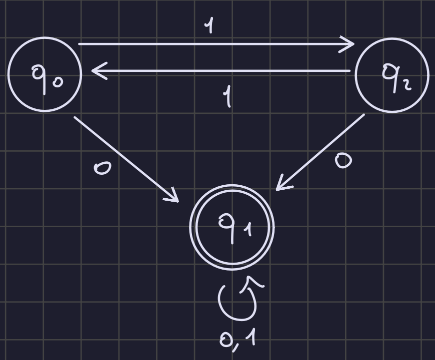
Esercizio 1.1 (Automa e dimostrazione). *Si determini il linguaggio accettato dall'automa rappresentato mediante la seguente matrice di transizione dove* $\mathsf{F} = \{q_1\}$.

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_1	q_0



Esempi

$001 \in L$

$1101 \in L$

$111 \notin L$

$$L = \{\sigma \in \{0,1\}^* \mid \sigma \text{ contiene almeno uno } 0\}$$

Per dimostrare che questo è un linguaggio regolare bisogna dimostrare:

$$L = L(M) \iff \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostriamo:

$$L = L(M) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \in F$$

$$L = L(M) \Leftarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F \quad \equiv \quad L \neq L(M) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in \{q_0, q_1\} \notin F$$

Caso base

$|\sigma| = 0$: $\quad \sigma = \varepsilon \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \notin F$

$|\sigma| = 1$: $\quad \sigma = 1 \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \notin F$

$\quad \sigma = 0 \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \in F$

Passo induttivo

Supponiamo che la tesi valga per: $\forall \sigma \in \{0,1\}^*. \ |\sigma| \leq n$

Dimostriamo che vale anche per $\forall \sigma \in \{0,1\}^*. \ |\sigma| = n+1$

$\sigma \in \{0,1\}^*. \ |\sigma| \leq n$

se $\sigma \in L$

- $\sigma' = \sigma 0 \to \sigma = 0^+ \overset{II}{\to} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 0) = \delta(q_1, 0) = q_1 \in F \to \sigma' \in L$
- $\sigma' = \sigma 1 \to \sigma = 0^+ \overset{II}{\to} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1 \in F \to \sigma' \in L$

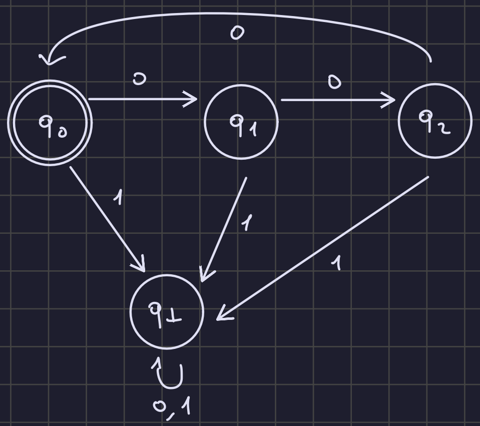
Se $\sigma \notin L$

- $\sigma' = \sigma 0 \overset{II}{\rightarrow} \sigma = 1^* \overset{IF}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 0) = \delta(\{q_0, q_2\}, 0) = q_1 \in F \rightarrow \sigma' \in L$
- $\sigma' = \sigma 1 \overset{II}{\rightarrow} \sigma = 1^*$
  - se $|\sigma|$ é dispari $\overset{IF}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_2, 1) = q_0 \notin F \rightarrow \sigma' \notin L$
  - se $|\sigma|$ é pari $\overset{IF}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma') = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma), 1) = \delta(q_0, 1) = q_2 \notin F \rightarrow \sigma' \notin L$

Abbiamo dimostrato che L = L(M) e quindi che il linguaggio è regolare $\square$

Esercizio 1.2 (Automa e dimostrazione). *Si dimostri che il linguaggio* L *è regolare*

$$L = \{ 0^{3n} \mid n \geq 0 \}, \ \Sigma = \{0, 1\}$$



Esempi

$000 \in L$

$0000 \notin L$

$0 \notin L$

$1000 \notin L$

$\varepsilon \in L$

Per dimostrare che il linguaggio è regolare bisogna mostrare che L = L(M)

$$\sigma \in L \leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

Dimostriamo

$$\sigma \in L \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \in F$$

$$\sigma \notin L \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in \{q_1, q_2, q_\perp\} \notin F$$

Caso base

$|\sigma| = 1$

- $\sigma = 0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F$
- $\sigma = 1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(q_0, 1) = q_\perp \notin F$

$|\sigma| = 2$

- $\sigma = 00 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \notin F$
- $\sigma = 01 \vee \sigma = 10 \vee \sigma = 11 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_\perp \notin F$

$|\sigma| = 3$

- $\sigma = 000 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \in F$
- altrimenti $\rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \notin F$

Passo induttivo

Supponiamo che la tesi valga per $|\sigma| \leq n$ dimostriamo che vale anche per $|\sigma| = n+1$

$\sigma = \sigma' v$ dove $|\sigma'| = n$

$\sigma \in L \rightarrow \sigma' = 0^{3i-1} \notin L$

- $\sigma = \sigma' 0 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_2, 0) = q_0 \in F \in L$

$\sigma \notin L \vee \sigma' \in L \rightarrow \sigma' = (0^3)^+$

- $\sigma = \sigma' 1 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1 \notin F \notin L$
- $\sigma = \sigma' 0 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F \notin L$

$\sigma \notin L \vee \sigma' \notin L \rightarrow \sigma' = 0^{3i}$

- $\sigma = \sigma' 0 \overset{II}{\rightarrow} \hat{\delta}(q_0, \sigma) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1 \notin F \notin L$

Abbiamo dimostrato che $L = L(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$, cioè che il linguaggio è regolare $\square$