Esame 04/09/2023

QUESITI DI TEORIA

A. Dimostrare che il campo elettrico è conservativo

B. Scrivere l'espressione della Forza a cui è soggetta una particella carica in presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico tra loro ortogonali.
(NB Mostrare il disegno con vettori.)

C. Ricavare l'espressione dell'energia intrinseca della corrente in un circuito

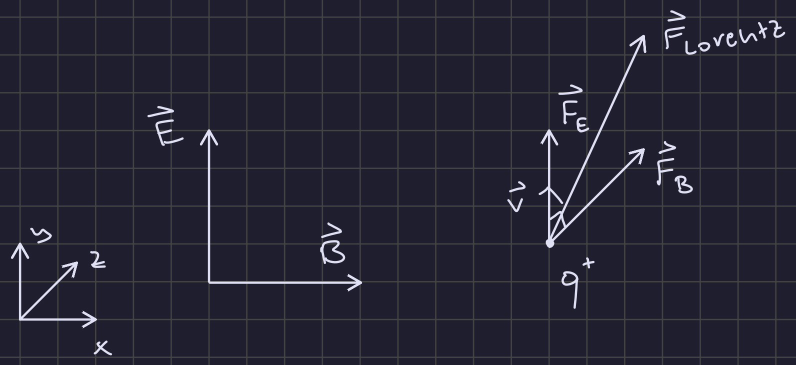
A. IL campo elettrico è conservativo perchè in un circuito chiuso il lavoro è nullo

$$\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

B. La forza a cui è soggetta la particella è la forza di lorentz:

$$F_{Lorentz} = F_E + F_B$$

$$= q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$



C $\quad P = -\mathcal{E}_L i \qquad \mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$

$$= Li\frac{di}{dt}$$

$$U_{intrinseca} = \int_0^\infty P(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty Li\frac{di}{dt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}Li^2$$

Considerare i seguenti sistemi:

a) un guscio cilindrico indefinito di raggi **R2=0.9cm**, **R3=1cm** sulla cui superficie <u>esterna</u> è stata depositata una densità di carica <u>negativa</u> **$\lambda=-10^{-10}$ C/m**

b) un guscio sferico di raggi **R2=0.9cm, R3=1cm** sulla cui superficie <u>esterna</u> è stata depositata una densità di carica <u>positiva</u> **$\sigma=10^{-10}$ C/m^2**

1. Per entrambi i sistemi, si mostri l'applicazione del teorema di Gauss:
   - disegnare le superfici gaussiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo elettrico **E** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **E(r)**
   - disegnare le linee di campo
   - disegnare, in modo schematico, le superfici equipotenziali.

Sistema a

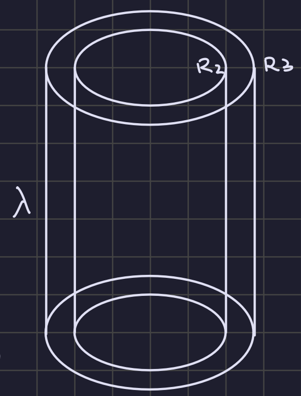
$R_1 = 9 \cdot 10^{-3}$ m

$R_2 = 10^{-2}$ m

$\lambda = -10^{-10} \frac{C}{m}$

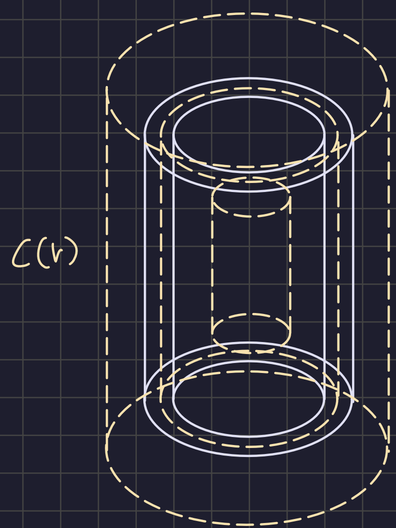
$Q = \lambda \cdot 2\pi R_3$

$= -6.3 \cdot 10^{-12}$ C $(\ell = 1)$



Th Gauss $\oint_{Sup} \vec{E} ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Siccome si ha una simmetria cilindrica, come superfici gaussiane scelgo dei cilindri di raggio r. Su queste superfici il campo è costante e quindi si può tirare fuori dall'integrale



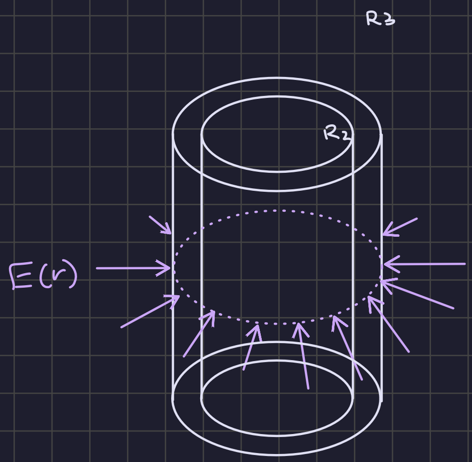
$$\oint_{C(r)} E(r) dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

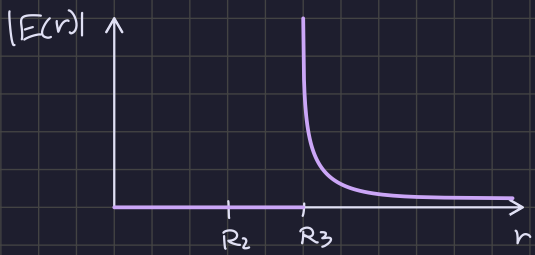
$$E(r) \int_{C(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\,2\pi r = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

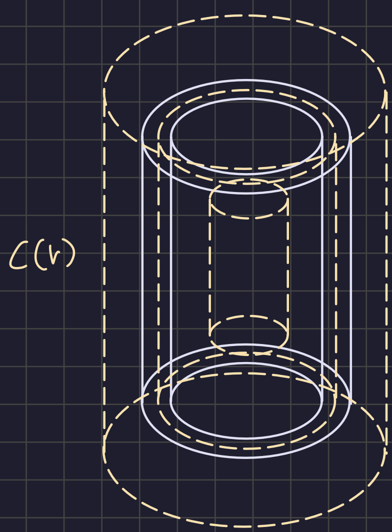
$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ Q & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \left[\frac{V}{m}\right]$$





Le superfici equipotenziali sono quelle superfici su cui il potenziale è costante e di conseguenza anche su cui il campo è costante. Queste superfici sono cilindri di raggio r:



Sistema 6

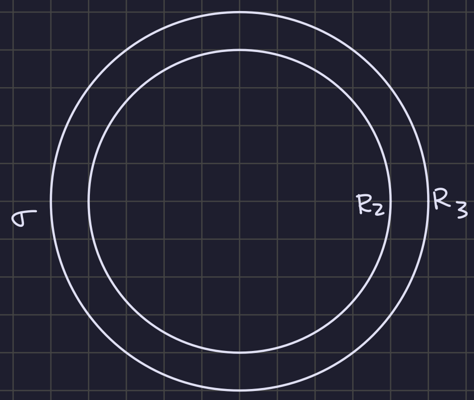
$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\,m$

$R_3 = 10^{-2}\,m$

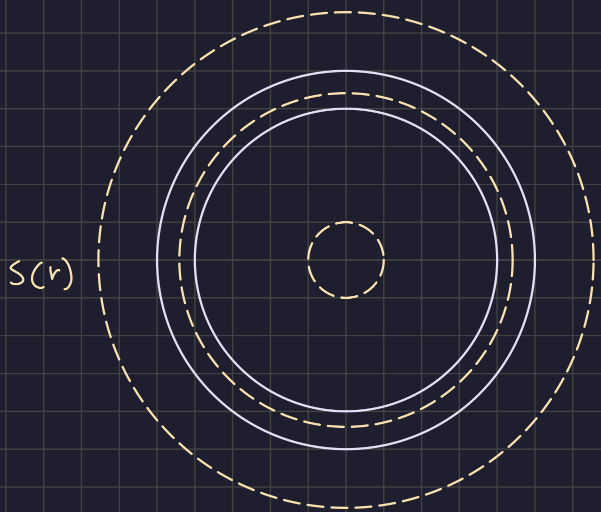
$\sigma = 10^{-10}\,\frac{C}{m^2}$

$Q = \sigma \cdot 4\pi R_3^2$

$= 1.3 \cdot 10^{-13}\,C$



In una simmetria sferica le superfici gaussiane sono gusci sferici di raggio r. Siccome il campo è radiale sarà costante su queste superifci.



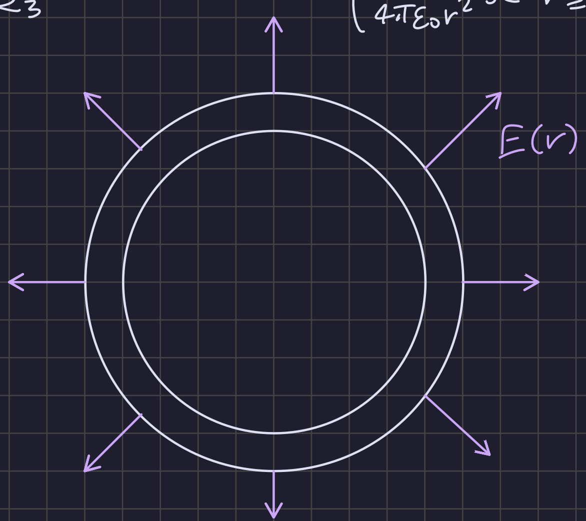
$$\oint_{S(r)} E(r)\,dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

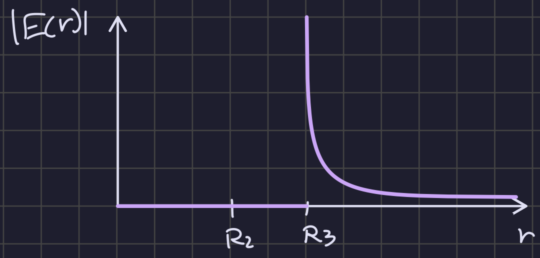
$$E(r) \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

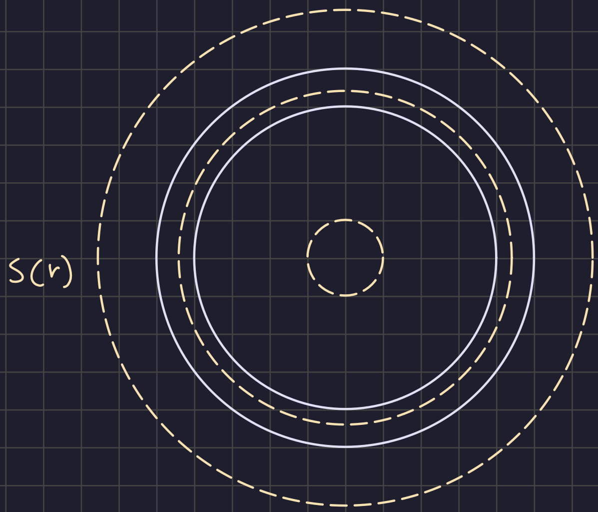
$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ Q & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \rightarrow \quad E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_3 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases} \quad \left[\frac{V}{R}\right]$$





Le superfici equipotenziali sono gusci sferici di raggio r



Si consideri il **solo sistema B),** nel vuoto.

All'interno del guscio viene depositata una sfera di raggio **R1=0.1cm** su cui è depositata una quantità di carica uguale alla carica presente nella superficie R3.

2. descrivere il sistema all'equilibrio e calcolare la nuova distribuzione di carica
3. disegnare le linee di campo

$R_1 = 10^{-3}\, m$

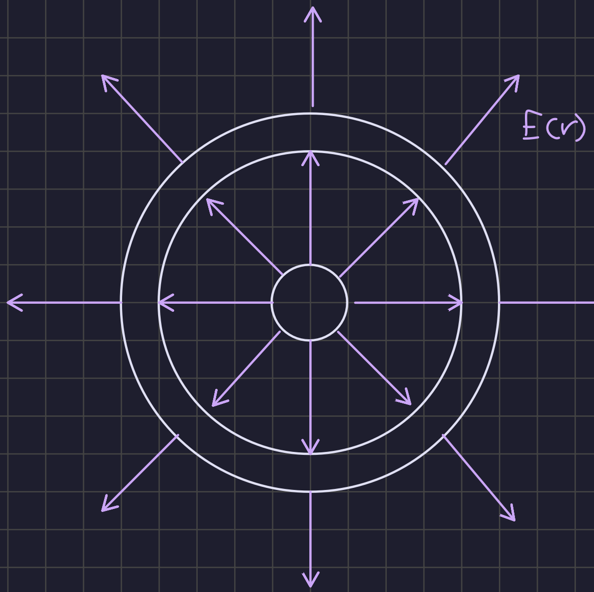
$Q_{R_1} = \sigma \cdot 4\pi R_1^2$

$= 1.2 \cdot 10^{-15}\, C$

$Q_{R_3} = 1.2 \cdot 10^{-13}\, C$

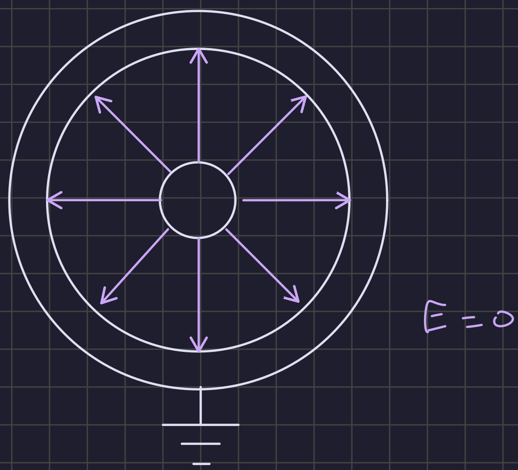
All'interno si forma una carica indotta sulla superficie R_2 che forma un campo. All'esterno la carica che era presente prima Q_R3 si somma con la nuova carica indotta Q_R1 formando Q_est

$Q_{est} = Q_{R_1} + Q_{R_3} = 1.26 \cdot 10^{-13}\, C$



La sfera esterna viene scaricata a terra:

4. calcolare l'energia **U** del sistema



Le cariche all'esterno si distribuiscono a terra, quindi sulla sfera non rimangono cariche e il campo esterno diventa nullo. All'interno il sistema rimane invariato perchè la superficie esterna agisce da gabbia di Faraday

$$U_{TOT} = U_{int} + U_{est}$$

$$= U_{int} + 0$$

$$= \int_{Vol} u_E \, d\tau \qquad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad d\tau = 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \, E(r)^2 \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \, \frac{Q_{R1}^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \, \cancel{4\pi r^2} dr$$

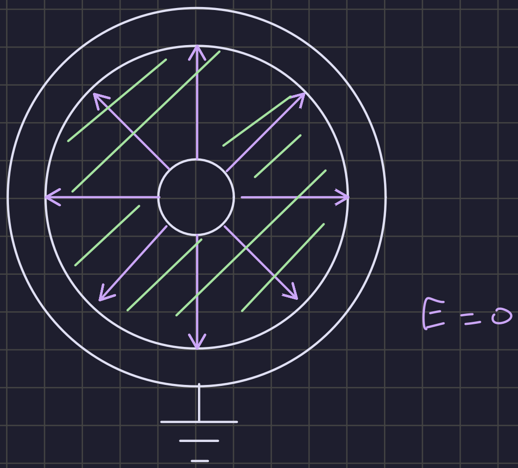
$$= \frac{Q_{R1}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$= 6.3 \cdot 10^{-18} \, [J]$$

Lo spazio interno è ora riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=2**

5. calcolare le cariche di Polarizzazione

$K=2$



$$\sigma_{Pol R_1} = E(R_1)\frac{K-1}{K} = \frac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\frac{K-1}{K} = 5.6$$

$$\sigma_{Pol R_2} = E(R_2)\frac{K-1}{K} = \frac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\frac{K-1}{K} = 7\cdot 10^{-2}$$

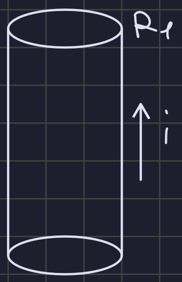
ESERCIZIO DI MAGNETOSTATICA

Un cavo conduttore di raggio **R_1=5mm** è percorso da una corrente elettrica stazionaria **i=10mA** parallela all'asse e distribuita uniformemente sulla superficie.

1. Si mostri l'applicazione del teorema di Ampere:
   - disegnare le linee amperiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo magnetico B (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **B(r)**
   - disegnare le linee di campo

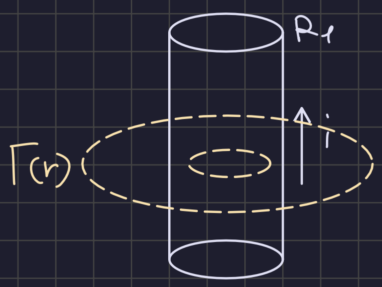
$R_1 = 5 \cdot 10^{-3}\, m$

$i = 10^{-2}\, A$



Th Ampere: $\oint_{\Gamma} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0\, i_c$

Per calcolare il campo magnetico bisogna scegliere dei circuiti, chiamati linee amperiane, su cui il campo magnetico e costante in modo da poterlo tirare fuori dall'integrale. In questo caso siccome si ha una simmetria cilindrica le linee amperiane sono cerchi di raggio r



$$\oint_{\Gamma(r)} B(r)\, dr = \mu_0\, i_c$$

$$B(r) \oint_{\Gamma(r)} dr = \mu_0\, i_c$$

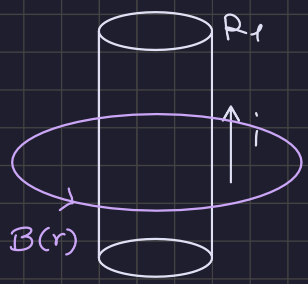
$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0\, i_c$$

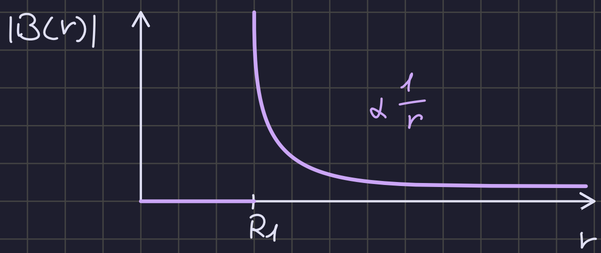
$$B(r) = \frac{\mu_0\, i_c}{2\pi r}$$

Siccome la corrente è distribuita sulla superficie, all'interno del cilindro non ci sarà corrente

$$i_c = \begin{cases} 0 & se\ r < R_1 \\ i & se\ r \geq R_1 \end{cases}$$

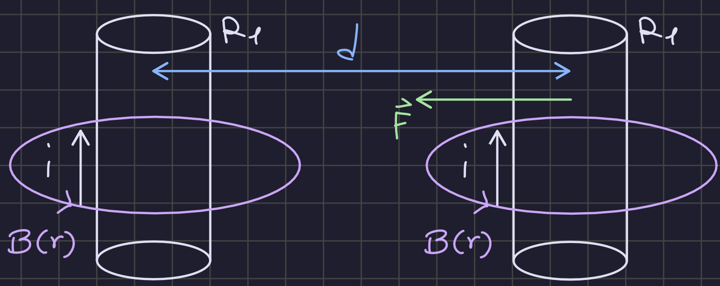
$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{se } r \geq R_1 \end{cases} \quad [T]$$





A distanza d=5m dall'asse del conduttore viene posto, parallelo ad esso, un filo percorso dalla stessa corrente i .

2. Calcolare la forza F agente sul filo (MODULO DIREZIONE VERSO!!!)



$$\vec{F} = i\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= i \cdot B(d)$$

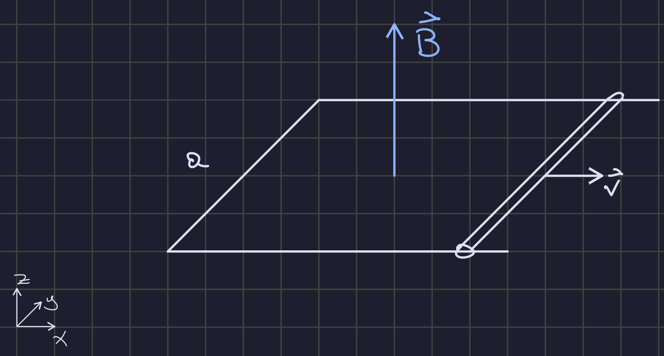
$$= \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$

$$= 4 \cdot 10^{-12}\ N$$

Questa è la legge di Laplace che descrive la forza applicata su un filo percorso da corrente in un campo magnetico

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA / CORRENTI

Un circuito a U vincolato nel piano XY e formato da due binari paralleli ad X distanti **a=1cm,** ha una parte mobile libera di scorrere senza attrito, in direzione x. Nello spazio è presente un campo magnetico stazionario e uniforme **B=0.5T** in direzione normale al circuito. Il tratto mobile viene tenuto in moto con velocità **v_0=0.5ms^{-1}** lungo x <u>costante</u>.



$a = 10^{-2}\,m$

$B = 0.5\,T$

$v = 0.5\,\frac{m}{s}$

<u>Si trascuri ogni fenomeno di autoinduzione.</u>

1- <u>Spiegare brevemente</u> che cosa significa "trascurare l'autoinduzione".

Trascurare l'autoinduzione significa ignorare il flusso generato dal campo magnetico del circuito su sè stesso. L'autoflusso genera un'induttanza sul circuito e quindi trascurando l'autoinduzione si trascura l'autoflusso.

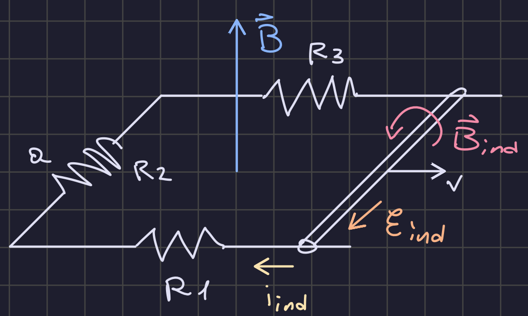
Il circuito viene chiuso con 3 resistenze <u>in serie</u> di **R1=5kΩ, R2=2kΩ**i, **R3=2kΩ**

2- Disegnare lo schema del circuito
3- Calcolare la corrente indotta nella barretta **i_{ind}**
4- Calcolare il bilancio energetico nei diversi elementi del sistema

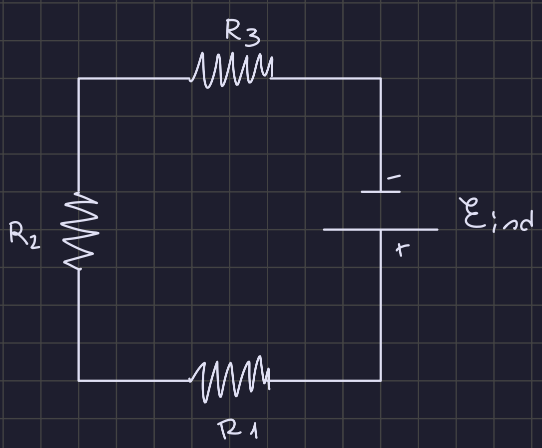
$R_1 = 5 \cdot 10^3\,\Omega$

$R_2 = 2 \cdot 10^3\,\Omega$

$R_3 = 2 \cdot 10^3\,\Omega$



Lo schema del circuito è il seguente:



$$|\mathcal{E}_{ind}| = \left| -\frac{d\Phi(B)}{dt} \right|$$

$$= \frac{|-B a \, x(t)|}{dt}$$

$$= |-B a \, v(t)| \quad [V]$$

$$= 2.5 \cdot 10^{-3} \ V$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{TOT}} \rightarrow \quad R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3 = 9 \cdot 10^3 \ \Omega$$

$$\downarrow$$

$$i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R_{TOT}} = 2.8 \cdot 10^{-7} \ A$$

$$P_{erogata} = P_{dissipata}$$

$$\mathcal{E}_{ind} \cdot i_{ind} = R_1 i_{ind}^2 + R_2 i_{ind}^2 + R_3 i_{ind}^2$$

$$P_e = \mathcal{E}_{ind} \cdot i_{ind} = 7 \cdot 10^{-10} \ [W]$$

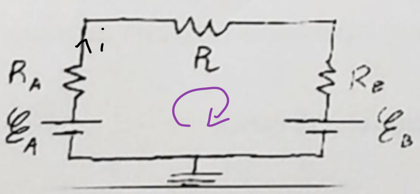
$$P_d = R_1 i_{ind}^2 + R_2 i_{ind}^2 + R_3 i_{ind}^2$$

$$= i_{ind}^2 (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= R_{TOT} \, i_{ind}^2$$

$$= 7 \cdot 10^{-10} \ [W]$$

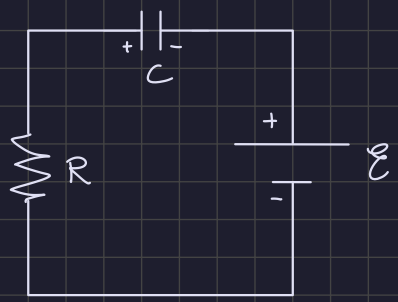
5- Impostare le leggi di Kirchhoff per il circuito in figura



$$\mathcal{E}_A - iR_A - iR - iR_B - \mathcal{E}_B = 0$$

$$\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B = iR_A + iR_B + iR$$

6- Disegnare lo schema del circuito di carica di un condensatore.
Scrivere la legge di Ohm e l'espressione dell'andamento della corrente.



Legge di Ohm $\mathcal{E}\ V_R + V_C = Ri + \frac{Q}{C}$

$i(t) = i_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$