Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1 Introduzione

1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazioneli; questo insieme viene indicato con il simbolo $\mathbb{R}$

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- 1^a **proprietà (Eudosso-Archimede)**: due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

  Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

  Assioma: dati due numeri reali positivi a, b con $0 < a < b$ esiste un intero n tale che $na > b$.

- 2^a **proprietà (Intervalli inscatolati)**: date due serie di grandezze: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$: la prima crescente (numeri della famiglia a) e la seconda decrescente (numeri della famiglia b), in cui ogni a_k è minore di b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k, allora esiste una grandezza c tale che per ogni k $a_k \leq c \leq b_k$.

1.2 Maggiorante

Definizione 1.1
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ ' è un maggiorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \geq x$.

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'interballo tendesse verso $+\infty$ non si sarebbe alcun maggiorante poichè $+\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha maggiorante

1.3 Minorante

Definizione 1.2
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \leq x$.

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso $-\infty$ non ci sarebbe alcun minorante poichè $-\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha minorante

1.4 Estremo superiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato superiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo superiore di S se:

- y è un maggiorante di S
- y è il più piccolo maggiorante di S

Se S è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di S è $sup(S) = +\infty$. Esempi:

- $I = (1, 10]$: $sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$: $sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $sup(\mathbb{R}) = +\infty$

1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato inferiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo inferiore di S se:

- y è un minorante di S
- y è il più grande minorante di S

Se S è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di S è $inf(S) = -\infty$. Esempi:

- $I = [1, 8)$: $inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$: $inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $inf(\mathbb{R}) = -\infty$

1.6 Massimo

Definizione 1.3
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il massimo di S se y è l'estremo superiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con $Max(S) = y$.

1.7 Minimo

Definizione 1.4
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il minimo di S se y è l'estremo inferiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con $Min(S) = y$.

Teorema 1 *Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.*

1.8 Funzioni

Definizione 1.5
*Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:*

$$f : A \to B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di A è associato uno e uno solo elemento di B.

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \; \exists! \; b \in B \textit{ tale che } f : A \to B$$

Esempio di funzione corretta:

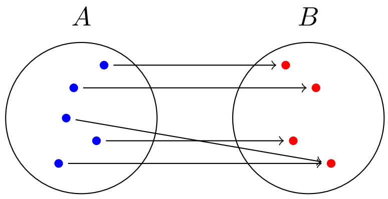


Figura 1: Esempio di funzione corretta

1.8.1 Dominio di una funzione

Definizione 1.6
Dato un insieme di partenza A gli elementi ai quali è applicata la funzione f sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \to x^2 \textit{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \to \sqrt{x} \textit{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \ con \ D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \ con \ D = [0, +\infty)$$

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \to +\infty$)

Definizione 2.1
Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \ t.c. \ \forall x \subset A^{a},$$

$$x \geq k \to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$)
La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .

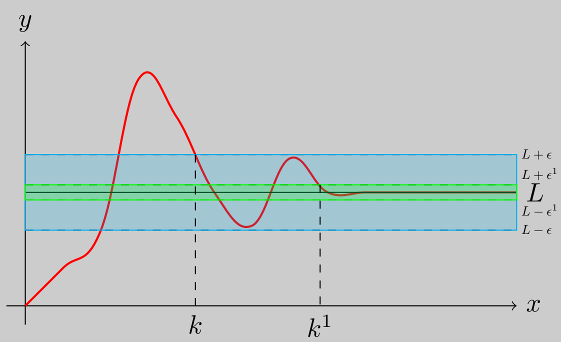


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di L e non uscirne più. Questo vale per ogni ϵ, quindi anche per ϵ^1.

[a] Il dominio della funzione

Definizione 2.2
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

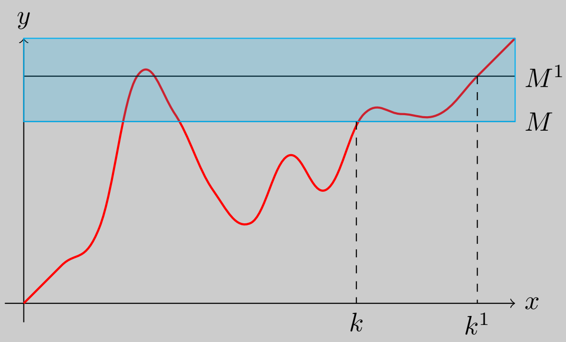


Figura 3: Definizione di limite a $+\infty$

Definizione 2.3
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \ \exists k > 0 \ \ t.c. \ \ \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$)

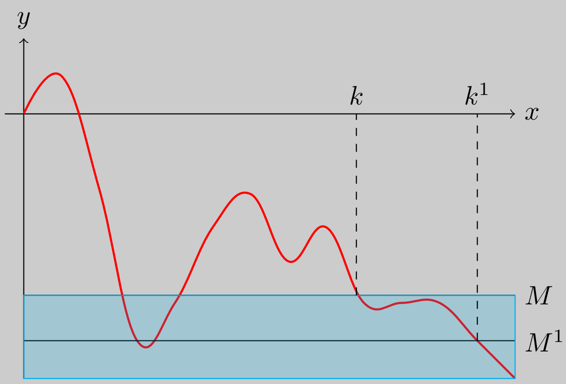


Figura 4: Definizione di limite a $-\infty$

2.1 Esempi

Esempio 2.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad Dominio = \mathbb{R}/\{0\}$$

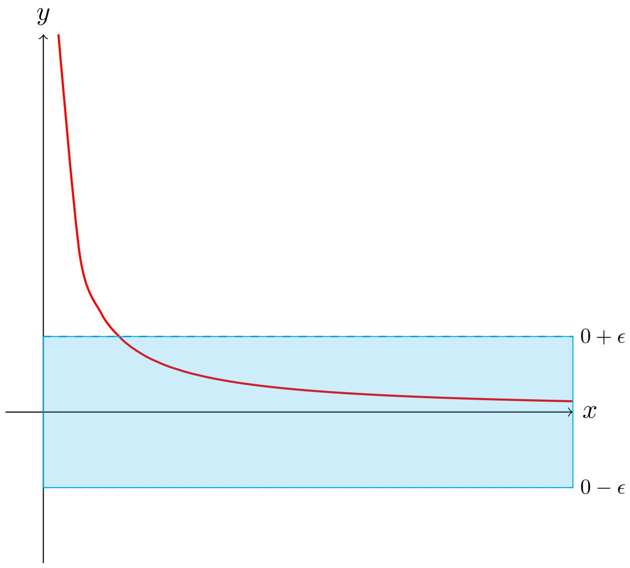


Figura 5: Esempio di limite

Sia dato $\epsilon > 0$ *arbitrario. Definisco* $k := \frac{1}{\epsilon}$.
Sia dato $x > 0$ *arbitrario, supponiamo* $x \geq k$. *Allora*

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$*).*

Esempio 2.2

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

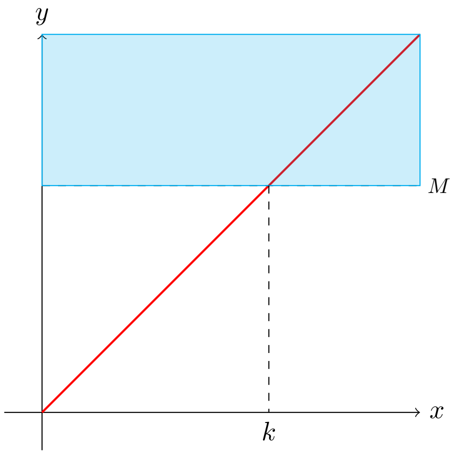


Figura 6: Esempio di limite a $+\infty$

Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
Quindi è verificata la definizione di limite.

2.2 Osservazioni

Non è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \to +\infty} sin(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} cos(x)$$

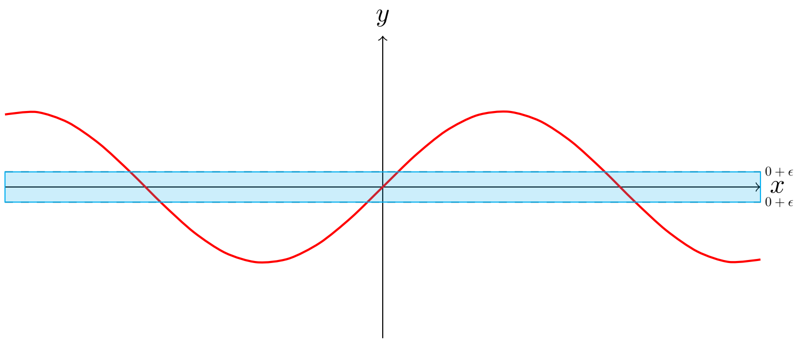


Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intevallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.

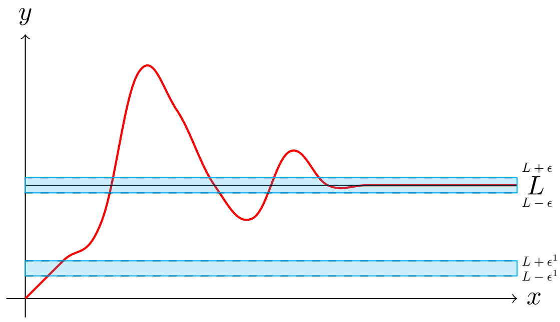


Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 2 (Algebra dei limiti) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti*

$$F := \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

esistano e siano ***finiti****. Allora*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \textit{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende ***parzialmente*** *nel caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:*

- $F + \infty = +\infty, \quad F - \infty = -\infty \ \ \forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty, \quad +\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty, \ \ \forall F \in \mathbb{R}, \ F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0 \ \ \forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty \ \ \forall F \in \mathbb{R}, \ F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succdere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}
- 0^0
- ∞^0

N.B.: in questo contesto, 0 , ∞ e 1 sono da intendersi come abbreviazioni.

2.5 Esempi di calcolo di limiti

Esempio 2.3

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + \frac{1}{x})$$

$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \to +\infty$$

Per $x \to +\infty$ (per il teorema dell'algebra dei limiti)

Esempio 2.4

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x^3}_{+\infty}(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - 1) \to -\infty$$

Per $x \to +\infty$

Esempio 2.5

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x}_{+\infty}(\underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4) \to +\infty$$

2.6 Limiti razionali

Se P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & se\ p > q \\ 0 & se\ p < q \\ coefficiente\ denominante\ di\ P & se\ p = q \\ coefficiente\ denominante\ di\ Q & se\ p = q \end{cases}$$

2.7 Limiti delle funzioni monotone

Teorema 3 (di monotonia) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona*[1]*. Allora*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \ \ esiste\ e$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} sup\{f(x):\ x \in A\} & se\ f\ cresce\ (nondecrescecnte) \\ inf\{f(x):\ x \in A\} & se\ f\ decresce\ (noncrescente) \end{cases}$$

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
f è strettamente crescente e limitata (l'immagine di f è un insieme limitato).

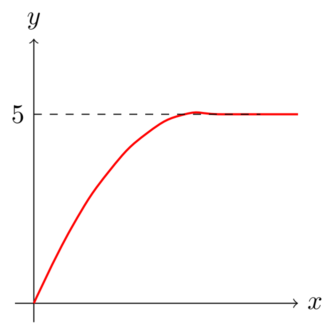


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e non limitata

[1]Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

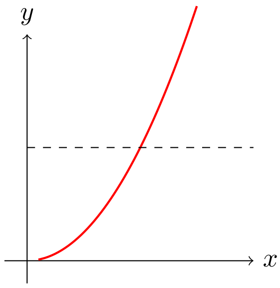
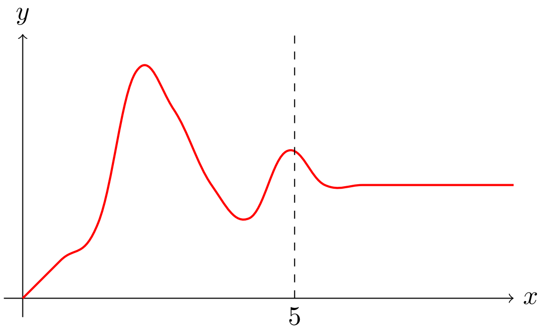


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede epr $x > 5$ si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da $x = 5$.

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Esempio 2.6

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = +\infty$$

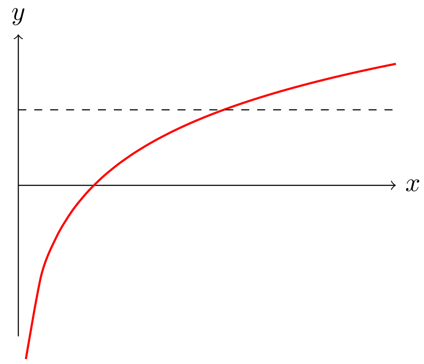


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

Per il teorema di monotonia:

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = sup\{log(x) : x > 0\}$$

$$\geq sup\{log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \;\; \textit{scelto arbitrariamente}$$

$$= sup\{n \cdot log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty$$

Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a $+\infty$.

Esercizio 2.1
Dimostrare che:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

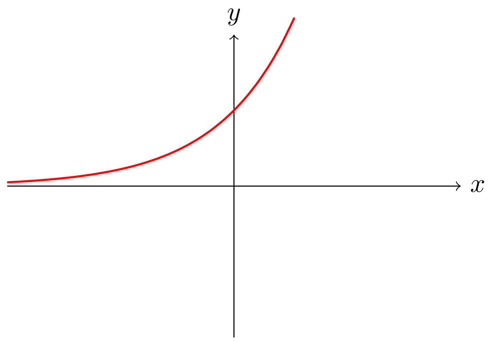


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

E similmente che:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

2.7.1 Variante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ *t.c.* $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$.
Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

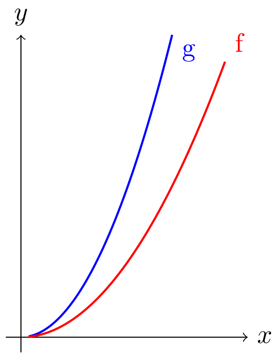


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

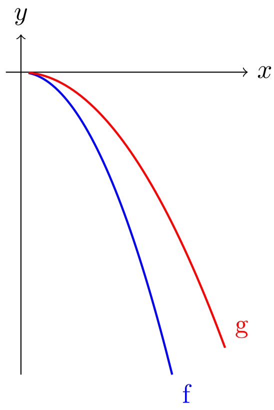


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative

2.8 Limiti per $x \to -\infty$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato inferiormente, $f : A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \to +\infty} f(-t) = L$$

$$x = -t$$
$$\text{se } x \to -\infty$$
$$\text{allora } t \to +\infty$$

2.9 Limiti per $x \to x_0$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Per definire il limite di f quando $x \to 0$, serve che f sia definita "vicino a x_0", in un senso opportuno. Noi supporremo, ad esempio, che il dominio A contenga almeno un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ oppure $(x_0, x_0 - \delta)$, con $\delta > 0$. **Non** è richiesto, invece, che f sia definita in x_0.

Esempio 2.7

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \quad f : A \to \mathbb{R}$$

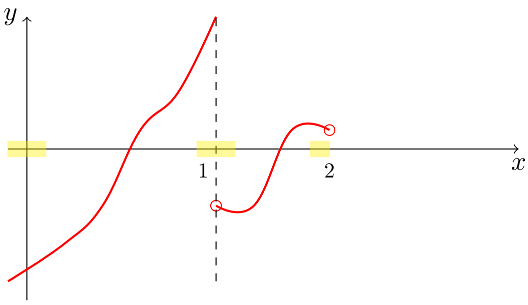


Figura 16: Limiti su una funzione non continua

Posso definire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to 2} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

Non è detto però che tali limiti esistano

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\ t.c.\ \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \ \ e \ \ x \neq x_0$$

$$\to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

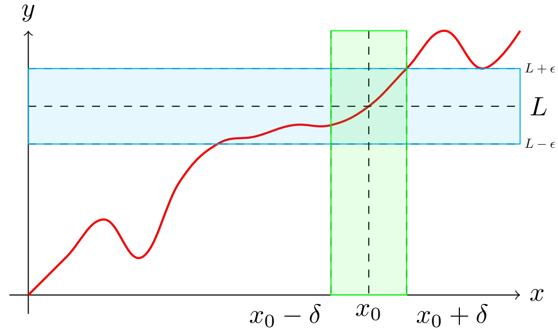


Figura 17: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0\ t.c.\ \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \;\; e \;\; x \neq x_0$$
$$f(x) \geq M$$

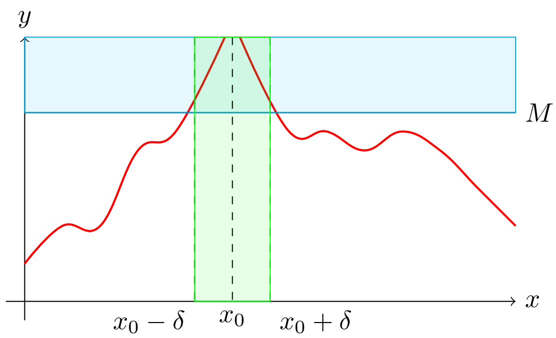


Figura 18: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \; t.c. \; \forall x \in A,$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \;\; e \;\; x \neq x_0$$
$$f(x) \leq M$$

2.10 Limiti unilateri

Si possono anche dare le definizioni di limiti **unilateri**, da destra o da sinistra:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Esempio 2.8

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} (\frac{1}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x}) \;\; \textit{non esiste}$$

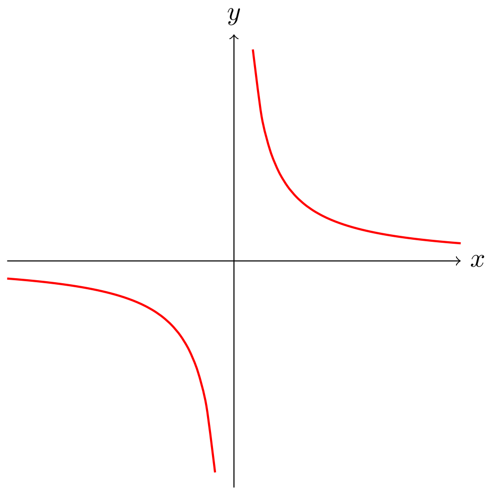


Figura 19: Limiti unilateri

2.11 Limiti di funzioni continue

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo oppure un'unione finita di intervalli.

Definizione 2.4
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diremo che f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è continua se e solo se f è continua in ogni punto del suo dominio $x_0 \in A$.

Esempio 2.9

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua, perchè

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \ \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

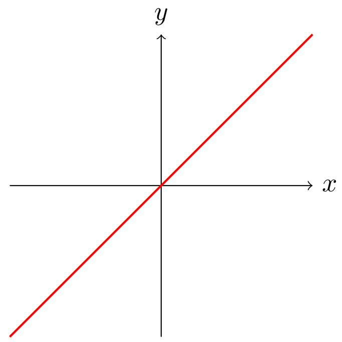


Figura 20: Eempio di funzione continua

Esempio 2.10

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & se\ x \neq 2 \\ 31 & se\ x = 2 \end{cases}$$

Non è continua perchè

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2)$$

Però f è continua in tutti gli $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 2$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = x_0$$

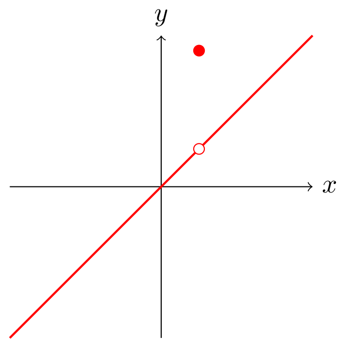


Figura 21: Eempio di funzione non continua

Esempio 2.11

$$h : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

Il dominio è un unione di 2 intervalli:

$$(\mathbb{R}/0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

È una funzione continua

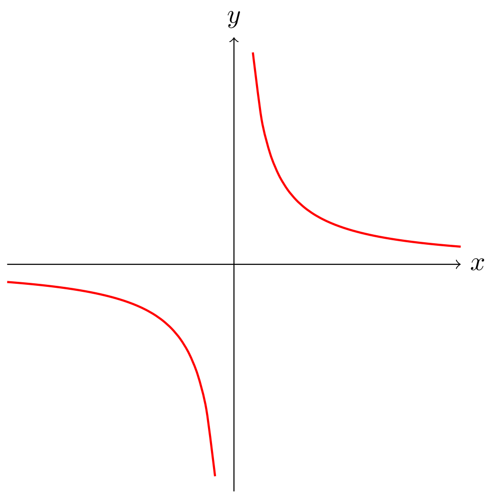


Figura 22: Esmpio di funzione continua

Esempio 2.12

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$l(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 5 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione non è continua perchè il limite a 0 non esiste:

$$\lim_{x \to 0} l(x) = \nexists$$

ma:

$$\lim_{x \to 0} |l(x)| = +\infty$$

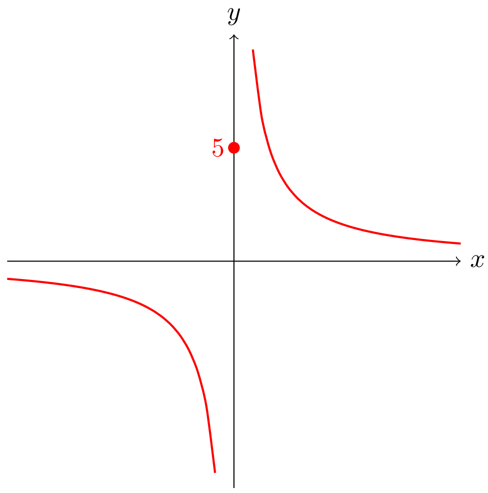


Figura 23: Esmpio di funzione non continua

Esempio 2.13

$$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$m(x) := \begin{cases} x^2 & se\ x \neq 0 \\ -2 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Non è continua perchè:

$$\lim_{x \to 0} m(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \neq m(0)$$

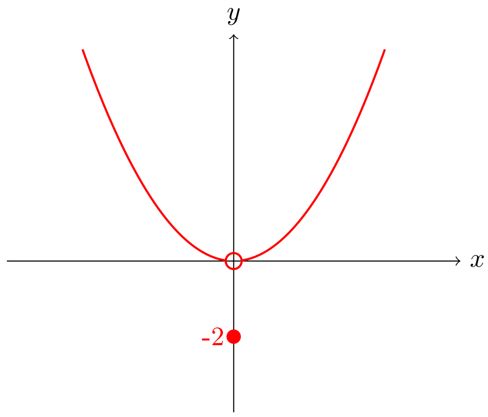


Figura 24: Esmpio di funzione non continua

3 Notazione o piccolo di Landau

Si dimostra che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \qquad (F.I. \ \frac{0}{0})$$

Considero $x > 0$

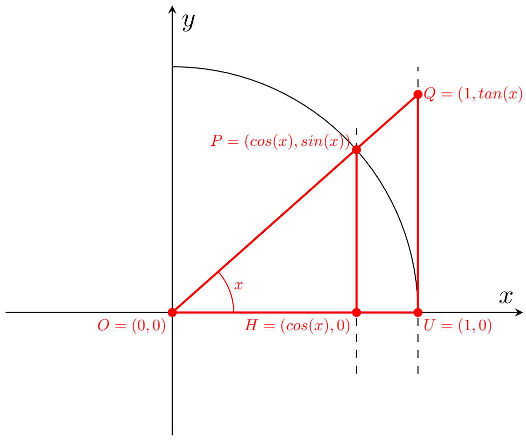


Figura 25: Grafico

Area del triangolo OHP:

- $\leq$ area del settore OUP
- $\leq$ area del triangolo OUQ

Area di $OHP = \frac{1}{2}sin(x)cos(x)$
Area di $OUQ = \frac{1}{2}tan(x) = \frac{1}{2}\frac{sin(x)}{cos(x)}$
Area di OUP : area del disco unitario = ampiezza dell'angolo $P\hat{O}U$: ampiezza dell'angolo giro
da cui:

$$Area \ di \ OUP = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2}x$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2}sin(x)cos(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Moltiplico per $\frac{2}{sin(x)}$ (assumendo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$, così che $sin(x) > 0$):

$$cos(x) \leq \frac{x}{sin(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}$$

da cui:

$$\underbrace{cos(x)}_{1} \leq \frac{sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{cos(x)}}_{1}$$

$$per \ x \to 0^+$$

Per il teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = 1.$$

Il caso $x \to 0^-$ è analogo. $\square$

Se definiamo:

$$q(x) := \frac{sin(x)}{x} - 1$$

posso concludere che:

$$\frac{sin(x)}{x} = 1 + q(x) \Leftrightarrow sin(x) = x + xq(x)$$

$$\lim_{x\to 0} q(x) = 0$$

Definizione 3.1
Notazione *o piccolo di Landau.*
Diremo che:

$$f(x) = o(g(x)) \qquad per\ x \to x_0$$

se e solo se esiste una funzione q tale che:

$$f(x) = g(x)q(x) \qquad (\forall x)$$

$$\lim_{x\to x_0} q(x) = 0$$

Ad esempio, possiamo dire che:

$$sin(x) = x + \underbrace{o(x)}_{g(x)q(x)} \qquad per\ x \to 0$$

3.1 Proprietà

1. $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
2. $o(g(x)) = g(x)o(1)$ per $x \to x_0$
3. $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$
   Infatti,
   $$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)$$
   dove
   $$\lim_{x\to x_0} q_1(x) = \lim_{x\to x_0} q_2(x) = 0$$
   e quindi
   $$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)\underbrace{(q_1(x) + q_2(x))}_{0\ \ per\ x\to x_0} = o(g(x))$$

4. Se $k \in \mathbb{R}$ è una costante,

$$ko(g(x)) = o(g(x)) \quad \textit{per } x \to x_0$$

5. $f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \quad \textit{per } x \to x_0$

6. In generale, **non** vale

$$o(g(x)) - o(g(x)) = 0 \quad \textit{per } x \to x_0$$

   Infatti,

$$o(g(x)) - o(g(x)) = g(x)q_1(x) - g(x)q_2(x)$$

   dove

$$\lim_{x \to x_0} q_1(x) = \lim_{x \to x_0} q_2(x) = 0$$

   ma **non** è detto che $q_1(x) = q_2(x)$.

   (Però è vero che $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x)) \quad \textit{per } x \to x_0$)

7. Allo stesso modo, **non** è detto che

$$\frac{o(g(x))}{o(g(x))} = 1 \quad \textit{per } x \to x_0$$

   (forma indeterminata)

È molto importante specificare $x \to x_0$.

Ad esempio:

Esempio 3.1

$$x^2 = o(x) \quad \textit{per } x \to 0$$

$$x = o(x^2) \quad \textit{per } x \to +\infty$$

3.2 Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \to 0$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $log(1 + x) = x + o(x)$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (\textit{con } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ costante})$
- $sin(x) = x + o(x)$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

3.3 Funzioni continue

Proprietà:

1. Se $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora sono continue anche
$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$
(quest'ultima definita su $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$)

2. Se $f : A \to \mathbb{R},\ g : B \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che $f(A) \subseteq B$, allora è continua anche la funzione composta
$$g \circ f : A \to \mathbb{R}$$
$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

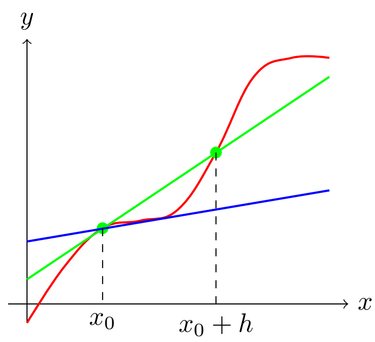
Esempio 3.2
Sono funzioni continue:

- *tutti i polinomi*
- *tutte le funzioni razionali (quozienti di polinomi)*
- $x \to x^\alpha$, *con* $\alpha \in \mathbb{R}$ *costante, laddove ben definito*
- *exp, log, sin, cos, tan, ...*
- *valore assoluto,* $x \in \mathbb{R} \to |x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$
- *funzioni composte, ad esempio:*
$$h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_1(x) := sin(x^3 + 5x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$h_2 : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad h_2(x) := log(x^2 - 4) \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

4 Derivate

Sia A un intervallo aperto (del tipo $A = (a, b)$ oppure $A = (a, +\infty), A = (-\infty, a), A = \mathbb{R}$), oppure un'unione di intervalli aperti.

Sia $f : A \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in A$. **Retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$?



Preso $h \in \mathbb{R},\ h \neq 0$, il coefficiente angolare (pendenza) della retta secante il grafico nei punti $(x_0, f(x_0)),\ \ (x_0 + h, f(x_0 + h))$ è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 4.1
*Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** (o derivabile) in $x_0 \in A$ se e solo se esiste ed è finito il limite:*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Tale limite è detto **derivata** di f in x_0. f si dice **differenziabile** (o derivabile) se e solo se è differenziabile in ogni punto del suo dominio.*

4.1 Osservazioni

1. La retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è definita come l'unica retta di pendenza $f'(x_0)$ passante per $(x_0, f(x_0)$. Essa ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. f è differenziabile in x_0 se e solo se vale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \textit{per } h \to 0$$

   che equivale a dire:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\, o(1) \quad \textit{per } h \to 0$$

   Quindi, f è differenziabile in x_0 se e solo se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \textit{per } h \to 0$$

   il che equivale (posto $x = x_0 + h$) a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \textit{per } x \to x_0$$

Esempio 4.1

$$f = e^x, \quad x_0 = 0$$

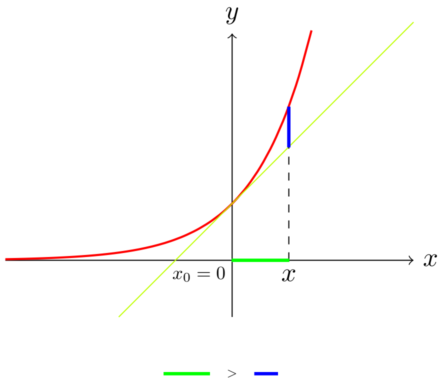


Figura 26: Eempio di funzione continua

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad per\ x \to 0$$

dunque

$$e'^0 = 1$$

Che sarebbe il coefficiente di x nell'equazione $e^x = 1 + x + o(x)$

Si può anche scrivere (Notazione di Leibnitz):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Esempio 4.2
Una funzione costante è differenziabile con derivata

$$(5')(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = 0$$

4.2 Proprietà delle funzioni differenziabili

Dove non specificato, supporremo sempre che il dominio A sia un intervallo aperto o un'unione di intervalli aperti.

Proprietà: Se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0, allora f è continua in x_0.
Dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0) \square$$

Non vale il viceversa: f può essere continua senza essere differenziabile.

Esempio 4.3

$$f(x) := |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 0$$

$$f' + (0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f' - (0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

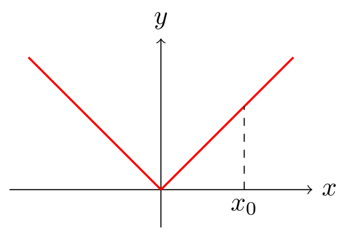


Figura 27: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Le derivate destra e sinistra in $x_0 = 0$ esistono e sono entrambe finite, ma sono **diverse** tra loro: f ha un **punto angoloso** in $x_0 = 0$.

Esempio 4.4

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g'+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

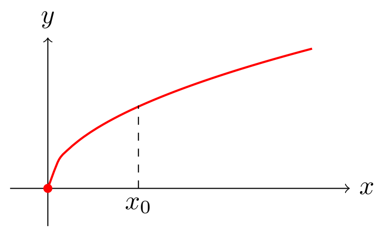


Figura 28: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Il limite (destro, in questo caso) del rapporto incrementale esiste, ma è infinito: g ha una ***cuspide*** *o* ***punto a tangente verticale*** *in $x_0 = 0$.*

4.3 Derivate delle funzioni inverse

Esempio 4.5
Consideriamo

$$tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

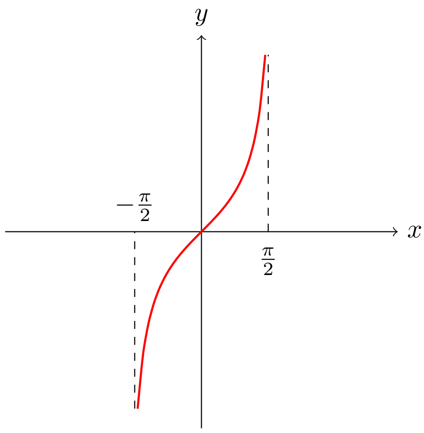


Figura 29: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La tangente è differenziabile

$$\frac{d}{dx}(tan(x)) = \frac{(sin)'(x)cos(x) - (cos)'(x)sin(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x) > 0 \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

- *La tangente è strettamente crescente, quindi iniettiva*
- *La tangente è suriettiva: per ogni $y \in \mathbb{R}$, esiste*

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \; tc \; tan(x) = y$$

Infatti la tangente è continua e

$$\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} tan(x) = +\infty$$

Quindi il teorema degli zeri implica che esiste $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tc $tan(x) = y$

$tan : (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è biettiva, quindi per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste un unico numero reale, che indicheremo $arctan(y)$, tale che

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < arctan(y) < \frac{\pi}{2} \\ tan(arctan(y)) = y \end{cases}$$

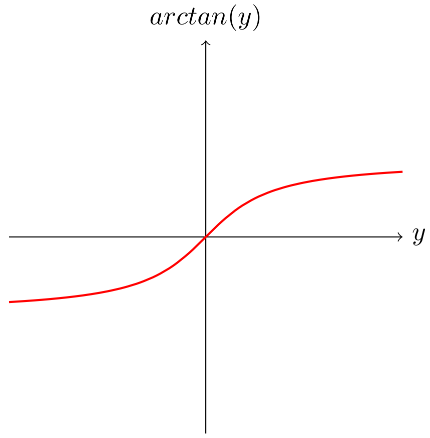


Figura 30: Esempio di funzione continua e non differenziabile

La funzione $arctan$ è differenziabile? Se sì, chi è la sua derivata?

Supponiamo già di sapere che $arctan$ è differenziabile (è vero, ma andrebbe dimostrato)

$$tan(arctan(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Deriviamo ambo i membri:

$$\frac{d}{dy}(tan(arctan(y))) = 1$$

$$\frac{d}{dy}(tan(arctan(y))) = tan'(arctan(y)) \cdot (arctan(y))'$$

$$tan'(x) = 1 + tan^2(x) = (1 + (tan(arctan(y))))^2 \cdot (arctan(y))'$$
$$= (1 + y^2) \cdot (arctan(y))'$$

Dunque:

$$(1 + y^2)arctan'(y) = 1$$

e quindi:

$$arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Quanto fatto ha validità più generale:

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione fifferenziabile tale che $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora esiste la funzione inversa:

$$g : f(I) \to I$$

tale che $f(g(y)) = y \ \forall y \in f(I),\ g(f(x)) = x \ \forall x \in I$

Inoltre, g è differenziabile e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

per ogni $y \in f(I)$

Esercizio 4.1
Trovare le derivate delle funzioni:

$$arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

5 Derivate successive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, o un'unione di intervalli aperti. Sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Se (e solo se) f è differenziabile e f' è differenziabile, si dice che f è differenziabile due volte. Si scrive f'' per la derivata seconda di f (cioè la derivata di f).

Similmente si definiscono le funzioni differenziabili $3, 4, 5, \dots,$ infinite volte. Notazione per le derivate successive:

$$f' = f^{(1)} = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

5.1 Funzioni convesse e concave

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ se e solo se la corda tra due punti qualsiasi del grafico di f sta tutta $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$ il grafico di f.

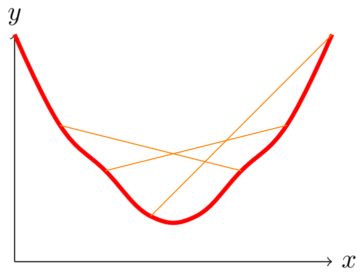


Figura 31: Funzione convessa

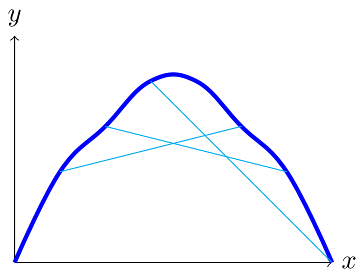


Figura 32: Funzione concava

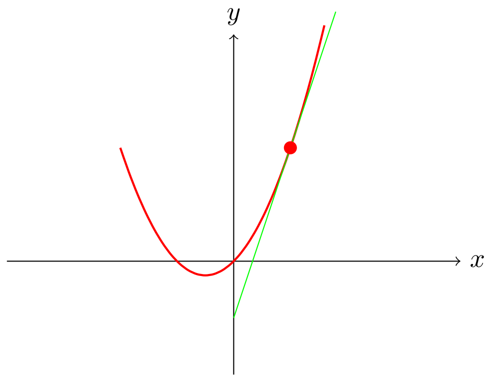
In maniera equivalente, f è convessa se e solo se per ogni $x \in I$, ogni $\overline{x} \in I$ ed ogni $t \in [0,1]$, vale

$$f(tx + (1-t))\overline{x}) \leq tf(x) + (1-t)f(\overline{x})$$

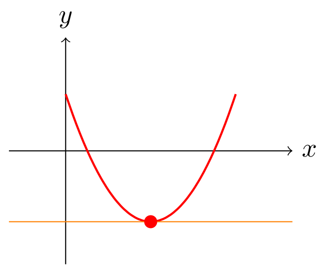
5.2 Proprietà delle funzioni convesse (o concave)

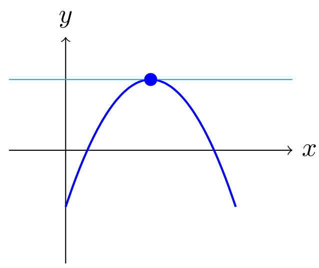
1. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte. Se $\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$ in ogni punto di I, allora f è $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$

2. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ è differenziabile e $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ e $x_0 \in I$, allora la retta tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$ sta tutta $\begin{cases} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{cases}$ il grafico di f.



3. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e $\begin{cases} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{cases}$ e $x_0 \in I$ un punto critico di f $(f'(x_0) = 0)$, allora x_0 è un punto di $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$ di f.

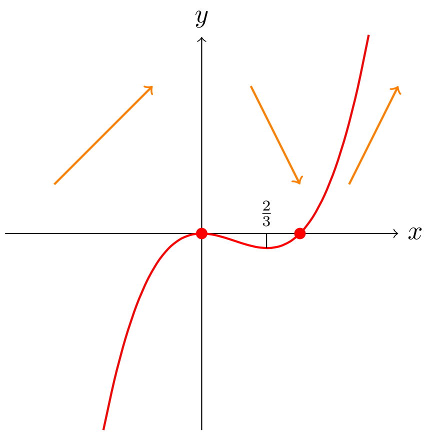




4. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è differenziabile due volte e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ e $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$ locale per f.

Esempio 5.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 6x - 2$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ \textit{oppure}$$
$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \ \ \textit{oppure} \ \ x = 0$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ \textit{oppure} \ \ x = \frac{2}{3}$$
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \ \ \textit{oppure} \ \ x \geq \frac{2}{3}$$

Quindi f è cresccente in $(-\infty, 0)$ e in $\frac{2}{3}, +\infty$; f è decrescente in $(0, \frac{2}{3})$. In $x = 0$ ho un punto di massimo locale, in $x = \frac{2}{3}$ ho un punto di minimo locale.

$$f''(x) = 6x - 2$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

f è convessa in $(\frac{1}{3}, +\infty)$ e concava in $(-\infty, \frac{1}{3})$; f ha $x = \frac{1}{3}$ è un punto di flesso di f.

6 Teoremi

6.1 Teorema dei carabinieri

Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri) *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un insieme non limitato superiormente e siano* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. *Supponiamo che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$$

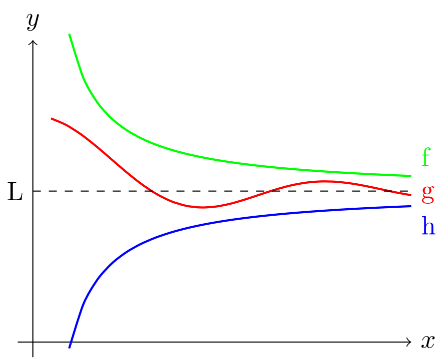


Figura 33: Teorema del confronto tra i limiti

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$$

Prendiamo dunque $\epsilon > 0$ *arbitrario. Poichè* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, *sappiamo che esiste* $k_f > 0$ *t.c.*

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_f \to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

Allo stesso modo, poichè $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$, *sappiamo che esiste* $k_h > 0$ *t.c.*

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_h \to L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

Definiamo $k := max\{k_f, k_h\}$. *Comunque preso* $x \in A$, *se* $x \geq k$ *allora vale che*

$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

6.2 Teorema di Weiestrass

Teorema 5 *Teorema di Weierstrass*
Sia $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato,* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua.*
Allora esistono

$$x_{max}, x_{min} \in [a, b] \ \ t.c. \ \ f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \forall x \in [a, b]$$

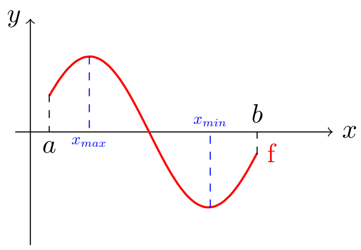


Figura 34: Teorema di Weiestrass

Ogni funzione continua, avrà quindi un punto di minimo e un punto di massimo

Definizione 6.1
Un punto $x_0 \in A$ *si dice punto di* $\begin{cases} massimo \\ minimo \end{cases}$ *locale di una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *se esiste* $\delta > 0$ *tc* $\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$ *per ogni:*

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

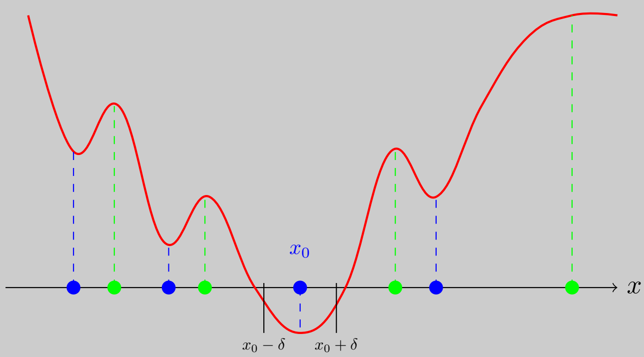


Figura 35: Teorema degli zeri

I punti di massimo o minimo locale si chiamano anche ***estremi locali****.*

6.2.1 Osservazioni

- In particolare, f è limitata
- I punti x_{min}, x_{max} si dicono punti di minimo e di massimo **globali** di f
- I punti di minimo e massimo globali possono essere non unici e coincidere con gli estremi a, b dell'intervallo

Esempio 6.1

$$cos : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$$

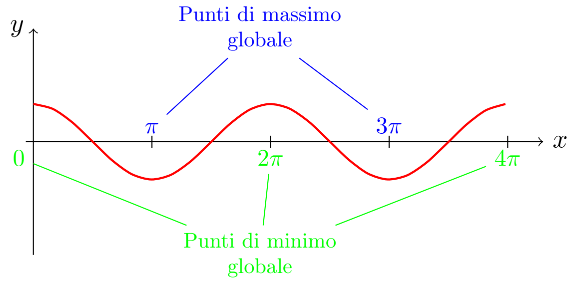


Figura 36: Teorema di Weiestrass

Se vengono meno le ipotesi del teorema, può venir meno la conclusione.

6.2.2 Esempi

Esempio 6.2

$$f_1 : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := x \quad \forall x \in (0, 1)$$

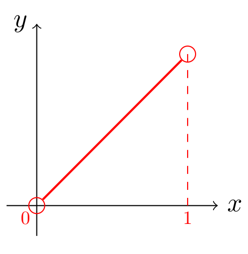


Figura 37: Esempio di funzione continua

Questa funzione è continua, ma per come è definita ***non*** *ammette nè massimo nè minimo perchè il* ***dominio non è chiuso****.*

Esempio 6.3

$$f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) := x sin(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

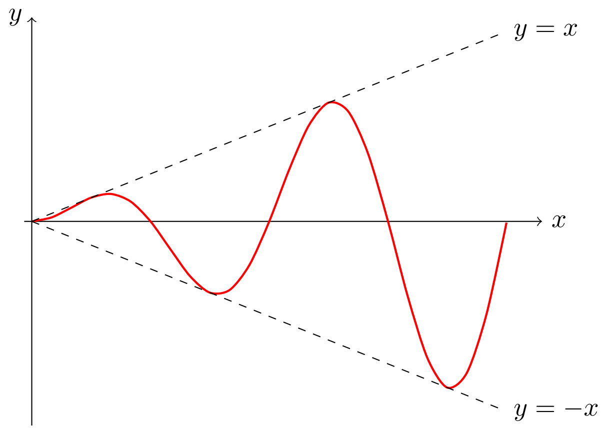


Figura 38: Esempio di funzione continua

Questa funzione è continua, ma ***non*** *possiede nè punti di massimo, nè punti di minimo perchè la funzione ha ampiezza sempre crescente.*

Esempio 6.4

$$f_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$f_3(x) := \begin{cases} 1 - x \quad se \; 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad se \; x = 0 \\ -x - 1 \quad se \; -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

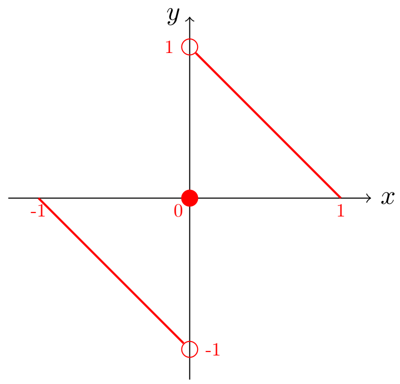


Figura 39: Esempio di funzione non continua

Questa funzione ***non*** *ammette punti di massimo e di minimo perchè non è continua.*

6.3 Teorema di Rolle

Teorema 6 *Data una funzione f quando:*

- *È continua su $[a, b]$*
- *È derivabile su (a, b)*

Se $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Una funzione continua e derivabile su un intervallo chiuso e limitato, se assume lo stesso valore agli estremi, ha almeno un punto che annulla la derivata.

6.4 Teorema degli zeri

Teorema 7 *Teorema degli zeri (o di Bolzano)*
Sia $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato,* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Se*

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$

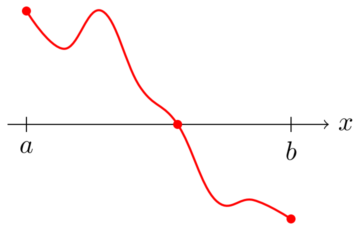


Figura 40: Teorema degli zeri

Se vengono meno le ipotesi, può venir meno la conclusione.

6.4.1 Esempi

Esempio 6.5

$$g_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} -1 & se \ -1 \le x < 0 \\ 1 & se \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

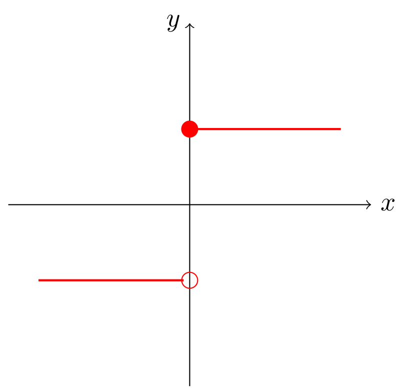


Figura 41: Esempio di funzione non continua

Questa funzione non è continua, quindi non si applica il teorema.

Esempio 6.6

$$g_2 : [-1, 1]/\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$g_2(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in [-1, 1]/\{0\}$$

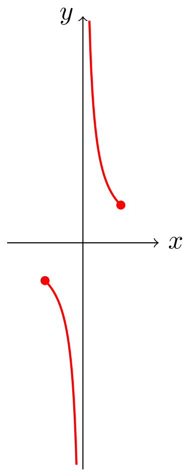


Figura 42: Esempio di funzione continua

Questa funzione è continua, ma non si annulla mai perchè il dominio della funzione ***non è un intervallo*** *,ma un intervallo privato di un valore, quindi non si applica il teorema.*

6.5 Teorema dei valori intermedi

Generalizza il teorema degli zeri.

Teorema 8 *Sia $f : [a, b]$ una funzione continua. Se $f(a) < f(b)$ e $y \in (f(a), f(b))$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = y$.*

6.5.1 Dimostrazione

Sia $g(x) := f(x) - y$. Allora:

$$g(a) = f(a) - y < 0 \quad \text{e} \quad g(b) = f(b) - y > 0$$

Esiste $c \in (a, b)$ tale che $g(c) = 0$, cioè $f(c) = y$.

6.6 Teorema di Fermat

Teorema 9 (di Fermat) *Sia $x_0 \in A$ un estremo locale di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è differenziabile in x_0 e se x_0 è* ***interno*** *ad A (cioè, f è definita in un intorno di x_0), allora:*

$$f'(x_0) = 0$$

(I punti dove $f'(x_0) = 0$ si dicono ***punti critici di*** *f)*

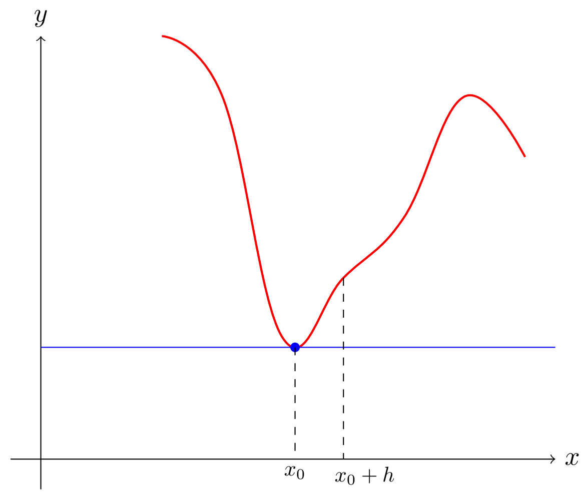


Figura 43: Teorema di Fermat

6.6.1 Dimostrazione

Supponiamo ad esempio x_0 minimo locale di f. Prendo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Se $|h|$ è abbastanza piccolo,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{perchè } x_0 \text{ è minimo locale}$$

Se $h > 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Se $h < 0$:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Poichè f è differenziabile in x_0, so che esistono:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e i due limiti sono uguali tra loro e uguali a $f'(x_0)$. L'unica possibilità $f'(x_0) = 0$

6.7 Teorema di Lagrange

Teorema 10 *Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e differenziabile in (a, b). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

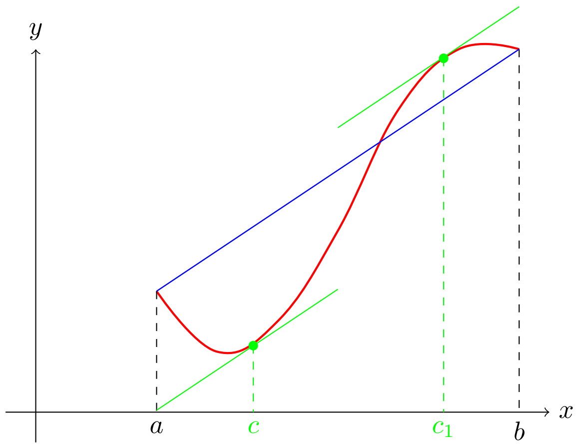


Figura 44: Teorema di Lagrange

Corollario: Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile se:

$$\begin{cases} f' = 0 \\ f' \geq 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di I, allora f è:

$$\begin{cases} \text{costante} \\ \text{non decrescente} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{non crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Qui è importante assumere che il dominio sia un intervallo

Esempio 6.7

$$f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := \begin{cases} -1 & se\ 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & se\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

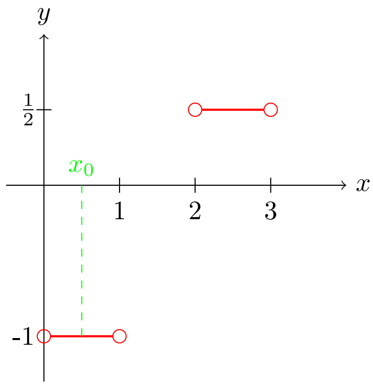


Figura 45: Teorema di Lagrange

f è differenziabile e ha $f' = 0$ ovunque, ma non è costante (il dominio non è un intervallo).

6.7.1 Dimostrazione

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, differenziabile in (a,b) , tale che $f(a) = f(b)$.

   Devo dimostrare che esiste

   $$c \in (a,b)\ tc\ f'(c) = 0$$

   Per il teorema di Weierstrass, f possiede un punto di massimo x_{max} e un punto di minimo x_{min} globali.

   Se $x_{min} \in (a,b)$, allora scelgo $c := x_{min}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

   Se $x_{max} \in (a,b)$, allora scelgo $c := x_{max}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

   Altrimenti, ho $\{x_{max}, x_{min}\} = \{a,b\}$. Grazie all'ipotesi $f(a) = f(b)$, posso allora dedurre che f è costante, dunque $f' = 0$ in tutto $[a,b]$.

2. **Caso generale:** Definisco $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)}_{\text{Equazione della corda AB}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora g è continnua, g è differenziabile, in (a, b),

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Dunque, per quanto dimostrato nel passo precedente, esiste $c \in (a, b)$ tale che

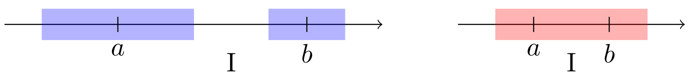
$$g'(c) = 0$$

perchè:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.7.2 Dimostrazione del corollario

Prendo $a \in I, b \in I$ qualsiasi; devo dimostrare che $f(a) = f(b)$. Se $a = b$, non c'è nulla da dimostrare. Suppongo ad esempio $a < b$ (se no li scambio). Allora f è definita su tutto $[a, b]$ (perchè I è un intervallo, dunque $[a, b] \supseteq I$).



Inoltre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua (differenziabile $\Rightarrow$ continua), differenziabile in (a, b) e quindi, per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, per ipotesi, $f'(c) = 0$, da cioè $f(b) - f(a) = 0$, cioè $f(b) = f(a)$.

6.8 Teorema di Cauchy

Teorema 11 *Date due funzioni f e g continue in $[a, b]$ e differenziabili in (a, b), con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Questo teorema è una generalizzazione del **teorema di Lagrange**.

6.8.1 Dimostrazione

Si consideri la funzione $F(x) = f(x) - kg(x)$, con:

$$F(a) = f(a) - kg(a), \quad F(b) = f(b) - kg(b)$$

Si può applicare il teorema di Rolle a F se $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, in tal caso $F'(c) = 0$ per $c \in (a, b)$, quindi:

$$f'(c) - kg'(x) = 0$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

6.9 Teorema de l'Hopital

Si applica al calcolo dei limiti della forma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, con f, g funzioni differenziabili, **purchè** il limite si presenti sotto la forma (indeterminata) $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Il teorema riduce il calcolo del limite dato al calcolo di:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(purchè esista)}$$

Definizione 6.2
Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Supponiamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$$

Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$ e che il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esista. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si possono scrivere varianti per il calcolo dei limiti quando $x \to x_0$ con $x \in \mathbb{R}$ oppure $x \to -\infty$.

6.9.1 Esempi

Esempio 6.8

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Esempio 6.9

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Considero il rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Per il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Si può dimostrare che per ogni $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = 0$$

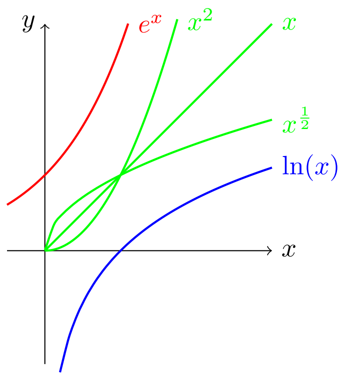


Figura 46: Confronto tra funzioni

Quando $x \to +\infty$, l'esponenziale cresce più velocemente di tutte le potenze (ad esponente positivo); il logaritmo più lentamente.

7 Sviluppi di Taylor

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) una funzione differenziabile $x_0 \in I$. Per definizione di differenziabilità:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente valutata in } x_0} + o(x - x_0) \quad \textit{per } x \to x_0$$

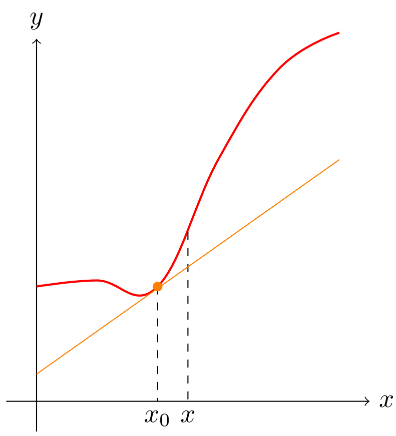


Figura 47: Sviluppo di Taylor

Se f è differenziabile due o più volte, si possono dare approssimazioni locali ancora migliori.

7.1 Notazione

Dato $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, si definisce il fattoriale di n come:

$$\begin{cases} 0! := 1 & se\ n = 0 \\ n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & se\ n \geq 0 \end{cases}$$

7.2 Polinomi di Taylor

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile n volte, $x_0 \in I$. Si definisce il **Polinomio di Taylor** di f di centro x_0 ed ordine n come:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Quando $x_0 = 0$, si parla anche di polinomio di McLaurin.

Esempio 7.1
Calcolare il polinomio di Taylor di exp di centro 0 e ordine 7.

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad n = 7$$

$$exp(x) = e^x$$
$$exp'(x) = exp$$
$$exp''(x) = exp' = exp$$
$$exp^{(j)} = exp \quad \forall j \in \mathbb{N}$$
$$exp(0) = 1$$

Polinomio di Taylor:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{7} \frac{1}{j!} x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^7}{7!}$$

Teorema 12 *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile n volte, P il suo polinomio di Taylor di centro x_0 ed ordine n. Allora:*

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) \qquad per\ x \to x_0$$

7.3 Polinomi notevoli

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

- $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

- $$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

- $$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1})$$

Esercizio 7.1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^n-1-\frac{1}{2n}\right)n^2$$

Chiamo a_n l'espressione da calcolare:

$$a_n=\left(\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^n-1-\frac{1}{2n}\right)n^2$$

$$=n^2\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=n^2\left(exp\left(n\log\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

Per la regola dell'o piccolo $\log(1+x)=x+o(x)$ *per* $x\to 0$*:*

$$=n^2\left(exp\left(n\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$=n^2\left(exp\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

Per la regola dell'o piccolo $exp(x)=1+x+o(x)$*:*

$$=n^2\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2n}}\right)$$

$$n^2\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=o(n)=n\cdot o(1)\quad pern\to+\infty$$

Questa è una forma indeterminata $\infty\cdot 0$.

$$a_n=n^2\left(exp\left(nlog\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)-1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

Applico $log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ *per* $x\to 0$*, con* $x=\frac{1}{2n}\to 0$ *per* $n\to+\infty$.

$$a_n=n^2\left(exp\left(n\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$=n^2\left(exp\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1-\frac{1}{2n}\right)$$

Applico $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x)$ *con* $x=\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o(\frac{1}{n^3})\to 0$

$$a_n=n^2\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2-\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2n}}\right)$$

$$=n^2\left(-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)$$

$$=n^2\left(\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{8}+o(1)\quad per\ n\to+\infty$$

8 Integrali

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua (su un intervallo chiuso e limitato).

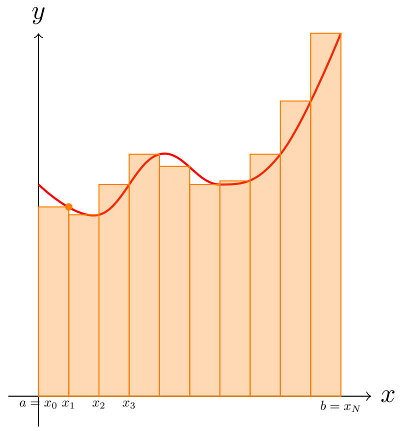


Figura 48: Somma di Riemann

Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Suddivido $[a, b]$ in N intervalli, delimitati da punti equidistanti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

(dove $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{N}(b - a)$ per ogni $j = 1, \ldots, N$).

Considero la **somma di Riemann** associata a tale suddivisione di $[a, b]$

$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, si dimostra che esiste ed è finito:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

Tale limite si dice **integrale** (definito) di f.

8.1 Osservazioni

1. Si possono considerare varianti diverse, senza che il valore del limite cambi. Ad esempio:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{(Figura 49)}$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} (\max_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{(Figura 50)}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (\underset{[x_{j-1},x_j]}{min} f)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{(Figura 51)}$$

(purchè f sia continua).

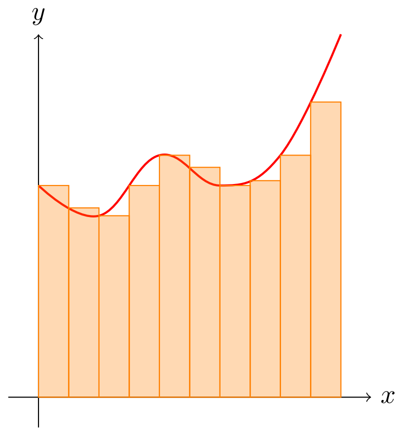


Figura 49: Variante 1

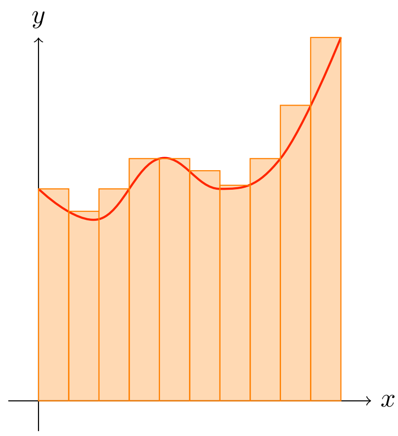


Figura 50: Variante 2

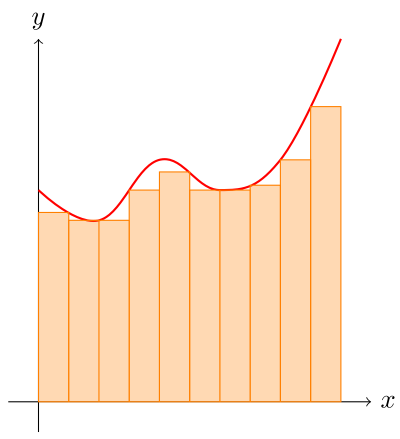


Figura 51: Variante 3

2. Se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)$ rappresenta l'area racchiusa tra il grafico di f e l'asse x.

3. In generale, $\int_a^b f(x)$ rappresenta l'area **con segno** racchiusa tra il grafico di f e l'asse x.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{ Area della regione gialla} - \text{area della regione azzurra}$$

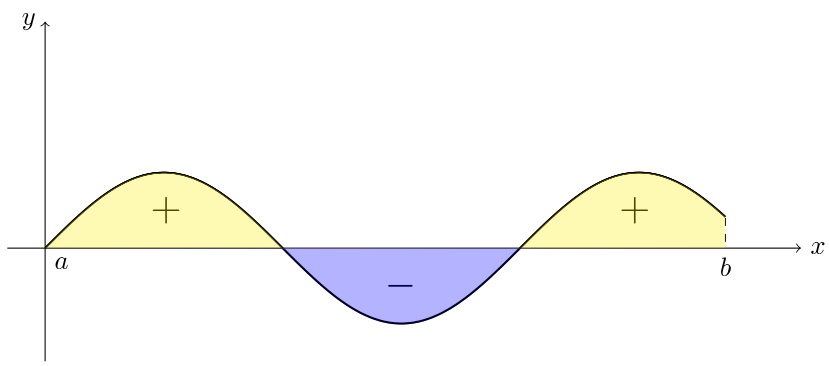


Figura 52: Confronto tra funzioni

8.2 Proprietà di base

Tutte queste proprietà si applicano a funzioni continue di segno qualsiasi.

- $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- Se k è costante
$$\int_a^b (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$
ma in generale **non vale**
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$
- Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora:
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$
- Se $a < b < c$, allora:
$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

8.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 13 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da:*
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in [a, b]$$
è differenziabile e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.
*Una funzione differenziabile P tale che $P' = f$ si chiama una **primitiva** di f.*
*L'insieme di tutte le primitive di f si chiama **integrale indefinito** di f e si denota con:*
$$\int f(x)\, dx$$

8.3.1 Dimostrazione

Prendiamo un qualsiasi $x_0 \in [a, b]$. Sia:
$$R.I.^2(x) := \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad per x \in [a, b]$$
Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} R.I.(x) = f(x_0)$, cioè che:
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; t.c. \; \forall x \in [a, b],$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \;\; x \neq x_0 \to f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$
Prendiamo $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Poichè f è continua, sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e dunque esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$,
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta. \;\; x \neq 0 \to \underbrace{f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon}_{\circ}$$

[2] **R.I.**: Rapporto Incrementale

Prendiamo ora $x \in [a, b]$ tale che $x_0 < x \leq x_0 + \delta$

$$\begin{aligned} R.I.(x) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt \right) = \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\ dt \end{aligned}$$

Grazie a $\circ$:

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon)\ dt \leq R.I.(x) \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon)\ dt$$

Se c è costante:

$$\int_{x_0}^x c\ dt = c(x - x_0) \quad \text{(area di un rettangolo)}$$

e quindi:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq R.I.(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Stesso ragionamento se $x_0 - \delta \leq x < x_0$. $\square$

8.3.2 Corollario

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $P' = f$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\ dx = P(b) - P(a)$$

8.3.3 Dimostrazione del corollario

Come prima, sia $F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$ per $x \in [a, b]$. Allora:

$$(F - P)' = F' - P' = f - f = 0$$

Quindi $F - P = C$, con $C \in \mathbb{R}$ costante. Inoltre,

$$C = F(a) - P(a) = \int_a^a f(t)\ dt - P(a) = 0 - P(a) = -P(a)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\ dt &= F(b) = F(b) - P(b) + P(b) \\ &= C + P(b) = -P(a) + P(b) \end{aligned}$$

8.4 Esempi

Esempio 8.1

$$\int 0\ dx = C \quad \textit{dove } C \in \mathbb{R} \textit{ è una generica costante}$$

Esempio 8.2

$$\int 1\ dx = x + C$$

Esempio 8.3

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

8.5 Alcune primitive elementari

1. $$\int e^x\ dx = e^x + C$$

2. $$\int sin(x)\ dx = -cos(x) + C$$

3. $$\int cos(x)\ dx = sin(x) + C$$

4. $$\int x^\alpha\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante e } \alpha \neq -1$$

5. $$\int x^{-1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \log|x| + C$$

6. $$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan(x) + C$$

8.6 Osservazioni

Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si definisce:

$$\int_a^a f(x)\ dx := 0$$

$$\int_b^a f(x)\ dx := -\int_a^b f(x)\ dx$$

Questa notazione è utile soprattutto quando si integra per sostituzione.

8.6.1 Esempi

Esempio 8.4

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3)\ dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int (x^6 - 3x^2 + 3)\ dx = \int x^6\ dx - 3\int x^2\ dx + \int 3\ dx =$$

$$= \frac{x^7}{7} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + 3x + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 (x^6 - 3x^2 + 3)\ dx = \left[\frac{x^7}{7} - x^3 + 3x\right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{7} - 1 + 3}_{P(1)} - \underbrace{(0 - 0 + 0)}_{P(0)} = \frac{15}{7}$$

Esempio 8.5

$$\int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{x^2+1} + 5x\right)\ dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int \left(x^5 - \frac{3}{x^2+1} + 5x\right)\ dx = \int x^5\ dx - 3\int \frac{1}{x^2+1}\ dx + 5\int x\ dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - 3\arctan(x) + \frac{5x^2}{2} + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{x^2+1} + 5x\right)\ dx = \left[\frac{x^6}{6} - 3\arctan(x) + \frac{5x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{6} - 3\arctan(1) + \frac{5}{2} - (0 - 0 + 0) = \frac{1}{6} - 3\arctan(1) + \frac{5}{2}$$

Esempio 8.6

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx$$

Calcolo prima l'integrale indefinito:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx = \int x^{-3}\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{16}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24}$$

Esempio 8.7

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx$$

Integrazione per sostituzione:

$$y = 5x + 7$$

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}(5x+7) \cdot dx = 5\, dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{5}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{5}\, dy = \frac{1}{5} \int y^{-\frac{1}{2}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{y} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x+7} + C$$

Esempio 8.8

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$$

Sostituiamo $\left[y = x^2\right]$ *quindi* $dy = 2x \cdot dx$ *(anche gli estremi di integrazione)*

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(y)\, dy = \frac{1}{2}\left[-\cos(y)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{1}{2}(+1+1) = 1$$

Esempio 8.9

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})\, dx$$

Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$ *quindi* $dy = -\frac{1}{x^2}\, dx$

$$= -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(y)\, dy = [\sin(y)]_{y=\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 - 1 = -1$$

8.7 Integrazione delle funzioni razionali

Esiste, di fatto, un algoritmo che permette di calcolare gli integrali delle funzioni razionali (quozienti di polinomi). Lo schema generale è:

1. ricondursi al caso in cui il grado del **denominatore** sia maggiore del grado del **numeratore**;
2. scomporre il denominatore;
3. scrivere l'integranda come somma di funzioni più semplici;
4. integrare ogni frazione singolarmente.

Si ricorda che un polinomio di grado due $P(x) = ax^2 + bx + c$, si scompone come:

$$P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$$

dove:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sono gli zeri di P. (Purchè $b^2 - 4ac \geq 0$)

8.7.1 Esempi

Esempio 8.10

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Ho $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$*. Cerco di scrivere:*

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Con A, B *costanti da determinare*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{X^2 - 3x + 2}$$

Per far si che questa sia uguale a $\frac{1}{x^2-3x+2}$ *devo imporre delle condizioni su* A *e* B

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{x-2}\, dx = -\log|x-1| + \log|x-2| + C$$

Esempio 8.11

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\,dx$$

Verifico che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore:

$$\frac{x^2-2}{x^2-3x+2} = \frac{x^2 \overbrace{-3x+2+3x-2}^{\text{sommo e sottraggo}} -2}{x^2-3x+2} =$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+2} + \frac{3x-4}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$$

Scompongo il denominatore: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ *e voglio trovare* A *e* B *costanti tali che:*

$$\frac{3x-4}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2}$$

Devo imporre:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-B=-4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=1 \\ B=3-A=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)\,dx =$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = x - \log|x-1| + 2\log|x-2| + C$$

Esempio 8.12

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$$

x^2+4x+5 *non ha radici reali! Uso:*

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan(y) + C$$

Devo ricondurmi a scrivere x^2+4x+5 *come* ***somma di quadrati****:*

$$x^2+4x+5 = x^2+4x+4-4+5 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

Sostituisco $y = x+2$ *quindi* $dy = dx$ *e:*

$$= \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan(y) + C = \arctan(x+2) + C$$

Esempio 8.13

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+5} = \frac{x^2+4x+5-4x-5}{x^2+4x+5} = 1 - \frac{4x+5}{x^2+4x+5}$$

Denominatore privo di radici reali, quindi cerco di utilizzare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$

Osservo:

$$\frac{d}{dx}(x^2+4x+5) = 2x+4$$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+5} = 1 - \frac{2\cdot 2x + 2\cdot 4 + -2\cdot 4 + 5}{x^2+4x+5} =$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{3}{x^2+4x+5} =$$

$$1 - 2\cdot\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{3}{(x+2)^2+1}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+5}\,dx = x - 2\log(x^2+4x+5) - 3\arctan(x+2) + C$$

8.8 Integrazione per parti

Definizione 8.1 (Proposizione)
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Allora, vale:

$$\int_a^b f(x)\ g'(x)\ dx = [f(x)\ g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\ g(x)\ dx$$

$$\int f(x)\ g'(x)\ dx = [f(x)\ g(x)] - \int f'(x)\ g(x)\ dx$$

8.8.1 Esempi

Esempio 8.14

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\ \underbrace{e^x}_{g'(x)}\ dx$$

$$\int x\, e^x\ dx = x\, e^x - \int e^x\ dx = x\, e^x - e^x + C$$

Esempio 8.15

$$\int log(x)\ dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{log(x)}_{f(x)}\ dx =$$

$$= xlog(x) - \int \frac{1}{x} x\ dx = xlog(x) - x + C$$

Esempio 8.16

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \int_0^\pi \sin(x)\cdot\sin(x)\, dx =$$

$$= -\left[\cos(x)\cdot\sin(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\cdot\cos(x)\, dx =$$

$$= -0 + 0 + \int_0^\pi \cos^2(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\pi (1-\sin^2(x))\, dx = \int_0^\pi 1\, dx - \int_0^\pi \sin^2(x)\, dx$$

$$1\cdot(\pi - 0) - \int_0^\pi \sin^2(x)\, dx$$

Abbiamo dimostrato:

$$\left[A = \pi - A \Leftrightarrow 2A = \pi \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}\right]$$

Quindi:

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 8.17

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, dx$$

La funzione integranda è ben definita e continua su $[0,2]$. *Cambio di variabile:*

$$y = 2x+1$$

$$dy = \frac{d}{dx}(2x+1)\, dx = 2\, dx$$

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\log(y)}{y^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_1^5 y^{-2}\cdot\log(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-y^{-1}\cdot\log(y)\right]_{y=1}^5 + \int_1^5 y^{-2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\log(y)}{y}\right]_{y=1}^5 + \left[-y^{-1}\right]_{y=1}^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\log(5)}{5} + \frac{\log(1)}{1}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\log(5)}{5}\right) - \frac{4}{5} =$$

$$= -\frac{\log(5)}{10} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{10}\log(5) - \frac{4}{5}$$

9 Serie

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali (cioè, una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Vogliamo dare un senso preciso alla "somma infinita"

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

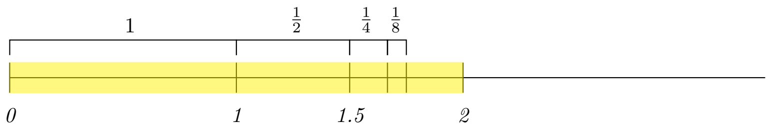
Definizione 9.1
Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, si definisce la somma della ***serie*** *di termine generale $\{a_n\}$ come:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

$$\text{Si dice che la serie } \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \\ \text{oscilla} \end{cases} \quad \text{se il limite } \begin{cases} \text{esiste finito} \\ \text{esiste infinito} \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

Esempio 9.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} 2^{-n}$$



Considero prima:

$$\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \quad \text{con } N \in \mathbb{N} \text{ qualsiasi.}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} (1/2)^n\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^N}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

Somma telescopica:

$$= 1 \cancel{+\frac{1}{2}} \cancel{+\frac{1}{4}} \cancel{+\frac{1}{8}} \cancel{+\ldots} \cancel{+\frac{1}{2^N}} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{4}} \cancel{-\frac{1}{8}} \cancel{-\ldots} - \frac{1}{2^{N+1}} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}$$

Dunque:

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

9.1 Osservazioni

- Possiamo anche definire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

$$\sum_{n=57}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=57}^{N} a_n \ldots$$

- Nessuno garantisce che la somma della serie esista. Ad esempio, sia:

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

La serie **Oscilla**. La somma delle serie **non esiste**, infatti:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } N \text{ pari} \\ 0 & \text{se } N \text{ dispari} \end{cases}$$

- Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, allora necessariamente $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Infatti, sia $S := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \underset{N\to+\infty}{\to} S - S = 0$$

(perchè se $f(N) \underset{N\to+\infty}{\to} S$ allora $f(N-1) \underset{N\to+\infty}{\to} S$). **Non vale** il viceversa: potrebbe benissimo capitare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, però $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converga.

9.1.1 Esempi importanti

1. **Serie geometrica** (di ragione $x \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

Essa converge se e solo se $-1 < x < 1$ e in tal caso si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Conseguenza: $0,\overline{9} = 1$
Dimostrazione: $0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots =$

$$= 9 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 1 \right) =$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \cdot \frac{10}{9} - 9 = 10 - 9 = 1$$

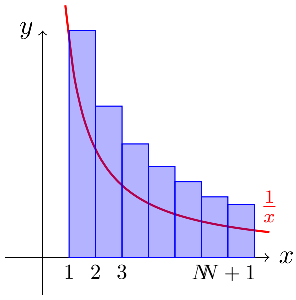
2. **Serie esponenziale**:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

3. **Serie armonica**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Dimostrazione:



Area dell'unione dei rettangoli $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$
Area sottesa al grafico $y = \frac{1}{x}$ per $1 \leq x \leq N + 1 =$

$$= \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(N+1)$$

Dunque:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \log(N+1) \underset{N \to +\infty}{\to} +\infty$$

Osservazione:
Facendo stime più precise, si potrebbe dimostrare che vale:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log(N+1) + \gamma + o(1) \;\; per N \to +\infty$$

dove γ è un opportuno numero reale, chiamato la costante di **Eulero-Mascheroni** ($\gamma \approx 0.577\ldots$).

4. **Serie armonica generalizzata**: Sia $s \in \mathbb{R}$ un parametro. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Converge se $x > 1$ e diverge se $s \leq 1$ (o oscilla)

9.2 Criteri per studiare il carattere di una serie

Per carattere si intende:

- Convergente
- Divergente
- Oscillante

1. **Serie a termini positivi**: criteri del $\begin{cases} \text{confronto} \\ \text{confronto asintotico} \\ \text{rapporto} \end{cases}$
2. **Serie a segno alterno**: criterio di Leibniz
3. **Serie generali**: convergenza assoluta

9.2.1 Serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad con \ \ a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Osservazioni generali:

1. Le serie a termini positivi convergono o divergono, ma **non** oscillano mai, perchè

$$a_0 \leq a_0 + a_1 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \leq \ldots$$

   Siccome $a_n \geq 0 \forall n$, la successione delle somme parziali è non decrescente, quindi

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \quad \text{esiste per monotonia}$$

2. I criteri qui di seguito si applicano anche alle serie i cui termini sono positivi "da un certo punto in pou" (cioè, $a_n \geq 0$ per ogni n abbastanza grande, maggiore o uguale di un certo n_0). Infatti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n}_{\text{Somma } \textbf{finita}} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

   Il carattere della prima serie dipende soltanto dal carattere della serie con somma infinita. Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge.

9.2.2 Criterio del confronto

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni di numeri reali tali che:

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge e vale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

Esempio 9.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \textit{converge (serie armonica generalizzata)}$$

Per confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ *converge.*

Esempio 9.3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

$$0 \le \frac{\ln(n)}{n}, \quad \frac{\ln(n)}{n} \ge \frac{\ln(2)}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \ge 2$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{n} = (\ln(2)) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Per confronto $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ *diverge.*

9.2.3 Criterio del confronto asintotico

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di numeri reali tali che $a_n \ge 0$, $\;b_n \ge 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che il limite

$$\Lambda := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

esista e sia $0 < \Lambda < +\infty$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge se e solo se } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge.}$$

Esempio 9.4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{7n^3 + n\sin(n)}$$

È una serie a termini positivi, perchè $5n \ge 0$, $|n\sin(n)| \le |n|$, $7n^3 + n\sin(n) \ge 7n^3 - n \ge 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. *Sia:*

$$a_n := \frac{5n}{7n^3 + n\sin(n)}, \quad b_n := \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n \cdot n^2}{7n^3 + n\sin(n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{7 + \frac{\sin(n)}{n^2}} = \frac{5}{7}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \;\; \textit{converge}$$

Per confronto asintotico

9.2.4 Corollario/Caso particolare

P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q , allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ converge se e solo se } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{n^q} \text{ converge}$$

Esempio 9.5

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{23} + 42n^2 + 3}{n^{25} - 31n^2 + 23n - 3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{23}}{n^{25}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \textit{converge}$$

La serie iniziale converge per confronto asintotico.

9.2.5 Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che il limite

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + 1}{a_n}$$

esista, finito o infinito.

- Se $L < 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $L > 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.
- Se $L = 1$, allora non possiamo concludere nulla.

Esempio 9.6

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

Serie a termini > 0, $a_n := \frac{n^3+1}{n!}$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3+1} = \frac{(n+1)^3+1}{n^3+1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$[(n+1)! = (n!) \cdot (n+1)]$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cancel{n^3}((1+\frac{1}{n})^3 + \frac{1}{n^3})}{\cancel{n^3}(1+\frac{1}{n^3})}$$

$$\frac{a_n+1}{a_n} \to 0 \ \ \textit{per } n \to +\infty$$

Per il criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}$ *converge.*

Esempio 9.7
Per ogni $x \in (0, +\infty)$ *dato,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge.*
Serie a termini > 0*. Sia:*

$$a_n := \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1$$

Per il criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge.*

9.2.6 Serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots$$

con $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

è una serie a segni alterni,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin(n) = -\sin(1) + \sin(2) - \sin(3) + \sin(4) - \ldots$$

Non è una serie a segni alterni. Invece lo è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n |\sin(n)| = -|\sin(1)| + |\sin(2)| - |\sin(3)| + |\sin(4)| - \ldots$$

9.2.7 Criterio di Leibnitz

Sia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, tali che:

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

(successione decresccente)

$$\text{Allora } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n \quad \text{converge}$$

Esempio 9.8

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Sia $b_n := \frac{1}{n}$. *Valgono le ipotesi del criterio di Leibnitz:*

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \surd$
- $b_{n+1} \leq b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \surd$
- $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \quad \surd$

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

9.2.8 Serie a termini di segno qualsiasi

9.2.9 Criterio di convergenza assoluta

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Osservazioni:

1. Si dice che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **converge assolutamente** quando converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.
2. Può benissimo capitare che una serie converga, ma **non** assolutamente, ad esempio:

Esempio 9.9

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \textit{converge, ma}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \textit{non converge}$$

Questo criterio fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza di una serie.

Esempi:

Esempio 9.10

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2+1}$$

Considero la serie dei valori assoluti che è una serie a valori positivi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+1}$$

Si osserva che:

$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Adesso che ci siamo ricondotti ad una serie a valori positivi si possono usare tutti i criteri relativi, in questo caso utilizziamo il criterio del confronto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \textit{converge, per confronto con:}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \textit{converge (serie armonica generalizzata)}$$

Per confronto, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+1}$ *converge. Per il criterio di convergenza assoluta,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2+1}$ *converge.*

9.3 Serie di potenze

Si tratta di serie che dipendono da un parametro $x \in \mathbb{R}$ e si scrivono nella forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ è una successione di coefficienti e $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto il centro della serie.

Ad esempio sono serie di potenze:

Esempio 9.11

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(x-3)^n \qquad (a_n = n, x_0 = 3)$$

$$\sum_{n=0}^{+@8} \frac{27^n}{n^2+3}(x-5)^n \qquad (a_n = \frac{27^n}{n^2+3}, x_0 = 5)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{27^n}{n!}x^n = 1 + 27x + \frac{27^2}{2}x^2 + \frac{27^3}{6}x^3$$

Le serie di potenze in sostanza rappresenta un polinomio di grado infinito, che dipende dal parametro x.

9.3.1 Serie di potenze notevoli con centro $x_0 = 0$

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \text{per } x \in (-\infty, +\infty)$$
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \text{per } x \in (-\infty, +\infty)$$
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \qquad \text{per } x \in (-\infty, +\infty)$$
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{per } x \in (-1, 1)$$
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \qquad \text{per } x \in (-1, 1]$$
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x \qquad \text{per } x \in [-1, 1]$$

TODO

Teorema 14 *Per ogni serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *esiste un unico valore* $R \in [0, +\infty]$ *t.c.:*

- *se* $|x - x_0| < R$, *allora la serie* ***converge (assolutamente)***
- *se* $|x - x_0| > R$, *allora la serie* ***non converge***

9.3.2 Osservazioni

1. Reale unico R è detto **raggio di convergenza** della serie.
2. Per valori x t.c. $|x - x_0| = R$ la serie potrebbe convergere oppure no; il carattere varia da caso a caso.
3. Sono possibili anche i casi limite $R = 0$ (la serie converge solo per $x = x_0$) e $R = +\infty$ (la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$).

9.3.3 Esempi

Esempio 9.12
Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze con centro in $x_0 = 7$*:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n}(x-7)^n$$

Per il teorema 14, basta basta studiare il caso $x > 7$ *e poi per* $x < 7$ *si avrà la stessa situazione per simmetria. In questo caso la serie è a termini positivi e si può applicare il criterio del rapporto:*

$$\frac{3^{n+1}}{n+1}(x-7)^{n+1} \cdot \frac{n}{3^n(x-7)^n} = 3(x-7) \cdot \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 3(x-7)$$

Per il criterio del rapporto, la serie converge se $3(x-7) < 1$, *diverge se* $3(x-7) > 1$.
Equivalentemente, se $x - 7 < \frac{1}{3}$ *allora la serie converge, se* $x - 7 > \frac{1}{3}$ *allora la serie diverge. Quindi il raggio di convergenza è* $R = \frac{1}{3}$.

9.3.4 Formule di risoluzione

Ragionando come sopra, si potrebbe dimostrare che il raggio di convergenza R di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ è tale che:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

purchè il limite esista. Inoltre, si potrebbe dimostrare che vale:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

purchè il limite esista.

Queste formule non sono strettamente necessarie per calcolare il raggio di convergenza, ma possono essere utili.

9.3.5 Proprietà

Le serie di potenze godono di proprietà importanti, che non valgono per serie di funzioni più generali. Ad esempio, data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ con raggio di convergenza R, la funzione:

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

è differenziabile e vale:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Inoltre per ogni intervallo $[p, q] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ si ha

$$\int_p^q f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_p^q a_n(x-x_0)^n\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right]_{x=p}^{q}$$

Esempio 9.13
Sviluppo in serie di arctan *(e formula di Leibnitz per* π*).*
Sappiamo che:

$$\forall y \in (-1,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$$

Se sostituisco $y = -t^2$

$$\forall t \in (-1,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$$

Integro entrambi i menbri per $t \in [0,x]$ *dove* x *è fissato,* $0 < x < 1$ *:*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = [\arctan t]_{t=0}^{x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_{t=0}^{x} = \arctan x - \arctan 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$

Si dimostra che questa formula continua a valere per ogni $x \in [-1,1]$ *sostituisco* $x = 1$*:*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Formula di Leibnitz per π*.*