

Analisi 1

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Numeri reali	2
1.2	Maggiorante	2
1.3	Minorante	2
1.4	Estremo superiore	3
1.5	Estremo inferiore	3
1.6	Massimo	3
1.7	Minimo	4
1.8	Funzioni	4
1.8.1	Dominio di una funzione	4
2	Limiti	5
2.1	Esempi	7
2.2	Osservazioni	9
2.3	Risultati utili per il calcolo dei limiti	10
2.4	Forme indeterminate	11
2.5	Esempi di calcolo di limiti	11
2.6	Limiti razionali	12
2.7	Limiti delle funzioni monotone	12
2.8	Teorema dei carabinieri	15
2.8.1	Variante	16
2.9	Limiti per $x \rightarrow -\infty$	17
2.10	Limiti per $x \rightarrow x_0$	17
2.11	Limiti unilateri	19
2.12	Limiti di funzioni continue	20
3	Notazione o piccolo di Landau	24
3.1	Proprietà	25
3.2	Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$	26
3.3	Funzioni continue	27
3.4	Teorema di Weiestrass	27
3.4.1	Osservazioni	28
3.4.2	Esempi	29
3.5	Teorema degli zeri	31
3.5.1	Esempi	31
4	Derivate	33
4.0.1	Osservazioni	33
4.1	Proprietà delle funzioni differenziabili	35
4.2	Teorema di Fermat	37
4.2.1	Dimostrazione	37
4.3	Teorema di Lagrange	38
4.4	Dimostrazione	39
4.4.1	Dimostrazione del corollario	40

1 Introduzione

1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazionali; questo insieme viene indicato con il simbolo \mathbb{R}

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- **1^a proprietà (Eudosso-Archimede):** due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

Assioma: dati due numeri reali positivi a, b con $0 < a < b$ esiste un intero n tale che $na > b$.

- **2^a proprietà (Intervalli inscatolati):** date due serie di grandezze: a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n : la prima crescente (numeri della famiglia a) e la seconda decrescente (numeri della famiglia b), in cui ogni a_k è minore di b_k e tali che per ogni altra grandezza d si ha $b_k - a_k < c$ per qualche k , allora esiste una grandezza c tale che per ogni k $a_k \leq c \leq b_k$.

1.2 Maggiorante

Definizione 1.1

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \geq x$.

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'intervallo tendesse verso $+\infty$ non si sarebbe alcun maggiorante poichè $+\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$: tutti i maggioranti sono quelli per $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha maggiorante

1.3 Minorante

Definizione 1.2

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme S se per ogni $x \in S$ si ha che $y \leq x$.

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso $-\infty$ non ci sarebbe alcun minorante poichè $-\infty$ non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$: tutti i minoranti sono quelli per $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: non ha minorante

1.4 Estremo superiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato superiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo superiore di S se:

- y è un maggiorante di S
- y è il più piccolo maggiorante di S

Se S è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di S è $\sup(S) = +\infty$. Esempi:

- $I = (1, 10]$: $\sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$: $\sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$, S è un insieme limitato inferiormente con $y \in \mathbb{R}$ estremo inferiore di S se:

- y è un minorante di S
- y è il più grande minorante di S

Se S è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di S è $\inf(S) = -\infty$. Esempi:

- $I = [1, 8)$: $\inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$: $\inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

1.6 Massimo

Definizione 1.3

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il massimo di S se y è l'estremo superiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con $\max(S) = y$.

1.7 Minimo

Definizione 1.4

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme reale, dove $y \in \mathbb{R}$ è il minimo di S se y è l'estremo inferiore di S e se $y \in S$.

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con $\text{Min}(S) = y$.

Teorema 1 Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.

1.8 Funzioni

Definizione 1.5

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:

$$f : A \rightarrow B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di A è associato uno e uno solo elemento di B .

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } f : A \rightarrow B$$

Esempio di funzione corretta:

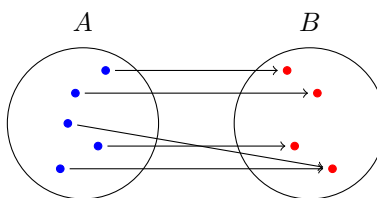


Figura 1: Esempio di funzione corretta

1.8.1 Dominio di una funzione

Definizione 1.6

Dato un insieme di partenza A gli elementi ai quali è applicata la funzione f sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \rightarrow x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ il cui dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per $x \rightarrow +\infty$)

Definizione 2.1

Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A^a,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow L$ per $x \rightarrow +\infty$)

La condizione deve essere soddisfatta per ogni ϵ .

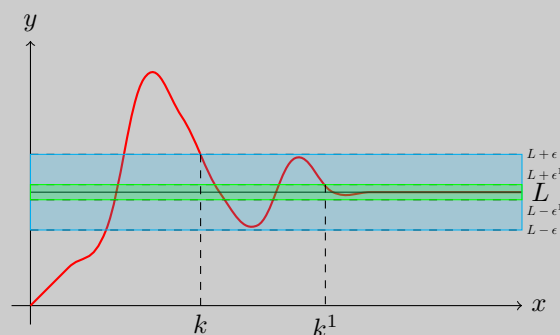


Figura 2: Definizione di limite

Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di L e non uscirne più. Questo vale per ogni ϵ , quindi anche per ϵ^1 .

^aIl dominio della funzione

Definizione 2.2

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$)

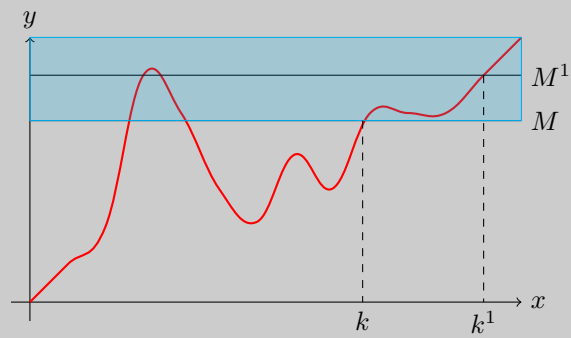


Figura 3: Definizione di limite a $+\infty$

Definizione 2.3

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa: $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$)

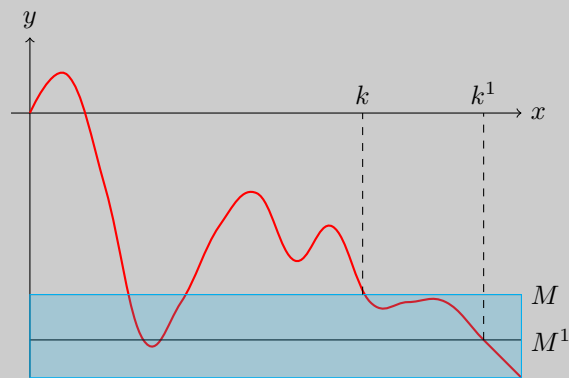


Figura 4: Definizione di limite a $-\infty$

2.1 Esempi

Esempio 2.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Dominio} = \mathbb{R}/\{0\}$$

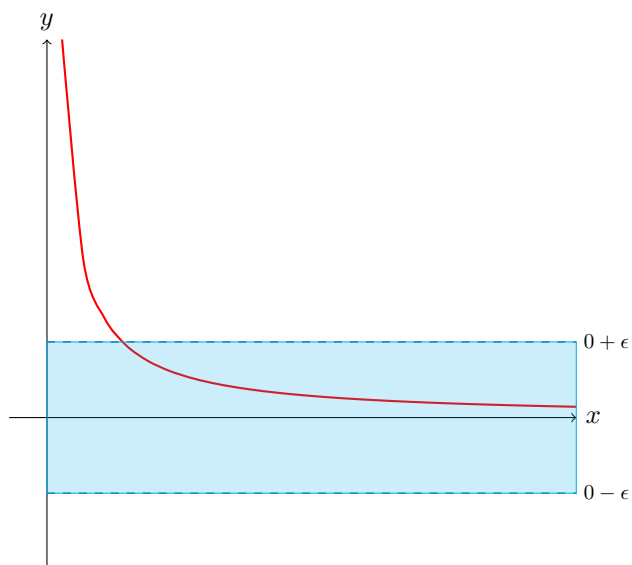


Figura 5: Esempio di limite

*Sia dato $\epsilon > 0$ arbitrario. Definisco $k := \frac{1}{\epsilon}$.
Sia dato $x > 0$ arbitrario, supponiamo $x \geq k$. Allora*

$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con $L = 0$).

Esempio 2.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

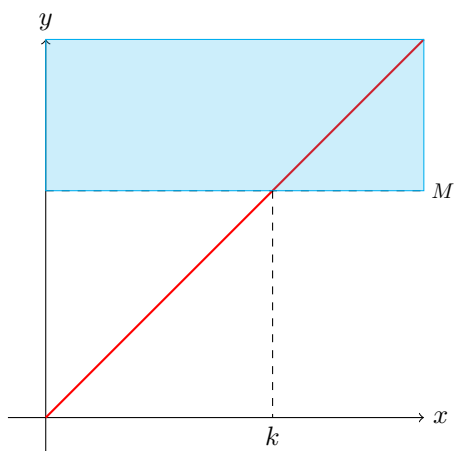


Figura 6: Esempio di limite a $+\infty$

*Sia dato $M > 0$ arbitrario. Definisco $k := M$.
Sia dato $x \geq k$. Allora $x \geq M$.
Quindi è verificata la definizione di limite.*

2.2 Osservazioni

Non è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$

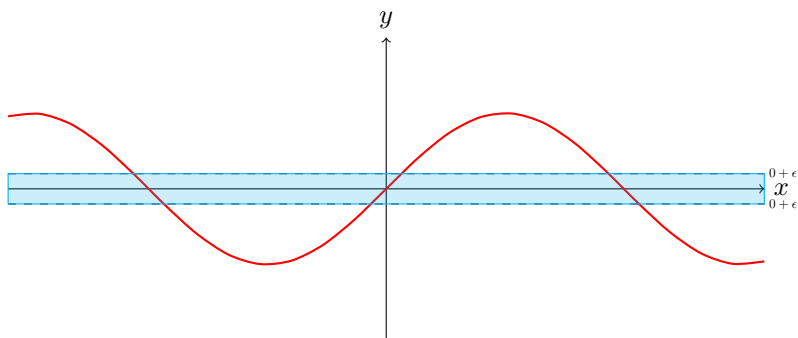


Figura 7: Esempio di limite non esistente

La funzione non entra in un intervallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.

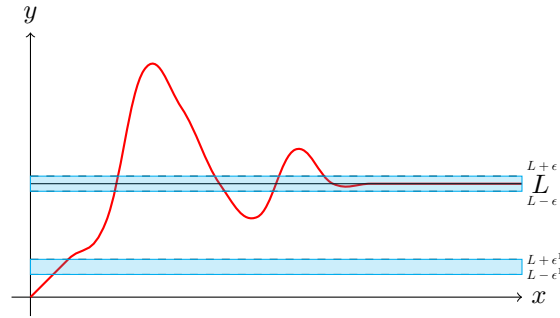


Figura 8: Esempio di limite non esistente

Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

Teorema 2 (Algebra dei limiti) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente, f e g due funzioni. $A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che i limiti

$$F := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

esistano e siano **finiti**. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende **parzialmente** nel caso F o G siano infiniti, secondo le regole seguenti:

- $F + \infty = +\infty$, $F - \infty = -\infty$ $\forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty$, $+\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty$, $\forall F \in \mathbb{R}$, $F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0$ $\forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty$ $\forall F \in \mathbb{R}$, $F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di ∞ è da determinare secondo la regola usuale.

2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succedere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

N.B.: in questo contesto, 0, ∞ e 1 sono da intendersi come abbreviazioni.

2.5 Esempi di calcolo di limiti

Esempio 2.3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$
$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \rightarrow +\infty$$

Per $x \rightarrow +\infty$ (per il teorema dell'algebra dei limiti)

Esempio 2.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x^3}_{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_0 - 1 \right) \rightarrow -\infty$$

Per $x \rightarrow +\infty$

Esempio 2.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$
$$\underbrace{x}_{+\infty} \left(\underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4 \right) \rightarrow +\infty$$

2.6 Limiti razionali

Se P è un polinomio di grado p e Q è un polinomio di grado q , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > q \\ 0 & \text{se } p < q \\ \text{coefficiente dominante di } P & \text{se } p = q \\ \text{coefficiente dominante di } Q & \text{se } p = q \end{cases}$$

2.7 Limiti delle funzioni monotone

Teorema 3 (di monotonia) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona¹. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ esiste e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce (nondecrecente)} \\ \inf\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ decresce (noncrescente)} \end{cases}$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

f è strettamente crescente e limitata (l'immagine di f è un insieme limitato).

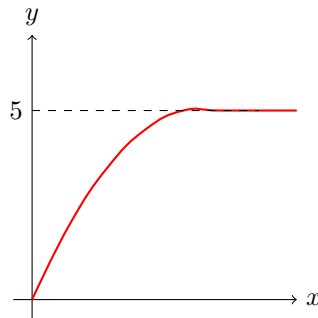


Figura 9: Esempio di funzione monotona

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e non limitata

¹Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

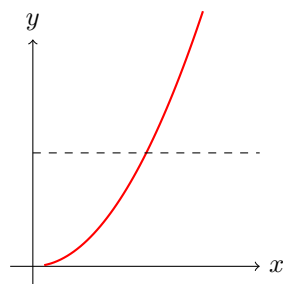


Figura 10: Esempio di funzione monotona non limitata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

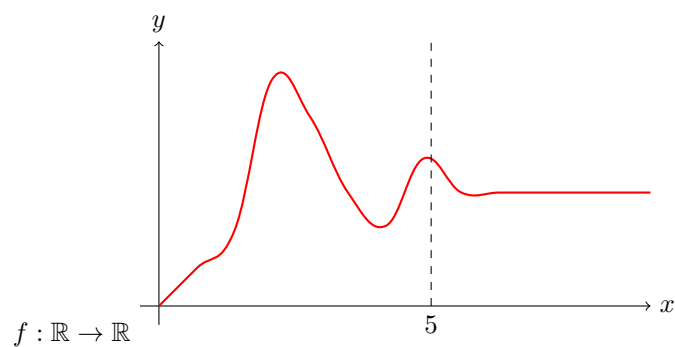


Figura 11: Esempio di funzione ristrettamente monotona

Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede per $x > 5$ si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da $x = 5$.

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Esempio 2.6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

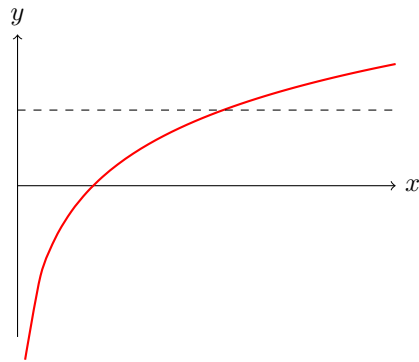


Figura 12: Esempio di funzione monotona non limitata

Per il teorema di monotonia:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) &= \sup\{\log(x) : x > 0\} \\
 &\geq \sup\{\log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \text{ scelto arbitrariamente} \\
 &= \sup\{n \cdot \log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty
 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a $+\infty$.

Esercizio 2.1

Dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

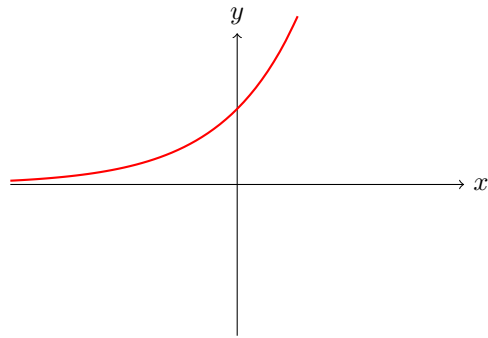


Figura 13: Esempio di funzione monotona non limitata

E similmente che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

2.8 Teorema dei carabinieri

Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$$

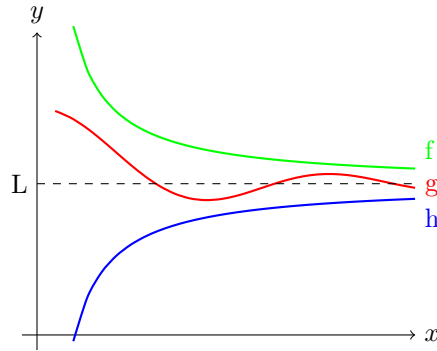


Figura 14: Teorema del confronto tra i limiti

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$$

Prendiamo dunque $\epsilon > 0$ arbitrario. Poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, sappiamo che esiste $k_f > 0$ t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_f \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

Allo stesso modo, poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$, sappiamo che esiste $k_h > 0$ t.c.

$$\forall x \in A, \quad x \geq k_h \rightarrow L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

Definiamo $k := \max\{k_f, k_h\}$. Comunque preso $x \in A$, se $x \geq k$ allora vale che

$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

2.8.1 Variante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

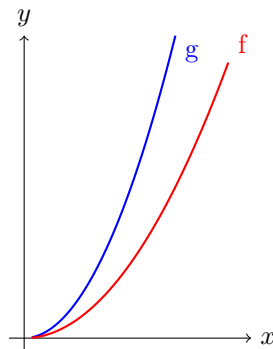


Figura 15: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni positive

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

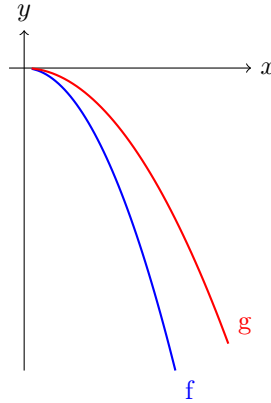


Figura 16: Teorema del confronto tra i limiti con 2 funzioni negative

2.9 Limiti per $x \rightarrow -\infty$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non limitato inferiormente, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Diremo che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-t) = L$$

$$x = -t$$

$$\text{se } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{allora } t \rightarrow +\infty$$

2.10 Limiti per $x \rightarrow x_0$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Per definire il limite di f quando $x \rightarrow x_0$, serve che f sia definita "vicino a x_0 ", in un senso opportuno. Noi supporremo, ad esempio, che il dominio A contenga almeno un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ oppure $(x_0, x_0 + \delta)$, con $\delta > 0$. **Non** è richiesto, invece, che f sia definita in x_0 .

Esempio 2.7

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

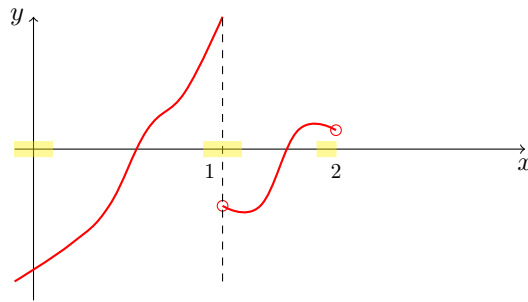


Figura 17: Limiti su una funzione non continua

Posso definire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Non è detto però che tali limiti esistano

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A, \\ x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0 \\ \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon \end{aligned}$$

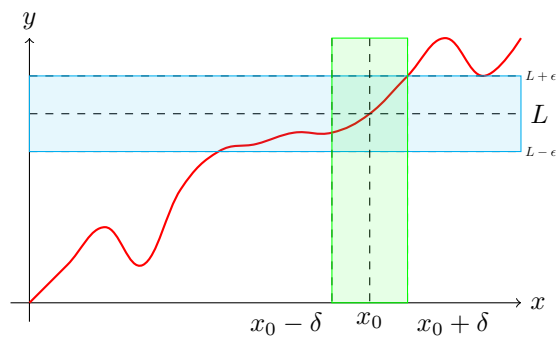


Figura 18: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \geq M$$

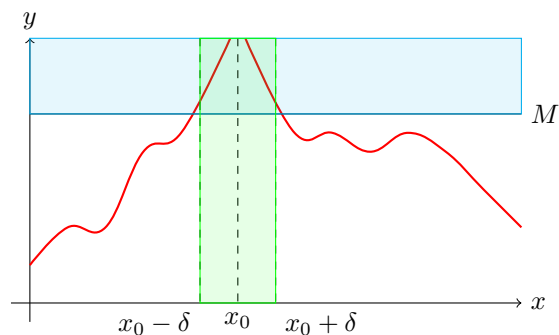


Figura 19: Limite a x_0

Sotto le ipotesi precedenti su $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e su $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $L \in \mathbb{R}$ diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

se e solo se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0$$

$$f(x) \leq M$$

2.11 Limiti unilateri

Si possono anche dare le definizioni di limiti **unilateri**, da destra o da sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Esempio 2.8

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

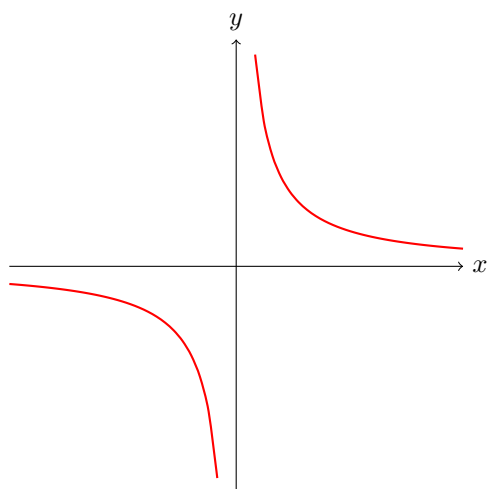


Figura 20: Limiti unilateri

2.12 Limiti di funzioni continue

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo oppure un'unione finita di intervalli.

Definizione 2.4

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diremo che f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è continua se e solo se f è continua in ogni punto del suo dominio $x_0 \in A$.

Esempio 2.9

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua, perchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

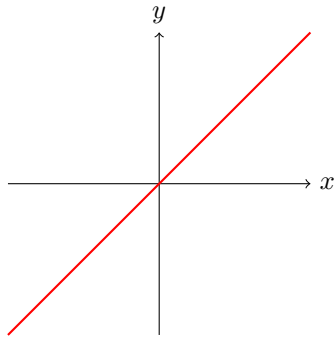


Figura 21: Esempio di funzione continua

Esempio 2.10

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \neq 2 \\ 31 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Non è continua perchè

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2)$$

Però f è continua in tutti gli $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = x_0$$

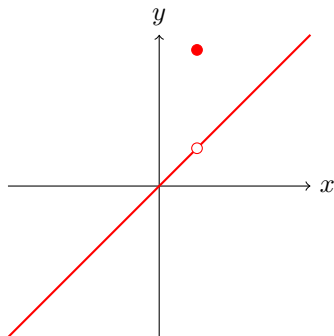


Figura 22: Esempio di funzione non continua

Esempio 2.11

$$h : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

Il dominio è un'unione di 2 intervalli:

$$(\mathbb{R}/0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

È una funzione continua



Figura 23: Esempio di funzione continua

Esempio 2.12

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione non è continua perché il limite a 0 non esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = \nexists$$

ma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |l(x)| = +\infty$$



Figura 24: Esempio di funzione non continua

Esempio 2.13

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Non è continua perchè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \neq m(0)$$

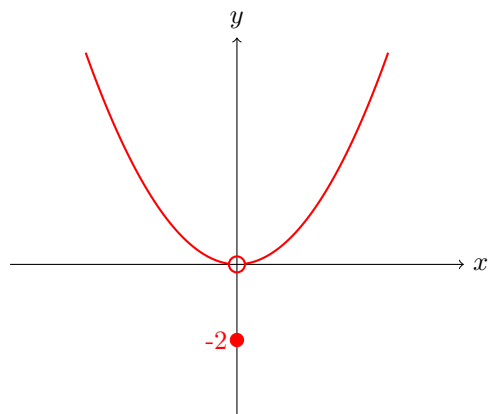


Figura 25: Esempio di funzione non continua

3 Notazione o piccolo di Landau

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (F.I. \frac{0}{0})$$

Considero $x > 0$

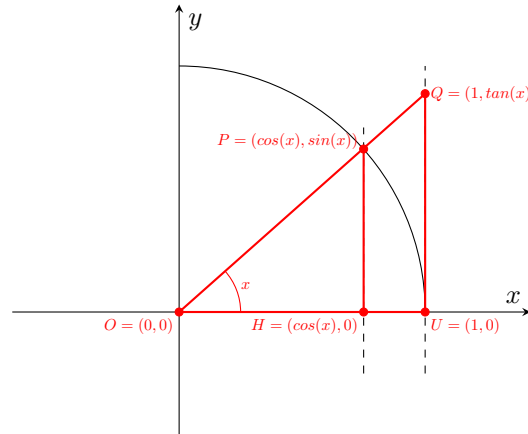


Figura 26: Grafico

Area del triangolo OHP :

- \leq area del settore OUP
- \leq area del triangolo OUQ

Area di $OHP = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$

Area di $OUQ = \frac{1}{2} \tan(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Area di OUP : area del disco unitario = ampiezza dell'angolo $P\hat{O}U$: ampiezza dell'angolo giro

da cui:

$$Area\ di\ OUP = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{1}{2}x$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Moltiplico per $\frac{2}{\sin(x)}$ (assumendo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$, così che $\sin(x) > 0$):

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

da cui:

$$\underbrace{\cos(x)}_1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_1$$

per $x \rightarrow 0^+$

Per il teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Il caso $x \rightarrow 0^-$ è analogo. \square

Se definiamo:

$$q(x) := \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

posso concludere che:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 + q(x) \Leftrightarrow \sin(x) = x + xq(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = 0$$

Definizione 3.1

Notazione o piccolo di Landau.

Diremo che:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se e solo se esiste una funzione q tale che:

$$f(x) = g(x)q(x) \quad (\forall x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = 0$$

Ad esempio, possiamo dire che:

$$\sin(x) = x + \underbrace{o(x)}_{g(x)q(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

3.1 Proprietà

1. $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
2. $o(g(x)) = g(x)o(1)$ per $x \rightarrow x_0$
3. $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Infatti,

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

e quindi

$$o(g(x)) + o(g(x)) = g(x) \underbrace{(q_1(x) + q_2(x))}_{0 \text{ per } x \rightarrow x_0} = o(g(x))$$

4. Se $k \in \mathbb{R}$ è una costante,

$$ko(g(x)) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

5. $f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

6. In generale, **non** vale

$$o(g(x)) - o(g(x)) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Infatti,

$$o(g(x)) - o(g(x)) = g(x)q_1(x) - g(x)q_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q_2(x) = 0$$

ma **non** è detto che $q_1(x) = q_2(x)$.

(Però è vero che $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$)

7. Allo stesso modo, **non** è detto che

$$\frac{o(g(x))}{o(g(x))} = 1 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(forma indeterminata)

È molto importante specificare $x \rightarrow x_0$.

Ad esempio:

Esempio 3.1

$$\begin{aligned} x^2 &= o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ x &= o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

3.2 Sviluppi di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$ costante)
- $\sin(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

3.3 Funzioni continue

Proprietà:

1. Se $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora sono continue anche

$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$

(quest'ultima definita su $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$)

2. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che $f(A) \subseteq B$, allora è continua anche la funzione composta

$$g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Esempio 3.2

Sono funzioni continue:

- tutti i polinomi
- tutte le funzioni razionali (quozienti di polinomi)
- $x \rightarrow x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ costante, laddove ben definito
- $\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \dots$
- valore assoluto, $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- funzioni composte, ad esempio:

$$h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) := \sin(x^3 + 5x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_2 : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(x) := \log(x^2 - 4) \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

3.4 Teorema di Weierstrass

Definizione 3.2

Teorema di Weierstrass

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora esistono

$$x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in [a, b]$$

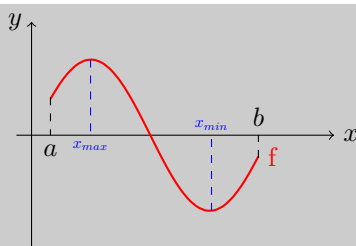


Figura 27: Teorema di Weiestrass

Ogni funzione continua, avrà quindi un punto di minimo e un punto di massimo

3.4.1 Osservazioni

- In particolare, f è limitata
- I punti x_{min}, x_{max} si dicono punti di minimo e di massimo **globali** di f
- I punti di minimo e massimo globali possono essere non unici e coincidere con gli estremi a, b dell'intervallo

Esempio 3.3

$$\cos : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

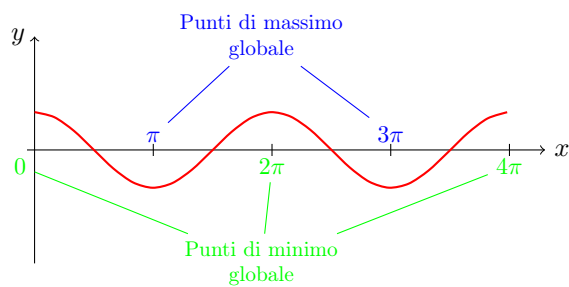


Figura 28: Teorema di Weiestrass

Se vengono meno le ipotesi del teorema, può venir meno la conclusione.

3.4.2 Esempi

Esempio 3.4

$$f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := x \quad \forall x \in (0, 1)$$

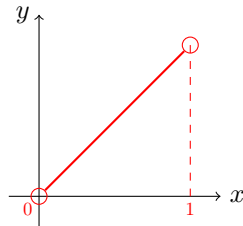


Figura 29: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma per come è definita **non** ammette nè massimo nè minimo perchè il **dominio non è chiuso**.*

Esempio 3.5

$$f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := x \sin(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

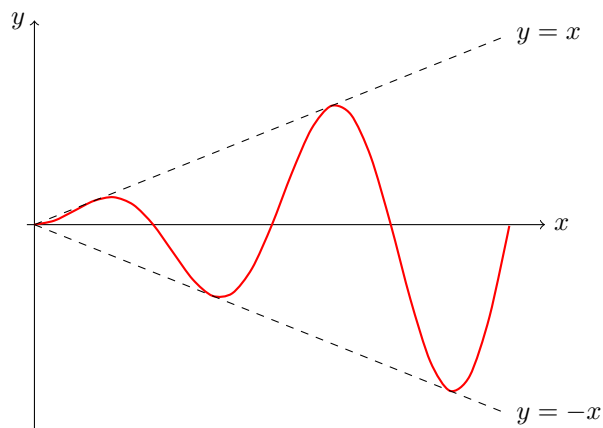


Figura 30: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma **non** possiede nè punti di massimo, nè punti di minimo perchè la funzione ha ampiezza sempre crescente.*

Esempio 3.6

$$f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_3(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

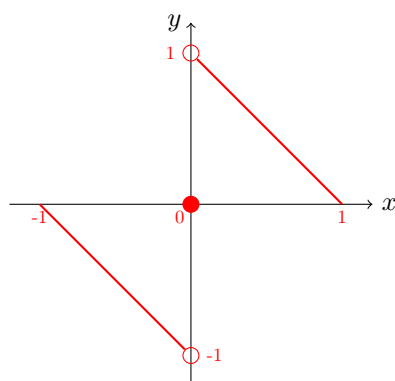


Figura 31: Esempio di funzione non continua

*Questa funzione **non** ammette punti di massimo e di minimo perchè non è continua.*

3.5 Teorema degli zeri

Definizione 3.3

Teorema degli zeri (o di Bolzano)

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

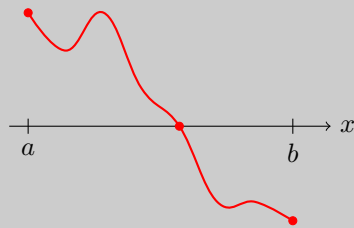


Figura 32: Teorema degli zeri

Se vengono meno le ipotesi, può venir meno la conclusione.

3.5.1 Esempi

Esempio 3.7

$$g_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

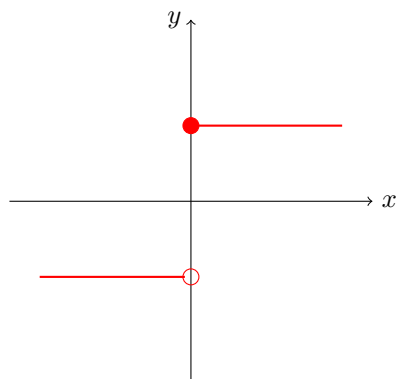


Figura 33: Esempio di funzione non continua

Questa funzione non è continua, quindi non si applica il teorema.

Esempio 3.8

$$g_2 : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2(x) := \frac{1}{x} \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

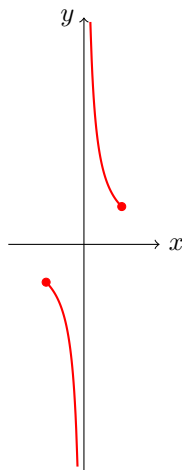


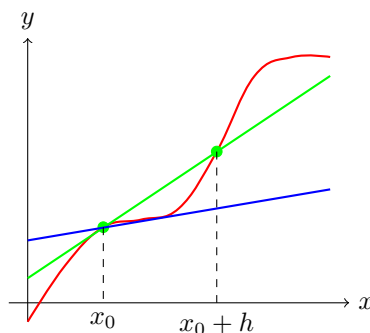
Figura 34: Esempio di funzione continua

*Questa funzione è continua, ma non si annulla mai perchè il dominio della funzione **non è un intervallo**, ma un intervallo privato di un valore, quindi non si applica il teorema.*

4 Derivate

Sia A un intervallo aperto (del tipo $A = (a, b)$ oppure $A = (a, +\infty)$, $A = (-\infty, a)$, $A = \mathbb{R}$), oppure un'unione di intervalli aperti.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. **Retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$?



Preso $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, il coefficiente angolare (pendenza) della retta secante il grafico nei punti $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 4.1

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** (o **derivabile**) in $x_0 \in A$ se e solo se esiste ed è finito il limite:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite è detto **derivata** di f in x_0 . f si dice **differenziabile** (o **derivabile**) se e solo se è differenziabile in ogni punto del suo dominio.

4.0.1 Osservazioni

1. La retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è definita come l'unica retta di pendenza $f'(x_0)$ passante per $(x_0, f(x_0))$. Essa ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. f è differenziabile in x_0 se e solo se vale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

che equivale a dire:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Quindi, f è differenziabile in x_0 se e solo se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

il che equivale (posto $x = x_0 + h$) a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Esempio 4.1

$$f = e^x, \quad x_0 = 0$$

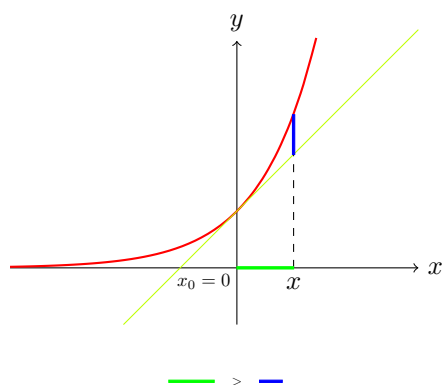


Figura 35: Esempio di funzione continua

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

dunque

$$e^{x_0} = 1$$

Che sarebbe il coefficiente di x nell'equazione $e^x = 1 + x + o(x)$

Si può anche scrivere (Notazione di Leibnitz):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Esempio 4.2

Una funzione costante è differenziabile con derivata

$$(5')(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 5}{h} = 0$$

4.1 Proprietà delle funzioni differenziabili

Dove non specificato, supporremo sempre che il dominio A sia un intervallo aperto o un'unione di intervalli aperti.

Proprietà: Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0) \square$$

Non vale il viceversa: f può essere continua senza essere differenziabile.

Esempio 4.3

$$f(x) := |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

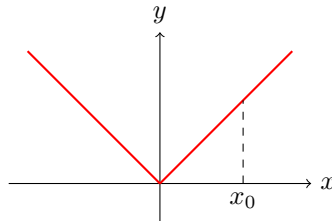


Figura 36: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Le derivate destra e sinistra in $x_0 = 0$ esistono e sono entrambe finite, ma sono **diverse** tra loro: f ha un **punto angoloso** in $x_0 = 0$.

Esempio 4.4

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

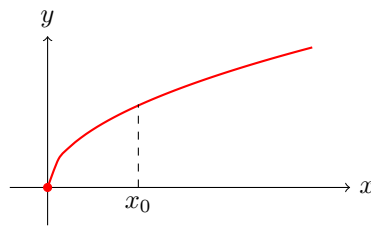


Figura 37: Esempio di funzione continua e non differenziabile

Il limite (destro, in questo caso) del rapporto incrementale esiste, ma è infinito: g ha una **cuspid** o **punto a tangente verticale** in $x_0 = 0$.

Definizione 4.2

Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ locale di una funzione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$ per ogni:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

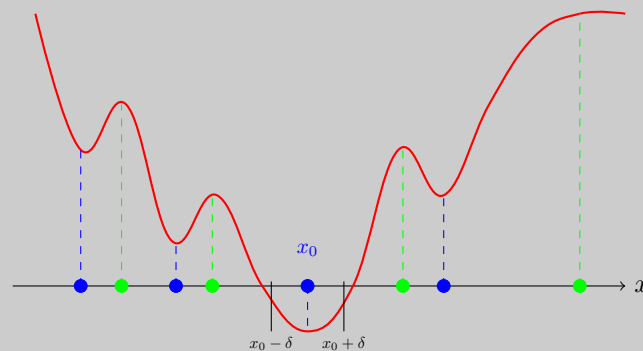


Figura 38: Teorema degli zeri

*I punti di massimo o minimo locale si chiamano anche **estremi locali**.*

4.2 Teorema di Fermat

Teorema 5 (di Fermat) Sia $x_0 \in A$ un estremo locale di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è differenziabile in x_0 e se x_0 è **interno** ad A (cioè, f è definita in un intorno di x_0), allora:

$$f'(x_0) = 0$$

(I punti dove $f'(x_0) = 0$ si dicono **punti critici di f**)

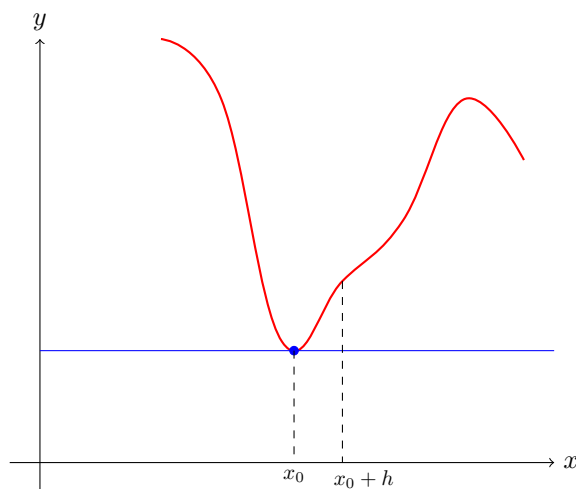


Figura 39: Teorema di Fermat

4.2.1 Dimostrazione

Supponiamo ad esempio x_0 minimo locale di f . Prendo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Se $|h|$ è abbastanza piccolo,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{perchè } x_0 \text{ è minimo locale}$$

Se $h > 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Se $h < 0$:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \leq 0$$

Poichè f è differenziabile in x_0 , so che esistono:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e i due limiti sono uguali tra loro e uguali a $f'(x_0)$. L'unica possibilità $f'(x_0) = 0$

4.3 Teorema di Lagrange

Definizione 4.3

Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e differenziabile in (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

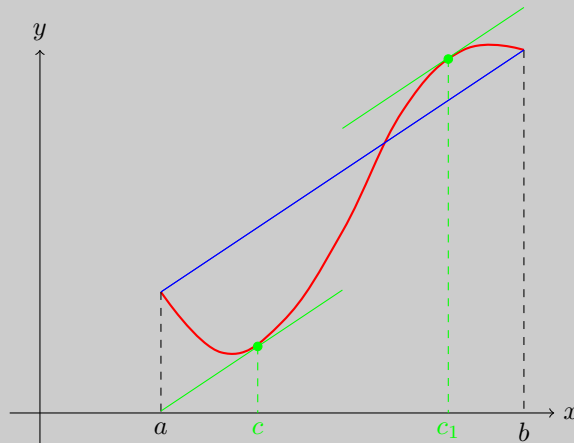


Figura 40: Teorema di Lagrange

Corollario: Sia I un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile se:

$$\begin{cases} f' = 0 \\ f' \geq 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di I , allora f è:

$$\begin{cases} \text{costante} \\ \text{non decrescente} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{non crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Qui è importante assumere che il dominio sia un intervallo

Esempio 4.5

$$f : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

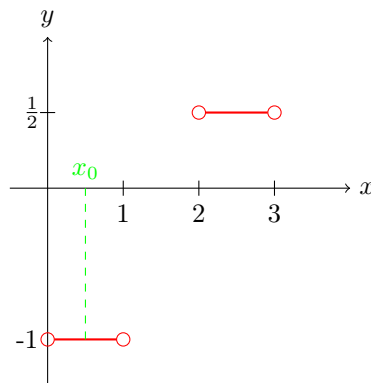


Figura 41: Teorema di Lagrange

f è differenziabile e ha $f' = 0$ ovunque, ma non è costante (il dominio non è un intervallo).

4.4 Dimostrazione

1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, differenziabile in (a, b) , tale che $f(a) = f(b)$.
Devo dimostrare che esiste

$$c \in (a, b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

Per il teorema di Weierstrass, f possiede un punto di massimo x_{max} e un punto di minimo x_{min} globali.

Se $x_{min} \in (a, b)$, allora scelgo $c := x_{min}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

Se $x_{max} \in (a, b)$, allora scelgo $c := x_{max}$ e per il teorema di Fermat, so che $f'(c) = 0$.

Altrimenti, ho $\{x_{max}, x_{min}\} = \{a, b\}$. Grazie all'ipotesi $f(a) = f(b)$, posso allora dedurre che f è costante, dunque $f' = 0$ in tutto $[a, b]$.

2. **Caso generale:** Definisco $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)}_{\text{Equazione della corda AB}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora g è continua, g è differenziabile, in (a, b) ,

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Dunque, per quanto dimostrato nel passo precedente, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$g'(c) = 0$$

perchè:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4.4.1 Dimostrazione del corollario

Prendo $a \in I, b \in I$ qualsiasi; devo dimostrare che $f(a) = f(b)$. Se $a = b$, non c'è nulla da dimostrare. Suppongo ad esempio $a < b$ (se no li scambio). Allora f è definita su tutto $[a, b]$ (perchè I è un intervallo, dunque $[a, b] \subseteq I$). Inoltre $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (differenziabile \Rightarrow continua), differenziabile in (a, b) e quindi, per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma, per ipotesi, $f'(c) = 0$, da cioè $f(b) - f(a) = 0$, cioè $f(b) = f(a)$.