Esame 2/2/2024

PARTE 1

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{4}{x^2} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

e indicare il più ampio **intervallo** su cui tale soluzione è definita.

$$y' = \frac{y}{x^2} - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = \frac{1}{x^2}(y-4)$$

$$\frac{y'}{y-4} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{y-4}\,dy = \int x^{-2}\,dx$$

$$\ln|y-4| = -\frac{1}{x} + c$$

$$y(1) = 3 < 4 \to \quad \ln|y-4| = \ln(4-y)$$

$$\ln(4-y) = -\frac{1}{x} + c$$

$$4 - y = e^{-\frac{1}{x}+c}$$

$$-y = -4 + e^{-\frac{1}{x}+c}$$

$$y = 4 - e^{-\frac{1}{x}+c}$$

$$3 = 4 - e^{-1+c}$$

$$e^{-1+c} = 4-3$$

$$-1+c = \ln 1$$

$$c = 1$$

$$y(x) = 4 - e^{-\frac{1}{x}+1}$$

Intervallo più ampio $(0, +\infty)$

Esercizio 2 (punti: ....../4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'''(t) - 2y''(t) = 2 - t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Suggerimento: utilizzare la sostituzione di variabile $z(t) = y'(t)$ per portare l'equazione differenziale al secondo ordine. Quindi, prima trovare $z(t)$ e poi $y(t)$.

$z(t) = y'(t)$

$\Downarrow$

$z''(t) - 2z'(t) = 2 - t$

$\downarrow$

$s^2 - 2s = 0$

$s(s-2) = 0$

$s_1 = 0$

$s_2 = 2$

$z_\ell = C_1 + C_2 e^{2t}$

$z_F = a + bt + ct^2$

$z_F' = b + 2ct$

$z_F'' = 2c$

$2c - 2b - 4ct = 2 - t$

$t(-4c) + 2c - 2b = 2 - t$

$\begin{cases} -4c = -1 \\ 2c - 2b = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2b = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$

$z_F = -\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2$

$z_t = z_\ell + z_F = C_1 + C_2 e^{2t} - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2$

$z'_t = 2C_2 e^{2t} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$

$$\begin{cases} y'(0) = z(0) = 1 \\ y''(0) = z'(0) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$z_t(t) = 1 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2$$

$$y'(t) = z_t(t) \rightarrow y(t) = \int z_t(t)\,dt$$

$$= \int 1 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2\,dt$$

$$= t - \frac{3}{4}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{t^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{12}t^3 - \frac{3}{8}t^2 + t + C$$

$y(0) = 1$

$\downarrow$

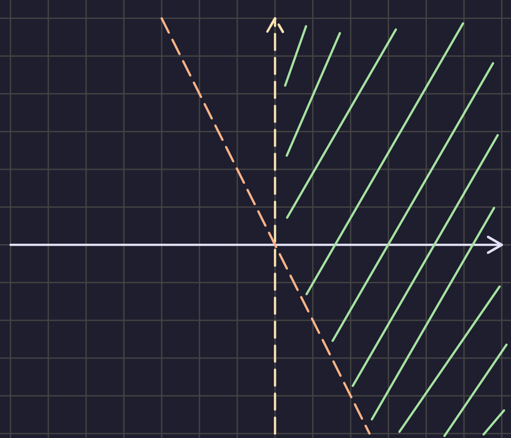
$$C = 1 \rightarrow y(t) = \frac{1}{12}t^3 - \frac{3}{8}t^2 + t + 1$$

Esercizio 3 (punti: . . . . . . /4)
Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x+y}} - y^2 \ln x$$

a) (2 punti) determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)

$$D = \begin{cases} x > 0 \\ 2x + y \geq 0 \\ \sqrt{2x+y} \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ y \geq -2x \\ y \neq -2x \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ y > -2x \end{cases}$$



È un insieme illimitato, aperto e connesso

b) (2 punti) scrivere l'equazione del piano tangente in $P(1, 2, f(1, 2))$ al grafico di f.

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x+y}} - y^2 \ln x$$

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} -(2x+y)^{-\frac{3}{2}} - y^2 \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{2}(2x+y)^{-\frac{3}{2}} - 2y \ln x \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(1,2) = \begin{pmatrix} -\frac{33}{8} \\ -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$F(1,2) = \frac{1}{2}$$

$$T = F(1,2) + \nabla F(1,2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{33}{8} \quad -\frac{1}{16}\right) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{33}{8}(x-1) - \frac{1}{16}(y-2)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{33}{8} x - \frac{33}{8} - \frac{1}{16} y - \frac{1}{8}$$

$$\downarrow$$

$$z = -\frac{33}{8} x - \frac{1}{16} y - \frac{15}{4} \longrightarrow$$ In forma vettoriale

$$\begin{cases} z = -\frac{33}{8} t - \frac{1}{16} s - \frac{15}{4} \\ x = t \\ y = s \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{33}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-2x)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $\alpha = 1$ è continua in $\mathbb{R}^2$, mentre con $\alpha = 2$ non lo è.

Facoltativo: stabilire per quali valori di α la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y-2x)}{x^2+y^2}$$

$$0 \leq \frac{x^2|y-2x|}{x^2+y^2} \leq \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |y-2x| \leq |y-2x|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y-2x| = 0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y-2x)}{x^2+y^2} = 0 \qquad \alpha = 1 \rightarrow \text{Funzione continua}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y-2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

Lungo $x=0$ Lungo $y=0$

$$\lim_{y\to0} \frac{0}{y^4} = 0 \neq \lim_{x\to0} \frac{x^2(-2x)}{x^4} = \lim_{x\to0} -2\frac{1}{x} = -\infty$$

Quindi per $\alpha = 2$ la funzione non è continua in $(0,0)$

b) (2 punti) Data la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = \left(\frac{1+3t}{t},\, 3t-2,\, \ln t\right),\ t \in [\tfrac{1}{2},\, 2]$$

scrivere le equazioni parametriche della retta r tangente a γ nel suo punto T di coordinate $(4,1,0)$ e poi di una retta ortogonale a r passante per T.

$$\gamma(t) = \left(\frac{1+3t}{t},\, 3t-2,\, \ln t\right) \quad t \in \left[\tfrac{1}{2}, 2\right]$$

$$\gamma'(t) = \left(\frac{3t^2-(1+3t)}{t^2},\, 3,\, \frac{1}{t}\right)$$

$$T = (4,1,0) \rightarrow t = 1 \rightarrow \gamma(1) = \left(\frac{1+3}{1},\, 3-2,\, \ln 1\right) = (4,1,0)$$

$$\gamma'(T) = \gamma'(1) = \left(\frac{3-(1+3)}{1}, 3, 1\right) = (-1, 3, 1)$$

$$r_T(t) = \gamma(1) + t\,\gamma'(1)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (4-t, 1+3t, t) = \begin{cases} x = 4-t \\ y = 1+3t \\ z = t \end{cases} = \begin{cases} t = 4-x \\ y = -3x+13 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \quad y = -3x+13$$

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$-x + 3y + z = 0$$

$$\begin{cases} x = 3t+s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \rightarrow w = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_T(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PARTE 2

Esercizio 5 (punti: . . . . . . /4)

a) (2 punti) Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2$$

$$F(x,y) = x^3 - x^2 - y^2$$

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(3x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = \frac{2}{3} \\ y_1 = 0 \ \vee \ y_2 = 0 \end{cases}$$

Punti critici

$A = (0,0) \quad B = (\frac{2}{3}, 0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -2 \rightarrow H_f(A) \text{ definito negativa}$$

A punto di massimo locale

$$H_f(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \rightarrow H_f(B) \text{ indefinita}$$

B punto di sella

b) (2 punti) Calcolare (se esistono) massimo e minimo assoluto della funzione $g(x,y) = f(x,y) + x^2$ sull'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 1/2$, $b = 1$ (asse maggiore sull'asse y).

$g(x,y) = x^3 - y^2 \qquad E = 4x^2 + y^2 = 1$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^3 - y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$$
$$= x^3 - y^2 - 4\lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 8\lambda x \\ -2y - 2\lambda y \\ -4x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \\ -4x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8\lambda x = 0 \\ -2y(1+\lambda) = 0 \\ -4x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0 \vee \lambda = -1$$

$$① \begin{cases} x(3x - 8\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ 4x^2 = 1 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 3x^2 - 8\lambda x = 0 \\ \lambda = -1 \\ -4x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} x(3x-8\lambda)=0 \\ y=0 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x(3x+8)=0 \\ \lambda=-1 \\ -4x^2-y^2+1=0 \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} \lambda=\pm\frac{3}{16} \\ y=0 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1=0 \vee x_2=-\frac{8}{3} \\ \lambda=-1 \\ -4x^2-y^2+1=0 \end{cases}$$

$$(2.1)\begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \\ y=\pm 1 \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} x=-\frac{8}{3} \\ \lambda=-1 \\ -4\frac{8^2}{3^2}-y^2+1=0 \end{cases}$$

$$y^2=-\frac{2^8+3^2}{3^2}$$

$$\nexists\, y \in \mathbb{R}$$

Punti critici

$A=\left(+\frac{1}{2}, 0, +\frac{3}{16}\right)$ $\quad C=(0,+1,-1)$

$B=\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{16}\right)$ $\quad D=(0,-1,-1)$

$g(A)=g\left(+\frac{1}{2},0\right)=+\frac{1}{2^3}=+\frac{1}{8}$ $\quad$ A punto di massimo assoluto

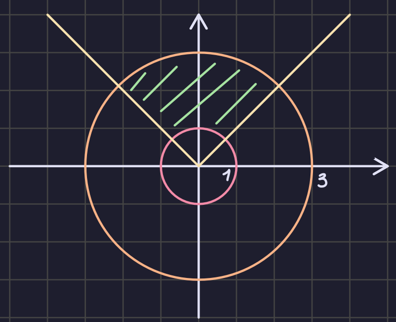
$g(B)=g\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{8}$ $\quad$ B punto di minimo locale

$g(C)=g(0,1)=-1$

$g(D)=g(0,-1)=-1$

C e D punti di minimo assoluto

Esercizio 6 (punti: ....../4)
Calcolare
$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$
dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge |x|\}$
Dare un'interpretazione del risultato trovato.



$$D=\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+y^2\le 9 \\ y\ge |x| \end{cases}$$

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [1, 3] \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \end{array}$$

$$\iint_D \frac{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}{\rho} \overbrace{\rho}^{\text{Jacobiano}} \, d\rho \, d\theta$$

$$= \iint_D \cos\theta + \sin\theta \ \rho \ d\rho \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta) \int_1^3 \rho \, d\rho \ d\theta$$

$$= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta) \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^3 d\theta$$

$$= 4 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \cos\theta + \sin\theta \, d\theta$$

$$= 4 \left[\sin\theta - \cos\theta\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= 4\left(\left(\sin\tfrac{3}{4}\pi - \cos\tfrac{3}{4}\pi\right) - \left(\sin\tfrac{1}{4}\pi - \cos\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$= 4\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

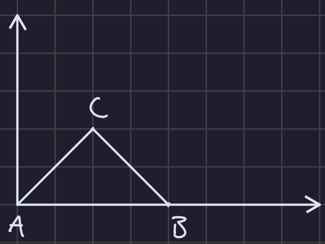
$$= 4\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$$

Esercizio 7 (punti: ....../4)
Calcolare la coordinata y del baricentro del solido omogeneo che occupa la regione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \, 0 \le z \le x - y\}$$

dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (4,0), (2,2)$.

$$\Omega = \begin{cases} z \ge 0 \\ z \le x - y \end{cases}$$



$A = (0,0) \quad B = (4,0) \quad C = (2,2)$

$A_B \to y = 0 \quad x \in [0,4]$

$B_C = (1-t)B + tC$

$= 1-t\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$= (4-2t, 2t) \quad t \in [0,1]$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = 4-2t \\ y = 2t \end{cases}$

$\downarrow$

$y = -x+4$

$x \in [2,4]$

$x = -y+4$

$C_A = (1-t)C + tA$

$= 1-t\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$= (2-2t, 2-2t) \quad t \in [0,1]$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 2-2t \end{cases}$

$\downarrow$

$y = x$

$x \in [0,2]$

$x = y$

Metodo 1

$$\text{Area} = \int_0^2 \int_y^{-y+4} \int_0^{x-y} dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_y^{-y+4} x-y \, dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{-y+4} - y\left[x\right]_y^{-y+4} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{(-y+4)^2}{2} - \frac{y^2}{2} - y(-2y+4)\,dy$$

$$= \int_0^2 8 - 4y + 2y^2 - 4y\,dy$$

$$= \int_0^2 2y^2 - 8y + 8\,dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{8}{2}y^2 + 8y\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{3} - 16 + 16$$

$$= \frac{16}{3}$$

Metodo 2

$$\text{Area} = \int_0^4 \int_x^{-x+4} \int_0^{x-y} dz\,dy\,dx$$

$$y \cdot \text{Area} = \int_0^2 \int_y^{-y+4} \int_0^{x-y} y \; dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 y\,(2y^2 - 8y + 8)\,dy$$

$$= \int_0^2 2y^3 - 8y^2 + 8y\,dy$$

$$= \left[\frac{2}{4} y^4 - \frac{8}{3} y^3 + \frac{8}{2} y^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} 2^4 - \frac{8}{3} 2^3 + 4\, 2^2$$

$$= 2^3 - \frac{8}{3} 2^3 + 2^4$$

$$= 2^3 \left(1 - \frac{8}{3} + 2\right)$$

$$= 2^3 \left(\frac{9}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{y \cdot \text{Area}}{\text{Area}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 8 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Stabilire se il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (y(z-1),\, x(z-1),\, xy)$$

è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Condizione necessaria e sufficiente:

Derivate in croce ✓

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{matrix}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = z - 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad ✓$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = x = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad ✓$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad ✓$$

$\Rightarrow$ Il campo é conservativo

Dominio semplicemente connesso ✓

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y(z-1) \rightarrow U = \int y(z-1)\, dx = xy(z-1) + c(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x(z-1) \rightarrow U = \int x(z-1)\, dy = xy(z-1) + c(x,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = xy \rightarrow U = \int xy\, dz = xyz + c(x,y)$$

$U(x,y,z) = xy(z-1) + K$

b) (2 punti) Calcolare in due modi diversi il lavoro di $\vec{F}$ lungo il cammino orientato parametrizzato da

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2),\ t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

(Può essere utile ricordare la seguente identità goniometrica: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x\ \forall x \in \mathbb{R}$).

$\vec{F}(x,y,z) = (y(z-1), x(z-1), xy)$

Metodo 1

$\gamma(0) = (2, 0, 2) \qquad \gamma(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

$$L = U(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) - U(2, 0, 2)$$

$$= 2(2-1) - 0$$

$$= 2$$

Metodo 2

$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin t, 2\cos t, 4\cos t \sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -4\sin^2 t + 4\cos^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4(-\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos(2t)\, dt$$

$$= 2\left[\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2$$