Tutoraggio

Linguaggi regolari

$L \in$ Regolare $\iff$ DFA

1.

$Val: \Sigma^* \to \mathbb{N}$

$\Sigma = \{0,1\}$ $\quad L = \{\sigma \in \Sigma^* \mid val(\sigma) \equiv 0 \pmod 3\}$

(numeri divisibili per 3)

Esempi $11 = 3 \in L$

$n \% 3$

[0 → 0	3 → 0	6 → 0
[1 → 1	4 → 1	7 → 1
[2 → 2	5 → 2	8 → 2

↳ classi di equivalenza

Aggiungere 0 → $\underbrace{\underbrace{0101}_{5}\underline{0}}_{10}$ → $\cdot 2$

Aggiungere 1 → $\underbrace{\underbrace{0101}_{5}\underline{1}}_{11}$ → $\cdot 2 + 1$

Classi di equivalenza

$n = 3K + 0$ Resto 0

$n = 3K + 1$ Resto 1

$n = 3K + 2$ Resto 2

$n = 3K + 0$

Aggiungere 0

$n = 3K \to 2n = 3K$

$n = 3\frac{K}{2} \underline{+0}$

Aggiungere 1

$n = 3K \to 2n + 1 = 3K$

$2n = 3K - 1$

$2n = 3K + 2$

$-1 \to 2$
$0 \to 0$
$1 \to 1$
$2 \to 2$
$3 \to 0$

$n = 3\frac{K}{2} \underline{+1}$

$n = 3K + 1$

Aggiungere 0

$2n = 3K + 1$

$2n = 3K - 2$

Aggiungere 1

$2n \cancel{+1} = 3K \cancel{+1}$

$n = 3\frac{K}{2} \underline{+0}$

$n = 3k+2$

Aggiungere 0

$2n = 3k+2$

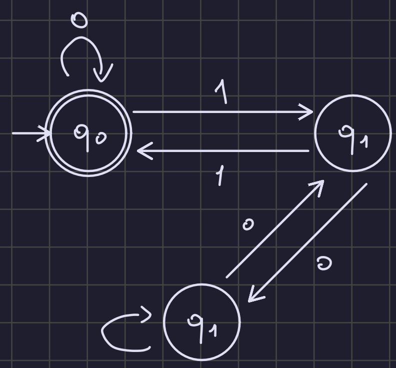
$n = 3\frac{k}{2}+1$

Aggiungere 1

$2n+1 = 3k+2$

$2n = 3k+1$

$n = 3\frac{k}{2}+1$



Dimostrazione

$x \in L \iff \hat{\delta}(q_0, x) \in F$

Separando il se e solo se bisogna dimostrare le seguenti implicazioni:

1) $x \in L \implies \hat{\delta}(q_0, x) \in F$

2) $x \in L \impliedby \hat{\delta}(q_0, x) \in F \quad \equiv \quad x \notin L \implies \hat{\delta}(q_0, x) \notin F$

Dimostro per induzione sulla lunghezza della stringa : $|\sigma|$

Caso base

È una stringa lunga il minimo possibile per mostrare sia che appartiene sia che non appartiene

$|\sigma| = 1$

$\sigma = 0 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, 0) = q_0 \in F$

$\sigma = 1 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, 1) = q_1 \notin F$

Non bisogna necessariamente coprire tutti gli stati dell'automa nei casi base perchè basta una stringa che finisce in uno stato finale e una che non finisce in uno stato finale

Passo induttivo

Ipotesi induttiva

1) $\forall \sigma .\ \exists n > 1 .\ |\sigma| \leq n : \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_0\} \in F$

2) $\forall \sigma .\ \exists n > 1 .\ |\sigma| \leq n : \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_1, q_2\} \notin F$

Prendo una stringa di lunghezza n+1:

Sigma è una stringa binaria multiplo di 3

$\sigma = \sigma' \alpha \ .\ |\sigma'| = n ,\ \alpha \in \Sigma$

$- \ \sigma \in L ,\ |\sigma| = n+1$

- $\sigma = \sigma' 0 \rightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$$= \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0)$$

$$= \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$$

$$\downarrow \text{i.i}$$

$$= \delta(q_0, 0) = q_0 \in F$$

- $\sigma = \sigma' 1 \rightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$$= \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1)$$

$$= \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$$

$$\downarrow \text{i.i}$$

$$= \delta(q_1, 1) = q_0 \in F$$

- $\sigma \notin L, \ |\sigma| = n+1$
  - $\sigma = \sigma' 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$$= \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0)$$

$$= \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$$

$$\downarrow \text{ii}$$

$$= \delta(\{q_1, q_2\}, 0) = \{q_2, q_1\} \notin F$$

  - $\sigma = \sigma' 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$

$$= \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1)$$

$$= \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$$

$$* \xrightarrow{\text{ii1}} = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$$

$$* \xrightarrow{\text{ii2}} = \delta(q_2, 0) = q_2 \notin F \qquad \square$$