Esame 24/06/24

Esercizio 1. (8 Punti) Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcolare la matrice $AB^T - 2C$ e stabilire se il risultato è quadrata, diagonale e/o triangolare superiore.

(b) Determinare se la matrice C è invertibile e, in caso positivo, calcolare la matrice C^{-1}.

(c) Trovare una base di $N(B)$.

(d) Stabilire se $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ è una soluzione del sistema lineare $Bx = b$ dove $b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ e trovare tutte le soluzioni del sistema.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 3 & 4 \\ -1/2 & -3 & -4 \\ -1/2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 12 & 16 \\ -4 & -18 & -26 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 14 \\ -3 & -14 & -27 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice risultante é soltanto una matrice quadrata perché il numero delle righe é uguale al numero delle colonne.
Non é né diagonale, né triangolare superiore perché ci sono numeri diversi da 0 sotto la diagonale

b) C é invertibile se $\det(C) \neq 0$

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 4 = -5 \neq 0$$

C é invertibile
Per calcolare C^{-1} eseguo operazioni elementari per trasformare la matrice C nella matrice identitá $(C \mid I_n) \overset{E_1}{\rightarrow} \dots \overset{E_n}{\rightarrow} (I_n \mid C^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_{31}(2)}{\overset{E_{21}(\frac{1}{2})}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_2(-\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_3\left(\tfrac{2}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \underset{R_{23}(\frac{1}{2})}{\overset{R_{13}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

c) Per trovare una base di $N(B)$ risolvo il sistema lineare $Bx=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_1(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{31}(-4)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t - 2s \\ x_2 = t \\ x_3 = -2s \\ x_4 = s \end{cases} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é una base di } N(B)$$

d)

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Bx = b$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_1(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{31}(-4)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = s - 2t + 2 \\ x_2 = s \\ x_3 = -2t + 3 \\ x_4 = t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} s-2t+2 \\ s \\ -2t+3 \\ t \end{pmatrix}$$ é la soluzione con parametri s e t

Per verificare se p é soluzione la eguaglio alla soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} s-2t+2 \\ s \\ -2t+3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} s-2t+2=1 \\ s=1 \\ -2t+3=1 \\ t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2+2=1 \\ s=1 \\ -2+3=1 \\ t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ s=1 \\ 1=1 \\ t=1 \end{cases}$$

p é soluzione per $\begin{cases} t=1 \\ s=1 \end{cases}$.

Esercizio 2. (8 Punti) Si considerino gli insiemi $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ con

$$b_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \end{pmatrix}^T, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \end{pmatrix}^T, c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{C}^3$.

(b) Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definita come $f(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T) = \begin{pmatrix} z & -iy & -ix \end{pmatrix}^T$ per ogni $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^3$ mostrare che $f(b_1) = c_2 - c_3$, $f(b_2) = c_3 - c_1$ e $f(b_3) = ic_1$.

(c) Calcolare i vettori delle coordinate $[f(b_1)]_\mathcal{C}$, $[f(b_2)]_\mathcal{C}$, e $[f(b_3)]_\mathcal{C}$ e determinare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e alla base $\mathcal{C}$ della codominio.

(d) Stabilire se f è un isomorfismo.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Entrambi gli insiemi hanno 3 elementi, quindi per dimostrare che sono una base di $\mathbb{C}^3$ basta dimostrare che sono linearmente indipendenti, cioé $\det \neq 0$

$$\det(\mathcal{B}) = \det\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = i^3 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ é una base}$$

$$\det(\mathcal{C}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ é una base}$$

b) $$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ -iy \\ -ix \end{pmatrix}$$

$$F(b_1) = F\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 - c_3 \quad \checkmark$$

$$F(b_2) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_3 - c_1 \quad \checkmark$$

$$F(b_3) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i\, c_1 \quad \checkmark$$

c) $A_{B\to C} = \left([F(b_1)]_C, [F(b_2)]_C, [F(b_3)]_C \right)$

$$F(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1 c_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ \beta_1 = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_1 = 1 - 1 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = -1 \end{cases} \to [F(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 1 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases} \to [F(b_2)]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(b_3) = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = i \\ \beta_3 + \gamma_3 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha_3 = i \\ \gamma_3 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases} \to [F(b_2)]_C = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) F é un isomorfismo se $A_{B\to C}$ é invertibile, quindi se $\det(A_{B\to C}) \neq 0$

$$\det(A_{B\to C}) = -\det\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \neq 0$$

F é un isomorfismo

Esercizio 3. (8 PUNTI) Si consideri la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & \alpha \\ 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico p_{M_α} di M_α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Calcolare gli autovalori, moltiplicità algebriche e moltiplicità geometriche per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Determinare i valori di α per cui la matrice M_α è diagonalizzabile.

(d) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ con M_α diagonalizzabile, trovare la matrice diagonale D_α e la matrice invertibile S_α tali che $M_\alpha = S_\alpha D_\alpha S_\alpha^{-1}$.

a) $p_{M_\alpha} = \det(M_\alpha - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & \alpha \\ 0 & 5-\alpha-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(5-\alpha-\lambda)$

b) $\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 5-\alpha$

- $\alpha \neq 0 \quad \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 5-\alpha$

  $m_1 = 1 \quad m_2 = 1$

  Siccome le molteplicitá geometriche sono sempre minori o uguali a quelle algebriche:

  $d_1 = 1 \quad d_2 = 1$

- $\alpha = 0 \quad \lambda_1 = 5$

  $m_1 = 2$

$d_1 = \dim(E(\lambda_1)) = n - rk(E(5)) = 2 - rk(M_\alpha - 5I_2) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2$

c) Una matrice é diagonalizzabile se possiede tanti autovalori distinti quanti il numero delle colonne, oppure se le molteplicitá algebriche sono uguali a quelle geometriche. Di conseguenza M_α é diagonalizzabile $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

d) • $\alpha \neq 0$

$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 5-\alpha$

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5-\alpha \end{pmatrix}$

$E(\lambda_1) = N\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \underset{\alpha \neq 0}{\overset{E_1(\frac{1}{\alpha})}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \overset{E_{21}(\alpha)}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}$ la base di $E(\lambda_1)$ é $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$E(\lambda_2) = N\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\alpha \neq 0}{\overset{E_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases}$$ la base di $E(\lambda_2)$ é $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 0 \quad \lambda_{1,2} = 5$

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ é giá diagonale, quindi $S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. (6 PUNTI) Vero o Falso? Giustificare la risposta.

(a) L'insieme $\{(1 \quad -1)^T, (i \quad i)^T\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$.

(b) Siano $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $w = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$, allora $\frac{z}{w} + zw + \overline{z} + |w| = -\frac{7}{2}i + 2$.

(c) Il vettore $v = (1 \quad 2i \quad 0)^T$ appartiene allo spazio delle colonne $C(N)$ dove $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & i & 2i \end{pmatrix}$.

a) Una base ortonormale ha tutti gli elementi di norma $= 1$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1$$

Quindi é falso.

b) $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i$

$w = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$

$$\frac{z}{w} + zw + \overline{z} + |w| = -\frac{7}{2}i + 2$$

$$-\frac{i}{2} - 2i - i + 2 = -\frac{7}{2}i + 2$$

$$-\frac{i}{2} - 3i + 2 = -\frac{7}{2}i + 2$$

$$-\frac{i}{2} - \frac{6i}{2} + 2 = -\frac{7}{2}i + 2$$

$$-\frac{7}{2}i + 2 = -\frac{7}{2}i + 2$$

Vero

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$ Vero