

Esercitazione in classe sulle curve

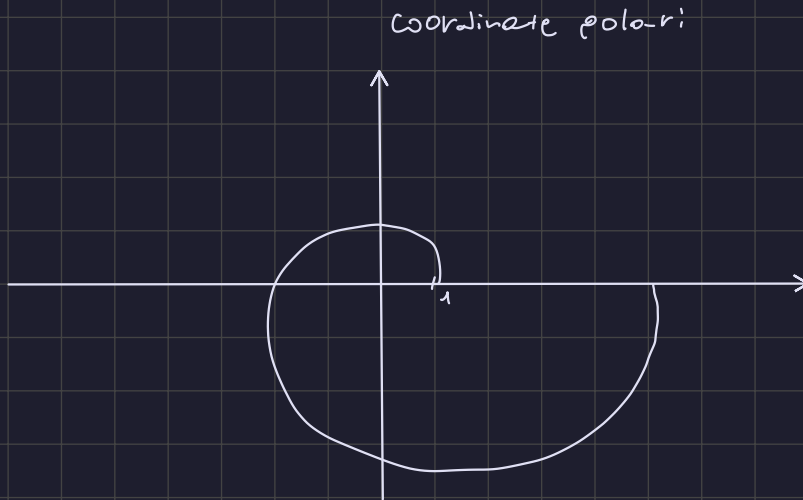
▣ **Esercizio 2.1.1.** Sia γ la curva piana la cui parametrizzazione in coordinate polari è $\rho(\vartheta) = \vartheta^2 + 1$, on $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Dopo aver disegnato sommariamente il sostegno di γ , determinare i versori tangente e normale al sostegno di γ nel punto $\gamma(\pi)$ e scrivere un'equazione della retta tangente nello stesso punto.

$$\rho(\theta) = \theta^2 + 1 \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

In coordinate cartesiane equivale a

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta = (\theta^2 + 1) \cos \theta \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = (\theta^2 + 1) \sin \theta \end{cases}$$

Diamo valori a caso a theta e plottiamo il grafico a grandi linee



Rappresenta la curva

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = ((\theta^2 + 1) \cos \theta, (\theta^2 + 1) \sin \theta)$$

$$\gamma'(\theta) = (2\theta \cos \theta - (\theta^2 + 1) \sin \theta, 2\theta \sin \theta + (\theta^2 + 1) \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\| &= \sqrt{4\theta^2 \cos^2 \theta - 4\theta(\theta^2 + 1) \cos \theta \sin \theta + (\theta^2 + 1)^2 \sin^2 \theta +} \\ &\quad + 4\theta^2 \sin^2 \theta + 4\theta(\theta^2 + 1) \cos \theta \sin \theta + (\theta^2 + 1)^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{4\theta^2 + (\theta^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Tangente:

$$T(\theta) = \frac{\gamma'(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\|} = \frac{(2\theta \cos \theta - (\theta^2 + 1) \sin \theta, 2\theta \sin \theta + (\theta^2 + 1) \cos \theta)}{\sqrt{4\theta^2 + (\theta^2 + 1)^2}}$$

$$\downarrow$$

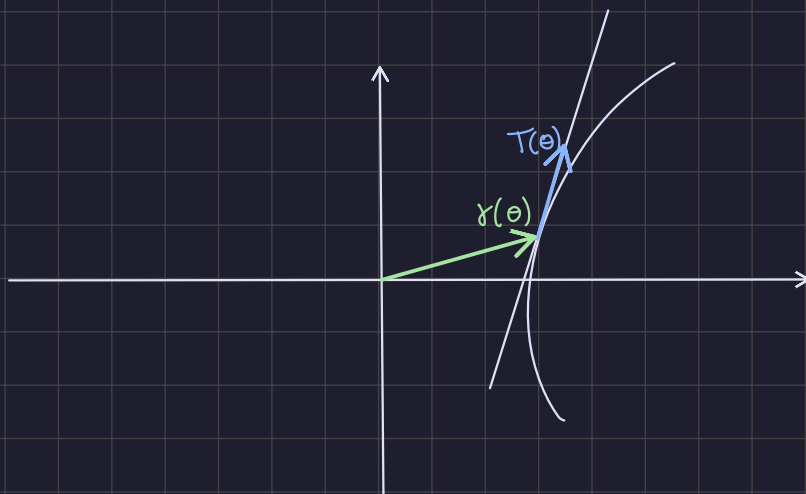
$$T(\pi) = \frac{(-2\pi, -(\pi^2+1))}{\sqrt{4\pi^2 + (\pi^2+1)^2}}$$

Direzione della tangente in π

In \mathbb{R}^2 il versore normale è il versore tangente ruotato di 90°

$$N(\pi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\downarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}} T(\pi)$$

Per trovare la retta tangente alla curva bisogna trovare quel vettore che sposta lo spazio vettoriale formato dal vettore tangente sopra la curva e quel vettore è proprio $\gamma(\theta)$



Quindi la retta tangente è:

$$\gamma(\pi) + t\gamma'(\pi)$$

$$\begin{cases} x(t) = -(\pi^2+1) - t \cdot 2\pi \\ y(t) = 0 - t(\pi^2+1) \end{cases}$$

Componente x del vettore tangente
Componente y del vettore tangente

$$-\frac{x + (1 + \pi^2)}{2\pi} = t$$

$$y = \frac{x + (1 + \pi^2)}{2\pi} (\pi^2 + 1)$$

$$y = \frac{\pi^2 + 1}{2\pi} x + \frac{(\pi^2 + 1)^2}{2\pi}$$

✎ **Esercizio 2.2.4.** Calcolare l'integrale (curvilineo) di

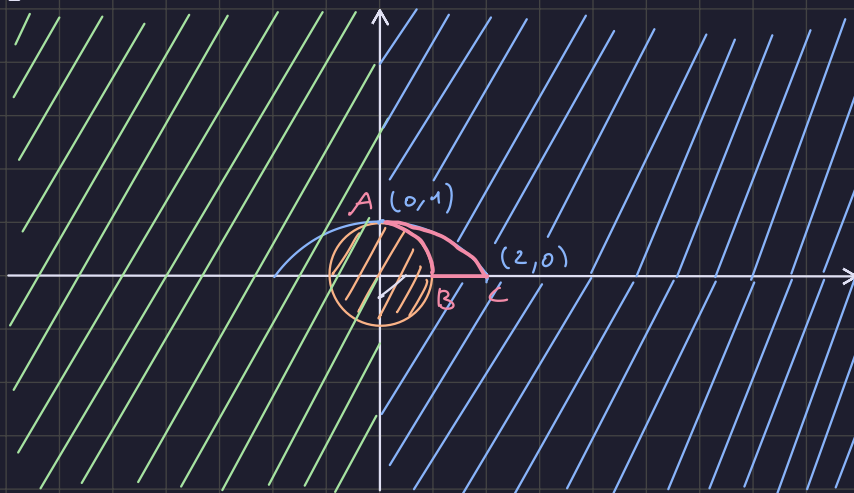
$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ il cui sostegno è il bordo ∂E di

$$E = \left\{ (x, y) : \underline{x \geq 0}, \underline{x^2 + y^2 \geq 1}, \underline{0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}} \right\}$$

e determinare la retta tangente a γ nel punto $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

Disegniamo l'insieme E



Consideriamo solo l'area rossa

Integriamo lungo le 3 curve parametrizzate:

$$\gamma_{BA}(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\gamma_{BC}(t) = (t, 0) \quad t \in [1, 2]$$



$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{4}\right)$$



Integriamo

$$\int_{\gamma_{BA}} F ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4 + \cos^2 t}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt$$

$$F(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$|\gamma'(t)| = 1$$

$$\begin{aligned} w &= \cos^2 t \\ dw &= -2 \cos t \sin t dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \cos t \sin t dt}{\sqrt{4 + \cos^2 t}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{4+w}} dw = -(4+w)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[-\sqrt{4+\cos^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 + \sqrt{5}$$

Retta tangente a γ in $(1, 3/4)$ ($\gamma(1)$)

$$\gamma(t) \begin{cases} \gamma_{BA} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{BC} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{AC} \xrightarrow{\checkmark} \end{cases} \left(1, \frac{3}{4}\right) \in \gamma_{AC}$$

$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{4}\right) \rightarrow t \mid \gamma_{AC}(t) = \left(1, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow t = 1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\gamma'_{AC}(t) = \left(1, -\frac{t}{2}\right)$$

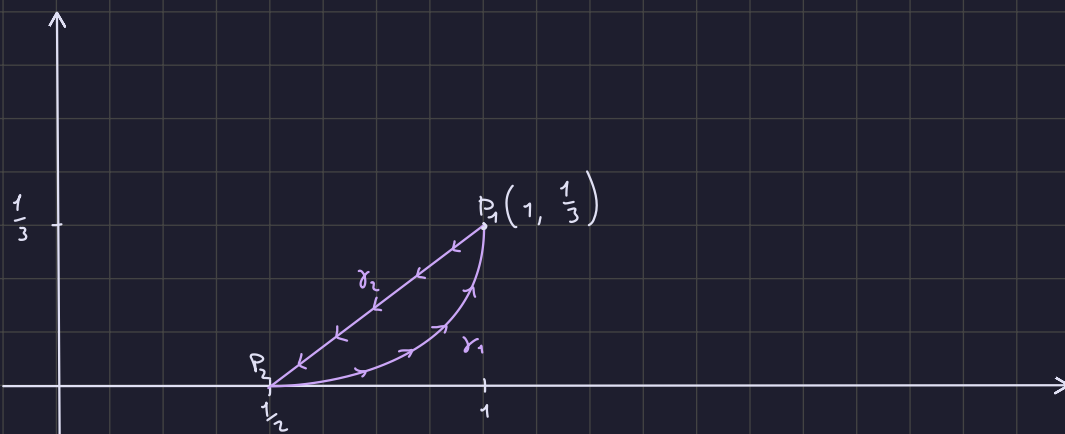
$$r_{TAN}(t) = \gamma_{AC}(t) + s \gamma'_{AC}(t) \quad s \in \mathbb{R}$$

$$r_{TAN}(1) = \gamma_{AC}(1) + s \gamma'_{AC}(1) = r_{TAN}(s) = \begin{cases} x(s) = 1 + s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = 1 + s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = x - 1 \\ y = \frac{3}{4} - \frac{x-1}{2} \end{cases} \rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \quad \text{retta tangente}$$

▣ **Esercizio 2.1.2.** Determinare una parametrizzazione della curva chiusa γ che si ottiene percorrendo prima da sinistra verso destra il grafico di $f(x) = (1/3)(2x-1)^{3/2}$ per $1/2 \leq x \leq 1$ e poi da destra a sinistra il segmento congiungente gli estremi del grafico di f stessa. Disegnare quindi il sostegno di γ e calcolarne la lunghezza.

$$F(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{3/2} \quad F'(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{1/2} \quad F''(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{(2x-1)^{1/2}} > 0 \quad \text{concavità verso l'alto}$$



$$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{1}{3} (2t-1)^{3/2}\right) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow t \in [0, 1] \quad (1-t)p_1 + tp_2 \\ &= \left((1-t) + \frac{t}{2}, \frac{1-t}{3} \right) \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Le due rette sono definite nello stesso intervallo, quindi in $t = 1/2$ si avrà un valore corrispondente a 2 rette contemporaneamente, e noi non vogliamo questo, ma vogliamo che gamma2 sia collegata a gamma1. Cambiamo di nuovo parametrizzazione

$$\gamma_1(t) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \rightarrow \quad t = As + B \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = A \cdot 0 + B \\ 1 = A \cdot \frac{1}{2} + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_1(s) = \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2s + 1 - 1)^{3/2}\right) \quad \leftarrow \quad t = s + \frac{1}{2}$$

$$= \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2s)^{3/2}\right) \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} s=0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ s=\frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{3}\right) \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{La parametrizzazione} \\ \text{è corretta} \end{array} \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\gamma_2(t) \quad t \in [0, 1] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow t = As + B$$

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \frac{1}{2} + B \\ 1 = A \cdot 1 + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases} \quad \nearrow \quad t = 2s - 1$$

$$\gamma_2(t) = \left((1-2s+1) + \frac{2s-1}{2}, \frac{(1-2s+1)}{3} \right)$$

$$= \left(2 - 2s + s - \frac{1}{2}, \frac{2(1-s)}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - s, \frac{2(1-s)}{3} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{3} \right) \\ s = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \end{array} \right] s \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2s)^{\frac{3}{2}} \right) & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \\ \left(\frac{3}{2} - s, \frac{2(1-s)}{3} \right) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \end{cases}$$

I passaggi per cambiare parametro sono:

$$\begin{array}{ccc} \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^h & & \\ [c, d] \xrightarrow{\uparrow} C, \text{ (mappa monotona)} & & \\ \downarrow & & \\ \begin{array}{l} t \in [a, b] \\ s \in [c, d] \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{l} t = As + B \rightarrow \begin{cases} a = Ac + B \\ b = Ad + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases} \end{array} \end{array}$$

Esercizio 2.2.6. Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea) $\int_{\alpha} z ds$, ove α è la curva di parametrizzazione $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(-\pi, 0, \pi)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).

$$\int_{\alpha(t)} F(x, y, z) \overset{\text{Spec. } z=t} ds = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt$$

$$\uparrow F(x, y, z) = z$$

$$\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \overset{z=t}{t} \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2} dt = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (t^2 + 2)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{(4\pi^2 + 2)^{3/2} - 2^{3/2}}{3}$$

Calcoliamo il piano normale in $(-\pi, 0, \pi)$

$$\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t) \Rightarrow (-\pi, 0, \pi) \leftrightarrow t = \pi$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

Cerchiamo una direzione tangente alla curva in π

$$\alpha'(\pi) = (-1, -\pi, 1)$$

L'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(-\pi, 0, \pi) \rightarrow r = (-\pi, 0, \pi) + s(-1, -\pi, 1)$

Bisogna trovare il piano perpendicolare alla retta tangente

Metodo 1:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-s_1 - \pi s_2 + s_3 = 0$$

$$s_1 = s_3 - \pi s_2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ k & t \end{matrix}$$

Teorema di Rouché-Capelli

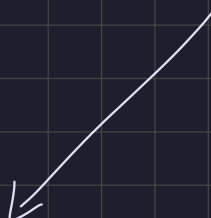
$$\begin{pmatrix} k - \pi t \\ t \\ k \end{pmatrix} \rightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x(k, t) = -\pi + k - \pi t \\ y(k, t) = t \\ z(k, t) = \pi + k \end{cases}$$

Vettore che
sposta il piano
nel punto
interessato

Piano perpendicolare
alla retta tangente
(piano normale)



$$\begin{cases} x = -\pi + z - \pi - \pi y \\ t = y \\ w = z - \pi \end{cases} \rightarrow z - x - \pi y = 2\pi$$

Metodo 2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Trasciniamo lo spazio affine nell'origine, così non bisogna calcolare il vettore che trasla lo spazio nel punto della retta tangente

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - (-\pi) \\ y \\ z - \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-(x + \pi) - \pi y + z - \pi = 0$$

$$z - x - \pi y = 2\pi$$

▮ **Esercizio 3.6.2.** Dire se la seguente funzione è differenziabile

$$x^{3/2} + (xy)^{3/2}$$

$$F(x,y) = \sqrt{x^3} + \sqrt{(xy)^3}$$

Dominio

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x: [0, +\infty) \\ y: [0, +\infty) \end{matrix}$$

Derivata

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{3}{2} \sqrt{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{3}{2} \sqrt{xy} \cdot x$$

Le derivate parziali esistono e sono continue, quindi la funzione è differenziabile

▮ **Esercizio 3.6.3.** Dire se la seguente funzione è differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(x,y) \neq 0: \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{2xy^3(x^4 + y^4) - x^2 y^3 4x^3}{(x^4 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{3y^2 x^2 (x^4 + y^4) - 2x y^3 4y^3}{(x^4 + y^4)^2}$$

Le derivate parziali sono continue per $(x,y) \neq 0$

$$(x,y) = (0,0): \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

$$\lim_{(h,k)=(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)h - \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)=(0,0)} \frac{\frac{h^2 k^3}{h^4 + k^4} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)=(0,0)} \frac{h^2 k^3}{(h^4 + k^4) \sqrt{h^2 + k^2}} = \text{Non esiste}$$

$$\downarrow h=k$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{2h^4 \sqrt{2}h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2\sqrt{2}|h|} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

📌 Esercizio 3.3.7. Calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - 2 \sin(x^2y) \cos(x+2y)}{x^2 + y^2}$$

se $(x,0) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0 \cdot \cos(x)}{x^2} = 0$

se $(0,y) \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0 \cdot \cos(2y)}{y^2} = 0$

Il limite, fissato x e fissato y esiste, quindi bisogna trovare un'altra sequenza che non tenda a 0

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} - 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y) \cos(x+2y)}{x^2 + y^2}$$

$y = x^{1/3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^{2/3}} = 0$$

$$\sin(x^2y) = x^2y + o(x^2y)$$

$$\cos(x+2y) = 1 + o(x+2y)$$

↓

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y}$$

↓ $f \rightarrow 0 \iff |f| \rightarrow 0$

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \leq \lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0$$

↓

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y} = 0 \text{ (esiste)}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

↓ $f \rightarrow 0 \iff |f| \rightarrow 0$

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy^3|}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x, y| = 0 \text{ (esiste)}$$

Quindi il limite esiste

Un altro modo è quello di usare le coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos \theta \sin^3 \theta - 2 \sin(\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta) \cos(\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta)}{\rho^2}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \underbrace{\rho^2 \cos \theta \sin^3 \theta}_{\in [-1,1]} - 2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta) \cos(\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta)}{\rho^2}$$

↓

0

$$-2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta) \cos(\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta)}{\rho^2}$$

↓ Approssimo seno e coseno con l'argomento

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

=0 quindi esiste

✎ **Esercizio 3.3.14.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2(y-x)}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Si determini se esiste (e in caso affermativo si calcoli)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

quando $\alpha = 1$ e quando $\alpha = 2$.

Passiamo in coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta (\sin \theta - \cos \theta)}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{3-2\alpha} \cos^2 \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$\begin{cases} \text{Se } 3-2\alpha > 0 & \text{esiste e fa 0} \\ \text{altrimenti} & \text{non esiste} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} \text{se } \alpha < \frac{3}{2} & \text{esiste e fa 0} \\ \text{altrimenti} & \text{non esiste} \end{cases}$$

✎ **Esercizio 3.6.5.** Si verifichi che la funzione

$$f(x, y) = |x| \log(1 + y)$$

è differenziabile in $(0, 0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| \log(1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{|x|}{1+y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|h| \log(1+k) - \underbrace{0 \log(1) - 0h - 0k}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

Trasformo in coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho |\cos \theta| \log(1 + \rho \sin \theta)}{\rho}$$

$$\downarrow \quad \rho > 0 \Leftrightarrow |\rho| > 0$$

$$0 \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} |\cos \theta| |\log(1 + \rho \sin \theta)| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} |\log(1 + \rho \sin \theta)| = 0$$

Metodo 2:

✎ **Esercizio 3.6.2.** Dire se la seguente funzione è differenziabile

$$x^{3/2} + (xy)^{3/2}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x^{\frac{3}{2}} (1 + y^{\frac{3}{2}})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + y^{\frac{3}{2}})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = x^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}\right)$$

Le derivate parziali sono continue, quindi la funzione è differenziabile

✎ **Esercizio 3.1.6.** Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x, y) = \arcsin \frac{4xy}{x^2 + y^2}$

$$F(x, y) = \arcsin \left(\frac{4xy}{x^2 + y^2} \right)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq \frac{4xy}{x^2 + y^2} \leq 1, (x, y) \neq (0, 0) \right\}$$

$$-1 \leq \frac{4xy}{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$-x^2 - y^2 \leq 4xy \leq x^2 + y^2$$

↓

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4xy \geq 0 \end{cases}$$

Trasformo in coordinate polari

$$\begin{cases} \rho^2 + 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq 0 \\ \rho^2 - 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (1 + 4 \cos \theta \sin \theta) \geq 0 \\ \rho^2 (1 - 4 \cos \theta \sin \theta) \geq 0 \end{cases}$$

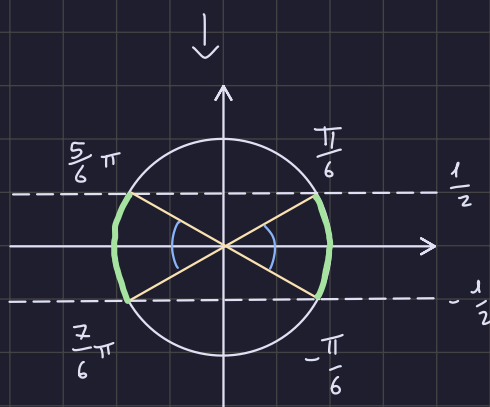
ρ^2 é sempre positivo

$$\begin{cases} 1 + 2 \sin(2\theta) \geq 0 \\ 1 - 2 \sin(2\theta) \geq 0 \end{cases}$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\begin{cases} \sin(2\theta) \geq -\frac{1}{2} \\ \sin(2\theta) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

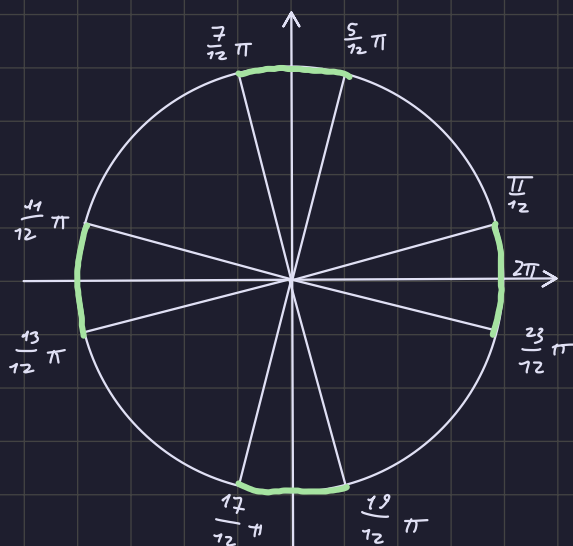
$$\rightarrow \sin(2\theta) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$



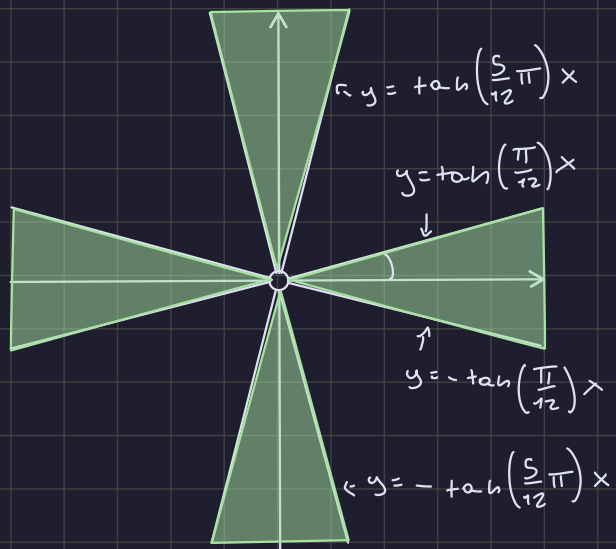
intervallo consentito

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq \theta \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



Dominio:



➡ Esercizio 3.8.2. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

a) si verifichi che non è differenziabile in $(0,1)$

b) si calcolino tutte le derivate direzionali $D_v f(0,1)$ (v vettore di \mathbb{R}^2)

$$F(x, y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1 = \left(x^2(y-1)\right)^{\frac{1}{3}} + 1 = \left(x^2y - x^2\right)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$F(0,1) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} F(x,1) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ F(0,y) = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \rightarrow \bar{\nabla} F(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{F(h,1+k) - F(0,1) - \langle \bar{\nabla} F(0,1), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k} + 1 - 1 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \xrightarrow{h=k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{2}|h|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Non esiste)}$$

$$D_v F(0,1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{t}$$

Non si può usare la formula del gradiente

$$v = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Tutti i vettori di norma 1

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t \cos \theta, 1 + t \sin \theta) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 \cos^2 \theta \cdot t \sin \theta} + 1 - 1}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 \cos^2 \theta \sin \theta}}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 \theta \sin \theta}}{1} \\
&= \sqrt[3]{\cos^2 \theta \sin \theta}
\end{aligned}$$

✎ **Esercizio 3.8.3.** Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

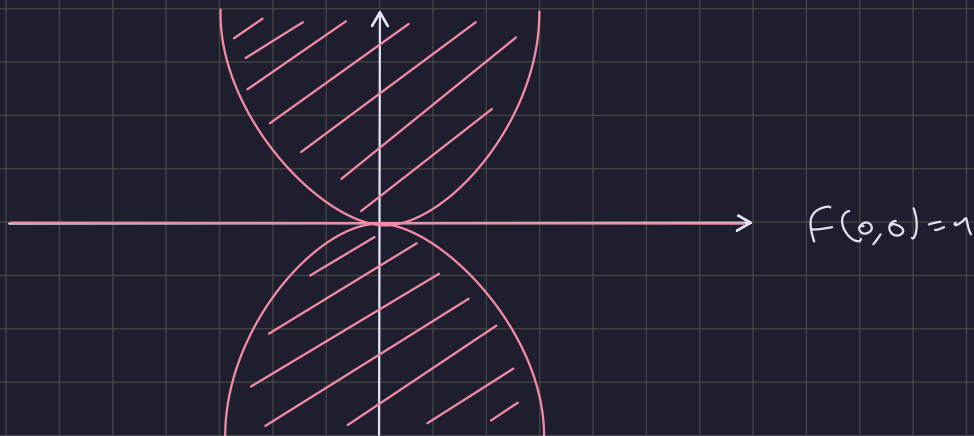
si calcoli $D_v f(0, 0) \forall v \in \mathbb{R}^2$ versore e si verifichi che

$$D_v f(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), v \rangle.$$

La funzione è differenziabile in $(0, 0)$?

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & y < -x^2 \wedge y > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

/// = 1



$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,0) = \frac{\overbrace{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - 1}^{-1}}{t} \rightarrow (t, m t) \exists t \mid |m t| > t^2?$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, m t) - 1}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x^3) = 0$$

$$\downarrow$$

Non continua

✎ **Esercizio 3.9.6.** La temperatura nel punto (x, y) in una regione del piano xy è T (misurata in gradi centigradi), dove

$$T(x, y) = x^2 e^{-y}.$$

In quale direzione aumenta più rapidamente la temperatura nel punto $(2, 1)$? Con quale rapidità aumenta T in quella direzione?

$$T(x, y) = x^2 e^{-y}$$

$$T(2, 1) = 4 e^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2x e^{-y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -x^2 e^{-y}$$

$$\nabla T(2, 1) = (4e^{-1}, -4e^{-1}) = 4e^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Direzione: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Rapidità: $4e^{-1} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 4e^{-1} \cdot \sqrt{2}$

✎ **Esercizio 3.9.3.** Data la funzione

$$f(x, y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3) \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

si determini α in modo che:

a) la direzione di massima crescita in $(0, 1)$ sia lungo la tangente alla parabola $y = (x + 1)^2$ nel verso negativo dell'asse x ;

b) il piano tangente in $(0, 1)$ sia perpendicolare alla retta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$.

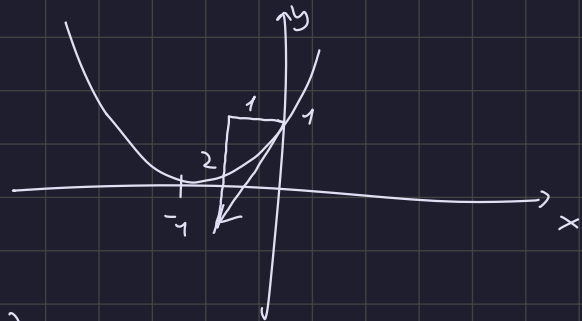
a)

$$F(x, y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3)$$

$$\frac{d}{dx} = 2x e^{x^2}(\alpha x - y^3) + \alpha e^{x^2} = e^{x^2}(\alpha + 2x(\alpha x - y^3))$$

$$\frac{d}{dy} = -3y^2 e^{x^2}$$

$$\nabla F(x, y) = e^{x^2} \begin{pmatrix} \alpha(1 + 2x^2) - 2xy^3 \\ -3y^2 \end{pmatrix}$$



$$p(x) = (x+1)^2 \rightarrow p(t) = (t, (t+1)^2)$$

$$\downarrow$$

$$p'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$$

$$p'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_T = -p'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

↑
direzione negativa asse x

$$r_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - 2t = 1 + 2x \end{cases}$$

$$t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \nabla F(0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -t = \alpha \\ -2t = -3 \end{cases} \begin{cases} \alpha = -t \\ t = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \alpha = -\frac{3}{2}$$

$t > 0$

$$b) \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{3} = z \\ \frac{x}{2} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ y - 3z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \text{Pivot} \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \rightarrow t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x \quad y \quad z = t$

$$T(x, y) = F(0, 1) + \langle \nabla F(0, 1), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= -1 + 2(x - 0) - 3(y - 1)$$

$$= 2x - 3y + 2$$

↓

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = -2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{Pivot} & t & s & \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t + \frac{s}{2} - \frac{2}{2} \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore della retta deve essere perpendicolare alla base del piano tangente della funzione in $(0,1)$

$$\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right. \\ \left. \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{6}{\alpha} + 3 = 0 \\ \frac{2}{\alpha} + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\alpha} + 1 = 0 \\ \frac{2}{\alpha} + 1 = 0 \end{cases} \quad \alpha = -2$$

Data la funzione

$$F(x, y) = \sqrt{2e^{x-2y} - 1} + \frac{x}{y}$$

- a) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)
- b) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P(2, 1, f(2, 1))$ al grafico di f

$$a) \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2e^{x-2y} - 1 \geq 0 \vee y \neq 0 \right\}$$

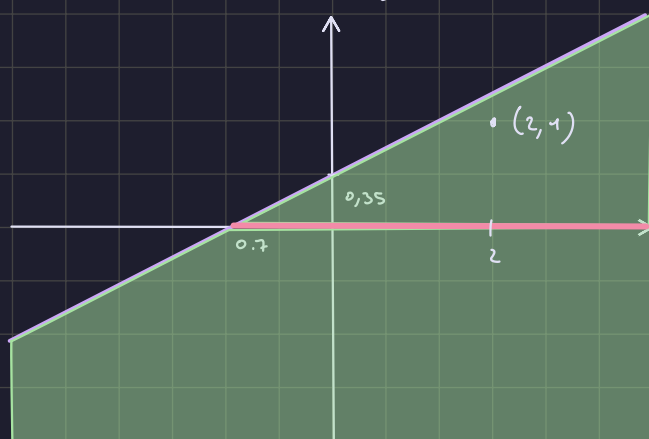
$$e^{x-2y} \geq \frac{1}{2}$$

$$x - 2y \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.693147181 \approx -0,7$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{x}{2} + 0,35 \vee y \neq 0 \right\}$$



L'insieme è illimitato, sconnesso (perché $y \neq 0$) e né aperto né chiuso

b)

$$P(2, 1, f(2, 1)) \quad F(x, y) = \sqrt{2e^{x-2y} - 1} + \frac{x}{y}$$

$$f(2, 1) = \sqrt{2e^0 - 1} + 2 = 3 \rightarrow P(2, 1, 3)$$

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{1}{2} \frac{2e^{x-2y}}{\sqrt{2e^{x-2y} - 1}} + \frac{1}{y}, \frac{1}{2} \frac{-4e^{x-2y}}{\sqrt{2e^{x-2y} - 1}} + \frac{x}{y^2} \right)$$

$$\nabla F(2, 1) = (2, -4)$$

$$T(x, y) = 3 + 2(x-2) - 4(y-1) \rightarrow z = 3 + 2x - 4 - 4y + 4$$

$$2x - 4y - z = -3$$

$$x - 2y - \frac{z}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\downarrow y=t, z=s$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + \frac{s}{2} - \frac{3}{2} \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

check

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Burato 1-03-2024 es 4

a) Data la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-2} e^{x+y}}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stabilire per quali valori reali di α f è continua in \mathbb{R}^2

b) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva parametrizzato da

$$\gamma(t) = (2t + 3, t^{\frac{3}{2}} + 1) \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} a) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{\alpha-2} \cos^{\alpha-2} \theta e^{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} &= \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{\alpha-2} \cos^{\alpha-2} \theta e^{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{\alpha-4} \cos^{\alpha-2} \theta \underbrace{e^{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}}_1 \end{aligned}$$

$$\rho \rightarrow 0 \leftarrow |f| \rightarrow 0$$

Per $\alpha \leq 4$ il limite non esiste

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{\alpha-4} |\cos^{\alpha-2} \theta| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{\alpha-4} = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{Per } \alpha > 4 \end{matrix}$$

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x} \ln(x^2 - y^2 - 1) - \pi$$

a) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)

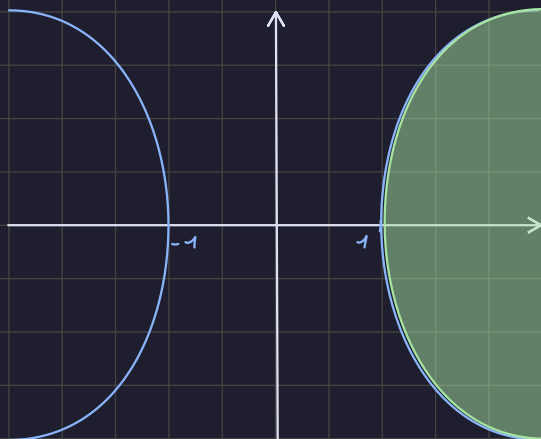
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge x^2 - y^2 - 1 > 0\}$$

$$x^2 - y^2 > 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$[0^2 - 0^2 > 1] \times$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$



Trovare una parametrizzazione per l'ellisse di equazione

$$g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$$

Se (x_0, y_0) è un punto dell'ellisse, quale proprietà ha il vettore $\nabla g(x_0, y_0)$?

$$\text{Ellisse: } \left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{b}\right)^2 = 1$$

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$4(x-1)^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4$$

$$(2(x-1))^2 + (y-2)^2 = 4 \quad (\text{cerchio})$$

$$\begin{cases} 2(x-1) = t \\ y-2 = s \end{cases}$$

$$t^2 + s^2 = 4$$

$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ Param del cerchio

$$\begin{cases} 2(x-1) = 2\cos\theta \\ y-2 = 2\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta + 2 \end{cases}$$

