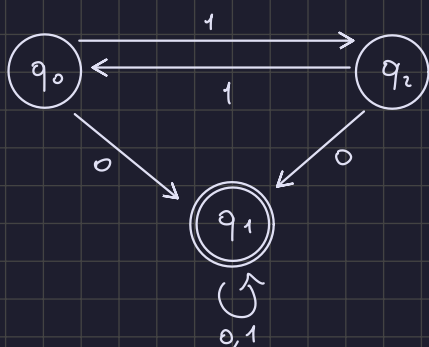


ESERCIZIO 1.1 (Automa e dimostrazione). Si determini il linguaggio accettato dall'automa rappresentato mediante la seguente matrice di transizione dove $F = \{q_1\}$.

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_1	q_0



Esempi

$001 \in L$

$1101 \in L$

$111 \notin L$

$$L = \{\sigma \in \{0,1\}^* \mid \sigma \text{ contiene almeno uno } 0\}$$

Per dimostrare che questo è un linguaggio regolare bisogna dimostrare:

$$L = L(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostriamo:

$$L = L(M) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \in F$$

$$L = L(M) \Leftarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F \quad \equiv \quad L \neq L(M) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in \{q_0, q_2\} \notin F$$

Caso base

$$|\sigma| = 0: \quad \sigma = \epsilon \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$$

$$|\sigma| = 1: \quad \sigma = 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \notin F$$

$$\sigma = 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \in F$$

Passo induttivo

Supponiamo che la tesi valga per: $\forall \sigma \in \{0,1\}^*, |\sigma| \leq n$

Dimostriamo che vale anche per $\forall \sigma \in \{0,1\}^*, |\sigma| = n+1$

$$\sigma \in \{0,1\}^*, |\sigma| \leq n$$

se $\sigma \in L$

$$\cdot \sigma' = \sigma 0 \rightarrow \sigma = 0^+ \xrightarrow{II} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 0) = \hat{\delta}(q_1, 0) = q_1 \in F \rightarrow \sigma' \in L$$

$$\cdot \sigma' = \sigma 1 \rightarrow \sigma = 0^+ \xrightarrow{II} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \hat{\delta}(q_1, 1) = q_1 \in F \rightarrow \sigma' \in L$$

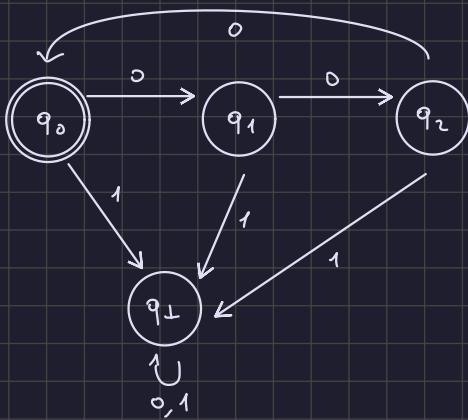
Se $\sigma \notin L$

- $\sigma' = \sigma 0 \xrightarrow{II} \sigma = 1^* \xrightarrow{IF} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 0) = \delta(\{q_0, q_2\}, 0) = q_1 \in F \rightarrow \sigma' \in L$
- $\sigma' = \sigma 1 \xrightarrow{II} \sigma = 1^* \xrightarrow{IF}$
 - se $|\sigma|$ è dispari $\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_2, 1) = q_0 \notin F \rightarrow \sigma' \notin L$
 - se $|\sigma|$ è pari $\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_0, 1) = q_2 \notin F \rightarrow \sigma' \notin L$

Abbiamo dimostrato che $L = L(M)$ e quindi che il linguaggio è regolare \square

ESERCIZIO 1.2 (Automa e dimostrazione). Si dimostri che il linguaggio L è regolare

$$L = \{ 0^{3n} \mid n \geq 0 \}, \Sigma = \{0, 1\}$$



Esempi

$000 \in L$
 $0000 \notin L$
 $0 \notin L$
 $1000 \notin L$
 $\varepsilon \in L$

Per dimostrare che il linguaggio è regolare bisogna mostrare che $L = L(M)$

$$\sigma \in L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostriamo

$$\sigma \in L \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \in F$$

$$\sigma \notin L \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in \{q_1, q_2, q_\perp\} \notin F$$

Caso base

$$|\sigma| = 1$$

$$\cdot \sigma = 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$$

$$\cdot \sigma = 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(q_0, 1) = q_\perp \notin F$$

$$|\sigma| = 2$$

$$\cdot \sigma = 00 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \notin F$$

$$\cdot \sigma = 01 \vee \sigma = 10 \vee \sigma = 11 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_\perp \notin F$$

$$|\sigma| = 3$$

- $\sigma = 000 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \in F$
- altrimenti $\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \notin F$

Passo induttivo

Supponiamo che la tesi valga per $|\sigma| \leq n$ dimostriamo che vale anche per $|\sigma| = n+1$

$$\sigma = \sigma'v \text{ dove } |\sigma'| = n$$

$$\sigma \in L \rightarrow \sigma' = 0^{3i-1} \in L$$

$$\cdot \sigma = \sigma'0 \xrightarrow{II} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_2, 0) = q_0 \in F \in L$$

$$\sigma \notin L \vee \sigma' \in L \rightarrow \sigma' = (0^3)^+$$

$$\cdot \sigma = \sigma'1 \xrightarrow{II} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1 \notin F \notin L$$

$$\cdot \sigma = \sigma'0 \xrightarrow{II} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F \notin L$$

$$\sigma \notin L \vee \sigma' \notin L \rightarrow \sigma' = 0^{3i}$$

$$\cdot \sigma = \sigma'0 \xrightarrow{II} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F \notin L$$

Abbiamo dimostrato che $L = L(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$, cioè che il linguaggio è regolare \square

ESERCIZIO 1.3 (Automa e dimostrazione). Si dimostri che il linguaggio, su $\Sigma = \{0, 1\}$, che contiene l'insieme di tutte le stringhe tali che il penultimo simbolo è 0, è regolare fornendo direttamente il DFA che lo riconosce.

$$L = \{ \sigma \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, a \in \Sigma, \sigma = v0a \}$$

Esempi

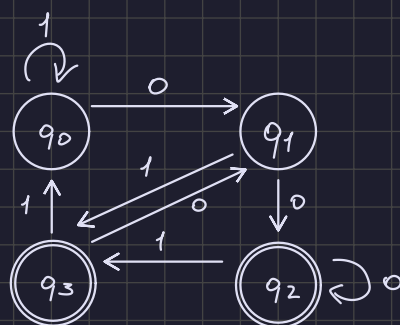
$\epsilon \notin L$

$01 \in L$

$101 \in L$

$00 \in L$

$111 \notin L$



Dimostrazione

$$\sigma \in L \iff \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostro per induzione sulla lunghezza di σ

Caso base

$$|\sigma| < 2 \Rightarrow \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = \{q_0, q_1\} \notin F$$

$$|\sigma| = 2 \Rightarrow \sigma = 00 \quad \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = q_2 \in F$$

$$\sigma = 01 \quad \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = q_3 \in F$$

$$\sigma = 10 \quad \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = q_1 \notin F$$

$$\sigma = 11 \quad \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva

$$1) \forall \sigma. \exists n > 1. |\sigma| \leq n. \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = \{q_2, q_3\} \in F$$

$$2) \forall \sigma. \exists n \in \mathbb{N}. |\sigma| \leq n. \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) = \{q_0, q_1\} \notin F$$

Dimostriamo che prendendo una stringa σ . $|\sigma| = n+1$ il penultimo simbolo è 0

$$\sigma = \sigma' a \quad |\sigma'| = n \quad a \in \Sigma \quad |\sigma| = n+1$$

- $\sigma \in L$

$$\begin{aligned} \bullet \sigma = \sigma' 0 &\rightarrow \hat{\delta}^1(q_0, \sigma) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}^1(q_0, \sigma' 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$$

> Caso 1: σ' ha come ultimi due simboli 0

$$\xRightarrow{Hp^1} \delta(q_2, 0) = q_2 \in F$$

> Caso 2: σ' ha come penultimo simbolo un simbolo diverso da 0 e come ultimo simbolo uno 0

$$\xRightarrow{Hp^2} \delta(q_1, 0) = q_2 \in F$$

$$\bullet \sigma = \sigma'1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma'1)$$

$$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$$

> Caso 1: σ' ha come ultimi due simboli 0

$$\xRightarrow{Hp^1} \delta(q_2, 0) = q_3 \in F$$

> Caso 2: σ' ha come penultimo simbolo un simbolo diverso da 0 e come ultimo simbolo uno 0

$$\xRightarrow{Hp^2} \delta(q_1, 0) = q_3 \in F$$

- $\sigma \notin L$

$$\bullet \sigma = \sigma'0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma'0)$$

$$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0)$$

> Caso 1: σ' finisce con 01

$$\xRightarrow{Hp^1} \delta(q_3, 0) = q_1 \notin F$$

> Caso 2: σ' è vuota o sono tutti 1

$$\xRightarrow{Hp^2} \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$$

$$\bullet \sigma = \sigma'1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma)$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma'1)$$

$$\Rightarrow \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1)$$

> Caso 1: σ' finisce con 01

$$\xRightarrow{Hp^1} \delta(q_3, 0) = q_0 \notin F$$

> $\text{Cons}_2: \sigma'$ è vuota o sono tutti 1

$$\stackrel{\text{H}_2}{\Rightarrow} \delta(q_0, 0) = q_0 \notin F$$

Abbiamo dimostrato che il linguaggio è riconosciuto dall'automa, quindi è regolare. \square

ESERCIZIO 1.4 (Automa e dimostrazione). Si dimostri che è regolare il linguaggio composto da stringhe di 0 e 1 tali che:

- ci sono almeno due "0" consecutivi, e
- non vi sono mai due "1" consecutivi

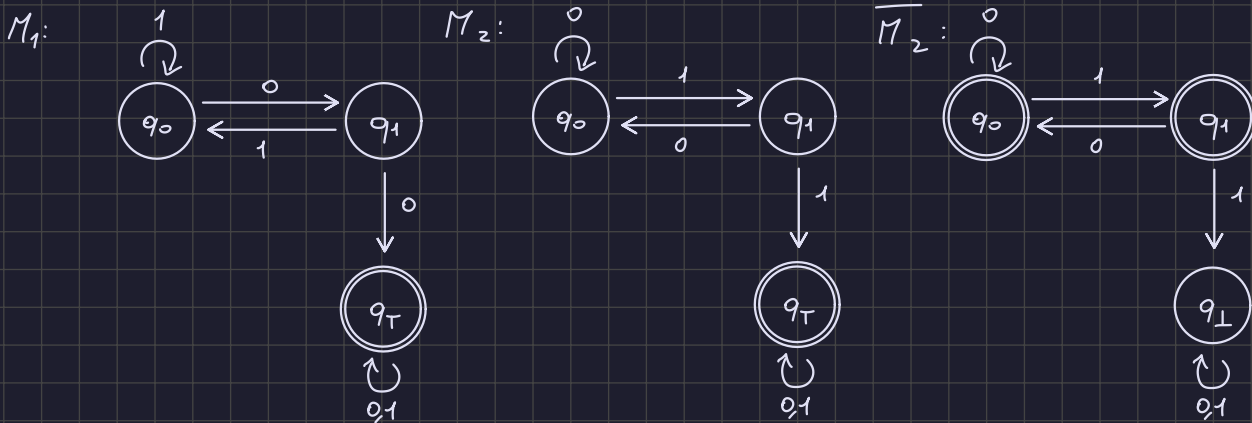
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$L_1 = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \text{ci sono almeno due 0 consecutivi}\}$$

$$L_2 = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \text{ci sono almeno due 1 consecutivi}\}$$

$$L = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Se L_1 e L_2 sono regolari, allora L è regolare per la proprietà di chiusura. Quindi troviamo un automa che riconosce il linguaggio L_1 e dimostriamo che è regolare, se L_1 è regolare lo è anche L_2 perchè sono lo stesso linguaggio ma riconoscono un simbolo diverso, quindi basta dimostrarne uno.



Dimostriamo L_1

Dimostriamo per induzione sulla lunghezza della stringa $|\sigma|$

Tesi:

$$L_1 = L_1(M_1) \Rightarrow \sigma \in L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Caso base

$$|\sigma| = 2 \rightarrow \sigma = 00 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \in F \quad |\sigma| < 2 \notin L$$

$$\sigma = 01 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$$

$$\sigma = 10 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \notin F$$

$$\sigma = 11 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva

$$1) \forall \sigma \in \Sigma^*. \exists n > 1. |\sigma| \leq n. \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_T\} \in F$$

$$2) \forall \sigma \in \Sigma^*. \exists n \in \mathbb{N}. |\sigma| \leq n. \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \{q_0, q_1\} \notin F$$

Dimostriamo che la tesi vale per le stringhe di lunghezza $n+1$

$$\sigma = \sigma' a, |\sigma| = n+1, |\sigma'| = n, a \in \Sigma$$

- $\sigma \in L$

$$\begin{aligned} \bullet \sigma = \sigma' 0 &\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) \end{aligned}$$

> Caso 1: σ' contiene almeno due 0 consecutivi

$$\stackrel{Hp1}{\Rightarrow} \hat{\delta}(q_T, 0) = q_T \in F$$

> Caso 2: σ' non ci sono due 0 consecutivi e finisce con 0

$$\stackrel{Hp2}{\Rightarrow} \hat{\delta}(q_1, 0) = q_T \in F$$

$$\begin{aligned} \bullet \sigma = \sigma' 1 &\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1) \\ &\stackrel{Hp1}{\Rightarrow} \hat{\delta}(q_T, 0) = q_T \in F \quad \sigma' \text{ contiene almeno due 0 consecutivi} \end{aligned}$$

- $\sigma \notin L$

$$\begin{aligned} \bullet \sigma = \sigma' 0 &\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) \\ &\stackrel{Hp2}{\Rightarrow} \hat{\delta}(q_0, 0) = q_1 \notin F \quad \sigma' \text{ è vuota o finisce con 1 e non contiene due zeri consecutivi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sigma = \sigma' 1 &\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1) \\ &\Rightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1) \\ &\stackrel{Hp2}{\Rightarrow} \hat{\delta}(\{q_0, q_1\}, 1) = q_0 \notin F \quad \sigma' \text{ è vuota o finisce con 1 e non contiene due zeri consecutivi (q_0) oppure non ci sono due 0 consecutivi e finisce con 0 (q_1)} \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che L_1 è regolare, di conseguenza anche L_2 è regolare perchè è riconosciuto dallo stesso automa di L_1 con i simboli invertiti. Siccome L_2 è regolare anche il complemento di L_2 è regolare e quindi l'intersezione tra L_1 e L_2 è regolare siccome i linguaggi sono chiusi rispetto all'intersezione:

$$L_1 = L_1(M_1) \wedge L_2 = L_2(M_2) \Rightarrow L = L_1 \cap \overline{L_2} = L(M) \quad \square$$