Logica

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2023/2024

Indice

1 Introduzione

La logica ha lo scopo di formalizzare il ragionamento matematico che è caratterizzato dal concetto di dimostrazione senza ambiguità

2 Sintassi della logica proposizionale

La logica proposizionale è formata da simboli formali ben definiti e sono divisi in:

2.1 Connettivi

- $\vee$ Congiunzione, And logico
- $\wedge$ Disgiunzione, Or logico
- $\neg$ Negazione, Not logico (non connette niente, è solo una costante logica che equivale a 0 nella logica booleana)
- $\perp$ Falso, Bottom, Assurdo
- $\rightarrow$ Implicazione, If-then

2.2 Ausiliari

- () Le parentesi non fanno parte della proposizione, ma servono solo a costruire il linguaggio

2.3 Simboli proposizionali

- $p_n, q_n, \psi_n, \ldots$ Le lettere minuscole indicizzate vengono usate per indicare una proposizione (sono infiniti simboli numerabili)

2.4 Altri simboli

- $|$ Tale che
- $\leftrightarrow$ Se e solo se

Definizioni utili 2.1

1. ***Stringa**: Una sequenza finita di simboli o caratteri*
2. ***Infinito numerabile**: Un insieme è infinito numerabile se è il più piccolo infinito possibile, cioè se è in corrispondenza biunivoca con l'insieme* $\mathbb{N}$

3 Principio di induzione

Il principio di induzione è un principio logico che permette di dimostrare che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un insieme infinito numerabile.

Una prima definizione induttiva fatta in modo non formale, ma con frasi in italiano è la seguente:

L'insieme di proposizioni $PROP$ è così definito *induttivamente*:

1. $\perp \rightarrow PROP$
2. se p è un simbolo proposizionale allora $p \in PROP$
3. **(Caso induttivo)** se $\alpha, \beta \in PROP$ allora $(\alpha \wedge \beta) \in PROP, (\alpha \vee \beta) \in PROP, (\alpha \rightarrow \beta) \in PROP, (\neg\alpha) \in PROP$
4. nient'altro appartiene a $PROP$

In questo modo è stato creato l'insieme $PROP$ che contiene tutte le proposizioni che possono essere create usando gli unici simboli che abbiamo definito $(\wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$.

Esempi di proposizioni corrette e scorrette:

- $(p_7 \rightarrow p_0) \in PROP$
- $p_7 \rightarrow p_0 \notin PROP$ (mancano le parentesi)
- $((\perp \vee p_{32}) \wedge (\neg p_2)) \in PROP$
- $((\rightarrow \wedge \notin PROP$
- $\neg\neg\perp \notin PROP$

3.1 Definizione induttiva formale dell'insieme $PROP$

Adesso l'insieme $PROP$ viene definito in modo formale usando i simboli proposizionali.

Definizione 3.1
L'insieme $PROP$ è il più piccolo insieme X di stringhe tale che:

1. $\perp \in X$
2. $p \in X$ *(Perchè è un simbolo proposizionale)*
3. *se* $\alpha, \beta \in X$ *allora* $(\alpha \rightarrow \beta) \in X, (\alpha \vee \beta) \in X, (\alpha \wedge \beta) \in X, (\neg\alpha) \in X$

$p, \alpha, \beta, \ldots$ *sono elementi proposizionali generici*

$AT =$ simboli proposizionali $+ \perp$ è l'insieme di tutte le proposizioni atomiche, cioè quelle che non contengono connettivi, sono quindi la più piccola parte non ulteriormente scomponibile

4 Proprietà su un insieme

Definito P un insieme di proprietà assunte da un insieme A si ha che:

- $P \subseteq A$
- $a \in A$ dove a è un elemento generico dell'insieme A

Si dice che a gode della proprietà P se $a \in P$.

Altri modi per dire che a gode della proprietà P sono:

- $P(a)$
- $P[a]$ (per non creare confusione con le parentesi tonde che sono usate come simboli ausiliari per costruire il linguaggio)

$P \subseteq PROP \qquad \forall \alpha \in PROP \;.\; P(\alpha)$
(il punto mette in evidenza ciè che viene dopo di esso e può anche essere omesso)

Esempio 4.1
Esempio di una proprietà sull'insieme $\mathbb{N}$*:*
$P = \{n | n \in \mathbb{N}$ *ed è pari* $\}$ *essendo* n *un numero generico indica la proprietà di essere pari.*
$P[5] \times$
$P[4] \surd$

4.1 Principio di induzione sui numeri naturali $\mathbb{N}$

$P \subseteq \mathbb{N}$

1. **Caso base**: se $P[0]$ e
2. **Passo induttivo**: se $\forall n \in \mathbb{N}(P[n] \Rightarrow P[n+1])$ allora $\forall n \in \mathbb{N} \;.\; P[n]$

Se si dimostra la proprietà per n e per il successivo $(n+1)$, allora si dimostra che la proprietà è vera per tutti i numeri naturali. Si sfrutta il fatto che esiste un minimo a cui prima o poi si arriva.

Esercizio 4.1
Dimostra per induzione che: TODO

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

5 Teorema del principio di induzione su $PROP$

Definizione 5.1
$P \subseteq PROP$

1. *Se* $P[\alpha], \alpha \in AT$ *e*

2. *Se* $P[\alpha] \Rightarrow P[(\neg\alpha)]$ *e*

3. *se* $P[\alpha]$ *e* $P[\beta] \Rightarrow P[(\alpha \wedge \beta)], P[(\alpha \vee \beta) P[(\alpha \to \beta)]$
   allora $\forall\psi \in PROP \ . \ P[\psi]$

Con questo teorema si possono dimostrare intere proposizioni complesse dimostrando i pezzi più piccoli (***sottoformule***) come mostrato nella figura 1.

$$
\begin{tikzcd}
& P[p_2] \arrow[dl] & \\
P[(p_2 \to (p_3 \vee p_2))] & & P[p_2] \arrow[dl] \\
& P[(p_3 \vee p_2)] \arrow[ul] & \\
& & P[p_3] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Dimostrazione di una formula complessa

Esercizio 5.1
Dimostra che ogni $\psi \in PROP$ *ha un numero pari di parentesi usando il principio di induzione per dimostrare proprietà sintattiche sulla struttura delle formule.*
$P[\psi] \equiv \psi$ *ha un numero pari di parentesi*

1. ***Caso base*** $\psi \in AT$ *quindi* ψ *ha 0 parentesi e quindi è pari:* $P[\psi]$ $\surd$

2. ***Ipotesi induttiva*** $\alpha, \beta \in PROP$, $P[\alpha], P[\beta]$ *?* $P[(\alpha \to \beta)]$ *(per* α *vale e per* β *vale, si sono aggiunte due parentesi, quindi la formula è ancora pari)*

3. ***Passo induttivo*** $P[\alpha], P[\beta] \Rightarrow P[(\alpha \to \beta)], P[(\alpha \vee \beta)], P[(\alpha \wedge \beta)]$
   allora $\forall\psi \in PROP \ . \ P[\psi]$