Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2024/2025

Indice

1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.
Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo**: Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

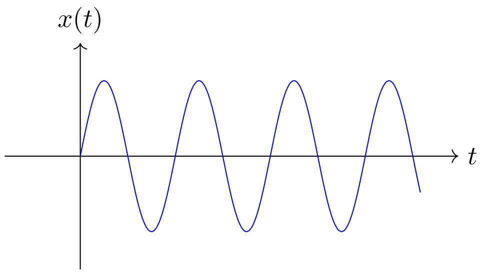


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto**: Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

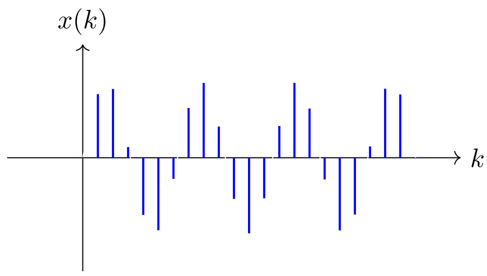


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

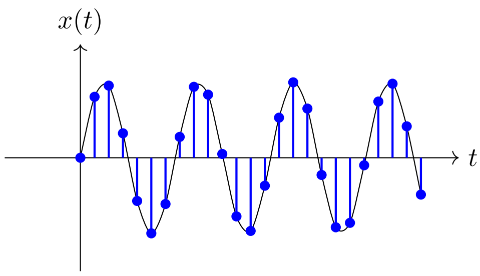


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

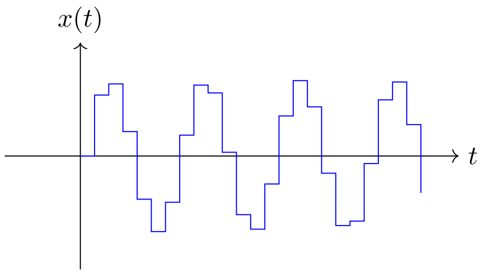


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni (x, y).
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale $(x, y)^3$ per rappresentare ogni colore (R,G,B).

1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

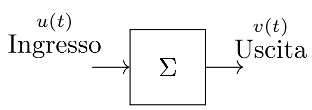


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

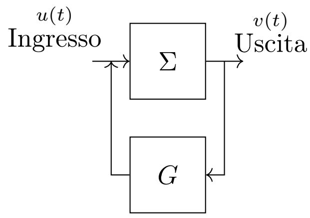


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

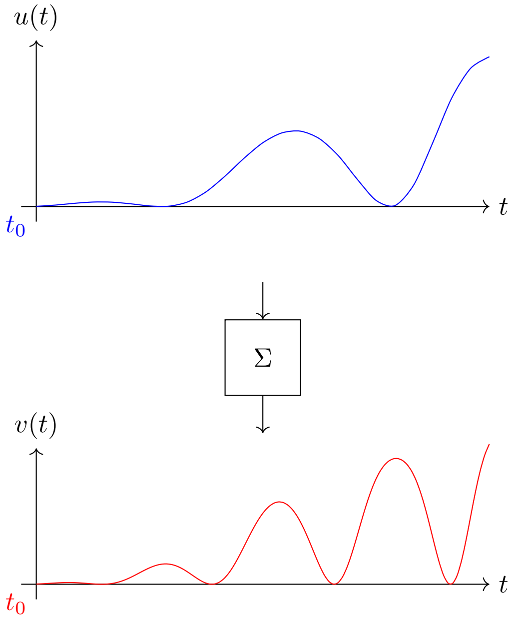
$$\underbrace{f}_{segnale} \qquad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1. t, τ, t_i: tempo continuo
2. k: tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se $v_1(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t)$ e $v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_2(t)$ allora $v_1(t) + v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t) + u_2(t)$.
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.



$$t_1 = t_0 + t_n$$

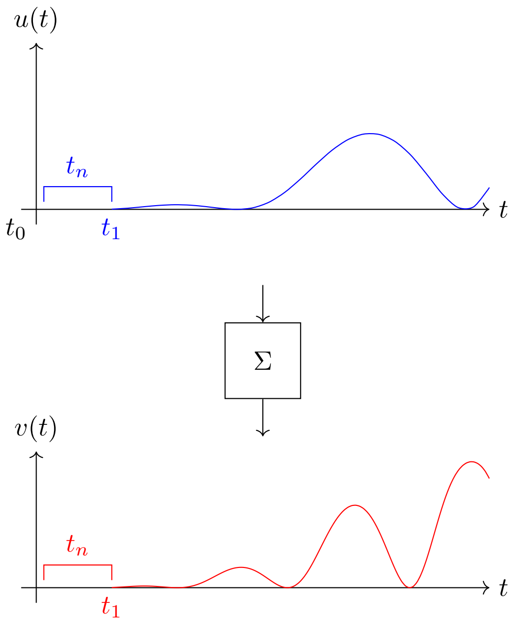


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

3 Sistemi

3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo**:
    (a) Equazioni differenziali
    (b) Trasformate di Laplace
    (c) Trasformate di Fourier
2. **Discreto**:
    (a) Equazioni alle differenze
    (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.
L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far si che risulti stabile.

3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:

$$\text{Ev. Fisico} \longrightarrow \boxed{\text{Stati}}$$

Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

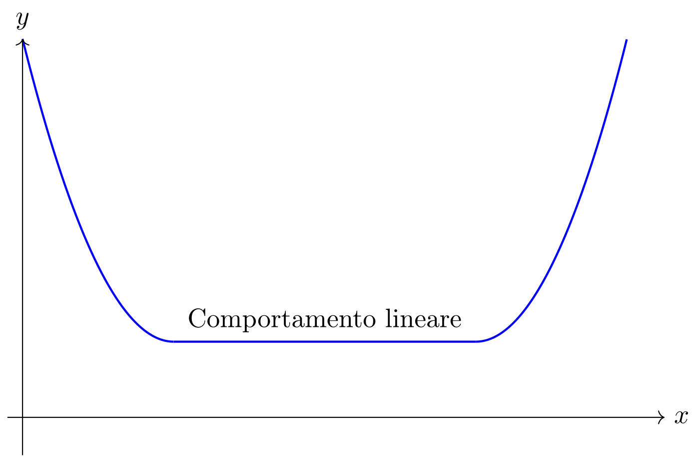


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

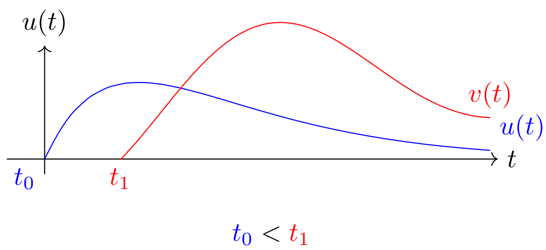


Figura 10: Esempio di causalità

3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

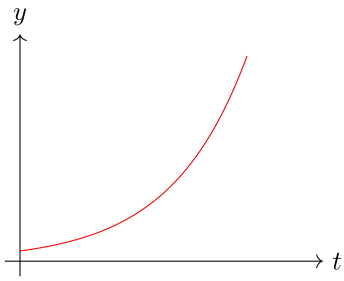


Figura 11: Sistema instabile

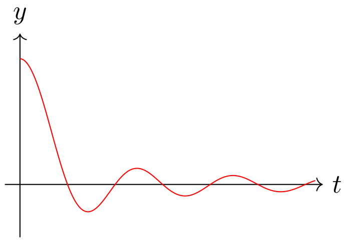


Figura 12: Sistema stabile

3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0,\ |u(t)| < M\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists N > 0,\ |v(t)| < N\ \forall t \in \mathbb{R}$$

con $M, N \in \mathbb{R}$ non per forza uguali

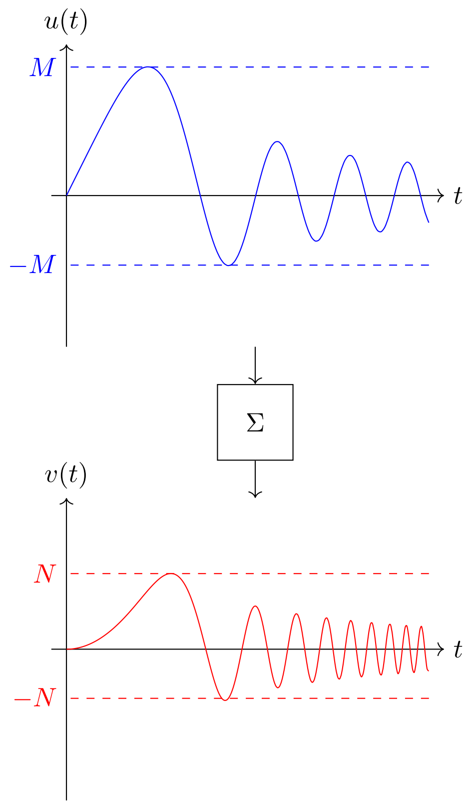


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 0 \ \ \forall r \text{ di } u(t), \ t \in \mathbb{R}$$

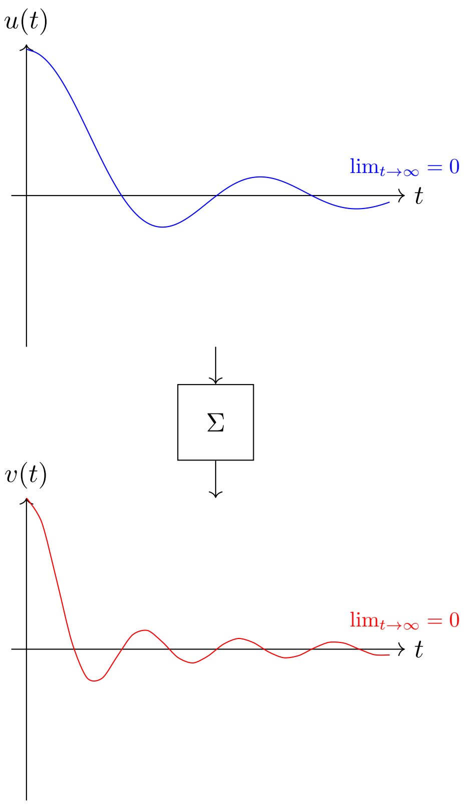


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

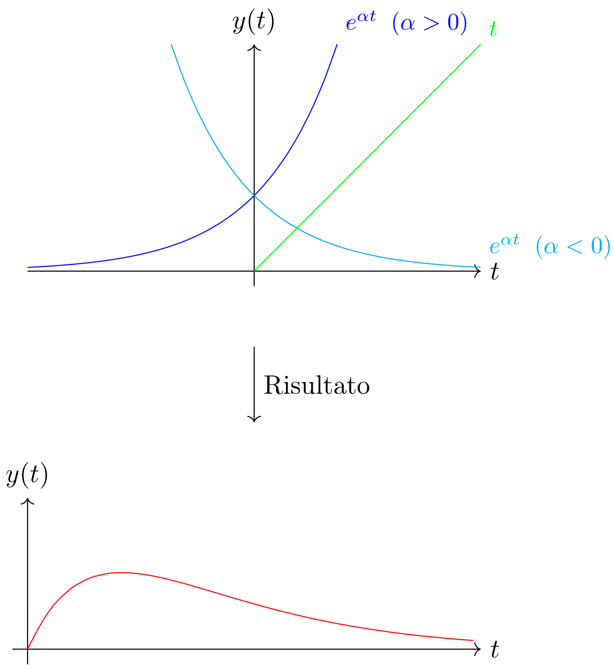


Figura 15: Esempo di segnale

Ad esempio con $l = 1$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con $\alpha < 0$ il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con $l = 2$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome $\alpha \in \mathbb{C}$ si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

λ è la parte reale

$j\omega$ è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)} = e^{\alpha t} = \rho(cos(\omega t) + j\sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Definizione 4.1 (Complesso cognugato)**.** A ogni numero complesso è associato un cognugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

$$S = \rho(cos(\theta) + j\sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(cos(-\theta) + j\sin(-\theta))$$

5 Funzioni in C

5.1 Funzione a variabili complesse

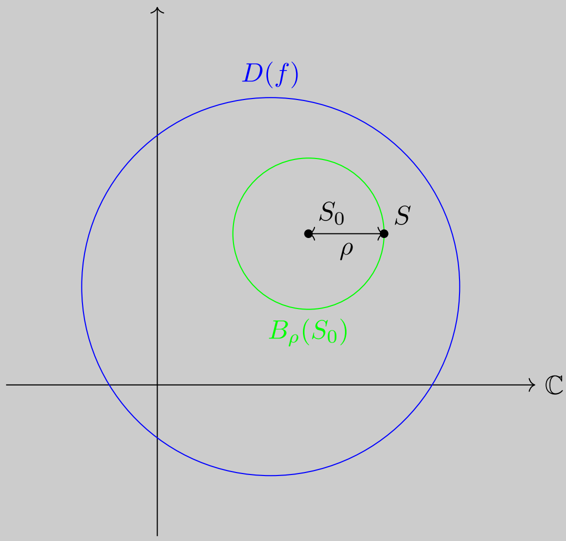
Definizione 5.1 (Funzione a variabile complessa)**.** Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

Definizione 5.2 (Punto interno)**.** Un punto S_0 appartenente a un intorno $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ è interno a $D(f)$ se e solo se esiste un disco $B_\rho(S_0)$ di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$ centrato in S_0 tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi $D(f)$ è un dominio e $B_\rho(S_0)$ è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$

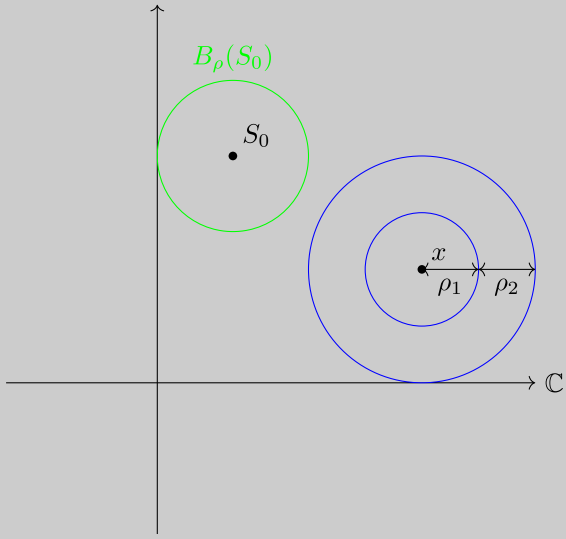


Definizione 5.3 (Insieme aperto)**.** È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

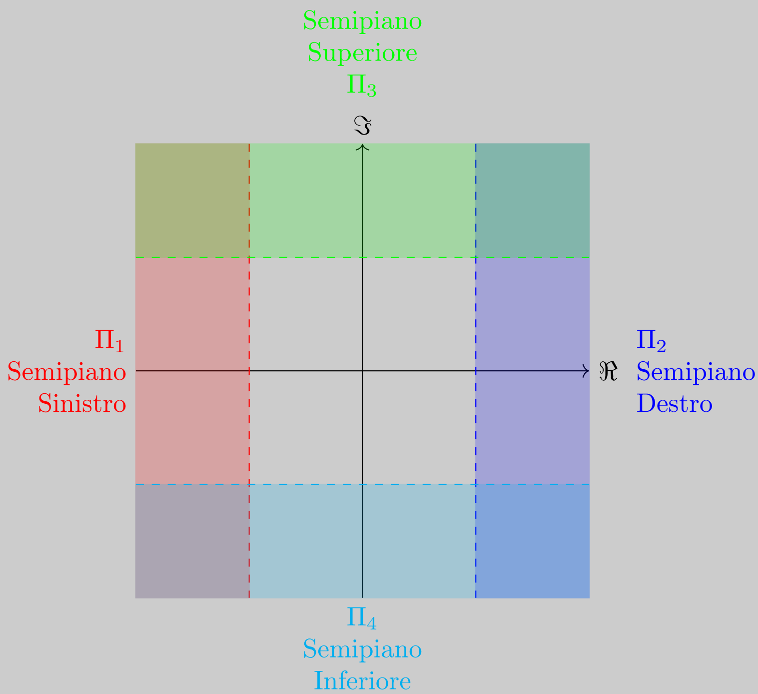
Ad esempio:

- insieme $\mathbb{C}$
- insieme $\emptyset$
- i dischi in un punto S_0, $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto x ,

$$\{S \in \mathbb{C},\ \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$



- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \to \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \to S \quad D(f) = \mathbb{C}$

- $S \to S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \to \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \to \sum_{k=0}^{n} a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C};\ \ k,\ n \in \mathbb{Z}$ (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C};\ \ S,\ S_0 \in \mathbb{C};\ \ k \in \mathbb{Z}$ (Serie di potenze)

5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con $n = 2$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con $n = 3$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

Teorema 5.1 (Teorema fondamentale delle radici)**.** Ogni polinomio $P(S)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^{r} (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:
s_r sono delle radici
μ_r sono le molteplicità delle radici
a_n è il coefficiente del polinomio

$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$

6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

6.1 Segnali continui

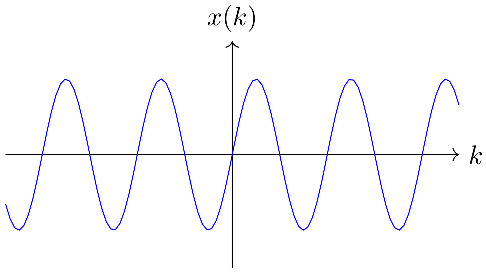
$$t \in \mathbb{R} \ \ \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- ω è la frequenza $f = \frac{1}{T}$ ($T =$ periodo)
- ϕ è la fase



- **Periodico**

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$Acos(\omega_0 t + \phi) = Acos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{ periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

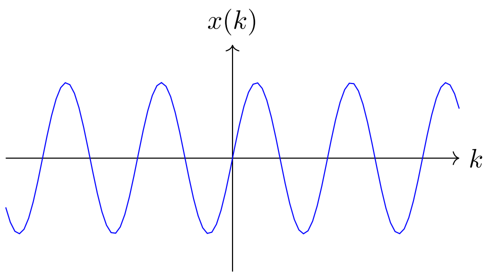
- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$Acos[\omega_0(t - t_0)] = Acos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta\phi})$$

$$Acos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = Acos(\omega_o t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale assume la seguente forma:

$$A = cos(\omega_0 t)$$



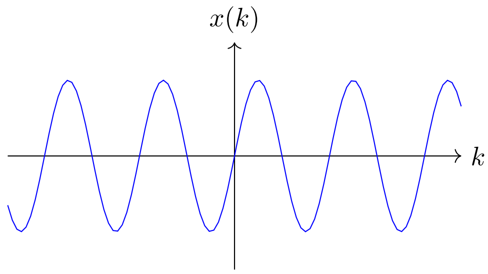
e ha le seguenti proprietà:

- Periodico
- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} Acos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ Asin(\omega_0 t) \\ Acos(\omega_0 (t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$



e ha le seguenti proprietà:

- Periodico
- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

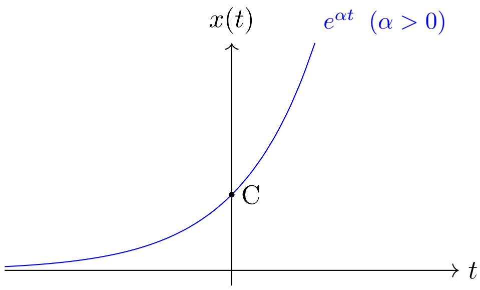


Figura 16: Esempo di segnale

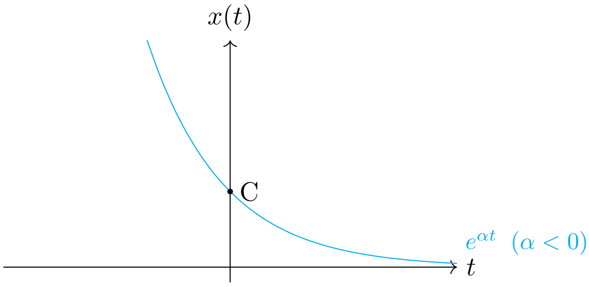


Figura 17: Esempo di segnale

- **Shift Temporale**

$$Ce^{\alpha(t+t_0)} = Ce^{\alpha t} \cdot \underbrace{Ce^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

$$C = |c|e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_o \text{ (cartesiana)}$$

$$x(t) = |c|e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_0)t} =$$

$$= |c|e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t+\Theta)} \text{ (Eulero)}$$

Definizione 6.1 (Eulero)**.** La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_0 t+\Theta)} = cos(\omega_0 t + \Theta) + jsin(\omega_0 t + \Theta)$$

$$x(t) = |c|e^{rt} \cdot (cos(\omega_0 t + \Theta) + jsin(\omega_0 t + \Theta))$$

6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \ \ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; \ \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; \ \ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = Acos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- Ω_0 è la frequenza $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$

- ϕ è la fase

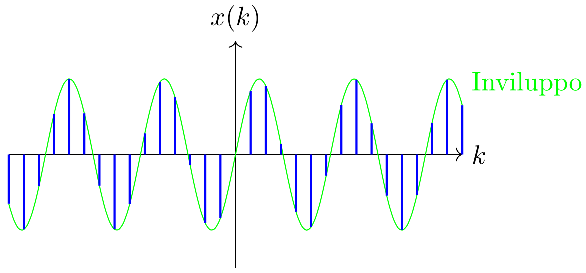


Figura 18: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$Acos[\Omega_0(n+n_0)] = Acos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta\phi})$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$Acos[\Omega_0(n+n_0)] \stackrel{?}{=} Acos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove ϕ è il rapporto tra ϕ e Ω_0 è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

Esempio 6.1.

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m=1)$$

Esempio 6.2.

$$\phi = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{1}{6} = \Omega_0 = \frac{1}{3}\pi$$

6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^{\beta}; \;\; C, \; \alpha \in \mathbb{R}$$