Insiemi creativi

1. $A = \{ x^4 \mid \varphi_x(x^2) = x^3 \}$

$= \{ y \mid \exists x.\ y = x^4 \wedge \varphi_x(x^2) = x^3 \}$

$\bar{A} = \{ y \mid \nexists x.\ y = x^4 \vee \varphi_x(x^2) \neq x^3 \}$

2. $B = \{ y \mid \exists x.\ y = x^4 \Rightarrow \varphi_x(x^2) = x^3 \}$ $\qquad a \to b \equiv \neg a \vee b$

$= \{ y \mid \nexists x.\ y = x^4 \vee \varphi_x(x^2) = x^3 \}$

Intuitivamente l'insieme è creativo perchè la condizione a sinistra è decidibile e quella a destra è semidecidibile, quindi dimostriamo che l'insieme è RE costruendo l'algoritmo:

1.) B RE

```
input(y)

for x = 0 to y {
  if y = x^4 {
    costruisco phi_x
    while next step di phi_x(x^2) ≠ x^3 {
    }
    return 1
  } else {
    return 1
  }
}
```

2) B creativo

B è creativo se $K \leq_f B$. Bisogna fornire la funzione semicaratteristica:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} z^3 & x \in K \wedge \exists z.\ y = z^2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva (descrivere almeno a parole l'algoritmo o fornendolo), quindi si può applicare il teorema smn:

$\exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

$x \in K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \psi(x,y) = z^3 \iff y = z^2$

$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(y) = z^3 \iff y = z^2$

$\overset{z = g(x)}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(g(x)^2) = g(x)^3$

$\overset{\text{def } B}{\Rightarrow} g(x)^4 \in B$

$x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \psi(x,y) \uparrow \forall y$

$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(y) \uparrow \forall y$

$\overset{y = g(x)^2}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(g(x)^2) \uparrow \neq g(x)^3$

$\overset{\text{def } B}{\Rightarrow} g(x)^4 \notin B$

B è creativo e $\overline{B}$ è produttivo

3. $C = \{ y^2 \mid \varphi_{y-3}(3^y) = 2y \}$

$= \{ (z+3)^2 \mid z = y-3 \,.\, \varphi_z(3^{z+3}) = 2(z+3) \}$

Intuitivamente questo insieme è RE. Dimostriamo che è creativo:

1) C é RE

```
input(y)
z = y - 3
for x = 0 to y {
  if y = (z+3)^2 {
    verifica altra condizione ...
  }
}
```

2) $K \leq_F C$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 2z+6 & x \in K \wedge \exists z.\, y = 3^{z+3} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Psi è parziale ricorsiva (da completare)

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

$x \in K \overset{\text{def }\psi}{\Rightarrow} \psi(x,y) = 2z+6 \iff y = 3^{z+3}$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(y) = 2z+6 \iff y = 3^{z+3}$

$\overset{z=g(x)}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(3^{g(x)+3}) = 2g(x)+6$

$\overset{\text{def } C}{\Rightarrow} (g(x)+3)^2 \in C$

$x \notin K \overset{\text{def }\psi}{\Rightarrow} \forall y.\, \psi(x,y)\uparrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y.\, \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

$\overset{y=3^{g(x)+3}}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(3^{g(x)+3})\uparrow \neq 2g(x)+6$

$\overset{\text{def } C}{\Rightarrow} (g(x)+3)^2 \notin C$

C è creativo e $\overline{C}$ è produttivo

4. $D = \{ x \mid \exists y.\ x = 2^y \Rightarrow \varphi_{\log_2 x}(x)\downarrow \}$

$= \{ x \mid \exists y.\ x = 2^y \Rightarrow \varphi_y(2^y)\downarrow \}$

Dimostriamo che D è creativo

1) D é RE

```
input(x)
for y = 0 to x {
  if x = 2^y {
    costruisco phi_y
    while {
       esegui prossimo step di phi_y(x)
       if phi_y(x) ha terminato return 1;
    }
  } else {
    return 1
  }
}
```

2) $K \leq_F D$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

banalmente parziale ricorsiva

$x \in K \Rightarrow \dots \Rightarrow 2^{g(x)} \in D$

$x \notin K \Rightarrow \dots \Rightarrow 2^{g(x)} \notin D$

5. $E = \{ x \mid |W_x| > 3 \}$

$= \{ x \mid$ esistono almeno 3 input su cui phi_x termina $\}$

1) E Re Dovetail che termina dopo aver trovato 3 input per cui termina

2) $K \leq_F E$ $\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

...