Esercitazione con Laplace

1) $v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - 3u(t)$

$$C.I. \begin{cases} v(0^-) = 0 \\ v'(0^-) = 1 \end{cases}$$

$$u(t) = e^t \delta_{-1}(t)$$

a) Stabilità
b) Determinare la trasformata di Laplace $(H(s)$ solo in laplace$)$
c) Calcolare la risposta impulsiva $h(t) \leftarrow \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t)$
d) Calcolare la risposta totale $v_t(t)$

a) Stabilità

Calcoliamo il polinomio caratteristico e controlliamo se la parte reale delle radici è minore di 0

$$s^2 - 5s + 4 = 0 \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1 \quad \mu_1 = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad \mu_2 = 1$

Il sistema è instabile.
Per calcolare la BIBO stabilità controlliamo i poli della funzione di trasferimento. Visto che serve anche dopo calcoliamo direttamente la trasformata di laplace

b) Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[v''(t) - 5v'(t) + 4v(t)](s) = \mathcal{L}[u'(t) - 3u(t)](s)$$

- $\mathcal{L}[v''(t)](s) = s^2 V(s) - \cancel{s^1 v(0^-)}^{\,0} - \cancel{s^0}^{\,1} \cancel{v'(0^-)}^{\,1} = s^2 V(s) - 1$
- $-5\,\mathcal{L}[v'(t)](s) = -5\left(sV(s) - \cancel{s^0 v(0^-)}^{\,0}\right) = -5\,sV(s)$
- $4\,\mathcal{L}[v(t)](s) = 4 \cdot V(s)$
- $\mathcal{L}[u'(t)](s) = s^1 U(s) + s^0 u(0) = sU(s)$
- $\mathcal{L}[u(t)](s) = -3\,U(s)$

$$C.I. \begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$ sempre sottintese

Equazione finale:

$$\underbrace{s^2V(s)}\underbrace{-1}_{p(s)}\;\underbrace{-5sV(s)}_{d(s)}\;\underbrace{+4V(s)} = \underbrace{sU(s)}_{n(s)}\;\underbrace{-3U(s)}$$

Raccogliamo V e U

$$(s^2-5s+4)V(s)-1=(s-3)U(s)$$

$$V(s)=\frac{\overset{p(s)}{1}}{\underset{d(s)}{(s-1)(s-4)}}+\underbrace{\boxed{\frac{\overset{n(s)}{s-3}}{\underset{d(s)}{(s-1)(s-4)}}}}_{H(s)}\cdot U(s)$$

Per essere BIBO stabile, la parte reale dei poli di $H(s)$ deve essere minore di 0

$$\forall i \quad Re(\lambda_i)<0$$

a) Non è BIBO stabile

b) $H(s)=\dfrac{s-3}{(s-1)(s-4)}$

c) $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)](t)$

Il grado del numeratore è minore del denominatore, quindi non bisogna fare alcuna divisione polinomiale, bisogna dividere H(s) in fratti semplici

$$H(s)=\frac{n(s)}{d(s)}$$

$deg(n(s)) \geq deg(d(s))$ $\qquad$ $deg(n(s)) \geq deg(d(s))$

$\downarrow$

Divisione polinomiale

$\downarrow$

Fratti semplici

$\downarrow$

Antitrasformata

$$H(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

Usiamo la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \to \lambda} \frac{d^{\mu-l-1}}{ds^{\mu-l-1}} \cdot \frac{n(s)}{d(s)} \cdot (s-\lambda)^{\mu}$$

$$A = \lim_{s \to 1} \cancel{\frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}}} (\cancel{s-1}) \cdot \frac{s-3}{(\cancel{s-1})(s-4)} = \frac{2}{3}$$

$$B = \lim_{s \to 4} \cancel{\frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}}} (\cancel{s-4}) \frac{s-3}{(s-1)(\cancel{s-4})} = \frac{1}{3}$$

$$H(s) = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)}}_{\mathcal{L}^{-1}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-4)}}_{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\mathcal{L}\left[A \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{A}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

$\downarrow$

$A = \frac{2}{3}$

$l = 0$

$\lambda = 1$

$\downarrow$

$A = \frac{1}{3}$

$l = 0$

$\lambda = 4$

$$h(t) = \left(\frac{2}{3} e^{t} + \frac{1}{3} e^{4t}\right) \delta_{-1}(t)$$

d) Risposta totale

$$v_t = v_l(t) + v_f(t)$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s)$$

$$V_t(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)(s-4)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{s-3}{(s-1)(s-4)} \cdot U(s)}_{V_f(s)}$$

$$u(t) = e^{t} \delta_{-1}(t)$$

$A = 1$

$l = 0$

$\lambda = 1$

$$\mathcal{L}\left[A \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{A}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

$$U(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} \cdot \frac{1}{(s-1)}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{s-3}{(s-1)^2(s-4)}$$

$$= \frac{s-1+s-3}{(s-1)^2(s-4)} = \underbrace{\frac{2s-4}{(s-1)^2(s-4)}}_{V_t(s)}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

Il grado del numeratore non è maggiore del grado del denominatore, quindi scomponiamo subito in fratti semplici:

$$V_t(s) = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-4)}$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda=1 & \lambda=1 & \lambda=4 \\ l=0 & l=1 & l=0 \\ \mu=2 & \mu=2 & \mu=1 \end{array}$$

Usiamo la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s\to\lambda} \frac{d^{\mu-l-1}}{ds^{\mu-l-1}} \cdot \frac{n(s)}{d(s)} \cdot (s-\lambda)^{\mu}$$

$$A = \lim_{s\to1} \frac{d^{\cancel{2-0-1}\,1}}{ds^{\cancel{2-0-1}\,1}} \cancel{(s-1)^2} \frac{2s-4}{\cancel{(s-1)^2}(s-4)}$$

$$= \lim_{s\to1} \frac{d}{ds} \frac{2s-4}{s-4} = \lim_{s\to1} \frac{2(s-4)-(2s-4)\cdot 1}{(s-4)^2}$$

$$= \frac{2(1-4)-(2-4)}{(1-4)^2} = \frac{-6+2}{9} = -\frac{4}{9}$$

$$B = \lim_{s\to1} \frac{d^{\cancel{2-1-1}\,0}}{ds^{\cancel{2-1-1}\,0}} \cancel{(s-1)^2} \frac{2s-4}{\cancel{(s-1)^2}(s-4)} = \lim_{s\to1} \frac{2s-4}{s-4} = \frac{2}{3}$$

$$C = \lim_{s\to4} \frac{d^{\cancel{1-0-1}\,0}}{ds^{\cancel{1-0-1}\,0}} \cancel{(s-4)} \frac{2s-4}{(s-1)^2\cancel{(s-4)}} = \lim_{s\to4} \frac{2s-4}{(s-1)^2} = \frac{4}{9}$$

$$V_t(s) = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{(s-1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{(s-4)}$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$ $\quad A = -\frac{4}{9}$, $l = 0$, $\lambda = 1$ $\quad A = \frac{2}{3}$, $l = 1$, $\lambda = 1$ $\quad A = \frac{4}{9}$, $l = 0$, $\lambda = 4$

$$\mathcal{L}\left[A \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{A}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

$$v_t(s) = \left(-\frac{4}{9} e^t + \frac{2}{3} t e^t + \frac{4}{9} e^{4t}\right) \delta_{-1}(t)$$

2) $v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) = u'(t)$

$$C.I = \begin{cases} v(0^-) = 1 \\ v'(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \delta_{-1}(t)$$

a) Calcolare la risposta libera
b) Calcolare la risposta forzata

Calcoliamo la trasformata di Laplace del sistema

$$s^2 V(s) - s \overset{1}{\cancel{v(0)}} - \overset{0}{\cancel{v'(0)}} + 4(sV(s) - \overset{1}{\cancel{v(0)}}) + 4V(s) = sU(s)$$

$$V(s) = (s^2 + 4s + 4) - s - 4 = sU(s)$$

$$= \frac{s+4}{(s^2+4s+4)} + \frac{s}{(s^2+4s+4)} \cdot U(s)$$

$$= \frac{s+4}{(s+2)^2} + \frac{s}{(s+2)^2} \cdot U(s)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \quad \mu_1 = 2$

(Asintoticamente stabile
e anche BIBO stabile)

a) Risposta libera

$$V_l(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}$$

Il grado del numeratore è maggiore, quindi dividiamo in fratti semplici:

$$V_C(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

Usiamo la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \to \lambda} \frac{d^{\mu-l-1}}{d s^{\mu-l-1}} \cdot \frac{n(s)}{d(s)} \cdot (s-\lambda)^{\mu}$$

$$A = \lim_{s \to -2} \frac{d^{\cancel{2-0-1}\,1}}{d s^{\cancel{2-0-1}\,1}} \cdot \frac{s+4}{\cancel{(s+2)^2}} \cdot \cancel{(s+2)^2} = \lim_{s \to -2} \frac{d(s+4)}{ds} = 1$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{d^{\cancel{2-1-1}\,0}}{d s^{\cancel{2-1-1}\,0}} \cdot \frac{s+4}{\cancel{(s+2)^2}} \cdot \cancel{(s+2)^2} = \lim_{s \to -2} s+4 = 2$$

$$V_C = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$A=1$ $\lambda=-2$ $l=0$ | $A=2$ $\lambda=-2$ $l=1$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad \mathcal{L}\left[A \cdot \frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)\right] = \frac{A}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

$$v_C = \left(e^{-2t} + 2^{t} e^{-2t}\right) \delta_{-1}(t)$$

b) Risposta forzata

$$V_f(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{s}{(s+2)^2} \cdot U(s)$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s)$$

$$u(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \delta_{-1}(t)$$

Usiamo la formula di eulero: $\cos(t) = \dfrac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$ $\qquad \sin(t) = \dfrac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$

$$U(s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} \cdot \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \cdot \delta_{-1}(t)\right](s) =$$

$$= \frac{1}{4j} \cdot \mathcal{L}\left[\left(e^{2jt} - e^{-2jt}\right) \delta_{-1}(t)\right](s)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(\frac{1}{s-2j} - \frac{1}{s+2j}\right) = \frac{1}{s^2+4}$$

$$V_F = \frac{s}{(s+2)^2} \cdot \frac{1}{(s^2+4)}$$

$$= \frac{s}{(s+2)^2(s^2+4)}$$

$$= \frac{s}{(s+2)^2(s-2j)(s+2j)}$$

Il grado del numeratore è minore del denominatore, quindi dividiamo in fratti semplici

$$\frac{s}{(s+2)^2(s-2j)(s+2j)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s-2j)} + \frac{D}{(s+2j)}$$

$$A = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds} \cancel{(s+2)^2} \cdot \frac{s}{\cancel{(s+2)^2}(s^2+4)} = \frac{1}{16}$$

$$B = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)^2} \frac{s}{\cancel{(s+2)^2}(s^2+4)} = -\frac{1}{4}$$

$$C = \lim_{s \to +2j} \cancel{(s-2j)} \cdot \frac{s}{(s+2)^2\cancel{(s-2j)}(s+2j)} = \frac{1}{16j}$$

$$D = \lim_{s \to -2j} \cancel{(s+2j)} \cdot \frac{s}{(s+2)^2(s-2j)\cancel{(s+2j)}} = -\frac{1}{16j}$$

$$V_F(s) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{16j} \cdot \frac{1}{(s-2j)} - \frac{1}{16j} \cdot \frac{1}{(s+2j)}$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$A = \frac{1}{16}$	$A = -\frac{1}{4}$	$A = \frac{1}{16j}$	$A = -\frac{1}{16j}$
$\lambda = -2$	$\lambda = -2$	$\lambda = 2j$	$\lambda = -2j$
$l = 0$	$l = 1$	$l = 0$	$l = 0$

$$v_F(t) = \left(\frac{1}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4} t e^{-2t} + \frac{1}{16j} e^{2jt} - \frac{1}{16j} e^{-2jt} \right) \delta_{-1}(t)$$

Usiamo di nuovo eulero raccogliendo

$$= \left(\frac{1}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4} t e^{-2t} + \frac{1}{8} \left(\frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} \right) \right) \delta_{-1}(t)$$

$$= \left(\frac{1}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4} t e^{-2t} + \frac{1}{8} \sin(2t) \right) \delta_{-1}(t)$$