Esercizi presi dall'eserciziario su moodle

Equazioni differenziali di primo grado

✍ **Esercizio 1.1.1.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{y^2+4}t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Inoltre si determini il valore $\alpha > 0$ per cui $\dfrac{y(t)}{t^\alpha}$ tende a un numero finito e non nullo per $t \to +\infty$.

$$\frac{y^2+4}{y^2} \cdot y' = t$$

$$\int \frac{y^2+4}{y^2} \cdot y' \, dt = \int t \, dt + c$$

$u = y$

$du = y' dt$

$\downarrow u = y$

$$\int \frac{y^2+4}{y^2} \, dy = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\int 1 \, dy + 4 \int y^{-2} \, dy = \frac{t^2}{2} + c$$

$$y - \frac{4}{y} = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\frac{y^2-4}{y} = \frac{t^2}{2} + c$$

$y(0) = 2$

$\downarrow$

$$\frac{2^2-4}{2} = \frac{0}{2} + c$$

$$\frac{0}{2} = c$$

$$c = 0 \to \frac{y^2-4}{y} = \frac{t^2}{2} \to \frac{y^2 - 4 - \frac{t^2 y}{2}}{y} = 0$$

$$y(t) = \frac{\frac{t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{t^4}{4} + 16}}{2} = \frac{t^2 \pm \sqrt{t^4 + 64}}{4}$$

$$\downarrow$$

$$y(0) = 2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{0^2 \pm \sqrt{64}}{4} = \begin{cases} +2 \\ -2 \quad \text{(Non accettabile)} \to y(0)=2 \end{cases}$$

Soluzione 1:

$$y(t) = \frac{t^2 + \sqrt{t^4 + 64}}{4}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{t^\alpha} = \frac{t^2 + \sqrt{t^4+64}}{4t^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + t^2 \overbrace{\sqrt{1 + \frac{64}{t^4}}}^{1 + \frac{64}{+\infty} = 1}}{4t^\alpha} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{4}t^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{2t^\alpha}$$

L'unico modo per avere un numero finito è che il grado del numeratore e del denominatore sia uguale, quindi:

$$\alpha = 2 \to \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

✍ **Esercizio 1.1.2.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 + t}{2e^{2y} + 6e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' \cdot (2e^{2y} + 6e^y) = t^2 + t$$

$$\int y' \cdot (2e^{2y} + 6e^y)\,dt = \int t^2 + t \,dt + C$$

$u = y$

$du = y'dt$

$\downarrow u = y$

$$2\int e^{2y}\,dy + 6\int e^{y}\,dy = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{e^{2y}}{\cancel{2}} + 6e^{y} = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C$$

$$y(0)=0$$

$$e^{2\cdot 0} + 6e^{0} = \frac{0}{3} + \frac{0}{2} + C$$

$$1+6 = C$$

$$C = 7$$

$$\downarrow$$

$$e^{2y} + 6e^{y} = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 7$$

$$x = e^{y} \rightarrow y = \ln(x)$$

$$x^2 + 6x - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a} = -3 \pm \sqrt{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 16}$$

$$e^{y} = -3 \pm \sqrt{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 16}$$

$$y(0)=0$$

$$e^{0} = -3 \pm \sqrt{\frac{0}{3} + \frac{0}{3} + 16} = -3 \pm \sqrt{16} = -3 \pm 4 = \begin{cases} -7 & \text{Non accettabile} \\ 1 & \end{cases}$$

$$y(t) = \ln\left(-3 + \sqrt{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 16}\right)$$

$$\downarrow$$

$$y(0) = \ln(1) = 0 \checkmark$$

✍ **Esercizio 1.1.3.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3e^x - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino all'origine ha:

- ☐ *concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;*
- ☐ *concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;*
- ☐ *concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;*
- ☐ *concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa*

$y'(0) = 3e^0 - y(0)^2$

Equazioni differenziali lineari di secondo grado

✍ **Esercizio 1.2.1.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 3t + 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$3t+2$ è un polinomio di grado 1

$q_1 = a_0 + a_1 x$ $\xrightarrow{\text{Sostituisco}}$ $-6a_1 + 9a_0 + 9a_1 x = 3x + 2$

$q_1' = a_1$

$-6a_1 + 9a_0 + 9a_1 x = 3x + 2$

$q'' = 0$

$$\begin{cases} -6a_1 + 9a_0 = 2 \\ 9a_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 + 9a_0 = 2 \\ a_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = \frac{4}{9} \\ a_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow y_1 = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}t$$

Risolvo l'equazione omogenea

$r'' - 6r' + 9r = 0$

$(r-3)^2$

$r_{1,2} = 3 \longrightarrow y_2 = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$

$$y(t) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}t + C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$$

Applico le condizioni di Cauchy

$y(0) = \frac{4}{9} + 0 + C_1 + 0 = \frac{4}{9} + C_1 = -1 \rightarrow C_1 = -\frac{13}{9}$

$y'(t) = \frac{1}{3} + 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + 3C_2 t e^{3t}$

$y'(0) = \frac{1}{3} + 3C_1 + C_2 = 2 \rightarrow \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{13}{9}\right) + C_2 = 2$

$$\frac{1}{3} - \frac{13}{3} + c_2 = 2$$

$$1 - 13 + 3c_2 = 6$$

$$3c_2 = 6 + 12$$

$$c_2 = \frac{18}{3} = 6$$

$$c_1 = -\frac{13}{9} \quad c_2 = 6$$

$$\downarrow$$

$$y(t) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}t + c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{13}{9} e^{3t} + 6 t e^{3t}$$

✍ **Esercizio 1.2.2.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Allora $\lim_{t\to+\infty} y(t) =$

☐ 0;

☐ non esiste;

☐ $+\infty$;

☐ $-\infty$

Risolvo l'equazione caratteristica

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$(r+3)(r-1)$$

$$r_1 = -3 \quad r_2 = 1$$

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{t}$$

$$y'(t) = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{t}$$

Impongo le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = -3c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 3c_2 + c_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = -\frac{1}{4}e^{-\infty} + \frac{1}{4}e^{\infty} = 0 + \infty = +\infty$$

La risposta corretta è la terza

✍ **Esercizio 1.2.3.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$(r-2)(r+1)$$

$$r_1 = -1 \quad r_2 = 2 \quad \rightarrow \quad z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Con il metodo di somiglianza cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$\bar{y}(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)$$

$$\bar{y}'(t) = 2\alpha \cos(2t) - 2\beta \sin(2t)$$

$$\bar{y}''(t) = -4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t)$$

$$y'' - y' - 2y = \cos(2t)$$

$$\downarrow$$

$$-4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t) - 2\alpha \cos(2t) + 2\beta \sin(2t) - 2\alpha \sin(2t) - 2\beta \cos(2t) = \cos(2t)$$

$$\sin(2t)(-4\alpha + 2\beta - 2\alpha) + \cos(2t)(-4\beta - 2\alpha - 2\beta) = \cos(2t)$$

$$\sin(2t)(-6\alpha + 2\beta) + \cos(2t)(-6\beta - 2\alpha) = \cos(2t)$$

$$\begin{cases} -6\alpha + 2\beta = 0 \\ -6\beta - 2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -18\alpha - 2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -\frac{3}{20} \\ \alpha = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t)$$

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t)$$

$$y'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - \frac{1}{10}\cos(2t) + \frac{3}{10}\sin(2t)$$

Applico le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{20} = 1 \\ y'(0) = -c_1 + 2c_2 - \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 + \frac{23}{20} \\ -c_1 + 2c_2 = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 + \frac{23}{20} \\ c_2 - \frac{23}{20} + 2c_2 = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 + \frac{23}{20} \\ 3c_2 = \frac{2}{20} + \frac{23}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{5}{12} + \frac{23}{20} \\ c_2 = \frac{5}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{-25+69}{60} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15} \\ c_2 = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{11}{15}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t)$$

✍ **Esercizio 1.2.4.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = e^{-2t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$$r^2 - 4r + 8 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

$$r_1 = 2 - 2i \qquad r_2 = 2 + 2i$$

$$z(t) = c_1 e^{2t}\sin(2t) + c_2 e^{2t}\cos(2t)$$

Bisogna trovare una soluzione particolare del tipo:

$$\bar{y}(t) = e^{-2t}\gamma(t) \qquad A = 1 \quad \lambda = -2$$

$$\downarrow$$

$$\gamma'' + \gamma'(2(-2) - 4) + \gamma(4 + 8 + 8) = 1$$

$$\gamma'' - 8\gamma' + 20\gamma = 1$$

$$\lambda^2 + \lambda a + b \neq 0 \rightarrow \gamma(t) = \text{costante} = \frac{A}{\lambda^2 + \lambda a + b} = \frac{1}{20}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{20} e^{-2t}$$

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 e^{2t} \sin(2t) + c_2 e^{2t} \cos(2t) + \frac{1}{20} e^{-2t}$$

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} \sin(2t) + 2c_1 e^{2t} \cos(2t) + 2c_2 e^{2t} \cos(2t) - 2c_2 e^{2t} \sin(2t) - \frac{1}{10} e^{-2t}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 + \frac{1}{20} = -1 \\ y'(0) = 2c_1 + 2c_2 - \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{21}{20} \cdot 2 \\ c_1 = \frac{11}{10} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{11}{10} e^{2t} \sin(2t) - \frac{21}{20} e^{2t} \cos(2t) + \frac{1}{20} e^{-2t}$$

✍ **Esercizio 1.2.5.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$(r-2)(r+1)$$

$$r_1 = -1 \quad r_2 = 2$$

$$z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Bisogna trovare una soluzione particolare del tipo:

$$\bar{y}(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)$$

$$\bar{y}'(t) = 2\alpha \cos(2t) - 2\beta \sin(2t)$$

$$\bar{y}''(t) = -4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t)$$

$$y'' - y' - 2y = \sin(2t)$$

$$\downarrow$$

$$-4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t) - 2\alpha \cos(2t) + 2\beta \sin(2t) - 2\alpha \sin(2t) - 2\beta \cos(2t) = \sin(2t)$$

$$\sin(2t)\left(-4\alpha + 2\beta - 2\alpha\right) + \cos(2t)\left(-4\beta - 2\alpha - 2\beta\right) = \sin(2t)$$

$$\sin(2t)\left(-6\alpha + 2\beta\right) + \cos(2t)\left(-6\beta - 2\alpha\right) = \sin(2t)$$

$$\begin{cases} -6\alpha + 2\beta = 1 \\ -6\beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6\alpha - \frac{2}{3}\alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{3}\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{20}{3}\alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{3}\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{20} \\ \beta = +\frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\bar{y}(t) = -\frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{1}{20}\cos(2t)$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{1}{20}\cos(2t)$$

$$y'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - \frac{3}{10}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)$$

Impongo le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{20} = 0 \\ y'(0) = -c_1 + 2c_2 - \frac{3}{10} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - \frac{1}{20} \\ c_2 + \frac{1}{20} + 2c_2 - \frac{3}{10} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 - \frac{1}{20} \\ 3c_2 - \frac{5}{20} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{25}{60} - \frac{1}{20} = \frac{-25-3}{60} = -\frac{28}{60} = -\frac{7}{15} \\ c_2 = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{7}{15}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{1}{20}\cos(2t)$$

✍ **Esercizio 1.2.6.** *Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale* $y'' - 4y' + 13y = 4x$.

Risolvo l'equazione omogenea associata

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{2 \cdot 4^2}}{2} = \frac{4 \pm 4i\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}\,i$$

$$z(t) = c_1 e^{2t} \cos(2\sqrt{2}t) + c_2 e^{2t} \sin(2\sqrt{2}t)$$

✍ **Esercizio 1.2.7.** *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$2y'' + 3y' + 4y = 0.$$

$$2r^2 + 3r + 4 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{4} = \frac{-3 \pm 4\sqrt{7}\,i}{4} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{7}\,i$$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{3}{4}t} \cos(\sqrt{7}t) + c_2 e^{-\frac{3}{4}t} \sin(\sqrt{7}t)$$

✍ **Esercizio 1.2.8.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y'' + 6y' + 8y = e^{4t} + t^2, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 3.$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$$r^2 + 6r + 8 = 0$$

$$(r+4)(r+2)$$

$$r_1 = -4 \quad r_2 = -2$$

$$z(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-2t}$$

Bisogna trovare una soluzione particolare:

$$\bar{y}_1(t) = e^{\lambda t}\,\gamma(t) \qquad \lambda = 4 \quad A = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda a + b = 16 + 4 + 6 = 26 \neq 0 \longrightarrow \gamma = \text{costante} = \frac{A}{\lambda^2 + \lambda a + b} = \frac{1}{26}$$

$\bar{y}_1(t) = \frac{1}{26} e^{4t}$

$\bar{y}_2(t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = t^2$

$\bar{y}_2'(t) = a_1 + a_2 x$

$\bar{y}_2''(t) = a_2$

$\xrightarrow{\text{sostituisco}}$ $y'' + 6y' + 8y = t^2$

$a_2 + 6a_1 + 6a_2 x + 8a_0 + 8a_1 x + 8a_2 x^2 = t^2$

$a_2 + 6a_1 + 8a_0 + x(6a_2 + 8a_1) + 8a_2 x^2 = t^2$

$\begin{cases} a_2 + 6a_1 + 8a_0 = 0 \\ 6a_2 + 8a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{18}{32} + 8a_0 = 0 \\ a_1 = -\frac{3}{32} \\ a_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} a_0 = \frac{7}{128} \\ a_1 = -\frac{3}{32} \\ a_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$

$\bar{y}_2(t) = \frac{7}{128} - \frac{3}{32} x + \frac{1}{8} x^2$

$\bar{y}(t) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{1}{26} e^{4t} + \frac{7}{128} - \frac{3}{32} x + \frac{1}{8} x^2$

✍ **Esercizio 1.2.10.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata

$r^2 + r - 2 = 0$

$(r-1)(r+2)$

$r_1 = -2 \quad r_2 = 1$ $\qquad Z(x) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$

Bisogna trovare una soluzione particolare

$$\bar{y}(t) = A e^{\lambda t} \gamma(t) \qquad \lambda = 1 \quad A = -1$$

$$\downarrow$$

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + \lambda a + b) = A$$

$$\gamma'' + \gamma'(\underset{\neq 0}{3}) + \gamma(\underset{=0}{0}) = A$$

$$\downarrow$$

$$\gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a} = \frac{-t}{2+1} = -\frac{1}{3}t$$

$$\bar{y}(t) = +e^t \frac{1}{3} t = t\frac{e^t}{3}$$

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + t\frac{e^t}{3}$$

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + \frac{e^t}{3} + t\frac{e^t}{3}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = -2c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 2c_2 + c_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{9} \\ c_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{9} e^{-2t} - \frac{1}{9} e^t + t\frac{e^t}{3}$$