Architettura degli elaboratori

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1 Introduzione

L'informatica è nata per la risoluzione di problemi di calcolo, in particolare quelli di calcolo numerico. Per questo motivo i primi computer erano macchine che eseguivano operazioni aritmetiche. Per risolvere questi problemi si usano degli algoritmi che sono una sequenza di istruzioni semplici che portano poi a risolvere problemi di complessità variabile. Anche gli algoritmi hanno una complessità che deve essere adeguata alla risoluzione del problema.

1.1 Hardware

Un algoritmo deve essere trasformato in un processo di calcolo automatico, quindi deve essere implementato tramite hardware. Ci sono due tipi di hardware:

- **Embedded** che è un hardware dedicato ad un singolo compito. Ad esempio il microonde.
- **General purpose** non si sa l'utilizzo finale, quindi ha funzionalità generali ampliate dal software installato. L'hardware general purpose è programmabile attraverso il software. Un esempio è il PC.

In base al tipo di hardware l'algoritmo viene implementato in diversi modi:

- **Algoritmo → Software**: Tramite un linguaggio di programmazione
- **Algoritmo → Hardware embedded**: Tramite linguaggi di basso livello come C, Assembly o il sistema operativo.
- **Algoritmo → Hardware**: Tramite sintesi logica

1.2 Campionamento dei dati

Ogni cosa nel mondo è rappresentabile da funzioni continue nel tempo $f(t)$, ma con risorse finite è impossibile rappresentare infiniti dati, bisogna quindi campionarli.

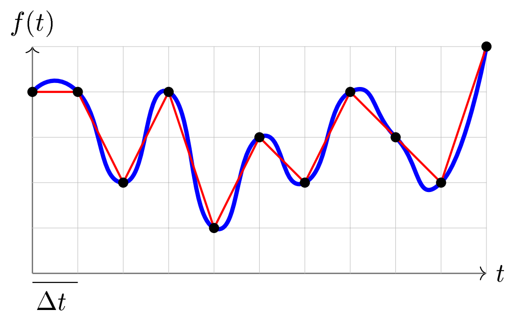

Figura 1: Funzione casuale continua nel tempo

Per campionare la funzione nella figura 1 bisogna scegliere un intervallo di tempo Δt e prendere un valore della funzione ogni Δt. In questo caso le linee verticali rappresentano il **campionamento**, mentre quelle orizzontali rappresentano la **discretizzazione o quantizzazione**. La linea rossa è una spezzata approssimata della funzione continua, infatti per il teorema di Shannon:

Teorema 1 *Deciso il grado di errore da voler compiere, esistono una precisa frequenza di campionamento e un intervallo di discretizzazione che garantiscono quell'errore.*

Il sistema di calcolo è ora diventato digitale, cioè elabora i segnali numerici in ingresso per produrre segnali numerici in uscita.

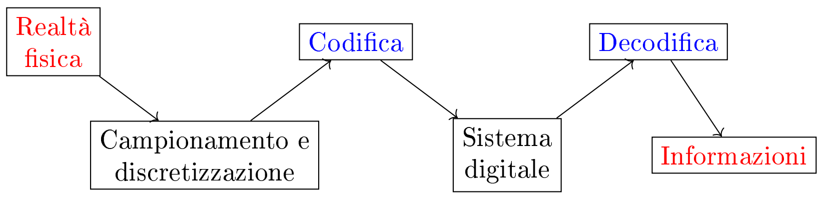

Figura 2: Dalla realtà fisica al sistema digitale

2 Sistemi di codifica

Ogni sistema digitale lavora in base binaria, quindi entrano N bit ed escono M bit. I bit in uscita devono essere codificati per realizzare delle informazioni. Ci sono 2 tipi di informazioni:

- **Informazioni intelleggibili**: sono già chiare agli esseri umani, come un testo scritto.
- **Informazioni non intelleggibili**: hanno bisogno di macchine per essere riprodotte, come le casse per l'audio.

2.1 Codifica di informazioni non numeriche

Ogni informazione deve avere un codice univoco in modo che il sistema digitale non possa sbagliare a decodificarla. Date M informazioni si ricavano $n = log_2(M)$ codici disponibili per rappresentarle.

Esempio 2.1
Con $M = 7$ informazioni:

- $n = log_2(7) \approx 3$ *bit*
- $2^3 = 8$ *codici disponibili*

2.2 Numeri interi assoluti

I numeri interi assoluti rappresentano solo i valori da 0 a $2^n - 1$, dove n è il numero di bit disponibile.

La codifica da base decimale a base binaria prende il nome di **codifica a modulo**

Esempio 2.2
Si deve convertire il numero 57_{10} in base binaria

$$n = log_2(57) = 6 \; bit \; (minimi)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^n - 1 = 63 \; (codici \; massimi)$$

Si eseguono i seguenti passaggi:

1. *Si sottraggono le potenze di 2 partendo da $n-1$.*
   - *Se la potenza 2^i è minore o uguale del numero, allora si moltiplica per 1.*
   - *Se la potenza 2^i è maggiore del numero, allora si moltiplica per 0.*
2. *Le sottrazioni continuano fino a quando si giunge a 0.*

$$57_{10} - 1 * 2^5 = 25_{10} - 1 * 2^4 = 9_{10} - 1 * 2^3 = 1_{10} - 0 * 2^2 = 1_{10} - 0 * 2^1 = 1_{10} - 1 * 2^0$$

$$57 = 111001$$

2.3 Numeri interi relativi

La codifica più ovvia per i numeri interi relativi è la codifica a **modulo + segno**. Tuttavia rappresenta varie problematiche, per cui si preferisce usare la codifica in **complemento a 2**.

2.3.1 Codifica a modulo + segno

$$\text{Intervallo: } -2^{n-1} \leq N \leq 2^{n-1} - 1$$

Il segno si rappresenta con un bit, 0 per il positivo e 1 per il negativo. Il bit più significativo è il bit del segno, mentre i bit meno significativi rappresentano il modulo.

1 bit: segno $\pm$	7 bit: modulo

Figura 3: Bit dedicati alla codifica a modulo + segno

Considerando l'esempio 2.2 si hanno le seguenti rappresentazioni:

$$+57_{10} = \mathbf{0}|111001_2$$
$$-57_{10} = \mathbf{1}|111001_2$$

Sorge però un problema quando si vuole rappresentare il valore 0_{10}, che in binario risulterebbe:

$$+0_{10} = \mathbf{0}|000000_2$$
$$-0_{10} = \mathbf{1}|000000_2$$

Inoltre le somme che passano dal positivo al negativo e viceversa risultano errate.

2.3.2 Codifica in complemento a 2

$$\text{Intervallo: } -2^{n-1} \leq N \leq 2^{n-1} - 1$$

La codifica in complemento a 2 rimuove tutti i problemi della codifica in modulo + segno. Questa codifica infatti rende le somme molto più semplici. La somma facile infatti è l'obiettivo di questa codifica e parte dell'idea di trovare la codifica di -1, pertanto si cerca di formulare $-1 + 1 = 0$.

Obiettivo	Risultato
$????_2$ +	1111_2+
0001_2 =	0001_2 =
0000_2 =	0000_2

Tabella 1: Obiettivo della codifica in complemento a 2

Se si considera il numero di bit $n = 4$, allora l'intervallo di valori è $-2^3 \leq N \leq 2^3 - 1$:

$0_{10} = 0000_2$	$-1_{10} = 1111_2$
$1_{10} = 0001_2$	$-2_{10} = 1110_2$
$2_{10} = 0010_2$	$-3_{10} = 1101_2$
$3_{10} = 0011_2$	$-4_{10} = 1100_2$
$4_{10} = 0100_2$	$-5_{10} = 1011_2$
$5_{10} = 0101_2$	$-6_{10} = 1010_2$
$6_{10} = 0110_2$	$-7_{10} = 1001_2$
$7_{10} = 0111_2$	$-8_{10} = 1000_2$

Tabella 2: Codifica in complemento a 2 con $n = 4$ bit

I valori nel complemento a 2 ciclano, quindi se si somma 1 a 7 si ottiene -8.

Esempio 2.3
Sottrazione con il complemento a 2: $43 - 17 = 25$

$$n = 7 \text{ bit}$$

1. *Per prima cosa si prende il valore assoluto del numero negativo* 17_{10} *e si converte in binario.*

$$17_{10} = 0010001_2$$

2. *Si inverte il numero trovato.*

$$!(0010001_2) = 1101110_2 = -18_{10}$$

3. *Si somma 1 al numero trovato.*

$$\begin{array}{r} 1101110\ + \\ 0000001\ = \\ \hline 1101111\ \\ 1101111_2 = -17_{10} \end{array}$$

Tabella 3: Somma di 1 al numero invertito

4. *Si somma il numero trovato al numero positivo.*

$$\begin{array}{r} 0010001\ + \\ 1101111\ = \\ \hline \mathbf{1}0011010\ \end{array}$$

Tabella 4: Somma del numero positivo con il numero negativo

5. *Il risultato ottenuto è:*

$$\mathbf{1}0011010$$

Si osserva che c'è un bit in più rispetto a quelli disponibili (quello in grassetto), vuol dire che risulta in overflow[a]*, quindi si scarta il bit più significativo e si ottiene:*

$$0011010_2 = 26_{10}$$

che è il risultato corretto.

[a] Indica il "traboccamento", cioè se viene superato il limite massimo l'overfflow è un errore, non perchè sia sbagliata la somma, ma perchè il risultato non è codificabile con il numero di bit disponibili

Estensione del numero con il complemento a 2

- Se un numero è **positivo** va esteso con gli **0**

$+57_{10}+$	$0111001_2\ +$
$+7_{10}\ =$	$\mathbf{0000}111_2\ =$
$+64_{10}$	1000010_2

Tabella 5: Estensione di un numero positivo

- Se un numero è **negativo** va esteso con gli **1**

$+57_{10}+$	$0111001_2\ +$
$-7_{10}\ =$	$\mathbf{1111}111_2 =$
$+50_{10}$	10110010_2

Tabella 6: Estensione di un numero negativo

3 Numeri razionali

I numeri razionali sono composti da una parte intera e una parte frazionaria. Si possono codificare in 2 modi:

- **Virgola fissa**(fixed point): viene usata maggiormente nei sistemi embedded quando si sa a priori il numero più grande e la precisione che si vuole ottenere
- **Virgola mobile**(floating point): viene usata maggiormente nei sistemi general purpose.

3.1 Codifica in virgola fissa

Esempio 3.1
Si hanno a disposizione 8 bit: 4 per la parte intera e 4 per la parte frazionaria. Vogliamo decodificare il numero 0110.1011_2*:*

$$\underbrace{\overset{2^3}{0}\ \overset{2^2}{1}\ \overset{2^1}{1}\ \overset{2^0}{0}}_{+6}\cdot\underbrace{\overset{2^{-1}}{1}\ \overset{2^{-2}}{0}\ \overset{2^{-3}}{1}\ \overset{2^{-4}}{1}}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}$$

$$+6+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=6+\frac{11}{16}=\frac{107}{16}=6.6875$$

Se si vuole codificare un numero da decimale a binario bisogna tenere in considerazione che non è certo che il numero sia razionale anche in base 2, quindi bisogna approssimare per rappresentarlo.

Esempio 3.2
Prendiamo in considerazione $+4+\frac{3}{5}$*, in questo caso bisogna andare "a tentoni" e trovare la rappresentazione binaria che approssima con il minor errore possibile.*

$$4_{10}=0100_2$$

$$0.1001=\frac{9}{10}\Delta\frac{3}{80}$$

$$0.0111 = \frac{7}{16}\Delta - \frac{4}{80}$$
$$0.0110 = \frac{3}{8}\Delta\frac{9}{40}$$
$$\underline{0.1010 = \frac{5}{8}\Delta - \frac{1}{40}}$$

Δ rappresenta l'errore, quindi la rappresentazione più vicina è 0100.1010_2. *Però non è stato rappresentato $\frac{3}{5}$, ma $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$.*

Questo metodo è pesante perchè bisogna controllare più alternative.

3.1.1 Errore percentuale

Bisogna decidere se calcolarlo rispetto alla parte intera o a quella frazionaria. Nel seguente esempio viene calcolato l'errore percentuale rispetto alla parte frazionaria dell'esempio 3.2.

Esempio 3.3

$$\frac{1}{40} : \frac{3}{5} = \frac{1}{40} * \frac{5}{3} = \frac{1}{24} \approx 0.052\%$$

Il massimo errore che si può fare è l'overflow.

3.2 Codifica in virgola mobile

Gli standard della virgola mobile sono: IEEE 754. Questo standard è stato rivisto molte volte e ora viene usato da tutte le codifiche per i numeri in virgola mobile.
Il numero viene separato in 3 parti:

- **S**: Segno
- **e**: Esponente
- **M**: Mantissa

La struttura del numero è quindi:

$$N = \pm \cdot M^{\pm e}$$

Questo permette di dividere il numero in modo da poter scegliere quanti bit dedicare alla mantissa e quanti all'esponente. Si riscontrano però i seguenti problemi:

- Bisogna scegliere la base in cui fare la codifica $\rightarrow$ base 2
- Bisogna scegliere la divisione di bit tra *segno*, *mantissa* e *esponente* $\rightarrow$ 1 S, 23 M, 8 e
- La rappresentazione deve essere univoca $\rightarrow 1.\ \ldots_2$
- Bisogna trovare un modo per rappresentare gli errori

Se la mantissa e la base sono in base 2 la moltiplicazione e la divisione sono agevolate tramite l'utilizzo dello *shift*.

- $0110 \cdot 2 = 1100$ è uno shift a sinistra in binario.

$$\begin{array}{c} 0110 \\ \swarrow\swarrow\swarrow \\ 1100 \end{array}$$

Figura 4: Shift a sinistra in binario

- $1010/2 = 0101$ è uno shift a destra in binario.

$$\begin{array}{c} 1010 \\ \searrow\searrow\searrow \\ 0101 \end{array}$$

Figura 5: Shift a destra in binario

3.2.1 Divisione di bit tra segno, mantissa ed esponente

Un numero è rappresentabile in 2 modi:

- Singola precisione 32 bit $\rightarrow$ float
- Doppia precisione 64 bit $\rightarrow$ double

Prendiamo in considerazione 32 bit, ora dobbiamo decidere quanti bit dedicare alla mantissa e all'esponente.

$$2^{\pm e}$$

$$\begin{gathered} |e| = 4bit = 2^{+7} \\ 5bit = 2^{+15} \\ 6bit = 2^{+31} \\ 7bit = 2^{+63} \\ 8bit = 2^{+127} \end{gathered}$$

L'impatto dei bit sull'esponente è doppiamente esponenziale, quindi cresce tantissimo.

- **8 bit** all'esponente, quindi l'esponente può assumere valori da -127 a $+127$.
- **23 bit** alla mantissa, quindi la mantissa può assumere valori da 0 a $2^{23} - 1$
- **1 bit** al segno.

1 bit: segno $\pm$	8 bit: esponente	23 bit: mantissa

Figura 6: Bit dedicati alla codifica in virgola mobile

Per la rappresentazione univoca la mantissa si codifica in virgola fissa. Cioè si parte da una mantissa con un **punto fisso** e dividendo o moltiplicando (shift) si può spostare la virgola per arrivare alla forma **1.00000...** e questa forma è la rappresentazione univoca.

Questa operazioe si chiama **normalizzazione** e visto che la rappresentazione è sempre la stessa l'*1.* non viene rappresentato, quindi viene inserito nella mantissa solo tutto ciò che viene dopo.

$$\begin{array}{c} 11111111\ \pm\infty \\ 11111110\ +127 \\ \ldots \\ 00000000\ \pm 0 \\ \ldots \\ 00000001\ -126 \\ 00000000\ -127 \end{array}$$

Figura 7: Range dell'esponente

Si è deciso di codificare l'esponente in **Eccesso 127**. Quindi per rappresentare lo zero si usa come esponente il minore numero possibile: $1 \cdot 2^{-127} = 0$. Per codificare i numeri si somma 127 al numero desiderato e visto che i numeri possibili ora vanno da -127 a $+127$ se codifichiamo il risultato in modulo avremo dei numeri da 0 a 256.

> ***Esempio 3.4***
> *Si vuole decodificare il seguente numero:*
>
> $$1\ 01110111\ 0110...0$$
>
> $$M = -(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) * 2^e = -(\frac{11}{8}) * 2^e$$
>
> $$e = (1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64) - 127 = 119 - 127 = -8$$
>
> $$N = -\frac{11}{8} * 2^{-8}$$

Esempio 3.5
Codifica $+(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16})*2^{+34}$

1. *Sappiamo già che il numero è positivo quindi:*
$$S = 0$$
2. *Calcoliamo la mantissa:*
$$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16} = \underbrace{100}_{4_{10}}.\underbrace{10010\ldots 0}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}$$
3. *La mantissa va normalizzata moltiplicando per 4:*
$$100.10010\ldots 0 * 2^{+2} = 1.0010010\ldots 0$$
$$M = 0010010\ldots 0$$
4. *Calcoliamo l'esponente:*
$$e = 34+2 = 36$$
Si aggiunge 2 perchè abbiamo fatto lo shift di 2 bit.
$$e = 36+127 = 163$$
$$163_{10} = 10100011_2$$
5. *Il numero in virgola mobile è:*
$$0\ 10100011\ 0010010\ldots 0$$

- 0 00000000 0...0 = +0
- 1 00000000 0...0 = −0

Quando l'esponente è tutto 1 e la mantissa tutta 0 allora equivale a $\pm\infty$ in base al primo bit. Se invece la mantissa è diversa da 0 con esponente tutti 1 allora rappresenta un errore NaN.

4 Modelli

Per un progetto bisogna creare un **modello** che rappresenti il sistema. Boole ha cercato di rappresentare tutte le algebre. Lo ha fatto attraverso una quintupla: $< B^n, \cdot, +, \{0,1\} >$

Figura 8: Modello di un sistema digitale

- B^n è l'insieme di valori
- $\{0, 1\}$ è l'alfabeto (sistema binario)
- "$\cdot$" e "$+$" sono 2 operatori

Bool garantisce che si può creare qualsiasi funzione utilizzando soltanto i 2 operatori:

$$f(B^n) \to B^m$$

Esempio 4.1
Si vuole creare un modello con 2 bit in entrata e 1 in uscita:

$$n = 2\; m = 1$$

$O = 1 \leftrightarrow A = B$
$f(B^2) \to B$

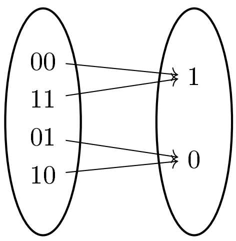

Figura 9: Modello di un sistema digitale

Per mappare i valori in ingresso con quelli di uscita si usa una ***tabella di verità:***

A B	O
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Tabella 7: Tabella di verità

Chiamiamo mintermine un punto dello spazio booleano in ingresso in cui la funzione vale 1. Il maxtermine è il contrario. L'insieme di mintermini {m_0[a], m_3} *si chiama* ***ON-SET*** *L'insieme dei maxtermini* $\{m_1, m_2\}$

si chiama ***OFF-SET****. Basta uno dei due insiemi (ON-SET, OFF-SET) per definire la funzione.*

$$m_3 = A \cdot B$$

Dire che m_3 è il prodotto delle due variabili è un modo corretto per rappresentarlo.

$$m_0 = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Per rappresentare il mintermine basta fare il prodotto delle variabili se valgono 1 o delle variabili negate se valgono 0.

Per rappresentare la funzione si può usare la somma dei mintermini:

$$O = m_0 + m_3 = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B = 0$$

Questa rappresentazione viene detta: Espressione in somma di prodotti

Teorema 2 *Dato un ON-SET c'è sempre una sola espressione in somma di prodotti che lo rappresenti.*

[a] m_n: n è il valore in modulo del relativo numero binario, m sta per modulo. $m_3 = 11_2$

4.1 Tabelle di verità

4.1.1 Operatore prodotto

A B	O
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Tabella 8: Tabella di verità dell'AND

4.1.2 Operatore somma

A B	O
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Tabella 9: Tabella di verità dell'OR

4.1.3 Operatore negazione

A	O
0	1
1	0

Tabella 10: Tabella di verità del NOT

5 Transistor

È un "comando di accensione" che permette di accendere o spegnere un circuito.

5.1 Transistor CMOS

5.1.1 Transistor N

Mette in collegamento 2 punti:

- Se la corrente è 0V allora non c'è collegamento
- Se la corrente è 3V allora c'è collegamento

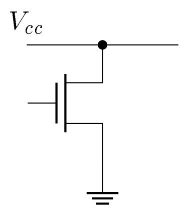

Figura 10: Transistor N

5.1.2 Transistor P

Mette in collegamento 2 punti:

- Se la corrente è 0V allora c'è collegamento
- Se la corrente è 3V allora non c'è collegamento

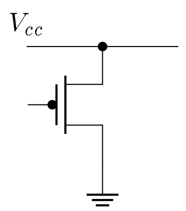

Figura 11: Transistor P

5.1.3 Circuito di negazione (NOT)

Si realizza con un transistor P e uno N in serie.

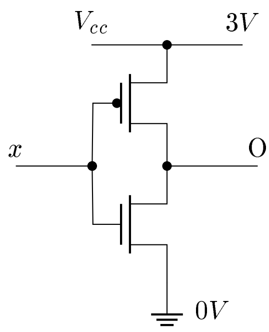

Figura 12: Circuito di negazione

La tabella della verità è:

x	O
0V	3V
3V	0V

Tabella 11: Tabella di verità del circuito

Se assegnamo ad ogni valore un numero binario:

x	O
0	1
1	0

Tabella 12: Tabella di verità del circuito in binario

Si può notare che è la funzione di negazione rappresentata con la seguente porta logica:

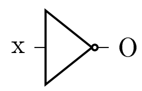

Figura 13: Porta logica NOT

5.1.4 Circuito del prodotto (AND)

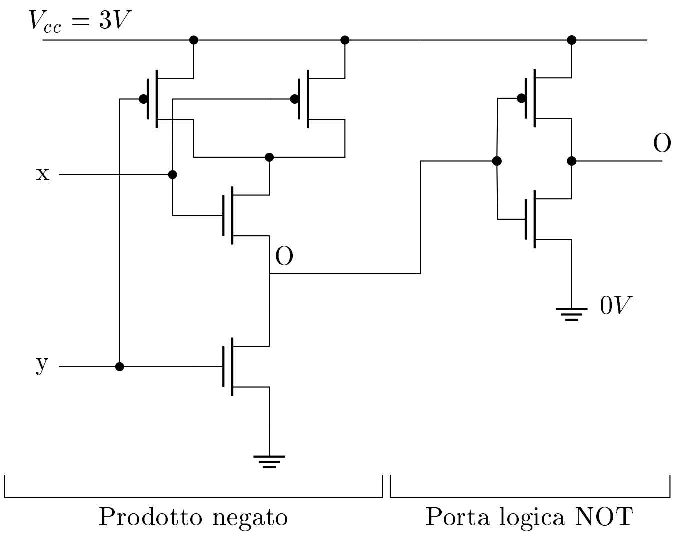

Figura 14: Circuito del prodotto

Il prodotto negato più il NOT è uguale ad un AND:

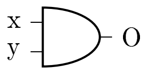

Figura 15: Porta logica AND

La tabella della verità è:

x y	O
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Tabella 13: Tabella di verità del circuito

5.1.5 Circuito della somma (OR)

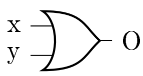

Figura 16: Porta logica OR

La tabella della verità è:

x y	O
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Tabella 14: Tabella di verità della somma

6 Espressione in somma di prodotti

Il seguente circuito è un esempio di espressione in somma di prodotti dell'esempio 4.1:

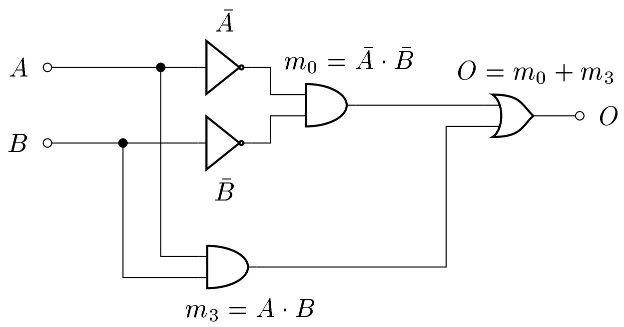

Figura 17: Circuito dell'espressione in somma di prodotti

I circuiti devono spesso tenere conto di alcune specifiche da ottimizzare:

- **Area**: minor numero di porte logiche
- **Latency**: più porte logiche si attraversano più sarà il ritardo
- **Power**: più porte logiche si attraversano più sarà il consumo
- **Safety**: più porte logiche si attraversano più sarà la probabilità di errore

Prendiamo in considerazione la funzione $f(B^3)^1 \rightarrow B$:

[1]Il numero di funzioni booleane possibili è $2^{2^3} = 256$ e il valore cresce esponenzialmente con l'aumento dei bit

X Y Z	O
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Tabella 15: Tabella di verità della funzione

ON-SET= $\{m_1, m_3, m_5, m_7\}$
La funzione rappresentata con un'espressione in somma di prodotti è:

$$O = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 = \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ$$

Proviamo a stimare le dimensioni di questo circuito. Si utilizza il concetto di **letterale** che è una coppia chiave-valore. La funzione O è composta da 12 letterali e questo numero è in relazione con il numero di transistor nel senso che se una funzione ha più letterali di un altra si può già sapere che avrà bisogno di un minor numero di transistor.

6.1 Tecniche di ottimizzazione

La regola principale dell'ottimizzazione è l'**assorbimento**: Preso un prodottp P moltiplicato ad un letterale a e la somma di questo prodotto, ma con il letterale negato $\bar{a}$ allora il risultato è $P \cdot (a + \bar{a})$ dove $(a + \bar{a})$ fa sempre 1, quindi rimane P.

$$aP + \bar{a}P = P \cdot (a + \bar{a}) = P$$

$$\underbrace{2 \cdot (|P| + 1)}_{\text{Cardinalità prima dell'assorbimento}} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{|P|}_{\text{Cardinalità dopo l'assorbimento}}$$

Quindi se prendiamo come riferimento la funzione O si può applicare la regola dell'assorbimento per ridurre il numero di letterali:

$$\bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ$$
$$\bar{X}Z(\bar{Y} + Y) + XZ(\bar{Y} + Y)$$

E riapplicando la regola si arriva al minimo:

$$\bar{X}Z + XZ$$
$$Z(\bar{X} + X)$$
$$Z$$

6.2 Terminologia

Ogni mintermine è un prodotto (o implicante), ma dopo aver applicato la regola di assorbimento non è più un mintermine, ma soltanto prodotto (o implicante).

$$\bar{X}\bar{Y}Z \rightarrow \bar{X}Z$$

La Y non c'è più nel risultato dell'assorbimento, ciò vuol dire che non ci interessa il suo valore perchè non varia il risultato. Si può scrivere sia 11 che $1-1$
Quindi ad esempio:
$Z = --1 = 4$ mintermini: $\{001, 011, 101, 111\}$

Definizione 6.1
Implicante primo *è un implicante non contenuto in nessun altro implicante*

Definizione 6.2
*La **distanza di Hamming** è il numero di bit che differenziano 2 codici.*

$$01\boldsymbol{10} \rightarrow 01\boldsymbol{01} \ \textit{distanza di Hamming} = 2$$
$$01\boldsymbol{0} \rightarrow 01\boldsymbol{1} \ \textit{distanza di Hamming} = 1$$

7 Assorbimento svolto graficamente

Prendendo come riferimento la funzione $f(B^3)^1 \rightarrow B$ definita precedentemente (che chiameremo O) si può guardare la funzione come se fosse sul piano cartesiano con centro in un punto qualsiasi. Ogni punto adiacente al centro è un punto con distanza di Hamming = 1.

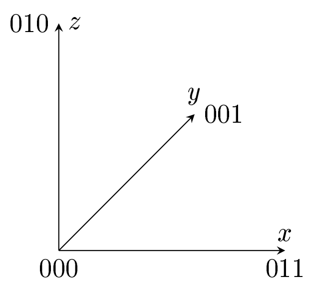

Figura 18: Funzione rappresentata su un piano cartesiano

L'assorbimento può essere fatto soltanto tra gli ON-SET con distanza di Hamming = 1. Per effettuare l'assorbimento ci si posiziona nel punto di un mintermine e si "guarda" in tutte le direzioni per eventuali altri mintermini con cui fare il prodotto.

Nella seguente figura i vertici rossi rappresentano gli OFF-SET e i vertici blu rappresentano gli ON-SET.

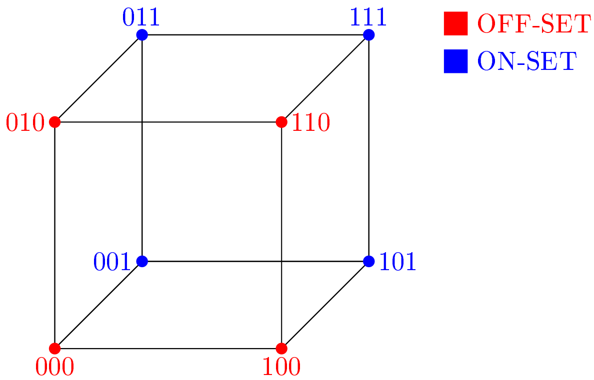

Figura 19: Funzione rappresentata su un cubo

Si trascura la faccia del cubo con l'OFF-SET per rendere la rappresentazione più semplice. Prendendo coppie di vertici dell'ON-SET sullo stesso lato del cubo si può fare il prodotto tra i 2 mintermini:

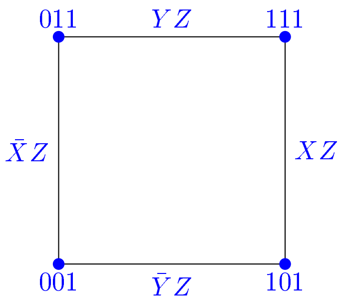

Figura 20: Prima semplificazione

Ora si può fare l'assorbimento anche tra i prodotti ottenuti dall'assorbimento:

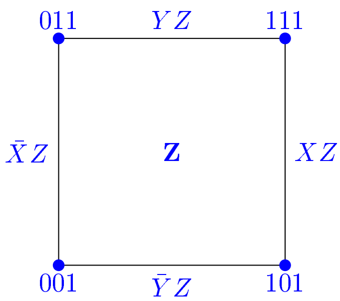

Figura 21: Seconda semplificazione

Si arriva quindi a dire che Z è un **implicante primo** perchè non c'è nessun altro implicante che lo contiene.

> ***Definizioni utili 7.1***
> *Quando si parla di implicante si può anche dire* ***sottocubo*** *e l'implicante primo può essere chiamato anche* ***sottocubo di dimensione massima****.*
>
> *Implicante = Sottocubo*
> *Implicante primo = Sottocubo di dimensione massima*

Esistono condizioni favorevoli (come la funzione O) in cui un implicante primo contiene tutti i mintermini della funzione.
Ci sono più tipi di implicanti primi:

- **Essenziali**: includono almeno un mintermine che non è coperto da nessun altro implicante primo (fanno parte della soluzione finale).
- **Non essenziali**: Implicanti primi che coprono mintermini coperti anche da altri implicanti. Si identificano con l'**algoritmo di copertura**

7.1 Mappe di Karnaugh

Karnaugh ha creato una mappa che permette di rappresentare su un piano tutte le variabili booleane (nel caso della funzione O si mettono i valori del cubo nella tabella) in modo da poter fare l'assorbimento in modo più semplice. I valori posti sopra le celle sono messi in modo che siano a distanza di Hamming = 1. Nella seguente mappa di Karnaugh si possono vedere i valori della funzione O:

Z \ XY	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Tabella 16: Mappa di Karnaugh della funzione O

In questa mappa si può vedere che Z è un implicante primo (o sottocubo di dimensione massima). Le mappe di Karnaugh sono come una sfera, quindi se si va oltre il bordo si torna dall'altra parte.

Un altro esempio di mappa di Karnaugh è il seguente:

> ***Esempio 7.1***
> *Prendiamo in considerazione una funzione casuale a 4 variabili:*

ZV \ XY	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	1	0
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

Tabella 17: Mappa di Karnaugh di una funzione casuale

Si può verificare che ci sono 3 implicanti primi essenziali:

- $\bar{V}$*: essenziale*
- XY*: essenziale perchè copre* 1101
- XZ*: essenziale perchè copre* 1011

$$O = \bar{V} + XY + XZ \quad (5\ letterali)$$

Per capire quali sono gli implicanti primi bisogna raggruppare gli 1 in rettangoli più grandi possibile, ma sempre di grandezza 2^n *(2, 4, 8, 16, ...). Per ciascun raggruppamento bisogna trovare le variabili che non cambiano il loro valore. Per il raggruppamento rosso:*

- X *cambia valore, passando da* 0 *in* 0000 *e* 0100 *a* 1 *in* 1100 *e* 1000*, quindi deve essere esclusa.*
- Y *cambia valore, passando da* 0 *in* 0000 *e* 1000 *a* 1 *in* 0100 *e* 1100*, quindi deve essere esclusa.*
- Z *cambia valore, passando da* 0 *in* 0000 *a* 1 *in* 0010*, quindi deve essere esclusa.*
- $\bar{V}$ *mantiene lo stesso stato in tutto il gruppo, quindi deve essere inclusa nel prodotto risultante*

Lo stesso ragionamento viene applicato per tutti i gruppi, fino ad arrivare al risultato finale.

Le mappe di Karnaugh sono utili soltanto se le variabili sono meno di 5, altrimenti bisogna usare più mappe.

8 Metodo di Quine-McCluskey

Questo metodo ha 2 versioni:

- Funzioni completamente specificate
- Funzioni parzialmente specificate

Si divide in 2 fasi:

1. Si espande il più possibile il problema per cercare il massimo grado di minimizzazione. (ad esempio trattando un *don't care* come 1 per permettere ulteriori ottimizzazioni)
2. Bisogna capire quali servono veramente.

8.1 Esempio con funzione completamente specificata

Esempio 8.1
Prendiamo una funzione completamente specificata

$$O = f(x, y, z, w) = \{m_1, m_4, m_5, m_6, m_7, m_9, m_{11}, m_{14}, m_{15}\}$$

m	$x\ y\ z\ w$
1	0 0 0 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
9	1 0 0 1
11	1 0 1 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

Tabella 18: Tabella dei mintermini

36 Letterali.
L'unico caso in cui due stringhe sono a distanza di Hamming $= 1$ *è quando il numero di* 1 *differisce di uno.*
Il metodo di Quine-McCluskey riordina le m *in base al numero di* 1 *che contengono, questo è il primo passo:*

m	x y z w	
1	0 0 0 1	$\surd$
4	0 1 0 0	$\surd$
5	0 1 0 1	$\surd$
6	0 1 1 0	$\surd$
9	1 0 0 1	$\surd$
7	0 1 1 1	$\surd$
11	1 0 1 1	$\surd$
14	1 1 1 0	$\surd$
15	1 1 1 1	$\surd$

Tabella 19: Tabella riordinata

Si individuano i gruppi che sono a distanza di Hamming 1. Nel prossimo passo confrontiamo i gruppi con 1 *bit* = 1 *e con* 2 *bit* = 1*, se sono a distanza di Hamming 1 allora si mette* don't care *nel bit che cambia. Nella prima colonna c'è la coppia di* m *che viene confrontata.*

m	$x\ y\ z\ w$	
1, 5	0 - 0 1	A
1, 9	- 0 0 1	B
4, 5	0 1 0 -	$\surd$
4, 6	0 1 - 0	$\surd$
5, 7	0 1 - 1	$\surd$
6, 7	1 0 1 -	$\surd$
6, 14	- 1 1 0	$\surd$
9, 11	1 0 - 1	C
7, 15	- 1 1 1	$\surd$
11, 15	1 - 1 1	D
14, 15	1 1 1 -	$\surd$

Tabella 20: Prima semplificazione

Tutti i mintermini della tabella 19 sono coperti da un implicante della tabella 20.

Ora si può semplificare anche la tabella 20 se i don't care sono nella stessa variabile:

m	$x\ y\ z\ w$	
4, 5, 6, 7	0 1 - -	E
6, 7, 14, 15	- 1 1 -	F

Tabella 21: Seconda semplificazione

I valori senza $\surd$ *sono implicanti primi perchè non sono coperti da nessun altro implicante della tabella 21. Anche i 2 valori nella tabella 21 sono*

implicanti primi.
Implicanti primi: A, B, C, D, E, F

$$A = 0 - 01 = \bar{X}\bar{Z}W$$

$$B = -001 = \bar{Y}\bar{Z}W$$

$$C = 10 - 1 = X\bar{Y}W$$

$$D = 1 - 11 = XZW$$

$$E = 01 - - = \bar{X}Y$$

$$F = -11- = YZ$$

16 Letterali.
Ad ogni passo del metodo di Quine-McCluskey diminuisce il numero di letterali.

Ora bisogna trovare gli implicanti primi essenziali

m	A	B	C	D	E	F
1	1	1				
4					**1**	
5	1				1	
6					1	1
7					1	1
9		1	1			
11			1	1		
14						**1**
15				1		1

Tabella 22: Tabella con implicanti primi

E ed F sono essenziali perchè coprono m_4 *e* m_{14}*. Inoltre E ed F coprono anche* m_5, m_6, m_7 *e* m_6, m_7, m_{14}, m_{15}*.*

Tenendo in mente le m *coperte, la tabella diventa:*

	A	B	C	D
m_1	1	1		
m_9		1	1	
m_{11}			1	1

Tabella 23: Tabella senza implicanti essenziali

Eulistica *È un metodo per trovare la soluzione corretta, ma non garantisce che sia ottima.*

Se si cancella ad esempio m_1, m_9 perchè coperti da B, allora B domina A e C domina D per la regola di ***dominanza per colonne****. Prendendo la colonna con più elementi ho più probabilità di trovare la soluzione ottima.*

$$O = E + F + B + C = \bar{X}Y + YZ + \bar{Y}\bar{Z}W + X\bar{Y}W$$

10 Letterali.
La ***pseudo-essenzialità*** *è l'essenzialità dopo aver già fatto un'ottimizzazione.*

Esempio 8.2
Dominanza per righe

	A	B	C	D
α	1		1	
β	1			1
γ		1	1	1
δ		1	1	
ϵ	1	1		1

Tabella 24: Tabella con implicanti primi

- *β dominato da ϵ*
- *δ dominato da γ*

Dobbiamo prendere β e δ perchè cancellando A e D si cancellano anche γ ed ϵ perchè sono dominati. La tabella diventa:

	A	B	C	D
α	1		1	
β	1			1
δ		**1**	1	

Tabella 25: Tabella senza implicanti essenziali

Si fa finta che B e D siano essenziali (essenzialmente scelti a caso).

8.2 Esempio con funzione parzialmente specificata

Potrebbe uscire nel risultato un *don't care*, ad esempio per condizioni di ingresso non utilizzate.

Prendiamo in considerazione una funzione booleana $f(B^n) = B$ parzialmente specificata che viene descritta tramite 3 insiemi:

- **ON-SET**: insieme delle configurazioni per cui vale 1
- **DC-SET**: insieme delle configurazioni per le quali la funzione non è specificata

- **OFF-SET**: insieme delle configurazioni per cui vale 0

L'intersezione fra i 3 insiemi deve essere vuota, mentre l'unione è l'insieme di tutte le configurazioni possibili.

Per conoscere tutti e 3 gli insiemi basta conoscerne 2 di essi.

Esempio 8.3
Funzione parzialmente specificata

x y z v	0
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	-
0 1 0 0	1
0 1 0 1	-
0 1 1 0	-
0 1 1 1	-
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

Tabella 26: Tabella della funzione parzialmente specificata

$$ON - SET = \{m_4, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{14}, m_{15}\}$$
$$DC - SET = \{m_3, m_5, m_6, m_7\}$$

Il primo passo è quello di ampliare il problema, quindi si considerano i don't care come 1, e poi rioridnare i mintermini in base al numero di 1.

m	x y z v	
4	0 1 0 0	$\surd$
3	0 0 1 1	$\surd$
5	0 1 0 1	$\surd$
6	0 1 1 0	$\surd$
10	1 0 1 0	$\surd$
7	0 1 1 1	$\surd$
11	1 0 1 1	$\surd$
13	1 1 0 1	$\surd$
14	1 1 1 0	$\surd$
15	1 1 1 1	$\surd$

Tabella 27: Tabella riordinata

Il secondo passo è quello di tentare la semplificazione:

m	x y z v	
4, 5	0 1 0 -	$\surd$
4, 6	0 1 - 0	$\surd$
3, 7	0 - 1 1	$\surd$
3, 11	- 0 1 1	$\surd$
5, 7	0 1 - 1	$\surd$
5, 13	- 1 0 1	$\surd$
6, 7	0 1 1 -	$\surd$
6, 14	- 1 1 0	$\surd$
10, 11	1 0 1 -	$\surd$
10, 14	1 - 1 0	$\surd$
7, 15	- 1 1 1	$\surd$
11, 15	1 - 1 1	$\surd$
13, 15	1 1 - 1	$\surd$
14, 15	1 1 1 -	$\surd$

Tabella 28: Prima semplificazione

Ora si applica di nuovo la semplificazione:

m	x y z v	
4, 5, 6, 7	0 1 - -	A
3, 7, 11, 15	- - 1 1	B
5, 7, 13, 15	- 1 - 1	C
6, 7, 14, 15	- 1 1 -	D
10, 11, 14, 15	1 - 1 -	E

Tabella 29: Seconda semplificazione

Visto che non si possono fare ulteriori semplificazioni A, B, C, D, E sono tutti implicanti primi.

Ora si cerca di capire quali sono gli implicanti primi essenziali considerando però soltanto l'ON-SET:

m	A	B	C	D	E
m_4	**1**				
m_{10}					**1**
m_{11}		1			1
m_{13}			**1**		
m_{14}				1	1
m_{15}		1	1	1	1

Tabella 30: Tabella con implicanti primi

Si cancellano le righe A, C, E perchè sono implicanti primi essenziali, quindi si coprono anche tutte le righe delle colonne A, C, E che contengono 1. Si arriva quindi a coprire tutta la tabella e il risultato finale è:

$$O = A + C + E$$

9 Circuiti Combinatori

- **PROM**: Programmable Read Only Memory (ROM)
- **PLA**: Programmable Logic Array, attivano diverse porte logiche

I circuiti a 2 livelli sono composti da 2 livelli di porte logiche:

1. Porte AND
2. Porte OR

9.0.1 PLA (Programmable Logic Array)

Esempio 9.1
Un esempio di PLA:

$$O_1 = \bar{X}Y + YV + XZ$$

$$O_2 = \bar{X}\bar{Y} + YV + X\bar{Z}$$

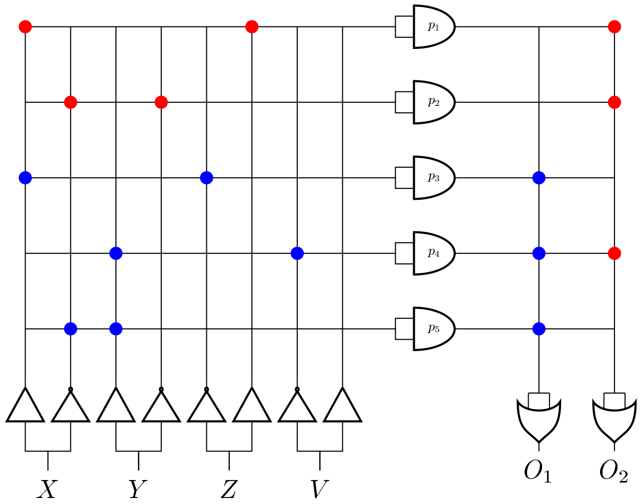

Figura 22: PLA

Prende in input coppie di variabili e le assegna ad un array di AND e l'output di questi AND viene assegnato ad un array di OR.

9.0.2 CPLD (Complex Programmable Logic Device)

I CPLD attivano diversi PLA:

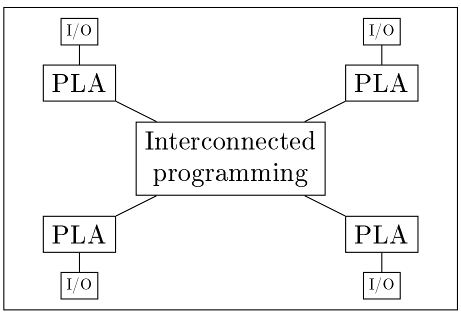

Figura 23: CPLD

9.0.3 FPGA (Field Programmable Gate Array)

I FPGA attivano diversi CPLD:

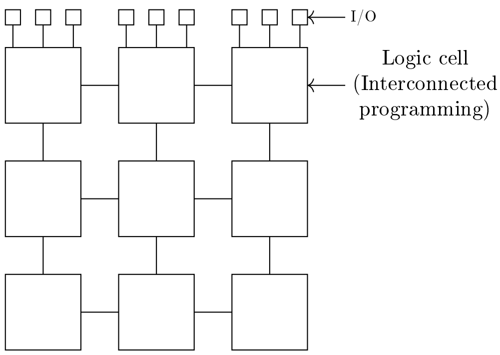

Figura 24: FPGA

9.0.4 SoC (System on Chip)

I SoC attivano diversi CPLD

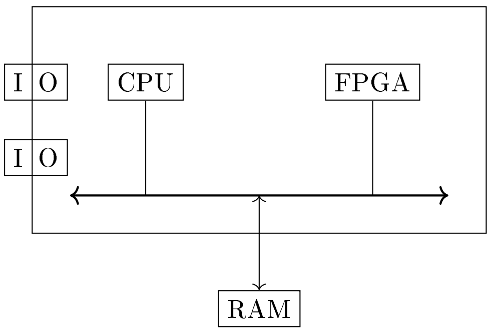

Figura 25: SoC

10 Laboratorio

10.1 SIS

È il successore di *Espresso* e permette di fare la sintesi di circuiti, cioè si genera passo dopo passo il layout per il silicio.

Il modello di codice di SIS è il seguente:

```
.model <model-male> // nome della funzione
.inputs <input-list> // elenco degli input
.outputs <output-list> // elenco degli output

.names // On-set/Off-set per ogni input
<command>
...
<command>

.end // il file deve essere
```

Esempio 10.1
Prendiamo in considerazoine la tabella di verità dell' implicazione logica:

a b	a $\Longrightarrow$ b
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

Tabella 31: Tabella di verità dell'implicazione logica

che si può scrivere anche nel seguente modo:

a b	a $\Longrightarrow$ b
0 -	1
1 0	0
1 1	1

Tabella 32: Tabella di verità ridotta

```
.model IMPLIES
.inputs I1 I2
.outputs O

.names I1 I2 O
// si definisce l'on-set o l'off-set
0- 1
11 1
.end
```

Lista di comandi base:

- **read_blif**: carica il modello sis;
- **simulate [valori in bit, separati da spazi]**: esegue un passo di simulazione del circuito;
- **help**: mostra i comandi disponibili;
- **help [comando]**: mostra la descrizione del comando;
- **print_stats**: fornisce informazioni sul circuito, quali numero di input (pi), output (po), elementi di memoria (latches), letterali (lits(sop)), numero di nodi (nodes);
- **quit**: esce da sis;
- **write_blif [nome file]**: salva il modello sis in un file;

- **write_blif**: stampa a video il file blif del circuito caricato in memoria senza dover lasciare l'ambiente SIS.