

# **Analisi 1**

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Numeri reali . . . . .	3
1.2	Maggiorante . . . . .	3
1.3	Minorante . . . . .	3
1.4	Estremo superiore . . . . .	4
1.5	Estremo inferiore . . . . .	4
1.6	Massimo . . . . .	4
1.7	Minimo . . . . .	5
1.8	Funzioni . . . . .	5
1.8.1	Dominio di una funzione . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Limiti</b>	<b>6</b>
2.1	Esempi . . . . .	8
2.2	Osservazioni . . . . .	10
2.3	Risultati utili per il calcolo dei limiti . . . . .	11
2.4	Forme indeterminate . . . . .	12
2.5	Esempi di calcolo di limiti . . . . .	12
2.6	Limiti razionali . . . . .	13
2.7	Limiti delle funzioni monotone . . . . .	13
2.7.1	Variante . . . . .	16
2.8	Limiti per $x \rightarrow -\infty$ . . . . .	17
2.9	Limiti per $x \rightarrow x_0$ . . . . .	17
2.10	Limiti unilateri . . . . .	19
2.11	Limiti di funzioni continue . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Notazione o piccolo di Landau</b>	<b>24</b>
3.1	Proprietà . . . . .	25
3.2	Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$ . . . . .	26
3.3	Funzioni continue . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Derivate</b>	<b>27</b>
4.0.1	Osservazioni . . . . .	28
4.1	Proprietà delle funzioni differenziabili . . . . .	29
4.2	Derivate delle funzioni inverse . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Derivate successive</b>	<b>35</b>
5.1	Funzioni convesse e concave . . . . .	35
5.2	Proprietà delle funzioni convesse (o concave) . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Teoremi</b>	<b>39</b>
6.1	Teorema dei carabinieri . . . . .	39
6.2	Teorema di Weiestrass . . . . .	39
6.2.1	Osservazioni . . . . .	40
6.2.2	Esempi . . . . .	41
6.3	Teorema degli zeri . . . . .	43
6.3.1	Esempi . . . . .	43
6.4	Teorema di Fermat . . . . .	45
6.4.1	Dimostrazione . . . . .	45
6.5	Teorema di Lagrange . . . . .	46

6.5.1	Dimostrazione . . . . .	47
6.5.2	Dimostrazione del corollario . . . . .	48

# 1 Introduzione

## 1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazionali; questo insieme viene indicato con il simbolo  $\mathbb{R}$

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- **1<sup>a</sup> proprietà (Eudosso-Archimede):** due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

**Assioma:** dati due numeri reali positivi  $a, b$  con  $0 < a < b$  esiste un intero  $n$  tale che  $na > b$ .

- **2<sup>a</sup> proprietà (Intervalli inscatolati):** date due serie di grandezze:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$ : la prima crescente (numeri della famiglia  $a$ ) e la seconda decrescente (numeri della famiglia  $b$ ), in cui ogni  $a_k$  è minore di  $b_k$  e tali che per ogni altra grandezza  $d$  si ha  $b_k - a_k < c$  per qualche  $k$ , allora esiste una grandezza  $c$  tale che per ogni  $k$   $a_k \leq c \leq b_k$ .

## 1.2 Maggiorante

### **Definizione 1.1**

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme di numeri reali. Un numero  $y \in \mathbb{R}$  è un maggiorante dell'insieme  $S$  se per ogni  $x \in S$  si ha che  $y \geq x$ .

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'intervallo tendesse verso  $+\infty$  non si sarebbe alcun maggiorante poichè  $+\infty$  non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$ : tutti i maggioranti sono quelli per  $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$ : tutti i maggioranti sono quelli per  $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ : non ha maggiorante

## 1.3 Minorante

### **Definizione 1.2**

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme di numeri reali. Un numero  $y \in \mathbb{R}$  è un minorante dell'insieme  $S$  se per ogni  $x \in S$  si ha che  $y \leq x$ .

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso  $-\infty$  non ci sarebbe alcun minorante poichè  $-\infty$  non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$ : tutti i minoranti sono quelli per  $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$ : tutti i minoranti sono quelli per  $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ : non ha minorante

## 1.4 Estremo superiore

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S$  è un insieme limitato superiormente con  $y \in \mathbb{R}$  estremo superiore di  $S$  se:

- $y$  è un maggiorante di  $S$
- $y$  è il più piccolo maggiorante di  $S$

Se  $S$  è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di  $S$  è  $\sup(S) = +\infty$ . Esempi:

- $I = (1, 10]$ :  $\sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$ :  $\sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ :  $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

## 1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S$  è un insieme limitato inferiormente con  $y \in \mathbb{R}$  estremo inferiore di  $S$  se:

- $y$  è un minorante di  $S$
- $y$  è il più grande minorante di  $S$

Se  $S$  è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di  $S$  è  $\inf(S) = -\infty$ . Esempi:

- $I = [1, 8)$ :  $\inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$ :  $\inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ :  $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

## 1.6 Massimo

### **Definizione 1.3**

*Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme reale, dove  $y \in \mathbb{R}$  è il massimo di  $S$  se  $y$  è l'estremo superiore di  $S$  e se  $y \in S$ .*

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con  $\max(S) = y$ .

## 1.7 Minimo

### **Definizione 1.4**

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme reale, dove  $y \in \mathbb{R}$  è il minimo di  $S$  se  $y$  è l'estremo inferiore di  $S$  e se  $y \in S$ .

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con  $\text{Min}(S) = y$ .

**Teorema 1** Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.

## 1.8 Funzioni

### **Definizione 1.5**

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:

$$f : A \rightarrow B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di  $A$  è associato uno e uno solo elemento di  $B$ .

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } f : A \rightarrow B$$

Esempio di funzione corretta:

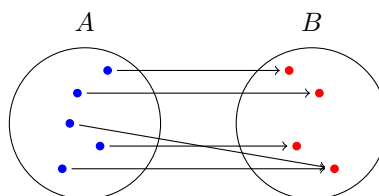


Figura 1: Esempio di funzione corretta

### 1.8.1 Dominio di una funzione

#### **Definizione 1.6**

Dato un insieme di partenza  $A$  gli elementi ai quali è applicata la funzione  $f$  sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \rightarrow x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

## 2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  il cui dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$  è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per  $x \rightarrow +\infty$  )

### **Definizione 2.1**

Sia  $L \in \mathbb{R}$ . Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A^a,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow L$  per  $x \rightarrow +\infty$  )

**La condizione deve essere soddisfatta per ogni  $\epsilon$  .**

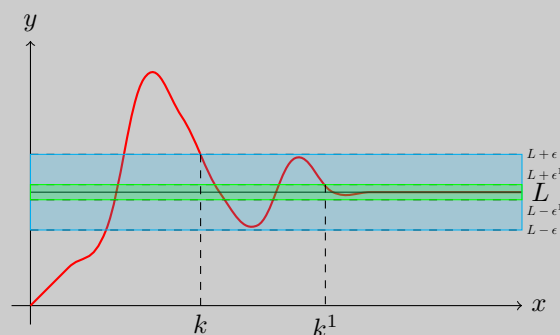


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di  $L$  e non uscirne più. Questo vale per ogni  $\epsilon$ , quindi anche per  $\epsilon^1$ .

<sup>a</sup>Il dominio della funzione

**Definizione 2.2**

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ )

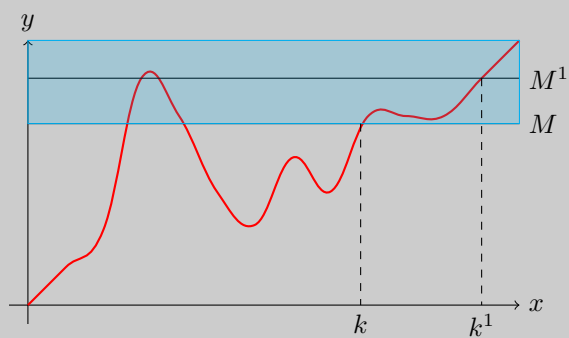


Figura 3: Definizione di limite a  $+\infty$



**Definizione 2.3**

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ )

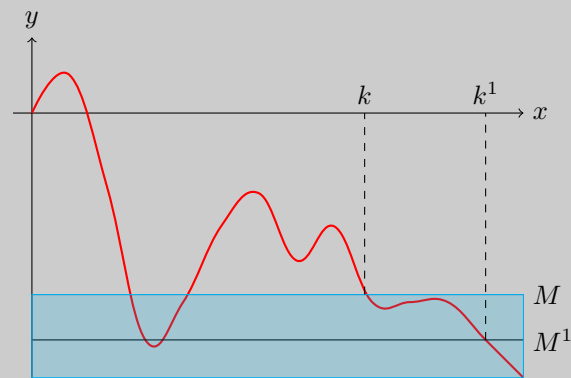


Figura 4: Definizione di limite a  $-\infty$

**2.1 Esempi****Esempio 2.1**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Dominio} = \mathbb{R}/\{0\}$$



Figura 5: Esempio di limite

*Sia dato  $\epsilon > 0$  arbitrario. Definisco  $k := \frac{1}{\epsilon}$ .  
Sia dato  $x > 0$  arbitrario, supponiamo  $x \geq k$ . Allora*

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

*Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con  $L = 0$ ).*

### **Esempio 2.2**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$



Figura 6: Esempio di limite a  $+\infty$

*Sia dato  $M > 0$  arbitrario. Definisco  $k := M$ .  
Sia dato  $x \geq k$ . Allora  $x \geq M$ .  
Quindi è verificata la definizione di limite.*

## 2.2 Osservazioni

**Non** è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$



Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intervallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.



Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

### 2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

**Teorema 2 (Algebra dei limiti)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente,  $f$  e  $g$  due funzioni.  $A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che i limiti

$$F := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

esistano e siano **finiti**. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende **parzialmente** nel caso  $F$  o  $G$  siano infiniti, secondo le regole seguenti:

- $F + \infty = +\infty$ ,  $F - \infty = -\infty$   $\forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty$ ,  $+\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty$ ,  $\forall F \in \mathbb{R}$ ,  $F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0$   $\forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty$   $\forall F \in \mathbb{R}$ ,  $F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di  $\infty$  è da determinare secondo la regola usuale.

## 2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succedere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $1^\infty$
- $0^0$
- $\infty^0$

**N.B.:** in questo contesto,  $0$ ,  $\infty$  e  $1$  sono da intendersi come abbreviazioni.

## 2.5 Esempi di calcolo di limiti

### *Esempio 2.3*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)$$
$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \rightarrow +\infty$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  (per il teorema dell'algebra dei limiti)

### *Esempio 2.4*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x^3}_{+\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{x}}_0 - 1 \right) \rightarrow -\infty$$

Per  $x \rightarrow +\infty$

### *Esempio 2.5*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x}_{+\infty} \left( \underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4 \right) \rightarrow +\infty$$

## 2.6 Limiti razionali

Se  $P$  è un polinomio di grado  $p$  e  $Q$  è un polinomio di grado  $q$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > q \\ 0 & \text{se } p < q \\ \text{coefficiente dominante di } P & \text{se } p = q \\ \text{coefficiente dominante di } Q & \text{se } p = q \end{cases}$$

## 2.7 Limiti delle funzioni monotone

**Teorema 3 (di monotonia)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona<sup>1</sup>. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ esiste e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce (nondecescente)} \\ \inf\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ decresce (noncrescente)} \end{cases}$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  è strettamente crescente e limitata (l'immagine di  $f$  è un insieme limitato).

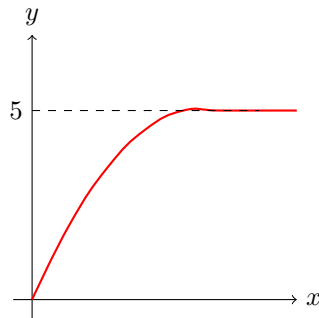


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente crescente e non limitata

---

<sup>1</sup>Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

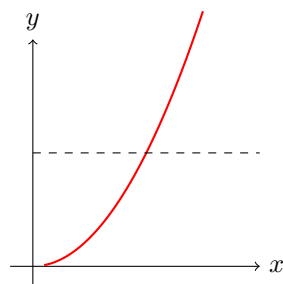


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

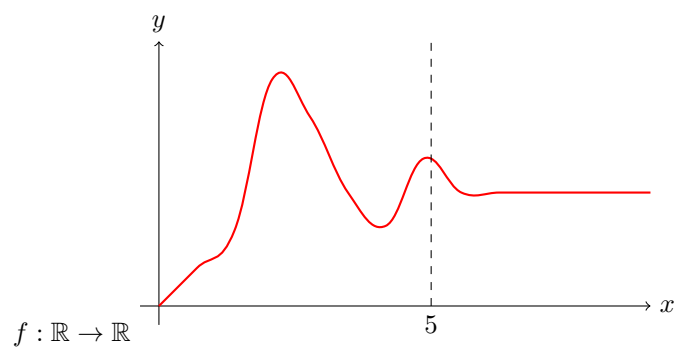


Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede per  $x > 5$  si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da  $x = 5$ .

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

### ***Esempio 2.6***

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

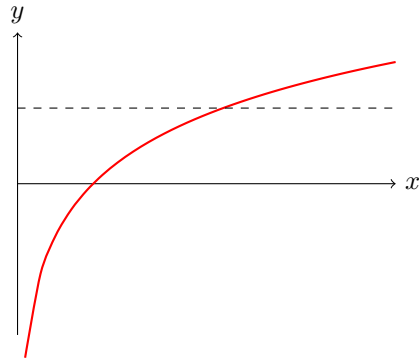


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

*Per il teorema di monotonia:*

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) &= \sup\{\log(x) : x > 0\} \\
 &\geq \sup\{\log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \text{ scelto arbitrariamente} \\
 &= \sup\{n \cdot \log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty
 \end{aligned}$$

*Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a  $+\infty$ .*



**Esercizio 2.1***Dimostrare che:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

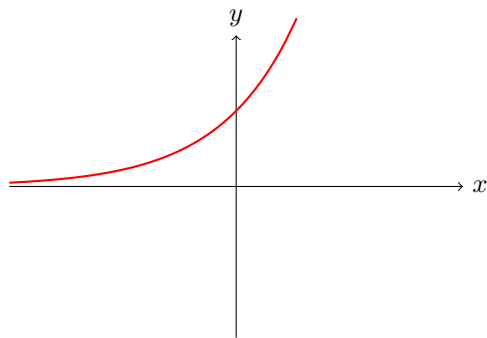


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

*E similmente che:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

**2.7.1 Variante**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non limitato superiormente e siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

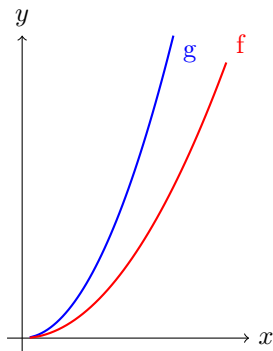


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

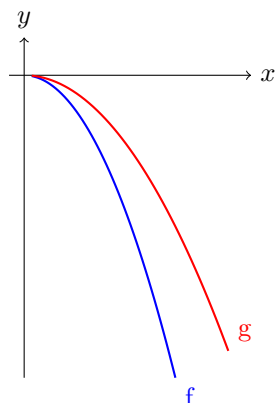


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative

## 2.8 Limiti per $x \rightarrow -\infty$

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato inferiormente,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Diremo che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-t) = L$$

$$x = -t$$

$$\text{se } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{allora } t \rightarrow +\infty$$

## 2.9 Limiti per $x \rightarrow x_0$

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Per definire il limite di  $f$  quando  $x \rightarrow 0$ , serve che  $f$  sia definita "vicino a  $x_0$ ", in un senso opportuno. Noi supporremo, ad esempio, che il dominio  $A$  contenga almeno un intervallo del tipo  $(x_0 - \delta, x_0)$  oppure  $(x_0, x_0 + \delta)$ , con  $\delta > 0$ . **Non** è richiesto, invece, che  $f$  sia definita in  $x_0$ .

### *Esempio 2.7*

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

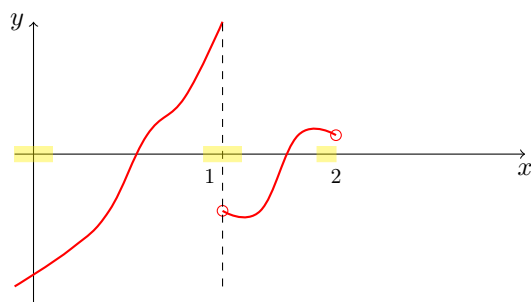


Figura 16: Limiti su una funzione non continua

*Posso definire*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

*Non è detto però che tali limiti esistano*

Sotto le ipotesi precedenti su  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e su  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dato  $L \in \mathbb{R}$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A, \\ x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0 \\ \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon \end{aligned}$$

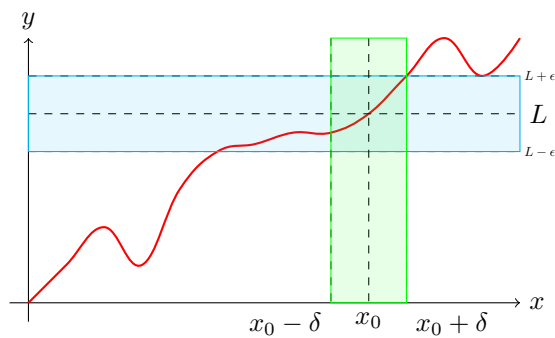


Figura 17: Limite a  $x_0$

Sotto le ipotesi precedenti su  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e su  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dato  $L \in \mathbb{R}$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \geq M$$



Figura 18: Limite a  $x_0$

Sotto le ipotesi precedenti su  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e su  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dato  $L \in \mathbb{R}$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \leq M$$

## 2.10 Limiti unilateri

Si possono anche dare le definizioni di limiti **unilateri**, da destra o da sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

### *Esempio 2.8*

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$



Figura 19: Limiti unilateri

## 2.11 Limiti di funzioni continue

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo oppure un'unione finita di intervalli.

### **Definizione 2.4**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ . Diremo che  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che  $f$  è continua se e solo se  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio  $x_0 \in A$ .

### **Esempio 2.9**

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua, perchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

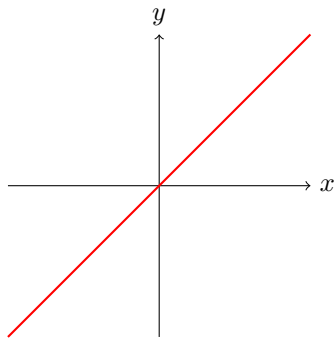


Figura 20: Esempio di funzione continua

**Esempio 2.10**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \neq 2 \\ 31 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Non è continua perchè

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2)$$

Però  $f$  è continua in tutti gli  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = x_0$$

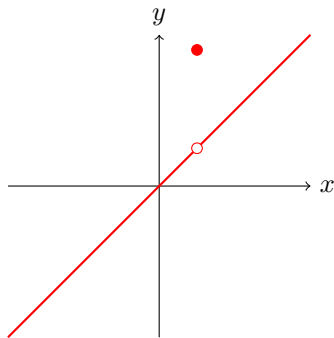


Figura 21: Esempio di funzione non continua

**Esempio 2.11**

$$h : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

*Il dominio è un'unione di 2 intervalli:*

$$(\mathbb{R}/0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

*È una funzione continua*



Figura 22: Esempio di funzione continua

### **Esempio 2.12**

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

*Questa funzione non è continua perché il limite a 0 non esiste:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = \nexists$$

*ma:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} |l(x)| = +\infty$$



Figura 23: Esempio di funzione non continua

***Esempio 2.13***

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

*Non è continua perchè:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \neq m(0)$$



Figura 24: Esempio di funzione non continua



### 3 Notazione o piccolo di Landau

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (F.I. \frac{0}{0})$$

Considero  $x > 0$

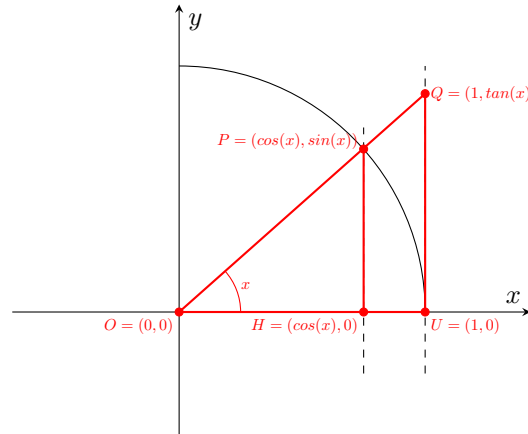


Figura 25: Grafico

Area del triangolo  $OHP$ :

- $\leq$  area del settore  $OUP$
- $\leq$  area del triangolo  $OUQ$

Area di  $OHP = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$

Area di  $OUQ = \frac{1}{2} \tan(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Area di  $OUP$  : area del disco unitario = ampiezza dell'angolo  $P\hat{O}U$ : ampiezza dell'angolo giro

da cui:

$$Area\ di\ OUP = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2}x$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Moltiplico per  $\frac{2}{\sin(x)}$  (assumendo che  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , così che  $\sin(x) > 0$ ):

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

da cui:

$$\underbrace{\cos(x)}_1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_1$$

per  $x \rightarrow 0^+$

Per il teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Il caso  $x \rightarrow 0^-$  è analogo.  $\square$

Se definiamo:

$$q(x) := \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

posso concludere che:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} = 1 + q(x) &\Leftrightarrow \sin(x) = x + xq(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} q(x) &= 0 \end{aligned}$$

### **Definizione 3.1**

**Notazione o piccolo di Landau.**

Diremo che:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se e solo se esiste una funzione  $q$  tale che:

$$f(x) = g(x)q(x) \quad (\forall x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = 0$$

Ad esempio, possiamo dire che:

$$\sin(x) = x + \underbrace{o(x)}_{g(x)q(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

## **3.1 Proprietà**

1.  $f(x) = o(1)$  per  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
2.  $o(g(x)) = g(x)o(1)$  per  $x \rightarrow x_0$
3.  $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$

Infatti,

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

e quindi

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x) \underbrace{(q_1(x) + q_2(x))}_{0 \text{ per } x \rightarrow x_0} = o(g(x))$$

4. Se  $k \in \mathbb{R}$  è una costante,

$$ko(g(x)) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

5.  $f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$

6. In generale, **non** vale

$$o(g(x)) - o(g(x)) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Infatti,

$$o(g(x)) - o(g(x)) = g(x)q_1(x) - g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

ma **non** è detto che  $q_1(x) = q_2(x)$ .

(Però è vero che  $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  )

7. Allo stesso modo, **non** è detto che

$$\frac{o(g(x))}{o(g(x))} = 1 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(forma indeterminata)

**È molto importante specificare  $x \rightarrow x_0$  .**

Ad esempio:

**Esempio 3.1**

$$\begin{aligned} x^2 &= o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ x &= o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

### 3.2 Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$  (con  $\alpha \in \mathbb{R}$  costante)
- $\sin(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

### 3.3 Funzioni continue

Proprietà:

1. Se  $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue, allora sono continue anche

$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$

(quest'ultima definita su  $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$  )

2. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$  sono funzioni continue tali che  $f(A) \subseteq B$ , allora è continua anche la funzione composta

$$g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

#### **Esempio 3.2**

*Sono funzioni continue:*

- tutti i polinomi
- tutte le funzioni razionali (quozienti di polinomi)
- $x \rightarrow x^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  costante, laddove ben definito
- $\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \dots$
- valore assoluto,  $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- funzioni composte, ad esempio:

$$h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) := \sin(x^3 + 5x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_2 : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(x) := \log(x^2 - 4) \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

## 4 Derivate

Sia  $A$  un intervallo aperto (del tipo  $A = (a, b)$  oppure  $A = (a, +\infty)$ ,  $A = (-\infty, a)$ ,  $A = \mathbb{R}$ ), oppure un'unione di intervalli aperti.

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ . **Retta tangente** al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ ?



Preso  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , il coefficiente angolare (pendenza) della retta secante il grafico nei punti  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

#### **Definizione 4.1**

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **differenziabile** (o derivabile) in  $x_0 \in A$  se e solo se esiste ed è finito il limite:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite è detto **derivata** di  $f$  in  $x_0$ .  $f$  si dice **differenziabile** (o derivabile) se e solo se è differenziabile in ogni punto del suo dominio.

#### **4.0.1 Osservazioni**

1. La retta tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  è definita come l'unica retta di pendenza  $f'(x_0)$  passante per  $(x_0, f(x_0))$ . Essa ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se vale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

che equivale a dire:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Quindi,  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

il che equivale (posto  $x = x_0 + h$ ) a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

**Esempio 4.1**

$$f = e^x, \quad x_0 = 0$$

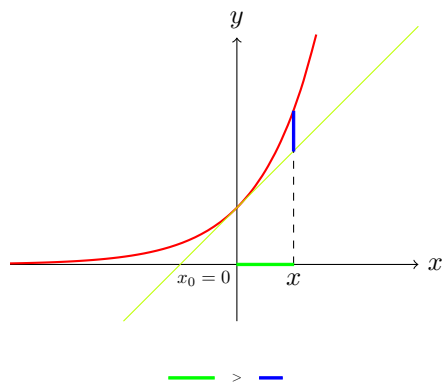


Figura 26: Esempio di funzione continua

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

dunque

$$e'^0 = 1$$

Che sarebbe il coefficiente di  $x$  nell'equazione  $e^x = 1 + x + o(x)$

Si può anche scrivere (Notazione di Leibnitz):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

**Esempio 4.2**

Una funzione costante è differenziabile con derivata

$$(5')(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 5}{h} = 0$$

## 4.1 Proprietà delle funzioni differenziabili

Dove non specificato, supporremo sempre che il dominio  $A$  sia un intervallo aperto o un'unione di intervalli aperti.

**Proprietà:** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

Dimostrazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0) \square$$

**Non** vale il viceversa:  $f$  può essere continua senza essere differenziabile.

**Esempio 4.3**

$$f(x) := |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$



Figura 27: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Le derivate destra e sinistra in  $x_0 = 0$  esistono e sono entrambe finite, ma sono **diverse** tra loro:  $f$  ha un **punto angoloso** in  $x_0 = 0$ .

**Esempio 4.4**

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

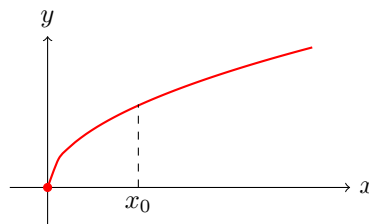


Figura 28: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Il limite (destro, in questo caso) del rapporto incrementale esiste, ma è infinito:  $g$  ha una **cuspid** o **punto a tangente verticale** in  $x_0 = 0$ .

**Definizione 4.2**

Un punto  $x_0 \in A$  si dice punto di  $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$  locale di una funzione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  se esiste  $\delta > 0$  tale che  $\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$  per ogni:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

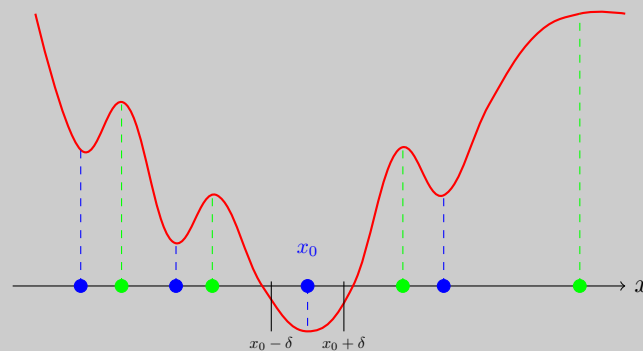


Figura 29: Teorema degli zeri



*I punti di massimo o minimo locale si chiamano anche **estremi locali**.*

## 4.2 Derivate delle funzioni inverse

### **Esempio 4.5**

Consideriamo

$$\begin{aligned} \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

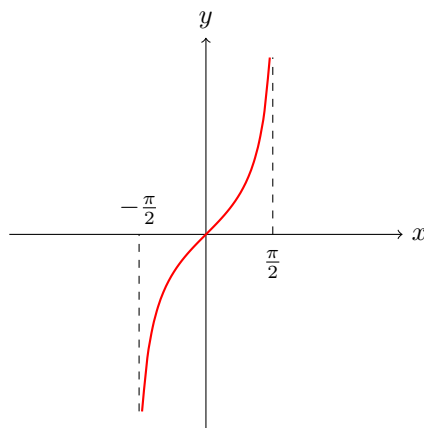


Figura 30: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La tangente è differenziabile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{(\sin)'(x)\cos(x) - (\cos)'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- La tangente è strettamente crescente, quindi iniettiva
- La tangente è suriettiva: per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , esiste

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ t.c. } \tan(x) = y$$

Infatti la tangente è continua e

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$$

Quindi il teorema degli zeri implica che esiste  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  t.c.  $\tan(x) = y$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  è biettiva, quindi per ogni  $y \in \mathbb{R}$  esiste un unico numero reale, che indicheremo  $\arctan(y)$ , tale che

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \arctan(y) < \frac{\pi}{2} \\ \tan(\arctan(y)) = y \end{cases}$$

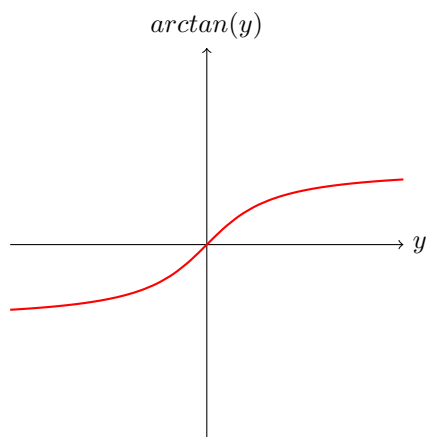


Figura 31: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La funzione  $\arctan$  è differenziabile? Se sì, chi è la sua derivata?

Supponiamo già di sapere che  $\arctan$  è differenziabile (è vero, ma andrebbe dimostrato)

$$\tan(\arctan(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Deriviamo ambo i membri:

$$\frac{d}{dy}(\tan(\arctan(y))) = 1$$

$$\frac{d}{dy}(\tan(\arctan(y))) = \tan'(\arctan(y)) \cdot (\arctan(y))'$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) &= (1 + (\tan(\arctan(y))))^2 \cdot (\arctan(y))' \\ &= (1 + y^2) \cdot (\arctan(y))' \end{aligned}$$

Dunque:

$$(1 + y^2)\arctan'(y) = 1$$

e quindi:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Quanto fatto ha validità più generale:

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile tale che  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Allora esiste la funzione inversa:

$$g : f(I) \rightarrow I$$

tale che  $f(g(y)) = y \forall y \in f(I)$ ,  $g(f(x)) = x \forall x \in I$

Inoltre,  $g$  è differenziabile e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

per ogni  $y \in f(I)$

**Esercizio 4.1**

Trovare le derivate delle funzioni:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

## 5 Derivate successive

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto, o un'unione di intervalli aperti. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se (e solo se)  $f$  è differenziabile e  $f'$  è differenziabile, si dice che  $f$  è differenziabile due volte. Si scrive  $f''$  per la derivata seconda di  $f$  (cioè la derivata di  $f'$ ).

Similmente si definiscono le funzioni differenziabili 3, 4, 5, ..., infinite volte. Notazione per le derivate successive:

$$f' = f^{(1)} = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

### 5.1 Funzioni convesse e concave

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo. Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$  se e solo se la corda tra due punti qualsiasi del grafico di  $f$  sta tutta  $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$  il grafico di  $f$ .

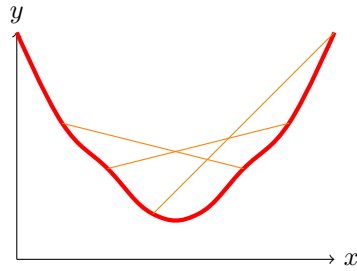


Figura 32: Funzione convessa

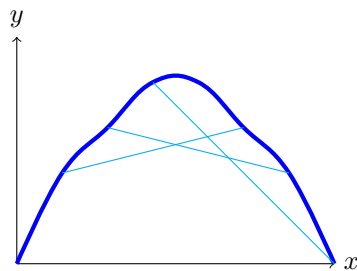


Figura 33: Funzione concava

In maniera equivalente,  $f$  è convessa se e solo se per ogni  $x \in I$ , ogni  $\bar{x} \in I$  ed ogni  $t \in [0, 1]$ , vale

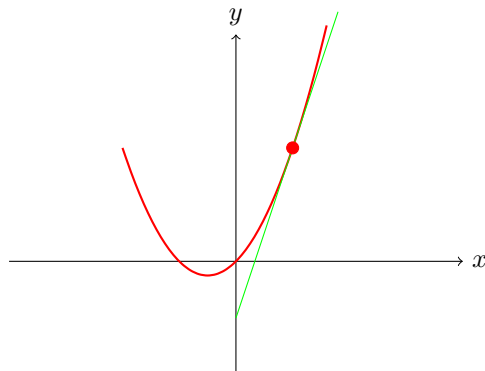
$$f(tx + (1 - t)\bar{x}) \leq tf(x) + (1 - t)f(\bar{x})$$

## 5.2 Proprietà delle funzioni convesse (o concave)

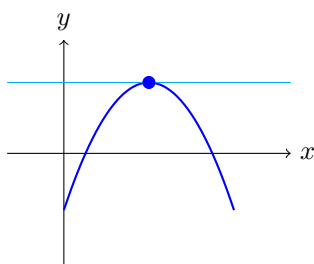
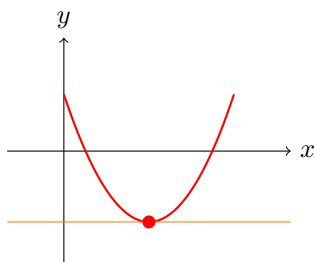
1. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile due volte.

Se  $\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$  in ogni punto di  $I$ , allora  $f$  è  $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$

2. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile e  $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$  e  $x_0 \in I$ , allora la retta tangente a  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$  sta tutta  $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$  il grafico di  $f$ .



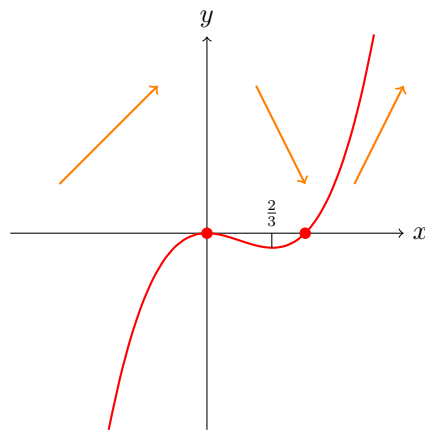
3. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile e
- $$\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases} \quad \text{e } x_0 \in I \text{ un punto critico di } f \text{ (} f'(x_0) = 0 \text{), allora } x_0 \text{ è}$$
- un punto di  $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$  di  $f$ .



4. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile due volte e  $x_0 \in I$  è tale che  $f'(x_0) = 0$  e
- $$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{allora } x_0 \text{ è un punto di } \begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases} \quad \text{locale per } f.$$

**Esempio 5.1**

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\f(x) &= x^3 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\f'(x) &= 3x^2 - 2x \\f''(x) &= 6x - 2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = 1 \\f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ oppure } x = 0 \\f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = \frac{2}{3} \\f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \leq 0 \text{ oppure } x \geq \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Quindi  $f$  è crescente in  $(-\infty, 0)$  e in  $(\frac{2}{3}, +\infty)$ ;  $f$  è decrescente in  $(0, \frac{2}{3})$ . In  $x = 0$  ho un punto di massimo locale, in  $x = \frac{2}{3}$  ho un punto di minimo locale.

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 2 \\f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\f''(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$f$  è convessa in  $(\frac{1}{3}, +\infty)$  e concava in  $(-\infty, \frac{1}{3})$ ;  $f$  ha  $x = \frac{1}{3}$  è un punto di flesso di  $f$ .

## 6 Teoremi

### 6.1 Teorema dei carabinieri

**Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente e siano  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$$

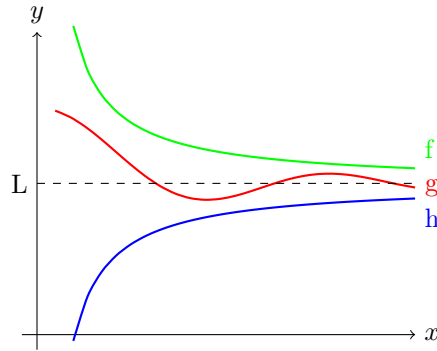


Figura 34: Teorema del confronto tra i limiti

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$$

Prendiamo dunque  $\epsilon > 0$  arbitrario. Poichè  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , sappiamo che esiste  $k_f > 0$  t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_f \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

Allo stesso modo, poichè  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ , sappiamo che esiste  $k_h > 0$  t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_h \rightarrow L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

Definiamo  $k := \max\{k_f, k_h\}$ . Comunque preso  $x \in A$ , se  $x \geq k$  allora vale che

$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

### 6.2 Teorema di Weiestrass



**Definizione 6.1***Teorema di Weierstrass*

Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.  
Allora esistono

$$x_{max}, x_{min} \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \forall x \in [a, b]$$

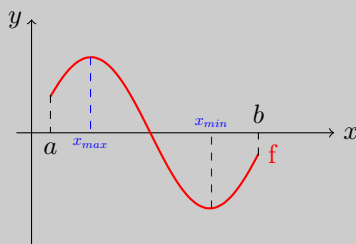


Figura 35: Teorema di Weierstrass

Ogni funzione continua, avrà quindi un punto di minimo e un punto di massimo

**6.2.1 Osservazioni**

- In particolare,  $f$  è limitata
- I punti  $x_{min}, x_{max}$  si dicono punti di minimo e di massimo **globali** di  $f$
- I punti di minimo e massimo globali possono essere non unici e coincidere con gli estremi  $a, b$  dell'intervallo

**Esempio 6.1**

$$\cos : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

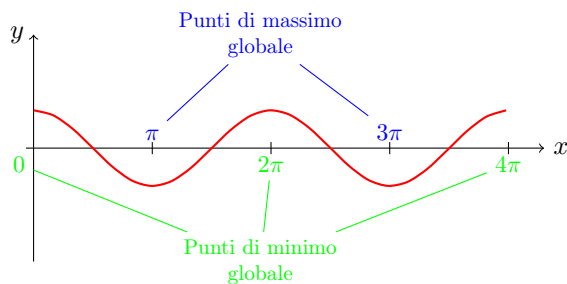


Figura 36: Teorema di Weierstrass

Se vengono meno le ipotesi del teorema, può venir meno la conclusione.

### 6.2.2 Esempi

#### **Esempio 6.2**

$$f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := x \quad \forall x \in (0, 1)$$

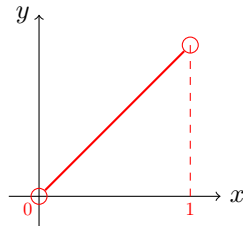


Figura 37: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma per come è definita **non** ammette nè massimo nè minimo perchè il **dominio non è chiuso**.*

#### **Esempio 6.3**

$$f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := x \sin(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

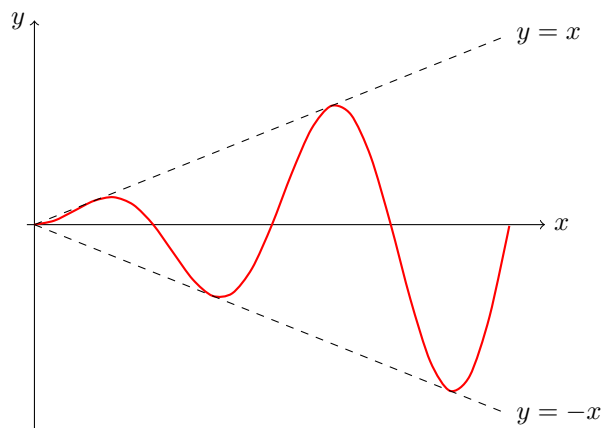


Figura 38: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma **non** possiede nè punti di massimo, nè punti di minimo perchè la funzione ha ampiezza sempre crescente.*

**Esempio 6.4**

$$f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_3(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

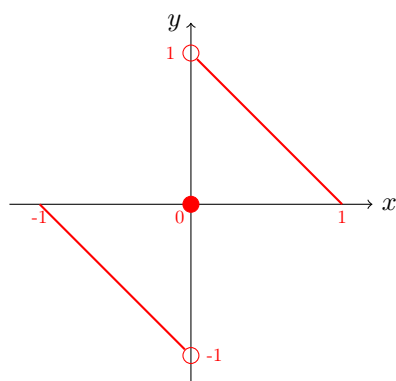


Figura 39: Esempio di funzione non continua

*Questa funzione **non** ammette punti di massimo e di minimo perchè non è continua.*

### 6.3 Teorema degli zeri

**Definizione 6.2**

*Teorema degli zeri (o di Bolzano)*

*Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se*

$$f(a)f(b) < 0$$

*allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$*

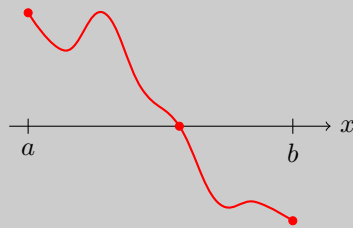


Figura 40: Teorema degli zeri

Se vengono meno le ipotesi, può venir meno la conclusione.

#### 6.3.1 Esempi

**Esempio 6.5**

$$g_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

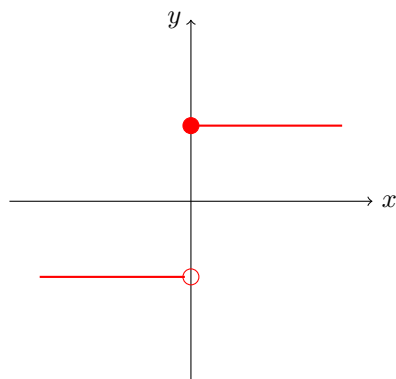


Figura 41: Esempio di funzione non continua

*Questa funzione non è continua, quindi non si applica il teorema.*

**Esempio 6.6**

$$g_2 : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

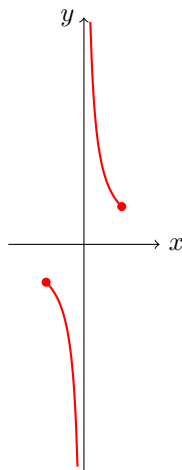


Figura 42: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma non si annulla mai perchè il dominio della funzione **non è un intervallo**, ma un intervallo privato di un valore, quindi non si applica il teorema.*

## 6.4 Teorema di Fermat

**Teorema 5 (di Fermat)** Sia  $x_0 \in A$  un estremo locale di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  e se  $x_0$  è **interno** ad  $A$  (cioè,  $f$  è definita in un intorno di  $x_0$ ), allora:

$$f'(x_0) = 0$$

(I punti dove  $f'(x_0) = 0$  si dicono **punti critici di  $f$**  )

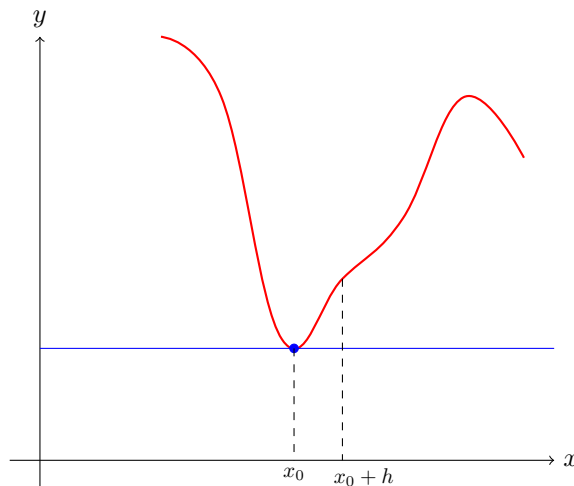


Figura 43: Teorema di Fermat

### 6.4.1 Dimostrazione

Supponiamo ad esempio  $x_0$  minimo locale di  $f$ . Prendo  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ . Se  $|h|$  è abbastanza piccolo,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{perchè } x_0 \text{ è minimo locale}$$

Se  $h > 0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Se  $h < 0$ :

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \leq 0$$

Poichè  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , so che esistono:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e i due limiti sono uguali tra loro e uguali a  $f'(x_0)$ . L'unica possibilità  $f'(x_0) = 0$

## 6.5 Teorema di Lagrange

### Definizione 6.3

*Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $[a, b]$  e differenziabile in  $(a, b)$ . Allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

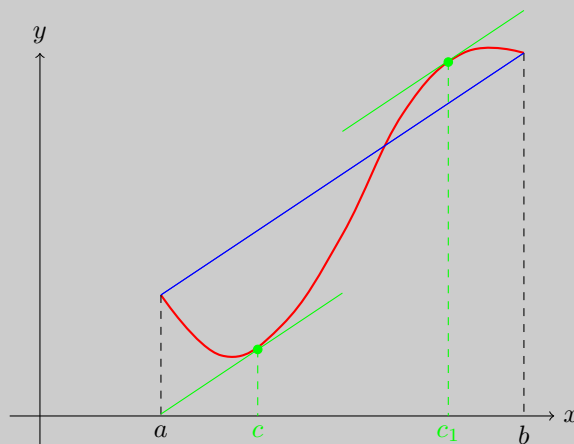


Figura 44: Teorema di Lagrange

**Corollario:** Sia  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile se:

$$\begin{cases} f' = 0 \\ f' \geq 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di  $I$ , allora  $f$  è:

$$\begin{cases} \text{costante} \\ \text{non decrescente} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{non crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Qui è importante assumere che il dominio sia un intervallo

**Esempio 6.7**

$$f : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

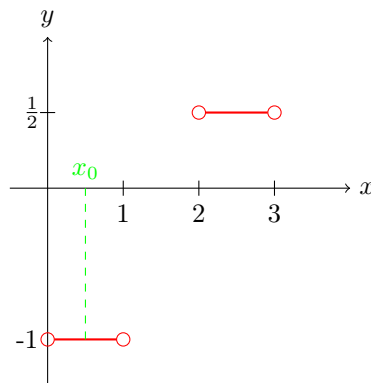


Figura 45: Teorema di Lagrange

*$f$  è differenziabile e ha  $f' = 0$  ovunque, ma non è costante (il dominio non è un intervallo).*

**6.5.1 Dimostrazione**

1. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, differenziabile in  $(a, b)$ , tale che  $f(a) = f(b)$ .  
Devo dimostrare che esiste

$$c \in (a, b) \text{ tale che } f'(c) = 0$$

Per il teorema di Weierstrass,  $f$  possiede un punto di massimo  $x_{max}$  e un punto di minimo  $x_{min}$  globali.

Se  $x_{min} \in (a, b)$ , allora scelgo  $c := x_{min}$  e per il teorema di Fermat, so che  $f'(c) = 0$ .

Se  $x_{max} \in (a, b)$ , allora scelgo  $c := x_{max}$  e per il teorema di Fermat, so che  $f'(c) = 0$ .

Altrimenti, ho  $\{x_{max}, x_{min}\} = \{a, b\}$ . Grazie all'ipotesi  $f(a) = f(b)$ , posso allora dedurre che  $f$  è costante, dunque  $f' = 0$  in tutto  $[a, b]$ .



2. **Caso generale:** Definisco  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)}_{\text{Equazione della corda AB}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora  $g$  è continua,  $g$  è differenziabile, in  $(a, b)$ ,

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Dunque, per quanto dimostrato nel passo precedente, esiste  $c \in (a, b)$  tale che

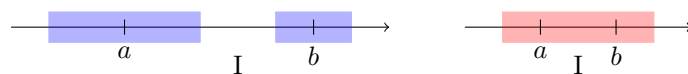
$$g'(c) = 0$$

perchè:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 6.5.2 Dimostrazione del corollario

Prendo  $a \in I, b \in I$  qualsiasi; devo dimostrare che  $f(a) = f(b)$ . Se  $a = b$ , non c'è nulla da dimostrare. Suppongo ad esempio  $a < b$  (se no li scambio). Allora  $f$  è definita su tutto  $[a, b]$  (perchè  $I$  è un intervallo, dunque  $[a, b] \subseteq I$ ).



Inoltre  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua (differenziabile  $\Rightarrow$  continua), differenziabile in  $(a, b)$  e quindi, per il teorema di Lagrange, esiste  $c \in (a, b)$  t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, per ipotesi,  $f'(c) = 0$ , da cioè  $f(b) - f(a) = 0$ , cioè  $f(b) = f(a)$ .