Esame 10/7/2023

PARTE 1

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 e^{-y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio **intervallo** su cui tale soluzione è definita.

$$y' = \frac{x^2 e^{-y^2}}{y}$$

$$y y' = \frac{x^2}{e^{y^2}}$$

$$e^{y^2} y y' = x^2$$

$$\int e^{y^2} y y' dy = \int x^2 dx \qquad e^{y^2} = u$$

$$du = e^{y^2} \cdot 2y \, dy$$

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{2} e^{y^2} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$e^{y^2} = \frac{2}{3}x^3 + 2c$$

$$y^2 = \ln\left(\frac{2}{3}x^3 + 2c\right)$$

$$y = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}x^3 + 2c\right)}$$

$$y(0) = 1$$

$$\downarrow$$

$$1 = \sqrt{\ln(0 + 2c)}$$

$$\ln(2c) = 1$$

$$2c = e$$

$$c = \frac{e}{2}$$

$$y(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}x^3 + e\right)}$$

$$y(0) = \sqrt{\ln(e)}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1 \quad \checkmark$$

La soluzione é $y(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}x^3 + e\right)}$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x^3 + e > 0 \\ \ln\left(\frac{2}{3}x^3 + e\right) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 > -\frac{3}{2}e \\ \frac{2}{3}x^3 + e > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \sqrt[3]{-\frac{3}{2}e} \\ x > \sqrt[3]{\frac{3}{2}(1-e)} \end{cases}$$

$\downarrow$

L'intervallo più grande é $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}(1-e)}, +\infty\right)$

Esercizio 2 (punti: ....../4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (t-1)^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$$s^2 - 2s + 1 = 0$$
$$(s-1)(s-1) = 0$$
$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1$$

$$z = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

Per il metodo della somiglianza trovo un'ansatz

$$\bar{y} = a + bt + ct^2$$
$$\bar{y}' = b + 2ct$$
$$\bar{y}'' = 2c$$

Sostituisco nell'equazione originale e trovo le incognite

$$2c - 2b - 4ct + a + bt + ct^2 = (t-1)^2$$
$$t^2(c) + t(b - 4c) + (2c - 2b + a) = t^2 + 1 - 2t$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b - 4c = -2 \\ 2c - 2b + a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ -2 + a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$\bar{y} = 3 + 2t + t^2$$

$$y(t) = z + \bar{y} = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + 3 + 2t + t^2$$

$$y'(t) = C_1 e^{t} + C_2 (e^{t} + t e^{t}) + 2 + 2t$$

Impongo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + 3 = 1 \\ C_1 + C_2 + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -2 e^{-t} + 3 + 2t + t^2$$

Esercizio 3 (punti: ....../4)

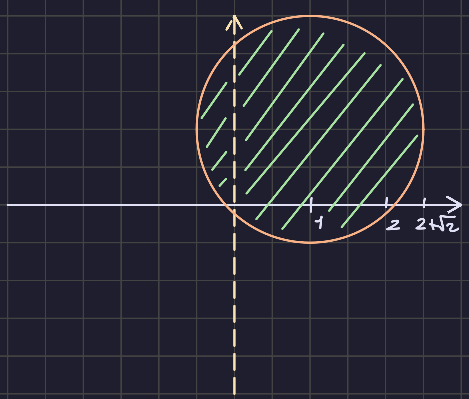
Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt[4]{2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} + e^{\frac{1}{x}}$$

a) (2 punti) determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)

$$D = \begin{cases} 2 - (x-1)^2 - (y-1)^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Cerchio centrato in $(1,1)$



L'insieme è limitato perchè esiste un circuito chiuso che racchiude tutti i punti del dominio.
L'insieme non è nè chiuso nè aperto perchè x = 0 non è compreso nel dominio, ma i punti del cerchio si.
L'insieme è sconnesso perchè esiste un segmento che collega due punti del dominio che non ha tutti i punti all'interno del dominio.

b) (2 punti) Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)$, con $\vec{v} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$F(x,y) = \sqrt[4]{2-(x-1)^2-(y-1)^2} + e^{\frac{1}{x}}$$

Calcolo il gradiente di F

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x+1}{2\sqrt[4]{2-(x-1)^2-(y-1)^2}} - e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} \\ \\ \dfrac{-y+1}{2\sqrt[4]{2-(x-1)^2-(y-1)^2}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(1,2) = \begin{pmatrix} -e \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(1,2) = \nabla F(1,2) \cdot \vec{v}$$

$$= \begin{pmatrix} -e & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}e - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Esercizio 4 (punti: . . . . . . /4)

a) (2 punti) La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+y^2-4x+4} & (x,y) \neq (2,0) \\ 0 & (x,y) = (2,0) \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2$?

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+y^2}$$

Lungo $x=2$

$$\lim_{y\to 0} \frac{(2-2)^2}{(2-2)^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Lungo $y=0$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} 1 = 1$$

I limiti sono diversi, quindi la funzione non é continua in $(2,0)$ e quindi neanche differenziabile in $(2,0)$.

b) (2 punti) calcolare la lunghezza dell'arco di curva piana parametrizzata da

$$\gamma(\theta) = (2\theta - 1,\, \theta^{\frac{3}{2}}),\ \theta \in [1, 20]$$

$$\gamma'(\theta) = \left(2,\ \frac{3}{2}\theta^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\theta^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}\theta}$$

$$L_\gamma = \int_1^{20} \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta$$

$$= \int_1^{20} \left(4 + \frac{9}{4}\theta\right)^{\frac{1}{2}} d\theta \qquad u = 4 + \frac{9}{4}\theta \qquad du = \frac{9}{4}\, d\theta$$

$$= \frac{4}{9}\int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}\left(4 + \frac{9}{4}\theta\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{20}$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(4 + \frac{9}{4}\cdot 20\right)^3} - \sqrt{\left(4 + \frac{9}{4}\right)^3}\right)$$

$$= \frac{8}{27}\left(49\sqrt{49} - \frac{25}{4}\sqrt{\frac{25}{4}}\right)$$

$$= \frac{8}{27}\left(49\sqrt{49} - \frac{25}{4}\cdot\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{27}\cdot 49\cdot 7 - \frac{25}{27}\cdot 5$$

$$= \frac{8\cdot 49\cdot 7 - 25\cdot 5}{27}$$

$$= 97$$

PARTE 2

Esercizio 5 (punti: ....../4)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 2\alpha(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 - y^4)$$

con α parametro reale.

a) (2 punti) Posto $\alpha = 1$, determinare e classificare i punti stazionari della funzione f.

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 4\alpha x - 4x^3 \\ 4\alpha y + 4y^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha x - 4x^3 = 0 \\ 4\alpha y + 4y^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(4\alpha - 4x^2) = 0 \\ y(4\alpha + 4y^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \lor 4\alpha - 4x^2 = 0 \\ y = 0 \lor \underbrace{4\alpha + 4y^2 = 0}_{\text{Imp.}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \lor x = \pm\sqrt{\alpha} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \lor x = \pm\sqrt{\alpha} \\ y = 0 \end{cases}$$

Punti stazionari

$A = (0,0) \quad B = (\sqrt{\alpha}, 0) \quad C = (-\sqrt{\alpha}, 0)$

Se $\alpha = 1 \rightarrow B = (1,0) \quad C = (-1,0)$

Calcolo i segni delle Hessiane analizzando gli autovalori

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 4\alpha - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4\alpha + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_F(A) = \begin{pmatrix} 4\alpha & 0 \\ 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matrice diagonale} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4\alpha$$

$$\downarrow$$

se $\alpha > 0$ A punto di minimo locale

se $\alpha < 0$ A punto di massimo locale

se $\alpha = 0$ Bisogna studiare meglio la funzione

$$H_f(B) = \begin{pmatrix} 4\alpha - 12|\alpha| & 0 \\ 0 & 4\alpha + 12|\alpha| \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matrice diagonale}$$

$\downarrow$

$\lambda_1 = 4\alpha - 12|\alpha|$

$\lambda_2 = 4\alpha + 12|\alpha|$

$\lambda_1 = 4\alpha - 12|\alpha| > 0 \quad \nexists \alpha \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = 4\alpha + 12|\alpha| > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$H_f(B)$ indefinita $\quad B$ e C punti di sella

b) (2 punti) Posto $\alpha = 0$, calcolare (se esistono) massimo e minimo assoluto della funzione f su

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Massimo e minimo esistono per il teorema di Weierstrass siccome l'insieme è chiuso e limitato

$f(x,y) = 2(0)(x^2+y^2+1) - (x^4 - y^4) \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

$y^2 = 1 - x^2$

$f(x) = -(x^4 - (1-x^2)^4)$

$= -x^4 - (1-x^2)^2 \qquad x \in [-1, 1]$

$f'(x) = -4x^3 + 4(1-x^2)x = 0$

$\downarrow$

$-4x^3 + (4 - 4x^2)x = 0$

$-4x^3 + 4x - 4x^3 = 0$

$-8x^3 + 4x = 0$

$x(-8x^2 + 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$f(0) = -0^4 - (1-0^2)^2 = -1$

$f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(1 - \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^2 = -\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$F(\pm 1) = -(\pm 1)^2 - (1-(\pm 1)^2)^2 = -1-(1-1)^2 = -1$

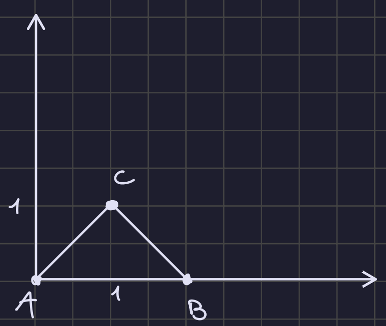
In $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ si ha un massimo assoluto

in $x = \pm 1 \wedge x = 0$ si ha un minimo assoluto

Esercizio 6 (punti: ....../4)
Calcolare

$$\iint_D e^{x+y}\, dx\, dy$$

dove D è la regione interna al triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$.



$C_B(x) = -x+2 \quad x \in [1,2] \quad \to \quad x = -y+2$

$A_c(x) = x \quad x \in [0,1] \quad\quad x = y$

$$\iint_D e^{x+y}\, dx dy = \int_0^1 \int_y^{-y+2} e^{x+y} \, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 e^y \left[e^x\right]_y^{-y+2} dy$$

$$= \int_0^1 e^y (e^{-y+2} - e^y)\, dy$$

$$= \int_0^1 e^2 - e^{2y}\, dy$$

$$= e^2 - \frac{1}{2}\left[e^{2y}\right]_0^1$$

$$= e^2 - \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

$$= e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

Esercizio 7 (punti: . . . . . . /4)
Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 2x + y + 2z \leq 6,\ z \geq 0\}$

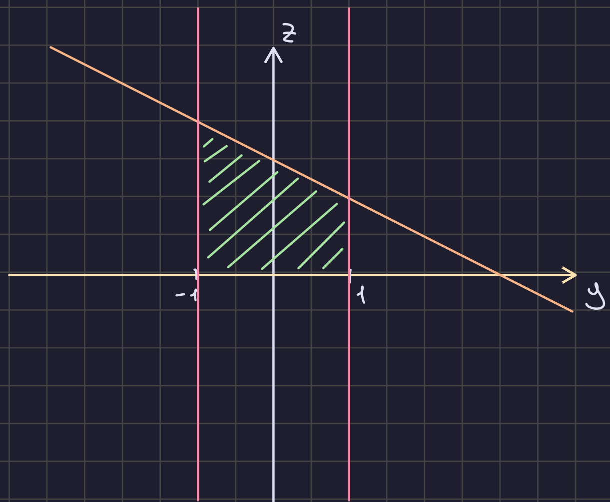
Rappresentare graficamente la proiezione di Ω sul piano yz e poi calcolare

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2)^3 \, dx \, dy \, dz$$

$$\Omega = \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ 2x+y+2z \leq 6 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Per proiettare Ω su yz basta imporre $x=0$

$$\Omega_{yz} = \begin{cases} y^2 \leq 1 \\ y+2z \leq 6 \\ z \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ z \leq -\frac{1}{2}y+3 \\ z \geq 0 \end{cases}$$



$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)^3 \, dx\, dy\, dz$$

Trasformo in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$\rho \in [-1, 1]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$0 \leq z \leq -\frac{1}{2}y - x + 3 \rightarrow 0 \leq z \leq -\frac{1}{2}\rho\sin\theta - \rho\cos\theta + 3$

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)^3 \, dx\, dy\, dz$$

Determinante della matrice Jacobiana

$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{-\frac{1}{2}\rho\sin\theta - \rho\cos\theta + 3} (\rho^2)^3 \, \rho \, dz\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1} \rho^7 \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{-\frac{1}{2}\rho\sin\theta - \rho\cos\theta + 3} dz\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1} \rho^7 \int_{0}^{2\pi} -\frac{1}{2}\rho\sin\theta - \rho\cos\theta + 3 \, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1} \rho^7 \left(-\frac{1}{2}\rho \int_{0}^{2\pi} \sin\theta \, d\theta - \rho \int_{0}^{2\pi} \cos\theta \, d\theta + 3 \int_{0}^{2\pi} d\theta \right) d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1} \rho^7 \left(-\frac{1}{2}\rho \left[-\cos\theta \right]_{0}^{2\pi} - \rho \left[\sin\theta \right]_{0}^{2\pi} + 6\pi \right) d\rho$$

$$= 6\pi \int_{-1}^{1} \rho^7 \, d\rho$$

$$= 6\pi \left[\frac{\rho^8}{8} \right]_{-1}^{1}$$

$$= 6\pi \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)$$

$$= 6\pi \ \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{4}\pi$$

Esercizio 8 (punti: ....../4)

Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - 2y,\ 2z,\ \tfrac{2}{3}xy)$$

e sia $\gamma(t) = (3t, \frac{3}{2}t^2, t^3)$, con $t \in [0,1]$ un cammino orientato in $\mathbb{R}^3$.

a) (2 punti) Calcolare $\int_\gamma (\frac{2}{3}x + 4z)\, ds$ e dare un'interpretazione fisica o geometrica del risultato.

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - 2y,\ 2z,\ \tfrac{2}{3}xy)$$

$$\gamma(t) = (3t, \tfrac{3}{2}t^2, t^3) \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma'(t) = (3, 3t, 3t^2)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9 + 9t^2 + 9t^4} = 3\sqrt{1 + t^2 + t^4}$$

$$F(x, z) = \frac{2}{3}x + 4z$$

$$\int_\gamma F(x,z)\, ds = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= 3\int_0^1 (2t + 4t^3)\sqrt{1 + t^2 + t^4}\, dt \qquad u = 1 + t^2 + t^4$$

$$du = 2t + 4t^3\, dt$$

$$= 3\int \sqrt{u}\, du$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3}\left[(1 + t^2 + t^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= 2\left(3\sqrt{3} - 1 \right)$$

$$= 6\sqrt{3} - 2$$

Questo è un integrale del primo ordine e rappresenta la somma di tutti i valori di una funzione lungo una curva.

b) (2 punti) Calcolare il lavoro del campo $\vec{F}$ necessario per spostare un punto lungo γ.

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 - 2y,\ 2z,\ \frac{2}{3}xy\right)$$

$$\gamma(t) = \left(3t, \frac{3}{2}t^2, t^3\right) \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma'(t) = (3, 3t, 3t^2)$$

$$L = \int_\gamma \vec{F}\, ds$$

$$= \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left((3t)^2 - 2\left(\frac{3}{2}t^2\right),\ 2t^3,\ \frac{2}{3} \cdot 3t \cdot \frac{3}{2}t^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (6t^2, 2t^3, 3t^3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 18t^2 + 6t^4 + 9t^5 \, dt$$

$$= \frac{18}{3} \left[t^3 \right]_0^1 + \frac{6}{5} \left[t^5 \right]_0^1 + \frac{9}{6} \left[t^6 \right]_0^1$$

$$= 6 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{60 + 12 + 15}{10} = \frac{87}{10}$$