

Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

2° Semestre 2023/2024

Indice

1	Numeri complessi	4
1.1	Insiemi di numeri	4
1.2	Numeri immaginari	5
1.2.1	Esempi	6
1.3	Operazioni tra i numeri complessi	6
1.3.1	Somma	6
1.3.2	Prodotto	7
1.3.3	Sottrazione	7
1.3.4	Divisione	7
1.4	Coniugato e modulo	9
1.4.1	Coniugato	9
1.4.2	Modulo	9
1.4.3	Proprietà	9
1.5	Coordinate polari	10
1.6	Forma trigonometrica di un numero complesso	11
1.7	Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica	12
1.8	Formula di de Moivre	12
1.9	Definizione di radice n-esima	13
1.10	Teorema delle radici n-esime	13
1.10.1	Dimostrazione	13
1.11	Radici quadrate di numeri reali negativi	14
2	Sistemi lineari e matrici	15
2.1	Sistemi lineari	15
2.2	Definizione	18
2.3	Definizione	18
2.4	Operazioni elementari	20
2.5	Linee in \mathbb{R}^2	21
2.6	Metodo di eliminazione di Gauss (EG)	22
2.7	Risoluzione di un sistema lineare	24
2.8	Definizione di rango di una matrice	25
2.9	Osservazione	25
3	Matrici e le loro operazioni	26
3.1	Definizione di somma	26
3.1.1	Proprietà	26
3.2	Definizione di prodotto per uno scalare	27
3.2.1	Proprietà	27
3.3	Definizione di matrice trasposta	27
3.4	Definizione di prodotto di matrici	27
3.4.1	Proprietà	29
3.5	Osservazione	30
3.6	Definizione	31
3.7	Matrici elementari	32
3.8	Moltiplicazione con matrici elementari	34
3.9	Definizione di matrice invertibile	35
3.10	Inverse di matrici elementari	36
3.11	Proposizione	37

3.11.1	Dimostrazione	37
3.12	Proposizione	38
3.12.1	Dimostrazione	38
4	Matrici inverse e determinante	40
4.1	Proposizione	41
4.1.1	Dimostrazione	41
4.2	Calcolo della matrice inversa	41
4.3	Teorema delle matrici invertibili	42
4.3.1	Dimostrazione	43
4.4	Proposizione (Determinante di una matrice)	43
4.4.1	Dimostrazione	43
4.5	Definizione di determinante	44
4.6	Regola di Sarrus	45
4.7	Teorema di Laplace	46
4.8	Determinante e trasposta	47
4.9	Il principio di induzione	48
4.10	Proposizione	49
4.11	Teorema	51
4.12	Corollario	52
4.13	Corollario	52
4.14	Formula per A^{-1}	53
4.15	Teorema di Cramer	54
5	Spazi vettoriali e sottospazi	55
5.1	Definizione di spazio vettoriale	55
5.1.1	Esempi	57
5.2	Osservazioni	58
5.3	Definizione combinazione lineare	59
5.4	Definizione di insieme di generatori	60
5.4.1	Esempi	61
5.5	Definizione di sottospazio	62
5.5.1	Esempi	63
5.6	Definizione di sottospazio generato	65
5.7	Definizione	66
5.8	Definizione	67
5.9	Proposizione	68
5.9.1	Dimostrazione	68
5.10	Definizione	69
5.11	Proposizione	69
5.11.1	Dimostrazione	69
6	Dipendenza e indipendenza lineare	71
6.1	Proposizione	71
6.1.1	Dimostrazione	71
6.2	Definizione	72
6.3	Teorema	72
6.3.1	Dimostrazione	72
6.3.2	Esempi	73
6.4	Definizione	74

6.5	Osservazione	74
6.5.1	Esempi	75
6.6	Base di $C(U)$ per una matrice U in forma ridotta	76
6.6.1	Osservazioni	76
6.7	Proposizione	77
6.8	Teorema	77
6.8.1	Dimostrazione	77
6.9	Teorema di Steinitz	78
6.10	Corollario	78
6.10.1	Dimostrazione	78
6.11	Definizione	78
6.11.1	Esempi	79
6.12	Corollario	79
6.13	Proposizione	79
6.13.1	Dimostrazione	79
7	Applicazione lineare	80
7.1	Definizione	80
7.1.1	Osservazioni	80
7.1.2	Esempi	80
7.2	Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$	81
7.2.1	Esempi	81
7.3	Definizione	83
7.4	Applicazione delle coordinate	83
7.5	Applicazione delle coordinate $C_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$	85
7.6	Teorema	86
7.6.1	Dimostrazione	86
7.7	Osservazione	86
7.8	Corollario	87
7.8.1	Dimostrazione	87
7.9	Matrice del cambio di base	88
7.9.1	Dimostrazione	89
7.9.2	Osservazione	90
7.10	Matrice associata a f rispetto a basi	90
8	Rango + nullità	92
8.1	Definizione	92
8.1.1	Esempi	92
8.2	Teorema (nullità + rango)	94
8.2.1	Dimostrazione	94
8.3	Dimensione di $C(A)$	95
8.3.1	Proposizione	96
8.3.2	Dimostrazione	96
8.4	Dimensione di $N(A)$	97
8.4.1	Corollario	97
8.5	Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$	97
8.6	Proposizione	98
8.7	Teorema	99
8.7.1	Dimostrazione	99

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni in \mathbb{R} , ma ha soluzioni in \mathbb{C} .

Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'algebra)

Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

ed x è un'incognita, ammette n soluzioni

Definizioni utili 1.1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

è detto **polinomio di grado n** con **coefficienti** $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero i che è definito come $i^2 = -1$. Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$ è detta **forma algebrica** di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$.

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

Definizioni utili 1.2

Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

1.2.1 Esempi

Esempio 1.1

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{R}$

1.3 Operazioni tra i numeri complessi

1.3.1 Somma

Definizione 1.1

L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Esempio 1.2

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$

1.3.2 Prodotto

Definizione 1.2

Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che $i^2 = -1$ si ha che $bdi^2 = -bd$ quindi

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Esempio 1.3

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il numero complesso $-a - bi$ è l'unico numero complesso tale che $z + (-z) = 0$. Questo numero complesso è detto **opposto** di z e si indica con $-z$.

Definizione 1.3

La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Esempio 1.4

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

1.3.4 Divisione

Definizione 1.4

La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo $\frac{1}{z_2}$ come l'unico numero complesso tale che:

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia $z = a + bi \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$. Supponiamo che $z' = c + di$ sia un numero complesso tale che $z \cdot z' = 1$, cioè:

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo $ac - bd = 1$ e $ad + bc = 0$.

Possiamo trovare c sostituendo $d = \frac{-1-ac}{b}$ nella prima equazione:

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1-ac)}{b} = \frac{1-ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1+ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare d sostituendo $c = \frac{ad}{b}$ nella seconda equazione:

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1-bd)}{a} = \frac{1-bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1-bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$. Definiamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Esempio 1.5

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \right) i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} - \cancel{abi} + b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

Esempio 1.6

$$\begin{aligned} & \frac{1+2i}{2-i} \\ & \left(\frac{1+2i}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2 + (-1)^2} = \\ & = \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i \end{aligned}$$

1.4 Coniugato e modulo**1.4.1 Coniugato**

Sia $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Il numero complesso $\bar{z} = a - bi$ è detto **coniugato** di z .

1.4.2 Modulo

Il **modulo** di z è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Proprietà

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$

1. $z_1 \bar{z}_1 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. Se

$$z_1 \neq 0, \quad \frac{\overline{1}}{z_1} = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

Infatti:

$$\bar{z}_1 \cdot \left(\frac{1}{z_1} \right) = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_1} \right)} = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$

5. Se $z_2 \neq 0$ allora:

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se $z_1 \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z_1} \stackrel{def}{=} \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

Esempio 1.7

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{2-i} = (1+i) \left(\frac{1}{2-i} \right) \\ \frac{1}{2-i} &= \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ z &= (1+i) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ \overline{z} &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

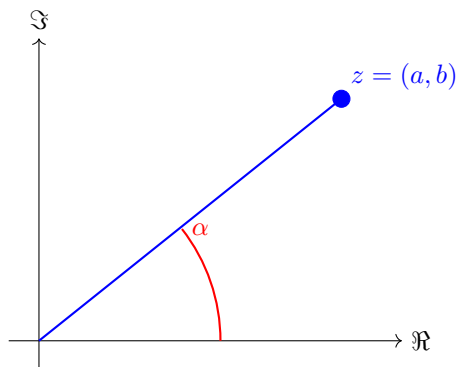


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ , detto **raggio polare**, ed α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ in senso antiorario. α viene misurato in radianti

Esempio 1.8

$$z_1 = (1, 0) \rightarrow 1$$

$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow i$$

$$z_3 = (1, \pi) \rightarrow -1$$

$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow -i$$

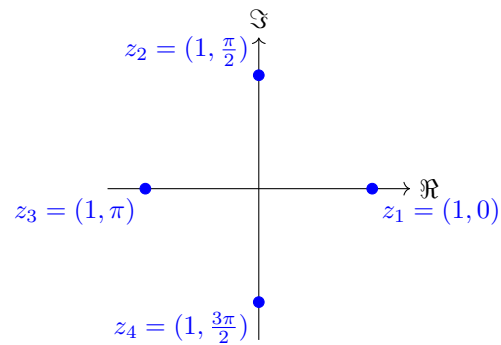


Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

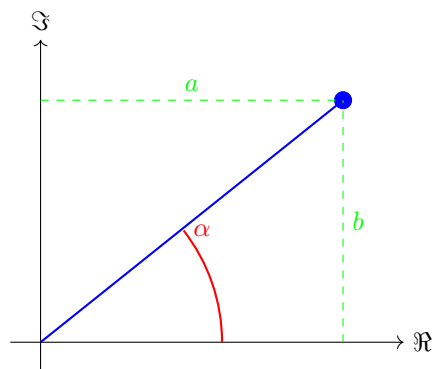


Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

Definizione 1.5

La **forma trigonometrica** di un numero complesso è definita come:

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha)i) = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } a = 0, b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{se } a > 0, b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0, b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Esempio 1.9

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$

$$-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica**Definizione 1.6**

$$z_1 = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)), \quad z_2 = s(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \quad \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= rs(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = \\ &= rs((\cos \alpha \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) + (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))i) = \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

1.8 Formula di de Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}$, $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Esempio 1.10

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) \right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -64$$

1.9 Definizione di radice n-esima

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.10 Teorema delle radici n-esime

Teorema 2 Siano $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esistono precisamente n radici n -esime complesse distinte z_0, z_1, \dots, z_{n-1} di y . Se $y = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, allora per $k = 0, \dots, n-1$:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Si somma $2k\pi$ per ottenere tutte le radici n -esime, siccome \sin e \cos sono periodiche.

1.10.1 Dimostrazione

Per la formula di de Moivre sappiamo che:

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{r} \right)^n (\cos \alpha + (2\pi)k + i \sin \alpha + (2\pi)k) =$$

$$= r (\cos \alpha + i \sin \alpha) = y$$

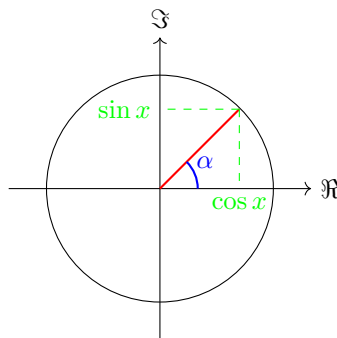


Figura 4: Circonferenza goniometrica

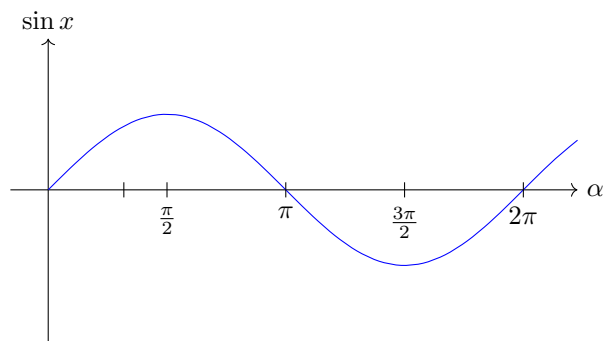


Figura 5: Funzione seno

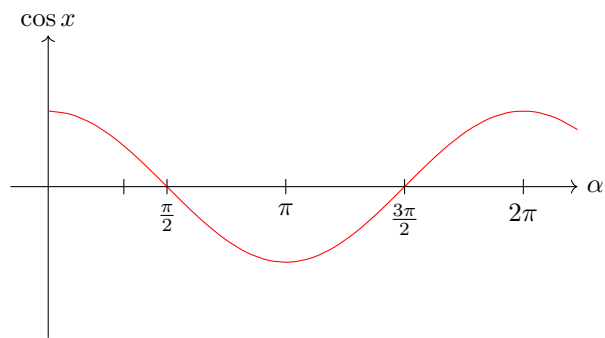


Figura 6: Funzione coseno

Quindi z_0, \dots, z_{n-1} sono soluzioni di $y = x^n$, cioè sono radici n-esime di y . Siccome il periodo di \sin e \cos è 2π , le radici n-esime sono tutte distinte.

1.11 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ tale che $a < 0$. Esistono precisamente due radici quadrate di a in \mathbb{C} . Infatti, abbiamo:

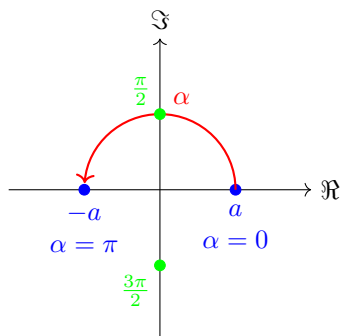


Figura 7: Radici quadrate di numeri reali negativi

$$a = (-a)(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Per il teorema 2:

$$z_0 = \sqrt{-a} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt{-a}$$

Definizioni utili 1.3

Se abbiamo un polinomio della forma:

$$ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In \mathbb{C} esistono 2 soluzioni anche se $\Delta < 0$.

2 Sistemi lineari e matrici

2.1 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni in n incognite che può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $b_k, a_{ij} \in \mathbb{C}$ oppure \mathbb{R} per $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$. Se i **termini noti** sono tutti nulli il sistema è detto **omogeneo**. Una n-upla (x_1, \dots, x_n) di numeri complessi (o reali) è una soluzione se soddisfa tutte le m equazioni.

Esempio 2.1

Presa in considerazione la seguente tabella nutrizionale di cereali (per porzione):

	Cheerios	Quakers
Proteine (g)	4	3
Carboidrati (g)	20	18
Grassi (g)	2	5

Quante porzioni di Cheerios e Quakers dobbiamo mangiare per ottenere 9g

di proteine, 48g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4C + 3Q = 9 & (P) \\ 20C + 18Q = 48 & (C) \\ 2C + 5Q = 8 & (G) \end{cases}$$

Per risolvere il sistema lineare:

- Moltiplichiamo le per $\frac{1}{4}$ e otteniamo un sistema lineare **equivalente** (cioè con **esattamente** le stesse soluzioni):

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C) \quad 20C + 18Q = 48$$

$$(G) \quad 2C + 5Q = 8$$

- Calcoliamo $(C) - 20(P')$ e $(G) - 2(P')$ e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + 15Q = 18$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- Moltiplichiamo (C') per $\frac{1}{3}$ e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- Calcoliamo $(G') - \frac{7}{2}(C')$ e otteniamo:

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + 0Q = 0$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ e $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Per agevolare la risoluzione del sistema lineare si può utilizzare una matrice:

- **R1** = Riga 1

- **R2** = Riga 2

- $R3 = \text{Riga } 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{4} \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\downarrow R2 - 20 \cdot R1$$

$$\downarrow R3 - 2 \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{3} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\downarrow R3 - \frac{7}{2} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ e $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

2.2 Definizione

Definizione 2.1

Siano $m, n, \dots < 1$. Una tabella A tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

di $m \times n$ elementi di \mathbb{C} disposti in m righe e n colonne si chiama una **matrice di dimensione** $m \times n$. Gli elementi si chiamano **coefficienti** (o entrate) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice ij dove i indica la riga e j la colonna di appartenenza.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ con entrate in \mathbb{C} si indica con $M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ con entrate in \mathbb{R} si indica con $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

2.3 Definizione

Un sistema lineare di n incognite e m equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

può essere rappresentato nella forma **matriciale**:

$$Ax = b$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice dei coefficienti}} \quad x = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore delle incognite}} \quad b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei termini noti}}$$

La matrice

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

è detta **matrice aumentata**.

Esempio 2.3

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2}R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$R2 - R1 \quad R3 + R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$\frac{-1}{5}R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$R3 - 4R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right)$$

$$5R3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

Si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegniamo un parametro alla **variabile libera** x_4 :

$$t = x_4 \quad x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8 - 5t) + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + t + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3\left(\frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t\right) - \frac{3}{2}(8 - 5t) - t = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t - \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10 + 21 - 60}{5} + \frac{15 + 30}{4}t - t = \frac{-29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = \frac{-29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni $t \in \mathbb{C}$.

2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumentata $(A|b)$, si ottiene un sistema equivalente di forma più semplice:

- Moltiplicare una riga (R_i) per uno scalare $\alpha \in \mathbb{C}$ **non nullo**:

$$\alpha R_i$$

- Sommare una riga (R_i) con un multiplo di un'altra riga (R_j) :

$$R_i + \alpha R_j$$

- Scambiare riga R_i con riga R_j :

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

Esempio 2.4

Prendiamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R3+R1]{R2-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R3-4R2]{R3-4R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{5}{8}R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, non ha soluzioni.

2.5 Linee in \mathbb{R}^2

2 equazioni a 2 incognite con coefficienti in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (I) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Questo sistema lineare può essere rappresentato come:

$$y = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}} \quad (I)$$

$$y = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} \quad (II)$$

Il sistema può essere rappresentato come un sistema di rette nel piano cartesiano in cui la soluzione è l'intersezione delle rette.

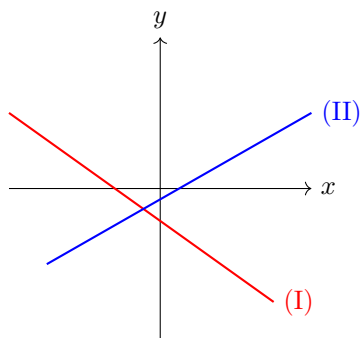


Figura 8: Intersezione di due rette

Può anche succedere che le rette siano parallele, in questo caso il sistema è impossibile:

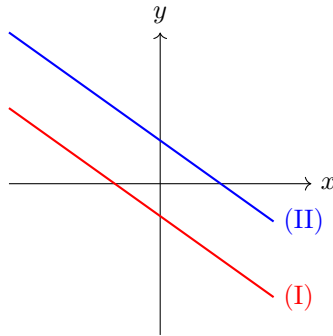


Figura 9: Retta parallela

Oppure che le rette siano coincidenti, in questo caso il sistema è indeterminato, cioè con infinite soluzioni:

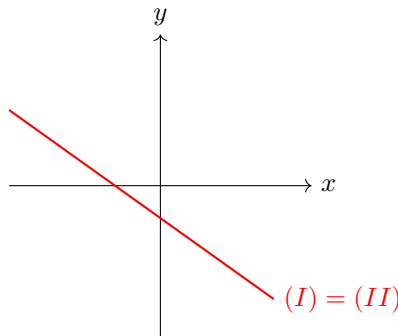


Figura 10: Retta coincidente

2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice $M = (a_{ij})$ $1 \leq i \leq m$ $1 \leq j \leq n$ in $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ (oppure in $M_{m \times n}(\mathbb{R})$) con righe $R1, \dots, Rn$, eseguiamo le seguenti operazioni elementari:

1. Scegliamo la prima colonna non nulla j di M (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato 2 righe di M , otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{con } a_{ij} \neq 0$$

Moltiplicando $R1$ per $\frac{1}{a_{ij}}$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Adesso, per ogni $2 \leq i \leq m$, eseguiamo l'operazione elementare $Ri - a_{ij}R1$. Otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

\uparrow
 Colonna j

2. Ripetiamo il procedimento 1. su M' per ottenere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e così via...

3. Dopo un numero finito di passi, si ottiene una matrice che si chiama **matrice a scala**:

Pivot
 \downarrow

$$r \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \textcircled{1} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 Colonne dominanti

cioè esiste un numero $1 \leq r \leq m$ tale che:

- (a) Le righe $1 \leq i \leq r$ non sono nulle.
- (b) Ogni riga $2 \leq i \leq m$ ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente.
- (c) le righe $r + 1 \leq i \leq m$ sono tutte nulle.

Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga i è uguale a 1 e si chiama **pivot**. La matrice è detta **forma ridotta** di M . Le colonne che contengono pivot sono dette **dominanti**.

Esempio 2.5

Prendiamo in considerazione la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{C})$$

$$\begin{array}{l} R1 \leftrightarrow R2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}R1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ R3+iR1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R2} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix} \\ R3-(6+3i)R2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5}-\frac{11}{5}i \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R3}{\frac{11}{5}-\frac{11}{5}i}} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.7 Risoluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*) \quad Ax = b$$

con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ procediamo con il metodo di eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata $(A|b)$ fino ad ottenere la forma ridotta $(U|c)$ e un sistema lineare corrispondente

$$Ux = c$$

che è equivalente a $(*)$. Chiamiamo **variabili dominanti** le r variabili che corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti.

Esempio 2.6

Prendiamo in considerazione il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

x_1 e x_3 sono variabili dominanti e x_2 è variabile libera.

Si ha uno dei seguenti casi:

- 1) Tutte le colonne di $(U|c)$ tranne c sono dominanti. In questo caso il sistema ha una soluzione unica. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- ∞) L'ultima colonna e almeno una colonna di U **non** sono dominanti. In tal caso il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono assegnando parametri alle $n - r$ variabili libere. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{5} \\ 8 \end{array} \right)$$

- 0) L'ultima colonna c è dominante. In questo tal caso il sistema non ammette soluzioni. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Attenzione: la forma ridotta di una matrice **non** è unicovamente determinata, ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

2.8 Definizione di rango di una matrice

Definizione 2.2

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ con forma ridotta U . Il numero r di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di U e si indica con $rk(U)$.

Verrà dimostrato più avanti che ogni forma ridotta di A ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di A come $rk(A) = rk(U)$.

Si ha $rk(A) \leq \min(m, n)$.

2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni $[1]$, $[\infty]$, $[0]$ usando il rango:

Teorema 3 (Teorema di Rouché-Capelli) Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, sia $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$.

$$[1] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) = n$$

$$rk(U) = rk(U|c)$$

$$[\infty] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) < n$$

$$rk(U) = rk(U|c) < n$$

$$[0] \Leftrightarrow rk(A) < rk(A|b)$$

$$rk(U) < rk(U|c)$$

3 Matrici e le loro operazioni

3.1 Definizione di somma

Definizione 3.1

Siano $A = (a_{ij})$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $B = (b_{ij})$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ due matrici in $M_{m \times n}(\mathbb{C})$. La **somma** di A e B è la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

in $M_{m \times n}(\mathbb{C})$

Esempio 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ -1 & 1-i & 5+i \end{pmatrix}$$

3.1.1 Proprietà

L'addizione di matrici è:

- **Associativa**, cioè:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- **Commutativa**, cioè:

$$A + B = B + A$$

3.2 Definizione di prodotto per uno scalare

Definizione 3.2

Data una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, il **prodotto** della matrice A per lo scalare α è la matrice:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 3.2

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix}$$

3.2.1 Proprietà

Il prodotto di una matrice per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

per $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

3.3 Definizione di matrice trasposta

Definizione 3.3

Accanto a una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, consideriamo la matrice A^T ottenuta da A scambiando le righe con le colonne, è detta **trasposta** di A .

Esempio 3.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 7 \\ \pi & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ i & \frac{1}{12} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Definizione di prodotto di matrici

- Una matrice di dimensione $m \times 1$ è detta **vettore** (colonna) e si usa la

notazione $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$.

Una matrice di dimensione $1 \times n$ è detta **vettore riga** e si usa la notazione $v^T = (v_1 \ \dots \ v_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{C})$.

Sia $v^T = (v_1 \ \dots \ v_n)$ un vettore riga in $M_{1 \times n}(\mathbb{C})$ e $u = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vettore colonna in $M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Il **prodotto** di v^T per u è il numero complesso: $v^T u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \in \mathbb{C}$

Esempio 3.4

$$v^T = (1 \quad 2 \quad 3) \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v^T u = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 1 + 0 + 9 = 10$$

- Possiamo vedere una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ come m vettori riga $Ri = (a_{i1} \dots a_{in})_{1 \leq i \leq m}$ detti **righe di** A oppure n vettori colonna $Cj = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{1 \leq j \leq n}$ detti **colonne di** A .

Siano

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(\mathbb{C})$$

Se $n = s$, allora possiamo formare il prodotto di A e B :

$$AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t}$$

dove

$$c_{ij} = RiCj = (a_{i1} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

è il prodotto della riga i di A e la colonna j di B .

Esempio 3.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1C1 & R1C2 & R1C3 \\ R2C1 & R2C2 & R2C3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 22 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

3.4.1 Proprietà

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà:

- **Associativa**, cioè:

$$A(BC) = (AB)C$$

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:

$$(A + B)C = AC + BC$$

Con $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{n \times t}(\mathbb{C})$

$$A(B + C) = AB + AC$$

In sostanza le matrici devono avere il numero di colonne uguale al numero di righe.

- Scriviamo $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ per la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice viene detta **matrice identità**.

Per ogni matrice $M \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, abbiamo che:

$$M \cdot I_m = I_n \cdot M = M$$

Esempio 3.6

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.7

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

- $(AB)^T = B^T A^T$ con

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \quad B \in M_{n \times t}(\mathbb{C})$$

$$A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{C}) \quad B^T \in M_{t \times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto di matrici **non** è commutativo:

$$AB \neq BA$$

Infatti:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Osservazione

Siano $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$, $x =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Consideriamo $Ax = b$ in forma matriciale. Abbiamo

$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{C})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{n \times 1}(\mathbb{C})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{m \times 1}(\mathbb{C})}$$

che è uguale a $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esempio 3.9

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6 Definizione

Una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ di dimensione $n \times n$ si dice **matrice quadrata** di ordine n . Gli elementi di A : $a_{ii} \quad 1 \leq i \leq n$ formano la **diagonale** di A .

Esempio 3.10

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, la matrice è detta **matrice diagonale**.

Esempio 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sotto della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare superiore**.

Esempio 3.12

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sopra della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare inferiore**.

Esempio 3.13

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

3.7 Matrici elementari

Prendiamo la matrice identità:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le operazioni elementari alla matrice identità I_n per ottenere le matrici elementari che denotiamo come segue:

- E_{ij} la matrice ottenuta da I_n scambiando la riga i con la riga j

Esempio 3.14

$$n = 3 \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E_i(\alpha)$ ottenuta da I_n moltiplicando la riga i per lo scalare $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$

Esempio 3.15

$$n = 3 \quad \alpha = i + 5 \in \mathbb{C}$$

$$E_3(i + 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i + 5 \end{pmatrix}$$

- $E_{ij}(\alpha)$ ottenuta da I_n sommando la riga i con la riga j moltiplicata per lo scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

Esempio 3.16

$$n = 3 \quad \alpha = \frac{-5}{6} \in \mathbb{C}$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Moltiplicazione con matrici elementari

Esempio 3.17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -i-5 & 5(i+5) \end{pmatrix}$$

$$E_{13}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-25}{6} \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che ogni operazione elementare su una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ corrisponde alla (pre)moltiplicazione di A con la matrice elementare ottenuta da I_m effettuando la medesima operazione elementare.

Definizioni utili 3.1

$$AE_1(-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2-3R1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-3)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}}_{\equiv E_{21}A} \xrightarrow{\frac{1}{5}R2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\equiv E_2(\frac{1}{5})(E_{21}(-3)A)} = U$$

Otteniamo una matrice con 2 pivot e 2 colonne dominanti. Questa matrice viene chiamata **forma ridotta di A**. Quindi il calcolo può essere anche fatto in questo modo:

$$\begin{aligned} U &= E_2\left(\frac{1}{5}\right)(E_{21}(-3)A) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_E \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2-3R1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice U e a destra la matrice E .

3.9 Definizione di matrice invertibile

Una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si dice **invertibile** se esiste $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$CA = I_n \quad \text{e} \quad AC = I_n$$

In tal caso, C è detta **inversa** di A . L'inversa di A , quando esiste, è univocamente determinata e si denota con A^{-1} . Infatti, se C e C' sono due matrici inverse di A , allora:

$$C = I_n C = (C' A) C = C' (AC) = C' I_n = C'$$

Esempio 3.19

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
AC &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
CA &= \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow C = A^{-1}
\end{aligned}$$

Se $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ sono invertibili, allora lo è anche il loro prodotto AB . Infatti l'inversa di AB è $B^{-1}A^{-1}$. Infatti:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

oppure

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.10 Inverse di matrici elementari

Le matrici elementari sono tutte invertibili con inverse:

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

Esempio 3.20

$$\begin{aligned}
E_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$E_i(\alpha)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Esempio 3.21

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$E_3\left(\frac{1}{i+5}\right)E_3(i+5) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

Esempio 3.22

$$E_{23}\left(-\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}\left(\frac{5}{6}\right)E_{23}\left(-\frac{5}{6}\right) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.11 Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare in forma matriciale, cioè $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$. Se $(U|c)$ è una forma ridotta della matrice aumentata $(A|b)$, allora i sistemi lineari $Ax = b$ e $Ux = c$ hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti.

3.11.1 Dimostrazione

Siano E_1, \dots, E_s le matrici elementari che trasformano $(A|b)$ nella forma ridotta $(U|c)$. Allora:

$$(A|b) \underset{E_1}{\sim} (A'|b') \underset{E_2}{\sim} \dots \underset{E_s}{\sim} (U|c)$$

Allora abbiamo:

$$(U|c) = E_s \dots \underbrace{E_1(A|b)}_{(A'|b')}$$

Per 3.10, le matrici elementari E_1, \dots, E_s sono invertibili. Dunque anche il prodotto $E = E_s \dots E_1$ è invertibile con $E^{-1} = E_1^{-1} \dots E_s^{-1}$. Abbiamo che

$E(A|b) = (U|c)$, ovvero $EA = U$ e $Eb = c$. Pertanto, se $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ è una soluzione di $Ax = b$, cioè $Av = b$, allora:

$$Uv = (EA)v = E(Av) = Eb = c$$

Quindi v è soluzione di $Ux = c$.

Se $v \in M_{a \times 1}(\mathbb{C})$ è soluzione di $Ux = c$, cioè $Uv = c$, allora:

$$\begin{aligned} Av &= \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m} Av = E^{-1}(EA)v = E^{-1}(Uv) = E^{-1}c = \\ &= E^{-1}(Eb) = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m} b = b \end{aligned}$$

Quindi v è soluzione di $Ax = b$ \square .

3.12 Proposizione

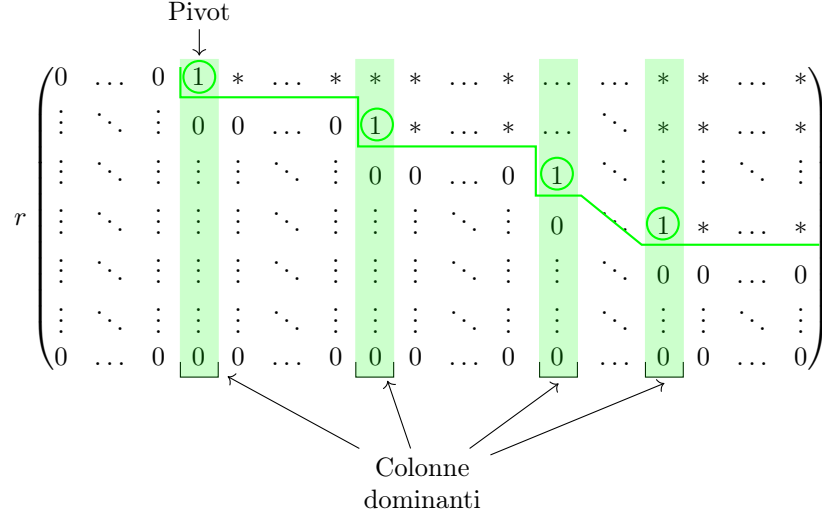
Sono equivalenti i seguenti enunciati per $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$:

1. Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$.
2. Il rango $rk(A)$ di A è pari al numero di righe di A .

3.12.1 Dimostrazione

Dimostriamo che 1. implica 2. Supponiamo (1.)

Sia U una forma ridotta di A :



Queste righe esistono se e solo se $rk(U) < \text{numero di righe di } U$.

Esiste una matrice invertibile E tale che $U = EA$ ($E =$ prodotto delle matrici elementari dell'Eliminazione di Gauss). Consideriamo il vettore $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

mettiamo $b = E^{-1}C$. Allora il sistema lineare $Ax = b$ ammette una soluzione v per (1.), cioè $Av = b$. Allora $Uv = Eb = E(E^{-1}C) = C$ per (3.11). Per il teorema di **Rouché-Capelli**, $rk(U) = rk(U|c)$, cioè:

$$(U|c) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & \dots & * & * & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & 1 \end{array} \right)$$

L'ultima riga non può essere nulla, altrimenti l'ultima colonna di $(U|c)$ sarebbe una colonna dominante.

Dunque $rk(A) = rk(U) = \text{numero di righe di } U = \text{numero di righe di } A$.

Dimostriamo che 2. implica 1. Supponiamo (2.)

Sia $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{C})$ e consideriamo $Ax = b$. Eseguendo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice $(A|b)$, otteniamo una forma ridotta $(U|c)$. Siccome $rk(U) = \text{numero di righe di } U$, ogni riga di U contiene un pivot. Perciò $rk(U) = rk(U|c)$ e quindi $rk(A) = rk(A|b)$. Quindi siamo nel caso di una soluzione unica, oppure nel caso di infinite soluzioni del teorema di **Rouché-Capelli**. \square

4 Matrici inverse e determinante

Esempio 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss e calcoliamo il prodotto delle matrici elementari contemporaneamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}4]{E_{21}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{31}4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{33}(-\frac{1}{4})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice ridotta U , a destra abbiamo il prodotto delle matrici elementari. Cioè:

$$E_3(-\frac{1}{4})E_{32}(2)E_{31}(4)E_{21}(-5)$$

Siccome $rk(U) = 3$, possiamo continuare per ottenere la matrice identità:

$$(U|E) \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice identità, a destra abbiamo la matrice $E' = E_{12}(-2)E_{23}(1)E$. Allora:

$$I_3 = E_{12}(-2)E_{23}(1)U = E_{12}(-2)E_{23}(1)E \cdot A =$$

$$= E' A$$

Osserviamo che:

$$AE' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $A^{-1} = E'$

4.1 Proposizione

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Allora A è invertibile se e solo se esiste una sequenza di matrici elementari E_1, \dots, E_t tale che $I_n = (E_t \dots E_1 A)$.

4.1.1 Dimostrazione

Supponiamo che A sia invertibile. Per ogni $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, il vettore $A^{-1}b =: v$ è soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Infatti:

$$Av = b = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_nb = b$$

Per (3.12), abbiamo che $rk(A) = n$. Esiste una forma ridotta U di A tale che $rk(U) = n$ e

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con 1 sulla diagonale e matrici elementari E_1, \dots, E_t tali che $U = E_t \dots E_1 A$. Proseguendo come nell'esempio precedente, otteniamo le matrici elementari E_{t+1}, \dots, E_s tali che:

$$I_n = E_s \dots E_{t+1} U = E_s \dots E_{t+1} E_t \dots E_1 A$$

Ora supponiamo che esistano le matrici elementari E_1, \dots, E_s tali che:

$$I_n = E_s \dots E_1 A$$

Per 3.10, le matrici elementari sono invertibili. Dunque:

$$E_i^{-1} \dots E_s^{-1} = E_i^{-1} \dots E_s^{-1} I_n = \overbrace{E_i^{-1} \dots E_s^{-1}}^{I_n} E_s \dots E_1 A = A$$

$(E_s \dots E_1)^{-1}$

A è un prodotto di matrici invertibili, quindi è invertibile con $A^{-1} = E_s \dots E_1$
□

4.2 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice invertibile $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Usiamo le operazioni elementari per trasformare A nella matrice identità, e eseguiamo le stesse operazioni elementari su I_n per ottenere A^{-1} :

$$(A|I_n) \xrightarrow{E_1} (A'|E') \xrightarrow{E_2} \dots \xrightarrow{E_s} (I_n|A^{-1})$$

Esempio 4.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3-5R1]{E_{31}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3+4R2]{E_{32}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R2-4R3]{E_{23}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R1-3R3]{E_{13}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1-2R2]{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice identità I_3 , a destra abbiamo la matrice inversa A^{-1}

4.3 Teorema delle matrici invertibili

Sono equivalenti i seguenti enunciati per $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$:

- (a) A è invertibile.
- (b) Esiste una sequenza di matrici elementari E_1, \dots, E_t tale che:

$$I_n = E_t \dots E_1 A$$

- (c) $rk(a) = n$
- (d) Il sistema lineare $Ax = b$ ammette una soluzione per qualsiasi vettore $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$.
- (e) Il sistema lineare $Ax = \underbrace{0}_{\text{vettore nullo}}$ ha una sola soluzione, cioè:

$$x = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (f) Esiste una matrice $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$CA = I_n$$

- (g) Esiste una matrice $D \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$AD = I_n$$

4.3.1 Dimostrazione

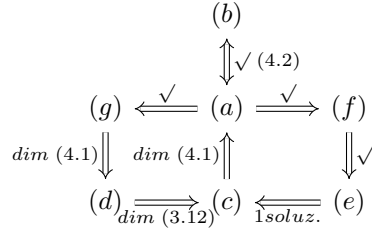


Figura 11: Diagramma delle implicazioni

$(f) \Rightarrow (e)$ Supponiamo che $\exists C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ tale che $CA = I_n$. Sia $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ una soluzione del sistema $Ax = 0$. Allora:

$$v = I_n v = (CA)v = C(Av) = Co = 0$$

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Definizioni utili 4.1

Sia D la matrice inversa destra:

$$D = I_n D = (CA)D = C(AD) = CI_n = C$$

Osserviamo che $D = C$. Quindi:

$$C = D = A^{-1}$$

4.4 Proposizione (Determinante di una matrice)

Sia $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se $ad - bc \neq 0$, allora A è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Se $ad - bc = 0$, allora A non è invertibile.

$ad - bc$ è detto **determinante** di A e si indica con $\det(A)$.

4.4.1 Dimostrazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Quindi A è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Se $ad - bc = 0$, allora:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc \\ cd-cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ è soluzione al sistema $Ax = 0$. Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora A non è invertibile per (4.3(e)).

Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $d = c = 0$ e:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango < 2 , quindi A non è invertibile per (4.3(c)). \square

4.5 Definizione di determinante

Definizione 4.1

Definiamo una funzione $\det : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ detta **determinante** per ricorrenza:

- $n = 1$:

$$A = (a) \quad \det(A) = a$$

- $n = 2$ (4.3):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

- $n \geq 3$:

$$A = (A_{ij})_{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

dove A_{1j} è la matrice ottenuta da A cancellando la prima riga e la colonna j .

Esempio 4.3

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 \det(A) &= (-1)^2 1 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \emptyset & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 2 & 0 \end{pmatrix} + \\
 & \quad (-1)^3 2 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{2} & 0 \end{pmatrix} + \\
 & \quad (-1)^4 3 \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \emptyset \end{pmatrix} = \\
 & \quad = -6 + 6 - 3 = -3
 \end{aligned}$$

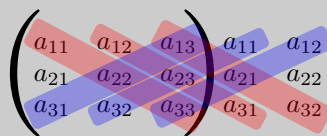
Esempio 4.4

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \\
 & \quad (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
 & \quad (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 & \quad = 1(-2 - 1) - 2(-3 - 0) + 3(3 - 0) = -3 + 6 + 9 = 12
 \end{aligned}$$

4.6 Regola di Sarrus

Definizione 4.2

Per una matrice di dimensione 3×3 si può usare la regola di Sarrus:



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esempio 4.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la regola di Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 \\ &\quad - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = -3 \\ &= 6 - 3 - 6 = -3 \end{aligned}$$

4.7 Teorema di Laplace

Definizione 4.3

Il determinante di una matrice $A = (a_{ij})$ può essere sviluppato per qualsiasi riga o colonna come segue:

- Sviluppo per la riga i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j .

- Sviluppo per la colonna j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j .

Il valore $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ è detto **complemento algebrico** di a_{ij} . Il segno si determina secondo:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esempio 4.6

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 0^- & 1^+ & 3^- \\ 1^+ & 2^- & 0^+ \end{pmatrix}$$

- **Riga 3:**

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \emptyset & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \emptyset \end{pmatrix} \\ &\quad - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{1} & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \emptyset \end{pmatrix} \\ &= (6 - 3) - 2(3 - 0) = 3 - 6 = -3 \end{aligned}$$

- **Colonna 3:**

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \emptyset \end{pmatrix} \\ &\quad - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \emptyset & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \emptyset \end{pmatrix} \\ &= 3(1 - 6) - 3(1 - 6) = -15 + 15 = 0 \end{aligned}$$

4.8 Determinante e trasposta

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & A^T &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ \det(A) &= ad - bc & \det(A^T) &= ad - cb \\ & \Downarrow & & \\ \det(A) &= \det(A^T) \end{aligned}$$

Esempio 4.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -3$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \stackrel{R1}{=} 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}} + 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{13}} = -3$$

$$\det(A^T) \stackrel{C1}{=} 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}^T} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{21}^T} + 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{31}^T} = -3$$

Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, allora:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

4.9 Il principio di induzione

Il principio di induzione serve a dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale una proprietà $P(n)$. Nel nostro caso che ogni matrice A di dimensione $n \times n$, $\det(A) = \det(A^T)$. Si procede in due passi:

- **Base dell'induzione:**

$P(n)$ è vera per $n = 1$, ovvero $P(1)$ è vera.

- **Passo induttivo:**

Supponendo che $p(n)$ sia vera; ne consegue che $p(n+1)$ è vera.

Allora $p(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 4.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per la riga 4:

$$\det(A) = 10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cancel{4} \\ 0 & 5 & 6 & \cancel{7} \\ 0 & 0 & 8 & \cancel{9} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cancel{10} \end{pmatrix}$$

Si utilizza di nuovo il teorema di Laplace per la matrice 3×3 ottenuta:

$$\stackrel{R3}{=} 10 \left(8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = 10 \cdot 8 \cdot (1 \cdot 5 - 0 \cdot 2) = 10 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 1 = 400$$

4.10 Proposizione

Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matrice triangolare superiore o inferiore. Allora:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Dimostrazione (superiore):

Per induzione su n :

- **Proprietà $P(n)$:**

Per $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$

- **Base dell'induzione:**

$$A = (a_{11}) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) = a_{11} \quad \text{Per definizione}$$

- **Passo induttivo:**

Supponiamo $P(n)$

$$A = (a_{ij}) \in M_{n+1 \times n+1}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) \stackrel{Rn+1}{=} a_{n+1, n+1} \cdot \underbrace{\det(A_{n+1, n+1})}_{\text{mat. triang. sup. di dim. } n \times n} = a_{n+1, n+1}(a_{nn} \dots a_{11})$$

Quindi $P(n+1)$ è vera.

Per il principio di induzione, abbiamo dimostrato che $P(n)$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione per A triangolare inferiore è simile. \square

Esempio 4.9

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice è una matrice ridotta, cioè una matrice triangolare superiore con 1 sulla diagonale.

$$\det(U) = 1$$

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(U') = 0$$

Esempio 4.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -3$$

•

$$\det(E_{23}A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{C1}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (6 - 0) - (6 - 3) = 6 - 6 + 3 = 3 = -\det(A) \end{aligned}$$

•

$$\det(E_2(2)A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{C2}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -12 + 6 = -6 = 2 \det(A) \end{aligned}$$

•

$$\det(E_{13}(2)A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{C1}{=} 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3(-6) + 1(18 - 3) = -3 = \det(A)
\end{aligned}$$

4.11 Teorema

Siano $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $1 \leq i, j \leq n$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$. Allora:

$$\det(EA) = \begin{cases} -\det(A) & \text{se } E = E_{ij} \\ \alpha \det(A) & \text{se } E = E_i(\alpha) \\ \det(A) & \text{se } E = E_{ij}(\alpha) \end{cases}$$

Dimostrazione ($n = 2$):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$\det(A) = ad - bc$$

•

$$\det(E_{12}A) = \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -\det(A)$$

•

$$\det(E_{12}A) = \det(E_{21}A)$$

•

$$\det(E_1(\alpha)A) = \det \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad - bc) = \alpha \det(A)$$

•

$$\det(E_2(\alpha)A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = a(\alpha d) - b(\alpha c) = \alpha(ad - bc) = \alpha \det(A)$$

•

$$\begin{aligned}
\det(E_{21}(\alpha)A) &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} = a(d + \alpha b) - b(c + \alpha a) = \\
&ad + \alpha ab - bc - \alpha ab = ad - bc = \det(A)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\det(E_{12}(\alpha)A) &= \det \begin{pmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ c & d \end{pmatrix} = (a + \alpha c)d - (b + \alpha d)c = \\
&ad + \alpha cd - bc - \alpha cd = ad - bc = \det(A)
\end{aligned}$$

Esempio 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma ridotta della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\det(U) = 1$$

$$U = E_3(-\frac{1}{3})E_{31}(-1)A$$

$$A = E_{31}(-1)^{-1}E_3(-\frac{1}{3})^{-1}U = E_{31}(1)E_3(-3)U$$

$$\det(A) = \det(E_{31}(1)E_3(-3)U) =$$

$$\det(E_3(-3)U) = -3 \det(U) = -3$$

4.12 Corollario

Se $A \in M_{n \times n}$, allora $\det(A) \neq 0$ se e solo se A è invertibile.

Dimostrazione:

Sia U una forma ridotta di A :

$$\det(A) \neq 0 \underset{4.3}{\Leftrightarrow} \det(U) \neq 0 \underset{4.10}{\Leftrightarrow} rk(U) = n \underset{4.3}{\Leftrightarrow} A \text{ è invertibile}$$

□

4.13 Corollario

Siano $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Allora $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Dimostrazione:

- **Caso 1:**

A non è invertibile, ovvero $\det(A) = 0$. Se AB è invertibile, allora

$$A(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = I_n \quad \text{e} \quad B(AB)^{-1}$$

sarebbe l'inversa di A . Quindi AB **non** è invertibile. Allora $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$

- **Caso 2:**

A è invertibile. Per (4.1), esiste una sequenza E_1, \dots, E_t di matrici elementari tali che:

$$E_t \dots E_1 A = I_n$$

Siccome E_1, \dots, E_t sono invertibili, possiamo considerare:

$$A = (E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) E_t \dots E_1 A = E_1^{-1} \dots E_t^{-1} I_n = E_1^{-1} \dots E_t^{-1}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1^{-1} \dots E_t^{-1} B) \\ &\stackrel{teo}{=} \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_t^{-1}) \det(B) \\ &\stackrel{teo}{=} \det(E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

□

4.14 Formula per A^{-1}

Se $\det(A) \neq 0$ allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

dove A^* è la matrice i cui coefficienti sono i complementi algebrici di A^T e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Esempio 4.12

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A^* &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{1} & 2 \\ 3 & \cancel{3} & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ 3 & 3 & \emptyset \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & \emptyset & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{3} & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & 3 & \emptyset \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \emptyset \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & \emptyset & 1 \\ 2 & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \emptyset \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \emptyset \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \det(A^{-1}) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

4.15 Teorema di Cramer

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ con $\det(A) \neq 0$, sia $b \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Allora il sistema lineare

$Ax = b$ possiede l'unica soluzione $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ dove

$$p_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

e A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i con il vettore b .

Esempio 4.13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -3 \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} +1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_1) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_2) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_3) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$p_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$p_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{3}{-3} = -1$$

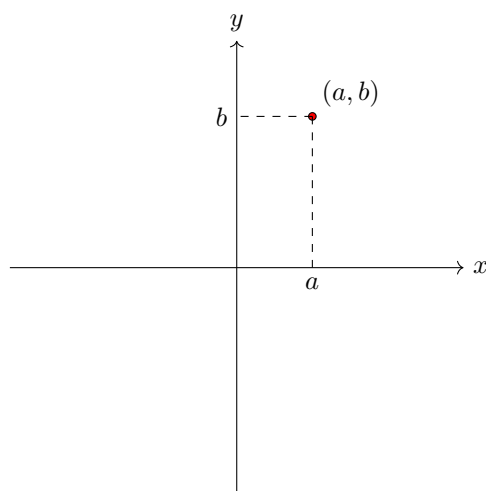
$$p_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Dunque $p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema lineare $Ax = b$

5 Spazi vettoriali e sottospazi

Esempio 5.1

Prendiamo in considerazione il piano cartesiano: \mathbb{R}^2



Ogni punto nel piano cartesiano può essere rappresentato con una coppia di valori (a, b) . Possiamo identificare \mathbb{R}^2 con l'insieme

$$M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Possiamo:

- Sommare i vettori:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$$

- Moltiplicare per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

5.1 Definizione di spazio vettoriale

Definizione 5.1

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Uno **spazio vettoriale** su \mathbb{K} è un insieme non vuoto V i cui elementi sono detti **vettori** sul quale sono definite due operazioni:

1. **Addizione:** per $v, w \in V$ abbiamo:

$$v + w \in V$$

2. **Moltiplicazione per uno scalare:** per $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ abbiamo:

$$\alpha v \in V$$

che godono delle seguenti proprietà:

1. Valgono le proprietà:

(a) **Associatività:**

$$(v + u) + w = v + (u + w)$$

per ogni $v, u, w \in V$

(b) **Elemento neutro:** esiste $0_v \in V$ tale che:

$$v + 0_v = v = 0_v + v$$

per ogni $v \in V$

(c) **Elemento inverso:** per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che:

$$v + w = 0_v = w + v$$

Scriviamo $w = -v$

(d) **Commutatività:**

$$v + w = w + v$$

per ogni $v, w \in V$

2. Per ogni $v \in V$:

$$1 \cdot v = v$$

3. Per ogni $v \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$$

4. Per ogni $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ valgono le seguenti **leggi distributive**:

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

5.1.1 Esempi

1. $V = M_{m \times n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} con addizione di matrici e moltiplicazione per scalari usuale.

$$0_v = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare scriviamo:

$$\mathbb{K}^m := M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

$$0_{\mathbb{K}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

2. $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in \mathbb{K} .

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\alpha f = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

- $\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale. L'elemento neutro è:

$$0_{\mathbb{K}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$$

- $\mathbb{K}[x]$ è l'insieme di polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in \mathbb{K} . È uno spazio vettoriale

3. Le successioni sono delle liste di numeri $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}$. Ad esempio:

$$(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) \in \mathbb{C}$$

formano uno spazio vettoriale \mathcal{S} su \mathbb{K} :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Ad esempio:

$$(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) + (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) = (2, -1, 3, 3, 7, i, \dots)$$

La moltiplicazione per uno scalare è:

$$\alpha(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Ad esempio:

$$2(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) = (2, -2, 4, 6, 12, 2i, \dots)$$

L'insieme di successioni che soddisfano la relazione:

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 3a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ad esempio:

$$(1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$

è uno spazio vettoriale. L'elemento neutro è:

$$0_S = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

4. L'insieme di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale:

$$f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha \in \mathbb{R},$$

$$\alpha f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ è la funzione: $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0$

5. $V = \{0_v\}$ è uno spazio vettoriale. Scriviamo $V = \{0\}$.

5.2 Osservazioni

Sia V uno spazio vettoriale. Sia $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$

a. $\alpha 0_v = 0_v$, infatti:

$$\alpha 0_v = \alpha(0_v + 0_v) = \alpha 0_v + \alpha 0_v$$

Sommando $-\alpha 0_v$ ad entrambi i membri otteniamo:

$$\alpha 0_v + (-\alpha 0_v) = (\alpha 0_v + \alpha 0_v) + (-\alpha 0_v)$$

$$0_v = \alpha 0_v + (\alpha 0_v - \alpha 0_v)$$

$$0_v = \alpha 0_v + 0_v$$

$$0_v = \alpha 0_v$$

b. $0 \cdot v = 0_v$

$$v = 1 \cdot v = (1 + 0)v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$$

Sommando $-v$ ad entrambi i membri otteniamo:

$$v + (-v) = v + 0 \cdot v + (-v)$$

$$0_v = 0 \cdot v + (v + (-v))$$

$$0_v = 0 \cdot v + 0_v$$

$$0_v = 0 \cdot v$$

c. Se $\alpha v = 0_v$, allora $\alpha = 0$ oppure $v = 0_v$

$$\alpha v = 0_v$$

$$\alpha v = \alpha 0_v$$

$$\alpha v = \alpha(v - v)$$

$$\alpha v = \alpha v - \alpha v$$

$$0_v = 0_v$$

d. $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$

5.3 Definizione combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano $v_1, \dots, v_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Il vettore:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

è detto **combinazione lineare** di v_1, \dots, v_n con coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Esempio 5.2

Il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

è combinazione lineare di:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con coefficienti 1, 2, 3 rispettivamente. Infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra combinazione lineare è:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 5.3

Il polinomio

$$f = 2x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$$

è combinazione lineare di:

$$g_1 = x^2 + 2x, \quad g_2 = x - 1, \quad g_3 = \frac{1}{2}x - 1$$

Infatti:

$$2g_1 + 3g_2 + (-6)g_3 = 2(x^2 + 2x) + 3(x - 1) - 6\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 2x^2 + 4x + 3 = f$$

5.4 Definizione di insieme di generatori

Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Se ogni $v \in V$ è combinazione lineare di v_1, \dots, v_n si dice che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un **insieme di generatori** e V è detto **finitamente generato**.

5.4.1 Esempi

Esempio 5.4

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{K}^3 = M_{3 \times 1}(\mathbb{K})$ (per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Infatti, se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, allora:

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivendo:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con 1 nella i -esima posizione, otteniamo l'insieme di generatori di \mathbb{K}^n : $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dunque \mathbb{K}^n è finitamente generato.

Esempio 5.5

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di \mathbb{R}^2 . Infatti, se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ allora

$$\begin{aligned} v &= (v_1, -v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(v_2 - v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (v_1 - v_2) + v_2 \\ 3(v_1 - v_2) + v_2 + 3(v_2 - v_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I coefficienti della combinazione lineare non sono univocamente determinati:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esempio 5.6

Le successioni:

$$u_1 = (1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$

$$u_2 = (0, 1, 5, 22, 95, \dots)$$

formano un insieme di generatori di \mathcal{S}' . Infatti, se:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a, b, 5b - 3a, 5(5b - 3a) - 3b, \dots) \in \mathcal{S}'$$

allora

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = au_1 + bu_2$$

Esempio 5.7

Gli spazi vettoriali \mathcal{S} , $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (successioni, polinomi, funzioni) **non** sono finitamente generati.

5.5 Definizione di sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Un sottoinsieme $\emptyset \neq U \subseteq V$ è detto **sottospazio** di V se soddisfa le proprietà:

1. per ogni $u, u' \in U$:

$$u + u' \in U$$

2. per ogni $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha u \in U$$

Osservazione:

In tal caso U è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni $+$, \cdot di V .

5.5.1 Esempi

Esempio 5.8

$$\mathbb{K}_n[x] \subseteq \mathbb{K}[x] \quad \text{sottospazi}$$

$$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \quad \text{sottospazi}$$

Esempio 5.9

Il sottoinsieme

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = mv_1 \right\}$$

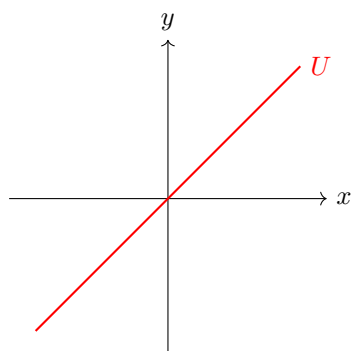
è un sottospazio di \mathbb{R}^2 per qualsiasi $m \in \mathbb{R}$. Infatti:

1.

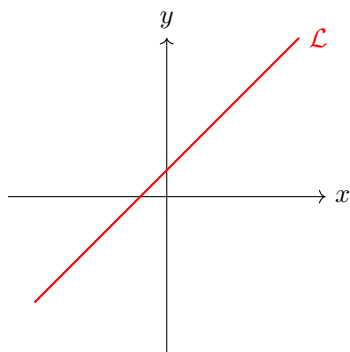
$$\begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+u \\ mv+mu \end{pmatrix}$$

2.

$$\alpha \begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ m(\alpha v) \end{pmatrix} \in U$$



Il sottoinsieme $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = mv_1 + c \right\}$ non è un sottospazio se $c \neq 0$.



Infatti:

$$\begin{pmatrix} v \\ mv + c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + u \\ mv + mu + 2c \end{pmatrix} \notin U$$

$$mv + mu + 2c \neq m(v + u) + c$$

Esempio 5.10

$O = \{0_v\} \subseteq V$ è un sottospazio per ogni spazio vettoriale V . Infatti

1. $0_v + 0_v = 0_v \in O$
2. $\alpha 0_v = 0_v \in O$

Ogni sottospazio U di V contiene 0_v . infatti $\forall u \in U$ abbiamo che $(-1)u = -u \in U$. Quindi $0_v = u + (-u) \in U$

Esempio 5.11

Il sottoinsieme

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

è un sottospazio di $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Infatti

1.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & b + e \\ 0 & c + f \end{pmatrix} \in T$$
2.
$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha c \end{pmatrix} \in T$$

Esempio 5.12

$$\begin{array}{ccc} \text{polinomi di grado } \leq n & & \text{polinomi} \\ \underbrace{\mathbb{K}_n[x]}_{S'} & \subseteq & \underbrace{\mathbb{K}[x]}_S \\ \text{successioni che soddisfano una relazione} & & \text{successioni} \end{array}$$

sono sottospazi

5.6 Definizione di sottospazio generato

Definizione 5.2

Dati $v_1, \dots, v_n \in V$, l'insieme

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$$

di tutte le combinazioni lineari di v_1, \dots, v_n è un sottospazio di V . Infatti:

1.

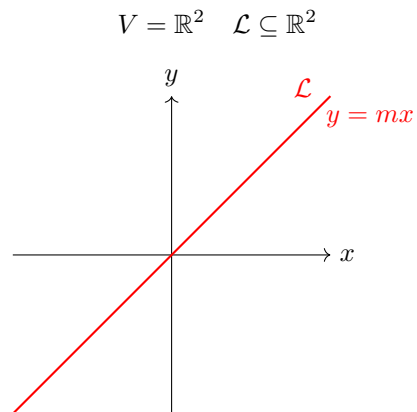
$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ &= (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1) + \dots + (\alpha_n v_n + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \end{aligned}$$

2.

$$\beta \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Diciamo che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è il sottospazio generato da v_1, \dots, v_n .

Esempio 5.13



è il sottospazio generato da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

\mathcal{S}' è il sottospazio di \mathcal{S} generato da u_1 e u_2 .

5.7 Definizione

Se U, W sono sottospazi di V , allora l'intersezione

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \wedge v \in W\}$$

è un sottospazio di V .

In generale, l'unione

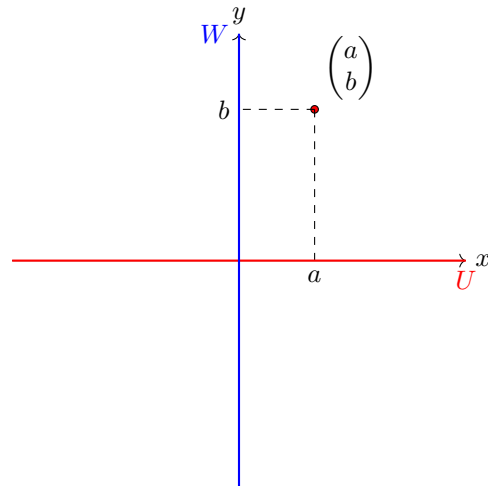
$$U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \vee v \in W\}$$

non è un sottospazio di V .

Esempio 5.14

$$V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin U \cup W$$

Quindi $U \cup W \subseteq V$ non soddisfa la prima proprietà dei sottospazi.

L'insieme $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ è un sottospazio di V , detto la **somma di U e W** .

NB:

$U \cup W \subseteq U + W$ perchè

$$U = \{u = u + 0_w \mid u \in U\}$$

$$W = \{w = 0_u + w \mid w \in W\}$$

5.8 Definizione

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{K}^m . Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Il sottospazio di \mathbb{K}^m

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

generato dalle colonne di A è detto lo **spazio delle colonne** di A .

Esempio 5.15 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ad esempio:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in C(A)$$

NB:

$$\begin{aligned} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in C(A) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

*Il sistema lineare $Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ possiede soluzione***5.9 Proposizione**

Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Lo spazio delle colonne $C(A)$ consiste di tutti i vettori $b \in \mathbb{K}^m$ per i quali il sistema lineare $Ax = b$ possiede soluzione.

5.9.1 Dimostrazione

$$\begin{aligned} C(A) &\stackrel{def}{=} \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ b \in \mathbb{K}^m \mid \exists v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ tale che } Av = b \right\} \end{aligned}$$

□

5.10 Definizione

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ l'insieme

$$N(A) = \left\{ v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \mathbb{O} \right\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

(dove $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) è detto **spazio nullo di A** .

5.11 Proposizione

Lo spazio nullo $N(A)$ di una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ è un sottospazio di \mathbb{K}^n .

5.11.1 Dimostrazione

Siano $v, u \in N(A)$, cioè $Av = \mathbb{O}$ e $Au = \mathbb{O}$ e sia $\alpha \in \mathbb{K}$. Allora

- Per la legge distributiva del prodotto di matrici:

$$A(v + u) = Av + Au = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

Quindi $v + u \in N(A)$

- Per la proprietà di moltiplicazione per uno scalare:

$$A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

Quindi $\alpha v \in N(A)$

Dunque $N(A)$ è un sottospazio. \square

Esempio 5.16

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$N(A) = \{ \text{Soluzioni del sistema lineare } Ax = 0 \}$$

Risolviamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} i & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ i & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ i & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Quindi } N(A) = \left\{ \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Esempio 5.17

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Risolviamo il sistema lineare $Ax = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Siccome la matrice ha soltanto 2 colonne dominanti bisogna introdurre un parametro per la variabile libera x_3 .

$$x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \left(-\frac{1}{2}t \right) = t \\ x_2 = -\frac{1}{2}t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\text{Quindi } N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{\text{sottospazio}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

6 Dipendenza e indipendenza lineare

Esempio 6.1

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ insieme di generatori}$$

Infatti, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V$ abbiamo che:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= (v_2 - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - \frac{3}{2}v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v_2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Non è efficiente usare l'insieme di generatori \mathcal{C} perchè esistono almeno 2 sottoinsiemi di generatori più piccoli:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{C}$$

In particolare:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.1 Proposizione

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} e v_n è una combinazione lineare di v_1, \dots, v_{n-1} , allora $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori.

6.1.1 Dimostrazione

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per ogni $v \in V$ esistono $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right) \\
&= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1}
\end{aligned}$$

Quindi $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori. \square

6.2 Definizione

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori in uno spazio vettoriale V . Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è detto **linearmente dipendente** se almeno uno dei vettori v_1, \dots, v_n è combinazione lineare dei rimanenti.

6.3 Teorema

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Sono equivalenti i seguenti enunciati:

1. $\{v_1, \dots, v_n\}$ **non** è linearmente dipendente
2. Se

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

allora $\alpha_i = \beta_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$

3. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sono coefficienti tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_v$$

allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$

Se valgono le condizioni (1), (2) + (3), allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è detto **linearmente indipendente**.

6.3.1 Dimostrazione

Dimostriamo che $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$, quindi:

$$\neg(1) \Rightarrow \neg(2) \Rightarrow \neg(3) \wedge (2) \Rightarrow (3)$$

- $[(2) \Rightarrow (3)]$ Supponiamo che:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Supponiamo che:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_v$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

Quindi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ per (2).

- $[\neg(2) \Rightarrow \neg(3)]$ Supponiamo che:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

e $\alpha_j \neq \beta_j$ per qualche $1 \leq j \leq n$. Quindi:

$$0_v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i$$

e allora:

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i + \sum_{i=j+1}^n \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i$$

Dunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente dipendente

- $[\neg(1) \Rightarrow \neg(3)]$ Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia linearmente dipendente, cioè esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i + \sum_{i=j+1}^n \alpha_i v_i$$

Allora:

$$0_v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1)v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

Dunque (3) non è verificata. \square

6.3.2 Esempi

Esempio 6.2

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente. Infatti se:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$ e $2\alpha_2 = 0$. Abbiamo che $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 = 0$. Quindi l'insieme è linearmente indipendente.

Esempio 6.3

Un insieme $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ è linearmente dipendente se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha v_1 = v_2$ oppure $v_1 = \alpha v_2$

Esempio 6.4

Un insieme $\{v\} \subseteq V$ è linearmente dipendente se e solo se $v = 0_v$. Inoltre, per ogni $\{v_1, \dots, v_n\}$, se $v_j = 0_v$ per qualche j , allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente dipendente perchè:

$$0_v = \underbrace{0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{j-1}}_{0_v} + \underbrace{v_j}_{0_v} + \underbrace{0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_n}_{0_v}$$

e quindi abbiamo $\neg(3)$

6.4 Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. L'insieme $\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è detto **base** di V se \mathcal{U} è un insieme di generatori di V e \mathcal{U} è linearmente indipendente.

6.5 Osservazione

Per il Teorema 6.4 un sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq V$ è una base se e solo se possiamo ricostruire in un modo unico tutti i vettori di V mediante combinazioni lineari. Possiamo pensare ad una base $\mathcal{U} = \{b_1, \dots, b_n\}$ di V come ad un sistema di coordinate:

Sia $v \in V$. Esiste un unico vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$.

Scriviamo $[v]_{\mathcal{U}}$ per il vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

6.5.1 Esempi

Esempio 6.5

$$V = \mathbb{K}^n \quad \mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right\}$$

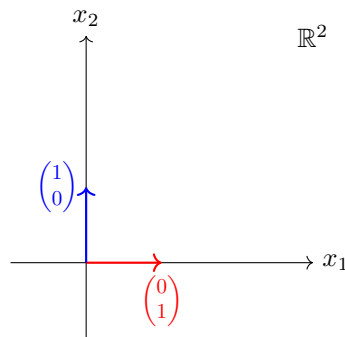


Figura 12: Base canonica di \mathbb{K}^n

Infatti, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ abbiamo che:

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

Supponiamo $\mathbb{O} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, quindi:

$$v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0$$

Esempio 6.6

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di \mathbb{R}^2 , quindi non esiste un'unica base di \mathbb{R}^2 .

6.6 Base di $C(U)$ per una matrice U in forma ridotta

Esempio 6.7

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(U) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Le colonne dominanti formano una base di $C(U)$, infatti:

- **Linearmente indipendente:** Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 7\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_1 + 7\alpha_2 = 0$

- **Insieme di generatori** Proposizione 6.1:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $C(U)$.

6.6.1 Osservazioni

Le colonne dominanti di una matrice U in forma ridotta formano una base di $C(U)$. Inoltre le colonne non nulle di U^T (cioè le righe non nulle di U formano una base di $C(U^T)$).

6.7 Proposizione

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .

1. \mathcal{B} è un insieme di generatori minimo, cioè nessun sottoinsieme di \mathcal{B} è un insieme di generatori
2. \mathcal{B} è massimamente linearmente indipendente, cioè nessun insieme di vettori che contenga propriamente \mathcal{B} è linearmente indipendente.

6.8 Teorema

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} finitamente generato.

- Se $V \neq 0$, allora V possiede una base.
- Se $V = 0$, allora V **non** possiede una base.

6.8.1 Dimostrazione

Se $V = 0 = \{0_v\}$, allora ogni sottoinsieme non vuoto di V contiene 0_v e quindi non può essere linearmente indipendente.

Supponiamo $V \neq 0$.

Sia $\mathcal{B}_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori. Se \mathcal{B}_n è linearmente indipendente, allora \mathcal{B}_n è una base di V . Altrimenti uno dei vettori di \mathcal{B}_n è combinazione lineare dei rimanenti. Senza perdita di generalità supponiamo che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per 6.1 $\mathcal{B}_{n-1} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori. Se \mathcal{B}_{n-1} è linearmente indipendente, allora \mathcal{B}_{n-1} è una base. Altrimenti continuiamo come sopra. Proseguendo così si otterrà un sottoinsieme di \mathcal{B}_n che è una base. \square

Esempio 6.8

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{v_1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{v_3} \right\}$$

\mathcal{C}_3 è un insieme di generatori, ma non è linearmente indipendente:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_2 + 2v_1$$

Allora:

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori. Inoltre \mathcal{C}_2 è linearmente indipendente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$. Allora \mathcal{C}_2 è una base.

6.9 Teorema di Steinitz

Sia $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di V e $\mathcal{L} = \{u_1, \dots, u_m\}$ un insieme linearmente indipendente. Allora $m \leq n$ ed esiste un insieme di generatori di V formato da \mathcal{L} e $n - m$ vettori di \mathcal{G} .

6.10 Corollario

Se $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ sono basi di uno spazio vettoriale, allora $m = n$.

6.10.1 Dimostrazione

Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_2$ nel teorema di Steinitz, si ha $m \leq n$. Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_1$ si ha $n \leq m$. Quindi $m = n$. \square

6.11 Definizione

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Il numero di vettori che formano una base di V è detto **dimensione** di V e si indica con $\dim_{\mathbb{K}}(V)$.

6.11.1 Esempi

Esempio 6.9

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad V = \mathbb{C}$$

$\{1\}$ è una base di V su \mathbb{C} . Dunque $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

Esempio 6.10

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{C}$$

$\{1, i\}$ è una base di V su \mathbb{R} .

- (Insieme di generatori): $z \in \mathbb{C} = V$

$$z = a + bi = a(1) + b(i), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (Linearmente indipendente): $0_v \in \mathbb{C}$

$$0 = 0 + 0i$$

è l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di $\{1, i\}$.

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$$

6.12 Corollario

In uno spazio vettoriale V di dimensione $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, si ha

1. Un insieme con $> n$ vettori è linearmente dipendente.
2. Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base di V .
3. Ogni insieme di generatori consiste di almeno n vettori

6.13 Proposizione

Sia $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Allora ogni sottospazio U di V ha dimensione $\dim_{\mathbb{K}}(U) \leq n$. Inoltre $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n$ se e solo se $U = V$

6.13.1 Dimostrazione

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base di U . Allora \mathcal{B} è linearmente indipendente in V perchè $0_v = 0_u$. Quindi possiamo completare \mathcal{B} a una base di V (usando il teorema di Steinitz). Allora $\underbrace{\#\mathcal{B}}_{\dim_{\mathbb{K}}(U)} \leq \underbrace{\#\mathcal{B}'}_{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$. Abbiamo che \mathcal{B} contiene n

elementi (cioè $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n$) se e solo se \mathcal{B} è una base di V . Quindi in tal caso abbiamo:

$$U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = V \quad \square$$

7 Applicazione lineare

D'ora in poi, tutti gli spazi vettoriali saranno **finitamente generati**.

7.1 Definizione

Siano U e V spazi vettoriali su \mathbb{K} . Un'applicazione $f : U \rightarrow V$ si dice **lineare** se, per $u, u' \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha:

1. $f(u + u') = f(u) + f(u')$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

7.1.1 Osservazioni

1. $f(0_u) \stackrel{5.2(b)}{=} f(0 \cdot 0_u) \stackrel{7.1(2)}{=} 0 \cdot f(0_u) \stackrel{5.2(b)}{=} 0_v$
2. $f(-u) \stackrel{5.2(d)}{=} f((-1) \cdot u) \stackrel{7.1(2)}{=} (-1) \cdot f(u) \stackrel{5.2(d)}{=} -f(u)$

Per tutti gli elementi di U

7.1.2 Esempi

Esempio 7.1

$$U = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \mathbb{R}^2 = M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$f : U \rightarrow V$$

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

f è lineare. Infatti per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$

1.

$$f(p + q) = ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Quindi $f(p + q) = f(p) + f(q)$

2. $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha p) = f((\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2) = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha f(p) = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(\alpha p) = \alpha f(p)$

7.2 Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, definiamo $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$f(v) = Av$. f_A è lineare:

1. $f_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = f_A(v) + f_A(w)$
2. $f_A(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha f_A(v)$

7.2.1 Esempi

Esempio 7.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 - i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$f_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$$f_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 - i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + iy \\ (1 - i)y \\ x \end{pmatrix}$$

Esempio 7.3

$$f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2, \quad f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3z - y \end{pmatrix}$$

f è lineare. Notiamo che, per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + y f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + z f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $f = f_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Per ogni applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ e per $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo che

$$\begin{aligned} v &= v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \dots + v_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \\ f(v) &= f(v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n) \\ &= f(v_1 e_1) + f(v_2 e_2) + \dots + f(v_n e_n) \\ &= v_1 f(e_1) + v_2 f(e_2) + \dots + v_n f(e_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f(e_1) \dots f(e_n)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= Av
\end{aligned}$$

dove $A = (f(e_1) \dots f(e_n))$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di \mathbb{K}^n . Allora $f = f_A$. La matrice A è detta la **matrice associata a f (rispetto alla base canonica)**

NB: Per una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile abbiamo $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ e $f_{A^{-1}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. Osserviamo:

$$\begin{aligned}
f_{A^{-1}}(f_A(v)) &= f_{A^{-1}}(Av) = A^{-1}(Av) = (A^{-1}A)v = I_n v = v \\
f_A(f_{A^{-1}}(v)) &= f_A(A^{-1}v) = AA^{-1}v = I_n v = v
\end{aligned}$$

7.3 Definizione

Un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ è detta **isomorfismo** se esiste $g : W \rightarrow V$ tale che $g(f(v)) = v$ per ogni $v \in V$ e $f(g(w)) = w$ per ogni $w \in W$. L'applicazione lineare g è detta **inversa di f** e si dice che V e W sono **isomorfi**. Scriviamo $f^{-1} = g$ e $V \cong W$.

Esempio 7.4

Sia $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare. Allora esiste una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che $f = f_A$. L'applicazione lineare f è un isomorfismo se e solo se A è invertibile. Infatti, supponiamo che esista f^{-1} e consideriamo la matrice associata B , cioè $f^{-1} = f_B$. Allora, per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
(BA)v &= f_B f_A(v) = f^{-1} f(v) = v \\
&= f f^{-1}(v) = f_A f_B(v) = f_A(Bv) = (AB)v
\end{aligned}$$

Ne segue $AB = I_n = BA$. Quindi $B = A^{-1}$

7.4 Applicazione delle coordinate

Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} . Per ogni $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v \in V$ abbiamo definito il vettore:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

L'applicazione $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ definita come:

$$C_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

è lineare ed è detta **applicazione delle coordinate rispetto a \mathcal{B}** . Infatti, per:

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n, \quad w = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \in V$$

e $\alpha \in \mathbb{K}$, abbiamo

1.

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(v+w) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) \\ &= C_{\mathcal{B}}((\alpha_1 + \beta_1)b_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)b_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(v) + C_{\mathcal{B}}(w) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(v+w) = C_{\mathcal{B}}(v) + C_{\mathcal{B}}(w)$

2.

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(\alpha v) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n)) \\ &= C_{\mathcal{B}}((\alpha\alpha_1)b_1 + \dots + (\alpha\alpha_n)b_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha C_{\mathcal{B}}(v) = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}$$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha C_{\mathcal{B}}(v)$

Esempio 7.5

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1 + x, b_2 = 1 + x^2, b_3 = x + x^2\}$$

è una base di V .

Prendiamo $v = 6 + 3x - x^2 \in V$. Poichè \mathcal{B} è una base di V , esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$.

$$\begin{aligned} 6 + 3x - x^2 &= \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_1x) + (\alpha_2 + \alpha_2x^2) + (\alpha_3x + \alpha_3x^2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema lineare usando l'Eliminazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 - \alpha_2 = 5 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi:

$$6 + 3x - x^2 = v = 5b_1 + b_2 - 2b_3 = 5(1+x) + (1+x^2) - 2(x+x^2)$$

7.5 Applicazione delle coordinate $C_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$

Esempio 7.6

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \{b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}\} \text{ base}$$

Per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $C_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema lineare $Ax = v$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (b_1 \quad b_2)$$

Siccome \mathcal{B} è una base, α_1 e α_2 sono univocamente determinati e quindi $Ax = v$ ha soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^2$. Per il teorema 4.2, A è invertibile e

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v$$

Calcolando A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

Dunque, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(v) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{8}v_2 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In generale, per una base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ di \mathbb{K}^n , la matrice $A = (b_1, \dots, b_n)$ è invertibile e $C_{\mathcal{B}} = f_{A^{-1}}$. Dunque $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo con inversa f_A .

7.6 Teorema

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} con base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. L'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo.

7.6.1 Dimostrazione

Definiamo $g_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$,

$$g_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

Mostriamo che $g_{\mathcal{B}}$ è l'inversa di $C_{\mathcal{B}}$. Infatti:

$$C_{\mathcal{B}} \left(g_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) \right) = C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Per ogni $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V$,

$$g_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}(v)) = g_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v$$

Dunque $g_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}^{-1}$ \square

7.7 Osservazione

Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ è una base di V , allora $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ è una base di W . In particolare, $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

7.8 Corollario

Due spazi vettoriali V e W sono isomorfi se e solo se:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$$

7.8.1 Dimostrazione

Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo, allora $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$

Supponiamo che V , W sono spazi vettoriali tali che:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) = n$$

Allora esiste una base di V $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e esiste una base di W $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$. Consideriamo $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ e $C_{\mathcal{C}} : W \rightarrow \mathbb{K}^n$. Notiamo che abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}} & W \\ & \searrow C_{\mathcal{B}} \quad \nearrow C_{\mathcal{C}}^{-1} & \\ & \mathbb{K}^n & \end{array}$$

Figura 13: Diagramma delle implicazioni

L'applicazione lineare ha inversa:

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}} : W \rightarrow V$$

dove

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}}(w) = C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w))$$

per ogni $w \in W$. Infatti:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}} (C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}}(w)) &= C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{B}} (C_{\mathcal{B}}^{-1} (C_{\mathcal{C}}(w)))) \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{C}}(w)) = w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &C_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\mathcal{C}} (C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(v)) \\ &= C_{\mathcal{B}}^{-1} (C_{\mathcal{C}} (C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{B}}(v)))) \\ &= C_{\mathcal{B}}^{-1} (C_{\mathcal{B}}(v)) = v \end{aligned}$$

Dunque V e W sono isomorfi. \square

NB: Per ogni $b_i \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$C_{\mathcal{C}}^{-1} \circ C_{\mathcal{B}}(b_i) = C_{\mathcal{C}}^{-1} (C_{\mathcal{B}}(b_i))$$

$$= C_C^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = C_i$$

$$\begin{aligned} C_C^{-1} \circ C_B(\mathcal{B}) &= \{C_C^{-1} \circ C_B(b_1), \dots, C_C^{-1} \circ C_B(b_n)\} \\ &= \{C_1, \dots, C_n\} = \mathcal{C} \end{aligned}$$

7.9 Matrice del cambio di base

Esempio 7.7

$$V = \mathbb{K}^2$$

con basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Sia $v \in V$. Dati i numeri $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

come possiamo determinare $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} &= [v]_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{D}}(v) = C_{\mathcal{D}}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \\ &= C_{\mathcal{D}} \left(C_{\mathcal{B}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= C_{\mathcal{D}} \circ C_{\mathcal{B}}^{-1} ([v]_{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

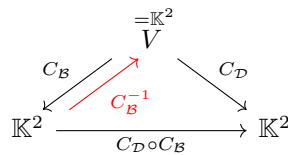


Figura 14: Diagramma delle implicazioni

Per 7.5, $C_B \circ C_B^{-1} = f_C$ per una matrice C , cioè per ogni $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$,

$$C_D \circ C_B^{-1} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

In questo esempio, abbiamo che $C_D : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ e $C_B^{-1} : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ sono della forma:

$$C_D = f_{A^{-1}} \quad e \quad C_B^{-1} = f_B$$

dove:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allora

$$f_{A^{-1}B} = f_{A^{-1}} \circ f_B = C_D \circ C_B^{-1} = f_C$$

Quindi $C = A^{-1}B$. Calcolando A^{-1} :

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)}_A \xrightarrow{EG} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)}_{I_2 \quad A^{-1}}$$

Abbiamo:

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Allora, per ogni $v \in V$, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} [v]_B = [v]_D$$

Teorema 4 Siano $\mathcal{B}\{b_1, \dots, b_n\}$ e $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ basi di uno spazio vettoriale V . Esiste una matrice $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ tale che:

$$[v]_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}}$$

Le colonne di $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ sono i vettori $[b_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{C}}$. La matrice $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ è detta **matrice del cambio di base** $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.

7.9.1 Dimostrazione

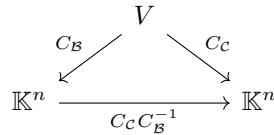


Figura 15: Diagramma delle implicazioni

Per 7.2, esiste una matrice A tale che $C_C C_B^{-1} = f_A$. Inoltre:

$$A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = A \stackrel{7.2}{=} (C_C C_B^{-1}(e_1) \dots C_C C_B^{-1}(e_n))$$

$$\begin{aligned}
&= (C_{\mathcal{C}}(b_1) \dots C_{\mathcal{C}}(b_n)) \\
&= ([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}}) \quad \square
\end{aligned}$$

dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica.

7.9.2 Osservazione

L'applicazione lineare $C_{\mathcal{C}}C_{\mathcal{B}}^{-1}$ è un isomorfismo con inversa $C_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{C}}^{-1}$. Dunque per 7.3, la matrice $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambio di base $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1} = A_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$.

Esempio 7.8

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{B} &= \{1+x, 1+x^2, x+x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}
\end{aligned}$$

NB:

$$C_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} &= ([b_1]_{\mathcal{C}} \ [b_2]_{\mathcal{C}} \ [b_3]_{\mathcal{C}}) \\
&= (C_{\mathcal{C}}(b_1) C_{\mathcal{C}}(b_2) C_{\mathcal{C}}(b_3)) \\
&= (C_{\mathcal{C}}(1+x) C_{\mathcal{C}}(1+x^2) C_{\mathcal{C}}(x+x^2)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Per ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = [a_0 + a_1x + a_2x^2]_{\mathcal{C}}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1)(1+x) + (a_0 + a_2)(1+x^2) + (a_1 + a_2)(x+x^2)$$

7.10 Matrice associata a f rispetto a basi

Esempio 7.9

$$\begin{aligned}
U &= \mathbb{R}_2[x], \quad V = \mathbb{R}^2 \\
f : U &\rightarrow V \text{ tale che } f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ovvero, per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$,

$$f(p) = f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{1, x, x^2\} \text{ base di } U \\ \mathcal{B} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } V \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ C_C \downarrow & \uparrow C_C^{-1} & \downarrow C_B \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C_B \circ f \circ C_C^{-1}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Figura 16: Diagramma delle implicazioni

Per 7.2 esiste una matrice A associata a $C_B \circ f \circ C_C^{-1}$ rispetto alla base canonica:

$$C_B \circ f \circ C_C^{-1} = f_A$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= (C_B \circ f \circ C_C^{-1}(e_1) \quad C_B \circ f \circ C_C^{-1}(e_2) \quad C_B \circ f \circ C_C^{-1}(e_3)) \\ &= (C_B \circ f(1) \quad C_B \circ f(x) \quad C_B \circ f(x^2)) \\ &= \left(C_B \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_B \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_B \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

Osserviamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per ogni $p \in U$,

$$[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} [p]_{\mathcal{C}}$$

Un esempio con $p = 3 + 2x - x^2$ $f(p)$?

$$[p]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(p) = 4b_1 - b_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 5 Siano U, V spazi vettoriali su \mathbb{K} , $f : U \rightarrow V$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ base di U , $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ base di V .

Esiste una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tale che $A[u]_{\mathcal{C}} = [f(u)]_{\mathcal{B}}$ per ogni $u \in U$. A è detta **matrice associata a f rispetto alla base \mathcal{C} di U e la base \mathcal{B} di V** . Le sue colonne sono $[f(c_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [f(c_n)]_{\mathcal{B}}$.

Esempio 7.10

Definiamo l'applicazione lineare $id : V \rightarrow V$ come $id(v) = v$ per ogni $v \in V$. Allora la matrice associata a id rispetto alla base \mathcal{B} e alla base \mathcal{C} di V è la matrice del cambio di base $A_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$

8 Rango + nullità

8.1 Definizione

Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_w\}$$

è un sottospazio di V , detto **spazio nullo di f** . Inoltre $Im(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ è un sottospazio di W detto **immagine di f** .

8.1.1 Esempi

Esempio 8.1

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

$$N(f_A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = N(A)$$

$$Im(f_A) = \{Av \in \mathbb{K}^m \mid v \in \mathbb{K}^n\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}v_1 \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \right.$$

$$v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \Big\} = C(A)$$

(Combinazioni lineari delle colonne di A)

Esempio 8.2

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^2, \quad f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} \\ p &= a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\ N(f) &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 + a_2 = 0\} \\ Im(f) &= \left\{ f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Esempio 8.3

$$\begin{aligned} i &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ i \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ N(i) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid i \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ Im(i) &= \left\{ i \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

8.2 Teorema (nullità + rango)

Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(N(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

8.2.1 Dimostrazione

Notiamo che $N(f) \subseteq V$ è un sottospazio di V . Quindi:

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(f)) = m \leq n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

per 6.11.

Sia $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq N(f) \subseteq V$ una base di $N(f)$. Per il teorema di Steinitz, possiamo completare $\{v_1, \dots, v_m\}$ ad una base di V , cioè esiste una base $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ di V . Si può dimostrare che $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $Im(f)$, cioè $\dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$ è uguale a $n - m$. Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n = m + (n - m) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(N(f)) \quad \square$$

Esempio 8.4

$$f : V \rightarrow W$$

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^2$$

Per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, definiamo:

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N(f) &= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 = -a_2\} \\ &= \{ax - ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \quad a = a_1 \\ &= \{a(x - x^2) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle x - x^2 \rangle \end{aligned}$$

L'insieme $\{x - x^2\}$ è un insieme di generatori e inoltre è linearmente indipendente, cioè è una base di $N(f)$.

Completiamo $\{x - x^2\}$ a una base di $V = \mathbb{R}_2[x]$

$$\{x - x^2, 1, x\} \subseteq V$$

Dimostriamo che

$$\mathcal{B} = \{f(1), f(x)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{è una base di } Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- **Linearmente indipendente:** Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha = 0$ e $\beta = \alpha + \beta = 0$.

- **Insieme di generatori di $\text{Im}()$** : Per ogni $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi \mathcal{B} è un insieme di generatori.

8.3 Dimensione di $C(A)$

Esempio 8.5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Troviamo la forma ridotta di A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1), E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

In 6.6 abbiamo visto che le colonne dominanti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una

base di $C(U)$ e $\dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = 2$.

Il problema è che $C(U) \neq C(A)$, in particolare:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C(U)$$

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \frac{2}{3}\beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 0 = 1 \end{cases} \right)$$

il sistema lineare non ha soluzione

8.3.1 Proposizione

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e sia $U \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ una forma ridotta di A . Allora lo spazio delle colonne $C(A)$ e lo spazio delle colonne $C(U)$ sono isomorfi e quindi hanno la stessa dimensione:

$$\dim_{\mathbb{K}}(C(A)) = \dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = rk(U)$$

8.3.2 Dimostrazione

Sia $E \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ la matrice invertibile tale che $U = EA$ e $A = E^{-1}U$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad f_E(v) = Ev$$

con inversa $f_E^{-1} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ $f_E^{-1}(v) = f_{E^{-1}}(v) = E^{-1}v$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightleftharpoons[f_{E^{-1}}]{f_E} & \mathbb{K}^m \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\ C(A) & \xrightleftharpoons[f_{E^{-1}}]{f_E} & C(U) \end{array}$$

Vogliamo dimostrare che per ogni $v \in C(A)$, abbiamo $f_E(v)$ è un elemento di $C(U)$ e, per $w \in C(U)$ abbiamo $f_{E^{-1}}(w) \in C(A)$. Infatti, $C(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dove $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e $C(U) = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ dove $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$. Inoltre $\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = U = EA = E \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ea_1 & \dots & Ea_n \end{pmatrix}$ e quindi $Ea_1 = u_1, \dots, Ea_n = u_n$. Abbiamo $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = A = E^{-1}U = \begin{pmatrix} E^{-1}u_1 & \dots & E^{-1}u_n \end{pmatrix}$ e quindi $a_1 = E^{-1}u_1, \dots, a_n = E^{-1}u_n$. Dunque, per ogni $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in C(A)$, abbiamo che:

$$f_E(v) = f_E \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_E(a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ea_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in C(U)$$

e, per ogni $w = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \in C(U)$, abbiamo che:

$$f_{E^{-1}}(w) = \sum_{i=1}^n \beta_i (E^{-1}u_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i \in C(A)$$

Quindi abbiamo un'applicazione lineare $f_E : C(A) \rightarrow C(U)$ con inversa $f_{E^{-1}} : C(U) \rightarrow C(A)$. Dunque f_E è un isomorfismo e

$$\dim_{\mathbb{K}}(C(A)) \stackrel{7.7}{=} \dim_{\mathbb{K}}(C(U)) = rk(U) \quad \square$$

Esempio 8.6

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } C(U)$$

quindi

$$\left\{ f_{E^{-1}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f_{E^{-1}} \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $C(A)$ per 7.7.

In generale, le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$.

8.4 Dimensione di $N(A)$

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Per il teorema nullità + rango, abbiamo:

$$\begin{aligned} n &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = \dim_{\mathbb{K}}(f_A) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_A)) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(N(A)) + \dim_{\mathbb{K}}(C(A)) = \dim_{\mathbb{K}}(N(A)) + rk(A) \end{aligned}$$

8.4.1 Corollario

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(A)) = n - rk(A)$$

8.5 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ con $r = rk(A)$ e $d = n - r = n - rk(A)$

1. Per determinare una base di $C(A)$:

- Trovare una forma ridotta U di A
- Le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$

2. Per determinare una base di $N(A)$:

- Risolvere il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ assegnando parametri t_1, \dots, t_d alle d variabili libere e ricavando le rimanenti variabili tramite "sostituzione all'indietro"
- Per $1 \leq i \leq d$ si ottiene una soluzione u_i di $Ax = 0$ assegnando il valore 1 al parametro t_i e 0 ai rimanenti parametri.
- Così facendo otteniamo $\{u_i, \dots, u_d\}$ un insieme linearmente indipendente.
- Dunque $\{u_i, \dots, u_d\}$ è una base di $N(A)$.

Esempio 8.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Le colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ formano una base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

di $C(A)$. Allora $\dim_{\mathbb{K}}(N(A)) = 4 - \text{rk}(A) = 4 - 2 = 2$. Risolviamo il sistema lineare $Ax = \mathbb{O}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

variabili libere:

$$x_3 = t_1 \quad x_4 = t_2$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -2(-t_1 - 2t_2) - 3t_1 = -t_1 + 4t_2 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 = -t_1 - 2t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

soluzioni:

$$\begin{pmatrix} -t_1 + 4t_2 \\ -t_1 - 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t_2 \\ -2t_2 \\ 0 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(A)$.

8.6 Proposizione

Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali V, W . Se A è la matrice associata a f rispetto a una base \mathcal{B} di V e una base \mathcal{D} di W , allora:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = \text{rk}(A)$$

Di conseguenza

$$\dim_{\mathbb{K}}(N(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - rk(A)$$

La dimensione $\dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$ è detta **rango di f** e scriviamo $rk(f)$. La dimensione $\dim_{\mathbb{K}}(N(f))$ è detta **nullità di f** .

8.7 Teorema

Siano $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Se $p \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $Ax = b$, allora l'insieme di tutte le soluzioni di $Ax = b$ è

$$L = \{p + u \mid u \in N(A)\}$$

8.7.1 Dimostrazione

Se $v = p + u$ con $u \in N(A)$, allora

$$Av = A(p + u) = Ap + Au \underset{Au=0}{=} Ap + 0 = b$$

Quindi v è una soluzione di $Ax = b$. Viceversa, se v è una soluzione di $Ax = b$, allora $Av = b = Ap$. Quindi

$$0 = Av - Ap = A(v - p) \quad \text{e} \quad \underbrace{v - p}_{=u} \in N(A)$$

Dunque $v = (v - p) + p = u + p \in L \quad \square$

Esempio 8.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Consideriamo $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = U$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Ponendo le variabili libere uguali a 0: $x_3 = x_4 = 0$. Troviamo una soluzione particolare:

$$p = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque l'insieme di soluzioni di $Ax = b$ è:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$