Esercizi risposta libera e impulsiva nel tempo

1. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} - 5\frac{dv(t)}{dt} - 6v(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

e le seguenti condizioni inziali:

$$v(0^-) = 3 \qquad \frac{dv(0^-)}{dt} = 1.$$

1) Si calcoli la risposta libera nel tempo

Otteniamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^2 - 5s - 6 = 0$$

$$(s-6)(s+1) = 0$$

$$s_1 = -1 \qquad r = 2 \quad (\#\ \text{soluzioni})$$
$$s_2 = 6 \qquad \mu_{1,2} = 1 \quad (\text{molteplicitá})$$

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{6t}$$

Calcoliamo la derivata della risposta libera

$$v_l'(t) = -c_1 \cdot e^{-t} + 6c_2 \cdot e^{6t}$$

Calcoliamo i coefficienti imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} v(0^-) = 3 \\ v'(0^-) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 + 6c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 - c_2 \\ -3 + c_2 + 6c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 - \frac{4}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{17}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

La risposta libera diventa:

$$v_l(t) = \frac{17}{7} e^{-t} + \frac{4}{7} e^{6t}$$

$$= \left(\frac{17}{7} e^{-t} + \frac{4}{7} e^{6t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

2) Si calcoli la risposta impulsiva nel tempo

$$h(t) = d_0\,\delta_0 + \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l}\cdot e^{\lambda_i t}\cdot \frac{t^l}{l!}\right)\delta_{-1}(t)$$

$d_0 = 0$ perchè il sistema è proprio, cioè l'ordine dell'ingresso e l'ordine dell'uscita dell'equazione caratteristica sono diversi: n ≠ m

$$h(t) = \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Riscriviamo l'equazione del sistema sostituendo all'output la risposta impulsiva e all'input l'impulso

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta_1(t) + 5\delta(t)$$

Calcolo le derivate della risposta impuilsiva

$$h(t) = \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$h'(t) = \left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}\right)\delta(t)$$

$$= \left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta(t) \quad \text{(Proprietá impulso)}$$

$$h''(t) = \left(d_1 e^{-t} + 36d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta_1(t)$$

Sostituiamo questi termini nell'equazione precedente

$$\left(d_1 e^{-t} + 36d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta_1(t)$$

$$-5\left(\left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta(t)\right)$$

$$-6\left(\left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}\right)\delta_{-1}(t)\right) = \delta_1(t) + 5\delta(t)$$

Eliminiamo il gradino perchè non è rilevante alla risposta impulsiva

$$\left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta_1(t) - 5\left(\left(d_1 + d_2\right)\delta(t)\right) = \delta_1(t) + 5\delta(t)$$

$$\left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}\right)\delta(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta_1(t) + \left(-5d_1 - 5d_2\right)\delta(t) = \delta_1(t) + 5\delta(t)$$

Raccolgliamo per δ, δ_1

$$\left(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t} - 5d_1 - 5d_2\right)\delta(t) + \left(d_1 + d_2\right)\delta_1(t) = \delta_1(t) + 5\delta(t)$$

Mettiamo tutto a sistema, imponendo t=0

$$\begin{cases} \left(-d_1 + 6d_2 - 5d_1 - 5d_2\right)\delta(t) = 5\delta(t) \\ \left(d_1 + d_2\right)\delta_1(t) = \delta_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -d_1 + 6d_2 - 5d_1 - 5d_2 = 5 \\ d_1 + d_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + d_2 + 6d_2 - 5 + \cancel{5d_2} - \cancel{5d_2} = 5 \\ d_1 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2 + 6d_2 = 11 \\ d_1 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2 = \frac{11}{7} \\ d_1 = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

La risposta impulsiva diventa quindi:

$$h(t) = \left(-\frac{4}{7}e^{-t} + \frac{11}{7}e^{6t}\right)\delta_{-1}(t)$$

2. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$2\frac{d^2v(t)}{dt^2} - 3\frac{dv(t)}{dt} - 2v(t) = 2\frac{du(t)}{dt} + u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

e le seguenti condizioni inziali:

$$v(0^-) = 4 \qquad \frac{dv(0^-)}{dt} = -2,$$

1) Si calcoli la risposta libera nel tempo

Risolviamo l'equazione caratteristica del sistema

$$2s^2 - 3s - 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}} = 2 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$s_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad r = 2$ (# soluzioni)

$s_2 = 2$ $\qquad \mu_{1,2} = 1$ (molteplicitá)

Calcoliamo la risposta libera:

$$v_L(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 \cdot e^{2t}$$

Calcoliamo la derivata della risposta libera

$$v_L'(t) = -\frac{1}{2} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t}$$

Calcoliamo i coefficienti imponendo a sistema le condizioni iniziali

$$\begin{cases} v(0^-) = 4 \\ v'(0^-) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ -2 + \frac{1}{2}c_2 + 2c_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

La risposta libera è:

$$v_L(t) = 4e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$= \left(4e^{-\frac{1}{2}t}\right)\delta_{-1}(t)$$

2) Si calcoli la risposta impulsiva nel tempo

$$h(t) = d_0 \delta_0 + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \right) \delta_{-1}(t)$$

$$= \left(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t)$$

d_0 vale 0 perchè il sistema è proprio

Sostituiamo nell'equazione del sistema la risposta impulsiva al posto dell'uscita e l'impulso al posto dell'ingresso

$$2h''(t) - 3h'(t) - 2h(t) = 2\delta_1(t) + \delta(t)$$

Calcoliamo le derivate della risposta impulsiva

$$h(t) = \left(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t)$$

$$h'(t) = \left(-\tfrac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + \left(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t} \right) \delta(t)$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 + d_2) \delta(t) \quad \text{(Proprietá dell'impulso)}$$

$$h''(t) = \left(\tfrac{1}{4} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + \left(-\tfrac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2 d_2 e^{2t} \right) \delta(t) + (d_1 + d_2) \delta_1(t)$$

Sostituiamo nell'equazione precedente

$$2\left(\left(\tfrac{1}{4} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + \left(-\tfrac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2 d_2 e^{2t} \right) \delta(t) + (d_1 + d_2) \delta_1(t) \right)$$
$$-3\left(\left(-\tfrac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 + d_2) \delta(t) \right)$$
$$-2\left(\left(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) \right) = 2\delta_1(t) + \delta(t)$$

$$\left(\tfrac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 8 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + \left(-d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4 d_2 e^{2t} \right) \delta(t) + (2d_1 + 2d_2) \delta_1(t)$$
$$+ \left(\tfrac{3}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} - 6 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (-3d_1 - 3d_2) \delta(t)$$
$$+ \left(-2 d_1 e^{-\frac{1}{2}t} - 2 d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) = 2\delta_1(t) + \delta(t)$$

Eliminiamo il gradino perchè non è rilevante alla risposta impulsiva

$$\left(-d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4 d_2 e^{2t}\right)\delta(t) + \left(2d_1 + 2d_2\right)\delta_1(t) + \left(-3d_1 - 3d_2\right)\delta(t) = 2\delta_1(t) + \delta(t)$$

Raccogliamo per δ, δ_1

$$\left(-d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4 d_2 e^{2t} - 3d_1 - 3d_2\right)\delta(t) + \left(2d_1 + 2d_2\right)\delta_1(t) = 2\delta_1(t) + \delta(t)$$

Mettiamo tutto a sistema imponendo t=0

$$\begin{cases} \left(-d_1 \cancel{e^{-\frac{1}{2}t}} + 4 d_2 \cancel{e^{2t}} - 3d_1 - 3d_2\right)\delta(t) = \delta(t) \\ \left(2d_1 + 2d_2\right)\delta_1(t) = 2\delta_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -d_1 + 4d_2 - 3d_1 - 3d_2 = 1 \\ 2d_1 + 2d_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + d_2 + 4d_2 - 3 + \cancel{3d_2} - \cancel{3d_2} = 1 \\ d_1 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 = 0 \end{cases}$$

La risposta impulsiva è:

$$h(t) = e^{2t}\delta_{-1}(t)$$

3. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 2\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

e le seguenti condizioni inziali:

$$v(0^-) = 4 \qquad \frac{dv(0^-)}{dt} = -2,$$

1) Si calcoli la risposta libera nel tempo

Risolviamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$s_1 = -1$ $\quad r = 1$ (# soluzioni)

$s_2 = -1$ $\quad \mu_1 = 2$ (molteplicità)

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-t} \cdot t$$

Calcoliamo la derivata della risposta libera

$$v_l'(t) = -c_1 \cdot e^{-t} - c_2 \cdot e^{-t} \cdot t + c_2 \cdot e^{-t}$$

Mettiamo in sistema la risposta libera con le condizioni iniziali per trovare i coefficienti

$$\begin{cases} v(0^-) = 4 \\ v'(0^-) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ -c_1 + c_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

La risposta libera è

$$v_l(t) = 4e^{-t} + 2e^{-t} \cdot t$$

2) Si calcoli la risposta impulsiva

$$h(t) = d_0\,\delta(t) + \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l}\cdot e^{\lambda_i t}\cdot\frac{t^l}{l!}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$= d_0\,\delta(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}\cdot t\right)\delta_{-1}(t)$$

$d_0 \neq 0$ perchè il sistema è strettamente proprio (n = m), cioè il grado dell'ingresso è uguale al grado dell'uscita

Sostituiamo nell'equazione del sistema la risposta impulsiva al posto dell'uscita e l'impulso al posto dell'ingresso

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta_2(t) + \delta(t)$$

Calcoliamo le derivate della risposta impulsiva

$$h(t) = d_0\,\delta(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}\cdot t\right)\delta_{-1}(t)$$

$$h'(t) = d_0\,\delta_1(t) + \left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}\cdot t + d_2 e^{-t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}\cdot t\right)\delta(t)$$

$$= d_0\,\delta_1(t) + \left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}\cdot t + d_2 e^{-t}\right)\delta_{-1}(t) + d_1\,\delta(t)$$

$$h''(t) = d_0\,\delta_2(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}\cdot t - 2 d_2 e^{-t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$+\left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}\cdot t + d_2 e^{-t}\right)\delta(t) + d_1\,\delta_1(t)$$

Sostituiamo nell'equazione precedente

$$d_0\,\delta_2(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}\cdot t - 2 d_2 e^{-t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$+\left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}\cdot t + d_2 e^{-t}\right)\delta(t) + d_1\,\delta_1(t)$$

$$+2\left(d_0\,\delta_1(t) + \left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}\cdot t + d_2 e^{-t}\right)\delta_{-1}(t) + d_1\,\delta(t)\right)$$

$$+ d_0\,\delta(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}\cdot t\right)\delta_{-1}(t)$$

$$= \delta_2(t) + \delta(t)$$

Eliminiamo il gradino perchè non è rilevante alla risposta impulsiva e raggruppiamo per δ, δ_1, δ_2

$$d_0 \delta_2(t) + \left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t} \cdot t + d_2 e^{-t}\right) \delta(t) + d_1 \delta_1(t) + 2 d_0 \delta_1(t) + 2 d_1 \delta(t)$$

$$+ d_0 \delta(t) = \delta_2(t) + \delta(t)$$

$$d_0 \delta_2(t) + \left(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t} \cdot t + d_2 e^{-t} + d_0 + 2 d_1\right) \delta(t) + \left(d_1 + 2 d_0\right) \delta_1(t)$$

$$= \delta_2(t) + \delta(t)$$

Mettiamo tutto in sistema ponendo t=0

$$\begin{cases} d_0 \delta_2(t) = \delta_2(t) \\ \left(d_1 + 2 d_0\right) \delta_1(t) = 0 \\ \left(-d_1 \cancel{e^{-t}} \cancel{- d_2 e^{-t} \cdot t} + d_2 \cancel{e^{-t}} + d_0 + 2 d_1\right) \delta(t) = \delta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -2 \\ 2 + d_2 + 1 - 4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -2 \\ d_2 = 2 \end{cases}$$

La risposta impulsiva è

$$h(t) = \delta(t) + \left(-2 e^{-t} + 2 e^{-t} \cdot t\right) \delta_{-1}(t)$$