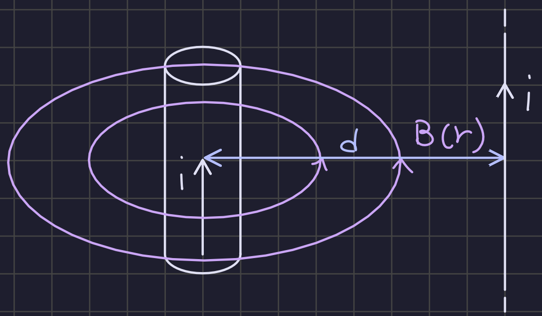
$$= 15\cdot 10^{-10}\cdot \frac{4\cancel{\pi}\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot\frac{25}{4\cdot 10^{-6}}}{10\cancel{\pi}}$$

$$= 1.9\cdot 10^{-12}\ [N]$$



In una diversa situazione, alla stessa distanza dall'asse del conduttore viene posto, parallelo ad esso, un filo di sezione trascurabile percorso dalla stessa corrente **i** .

3. Calcolare la forza **F** agente sul filo (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) e commentare le situazioni dei punti 2. e 3.



Legge di Laplace: $\vec{F}_{Laplace} = i\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$

Perché:

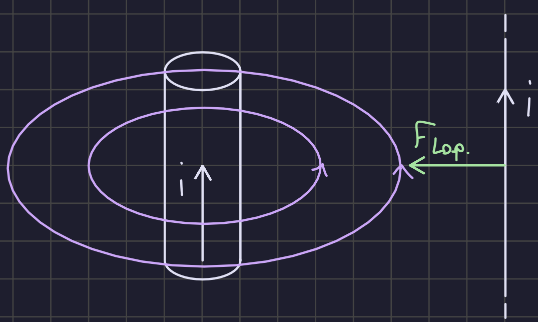
Una carica in moto genera una corrente, quindi le due cose sono equivalenti

$$F_{Laplace} = i d\vec{\ell} \times B(d) \qquad \ell = 1\,m$$

$$= i \frac{\mu_0 i_c}{2\pi d}$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{25}{4 \cdot 10^{-6}}}{10\cancel{\pi}}$$

$$= 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ [N]}$$

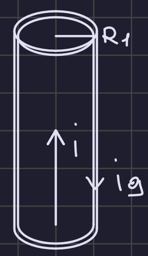


In una diversa situazione il cavo conduttore del punto 1 viene ricoperto da una guaina <u>aderente</u> in cui scorre una corrente **i=5mA** in direzione opposta a quella del volume.

4. Calcolare la densità di corrente sulla guaina e ridiscutere il campo magnetico del punto 1.

$i = 5 \cdot 10^{-3}$ A

$i_g = -5 \cdot 10^{-3}$ A



$$j_g = \frac{i_g}{\pi R_1^2} = -\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\pi\, 4 \cdot 10^{-6}} = -4 \cdot 10^{2}$$

$$i_{gc} = j_g \pi r^2 = \frac{i_g}{\cancel{\pi} R_1^2} \cancel{\pi} r^2 = \frac{i_g r^2}{R_1^2}$$

$$\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c$$

$$\int_{\Gamma(r)} B(r)\, dr = \mu_0 (i_c + i_{gc})$$

$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 (i_c + i_{gc})$$

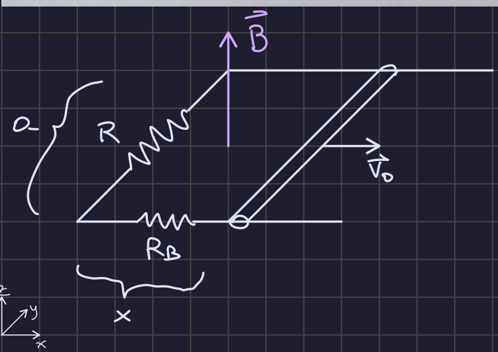
$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 (i_c + i_{gc})}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0\, i\, r}{2\pi R_1^2} & \text{se } r < R_1 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 (i + i_g)}{2\pi r} = 0 & r \geq R_1 \end{cases}$$

$[T]$

Il campo esterno è nullo perchè le due correnti si annullano

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Un circuito a U vincolato nel piano XY e formato da due binari paralleli ad X distanti **a=2cm,** ha una parte mobile libera di scorrere senza attrito, in direzione x. Nello spazio è presente un campo magnetico stazionario e uniforme **B=10^{-3}T** in direzione normale al circuito, uscente. Il tratto mobile viene tenuto in moto con velocità **v_0=3m/s** lungo x <u>costante</u>.
La resistenza del circuito a U è **R=5kΩ**, la resistenza della barretta è **R=2kΩ.** L'induttanza dell'intero circuito si può considerare costante e vale **L=1mH**.



$a = 2 \cdot 10^{-2}$ m

$B = 10^{-3}$ T

$V_0 = 3 \frac{m}{s}$

$R = 5 \cdot 10^3$ Ω

$R_B = 2 \cdot 10^3$ Ω

$L = 1 \cdot 10^{-3}$ H

1. Enunciare il teorema di Faraday

Il teorema di Faraday dice che la variazione di flusso del campo magnetico produce una forza elettromotrice indotta che si oppone alla variazione del flusso magnetico.

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad [V]$$

2. calcolare valore e verso della forza elettromotrice $\mathcal{E}$ indotta nella barretta

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot Sup$$

$$\downarrow$$

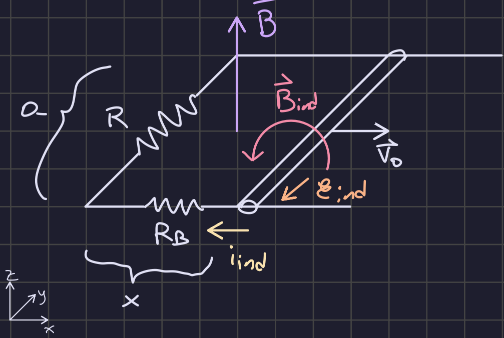
$$\Phi(B(r)) = Bax \ [wb]$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

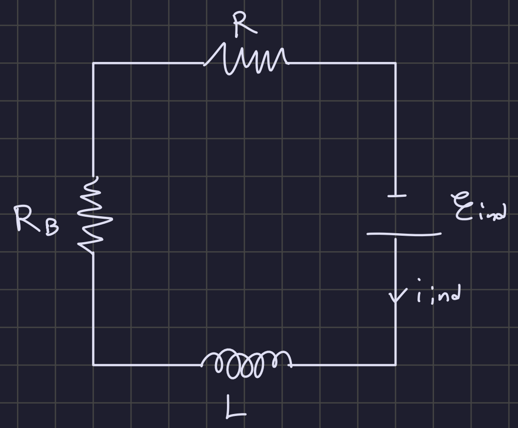
$$= -Bav$$

$$= -10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3$$

$$= -6 \cdot 10^{-5} \ [V]$$



3. Disegnare lo schema del circuito e scrivere la legge di ohm che lo rappresenta



Legge di Ohm: $i = \dfrac{V_R(t)}{R}$

4. Dare la legge di variazione della corrente **i(t)** riportandone un grafico

$i(t)$: esponenziale per arrivare a regime

Spegnimento:

$$-L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri}{L}$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int \frac{1}{i}di = -\int \frac{R}{L}dt$$

$$\ln|i| = -\frac{R}{L}t$$

Accensione

$$i(t)_s = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow i(t)_a = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

5. Discutere il bilancio energetico

$$P_R = V_R i$$
$$= Ri\,i$$
$$= Ri^2$$
$$= \cancel{R}\frac{\mathcal{E}^2}{R^{\cancel{2}}}$$
$$= \mathcal{E}^2$$
$$= 36 \cdot 10^{-10} \quad [W]$$

$$P_{\mathcal{E}} = V_{\mathcal{E}} i$$
$$= \mathcal{E}_{ind}\, i$$
$$= iRi$$
$$= Ri^2$$
$$= \mathcal{E}^2$$
$$= 36 \cdot 10^{-10} \quad [W]$$