Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1 Introduzione

1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazioneli; questo insieme viene indicato con il simbolo $\mathbb{R}$

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- 1^a **proprietà (Eudosso-Archimede)**: due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

  Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

  Assioma: dati due numeri reali positivi a, b con $0 < a < b$ esiste un intero n tale che $na > b$.

- 2^a **proprietà (Intervalli inscatolati)**: date due serie di grandezze: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$: la prima crescente (numeri della famiglia a) e la seconda decrescente (numeri della famiglia b), in cui ogni a_k è minore di b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k, allora esiste una grandezza c tale che per ogni k $a_k \leq c \leq b_k$.

1.2 Maggiorante

Definizione 1.1
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ ‘ è un maggiorante dell’insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \geq x$.

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l’interballo tendesse verso $+\infty$ non si sarebbe alcun maggiorante poichè $+\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha maggiorante

1.3 Minorante

Definizione 1.2
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell’insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \leq x$.

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l’intervallo tendesse verso $-\infty$ non ci sarebbe alcun minorante poichè $-\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha minorante

1.4 Estremo superiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato superiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo superiore di S se:

- y è un maggiorante di S
- y è il più piccolo maggiorante di S

Se S è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di S è $sup(S) = +\infty$. Esempi:

- $I = (1, 10]$: $sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$: $sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $sup(\mathbb{R}) = +\infty$

1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato inferiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo inferiore di S se:

- y è un minorante di S
- y è il più grande minorante di S

Se S è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di S è $inf(S) = -\infty$. Esempi:

- $I = [1, 8)$: $inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$: $inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $inf(\mathbb{R}) = -\infty$

1.6 Massimo

> ***Definizione 1.3***
> *Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il massimo di S se y è l'estremo superiore di S e se $y \in S$.*

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con $Max(S) = y$.

1.7 Minimo

Definizione 1.4
Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il minimo di S se y è l'estremo inferiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con $Min(S) = y$.

Teorema 1 *Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.*

1.8 Funzioni

Definizione 1.5
*Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:*

$$f : A \to B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di A è associato uno e uno solo elemento di B.

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \; \exists! \; b \in B \text{ tale che } f : A \to B$$

Esempio di funzione corretta:

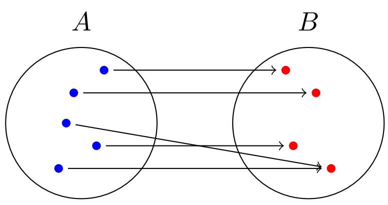


Figura 1: Esempio di funzione corretta

1.8.1 Dominio di una funzione

Definizione 1.6
Dato un insieme di partenza A gli elementi ai quali è applicata la funzione f sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \to x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \to \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \textit{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \textit{ con } D = [0, +\infty)$$

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \to +\infty$)

Definizione 2.1
Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 \textit{ t.c. } \forall x \subset A^a,$$

$$x \geq k \to L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$)
La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .

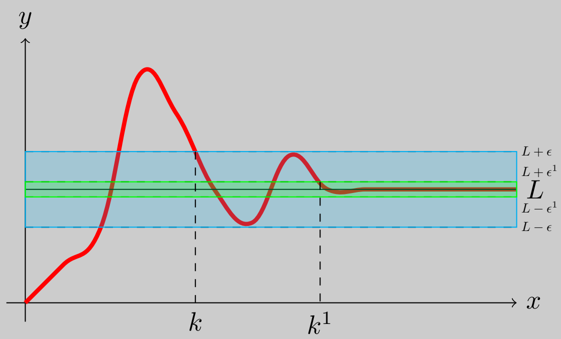


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di L e non uscirne più. Questo vale per ogni ϵ, quindi anche per ϵ^1.

[a] Il dominio della funzione

Definizione 2.2
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

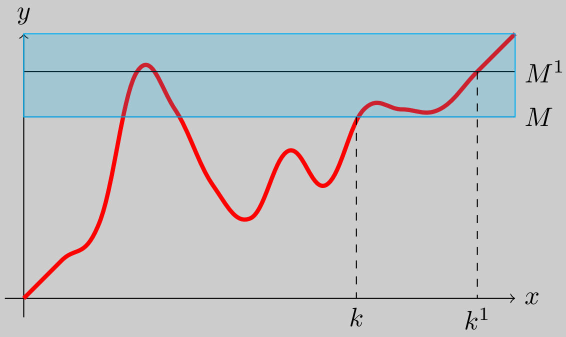


Figura 3: Definizione di limite a $+\infty$

Definizione 2.3
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in A,$$

$$x \geq k \to f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$)

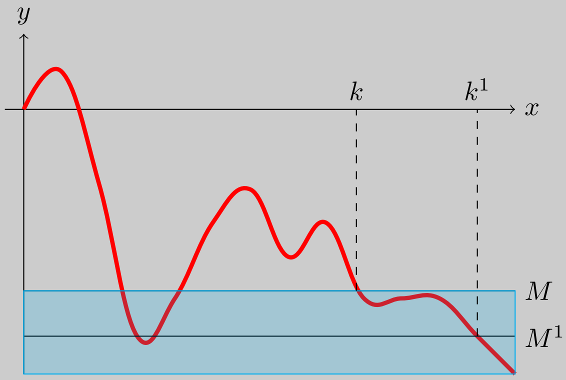


Figura 4: Definizione di limite a $-\infty$

2.1 Esempi

Esempio 2.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad Dominio = \mathbb{R}/\{0\}$$

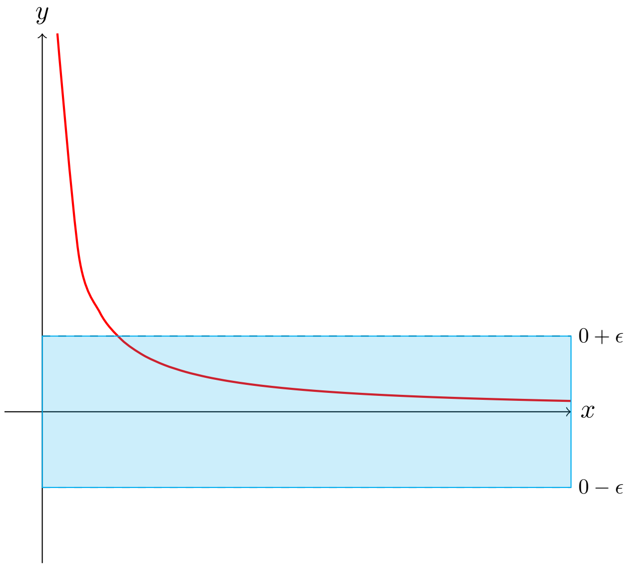


Figura 5: Esempio di limite

Sia dato $\epsilon > 0$ arbitrario. Definisco $k := \frac{1}{\epsilon}$.
Sia dato $x > 0$ arbitrario, supponiamo $x \geq k$. Allora

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$).

Esempio 2.2

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

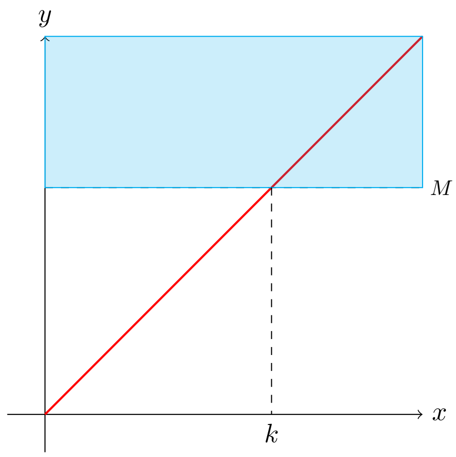


Figura 6: Esempio di limite a $+\infty$

Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
Quindi è verificata la definizione di limite.

2.2 Osservazioni

Non è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \to +\infty} sin(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} cos(x)$$

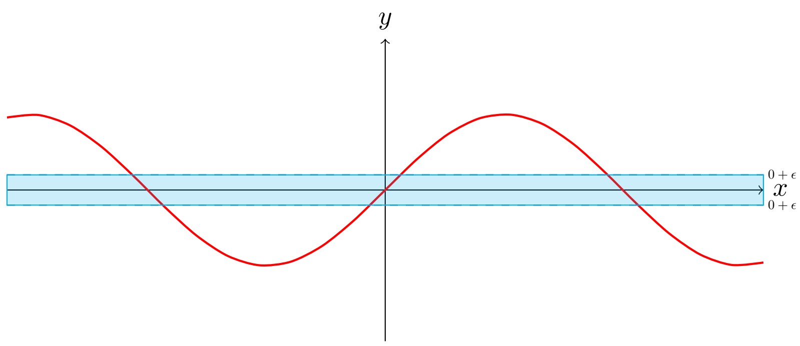


Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intevallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.

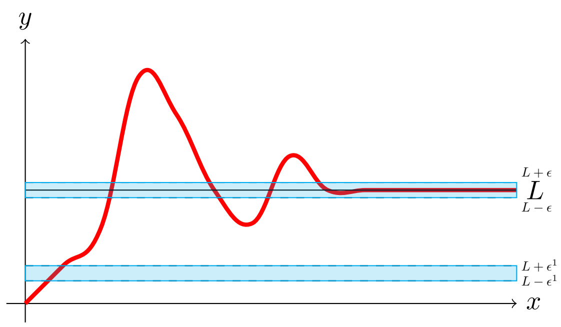


Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 2 (Algebra dei limiti) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti*

$$F := \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

*esistano e siano **finiti**. Allora*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

*Il teorema si estende **parzialmente** nel caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:*

- $F + \infty = +\infty, \;\; F - \infty = -\infty \;\; \forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty, \;\; +\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty, \;\; \forall F \in \mathbb{R}, \; F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0 \;\; \forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty \;\; \forall F \in \mathbb{R}, \; F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succdere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}

N.B.: in questo contesto, 0 , ∞ e 1 sono da intendersi come abbreviazioni.

2.5 Esempi di calcolo di limiti

Esempio 2.3

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + \frac{1}{x})$$

$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \to +\infty$$

Per $x \to +\infty$ (per il teorema dell'algebra dei limiti)

Esempio 2.4

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x^3}_{+\infty}(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - 1) \to -\infty$$

Per $x \to +\infty$

Esempio 2.5

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x}_{+\infty}(\underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4) \to +\infty$$

2.6 Limiti razionali

Se P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty \quad se\ p > q \\ 0 \quad se\ p < q \\ coefficiente\ denominante\ di\ P \quad se\ p = q \\ coefficiente\ denominante\ di\ Q \quad se\ p = q \end{cases}$$

2.7 Limiti delle funzioni monotone

Teorema 3 (di monotonia) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f:\ A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona*[1]*. Allora*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ \ esiste\ e$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} sup\{f(x):\ x \in A\} \quad se\ f\ cresce\ (nondecrescecnte) \\ inf\{f(x):\ x \in A\} \quad se\ f\ decresce\ (noncrescente) \end{cases}$$

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
f è strettamente crescente e limitata (l'immagine di f è un insieme limitato).

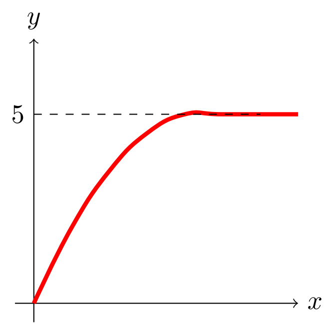


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e non limitata

[1]Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

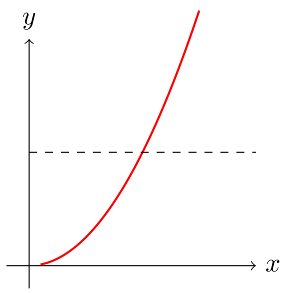
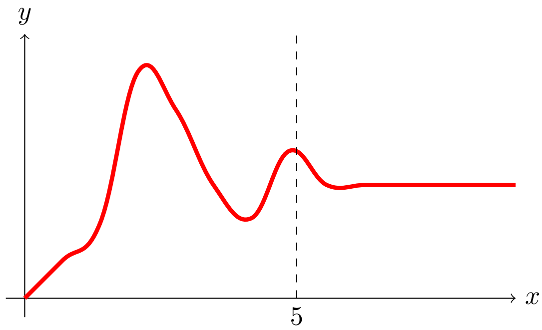


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede epr $x > 5$ si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da $x = 5$.

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Esempio 2.6

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = +\infty$$

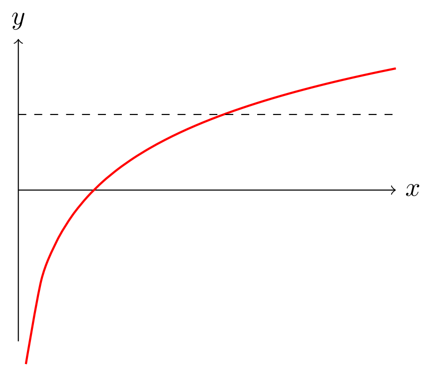


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

Per il teorema di monotonia:

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = sup\{log(x) : x > 0\}$$

$$\geq sup\{log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \;\; \textit{scelto arbitrariamente}$$

$$= sup\{n \cdot log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty$$

Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a $+\infty$.

Esercizio 2.1
Dimostrare che:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

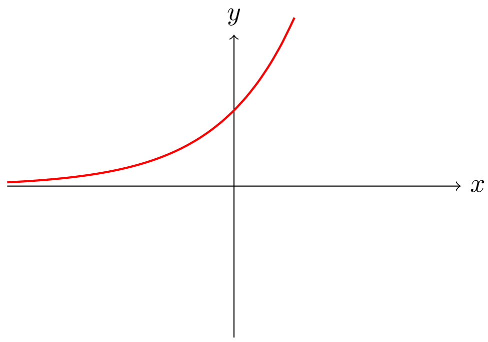


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

E similmente che:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

3 Teorema dei carabinieri

Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$$

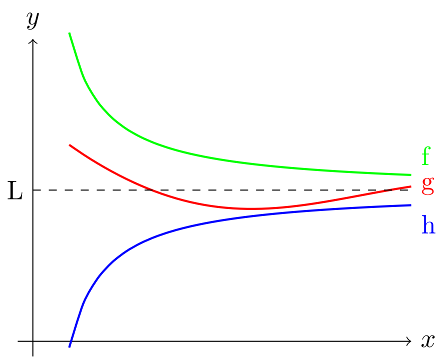


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti

3.1 Variante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ *t.c.* $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$.
Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

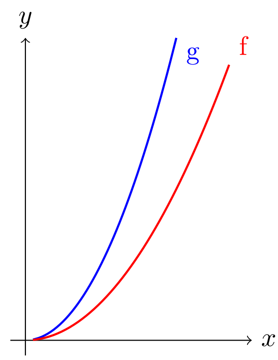


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

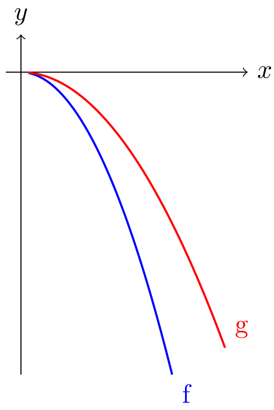


Figura 16: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative