Esame 29/06/2022

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

Si consideri un sistema di gusci sferici di raggi **R1=0.1cm, R2=0.9cm, R3=1cm** sulla cui superficie esterna R3 è stata depositata una carica **Q=+10^{-10} C**

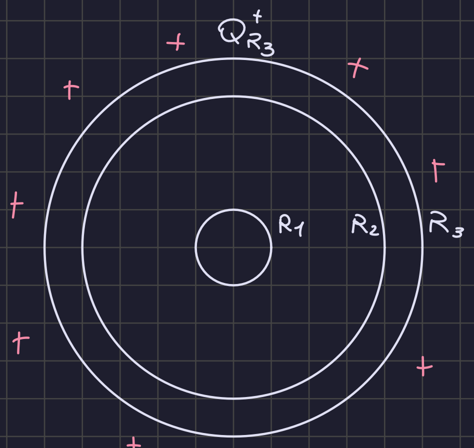
✓ 1. Applicare il teorema di Gauss – giustificando ogni passaggio – per calcolare il campo elettrico **E** *tracciando anche il grafico* **E(r)** *e disegnare le linee di campo*

$R_1 = 10^{-3}\ m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\ m$

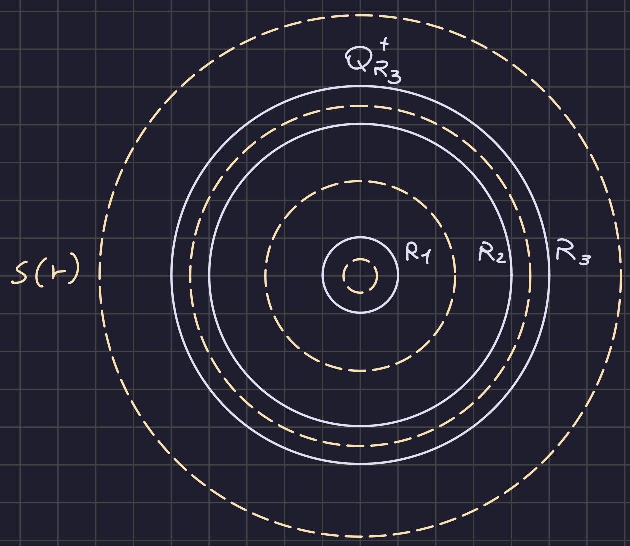
$R_3 = 10^{-2}\ m$

$Q_{R3} = 10^{-10}\ C$



Th Gauss $\quad \Phi = \oint_{sup} \vec{E}\, d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Per calcolare il campo elettrico con il teorema di Gauss bisogna scegliere delle superfici gaussiane su cui il campo è costante in modo da poterlo tirare fuori dall'integrale. In questo caso siccome la simmetria è sferica e il campo è radiale scelgo come superfici dei gusci sferici di raggio r



cost.

$$\oint_{s(r)} E(r)\, dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{s(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

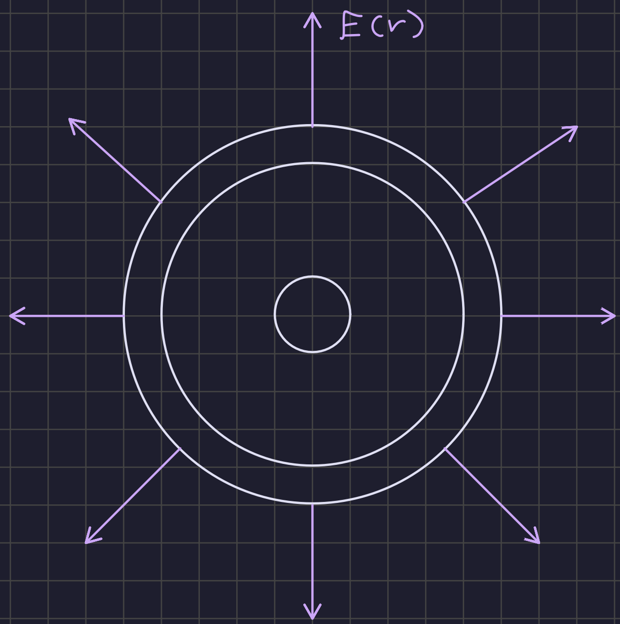
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

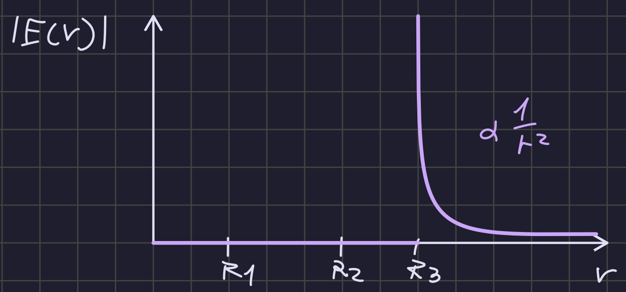
$$E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ Q_{R3} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ \dfrac{Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$





Successivamente, sul conduttore <u>interno</u> (**R1**) e sul conduttore <u>esterno</u> (**R3**) vengono depositate le stesse quantità di carica **Q=−10^{-10} C**.

✓ 2. calcolare la distribuzione di carica nella situazione di equilibrio

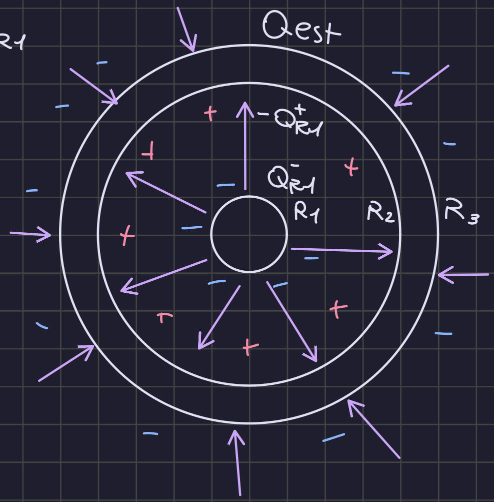
✓ 3. ricavare l'espressione del potenziale elettrostatico **V(r)** nella regione esterna

✓ 4. calcolare la forza agente su una particella puntiforme di carica **Q=2x10^{-10} C** posta a distanza **d=1m** dal sistema
(ovviamente: si trascuri l'induzione elettrostatica tra particella e sistema)*

✓ 5. calcolare il lavoro del campo elettrico per portare la carica **Q** al termine del suo percorso

$$Q_{R1} = -Q_{R3}$$

$$Q_{est} = Q_{R3} - Q_{R3} + Q_{R1}$$
$$= \cancel{Q_{R3} - Q_{R3}} - Q_{R3}$$
$$= -10^{-10}\,C$$



$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \vee R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{Q}{Sup}$$
$$\downarrow$$

$$\sigma_{R1} = \frac{Q_{R1}}{4\pi R_1^2} = \frac{-10^{-10}}{4\pi \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{-4\pi \cdot 10^{4}} = -8 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m}$$

$$\sigma_{R2} = \frac{-Q_{R1}}{4\pi R_2^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 9^2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9^2 \cdot 10^{4}} = 9.8 \cdot 10^{-8}\,\frac{C}{m}$$

$$\sigma_{R3} = \frac{Q_{est}}{4\pi R_3^2} = \frac{-Q_{R3}}{4\pi R_3^2} = \frac{-10^{-10}}{4\pi \cdot 10^{-4}} = -\frac{1}{4\pi \cdot 10^{6}} = -8 \cdot 10^{-8}\,\frac{C}{m}$$

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} \quad [V]$$

Per calcolare il potenziale bisogna prendere un punto di riferimento in cui il potenziale sia nullo. In questo caso lo prendo all'infinito:

$$r_0 = \infty \Rightarrow V(r_0) = 0$$

$$V(r) - \cancel{V(r_0)} = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,dr$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= \frac{-Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\,dr$$

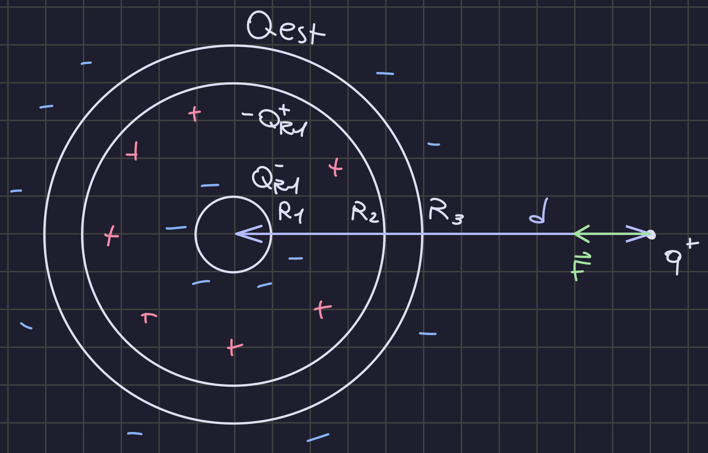
$$= \frac{Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r}$$

$$= \frac{Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{r_0}}\right)$$

$$= \frac{-Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{se } r \geq R_3 \quad [V]$$

$d = 1\ m$

$q = 2 \cdot 10^{-10} C$



$\vec{F} = q\vec{E} \quad [N]$

$\downarrow$

$F = qE(d)$

$= \dfrac{q\, Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = -1.8 \cdot 10^{-10}\ N$

$L = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad [J]$

$\downarrow$

$L = -\int_d^{R_3} qE(r)\, dr$

$= -\int_d^{R_3} \dfrac{q\, Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$

$= -\dfrac{q\, Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{d} \right)$

$= -\dfrac{q\, Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 (d - R_3)}$

$= 1.8 \cdot 10^{-10}\ [J]$

Nella nuova situazione il conduttore interno R1 viene poi collegato elettricamente alla parete R2.

V 6. descrivere il sistema nella nuova situazione di equilibrio e calcolare l'energia del sistema.

Il sistema all'esterno rimane invariato perchè la superficie esterna fa da gabbia di Faraday, mentre all'interno la carica depositata su R_1 si distribuisce su tutta la superficie, che ora comprende anche R_2, quindi non si forma alcuna carica indotta e il campo all'interno del sistema è nullo.

$$U_{tot} = U_{int} + U_{est} \qquad [J]$$

$$= 0 + U_{est}$$

$$= \int_{Vol} \mu_E \, d\tau \longrightarrow \tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \mu_E \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q_{est}^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \, \cancel{4\pi r^2} dr$$

$$= \frac{Q_{est}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_3}^{\infty}$$

$$= \frac{Q_{est}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{R_3}\right)$$

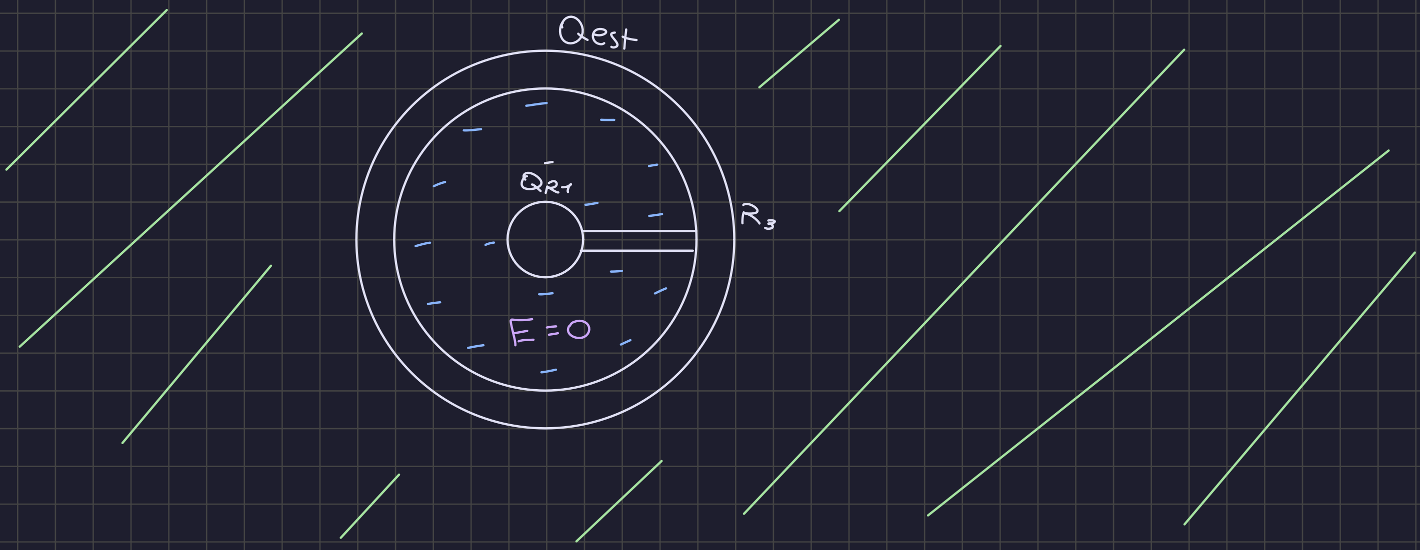
$$= \frac{Q_{est}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$= 4.5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Lo spazio esterno viene riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=2**

√ 7. calcolare il vettore spostamento elettrico **D** nello spazio

$K = 2$



Il vettore spostamento si calcola con il teorema di Gauss applicato ai dielettrici e come nel calcolo del campo elettrico bisogna scegliere delle superfici che rendano D costante per tirarlo fuori dall'integrale, anche in questo caso le superfici sono gusci sferici di raggio r

$$\oint_{sup} \vec{D}\,ds = Q_{libere}$$

$$\oint_{s(r)} D(r)\,dr = Q_{lib}$$

$$D(r)\oint_{s(r)} dr = Q_{lib}$$

$$D(r) = \frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$$

$$D(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ \dfrac{Q_{est}}{4\pi r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

ESERCIZIO DI MAGNETOSTATICA

Si consideri un solenoide toroidale di raggio interno **R=10cm**, composto da **N=10³** spire a sezione quadrata di lato **a=1cm**, percorso da una corrente elettrica stazionaria **i=1A**.

1. Calcolare applicando il teorema di Ampere – giustificando ogni passaggio – il campo magnetico **B** tracciando anche il grafico **B(r)** e disegnare le linee di campo
2. calcolare il flusso del campo magnetico concatenato con il sistema
3. calcolare il coefficiente di autoinduzione

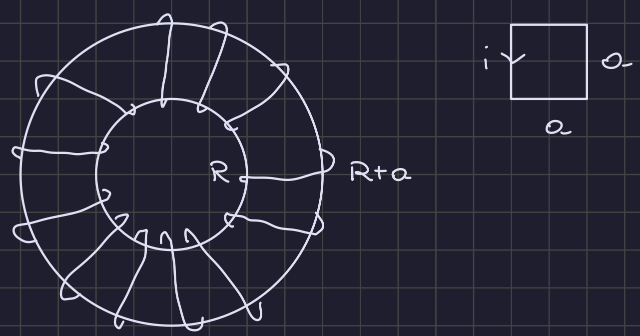
0.095

$R = 10^{-1}\ m$

$N = 10^{3}$

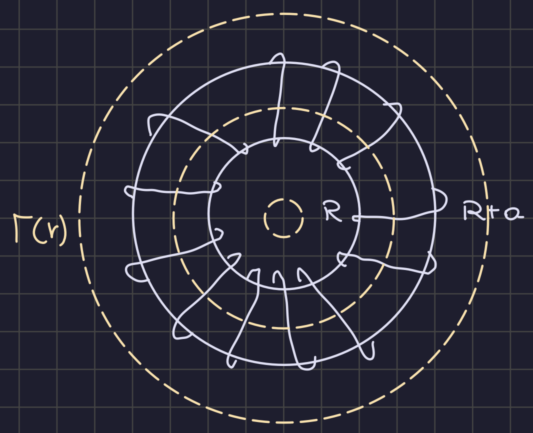
$a = 10^{-2}\ m$

$i = 1\ A$



Th Ampere: $\oint_{\Gamma} \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 \Sigma i_c \quad [T]$

Per calcolare il campo magnetico bisogna scegliere dei circuiti su cui il campo è costante chiamati linee amperiane. In questo caso le linee amperiane sono cerchi di raggio r



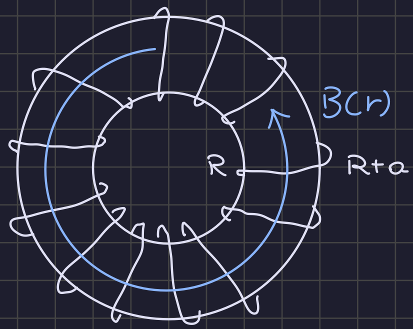
$$\oint_{\Gamma(r)} \overbrace{B(r)}^{cost}\, dr = \mu_0 N i_c$$

$$B(r) \oint_{\Gamma(r)} dr = \mu_0 N i_c$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 N i_c$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 N i_c}{2\pi r}$$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & se\ r < R \vee r > R+a \\ \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r} & se\ R \leq r \leq R+a \end{cases} \quad [T]$$



$$\Phi(B) = N\Phi_{spira} \quad [wb]$$

$$\phi_{spira} = \int_{spira} \vec{B}\, d\vec{S} \quad [wb]$$

$\downarrow$

$$\Phi_{spira} = \int_R^{R+a} B(r)\, a\, dr$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 N i a}{2\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

$$= 1.9 \cdot 10^{-7} \ wb$$

$$\Phi(B) = N \cdot \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

$$= 1.9 \cdot 10^{-4} \ Wb$$

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| = 1.9 \cdot 10^{-4} \ H$$