

# Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

2° Semestre 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>5</b>
1.1	Insiemi di numeri . . . . .	5
1.2	Numeri immaginari . . . . .	6
1.2.1	Esempi . . . . .	7
1.3	Operazioni tra i numeri complessi . . . . .	7
1.3.1	Somma . . . . .	7
1.3.2	Prodotto . . . . .	8
1.3.3	Sottrazione . . . . .	8
1.3.4	Divisione . . . . .	8
1.4	Coniugato e modulo . . . . .	10
1.4.1	Coniugato . . . . .	10
1.4.2	Modulo . . . . .	10
1.4.3	Proprietà . . . . .	10
1.5	Coordinate polari . . . . .	11
1.6	Forma trigonometrica di un numero complesso . . . . .	12
1.7	Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica . . . . .	13
1.8	Formula di de Moivre . . . . .	13
1.9	Definizione di radice n-esima . . . . .	14
1.10	Teorema delle radici n-esime . . . . .	14
1.10.1	Dimostrazione . . . . .	14
1.11	Radici quadrate di numeri reali negativi . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Sistemi lineari e matrici</b>	<b>16</b>
2.1	Sistemi lineari . . . . .	16
2.2	Definizione . . . . .	19
2.3	Definizione . . . . .	19
2.4	Operazioni elementari . . . . .	21
2.5	Linee in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	22
2.6	Metodo di eliminazione di Gauss (EG) . . . . .	23
2.7	Risoluzione di un sistema lineare . . . . .	25
2.8	Definizione di rango di una matrice . . . . .	26
2.9	Osservazione . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Matrici e le loro operazioni</b>	<b>27</b>
3.1	Definizione di somma . . . . .	27
3.1.1	Proprietà . . . . .	27
3.2	Definizione di prodotto per uno scalare . . . . .	28
3.2.1	Proprietà . . . . .	28
3.3	Definizione di matrice trasposta . . . . .	28
3.4	Definizione di prodotto di matrici . . . . .	28
3.4.1	Proprietà . . . . .	30
3.5	Osservazione . . . . .	31
3.6	Definizione . . . . .	32
3.7	Matrici elementari . . . . .	33
3.8	Moltiplicazione con matrici elementari . . . . .	35
3.9	Definizione di matrice invertibile . . . . .	36
3.10	Inverse di matrici elementari . . . . .	37
3.11	Proposizione . . . . .	38

3.11.1	Dimostrazione . . . . .	38
3.12	Proposizione . . . . .	39
3.12.1	Dimostrazione . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Matrici inverse e determinante</b>	<b>41</b>
4.1	Proposizione . . . . .	42
4.1.1	Dimostrazione . . . . .	42
4.2	Calcolo della matrice inversa . . . . .	42
4.3	Teorema delle matrici invertibili . . . . .	43
4.3.1	Dimostrazione . . . . .	44
4.4	Proposizione (Determinante di una matrice) . . . . .	44
4.4.1	Dimostrazione . . . . .	44
4.5	Definizione di determinante . . . . .	45
4.6	Regola di Sarrus . . . . .	46
4.7	Teorema di Laplace . . . . .	47
4.8	Determinante e trasposta . . . . .	48
4.9	Il principio di induzione . . . . .	49
4.10	Proposizione . . . . .	50
4.11	Teorema . . . . .	52
4.12	Corollario . . . . .	53
4.13	Corollario . . . . .	53
4.14	Formula per $A^{-1}$ . . . . .	54
4.15	Teorema di Cramer . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Spazi vettoriali e sottospazi</b>	<b>56</b>
5.1	Definizione di spazio vettoriale . . . . .	56
5.1.1	Esempi . . . . .	58
5.2	Osservazioni . . . . .	59
5.3	Definizione combinazione lineare . . . . .	60
5.4	Definizione di insieme di generatori . . . . .	61
5.4.1	Esempi . . . . .	62
5.5	Definizione di sottospazio . . . . .	63
5.5.1	Esempi . . . . .	64
5.6	Definizione di sottospazio generato . . . . .	66
5.7	Definizione . . . . .	67
5.8	Definizione . . . . .	68
5.9	Proposizione . . . . .	69
5.9.1	Dimostrazione . . . . .	69
5.10	Definizione . . . . .	70
5.11	Proposizione . . . . .	70
5.11.1	Dimostrazione . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Dipendenza e indipendenza lineare</b>	<b>72</b>
6.1	Proposizione . . . . .	72
6.1.1	Dimostrazione . . . . .	72
6.2	Definizione . . . . .	73
6.3	Teorema . . . . .	73
6.3.1	Dimostrazione . . . . .	73
6.3.2	Esempi . . . . .	74
6.4	Definizione . . . . .	75

6.5	Osservazione . . . . .	75
6.5.1	Esempi . . . . .	76
6.6	Base di $C(U)$ per una matrice $U$ in forma ridotta . . . . .	77
6.6.1	Osservazioni . . . . .	77
6.7	Proposizione . . . . .	78
6.8	Teorema . . . . .	78
6.8.1	Dimostrazione . . . . .	78
6.9	Teorema di Steinitz . . . . .	79
6.10	Corollario . . . . .	79
6.10.1	Dimostrazione . . . . .	79
6.11	Definizione . . . . .	79
6.11.1	Esempi . . . . .	80
6.12	Corollario . . . . .	80
6.13	Proposizione . . . . .	80
6.13.1	Dimostrazione . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Applicazione lineare</b>	<b>81</b>
7.1	Definizione . . . . .	81
7.1.1	Osservazioni . . . . .	81
7.1.2	Esempi . . . . .	81
7.2	Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . . . . .	82
7.2.1	Esempi . . . . .	82
7.3	Definizione . . . . .	84
7.4	Applicazione delle coordinate . . . . .	84
7.5	Applicazione delle coordinate $C_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ . . . . .	86
7.6	Teorema . . . . .	87
7.6.1	Dimostrazione . . . . .	87
7.7	Osservazione . . . . .	87
7.8	Corollario . . . . .	88
7.8.1	Dimostrazione . . . . .	88
7.9	Matrice del cambio di base . . . . .	89
7.9.1	Dimostrazione . . . . .	90
7.9.2	Osservazione . . . . .	90
7.10	Matrice associata a $f$ rispetto a basi . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Rango + nullità</b>	<b>93</b>
8.1	Definizione . . . . .	93
8.1.1	Esempi . . . . .	93
8.2	Teorema (nullità + rango) . . . . .	94
8.2.1	Dimostrazione . . . . .	94
8.3	Dimensione di $C(A)$ . . . . .	96
8.3.1	Proposizione . . . . .	96
8.3.2	Dimostrazione . . . . .	96
8.4	Dimensione di $N(A)$ . . . . .	97
8.4.1	Corollario . . . . .	98
8.5	Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$ . . . . .	98
8.6	Proposizione . . . . .	99
8.7	Teorema . . . . .	99
8.7.1	Dimostrazione . . . . .	99

<b>9</b>	<b>Autovalori e autovettori</b>	<b>100</b>
9.1	Definizione . . . . .	102
9.2	Osservazione . . . . .	102
9.3	Definizione . . . . .	103
9.4	Teorema . . . . .	103
9.5	Corollario . . . . .	104
9.6	Definizione . . . . .	104
9.7	Osservazione . . . . .	105
9.8	Proposizione . . . . .	107
9.8.1	Dimostrazione ( $r = 2$ ) . . . . .	107
9.9	Definizione . . . . .	110
<b>10</b>	<b>Diagonalizzazione di matrici</b>	<b>110</b>
10.1	Proposizione (Proprietà delle matrici simili) . . . . .	110
10.1.1	Dimostrazione . . . . .	111
10.2	Teorema . . . . .	112
10.2.1	Dimostrazione . . . . .	112
10.3	Corollario . . . . .	113
10.3.1	Dimostrazione . . . . .	113
10.4	Osservazione . . . . .	113
10.5	Lemma . . . . .	114
10.5.1	Dimostrazione . . . . .	115
10.6	Teorema . . . . .	115
10.6.1	Dimostrazione . . . . .	115
10.7	Algoritmo per la diagonalizzazione . . . . .	119
10.8	Osservazione . . . . .	120
10.9	Teorema spettrale . . . . .	120
10.9.1	Dimostrazione ( $n = 2$ ) . . . . .	120
<b>11</b>	<b>Basi ortonormali</b>	<b>121</b>
11.1	Prodotto interno . . . . .	123
11.1.1	Proprietà . . . . .	124
11.2	Norma euclidea . . . . .	125
11.2.1	Definizione . . . . .	125
11.2.2	Proprietà . . . . .	125
11.3	Interpretazione grafica del prodotto interno in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	126
11.4	Definizione . . . . .	127
11.5	Proposizione . . . . .	127
11.5.1	Dimostrazione . . . . .	127
11.6	Osservazione . . . . .	128
11.7	Definizione . . . . .	129
11.8	Algoritmo di Gram-Schmidt per l'ortonormalizzazione . . . . .	130
11.9	Corollario . . . . .	130
11.9.1	Dimostrazione . . . . .	131

# 1 Numeri complessi

## 1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni in  $\mathbb{R}$ , ma ha soluzioni in  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'algebra)**

Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

ed  $x$  è un'incognita, ammette  $n$  soluzioni

**Definizioni utili 1.1**

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

è detto **polinomio di grado  $n$  con coefficienti**  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

## 1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero  $i$  che è definito come  $i^2 = -1$ . Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$  è detta **forma algebrica** di un numero complesso  $z \in \mathbb{C}$ .

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

**Definizioni utili 1.2**

Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

### 1.2.1 Esempi

**Esempio 1.1**

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{R}$

## 1.3 Operazioni tra i numeri complessi

### 1.3.1 Somma

**Definizione 1.1**

L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

**Esempio 1.2**

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$



### 1.3.2 Prodotto

**Definizione 1.2**

Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che  $i^2 = -1$  si ha che  $bdi^2 = -bd$  quindi

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

**Esempio 1.3**

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

### 1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , il numero complesso  $-a - bi$  è l'unico numero complesso tale che  $z + (-z) = 0$ . Questo numero complesso è detto **opposto** di  $z$  e si indica con  $-z$ .

**Definizione 1.3**

La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

**Esempio 1.4**

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

### 1.3.4 Divisione

**Definizione 1.4**

La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo  $\frac{1}{z_2}$  come l'unico numero complesso tale che:

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  e  $z \neq 0$ . Supponiamo che  $z' = c + di$  sia un numero complesso tale che  $z \cdot z' = 1$ , cioè:

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo  $ac - bd = 1$  e  $ad + bc = 0$ .

Possiamo trovare  $c$  sostituendo  $d = \frac{-1-ac}{b}$  nella prima equazione:

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1-ac)}{b} = \frac{1-ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1+ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare  $d$  sostituendo  $c = \frac{ad}{b}$  nella seconda equazione:

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1-bd)}{a} = \frac{1-bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1-bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$ . Definiamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

**Esempio 1.5**

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i) \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \right) i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} - \cancel{abi} + b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

**Esempio 1.6**

$$\begin{aligned} & \frac{1+2i}{2-i} \\ & \left( \frac{1+2i}{2-i} \right) \left( \frac{2+i}{2+i} \right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2 + (-1)^2} = \\ & = \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i \end{aligned}$$

**1.4 Coniugato e modulo****1.4.1 Coniugato**

Sia  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . Il numero complesso  $\bar{z} = a - bi$  è detto **coniugato** di  $z$ .

**1.4.2 Modulo**

Il **modulo** di  $z$  è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

**1.4.3 Proprietà**

Siano  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$

1.  $z_1 \bar{z}_1 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
2.  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. Se

$$z_1 \neq 0, \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

Infatti:

$$\bar{z}_1 \cdot \left( \frac{1}{z_1} \right) = \overline{\left( z_1 \cdot \frac{1}{z_1} \right)} = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$

5. Se  $z_2 \neq 0$  allora:

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se  $z_1 \neq 0$ , allora

$$\frac{1}{z_1} \stackrel{def}{=} \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

**Esempio 1.7**

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{2-i} = (1+i) \left( \frac{1}{2-i} \right) \\ \frac{1}{2-i} &= \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ z &= (1+i) \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ \overline{z} &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

## 1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

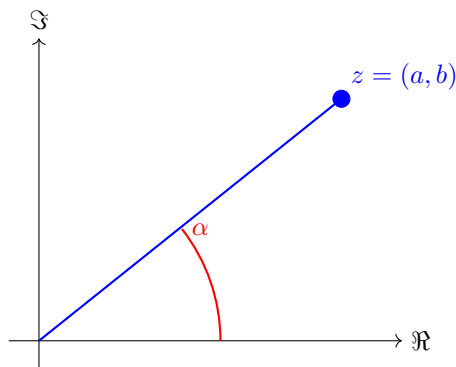


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere  $z$  in coordinate polari  $(r, \alpha)$  dove  $r$  è la lunghezza del segmento  $OZ$ , detto **raggio polare**, ed  $\alpha$  è l'angolo compreso tra l'asse delle  $x$  e  $OZ$  in senso antiorario.  $\alpha$  viene misurato in radianti

**Esempio 1.8**

$$z_1 = (1, 0) \rightarrow 1$$

$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow i$$

$$z_3 = (1, \pi) \rightarrow -1$$

$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow -i$$

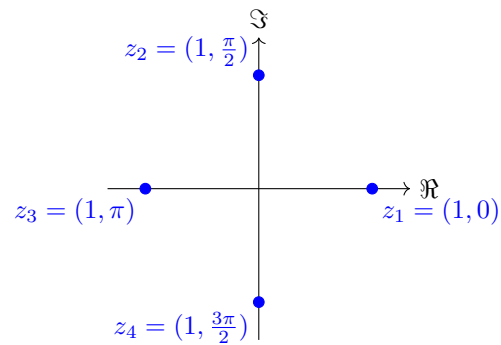


Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

## 1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un  $z = (r, \alpha)$  in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

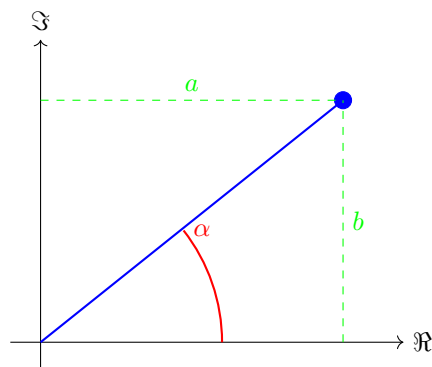


Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

**Definizione 1.5**

La **forma trigonometrica** di un numero complesso è definita come:

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha)i) = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } a = 0, b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{se } a > 0, b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0, b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

**Esempio 1.9**

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$

$$-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

**1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica****Definizione 1.6**

$$z_1 = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)), \quad z_2 = s(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \quad \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= rs(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = \\ &= rs((\cos \alpha \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) + (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))i) = \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

**1.8 Formula di de Moivre**

Dati  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

**Esempio 1.10**

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) \right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -64$$

**1.9 Definizione di radice n-esima**

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di  $y$  le soluzioni dell'equazione  $x^n = y$ .

**1.10 Teorema delle radici n-esime**

**Teorema 2** Siano  $y \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Esistono precisamente  $n$  radici  $n$ -esime complesse distinte  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  di  $y$ . Se  $y = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ , allora per  $k = 0, \dots, n-1$ :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Si somma  $2k\pi$  per ottenere tutte le radici  $n$ -esime, siccome  $\sin$  e  $\cos$  sono periodiche.

**1.10.1 Dimostrazione**

Per la formula di de Moivre sappiamo che:

$$z_k^n = \left( \sqrt[n]{r} \right)^n (\cos \alpha + (2\pi)k + i \sin \alpha + (2\pi)k) =$$

$$= r (\cos \alpha + i \sin \alpha) = y$$

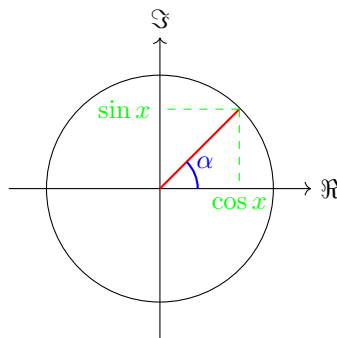


Figura 4: Circonferenza goniometrica

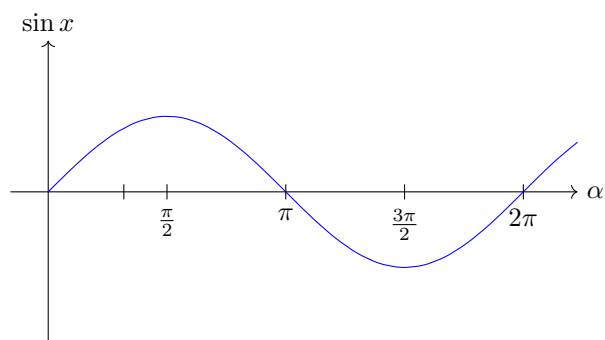


Figura 5: Funzione seno

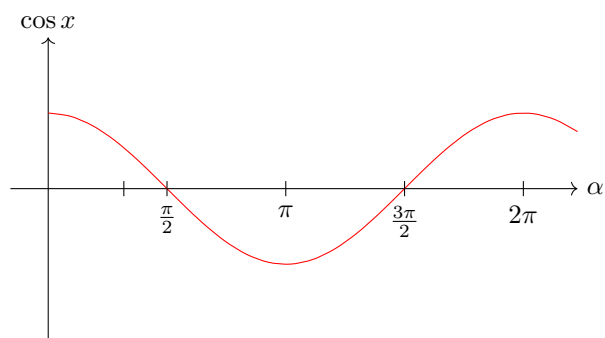


Figura 6: Funzione coseno

Quindi  $z_0, \dots, z_{n-1}$  sono soluzioni di  $y = x^n$ , cioè sono radici n-esime di  $y$ . Siccome il periodo di  $\sin$  e  $\cos$  è  $2\pi$ , le radici n-esime sono tutte distinte.

### 1.11 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia  $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  tale che  $a < 0$ . Esistono precisamente due radici quadrate di  $a$  in  $\mathbb{C}$ . Infatti, abbiamo:

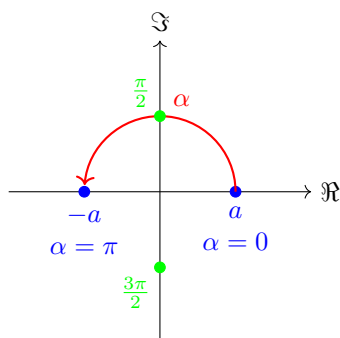


Figura 7: Radici quadrate di numeri reali negativi



$$a = (-a)(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Per il teorema 2:

$$z_0 = \sqrt{-a} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt{-a}$$

### **Definizioni utili 1.3**

Se abbiamo un polinomio della forma:

$$ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In  $\mathbb{C}$  esistono 2 soluzioni anche se  $\Delta < 0$ .

## 2 Sistemi lineari e matrici

### 2.1 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un insieme di  $m$  equazioni in  $n$  incognite che può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $b_k, a_{ij} \in \mathbb{C}$  oppure  $\mathbb{R}$  per  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ . Se i **termini noti** sono tutti nulli il sistema è detto **omogeneo**. Una n-upla  $(x_1, \dots, x_n)$  di numeri complessi (o reali) è una soluzione se soddisfa tutte le  $m$  equazioni.

### **Esempio 2.1**

Presa in considerazione la seguente tabella nutrizionale di cereali (per porzione):

	Cheerios	Quakers
Proteine (g)	4	3
Carboidrati (g)	20	18
Grassi (g)	2	5

Quante porzioni di Cheerios e Quakers dobbiamo mangiare per ottenere 9g

di proteine, 48g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4C + 3Q = 9 & (P) \\ 20C + 18Q = 48 & (C) \\ 2C + 5Q = 8 & (G) \end{cases}$$

Per risolvere il sistema lineare:

- Moltiplichiamo le per  $\frac{1}{4}$  e otteniamo un sistema lineare **equivalente** (cioè con **esattamente** le stesse soluzioni):

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C) \quad 20C + 18Q = 48$$

$$(G) \quad 2C + 5Q = 8$$

- Calcoliamo  $(C) - 20(P')$  e  $(G) - 2(P')$  e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + 15Q = 18$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- Moltiplichiamo  $(C')$  per  $\frac{1}{3}$  e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- Calcoliamo  $(G') - \frac{7}{2}(C')$  e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + 0Q = 0$$

Otteniamo dunque che  $Q = 1$  e  $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Per agevolare la risoluzione del sistema lineare si può utilizzare una matrice:

- **R1** = Riga 1
- **R2** = Riga 2

- $R3 = \text{Riga } 3$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{4} \cdot R1$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\downarrow R2 - 20 \cdot R1$$

$$\downarrow R3 - 2 \cdot R1$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{3} \cdot R2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\downarrow R3 - \frac{7}{2} \cdot R2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Otteniamo dunque che  $Q = 1$  e  $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

## 2.2 Definizione

### Definizione 2.1

Siano  $m, n, \dots < 1$ . Una tabella  $A$  tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

di  $m \times n$  elementi di  $\mathbb{C}$  disposti in  $m$  righe e  $n$  colonne si chiama una **matrice** di **dimensione**  $m \times n$ . Gli elementi si chiamano **coefficienti** (o entrate) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice  $ij$  dove  $i$  indica la riga e  $j$  la colonna di appartenenza.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione  $m \times n$  con entrate in  $\mathbb{C}$  si indica con  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ .

L'insieme di tutte le matrici di dimensione  $m \times n$  con entrate in  $\mathbb{R}$  si indica con  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

### Esempio 2.2

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

## 2.3 Definizione

Un sistema lineare di  $n$  incognite e  $m$  equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

può essere rappresentato nella forma **matriciale**:

$$Ax = b$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice dei coefficienti}} \quad x = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore delle incognite}} \quad b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei termini noti}}$$

La matrice

$$(A \mid B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

è detta **matrice aumentata**.

**Esempio 2.3**

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2}R1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$R2 - R1 \quad R3 + R1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$\frac{-1}{5}R2$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$R3 - 4R2$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right)$$

$$5R3$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

Si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegiamo un parametro alla **variabile libera**  $x_4$  :

$$t = x_4 \quad x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8 - 5t) + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + t + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3\left(\frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t\right) - \frac{3}{2}(8 - 5t) - t = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t - \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10 + 21 - 60}{5} + \frac{15 + 30}{4}t - t = \frac{-29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = \frac{-29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni  $t \in \mathbb{C}$ .

## 2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumentata  $(A|b)$ , si ottiene un sistema equivalente di forma più semplice:

- Moltiplicare una riga  $(R_i)$  per uno scalare  $\alpha \in \mathbb{C}$  **non nullo**:

$$\alpha R_i$$

- Sommare una riga  $(R_i)$  con un multiplo di un'altra riga  $(R_j)$ :

$$R_i + \alpha R_j$$

- Scambiare riga  $R_i$  con riga  $R_j$ :

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

### **Esempio 2.4**

Prendiamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R3+R1]{R2-R1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{-1}{5}R2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R3-4R2]{R3-4R2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{5}{8}R3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, non ha soluzioni.

## 2.5 Linee in $\mathbb{R}^2$

2 equazioni a 2 incognite con coefficienti in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (I) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Questo sistema lineare può essere rappresentato come:

$$y = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}} \quad (I)$$

$$y = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} \quad (II)$$

Il sistema può essere rappresentato come un sistema di rette nel piano cartesiano in cui la soluzione è l'intersezione delle rette.

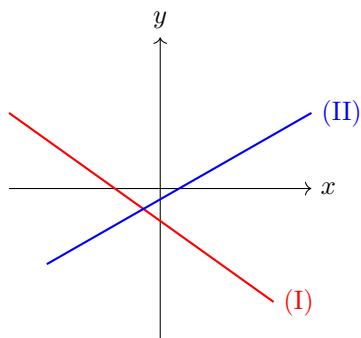


Figura 8: Intersezione di due rette

Può anche succedere che le rette siano parallele, in questo caso il sistema è impossibile:

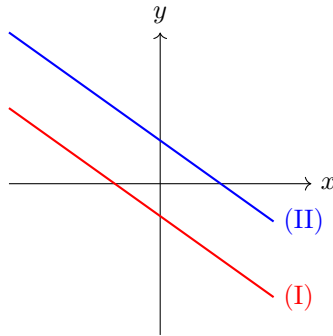


Figura 9: Retta parallela

Oppure che le rette siano coincidenti, in questo caso il sistema è indeterminato, cioè con infinite soluzioni:

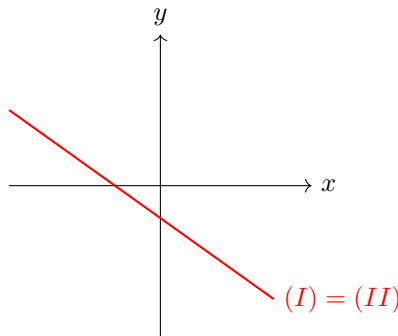


Figura 10: Retta coincidente

## 2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice  $M = (a_{ij})$   $1 \leq i \leq m$   $1 \leq j \leq n$  in  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  (oppure in  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ) con righe  $R1, \dots, Rn$ , eseguiamo le seguenti operazioni elementari:

1. Scegliamo la prima colonna non nulla  $j$  di  $M$  (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato 2 righe di  $M$ , otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{con } a_{ij} \neq 0$$

Moltiplicando  $R1$  per  $\frac{1}{a_{ij}}$ , si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Adesso, per ogni  $2 \leq i \leq m$ , eseguiamo l'operazione elementare  $Ri - a_{ij}R1$ . Otteniamo una matrice della forma:



$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$\uparrow$   
 Colonna  $j$

2. Ripetiamo il procedimento 1. su  $M'$  per ottenere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e così via...

3. Dopo un numero finito di passi, si ottiene una matrice che si chiama **matrice a scala**:

Pivot  
 $\downarrow$

$$r \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \textcircled{1} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$   
 Colonne dominanti

cioè esiste un numero  $1 \leq r \leq m$  tale che:

- (a) Le righe  $1 \leq i \leq r$  non sono nulle.
- (b) Ogni riga  $2 \leq i \leq m$  ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente.
- (c) le righe  $r + 1 \leq i \leq m$  sono tutte nulle.

Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga  $i$  è uguale a 1 e si chiama **pivot**. La matrice è detta **forma ridotta** di  $M$ . Le colonne che contengono pivot sono dette **dominanti**.

**Esempio 2.5**

Prendiamo in considerazione la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{C})$$

$$\begin{array}{c} R1 \leftrightarrow R2 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}R1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R3+iR1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R2} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R3-(6+3i)R2 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5}-\frac{11}{5}i \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R3}{\frac{11}{5}-\frac{11}{5}i}} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.7 Risoluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*) \quad Ax = b$$

con  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$  procediamo con il metodo di eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata  $(A|b)$  fino ad ottenere la forma ridotta  $(U|c)$  e un sistema lineare corrispondente

$$Ux = c$$

che è equivalente a  $(*)$ . Chiamiamo **variabili dominanti** le  $r$  variabili che corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti.

**Esempio 2.6**

Prendiamo in considerazione il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$x_1$  e  $x_3$  sono variabili dominanti e  $x_2$  è variabile libera.

Si ha uno dei seguenti casi:

- 1) Tutte le colonne di  $(U|c)$  tranne  $c$  sono dominanti. In questo caso il sistema ha una soluzione unica. Ad esempio:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\infty$ ) L'ultima colonna e almeno una colonna di  $U$  **non** sono dominanti. In tal caso il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono assegnando parametri alle  $n - r$  variabili libere. Ad esempio:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{5} \\ 8 \end{array} \right)$$

- 0) L'ultima colonna  $c$  è dominante. In questo tal caso il sistema non ammette soluzioni. Ad esempio:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Attenzione:** la forma ridotta di una matrice **non** è univocamente determinata, ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

## 2.8 Definizione di rango di una matrice

### Definizione 2.2

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  con forma ridotta  $U$ . Il numero  $r$  di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di  $U$  e si indica con  $rk(U)$ .

Verrà dimostrato più avanti che ogni forma ridotta di  $A$  ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di  $A$  come  $rk(A) = rk(U)$ .

Si ha  $rk(A) \leq \min(m, n)$ .

## 2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni  $[1]$ ,  $[\infty]$ ,  $[0]$  usando il rango:

**Teorema 3 (Teorema di Rouché-Capelli)** Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , sia  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ .

$$[1] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) = n$$

$$rk(U) = rk(U|c)$$

$$[\infty] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) < n$$

$$rk(U) = rk(U|c) < n$$

$$[0] \Leftrightarrow rk(A) < rk(A|b)$$

$$rk(U) < rk(U|c)$$

### 3 Matrici e le loro operazioni

#### 3.1 Definizione di somma

**Definizione 3.1**

Siano  $A = (a_{ij})$   $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  e  $B = (b_{ij})$   $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  due matrici in  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ . La **somma** di  $A$  e  $B$  è la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

in  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$

**Esempio 3.1**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ -1 & 1-i & 5+i \end{pmatrix}$$

#### 3.1.1 Proprietà

L'addizione di matrici è:

- **Associativa**, cioè:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- **Commutativa**, cioè:

$$A + B = B + A$$

### 3.2 Definizione di prodotto per uno scalare

#### **Definizione 3.2**

Data una matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , il **prodotto** della matrice  $A$  per lo scalare  $\alpha$  è la matrice:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

#### **Esempio 3.2**

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix}$$

#### 3.2.1 Proprietà

Il prodotto di una matrice per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

per  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

### 3.3 Definizione di matrice trasposta

#### **Definizione 3.3**

Accanto a una matrice  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , consideriamo la matrice  $A^T$  ottenuta da  $A$  scambiando le righe con le colonne, è detta **trasposta** di  $A$ .

#### **Esempio 3.3**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 7 \\ \pi & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ i & \frac{1}{12} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Definizione di prodotto di matrici

- Una matrice di dimensione  $m \times 1$  è detta **vettore** (colonna) e si usa la

notazione  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ .

Una matrice di dimensione  $1 \times n$  è detta **vettore riga** e si usa la notazione  $v^T = (v_1 \ \dots \ v_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{C})$ .

Sia  $v^T = (v_1 \ \dots \ v_n)$  un vettore riga in  $M_{1 \times n}(\mathbb{C})$  e  $u = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  un vettore colonna in  $M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ . Il **prodotto** di  $v^T$  per  $u$  è il numero complesso:  $v^T u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \in \mathbb{C}$

**Esempio 3.4**

$$v^T = (1 \quad 2 \quad 3) \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v^T u = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 1 + 0 + 9 = 10$$

- Possiamo vedere una matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  come  $m$  vettori riga  $Ri = (a_{i1} \dots a_{in})_{1 \leq i \leq m}$  detti **righe di**  $A$  oppure  $n$  vettori colonna  $Cj = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{1 \leq j \leq n}$  detti **colonne di**  $A$ .

Siano

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(\mathbb{C})$$

Se  $n = s$ , allora possiamo formare il prodotto di  $A$  e  $B$ :

$$AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t}$$

dove

$$c_{ij} = RiCj = (a_{i1} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

è il prodotto della riga  $i$  di  $A$  e la colonna  $j$  di  $B$ .

**Esempio 3.5**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1C1 & R1C2 & R1C3 \\ R2C1 & R2C2 & R2C3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 12 & 22 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

### 3.4.1 Proprietà

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà:

- **Associativa**, cioè:

$$A(BC) = (AB)C$$

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:

$$(A + B)C = AC + BC$$

Con  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  e  $C \in M_{n \times t}(\mathbb{C})$

$$A(B + C) = AB + AC$$

In sostanza le matrici devono avere il numero di colonne uguale al numero di righe.

- Scriviamo  $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  per la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice viene detta **matrice identità**.

Per ogni matrice  $M \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , abbiamo che:

$$M \cdot I_m = I_n \cdot M = M$$

#### **Esempio 3.6**

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### **Esempio 3.7**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

- $(AB)^T = B^T A^T$  con

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \quad B \in M_{n \times t}(\mathbb{C})$$

$$A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{C}) \quad B^T \in M_{t \times n}(\mathbb{C})$$

**Esempio 3.8**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto di matrici **non** è commutativo:

$$AB \neq BA$$

Infatti:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.5 Osservazione

Siano  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  e  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ ,  $x =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Consideriamo  $Ax = b$  in forma matriciale. Abbiamo

$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{C})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{n \times 1}(\mathbb{C})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{m \times 1}(\mathbb{C})}$$



che è uguale a  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

**Esempio 3.9**

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

### 3.6 Definizione

Una matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  di dimensione  $n \times n$  si dice **matrice quadrata** di ordine  $n$ . Gli elementi di  $A$ :  $a_{ii} \quad 1 \leq i \leq n$  formano la **diagonale** di  $A$ .

**Esempio 3.10**

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, la matrice è detta **matrice diagonale**.

**Esempio 3.11**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sotto della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare superiore**.

**Esempio 3.12**

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sopra della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare inferiore**.

**Esempio 3.13**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

### 3.7 Matrici elementari

Prendiamo la matrice identità:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le operazioni elementari alla matrice identità  $I_n$  per ottenere le matrici elementari che denotiamo come segue:

- $E_{ij}$  la matrice ottenuta da  $I_n$  scambiando la riga  $i$  con la riga  $j$

**Esempio 3.14**

$$n = 3 \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E_i(\alpha)$  ottenuta da  $I_n$  moltiplicando la riga  $i$  per lo scalare  $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$

**Esempio 3.15**

$$n = 3 \quad \alpha = i + 5 \in \mathbb{C}$$

$$E_3(i + 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i + 5 \end{pmatrix}$$

- $E_{ij}(\alpha)$  ottenuta da  $I_n$  sommando la riga  $i$  con la riga  $j$  moltiplicata per lo scalare  $\alpha \in \mathbb{C}$

**Esempio 3.16**

$$n = 3 \quad \alpha = \frac{-5}{6} \in \mathbb{C}$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.8 Moltiplicazione con matrici elementari

*Esempio 3.17*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -i-5 & 5(i+5) \end{pmatrix}$$

$$E_{13}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-25}{6} \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che ogni operazione elementare su una matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  corrisponde alla (pre)moltiplicazione di  $A$  con la matrice elementare ottenuta da  $I_m$  effettuando la medesima operazione elementare.

*Definizioni utili 3.1*

$$AE_1(-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$$

**Esempio 3.18**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underbrace{E_{21}(-3)}]{\substack{R2-3R1 \\ E_{21}(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underbrace{E_2(\frac{1}{5})}]{\substack{\frac{1}{5}R2 \\ E_2(\frac{1}{5})}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = U$$

Otteniamo una matrice con 2 pivot e 2 colonne dominanti. Questa matrice viene chiamata **forma ridotta di A**. Quindi il calcolo può essere anche fatto in questo modo:

$$\begin{aligned} U &= E_2 \left( \frac{1}{5} \right) (E_{21}(-3)A) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_E \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R2-3R1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5}R2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice  $U$  e a destra la matrice  $E$ .

### 3.9 Definizione di matrice invertibile

Una matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  si dice **invertibile** se esiste  $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tale che:

$$CA = I_n \quad \text{e} \quad AC = I_n$$

In tal caso,  $C$  è detta **inversa** di  $A$ . L'inversa di  $A$ , quando esiste, è univocamente determinata e si denota con  $A^{-1}$ . Infatti, se  $C$  e  $C'$  sono due matrici inverse di  $A$ , allora:

$$C = I_n C = (C' A) C = C' (AC) = C' I_n = C'$$

**Esempio 3.19**

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
AC &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
CA &= \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow C = A^{-1}
\end{aligned}$$

Se  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  sono invertibili, allora lo è anche il loro prodotto  $AB$ . Infatti l'inversa di  $AB$  è  $B^{-1}A^{-1}$ . Infatti:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

oppure

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**3.10 Inverse di matrici elementari**

Le matrici elementari sono tutte invertibili con inverse:

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

**Esempio 3.20**

$$\begin{aligned}
E_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$E_i(\alpha)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

**Esempio 3.21**

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$E_3\left(\frac{1}{i+5}\right)E_3(i+5) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

**Esempio 3.22**

$$E_{23}\left(-\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}\left(\frac{5}{6}\right)E_{23}\left(-\frac{5}{6}\right) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3.11 Proposizione**

Sia  $Ax = b$  un sistema lineare in forma matriciale, cioè  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  e  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ . Se  $(U|c)$  è una forma ridotta della matrice aumentata  $(A|b)$ , allora i sistemi lineari  $Ax = b$  e  $Ux = c$  hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti.

**3.11.1 Dimostrazione**

Siano  $E_1, \dots, E_s$  le matrici elementari che trasformano  $(A|b)$  nella forma ridotta  $(U|c)$ . Allora:

$$(A|b) \underset{E_1}{\sim} (A'|b') \underset{E_2}{\sim} \dots \underset{E_s}{\sim} (U|c)$$

Allora abbiamo:

$$(U|c) = E_s \dots \underbrace{E_1(A|b)}_{(A'|b')}$$

Per 3.10, le matrici elementari  $E_1, \dots, E_s$  sono invertibili. Dunque anche il prodotto  $E = E_s \dots E_1$  è invertibile con  $E^{-1} = E_1^{-1} \dots E_s^{-1}$ . Abbiamo che

$E(A|b) = (U|c)$ , ovvero  $EA = U$  e  $Eb = c$ . Pertanto, se  $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$  è una soluzione di  $Ax = b$ , cioè  $Av = b$ , allora:

$$Uv = (EA)v = E(Av) = Eb = c$$

Quindi  $v$  è soluzione di  $Ux = c$ .

Se  $v \in M_{a \times 1}(\mathbb{C})$  è soluzione di  $Ux = c$ , cioè  $Uv = c$ , allora:

$$\begin{aligned} Av &= \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m} Av = E^{-1}(EA)v = E^{-1}(Uv) = E^{-1}c = \\ &= E^{-1}(Eb) = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m} b = b \end{aligned}$$

Quindi  $v$  è soluzione di  $Ax = b$   $\square$ .

### 3.12 Proposizione

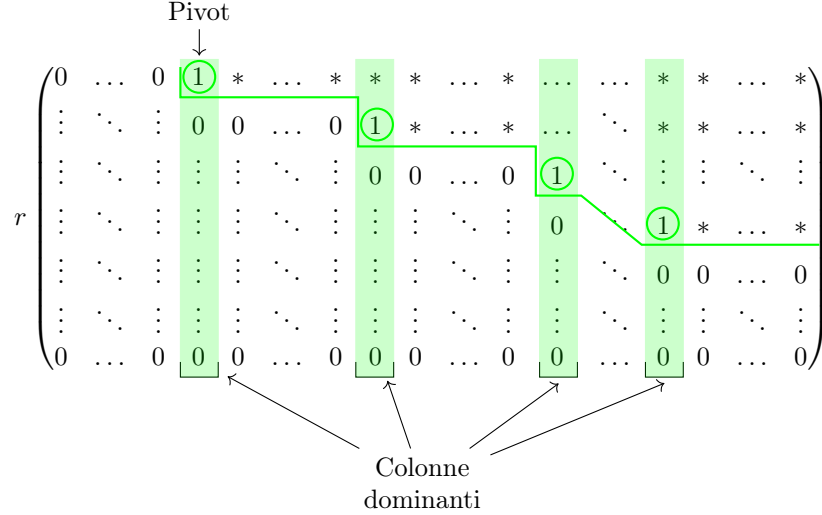
Sono equivalenti i seguenti enunciati per  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ :

1. Il sistema lineare  $Ax = b$  ammette soluzione per qualsiasi  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ .
2. Il rango  $rk(A)$  di  $A$  è pari al numero di righe di  $A$ .

#### 3.12.1 Dimostrazione

Dimostriamo che 1. implica 2. Supponiamo (1.)

Sia  $U$  una forma ridotta di  $A$ :





Queste righe esistono se e solo se  $rk(U) < \text{numero di righe di } U$ .

Esiste una matrice invertibile  $E$  tale che  $U = EA$  ( $E =$  prodotto delle matrici elementari dell'Eliminazione di Gauss). Consideriamo il vettore  $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e

mettiamo  $b = E^{-1}C$ . Allora il sistema lineare  $Ax = b$  ammette una soluzione  $v$  per (1.), cioè  $Av = b$ . Allora  $Uv = Eb = E(E^{-1}C) = C$  per (3.11). Per il teorema di **Rouché-Capelli**,  $rk(U) = rk(U|c)$ , cioè:

$$(U|c) = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & * & \dots & * & * & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & 1 \end{array} \right)$$

L'ultima riga non può essere nulla, altrimenti l'ultima colonna di  $(U|c)$  sarebbe una colonna dominante.

Dunque  $rk(A) = rk(U) = \text{numero di righe di } U = \text{numero di righe di } A$ .

Dimostriamo che 2. implica 1. Supponiamo (2.)

Sia  $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$  e consideriamo  $Ax = b$ . Eseguendo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice  $(A|b)$ , otteniamo una forma ridotta  $(U|c)$ . Siccome  $rk(U) = \text{numero di righe di } U$ , ogni riga di  $U$  contiene un pivot. Perciò  $rk(U) = rk(U|c)$  e quindi  $rk(A) = rk(A|b)$ . Quindi siamo nel caso di una soluzione unica, oppure nel caso di infinite soluzioni del teorema di **Rouché-Capelli**.  $\square$

## 4 Matrici inverse e determinante

### Esempio 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss e calcoliamo il prodotto delle matrici elementari contemporaneamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}4]{E_{21}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{31}4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{33}(-\frac{1}{4})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice ridotta  $U$ , a destra abbiamo il prodotto delle matrici elementari. Cioè:

$$E_3(-\frac{1}{4})E_{32}(2)E_{31}(4)E_{21}(-5)$$

Siccome  $rk(U) = 3$ , possiamo continuare per ottenere la matrice identità:

$$(U|E) \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice identità, a destra abbiamo la matrice  $E' = E_{12}(-2)E_{23}(1)E$ . Allora:

$$I_3 = E_{12}(-2)E_{23}(1)U = E_{12}(-2)E_{23}(1)E \cdot A =$$

$$= E' A$$

Osserviamo che:

$$AE' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque  $A^{-1} = E'$

## 4.1 Proposizione

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Allora  $A$  è invertibile se e solo se esiste una sequenza di matrici elementari  $E_1, \dots, E_t$  tale che  $I_n = (E_t \dots E_1 A)$ .

### 4.1.1 Dimostrazione

Supponiamo che  $A$  sia invertibile. Per ogni  $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ , il vettore  $A^{-1}b =: v$  è soluzione del sistema lineare  $Ax = b$ . Infatti:

$$Av = b = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_nb = b$$

Per (3.12), abbiamo che  $rk(A) = n$ . Esiste una forma ridotta  $U$  di  $A$  tale che  $rk(U) = n$  e

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con 1 sulla diagonale e matrici elementari  $E_1, \dots, E_t$  tali che  $U = E_t \dots E_1 A$ . Proseguendo come nell'esempio precedente, otteniamo le matrici elementari  $E_{t+1}, \dots, E_s$  tali che:

$$I_n = E_s \dots E_{t+1} U = E_s \dots E_{t+1} E_t \dots E_1 A$$

Ora supponiamo che esistano le matrici elementari  $E_1, \dots, E_s$  tali che:

$$I_n = E_s \dots E_1 A$$

Per 3.10, le matrici elementari sono invertibili. Dunque:

$$E_i^{-1} \dots E_s^{-1} = E_i^{-1} \dots E_s^{-1} I_n = \overbrace{E_i^{-1} \dots E_s^{-1}}^{I_n} E_s \dots E_1 A = A$$

$(E_s \dots E_1)^{-1}$

$A$  è un prodotto di matrici invertibili, quindi è invertibile con  $A^{-1} = E_s \dots E_1$   
□

## 4.2 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice invertibile  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ . Usiamo le operazioni elementari per trasformare  $A$  nella matrice identità, e eseguiamo le stesse operazioni elementari su  $I_n$  per ottenere  $A^{-1}$ :

$$(A|I_n) \xrightarrow{E_1} (A'|E') \xrightarrow{E_2} \dots \xrightarrow{E_s} (I_n|A^{-1})$$

**Esempio 4.2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3-5R1]{E_{31}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3+4R2]{E_{32}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R2-4R3]{E_{23}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R1-3R3]{E_{13}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1-2R2]{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice identità  $I_3$ , a destra abbiamo la matrice inversa  $A^{-1}$

### 4.3 Teorema delle matrici invertibili

Sono equivalenti i seguenti enunciati per  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ :

- (a)  $A$  è invertibile.
- (b) Esiste una sequenza di matrici elementari  $E_1, \dots, E_t$  tale che:

$$I_n = E_t \dots E_1 A$$

- (c)  $rk(a) = n$
- (d) Il sistema lineare  $Ax = b$  ammette una soluzione per qualsiasi vettore  $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ .
- (e) Il sistema lineare  $Ax = \underbrace{0}_{\text{vettore nullo}}$  ha una sola soluzione, cioè:

$$x = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (f) Esiste una matrice  $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tale che:

$$CA = I_n$$

- (g) Esiste una matrice  $D \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tale che:

$$AD = I_n$$

#### 4.3.1 Dimostrazione

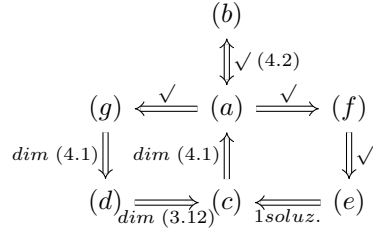


Figura 11: Diagramma delle implicazioni

$(f) \Rightarrow (e)$  Supponiamo che  $\exists C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tale che  $CA = I_n$ . Sia  $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$  una soluzione del sistema  $Ax = 0$ . Allora:

$$v = I_n v = (CA)v = C(Av) = Co = 0$$

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

#### **Definizioni utili 4.1**

Sia  $D$  la matrice inversa destra:

$$D = I_n D = (CA)D = C(AD) = CI_n = C$$

Osserviamo che  $D = C$ . Quindi:

$$C = D = A^{-1}$$

### 4.4 Proposizione (Determinante di una matrice)

Sia  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se  $ad - bc \neq 0$ , allora  $A$  è invertibile e  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Se  $ad - bc = 0$ , allora  $A$  non è invertibile.

$ad - bc$  è detto **determinante** di  $A$  e si indica con  $\det(A)$ .

#### 4.4.1 Dimostrazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left( \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Quindi  $A$  è invertibile e  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Se  $ad - bc = 0$ , allora:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc \\ cd-cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$  è soluzione al sistema  $Ax = 0$ . Se  $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , allora  $A$  non è invertibile per (4.3(e)).

Se  $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , allora  $d = c = 0$  e:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango  $< 2$ , quindi  $A$  non è invertibile per (4.3(c)).  $\square$

## 4.5 Definizione di determinante

### **Definizione 4.1**

Definiamo una funzione  $\det : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  detta **determinante** per ricorrenza:

- $n = 1$ :

$$A = (a) \quad \det(A) = a$$

- $n = 2$  (4.3):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

- $n \geq 3$ :

$$A = (A_{ij})_{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

dove  $A_{1j}$  è la matrice ottenuta da  $A$  cancellando la prima riga e la colonna  $j$ .

**Esempio 4.3**

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 \det(A) &= (-1)^2 1 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \emptyset & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 2 & 0 \end{pmatrix} + \\
 &\quad (-1)^3 2 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{2} & 0 \end{pmatrix} + \\
 &\quad (-1)^4 3 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \emptyset \end{pmatrix} = \\
 &\quad = -6 + 6 - 3 = -3
 \end{aligned}$$

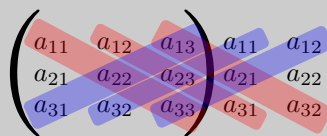
**Esempio 4.4**

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \\
 &\quad (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
 &\quad (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= 1(-2 - 1) - 2(-3 - 0) + 3(3 - 0) = -3 + 6 + 9 = 12
 \end{aligned}$$

## 4.6 Regola di Sarrus

**Definizione 4.2**

Per una matrice di dimensione  $3 \times 3$  si può usare la regola di Sarrus:



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

**Esempio 4.5**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la regola di Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 \\ &\quad - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = -3 \\ &= 6 - 3 - 6 = -3 \end{aligned}$$

## 4.7 Teorema di Laplace

**Definizione 4.3**

Il determinante di una matrice  $A = (a_{ij})$  può essere sviluppato per qualsiasi riga o colonna come segue:

- Sviluppo per la riga  $i$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove  $A_{ij}$  è la matrice ottenuta da  $A$  cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ .

- Sviluppo per la colonna  $j$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove  $A_{ij}$  è la matrice ottenuta da  $A$  cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ .

Il valore  $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  è detto **complemento algebrico** di  $a_{ij}$ . Il segno si determina secondo:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



**Esempio 4.6**

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 0^- & 1^+ & 3^- \\ 1^+ & 2^- & 0^+ \end{pmatrix}$$

- **Riga 3:**

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \emptyset & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \emptyset \end{pmatrix} \\ &\quad - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{1} & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \emptyset \end{pmatrix} \\ &= (6 - 3) - 2(3 - 0) = 3 - 6 = -3 \end{aligned}$$

- **Colonna 3:**

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \emptyset \end{pmatrix} \\ &\quad - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \emptyset & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \emptyset \end{pmatrix} \\ &= 3(1 - 6) - 3(1 - 6) = -15 + 15 = 0 \end{aligned}$$

#### 4.8 Determinante e trasposta

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & A^T &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ \det(A) &= ad - bc & \det(A^T) &= ad - cb \\ &\Downarrow & & \\ \det(A) &= \det(A^T) \end{aligned}$$

**Esempio 4.7**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -3$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \stackrel{R1}{=} 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}} + 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{13}} = -3$$

$$\det(A^T) \stackrel{C1}{=} 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}^T} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{21}^T} + 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{31}^T} = -3$$

Se  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , allora:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

## 4.9 Il principio di induzione

Il principio di induzione serve a dimostrare che per ogni  $n \geq 1$  vale una proprietà  $P(n)$ . Nel nostro caso che ogni matrice  $A$  di dimensione  $n \times n$ ,  $\det(A) = \det(A^T)$ . Si procede in due passi:

- **Base dell'induzione:**

$P(n)$  è vera per  $n = 1$ , ovvero  $P(1)$  è vera.

- **Passo induttivo:**

Supponendo che  $p(n)$  sia vera; ne consegue che  $p(n+1)$  è vera.

Allora  $p(n)$  è vera per tutti gli  $n \in \mathbb{N}$ .

**Esempio 4.8**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per la riga 4:

$$\det(A) = 10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cancel{4} \\ 0 & 5 & 6 & \cancel{7} \\ 0 & 0 & 8 & \cancel{9} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cancel{10} \end{pmatrix}$$

Si utilizza di nuovo il teorema di Laplace per la matrice  $3 \times 3$  ottenuta:

$$\stackrel{R3}{=} 10 \left( 8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = 10 \cdot 8 \cdot (1 \cdot 5 - 0 \cdot 2) = 10 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 1 = 400$$

**4.10 Proposizione**

Sia  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  una matrice triangolare superiore o inferiore. Allora:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

**Dimostrazione** (superiore):

Per induzione su  $n$ :

- **Proprietà  $P(n)$ :**

Per  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ ,  $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$

- **Base dell'induzione:**

$$A = (a_{11}) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) = a_{11} \quad \text{Per definizione}$$

- **Passo induttivo:**

Supponiamo  $P(n)$

$$A = (a_{ij}) \in M_{n+1 \times n+1}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) \stackrel{Rn+1}{=} a_{n+1, n+1} \cdot \underbrace{\det(A_{n+1, n+1})}_{\text{mat. triang. sup. di dim. } n \times n} = a_{n+1, n+1}(a_{nn} \dots a_{11})$$

Quindi  $P(n+1)$  è vera.

Per il principio di induzione, abbiamo dimostrato che  $P(n)$  vale per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . La dimostrazione per  $A$  triangolare inferiore è simile.  $\square$

**Esempio 4.9**

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice è una matrice ridotta, cioè una matrice triangolare superiore con 1 sulla diagonale.

$$\det(U) = 1$$

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(U') = 0$$

**Esempio 4.10**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -3$$

•

$$\det(E_{23}A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{C1}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (6 - 0) - (6 - 3) = 6 - 6 + 3 = 3 = -\det(A) \end{aligned}$$

•

$$\det(E_2(2)A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{C2}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -12 + 6 = -6 = 2 \det(A) \end{aligned}$$

•

$$\det(E_{13}(2)A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{C1}{=} 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3(-6) + 1(18 - 3) = -3 = \det(A)
\end{aligned}$$

#### 4.11 Teorema

Siano  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ . Allora:

$$\det(EA) = \begin{cases} -\det(A) & \text{se } E = E_{ij} \\ \alpha \det(A) & \text{se } E = E_i(\alpha) \\ \det(A) & \text{se } E = E_{ij}(\alpha) \end{cases}$$

**Dimostrazione** ( $n = 2$ ):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) = ad - bc$$

•

$$\det(E_{12}A) = \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -\det(A)$$

•

$$\det(E_{12}A) = \det(E_{21}A)$$

•

$$\det(E_1(\alpha)A) = \det \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad - bc) = \alpha \det(A)$$

•

$$\det(E_2(\alpha)A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = a(\alpha d) - b(\alpha c) = \alpha(ad - bc) = \alpha \det(A)$$

•

$$\begin{aligned}
\det(E_{21}(\alpha)A) &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} = a(d + \alpha b) - b(c + \alpha a) = \\
&ad + \alpha ab - bc - \alpha ab = ad - bc = \det(A)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\det(E_{12}(\alpha)A) &= \det \begin{pmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ c & d \end{pmatrix} = (a + \alpha c)d - (b + \alpha d)c = \\
&ad + \alpha cd - bc - \alpha cd = ad - bc = \det(A)
\end{aligned}$$

**Esempio 4.11**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma ridotta della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\det(U) = 1$$

$$U = E_3(-\frac{1}{3})E_{31}(-1)A$$

$$A = E_{31}(-1)^{-1}E_3(-\frac{1}{3})^{-1}U = E_{31}(1)E_3(-3)U$$

$$\det(A) = \det(E_{31}(1)E_3(-3)U) =$$

$$\det(E_3(-3)U) = -3 \det(U) = -3$$

**4.12 Corollario**

Se  $A \in M_{n \times n}$ , allora  $\det(A) \neq 0$  se e solo se  $A$  è invertibile.

**Dimostrazione:**

Sia  $U$  una forma ridotta di  $A$ :

$$\det(A) \neq 0 \underset{4.3}{\Leftrightarrow} \det(U) \neq 0 \underset{4.10}{\Leftrightarrow} rk(U) = n \underset{4.3}{\Leftrightarrow} A \text{ è invertibile}$$

□

**4.13 Corollario**

Siano  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Allora  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

**Dimostrazione:**

- **Caso 1:**

$A$  non è invertibile, ovvero  $\det(A) = 0$ . Se  $AB$  è invertibile, allora

$$A(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = I_n \quad \text{e} \quad B(AB)^{-1}$$

sarebbe l'inversa di  $A$ . Quindi  $AB$  **non** è invertibile. Allora  $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$

- **Caso 2:**

$A$  è invertibile. Per (4.1), esiste una sequenza  $E_1, \dots, E_t$  di matrici elementari tali che:

$$E_t \dots E_1 A = I_n$$

Siccome  $E_1, \dots, E_t$  sono invertibili, possiamo considerare:

$$A = (E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) E_t \dots E_1 A = E_1^{-1} \dots E_t^{-1} I_n = E_1^{-1} \dots E_t^{-1}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1^{-1} \dots E_t^{-1} B) \\ &\stackrel{teo}{=} \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_t^{-1}) \det(B) \\ &\stackrel{teo}{=} \det(E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

□

#### 4.14 Formula per $A^{-1}$

Se  $\det(A) \neq 0$  allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

dove  $A^*$  è la matrice i cui coefficienti sono i complementi algebrici di  $A^T$  e  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

##### **Esempio 4.12**

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A^* &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{1} & 2 \\ 3 & \cancel{3} & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ 3 & 3 & \emptyset \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & \emptyset & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{3} & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & 3 & \emptyset \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \emptyset \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & \emptyset & 1 \\ 2 & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \emptyset \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \emptyset \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \det(A^{-1}) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

#### 4.15 Teorema di Cramer

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  con  $\det(A) \neq 0$ , sia  $b \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Allora il sistema lineare

$Ax = b$  possiede l'unica soluzione  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$  dove

$$p_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

e  $A_i$  è la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la colonna  $i$  con il vettore  $b$ .

##### **Esempio 4.13**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -3 \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} +1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_1) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_2) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_3) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$p_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$p_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$p_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

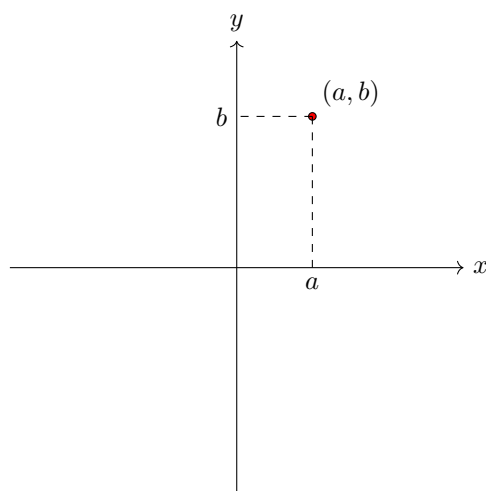
Dunque  $p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  è l'unica soluzione del sistema lineare  $Ax = b$



## 5 Spazi vettoriali e sottospazi

### **Esempio 5.1**

Prendiamo in considerazione il piano cartesiano:  $\mathbb{R}^2$



Ogni punto nel piano cartesiano può essere rappresentato con una coppia di valori  $(a, b)$ . Possiamo identificare  $\mathbb{R}^2$  con l'insieme

$$M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Possiamo:

- Sommare i vettori:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$$

- Moltiplicare per uno scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

### 5.1 Definizione di spazio vettoriale

#### **Definizione 5.1**

Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Uno **spazio vettoriale** su  $\mathbb{K}$  è un insieme non vuoto  $V$  i cui elementi sono detti **vettori** sul quale sono definite due operazioni:

1. **Addizione:** per  $v, w \in V$  abbiamo:

$$v + w \in V$$

2. **Moltiplicazione per uno scalare:** per  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$  abbiamo:

$$\alpha v \in V$$

che godono delle seguenti proprietà:

1. Valgono le proprietà:

(a) **Associatività:**

$$(v + u) + w = v + (u + w)$$

per ogni  $v, u, w \in V$

(b) **Elemento neutro:** esiste  $0_v \in V$  tale che:

$$v + 0_v = v = 0_v + v$$

per ogni  $v \in V$

(c) **Elemento inverso:** per ogni  $v \in V$  esiste  $w \in V$  tale che:

$$v + w = 0_v = w + v$$

Scriviamo  $w = -v$

(d) **Commutatività:**

$$v + w = w + v$$

per ogni  $v, w \in V$

2. Per ogni  $v \in V$ :

$$1 \cdot v = v$$

3. Per ogni  $v \in V$  e  $a, b \in \mathbb{K}$

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$$

4. Per ogni  $v, w \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$  valgono le seguenti **leggi distributive**:

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

### 5.1.1 Esempi

1.  $V = M_{m \times n}(\mathbb{K})$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  con addizione di matrici e moltiplicazione per scalari usuale.

$$0_v = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare scriviamo:

$$\mathbb{K}^m := M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

$$0_{\mathbb{K}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

2.  $\mathbb{K}[x]$  l'insieme dei polinomi a coefficienti in  $\mathbb{K}$ .

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\alpha f = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

- $\mathbb{K}[x]$  è uno spazio vettoriale. L'elemento neutro è:

$$0_{\mathbb{K}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$$

- $\mathbb{K}[x]$  è l'insieme di polinomi di grado  $\leq n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ . È uno spazio vettoriale

3. Le successioni sono delle liste di numeri  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}$ . Ad esempio:

$$(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) \in \mathbb{C}$$

formano uno spazio vettoriale  $\mathcal{S}$  su  $\mathbb{K}$ :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Ad esempio:

$$(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) + (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) = (2, -1, 3, 3, 7, i, \dots)$$

La moltiplicazione per uno scalare è:

$$\alpha(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Ad esempio:

$$2(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) = (2, -2, 4, 6, 12, 2i, \dots)$$

L'insieme di successioni che soddisfano la relazione:

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 3a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ad esempio:

$$(1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$

è uno spazio vettoriale. L'elemento neutro è:

$$0_S = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

4. L'insieme di funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale:

$$f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha \in \mathbb{R},$$

$$\alpha f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$  è la funzione:  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0$

5.  $V = \{0_v\}$  è uno spazio vettoriale. Scriviamo  $V = \{0\}$ .

## 5.2 Osservazioni

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Sia  $v \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$

a.  $\alpha 0_v = 0_v$ , infatti:

$$\alpha 0_v = \alpha(0_v + 0_v) = \alpha 0_v + \alpha 0_v$$

Sommando  $-\alpha 0_v$  ad entrambi i membri otteniamo:

$$\alpha 0_v + (-\alpha 0_v) = (\alpha 0_v + \alpha 0_v) + (-\alpha 0_v)$$

$$0_v = \alpha 0_v + (\alpha 0_v - \alpha 0_v)$$

$$0_v = \alpha 0_v + 0_v$$

$$0_v = \alpha 0_v$$

b.  $0 \cdot v = 0_v$

$$v = 1 \cdot v = (1 + 0)v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$$

Sommando  $-v$  ad entrambi i membri otteniamo:

$$v + (-v) = v + 0 \cdot v + (-v)$$

$$0_v = 0 \cdot v + (v + (-v))$$

$$0_v = 0 \cdot v + 0_v$$

$$0_v = 0 \cdot v$$

c. Se  $\alpha v = 0_v$ , allora  $\alpha = 0$  oppure  $v = 0_v$

$$\alpha v = 0_v$$

$$\alpha v = \alpha 0_v$$

$$\alpha v = \alpha(v - v)$$

$$\alpha v = \alpha v - \alpha v$$

$$0_v = 0_v$$

d.  $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$

### 5.3 Definizione combinazione lineare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ . Il vettore:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

è detto **combinazione lineare** di  $v_1, \dots, v_n$  con coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

#### **Esempio 5.2**

*Il vettore*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

*è combinazione lineare di:*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*con coefficienti 1, 2, 3 rispettivamente. Infatti:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Un'altra combinazione lineare è:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio 5.3**

Il polinomio

$$f = 2x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$$

è combinazione lineare di:

$$g_1 = x^2 + 2x, \quad g_2 = x - 1, \quad g_3 = \frac{1}{2}x - 1$$

Infatti:

$$2g_1 + 3g_2 + (-6)g_3 = 2(x^2 + 2x) + 3(x - 1) - 6\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 2x^2 + 4x + 3 = f$$

**5.4 Definizione di insieme di generatori**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Se ogni  $v \in V$  è combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$  si dice che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è un **insieme di generatori** e  $V$  è detto **finitamente generato**.

### 5.4.1 Esempi

#### *Esempio 5.4*

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di  $\mathbb{K}^3 = M_{3 \times 1}(\mathbb{K})$  (per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

Infatti, se  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ , allora:

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivendo:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con 1 nella  $i$ -esima posizione, otteniamo l'insieme di generatori di  $\mathbb{K}^n$ :  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Dunque  $\mathbb{K}^n$  è finitamente generato.

**Esempio 5.5**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^2$ . Infatti, se  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  allora

$$\begin{aligned} v &= (v_1, -v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(v_2 - v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (v_1 - v_2) + v_2 \\ 3(v_1 - v_2) + v_2 + 3(v_2 - v_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I coefficienti della combinazione lineare non sono univocamente determinati:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Esempio 5.6**

Le successioni:

$$u_1 = (1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$

$$u_2 = (0, 1, 5, 22, 95, \dots)$$

formano un insieme di generatori di  $\mathcal{S}'$ . Infatti, se:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a, b, 5b - 3a, 5(5b - 3a) - 3b, \dots) \in \mathcal{S}'$$

allora

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = au_1 + bu_2$$

**Esempio 5.7**

Gli spazi vettoriali  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (successioni, polinomi, funzioni) **non** sono finitamente generati.

## 5.5 Definizione di sottospazio

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Un sottoinsieme  $\emptyset \neq U \subseteq V$  è detto **sottospazio** di  $V$  se soddisfa le proprietà:

1. per ogni  $u, u' \in U$ :

$$u + u' \in U$$



2. per ogni  $u \in U$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ :

$$\alpha u \in U$$

**Osservazione:**

In tal caso  $U$  è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni  $+$ ,  $\cdot$  di  $V$ .

### 5.5.1 Esempi

**Esempio 5.8**

$$\mathbb{K}_n[x] \subseteq \mathbb{K}[x] \quad \text{sottospazi}$$

$$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \quad \text{sottospazi}$$

**Esempio 5.9**

Il sottoinsieme

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = mv_1 \right\}$$

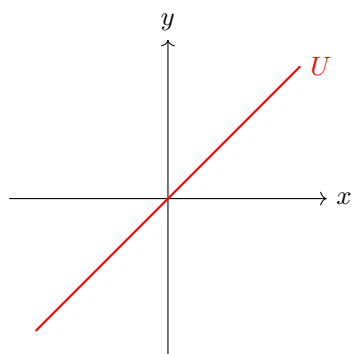
è un sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  per qualsiasi  $m \in \mathbb{R}$ . Infatti:

1.

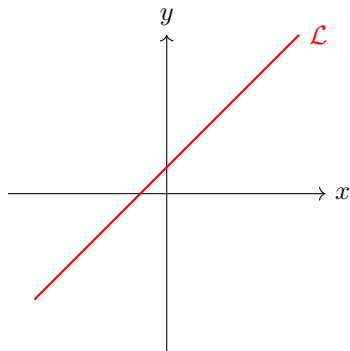
$$\begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+u \\ mv+mu \end{pmatrix}$$

2.

$$\alpha \begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ m(\alpha v) \end{pmatrix} \in U$$



Il sottoinsieme  $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = mv_1 + c \right\}$  non è un sottospazio se  $c \neq 0$ .



Infatti:

$$\begin{pmatrix} v \\ mv + c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + u \\ mv + mu + 2c \end{pmatrix} \notin U$$

$$mv + mu + 2c \neq m(v + u) + c$$

**Esempio 5.10**

$O = \{0_v\} \subseteq V$  è un sottospazio per ogni spazio vettoriale  $V$ . Infatti

1.  $0_v + 0_v = 0_v \in O$
2.  $\alpha 0_v = 0_v \in O$

Ogni sottospazio  $U$  di  $V$  contiene  $0_v$ . infatti  $\forall u \in U$  abbiamo che  $(-1)u = -u \in U$ . Quindi  $0_v = u + (-u) \in U$

**Esempio 5.11**

Il sottoinsieme

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

è un sottospazio di  $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Infatti

1. 
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & b + e \\ 0 & c + f \end{pmatrix} \in T$$
2. 
$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha c \end{pmatrix} \in T$$

**Esempio 5.12**

$$\begin{array}{ccc} \text{polinomi di grado } \leq n & & \text{polinomi} \\ \underbrace{\mathbb{K}_n[x]}_{S'} & \subseteq & \underbrace{\mathbb{K}[x]}_S \\ \text{successioni che soddisfano una relazione} & & \text{successioni} \end{array}$$

sono sottospazi

## 5.6 Definizione di sottospazio generato

**Definizione 5.2**

Dati  $v_1, \dots, v_n \in V$ , l'insieme

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$$

di tutte le combinazioni lineari di  $v_1, \dots, v_n$  è un sottospazio di  $V$ . Infatti:

1.

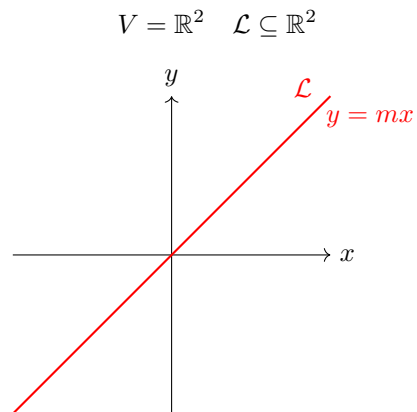
$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ &= (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1) + \dots + (\alpha_n v_n + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \end{aligned}$$

2.

$$\beta \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Diciamo che  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  è il sottospazio generato da  $v_1, \dots, v_n$ .

**Esempio 5.13**



è il sottospazio generato da  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{S}'$  è il sottospazio di  $\mathcal{S}$  generato da  $u_1$  e  $u_2$ .

## 5.7 Definizione

Se  $U, W$  sono sottospazi di  $V$ , allora l'intersezione

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \wedge v \in W\}$$

è un sottospazio di  $V$ .

In generale, l'unione

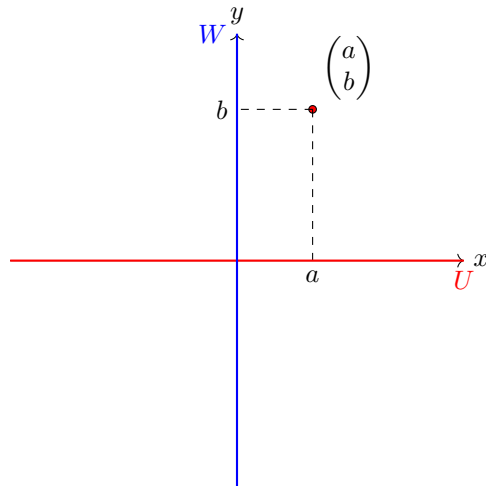
$$U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \vee v \in W\}$$

non è un sottospazio di  $V$ .

**Esempio 5.14**

$$V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin U \cup W$$

Quindi  $U \cup W \subseteq V$  non soddisfa la prima proprietà dei sottospazi.

L'insieme  $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$  è un sottospazio di  $V$ , detto la **somma di  $U$  e  $W$** .

**NB:**

$U \cup W \subseteq U + W$  perchè

$$U = \{u = u + 0_w \mid u \in U\}$$

$$W = \{w = 0_u + w \mid w \in W\}$$

## 5.8 Definizione

Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^m$ . Sia  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Il sottospazio di  $\mathbb{K}^m$

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

generato dalle colonne di  $A$  è detto lo **spazio delle colonne** di  $A$ .

**Esempio 5.15** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

*Ad esempio:*

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in C(A)$$

**NB:**

$$\begin{aligned} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in C(A) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

*tali che*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

*Il sistema lineare  $Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  possiede soluzione***5.9 Proposizione**

Sia  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Lo spazio delle colonne  $C(A)$  consiste di tutti i vettori  $b \in \mathbb{K}^m$  per i quali il sistema lineare  $Ax = b$  possiede soluzione.

**5.9.1 Dimostrazione**

$$\begin{aligned} C(A) &\stackrel{def}{=} \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ b \in \mathbb{K}^m \mid \exists v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ tale che } Av = b \right\} \end{aligned}$$

□

### 5.10 Definizione

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  l'insieme

$$N(A) = \left\{ v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \mathbb{O} \right\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

(dove  $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ) è detto **spazio nullo di  $A$** .

### 5.11 Proposizione

Lo spazio nullo  $N(A)$  di una matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  è un sottospazio di  $\mathbb{K}^n$ .

#### 5.11.1 Dimostrazione

Siano  $v, u \in N(A)$ , cioè  $Av = \mathbb{O}$  e  $Au = \mathbb{O}$  e sia  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Allora

- Per la legge distributiva del prodotto di matrici:

$$A(v + u) = Av + Au = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

Quindi  $v + u \in N(A)$

- Per la proprietà di moltiplicazione per uno scalare:

$$A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

Quindi  $\alpha v \in N(A)$

Dunque  $N(A)$  è un sottospazio.  $\square$

#### **Esempio 5.16**

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$N(A) = \{ \text{Soluzioni del sistema lineare } Ax = 0 \}$$

Risolviamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} i & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ i & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ i & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Quindi } N(A) = \left\{ \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

**Esempio 5.17**

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Risolviamo il sistema lineare  $Ax = 0$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Siccome la matrice ha soltanto 2 colonne dominanti bisogna introdurre un parametro per la variabile libera  $x_3$ .

$$x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2\left(-\frac{1}{2}t\right) = t \\ x_2 = -\frac{1}{2}t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\text{Quindi } N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{\text{sottospazio}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$



## 6 Dipendenza e indipendenza lineare

### *Esempio 6.1*

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ insieme di generatori}$$

Infatti, per ogni  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V$  abbiamo che:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= (v_2 - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - \frac{3}{2}v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v_2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Non è efficiente usare l'insieme di generatori  $\mathcal{C}$  perchè esistono almeno 2 sottoinsiemi di generatori più piccoli:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{C}$$

In particolare:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 6.1 Proposizione

Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  e  $v_n$  è una combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , allora  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  è un insieme di generatori.

#### 6.1.1 Dimostrazione

Siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$  tali che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per ogni  $v \in V$  esistono  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$  tali che:

$$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right) \\
&= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1}
\end{aligned}$$

Quindi  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  è un insieme di generatori.  $\square$

## 6.2 Definizione

Siano  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori in uno spazio vettoriale  $V$ . Un insieme  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è detto **linearmente dipendente** se almeno uno dei vettori  $v_1, \dots, v_n$  è combinazione lineare dei rimanenti.

## 6.3 Teorema

Siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Sono equivalenti i seguenti enunciati:

1.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  **non** è linearmente dipendente
2. Se

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

allora  $\alpha_i = \beta_i$  per ogni  $1 \leq i \leq n$

3. Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  sono coefficienti tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_v$$

allora  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$

Se valgono le condizioni (1), (2) + (3), allora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è detto **linearmente indipendente**.

### 6.3.1 Dimostrazione

Dimostriamo che  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ , quindi:

$$\neg(1) \Rightarrow \neg(2) \Rightarrow \neg(3) \wedge (2) \Rightarrow (3)$$

- $[(2) \Rightarrow (3)]$  Supponiamo che:

$$\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Supponiamo che:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_v$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

Quindi  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  per (2).

- $[\neg(2) \Rightarrow \neg(3)]$  Supponiamo che:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

e  $\alpha_j \neq \beta_j$  per qualche  $1 \leq j \leq n$ . Quindi:

$$0_v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i$$

e allora:

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i + \sum_{i=j+1}^n \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i$$

Dunque  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è linearmente dipendente

- $[\neg(1) \Rightarrow \neg(3)]$  Supponiamo che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sia linearmente dipendente, cioè esistono  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tali che:

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i + \sum_{i=j+1}^n \alpha_i v_i$$

Allora:

$$0_v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1)v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

Dunque (3) non è verificata.  $\square$

### 6.3.2 Esempi

#### **Esempio 6.2**

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

L'insieme  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  è linearmente indipendente. Infatti se:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi  $\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$  e  $2\alpha_2 = 0$ . Abbiamo che  $\alpha_2 = 0$  e  $\alpha_1 = 0$ . Quindi l'insieme è linearmente indipendente.

#### **Esempio 6.3**

Un insieme  $\{v_1, v_2\} \subseteq V$  è linearmente dipendente se e solo se esiste  $\alpha \in \mathbb{K}$  tale che  $\alpha v_1 = v_2$  oppure  $v_1 = \alpha v_2$

**Esempio 6.4**

Un insieme  $\{v\} \subseteq V$  è linearmente dipendente se e solo se  $v = 0_v$ . Inoltre, per ogni  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , se  $v_j = 0_v$  per qualche  $j$ , allora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è linearmente dipendente perchè:

$$0_v = \underbrace{0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{j-1}}_{0_v} + \underbrace{v_j}_{0_v} + \underbrace{0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_n}_{0_v}$$

e quindi abbiamo  $\neg(3)$

**6.4 Definizione**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ . L'insieme  $\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è detto **base** di  $V$  se  $\mathcal{U}$  è un insieme di generatori di  $V$  e  $\mathcal{U}$  è linearmente indipendente.

**6.5 Osservazione**

Per il Teorema 6.4 un sottoinsieme  $\mathcal{U} \subseteq V$  è una base se e solo se possiamo ricostruire in un modo unico tutti i vettori di  $V$  mediante combinazioni lineari. Possiamo pensare ad una base  $\mathcal{U} = \{b_1, \dots, b_n\}$  di  $V$  come ad un sistema di coordinate:

Sia  $v \in V$ . Esiste un unico vettore  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$  tale che  $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ .

Scriviamo  $[v]_{\mathcal{U}}$  per il vettore  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

### 6.5.1 Esempi

#### *Esempio 6.5*

$$V = \mathbb{K}^n \quad \mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right\}$$

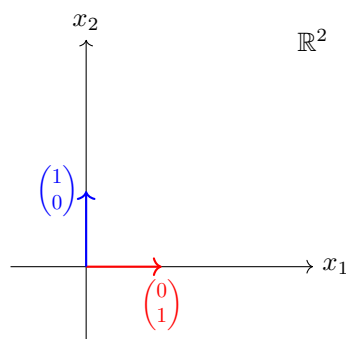


Figura 12: Base canonica di  $\mathbb{K}^n$

Infatti, per ogni  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$  abbiamo che:

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

Supponiamo  $\mathbb{O} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ , quindi:

$$v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0$$

#### *Esempio 6.6*

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{R}^2$ , quindi non esiste un'unica base di  $\mathbb{R}^2$ .

## 6.6 Base di $C(U)$ per una matrice $U$ in forma ridotta

**Esempio 6.7**

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(U) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Le colonne dominanti formano una base di  $C(U)$ , infatti:

- **Linearmente indipendente:** Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tali che:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 7\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_1 + 7\alpha_2 = 0$

- **Insieme di generatori** Proposizione 6.1:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori di  $C(U)$ .

### 6.6.1 Osservazioni

Le colonne dominanti di una matrice  $U$  in forma ridotta formano una base di  $C(U)$ . Inoltre le colonne non nulle di  $U^T$  (cioè le righe non nulle di  $U$  formano una base di  $C(U^T)$ ).

## 6.7 Proposizione

Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ .

1.  $\mathcal{B}$  è un insieme di generatori minimo, cioè nessun sottoinsieme di  $\mathcal{B}$  è un insieme di generatori
2.  $\mathcal{B}$  è massimamente linearmente indipendente, cioè nessun insieme di vettori che contenga propriamente  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente.

## 6.8 Teorema

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  finitamente generato.

- Se  $V \neq 0$ , allora  $V$  possiede una base.
- Se  $V = 0$ , allora  $V$  **non** possiede una base.

### 6.8.1 Dimostrazione

Se  $V = 0 = \{0_v\}$ , allora ogni sottoinsieme non vuoto di  $V$  contiene  $0_v$  e quindi non può essere linearmente indipendente.

Supponiamo  $V \neq 0$ .

Sia  $\mathcal{B}_n = \{v_1, \dots, v_n\}$  un insieme di generatori. Se  $\mathcal{B}_n$  è linearmente indipendente, allora  $\mathcal{B}_n$  è una base di  $V$ . Altrimenti uno dei vettori di  $\mathcal{B}_n$  è combinazione lineare dei rimanenti. Senza perdita di generalità supponiamo che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per 6.1  $\mathcal{B}_{n-1} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  è un insieme di generatori. Se  $\mathcal{B}_{n-1}$  è linearmente indipendente, allora  $\mathcal{B}_{n-1}$  è una base. Altrimenti continuiamo come sopra. Proseguendo così si otterrà un sottoinsieme di  $\mathcal{B}_n$  che è una base.  $\square$

**Esempio 6.8**

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{v_1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{v_3} \right\}$$

$\mathcal{C}_3$  è un insieme di generatori, ma non è linearmente indipendente:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_2 + 2v_1$$

Allora:

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori. Inoltre  $\mathcal{C}_2$  è linearmente indipendente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$ . Allora  $\mathcal{C}_2$  è una base.

**6.9 Teorema di Steinitz**

Sia  $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$  un insieme di generatori di  $V$  e  $\mathcal{L} = \{u_1, \dots, u_m\}$  un insieme linearmente indipendente. Allora  $m \leq n$  ed esiste un insieme di generatori di  $V$  formato da  $\mathcal{L}$  e  $n - m$  vettori di  $\mathcal{G}$ .

**6.10 Corollario**

Se  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$  sono basi di uno spazio vettoriale, allora  $m = n$ .

**6.10.1 Dimostrazione**

Ponendo  $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{L} = \mathcal{B}_2$  nel teorema di Steinitz, si ha  $m \leq n$ . Ponendo  $\mathcal{G} = \mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{L} = \mathcal{B}_1$  si ha  $n \leq m$ . Quindi  $m = n$ .  $\square$

**6.11 Definizione**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato. Il numero di vettori che formano una base di  $V$  è detto **dimensione** di  $V$  e si indica con  $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ .



### 6.11.1 Esempi

#### **Esempio 6.9**

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad V = \mathbb{C}$$

$\{1\}$  è una base di  $V$  su  $\mathbb{C}$ . Dunque  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

#### **Esempio 6.10**

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{C}$$

$\{1, i\}$  è una base di  $V$  su  $\mathbb{R}$ .

- (Insieme di generatori):  $z \in \mathbb{C} = V$

$$z = a + bi = a(1) + b(i), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (Linearmente indipendente):  $0_v \in \mathbb{C}$

$$0 = 0 + 0i$$

è l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di  $\{1, i\}$ .

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$$

### 6.12 Corollario

In uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ , si ha

1. Un insieme con  $> n$  vettori è linearmente dipendente.
2. Se  $n$  vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base di  $V$ .
3. Ogni insieme di generatori consiste di almeno  $n$  vettori

### 6.13 Proposizione

Sia  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ . Allora ogni sottospazio  $U$  di  $V$  ha dimensione  $\dim_{\mathbb{K}}(U) \leq n$ . Inoltre  $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n$  se e solo se  $U = V$

#### 6.13.1 Dimostrazione

Sia  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base di  $U$ . Allora  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente in  $V$  perchè  $0_v = 0_u$ . Quindi possiamo completare  $\mathcal{B}$  a una base di  $V$  (usando il teorema di Steinitz). Allora  $\underbrace{\#\mathcal{B}}_{\dim_{\mathbb{K}}(U)} \leq \underbrace{\#\mathcal{B}'}_{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$ . Abbiamo che  $\mathcal{B}$  contiene  $n$

elementi (cioè  $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n$ ) se e solo se  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ . Quindi in tal caso abbiamo:

$$U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = V \quad \square$$

## 7 Applicazione lineare

D'ora in poi, tutti gli spazi vettoriali saranno **finitamente generati**.

### 7.1 Definizione

Siano  $U$  e  $V$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Un'applicazione  $f : U \rightarrow V$  si dice **lineare** se, per  $u, u' \in U$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$  si ha:

1.  $f(u + u') = f(u) + f(u')$
2.  $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

#### 7.1.1 Osservazioni

1.  $f(0_u) \stackrel{5.2(b)}{=} f(0 \cdot 0_u) \stackrel{7.1(2)}{=} 0 \cdot f(0_u) \stackrel{5.2(b)}{=} 0_v$
2.  $f(-u) \stackrel{5.2(d)}{=} f((-1) \cdot u) \stackrel{7.1(2)}{=} (-1) \cdot f(u) \stackrel{5.2(d)}{=} -f(u)$

Per tutti gli elementi di  $U$

#### 7.1.2 Esempi

##### *Esempio 7.1*

$$U = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \mathbb{R}^2 = M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$f : U \rightarrow V$$

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$f$  è lineare. Infatti per ogni  $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$

1.

$$f(p + q) = ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Quindi  $f(p + q) = f(p) + f(q)$

2.  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha p) = f((\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2) = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha f(p) = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

Quindi  $f(\alpha p) = \alpha f(p)$

## 7.2 Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , definiamo  $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  per ogni  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$f(v) = Av$ .  $f_A$  è lineare:

1.  $f_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = f_A(v) + f_A(w)$
2.  $f_A(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha f_A(v)$

### 7.2.1 Esempi

#### **Esempio 7.2**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 - i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$f_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$$f_A \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 - i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + iy \\ (1 - i)y \\ x \end{pmatrix}$$

**Esempio 7.3**

$$f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2, \quad f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3z - y \end{pmatrix}$$

$f$  è lineare. Notiamo che, per ogni  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= f \left( x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= f \left( x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left( y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left( z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + y f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + z f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque  $f = f_A$  dove  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Per ogni applicazione lineare  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  e per  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} v &= v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \dots + v_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \\ f(v) &= f(v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n) \\ &= f(v_1 e_1) + f(v_2 e_2) + \dots + f(v_n e_n) \\ &= v_1 f(e_1) + v_2 f(e_2) + \dots + v_n f(e_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f(e_1) \dots f(e_n)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= Av
\end{aligned}$$

dove  $A = (f(e_1) \dots f(e_n))$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è la base canonica di  $\mathbb{K}^n$ . Allora  $f = f_A$ . La matrice  $A$  è detta la **matrice associata a  $f$  (rispetto alla base canonica)**

**NB:** Per una matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  invertibile abbiamo  $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  e  $f_{A^{-1}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Osserviamo:

$$\begin{aligned}
f_{A^{-1}}(f_A(v)) &= f_{A^{-1}}(Av) = A^{-1}(Av) = (A^{-1}A)v = I_n v = v \\
f_A(f_{A^{-1}}(v)) &= f_A(A^{-1}v) = AA^{-1}v = I_n v = v
\end{aligned}$$

### 7.3 Definizione

Un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è detta **isomorfismo** se esiste  $g : W \rightarrow V$  tale che  $g(f(v)) = v$  per ogni  $v \in V$  e  $f(g(w)) = w$  per ogni  $w \in W$ . L'applicazione lineare  $g$  è detta **inversa di  $f$**  e si dice che  $V$  e  $W$  sono **isomorfi**. Scriviamo  $f^{-1} = g$  e  $V \cong W$ .

#### **Esempio 7.4**

Sia  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  un'applicazione lineare. Allora esiste una matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  tale che  $f = f_A$ . L'applicazione lineare  $f$  è un isomorfismo se e solo se  $A$  è invertibile. Infatti, supponiamo che esista  $f^{-1}$  e consideriamo la matrice associata  $B$ , cioè  $f^{-1} = f_B$ . Allora, per ogni  $v \in \mathbb{K}^n$ , abbiamo:

$$\begin{aligned}
(BA)v &= f_B f_A(v) = f^{-1} f(v) = v \\
&= f f^{-1}(v) = f_A f_B(v) = f_A(Bv) = (AB)v
\end{aligned}$$

Ne segue  $AB = I_n = BA$ . Quindi  $B = A^{-1}$

### 7.4 Applicazione delle coordinate

Sia  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$ . Per ogni  $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v \in V$  abbiamo definito il vettore:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

L'applicazione  $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  definita come:

$$C_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

è lineare ed è detta **applicazione delle coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$** . Infatti, per:

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n, \quad w = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \in V$$

e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , abbiamo

1.

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(v+w) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) \\ &= C_{\mathcal{B}}((\alpha_1 + \beta_1)b_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)b_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(v) + C_{\mathcal{B}}(w) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi  $C_{\mathcal{B}}(v+w) = C_{\mathcal{B}}(v) + C_{\mathcal{B}}(w)$

2.

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(\alpha v) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n)) \\ &= C_{\mathcal{B}}((\alpha\alpha_1)b_1 + \dots + (\alpha\alpha_n)b_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha C_{\mathcal{B}}(v) = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}$$

Quindi  $C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha C_{\mathcal{B}}(v)$

### **Esempio 7.5**

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1 + x, b_2 = 1 + x^2, b_3 = x + x^2\}$$

è una base di  $V$ .

Prendiamo  $v = 6 + 3x - x^2 \in V$ . Poichè  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ , esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tali che  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ .

$$\begin{aligned} 6 + 3x - x^2 &= \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_1x) + (\alpha_2 + \alpha_2x^2) + (\alpha_3x + \alpha_3x^2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema lineare usando l'Eliminazione di Gauss:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 - \alpha_2 = 5 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi:

$$6 + 3x - x^2 = v = 5b_1 + b_2 - 2b_3 = 5(1+x) + (1+x^2) - 2(x+x^2)$$

## 7.5 Applicazione delle coordinate $C_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$

### Esempio 7.6

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \{b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}\} \text{ base}$$

Per ogni  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , esistono  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tali che:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi  $C_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$  è soluzione del sistema lineare  $Ax = v$  dove:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (b_1 \quad b_2)$$

Siccome  $\mathcal{B}$  è una base,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono univocamente determinati e quindi  $Ax = v$  ha soluzione per ogni  $v \in \mathbb{R}^2$ . Per il teorema 4.2,  $A$  è invertibile e

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v$$

Calcolando  $A^{-1}$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

Dunque, per ogni  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(v) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{8}v_2 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In generale, per una base  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  di  $\mathbb{K}^n$ , la matrice  $A = (b_1, \dots, b_n)$  è invertibile e  $C_{\mathcal{B}} = f_{A^{-1}}$ . Dunque  $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  è un isomorfismo con inversa  $f_A$ .

## 7.6 Teorema

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  con base  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ . L'applicazione lineare  $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  è un isomorfismo.

### 7.6.1 Dimostrazione

Definiamo  $g_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$ ,

$$g_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

Mostriamo che  $g_{\mathcal{B}}$  è l'inversa di  $C_{\mathcal{B}}$ . Infatti:

$$C_{\mathcal{B}} \left( g_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) \right) = C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Per ogni  $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V$ ,

$$g_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}(v)) = g_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v$$

Dunque  $g_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}^{-1}$   $\square$

## 7.7 Osservazione

Se  $f : V \rightarrow W$  è un isomorfismo e  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  è una base di  $V$ , allora  $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$  è una base di  $W$ . In particolare,  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$ .



## 7.8 Corollario

Due spazi vettoriali  $V$  e  $W$  sono isomorfi se e solo se:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$$

### 7.8.1 Dimostrazione

Se  $f : V \rightarrow W$  è un isomorfismo, allora  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$

Supponiamo che  $V$ ,  $W$  sono spazi vettoriali tali che:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) = n$$

Allora esiste una base di  $V$   $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  e esiste una base di  $W$   $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ . Consideriamo  $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  e  $C_{\mathcal{C}} : W \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Notiamo che abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}} & W \\ & \searrow C_{\mathcal{B}} \quad \nearrow C_{\mathcal{C}}^{-1} & \\ & \mathbb{K}^n & \end{array}$$

L'applicazione lineare ha inversa:

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}} : W \rightarrow V$$

dove

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}}(w) = C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w))$$

per ogni  $w \in W$ . Infatti:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}} (C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}}(w)) &= C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{B}} (C_{\mathcal{B}}^{-1} (C_{\mathcal{C}}(w)))) \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{C}}(w)) = w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}} (C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(v)) \\ &= C_{\mathcal{B}}^{-1} (C_{\mathcal{C}} (C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{B}}(v)))) \\ &= C_{\mathcal{B}}^{-1} (C_{\mathcal{B}}(v)) = v \end{aligned}$$

Dunque  $V$  e  $W$  sono isomorfi.  $\square$

**NB:** Per ogni  $b_i \in \mathcal{B}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(b_i) &= C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{B}}(b_i)) \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = C_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_C^{-1} \circ C_B(\mathcal{B}) &= \{C_C^{-1} \circ C_B(b_1), \dots, C_C^{-1} \circ C_B(b_n)\} \\ &= \{C_1, \dots, C_n\} = \mathcal{C} \end{aligned}$$

## 7.9 Matrice del cambio di base

### Esempio 7.7

$$V = \mathbb{K}^2$$

con basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Sia  $v \in V$ . Dati i numeri  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$  tali che

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

come possiamo determinare  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$  tali che:

$$v = \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} &= [v]_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{D}}(v) = C_{\mathcal{D}}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \\ &= C_{\mathcal{D}} \left( C_{\mathcal{B}}^{-1} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1} ([v]_{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

Per 7.5,  $C_B \circ C_B^{-1} = f_C$  per una matrice  $C$ , cioè per ogni  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ ,

$$C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

In questo esempio, abbiamo che  $C_{\mathcal{D}} : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  e  $C_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  sono della forma:

$$C_{\mathcal{D}} = f_{A^{-1}} \quad e \quad C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_B$$

dove:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allora

$$f_{A^{-1}B} = f_{A^{-1}} \circ f_B = C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_C$$

Quindi  $C = A^{-1}B$ . Calcolando  $A^{-1}$ :

$$\left( \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_A \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{EG} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Abbiamo:

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Allora, per ogni  $v \in V$ , abbiamo:

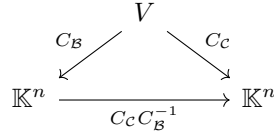
$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{D}}$$

**Teorema 4** Siano  $\mathcal{B}\{b_1, \dots, b_n\}$  e  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$  basi di uno spazio vettoriale  $V$ . Esiste una matrice  $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  tale che:

$$[v]_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}}$$

Le colonne di  $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  sono i vettori  $[b_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{C}}$ . La matrice  $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  è detta **matrice del cambio di base**  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ .

### 7.9.1 Dimostrazione



Per 7.2, esiste una matrice  $A$  tale che  $C_{\mathcal{C}} C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_A$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} &= A \stackrel{7.2}{=} (C_{\mathcal{C}} C_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) \dots C_{\mathcal{C}} C_{\mathcal{B}}^{-1}(e_n)) \\ &= (C_{\mathcal{C}}(b_1) \dots C_{\mathcal{C}}(b_n)) \\ &= ([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}}) \quad \square \end{aligned}$$

dove  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è la base canonica.

### 7.9.2 Osservazione

L'applicazione lineare  $C_{\mathcal{C}} C_{\mathcal{B}}^{-1}$  è un isomorfismo con inversa  $C_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{C}}^{-1}$ . Dunque per 7.3, la matrice  $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambio di base  $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1} = A_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ .

**Esempio 7.8**

$$V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

**NB:**

$$C_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} &= ([b_1]_{\mathcal{C}} \ [b_2]_{\mathcal{C}} \ [b_3]_{\mathcal{C}}) \\ &= (C_{\mathcal{C}}(b_1) C_{\mathcal{C}}(b_2) C_{\mathcal{C}}(b_3)) \\ &= (C_{\mathcal{C}}(1+x) C_{\mathcal{C}}(1+x^2) C_{\mathcal{C}}(x+x^2)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per ogni  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = [a_0 + a_1x + a_2x^2]_{\mathcal{C}}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1)(1+x) + (a_0 + a_2)(1+x^2) + (a_1 + a_2)(x+x^2)$$

**7.10 Matrice associata a f rispetto a basi****Esempio 7.9**

$$U = \mathbb{R}_2[x], \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$f : U \rightarrow V \text{ tale che } f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Ovvero, per ogni  $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,

$$f(p) = f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2\} \text{ base di } U$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } V$$

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f} & V \\
C_C \downarrow & \uparrow C_C^{-1} & \downarrow C_B \\
\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C_B \circ f \circ C_C^{-1}} & \mathbb{R}^2
\end{array}$$

Per 7.2 esiste una matrice  $A$  associata a  $C_B \circ f \circ C_C^{-1}$  rispetto alla base canonica:

$$C_B \circ f \circ C_C^{-1} = f_A$$

dove:

$$\begin{aligned}
A &= (C_B \circ f \circ C_C^{-1}(e_1) \quad C_B \circ f \circ C_C^{-1}(e_2) \quad C_B \circ f \circ C_C^{-1}(e_3)) \\
&= (C_B \circ f(1) \quad C_B \circ f(x) \quad C_B \circ f(x^2)) \\
&= \left( C_B \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_B \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_B \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)
\end{aligned}$$

Osserviamo

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

per ogni  $p \in U$ ,

$$[f(p)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} [p]_C$$

Un esempio con  $p = 3 + 2x - x^2$   $f(p)$ ?

$$[p]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[f(p)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(p) = 4b_1 - b_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Teorema 5** Siano  $U, V$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ ,  $f : U \rightarrow V$ ,  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  base di  $U$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  base di  $V$ .

Esiste una matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  tale che  $A[u]_C = [f(u)]_B$  per ogni  $u \in U$ .  $A$  è detta **matrice associata a  $f$  rispetto alla base  $C$  di  $U$  e la base  $B$  di  $V$** . Le sue colonne sono  $[f(c_1)]_B, \dots, [f(c_n)]_B$ .

### Esempio 7.10

Definiamo l'applicazione lineare  $id : V \rightarrow V$  come  $id(v) = v$  per ogni  $v \in V$ . Allora la matrice associata a  $id$  rispetto alla base  $B$  e alla base  $C$  di  $V$  è la

matrice del cambio di base  $A_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$

## 8 Rango + nullità

### 8.1 Definizione

Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora:

$$N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_w\}$$

è un sottospazio di  $V$ , detto **spazio nullo di  $f$** . Inoltre  $Im(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$  è un sottospazio di  $W$  detto **immagine di  $f$** .

#### 8.1.1 Esempi

##### *Esempio 8.1*

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ f_A &: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ N(f_A) &= \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = N(A) \\ Im(f_A) &= \{Av \in \mathbb{K}^m \mid v \in \mathbb{K}^n\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}v_1 \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \right. \\ &\quad \left. v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \right\} = C(A) \end{aligned}$$

(Combinazioni lineari delle colonne di  $A$ )

##### *Esempio 8.2*

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^2, \quad f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} \\ p &= a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\ N(f) &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 + a_2 = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \left\{ f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

### **Esempio 8.3**

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ i \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ N(i) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid i \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \operatorname{Im}(i) &= \left\{ i \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

## **8.2 Teorema (nullità + rango)**

Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(N(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f))$$

### **8.2.1 Dimostrazione**

Notiamo che  $N(f) \subseteq V$  è un sottospazio di  $V$ . Quindi:

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(f)) = m \leq n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

per 6.11.

Sia  $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq N(f) \subseteq V$  una base di  $N(f)$ . Per il teorema di Steinitz, possiamo completare  $\{v_1, \dots, v_m\}$  ad una base di  $V$ , cioè esiste una base  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$  di  $V$ . Si può dimostrare che  $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$  è una base di  $\operatorname{Im}(f)$ , cioè  $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f))$  è uguale a  $n - m$ . Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n = m + (n - m) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(N(f)) \quad \square$$

**Esempio 8.4**

$$f : V \rightarrow W$$

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^2$$

Per ogni  $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , definiamo:

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N(f) &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 = -a_2\} \\ &= \{ax - ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \quad a = a_1 \\ &= \{a(x - x^2) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle x - x^2 \rangle \end{aligned}$$

L'insieme  $\{x - x^2\}$  è un insieme di generatori e inoltre è linearmente indipendente, cioè è una base di  $N(f)$ .

Completiamo  $\{x - x^2\}$  a una base di  $V = \mathbb{R}_2[x]$

$$\{x - x^2, 1, x\} \subseteq V$$

Dimostriamo che

$$\mathcal{B} = \{f(1), f(x)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{è una base di } \text{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- **Linearmente indipendente:** Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\alpha = 0$  e  $\beta = \alpha + \beta = 0$ .

- **Insieme di generatori di  $\text{Im}()$  :** Per ogni  $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$ , abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\mathcal{B}$  è un insieme di generatori.



### 8.3 Dimensione di $C(A)$

#### **Esempio 8.5**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Troviamo la forma ridotta di  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

In 6.6 abbiamo visto che le colonne dominanti  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  formano una

base di  $C(U)$  e  $\dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = 2$ .

Il problema è che  $C(U) \neq C(A)$ , in particolare:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C(U)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \frac{2}{3}\beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

il sistema lineare non ha soluzione

#### **8.3.1 Proposizione**

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  e sia  $U \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  una forma ridotta di  $A$ . Allora lo spazio delle colonne  $C(A)$  e lo spazio delle colonne  $C(U)$  sono isomorfi e quindi hanno la stessa dimensione:

$$\dim_{\mathbb{K}}(C(A)) = \dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = rk(U)$$

#### **8.3.2 Dimostrazione**

Sia  $E \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$  la matrice invertibile tale che  $U = EA$  e  $A = E^{-1}U$ . Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad f_E(v) = Ev$$

con inversa  $f_E^{-1} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$   $f_E^{-1}(v) = f_{E^{-1}}(v) = E^{-1}v$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^n & \xrightleftharpoons[f_{E^{-1}}]{f_E} & \mathbb{K}^m \\
\subseteq \uparrow & & \uparrow \subseteq \\
C(A) & \xrightleftharpoons[f_{E^{-1}}]{f_E} & C(U)
\end{array}$$

Vogliamo dimostrare che per ogni  $v \in C(A)$ , abbiamo  $f_E(v)$  è un elemento di  $C(U)$  e, per  $w \in C(U)$  abbiamo  $f_{E^{-1}}(w) \in C(A)$ . Infatti,  $C(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  dove  $A = (a_1 \dots a_n)$  e  $C(U) = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  dove  $U = (u_1 \dots u_n)$ . Inoltre  $(u_1 \dots u_n) = U = EA = E(a_1 \dots a_n) = (Ea_1 \dots Ea_n)$  e quindi  $Ea_1 = u_1, \dots, Ea_n = u_n$ . Abbiamo  $(a_1 \dots a_n) = A = E^{-1}U = (E^{-1}u_1 \dots E^{-1}u_n)$  e quindi  $a_1 = E^{-1}u_1, \dots, a_n = E^{-1}u_n$ . Dunque, per ogni  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in C(A)$ , abbiamo che:

$$f_E(v) = f_E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_E(a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ea_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in C(U)$$

e, per ogni  $w = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \in C(U)$ , abbiamo che:

$$f_{E^{-1}}(w) = \sum_{i=1}^n \beta_i (E^{-1}u_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i \in C(A)$$

Quindi abbiamo un'applicazione lineare  $f_E : C(A) \rightarrow C(U)$  con inversa  $f_{E^{-1}} : C(U) \rightarrow C(A)$ . Dunque  $f_E$  è un isomorfismo e

$$\dim_{\mathbb{K}}(C(A)) \stackrel{7.7}{=} \dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = rk(U) \quad \square$$

#### **Esempio 8.6**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } C(U)$$

quindi

$$\left\{ f_{E^{-1}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f_{E^{-1}} \left( \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $C(A)$  per 7.7.

In generale, le colonne di  $A$  che corrispondono alle colonne dominanti di  $U$  formano una base di  $C(A)$ .

### **8.4 Dimensione di $N(A)$**

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Per il teorema nullità + rango, abbiamo:

$$\begin{aligned}
n &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = \dim_{\mathbb{K}}(f_A) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_A)) = \\
&= \dim_{\mathbb{K}}(N(A)) + \dim_{\mathbb{K}}(C(A)) = \dim_{\mathbb{K}}(N(A)) + rk(A)
\end{aligned}$$

### 8.4.1 Corollario

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Allora

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(A)) = n - rk(A)$$

## 8.5 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  con  $r = rk(A)$  e  $d = n - r = n - rk(A)$

1. Per determinare una base di  $C(A)$ :
  - Trovare una forma ridotta  $U$  di  $A$
  - Le colonne di  $A$  che corrispondono alle colonne dominanti di  $U$  formano una base di  $C(A)$
2. Per determinare una base di  $N(A)$ :
  - Risolvere il sistema lineare omogeneo  $Ax = 0$  assegnando parametri  $t_1, \dots, t_d$  alle  $d$  variabili libere e ricavando le rimanenti variabili tramite "sostituzione all'indietro"
  - Per  $1 \leq i \leq d$  si ottiene una soluzione  $u_i$  di  $Ax = 0$  assegnando il valore 1 al parametro  $t_i$  e 0 ai rimanenti parametri.
  - Così facendo otteniamo  $\{u_1, \dots, u_d\}$  un insieme linearmente indipendente.
  - Dunque  $\{u_1, \dots, u_d\}$  è una base di  $N(A)$ .

### Esempio 8.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Le colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  formano una base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

di  $C(A)$ . Allora  $\dim_{\mathbb{K}}(N(A)) = 4 - rk(A) = 4 - 2 = 2$ . Risolviamo il sistema lineare  $Ax = \mathbb{O}$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

variabili libere:

$$x_3 = t_1 \quad x_4 = t_2$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -2(-t_1 - 2t_2) - 3t_1 = -t_1 + 4t_2 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 = -t_1 - 2t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

soluzioni:

$$\begin{pmatrix} -t_1 + 4t_2 \\ -t_1 - 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t_2 \\ -2t_2 \\ 0 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L \text{ insieme } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } N(A).$$

## 8.6 Proposizione

Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali  $V, W$ . Se  $A$  è la matrice associata a  $f$  rispetto a una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  e una base  $\mathcal{D}$  di  $W$ , allora:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = rk(A)$$

Di conseguenza

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - rk(A)$$

La dimensione  $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f))$  è detta **rango di  $f$**  e scriviamo  $rk(f)$ . La dimensione  $\dim_{\mathbb{K}}(N(f))$  è detta **nullità di  $f$** .

## 8.7 Teorema

Siano  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $b \in \mathbb{K}^m$ . Se  $p \in \mathbb{K}^n$  è una soluzione di  $Ax = b$ , allora l'insieme di tutte le soluzioni di  $Ax = b$  è

$$L = \{p + u \mid u \in N(A)\}$$

### 8.7.1 Dimostrazione

Se  $v = p + u$  con  $u \in N(A)$ , allora

$$Av = A(p + u) = Ap + Au \underset{Au=0}{=} Ap + 0 = b$$

Quindi  $v$  è una soluzione di  $Ax = b$ . Viceversa, se  $v$  è una soluzione di  $Ax = b$ , allora  $Av = b = Ap$ . Quindi

$$0 = Av - Ap = A(v - p) \quad \text{e} \quad \underbrace{v - p}_{=u} \in N(A)$$

Dunque  $v = (v - p) + p = u + p \in L \quad \square$

**Esempio 8.8**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Consideriamo  $Ax = b$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = U$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Ponendo le variabili libere uguali a 0:  $x_3 = x_4 = 0$ . Troviamo una soluzione particolare:

$$p = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque l'insieme di soluzioni di  $Ax = b$  è:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

## 9 Autovalori e autovettori

$$f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$$

$$\exists A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}) \quad \text{take che } f = f_A$$

**Esempi:**

Consideriamo un'applicazione lineare  $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  per una matrice  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

**Esempio 9.1**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\begin{aligned} f_A \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Esempio 9.2**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$f_A \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \beta v_2 \end{pmatrix}$$

$$f_A \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A \left( \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta v_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

**Esempio 9.3**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$f_A \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Per ogni  $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , abbiamo che:

$$f_A \left( \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3t - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$$f_A \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \stackrel{?}{=} \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Per ogni  $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , abbiamo che:

$$f_A \left( \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6t - 2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

## 9.1 Definizione

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Uno scalare  $\lambda \in \mathbb{K}$  è detto **autovalore** di  $A$  se esiste un vettore  $\mathbb{O} \neq v \in \mathbb{K}^n$  tale che  $Av = \lambda v$ . In tal caso  $v$  è detto **autovettore** di  $A$  rispetto all'autovalore  $\lambda$ .

**N.B:** Se  $v = \mathbb{O}$ , si ha sempre:

$$Av = A\mathbb{O} = \mathbb{O} = \lambda\mathbb{O} = \lambda v \quad \text{per qualsiasi } \lambda$$

Quindi è essenziale considerare  $v \neq 0$  nella definizione, cioè soltanto i vettori non nulli possono essere autovettori.

### Esempio 9.4

$\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$  sono autovalori di  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ogni vettore della forma  $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$  per  $t \neq 0$  è autovettore di  $A$  rispetto a  $\lambda_1 = 1$ .

Ogni vettore di forma  $v_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$  per  $t \neq 0$  è autovettore di  $A$  rispetto a  $\lambda_2 = 2$ .

## 9.2 Osservazione

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ,  $v \neq 0$  in  $\mathbb{K}^n$ .

1.  $v$  è un autovettore di  $A$  rispetto a  $\lambda \in \mathbb{K}$  se e solo se:

$$\begin{aligned} & \stackrel{DEF}{\iff} Av = \lambda v \iff \mathbb{O} = Av - \lambda v = \\ & = Av - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} v = \left( A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) v = \\ & = (A - \lambda I_n) v \\ & \iff v \in N(A - \lambda I_n) \\ & \iff v \text{ è soluzione del sistema lineare } (A - \lambda I_n)x = \mathbb{O} \end{aligned}$$

2.  $\lambda \in \mathbb{K}$  è autovalore di  $A$  se e solo se:

$$\iff \text{il sistema lineare } (A - \lambda I_n)x = \mathbb{O} \text{ ha una soluzione diversa da } \mathbb{O}.$$

$$\stackrel{4.3}{\iff} (A - \lambda I_n) \text{ non è invertibile.}$$

$$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

**Esempio 9.5**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (3 - \lambda)(-\lambda) - (1)(-2) = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

$\lambda$  è autovalore di  $A$  se e solo se:

$$\iff (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 2$$

**9.3 Definizione**

Data una matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ , il polinomio di grado  $n$ :

$$p_A = \det(A - \lambda I_n) \in \mathbb{K}[\lambda]$$

è detto **polinomio caratteristico**.

**Esempio 9.6**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Quindi  $A$  non possiede autovalori reali, però  $A$  ha autovalori complessi  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = -i$ .

**9.4 Teorema**

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

1. Gli autovalori di  $A$  sono esattamente gli zeri del polinomio caratteristico  $p_A$ .
2. Gli autovettori relativi a un autovalore  $\lambda$  sono esattamente le soluzioni non nulle del sistema lineare  $(A - \lambda I_n)x = \mathbb{O}$ , ovvero gli elementi non nulli di  $N(A - \lambda I_n)$ . Chiamiamo  $N(A - \lambda I_n)$  l'**autospatio** di  $\lambda$  e scriviamo  $E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$ .



## 9.5 Corollario

Ogni matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  ha al massimo  $n$  autovalori. Ogni matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  possiede  $n$  autovalori in  $\mathbb{C}$  (non necessariamente distinti) per il teorema fondamentale dell'algebra (1.3).

$$p_A = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

## 9.6 Definizione

Sia  $\lambda \in \mathbb{K}$  un autovalore di  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ .

1. Si dice **molteplicità algebrica** di  $\lambda$  la molteplicità  $m_\lambda$  di  $\lambda$  come uno zero di  $p_A$ , cioè se:

$$p_A = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

allora la molteplicità algebrica di  $\lambda_i$  è  $m_i$  per ogni  $1 \leq i \leq r$ .

2. Si dice **molteplicità geometrica** di  $\lambda$  la dimensione di  $E_A(\lambda)$ .

### Esempio 9.7

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

- **Autovalori di  $A$**

$$\begin{aligned} p_A &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 1$ .

- **Molteplicità algebrica**

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1$$

- **Molteplicità geometrica**

$$\begin{aligned} E_A(\lambda) &= N(A - \lambda I_2) = \\ &= \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E_A(3) &= N \left( \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \right) = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \alpha_1 &= \dim_{\mathbb{K}}(E_A(3)) = 2 - rk \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2 - rk \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$E_A(1) = N \left( \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\alpha_2 = \dim_{\mathbb{K}}(E_A(1)) = 2 - rk \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = 2 - rk \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

## 9.7 Osservazione

Siano  $v_1, \dots, v_r$  autovettori di una matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  rispetto a  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Supponiamo che  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$  è linearmente indipendente.

**NB:**  $U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$  dove  $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$  indica:

$$\left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

è una base di  $U$ .

Sia  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in U$ . Allora:

$$\begin{aligned} Av &= A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = \\ &= \alpha_1(Av_1) + \dots + \alpha_r(Av_r) = \\ &\stackrel{Av_i = \lambda_i v_i}{=} \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \dots + \alpha_r(\lambda_r v_r) = \\ &= (\alpha_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (\alpha_r \lambda_r) v_r \in U \end{aligned}$$

Abbiamo che  $f_A : U \rightarrow U$  è un'applicazione lineare. Allora:

$$[f_A(v)]_{\mathcal{B}} = [Av]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{B}}$$

Quindi:  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix}$  è la matrice associata a  $f_A$  rispetto a  $\mathcal{B}$  nel dominio

e nel codominio per il teorema 7.10. In particolare, se  $n = r$ , allora  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{K}^n$  e abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{K}^n \\ C_B \downarrow & & \downarrow C_B \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_D} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Che equivale a:

$$\begin{array}{ccc} v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i & \longrightarrow & Av \\ \downarrow & & \downarrow \\ [v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} [Av]_B \\ D[v]_B \end{matrix} \end{array}$$

quindi  $f_D = C_B f_A C_B^{-1}$ .

Abbiamo  $C_B^{-1} = f_B$  dove  $(v_1, \dots, v_n) = B$  per 7.5 e  $C_B = (C_B^{-1})^{-1} = f_B^{-1} = F_{B^{-1}}$ . Allora  $f_D = f_{B^{-1}} f_A f_B = f_{B^{-1}AB}$  e  $D = B^{-1}AB$ .

### **Esempio 9.8**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha autovalori:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

Gli autovettori rispetto a  $\lambda_1 = 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \neq 0$$

Gli autovettori rispetto a  $\lambda_2 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s, \quad s \neq 0$$

Quindi  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$  formata da autovettori di  $A$ .

Dunque

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo  $D = B^{-1}AB$ . Calcoliamo:

$$(I_n | B^{-1}) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 9.8 Proposizione

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Se  $v_1, \dots, v_r$  sono autovettori di  $A$  che corrispondono a  $r$  autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , allora  $\{v_1, \dots, v_r\}$  è linearmente indipendente. In particolare, se abbiamo  $n$  autovalori distinti, allora esiste una base di  $\mathbb{K}^n$  formata da autovettori.

### 9.8.1 Dimostrazione ( $r = 2$ )

$\{v_1, v_2\}$  è linearmente indipendente  $\iff v_1$  **non** è combinazione lineare di  $v_2$  (cioè  $v_1$  non è multiplo di  $v_2$ ). Mostriamo che non è possibile trovare  $\alpha \in \mathbb{K}$  tale che  $\alpha v_2 = v_1$ .

Se  $v_1 = \alpha v_2$ , allora:

$$\lambda_1 v_1 = A v_1 = A(\alpha v_2) = \alpha(A v_2) = \alpha(\lambda_2 v_2)$$

Quindi:

$$\alpha \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2 = \lambda_1(\alpha v_2) = \alpha \lambda_1 v_2$$

cioè:

$$\phi = \alpha \lambda_2 v_2 - \alpha \lambda_1 v_2 = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \mathbb{O}$$

Perciò  $v_2 \neq \mathbb{O}$  (definizione di autovettore) e  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  (quindi  $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ ), concludiamo che  $\alpha = 0$ . Ma è impossibile che  $v_1 = \mathbb{O}$  perchè  $v_1$  è autovettore. Dunque non esiste un tale scalare  $\alpha$ .  $\square$

### Esempio 9.9

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Vogliamo calcolare:

#### 1. Autovalori di $A$

Calcoliamo  $p_A = \det(A - \lambda I_3)$  il polinomio caratteristico della matrice  $A$ . Le radici di  $p_A$  sono gli autovalori di  $A$ .

$$p_A = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Utilizzo la regola di sarrus:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= (-\lambda)^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\lambda_1 = 2$  è una radice di  $p_A$ . Dividiamo per  $\lambda - 2$ :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow p_A = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

Allora le radici di  $-\lambda^2 - 2\lambda - 1$  sono:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = -1$$

Quindi  $p_A = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$  e gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

## 2. Molteplicità algebriche

Sono gli esponenti dei fattori del polinomio caratteristico.

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

## 3. Molteplicità geometriche e basi di $E_A(\lambda_i)$

È la dimensione dell'autospazio  $E_A(\lambda_i)$ .

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}}(E_A(2)), \quad d_2 = \dim_{\mathbb{R}}(E_A(-1))$$

$$E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_3)$$

$$E_A(2) = N \left( \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) d_1 = 3 - rk \left( \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_A(-1) = N \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) d_2 = 3 - rk \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$rk(A - \lambda_1 I_3) = 2 \text{ Quindi } d_1 = 3 - 2 = 1$$

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk(A - \lambda_2 I_3) = 1 \text{ Quindi } d_2 = 3 - 1 = 2.$$

Calcoliamo una base per  $E_A(2) = N \left( \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$  usando il metodo (vedi capitolo 8) per il calcolo di basi di spazi nulli, possiamo calcolare una base di  $E_A(2)$ :

Risoliamo il sistema lineare che corrisponde alla forma ridotta di

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } N \left( \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Calcoliamo una base } E_A(-1) = N \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } N \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Osserviamo che

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{R}^3$ . Infatti,  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente se e solo se

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, cioè se e solo se  $\det(B) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rk(B) = 3 \end{aligned}$$

Quindi  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente. Siccome  $\mathcal{B}$  contiene 3 vettori, allora  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

Per 9.7, la matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice invertibile:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tali che:

$$D = B^{-1}AB \quad e \quad BDB^{-1} = \overbrace{BB^{-1}}^{I_3} A \overbrace{B^{-1}B}^{I_3} = A$$

## 9.9 Definizione

1. Due matrici  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  sono **simili** se esiste una matrice invertibile  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  tale che:

$$B = S^{-1}AS$$

2. Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  è simile a una matrice diagonale, allora  $A$  è **diagonalizzabile** su  $\mathbb{K}$ .

## 10 Diagonalizzazione di matrici

### 10.1 Proposizione (Proprietà delle matrici simili)

Siano  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  due matrici simili, cioè esiste una matrice invertibile  $S$  tale che  $B = S^{-1}AS$ .

1.  $\det(A) = \det(B)$  e  $P_A = P_B$

2.  $A$  e  $B$  hanno gli stessi autovalori.

3.  $A^m = SB^mS^{-1}$

4. Se  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  è diagonale, allora  $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$  e

$$A^m = S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1}$$

### 10.1.1 Dimostrazione

1.  $B = S^{-1}AS$

$$\det(B) = \det(S^{-1}AS)$$

$$\det(B) \stackrel{4.13}{=} \det(S^{-1})\det(A)\det(S)$$

$$\det(B) = \det(S^{-1})\det(S)\det(A)$$

$$\det(B) \stackrel{4.14}{=} \frac{1}{\det(S)}\det(S)\det(A)$$

$$\det(B) = \det(A)$$

Analogamente si vede  $P_A = P_B$

2. Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico. Quindi segue da 1. che gli autovalori coincidono.

3.

$$\begin{aligned} A &= I_n A I_n = (SS^{-1})A(SS^{-1}) \\ &= S(S^{-1}AS)S^{-1} \\ &= SB S^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^m &= \underbrace{(SB S^{-1})(SB S^{-1}) \dots (SB S^{-1})(SB S^{-1})}_{m \text{ volte}} \\ &= SB \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} B \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} \dots \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} B \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} B S^{-1} \\ &= SB^m S^{-1} \end{aligned}$$

4.  $\det(A) \stackrel{1.}{=} \det(B) \stackrel{4.10}{=} \lambda_1 \dots \lambda_n$

Osserviamo

$$B^m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \stackrel{2.}{=} SB^m S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1}$$

□

### **Esempio 10.1**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = SDS^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si vuole calcolare  $A^6$

$$\begin{aligned} A^6 &= SD^6 S^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 64 & 64 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 66 & 63 & 63 \\ 63 & 66 & 63 \\ 63 & 63 & 66 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## **10.2 Teorema**

Una matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di  $\mathbb{K}^n$  formata da autovettori di  $A$ .

### **10.2.1 Dimostrazione**

⇐ Se esiste una base di autovettori, allora abbiamo dimostrato in 9.7 che  $A$  è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$  Supponiamo che  $A = PDP^{-1}$  dove  $P$  è una matrice invertibile e  $D$  è una matrice diagonale.

$$P = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \quad \text{dove } v_1, \dots, v_n \text{ le colonne di } P$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora:

$$AP = (PDP^{-1})P = (PD) \underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n} = PD$$

$$AP = A(v_1 \quad \dots \quad v_n) = (Av_1 \quad \dots \quad Av_n)$$

$$AP = PD = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 v_1 \quad \dots \quad \lambda_n v_n)$$

Quindi:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$$

Siccome  $v_i \neq \mathbb{O}$  per ogni  $1 \leq i \leq n$  perchè la matrice è invertibile. Dunque  $v_1, \dots, v_n$  sono autovettori di  $A$  rispetto agli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Siccome  $P$  è invertibile, il rango di  $P$  è uguale a  $n$  (per il teorema delle matrici invertibili). Per 8.3, le colonne di  $P$  sono linearmente indipendenti. Per 6.12  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è un insieme di generatori, cioè  $\mathcal{B}$  è una base.  $\square$

### **Esempio 10.2**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$A$  ha autovalori  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

## **10.3 Corollario**

Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  possiede  $n$  autovalori distinti, allora  $A$  è diagonalizzabile.

### **10.3.1 Dimostrazione**

10.2 + 9.8 + 6.12  $\square$

## **10.4 Osservazione**

**Esempio 10.3**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, ma gli autovalori sono  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  (la molteplicità algebrica di  $\lambda_2$  è uguale a  $m_2 = 2$ )

La condizione di 10.3 è sufficiente ma non è necessaria

**Esempio 10.4**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_m = \det(M - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Autovalore:  $\lambda_1 = 1$ .  $m_1 = 2$ .

$$E_M(\lambda_1) = E_M(1) = N \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$d_1 = 1$$

Gli insiemi di autovettori linearmente indipendenti  $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, t \neq 0$ .

Quindi non esiste una base di  $\mathbb{R}^2$  formata da autovettori di  $M$  perchè ogni base di  $\mathbb{R}^2$  contiene 2 vettori. Per 10.2, la matrice  $M$  non è diagonalizzabile.

**10.5 Lemma**

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  con autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  con molteplicità algebriche  $m_1, \dots, m_r$  e molteplicità geometriche  $d_1, \dots, d_r$ .

1.  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$

2.  $1 \leq d_i \leq m_i$  per ogni  $1 \leq i \leq r$ .

### 10.5.1 Dimostrazione

1.

$$P_A = \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{grado } n} = \underbrace{(\lambda - \lambda_r)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}}_{\text{grado } m_1 + \dots + m_r}$$

Quindi

$$n = m_1 + \dots + m_r \quad \square$$

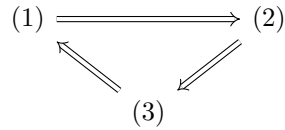
## 10.6 Teorema

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  con autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  molteplicità algebriche  $m_1, \dots, m_r$  e molteplicità geometriche  $d_1, \dots, d_r$ .

I seguenti enunciati sono equivalenti:

1.  $A$  è diagonalizzabile.
2.  $d_1 + \dots + d_r = n$
3.  $m_i = d_i$  per ogni  $1 \leq i \leq r$

### 10.6.1 Dimostrazione



(1)  $\Rightarrow$  (2) Supponiamo che  $A$  è diagonalizzabile. Per 10.2, esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{K}^n$  formata da autovettori di  $A$ .

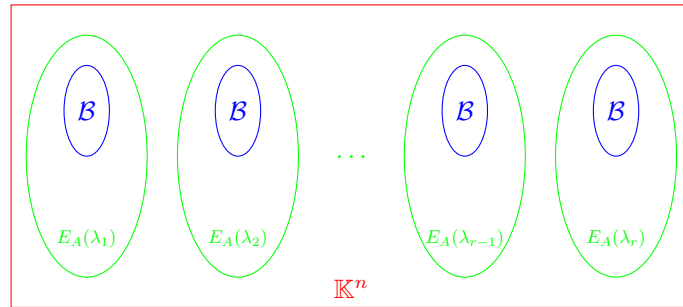


Figura 13: Autospazi come sottospazi di  $\mathbb{K}^n$

**NB:**

$$E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_n) = \{\text{autovettori di } A \text{ rispetto a } \lambda_i\} \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

Sia  $t_i = \#(\mathcal{B} \cap E_A(\lambda_i))$  = numero di elementi di  $\mathcal{B}$  contenuti in  $E_A(\lambda_i)$  per ogni  $1 \leq i \leq r$ . Allora:

$$t_i \leq d_i = \dim_{\mathbb{C}}(E_A(\lambda_i))$$

perchè gli elementi di  $\mathcal{B}$  sono linearmente indipendenti. Inoltre:

$$n = t_1 + \dots + t_r \leq d_1 + \dots + d_r \leq m_1 + \dots + m_r = n$$

Dunque:

$$n = d_1 + \dots + d_r$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Supponiamo (2), cioè:

$$d_1 + \dots + d_r = n \stackrel{10.5}{=} m_1 + \dots + m_r$$

Siccome  $1 \leq d_i \leq m_i$  per ogni  $1 \leq i \leq r$ , concludiamo che:

$$d_i = m_i$$

(3)  $\Rightarrow$  (1) Supponiamo che  $m_i = d_i$  per ogni  $1 \leq i \leq r$ , scegliamo una base  $\mathcal{B}_i = \{v_{1,i}, \dots, v_{d_i,i}\}$  di  $E_A(\lambda_i)$ . Mostriamo che:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r \text{ è una base di } \mathbb{C}^n$$

perchè  $\mathcal{B}$  contiene esattamente

$$d_1 + \dots + d_r = m_1 + \dots + m_r = n$$

elementi, basta verificare l'indipendenza lineare.

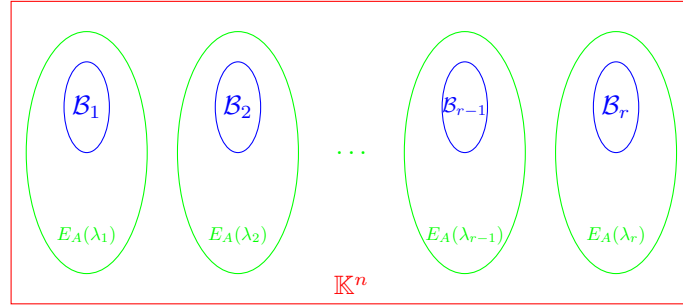


Figura 14: Autospazi come sottospazi di  $\mathbb{K}^n$

Siano  $\alpha_i, \dots, \alpha_{id_i} \in \mathbb{C}$  per ogni  $1 \leq i \leq r$  tali che

$$\mathbb{O} = \underbrace{\alpha_{11}v_{11} + \dots + \alpha_{1d_1}v_{1d_1}}_{w_1 \in E_A(\lambda_1)} + \dots + \underbrace{\alpha_{r1}v_{r1} + \dots + \alpha_{rd_r}v_{rd_r}}_{w_r \in E_A(\lambda_r)}$$

Vogliamo dimostrare che  $\alpha_{ij} = 0$  per ogni  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j \leq d_i$ .

Definiamo  $w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \dots + \alpha_{id_i}v_{id_i}$  per ogni  $1 \leq i \leq r$  e notiamo che  $w_i \in E_A(\lambda_i)$ . Quindi  $w_i$  è un autovettore di  $A$  rispetto a  $\lambda_i$  oppure  $w_i = \mathbb{O}$ . Quindi

$$\mathbb{O} = w_1 + \dots + w_r$$

è una combinazione lineare di autovettori rispetto ad autovalori distinti, oppure vettori nulli. Per 9.8, autovettori rispetto ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Dunque:

$$w_1 = w_2 = \dots = w_r = \mathbb{O}$$

Allora, per ogni  $1 \leq i \leq r$ , abbiamo

$$\mathbb{O} = w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \dots + \alpha_{id_i}v_{id_i}$$

Poichè  $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$  è una base, concludiamo che:

$$\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{id_i} = 0$$

Dunque  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  è linearmente indipendente con  $n$  elementi e quindi è una base di  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$

### **Esempio 10.5**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

Gli autovalori di  $A$  sono le radici del polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} P_A &= \det(A - \lambda I_2) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (-\lambda)^2 - (-1) = \\ &= \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) \end{aligned}$$

- **Autovalori:**

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

- **Molteplicità algebrica:**

$$m_1 = m_2 = 1$$

- **Molteplicità geometrica:**

$$d_i = \dim_{\mathbb{C}}(E_A(\lambda_i))$$

Per il lemma 10.5:

$$1 \leq d_1 \leq m_1 = 1 \Rightarrow d_1 = 1$$

$$1 \leq d_2 \leq m_2 = 1 \Rightarrow d_2 = 1$$

Allora  $m_1 = d_1$  e  $m_2 = d_2$ , quindi  $A$  è diagonalizzabile.

Abbiamo:

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale formata dagli autovalori di  $A$  sulla diagonale. Nella dimostrazione abbiamo visto che  $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$  dove  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  è una base di  $\mathbb{C}^2$  formata da autovettori e  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  dove  $\mathcal{B}_i$  è una base di  $E_A(\lambda_i)$ .

Calcoliamo  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ :

$$\begin{aligned} E_A(i) &= N \left( \begin{pmatrix} 0-i & -1 \\ 1 & 0-i \end{pmatrix} \right) = \\ &= N \left( \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

RisolviAMO il sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(i)} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x_1 - ix_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} &\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = it \\ x_2 = t \end{cases} \\ \mathcal{B}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_A(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_A(-i) &= N \left( \begin{pmatrix} 0+i & -1 \\ 1 & 0+i \end{pmatrix} \right) = \\ &= N \left( \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

RisolviAMO il sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x_1 + ix_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} &\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -it \\ x_2 = t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Dunque:*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calcoliamo  $\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} i & -i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ i & -i & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-i)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2i & 1 & -i \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2i})} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(-1)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 10.7 Algoritmo per la diagonalizzazione

Data una matrice quadrata  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ :

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico  $P_A = \det(A - \lambda I_n)$  e determiniamo gli zeri distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  con molteplicità algebriche  $m_1, \dots, m_r$ , ovvero:

$$P_A = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

2. Per ciascuno  $1 \leq i \leq r$  calcoliamo la molteplicità geometrica:

$$d_i = \dim_{\mathbb{C}} \underbrace{(E_A(\lambda_i))}_{N(A - \lambda_i I_n)} = n - rk(A - \lambda_i I_n)$$

3. Verifichiamo se  $m_i = d_i$  per ogni  $1 \leq i \leq r$  (oppure se  $d_1 + \dots + d_r = n$ )
4. In caso positivo determiniamo una base di  $E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_n)$  (usando 8.5) per ogni  $1 \leq i \leq r$
5. L'unione delle basi da luogo a una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $\mathbb{C}^n$  composta da autovettori di  $A$
6. Ponendo  $P = (v_1 \ \dots \ v_n)$  e  $D$  la matrice diagonale:



$$\left( \begin{array}{cccc} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{m_1} & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{m_2} & \\ & 0 & & 0 \\ & & & \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}}_{m_r} \end{array} \right)$$

sulla cui diagonale abbiamo gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  con le loro molteplicità.

7. Calcoliamo  $P^{-1}$  usando 4.2 oppure 4.14

8. Otteniamo

$$D = P^{-1}AP \quad A = PDP^{-1}$$

## 10.8 Osservazione

Sia  $A$  una matrice su  $\mathbb{R}$ . Se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$  e gli autovalori sono tutti reali, allora  $A$  è diagonalizzabile di  $\mathbb{R}$ . Infatti, in tal caso le matrici  $(A - \lambda_i I_n)$  sono tutte matrici su  $\mathbb{R}$  e possiamo risolvere i sistemi lineari  $(A - \lambda_i I_n)x = 0$  su  $\mathbb{R}$ , ottenendo una base di  $\mathbb{R}^n$  composta da autovettori di  $A$  e  $P, D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

## 10.9 Teorema spettrale

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matrice simmetrica, cioè  $A = A^T$ , ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Allora tutti gli autovalori di  $A$  sono reali e  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .

### 10.9.1 Dimostrazione (n = 2)

Sia  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  una matrice simmetrica su  $\mathbb{R}$ . Se  $c = 0$ , allora  $A$  è diagonale. Supponiamo  $c \neq 0$ . Allora:

$$P_A = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda) - c^2 = \lambda^2 - (a + b)\lambda + (ab - c^2)$$

Le radici di  $P_A$  sono:

$$\lambda_1 = \frac{(a + b) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(a+b) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dove

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(a+b))^2 - 4(ab - c^2) = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 = \\ &= (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0\end{aligned}$$

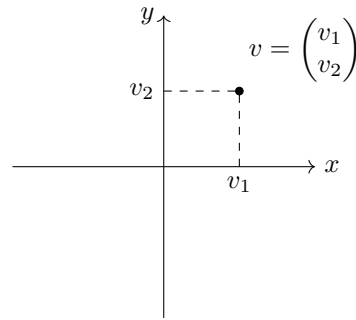
Dunque  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e quindi  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$  per 10.8.  $\square$

## 11 Basi ortonormali

### *Esempio 11.1*

$$V = \mathbb{R}^2$$

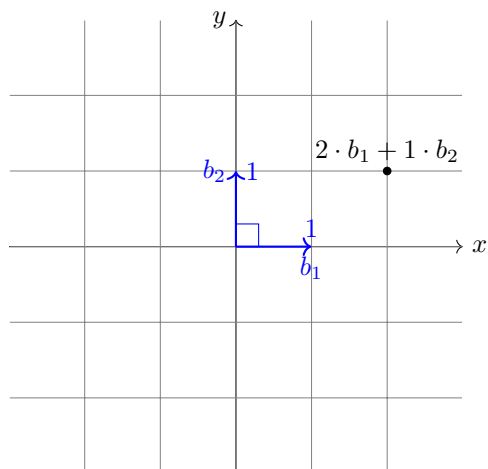
Quando si ha lo spazio  $\mathbb{R}^2$  si può considerare lo spazio sul piano cartesiano:



Ora consideriamo una base, quella più semplice è la base canonica:

$$\mathcal{B}_{can} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

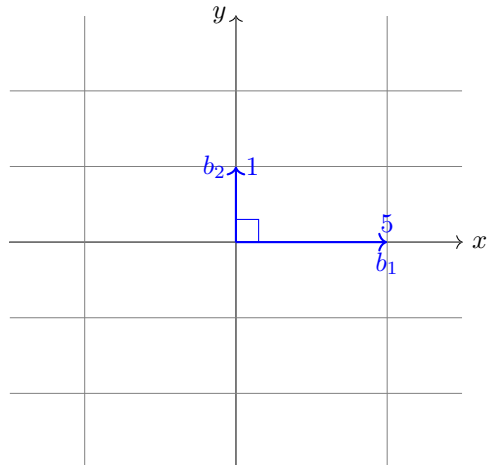
La base canonica corrisponde ai versori del piano bidimensionale e ogni vettore corrisponde a una coppia di numeri reali  $(v_1, v_2)$  che rappresentano i coefficienti della combinazione lineare  $v = v_1 b_1 + v_2 b_2$ .



La particolarità della base canonica è che i suoi elementi sono ortogonali, cioè l'angolo tra i due vettori è di  $90^\circ$ .

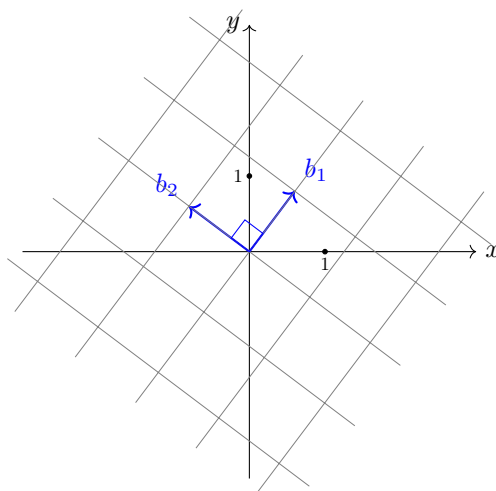
Un'altra base con questa proprietà è:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Un altro esempio è la base:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$$



**NB:** Per ogni  $b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  abbiamo:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

### 11.1 Prodotto interno

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ . La **matrice coniugata**  $\bar{A}$  di  $A = (a_{ij})_{i,j}$ , è la matrice  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ .

La matrice  $A^H = \bar{A}^T = \overline{A^T}$  è detta **H-trasposta** di  $A$ .

#### **Esempio 11.2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 \\ 2+i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 2-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^H = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ -i & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ . Il prodotto

$$(v|w) = v^H w = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i$$

è detto **prodotto interno** (standard) in  $\mathbb{K}^n$ .

**Esempio 11.3**

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$(v|w) = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

**11.1.1 Proprietà**

Valgono le seguenti proprietà per  $v, w, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ :

1.  $(v|w) = \overline{(w|v)}$

Infatti

$$\begin{aligned} (w|v) &= \overline{w_1} v_1 + \dots + \overline{w_n} v_n \in \mathbb{K} \\ \overline{(w|v)} &= \overline{(\overline{w_1} v_1 + \dots + \overline{w_n} v_n)} = \\ &= \overline{\overline{w_1} v_1} + \dots + \overline{\overline{w_n} v_n} = \\ &= w_1 \overline{v_1} + \dots + w_n \overline{v_n} = \\ &= \overline{v_1} w_1 + \dots + \overline{v_n} w_n = (v|w) \end{aligned}$$

2.  $(v|\alpha w + \beta z) = \alpha(v|w) + \beta(v|z)$

In particolare, possiamo definire:

$$f_v : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad f_v(w) = (v|w)$$

$f_v$  è un'applicazione lineare.

3.  $(\alpha v + \beta w|z) = \overline{\alpha}(v|z) + \overline{\beta}(w|z)$

4. Se  $v \neq 0$ , allora:

$$(v|v) = v^H v = \overline{v_1} v_1 + \dots + \overline{v_n} v_n = |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

**Esempio 11.4**

$$v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$(v|w) = \bar{i} \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -i + 2 + 6 = 8 - i \in \mathbb{C}$$

**Esempio 11.5**

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$(v|w) = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 6 - 1 = 5 \in \mathbb{R}$$

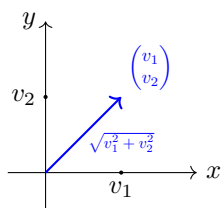
In generale, se  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , allora

$$(v|w) = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

## 11.2 Norma euclidea

**Esempio 11.6**

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



$$(v|v) = v_1^2 + v_2^2$$

La lunghezza del vettore (modulo) è  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ , quindi:

$$\sqrt{(v|v)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \text{lunghezza di } v$$

### 11.2.1 Definizione

Sia  $v \in \mathbb{K}^n$ . Il numero reale:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

è detta **norma (euclidea)** di  $v$ .

### 11.2.2 Proprietà

Valgono le seguenti proprietà per  $v, w \in \mathbb{K}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ :

$$1. \quad \|\alpha v\| = \sqrt{(\alpha v|\alpha v)} = |\alpha| \cdot \|v\|$$

$$(\alpha v|\alpha v) = \alpha(\alpha v|v) = \alpha \bar{\alpha}(v|v) = |\alpha|^2(v|v)$$

2. Se  $v \neq 0$ , allora  $\|v\| > 0$

3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

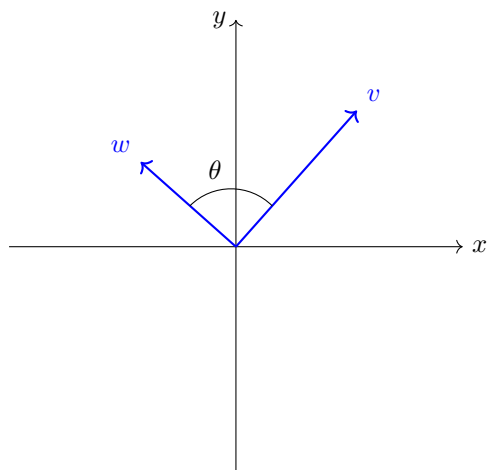
Questa proprietà è detta **disuguaglianza triangolare**.

**Esempio 11.7**

$$v = \begin{pmatrix} 5+i \\ 1+3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{(v|v)} = \sqrt{(5+i)(5+i) + (1+3i)(1+3i)} = \\ &= \sqrt{25 + 1 + 1 + 9} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### 11.3 Interpretazione grafica del prodotto interno in $\mathbb{R}^2$



$0 \leq \theta \leq \pi$  è l'angolo tra  $v$  e  $w$ .

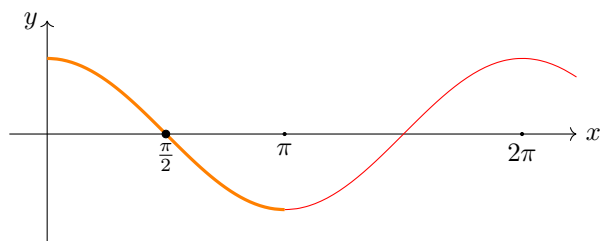
Vale la formula

$$(v|w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\theta)$$

Si ottiene una formula per calcolare l'angolo  $\theta$ :

$$\cos(\theta) = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

**NB:**



Siccome consideriamo soltanto angoli  $0 \leq \theta \leq \pi$  e non tutta la funzione periodica, possiamo considerare solo il valore del coseno dell'angolo quando  $\cos(\theta) = 0$ , ovvero  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Dunque l'angolo tra  $v$  e  $w$  è  $\frac{\pi}{2}$  (angolo retto) se e solo se  $(v|w) = 0$ .

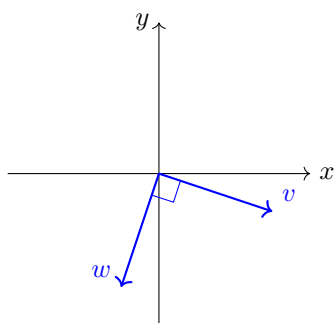
## 11.4 Definizione

Due vettori  $v, w \in \mathbb{K}^n$  si dicono **ortogonali** se  $(v|w) = 0$ . Un insieme di vettori  $\{v_1, \dots, v_r\}$  è detto **ortogonale** se  $(v_i|v_j) = 0$  per ogni  $1 \leq i, j \leq r$  con  $i \neq j$ .

### Esempio 11.8

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(v|w) = 6 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-6) = -12 + 12 = 0$$



## 11.5 Proposizione

Sia  $\{v_1, \dots, v_m\}$  un insieme ortogonale di vettori non nulli di  $\mathbb{K}^n$ . Allora  $\{v_1, \dots, v_m\}$  è linearmente indipendente.

### 11.5.1 Dimostrazione

Siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^n$  tali che:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

Per ogni  $1 \leq k \leq m$ .

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{11.2(2.)}{=} (v_k|\mathbb{O}) = (v_k|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \\ &= \alpha_1 (v_k|v_1) + \dots + \alpha_m (v_k|v_m) = \\ &= \alpha_k \underbrace{(v_k|v_k)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Concludiamo che  $\alpha_k = 0$  (dividendo per  $(v_k|v_k)$ )

Dunque  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  è linearmente indipendente.

□



**Esempio 11.9**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*È ortogonale e quindi è linearmente indipendente. Siccome  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ , abbiamo una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$ .*

**11.6 Osservazione**

Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortogonale di  $\mathbb{K}^n$  e sia  $u \in \mathbb{K}^n$ . Allora  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  e

$$\begin{aligned} (v_k|u) &= (v_k|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 (v_k|v_1) + \dots + \alpha_n (v_k|v_n) = \\ &= \alpha_k (v_k|v_k) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\alpha_k = \frac{(v_k|u)}{(v_k|v_k)} \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

**Esempio 11.10**

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*È un insieme ortogonale e quindi è una base di  $\mathbb{C}^2$ . Esistono  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  tali che:*

$$u = \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

*abbiamo che  $\alpha_1 = \frac{(v_1|u)}{(v_1|v_1)}$  e  $\alpha_2 = \frac{(v_2|u)}{(v_2|v_2)}$ .*

$$(v_1|u) = \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = 2i + 5 - 7i$$

$$(v_1|v_1) = \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$(v_2|u) = \begin{pmatrix} -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = -2i + 5i + 7i = 5 + 5i$$

$$(v_2|v_2) = \begin{pmatrix} -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

*Dunque:*

$$\alpha_1 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i \quad e \quad \alpha_2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$$

## 11.7 Definizione

Un insieme  $\{v_1, \dots, v_m\}$  ortogonale tale che  $\|v_i\| = 1$  per ogni  $1 \leq i \leq m$  è detto **ortonormale**.

Se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{K}^n$  e  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathbb{K}^n$ , allora  $\alpha_k = (v_k|u)$  per ogni  $1 \leq k \leq n$ .

**NB:**

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$(e_k|u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_k$$

Per ogni  $u \in \mathbb{K}^n$ , la combinazione lineare di  $\mathcal{B}_{can}$  uguale a  $u$  è data da:

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_k e_k + \dots + u_n e_n$$

### *Esempio 11.11*

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1|v_1)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(v_2|v_2)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overset{\text{normalizzazione}}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}' = \left\{ u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1, u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right\}$$

**NB:**

$$\|u_i\| = \left\| \frac{1}{\|v_i\|} v_i \right\| \stackrel{11.2(1.)}{=} \frac{1}{\|v_i\|} \|v_i\| = 1$$

$$(u_1|u_2) = \left( \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \mid \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right) =$$

$$\stackrel{11.2(2.)}{=} \frac{1}{\|v_2\|} \left( \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \mid v_2 \right) =$$

$$\stackrel{11.2(3.)}{=} \frac{1}{\|v_2\|} \frac{1}{\|v_1\|} (v_1|v_2) = 0$$

Con lo stesso procedimento si può dire che:

$$(u_2|u_1) = 0$$

*Dunque  $\mathcal{B}'$  è una base ortonormale.*

### 11.8 Algoritmo di Gram-Schmidt per l'ortonormalizzazione

Sia  $\{u_1, \dots, u_m\}$  un insieme di generatori di un sottospazio  $U$  di  $\mathbb{K}^n$ .  
Poniamo  $u_1 = v_1$  e  $u_2 = v_2 - \alpha_{12}u_1$  dove

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \frac{(u_1|v_2)}{(u_1|u_1)} = \frac{(u_1|v_2)}{\|u_1\|^2} \\ (u_1|u_2) &= (v_1|v_2 - \alpha_{12}v_1) \\ &= (v_1|v_2) - \alpha_{12}(v_1|v_1) = \\ &= (v_1|v_2) - \frac{(v_1|v_2)}{\underbrace{(v_1|v_1)}_{u_1=v_1}}(v_1|v_1) = \\ &= (v_1|v_2) - (v_1|v_2) \frac{(v_1|v_1)}{(v_1|v_1)} = \\ &= (v_1|v_2) - (v_1|v_2) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u_2|u_1) &= (v_2 - \alpha_{12}v_1|v_1) = \\ &= (v_2|v_1) - \overline{\alpha_{12}}(v_1|v_1) = \\ &= (v_2|v_1) - \frac{\overline{(v_1|v_2)}}{(v_1|v_1)}(v_1|v_1) = \\ &= (v_2|v_1) - \overline{(v_1|v_2)} \frac{(v_1|v_1)}{(v_1|v_1)} = \\ &= (v_2|v_1) - (v_1|v_2) \stackrel{11.1(1.)}{=} 0\end{aligned}$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} u_i$$

dove

$$\alpha_{ik} = \frac{(u_i|v_k)}{(u_i|u_i)} = \frac{(u_i|v_k)}{\|u_i\|^2}$$

Allora  $\{u_1, \dots, u_m\}$  è un insieme di generatori ortogonale di  $U$ . Normalizzando i vettori, ovvero ponendo  $u'_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$ , otteniamo un insieme di generatori ortonormale  $\{u'_1, \dots, u'_k\}$  di  $U$ .

### 11.9 Corollario

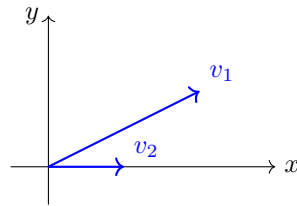
Ogni sottospazio  $U$  di  $\mathbb{K}^n$  possiede una base ortonormale.

### 11.9.1 Dimostrazione

Sia  $\{v_1, \dots, v_m\}$  una base di  $U$ . Allora l'insieme di generatori ortonormale ottenuto con l'algoritmo di Gram-Schmidt è una base ortonormale di  $U$  per 11.5.

#### *Esempio 11.12*

$$\mathcal{S} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Quindi questi vettori non sono normali, quindi usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1$$

$$\frac{(v_1|v_2)}{(v_1|v_1)} = \frac{2}{5}$$

$$u_1 = v_2 - \alpha_{12}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(v_1|v_2)}{(v_1|v_1)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(u_1|u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

È una base ortonormale.

Normalizzando otteniamo

$$u'_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(u_2|u_2)} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$u'_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5\sqrt{5}} \\ -\frac{10}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

*Dunque*  $\mathcal{B}' \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$

