Elaborazione di Segnali e Immagini (ESI)
LABORATORIO

Lezione 3

Manuele Bicego

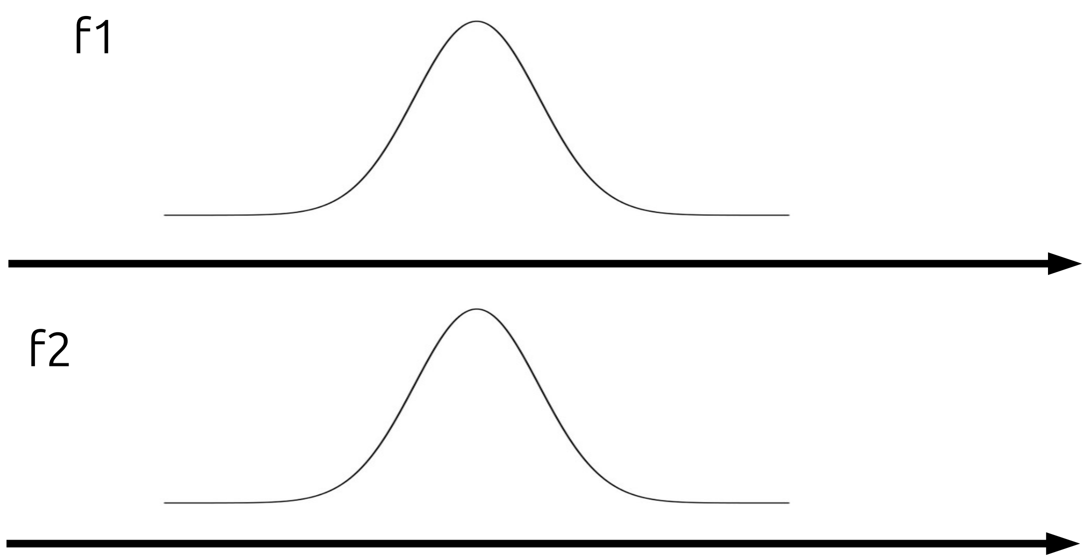
Corso di Laurea in Informatica

Dipartimento di Informatica - Università di Verona

Cross-correlazione 1D

Cross-correlazione

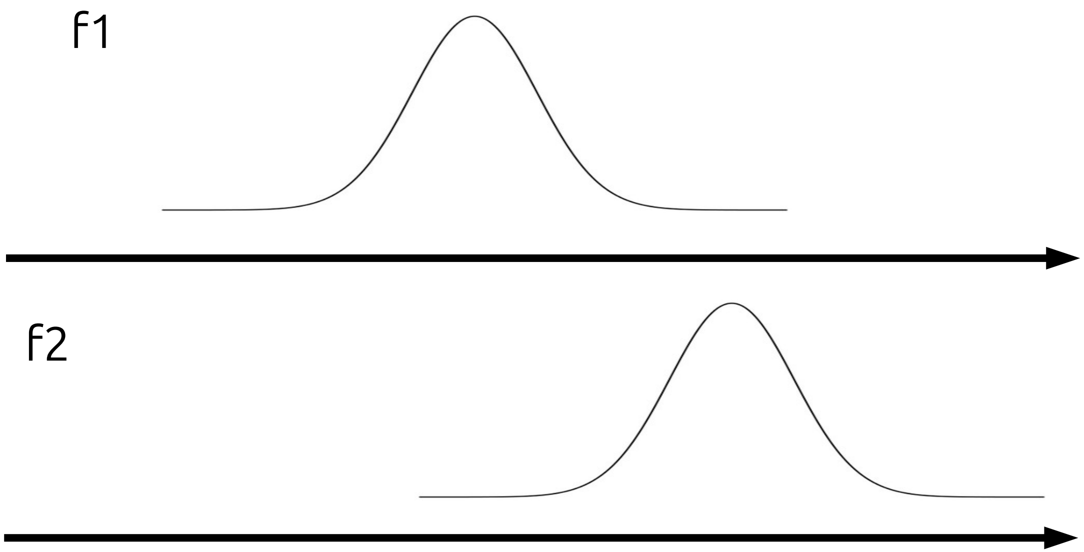
- Punto di partenza: la correlazione
- In parole semplici, la **correlazione** serve a misurare se due segnali sono correlati, cioè se si comportano nello stesso modo (i.e. se sono **simili**)



Correlazione alta: i due segnali, nel tempo, si comportano nello stesso modo

Cross-correlazione

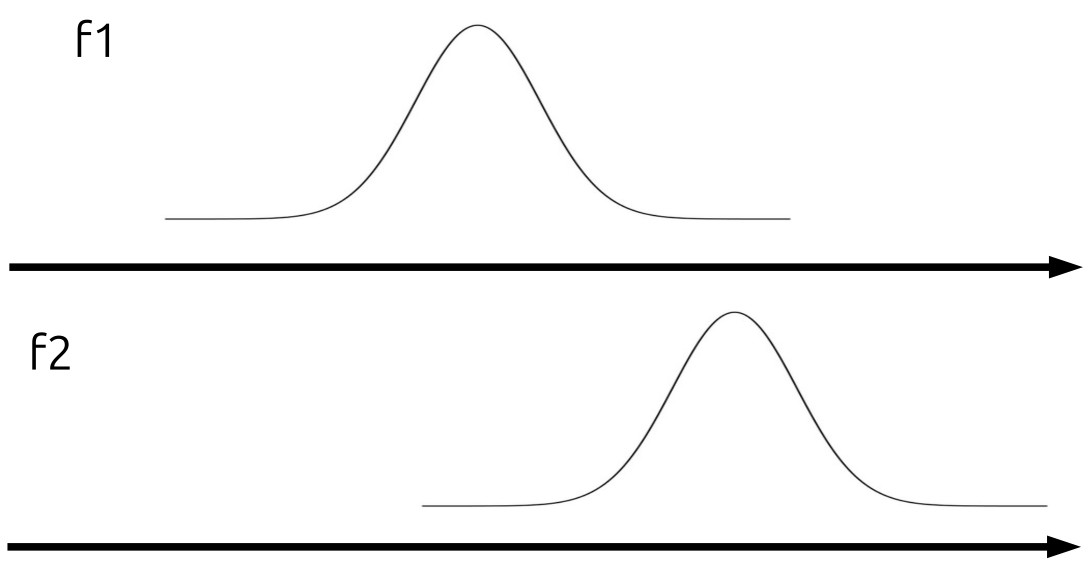
- Consideriamo questo caso:



- La correlazione è **bassa**: i due segnali, nel tempo, si comportano in modo diverso:
  - il picco di f2 è traslato verso destra

Cross-correlazione

- Soluzione: la **cross-correlazione!**
  - Serve per capire se due segnali sono correlati in qualche loro parte
  - Meglio: per capire se uno dei due segnali, quando traslato, ha una buona correlazione con l'altro.



Cross-correlazione alta: se traslo indietro f2, i due segnali si comportano nello stesso modo

Cross-correlazione

- Concetti già visti a teoria...

Correlation *function*

- Allows to measure the similarity among signals irrespectively of their time-shift

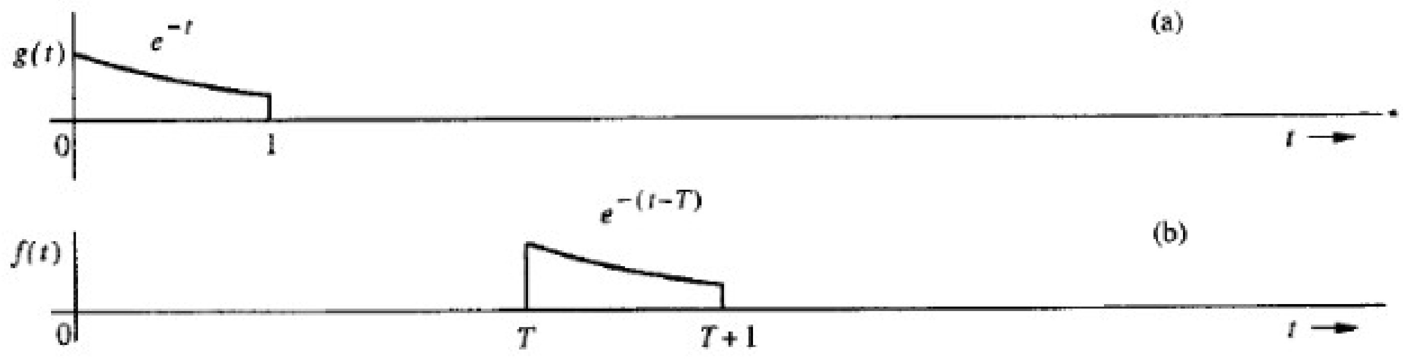


Fig. 3.5 Physical explanation of the correlation function.

Real signals

$$\Psi_{fg} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(\tau - t)d\tau$$

Complex signals

$$\Psi_{fg} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\star}(\tau)g(\tau - t)d\tau$$

Cross-correlazione

- In laboratorio: vediamo come si calcola la cross-correlazione in pratica. Siamo nel caso di:
  - Segnali discreti
  - Segnali limitati nel tempo

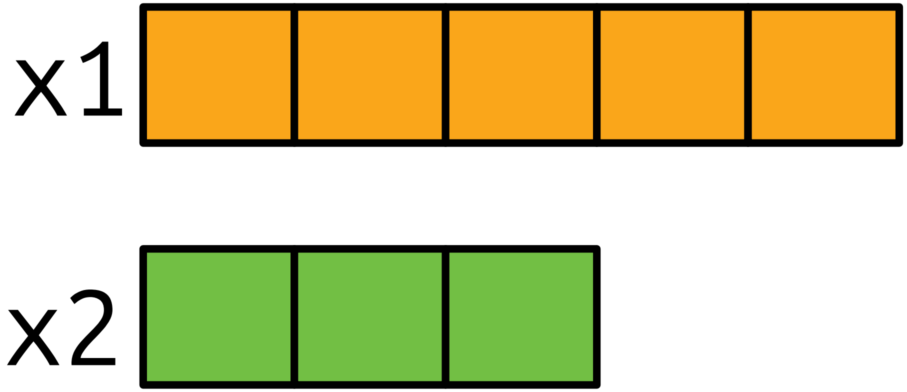
Cross-correlazione per segnali discreti

- x1 e x2 sono due segnali discreti
- Per calcolare la cross-correlazione occorre:
  - Traslare un segnale (lag → di quanto si trasla)
  - Calcolare la correlazione tra il primo segnale e il segnale traslato
- Occorre ripetere questa operazione per tutti i possibili spostamenti (lag)

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k-n)$$

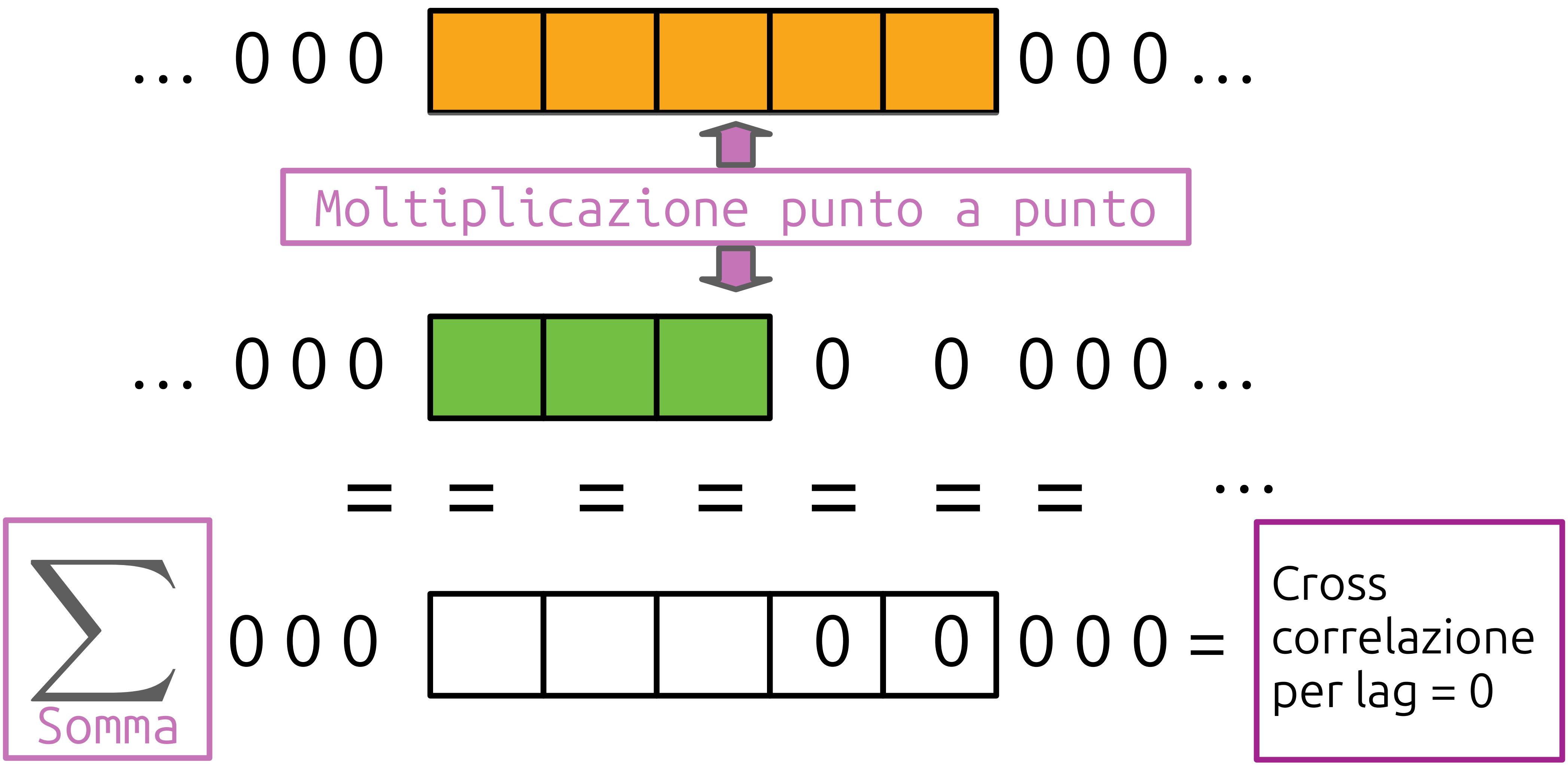
$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k)\,x_2(k-n)$$

- Supponiamo di voler calcolare in Matlab la cross-correlazione tra due segnali x1 e x2 (discreti, di dimensione M = 5, N = 3)



$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k-n)$$

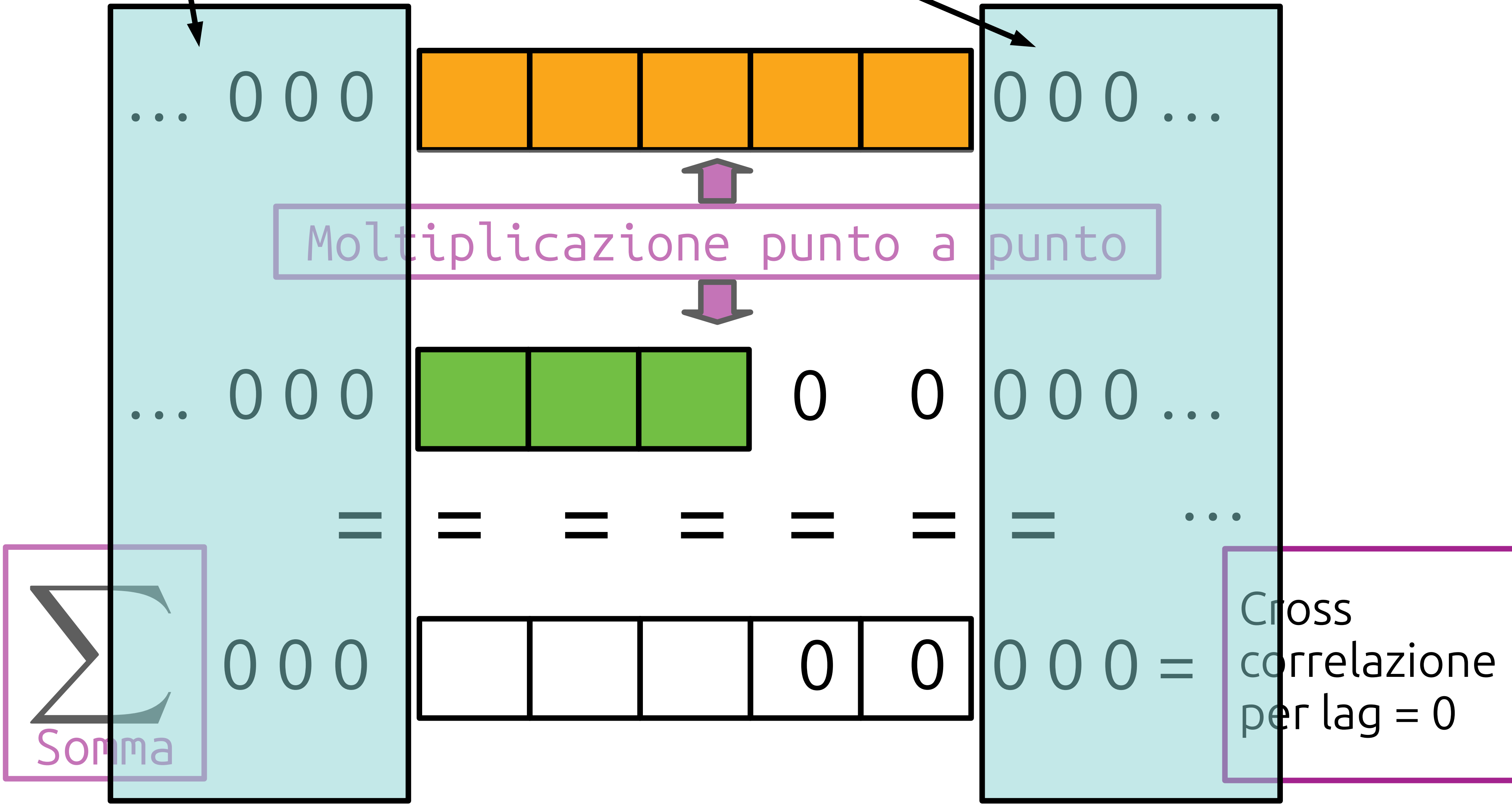
- Cross-correlazione per lag =0: nessuno spostamento, moltiplicazione punto a punto e somma



Tutti zeri, non ci interessa!

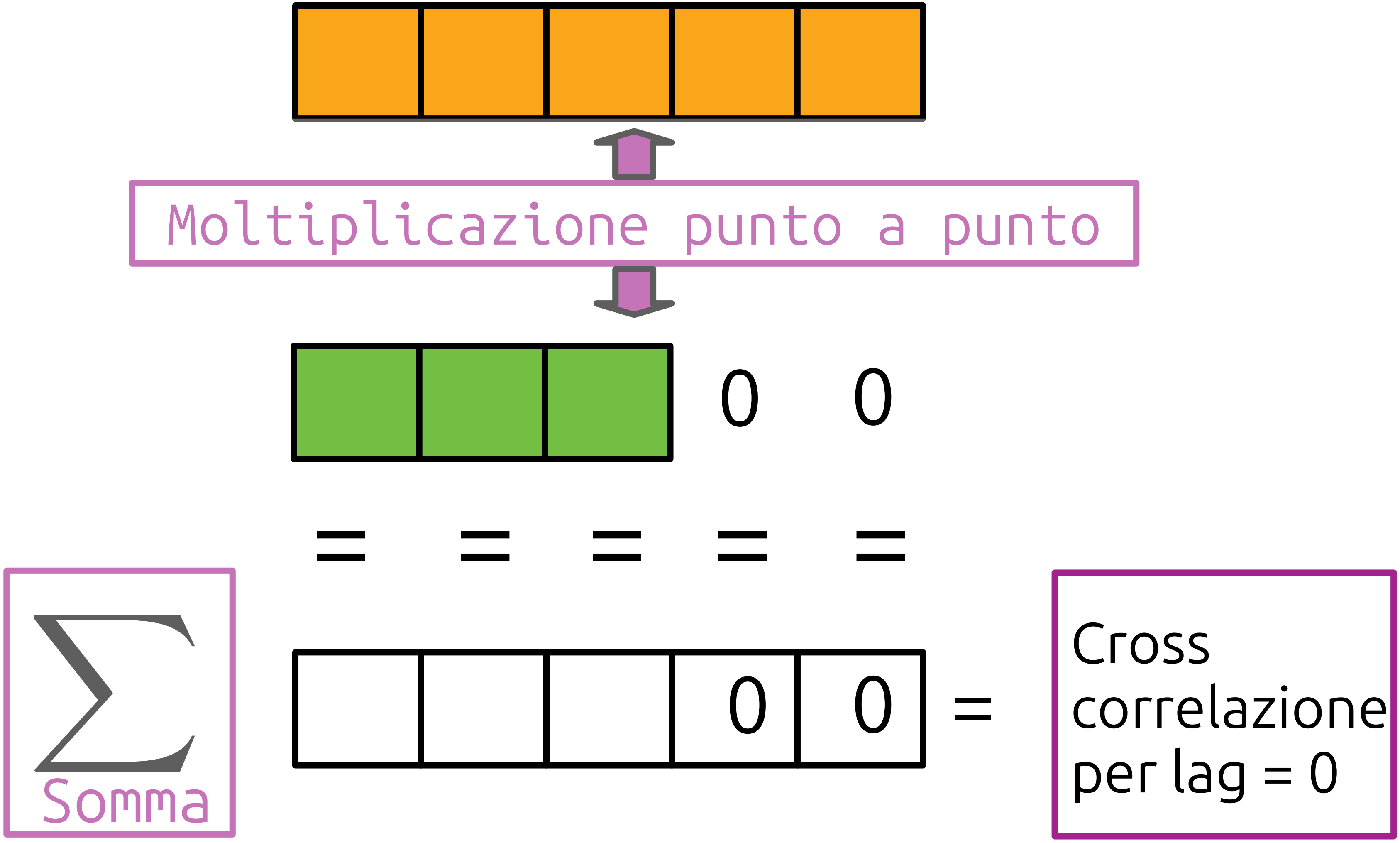
$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k-n)$$

- Cross-correlazione per lag =0: nessuno spostamento, moltiplicazione punto a punto e somma



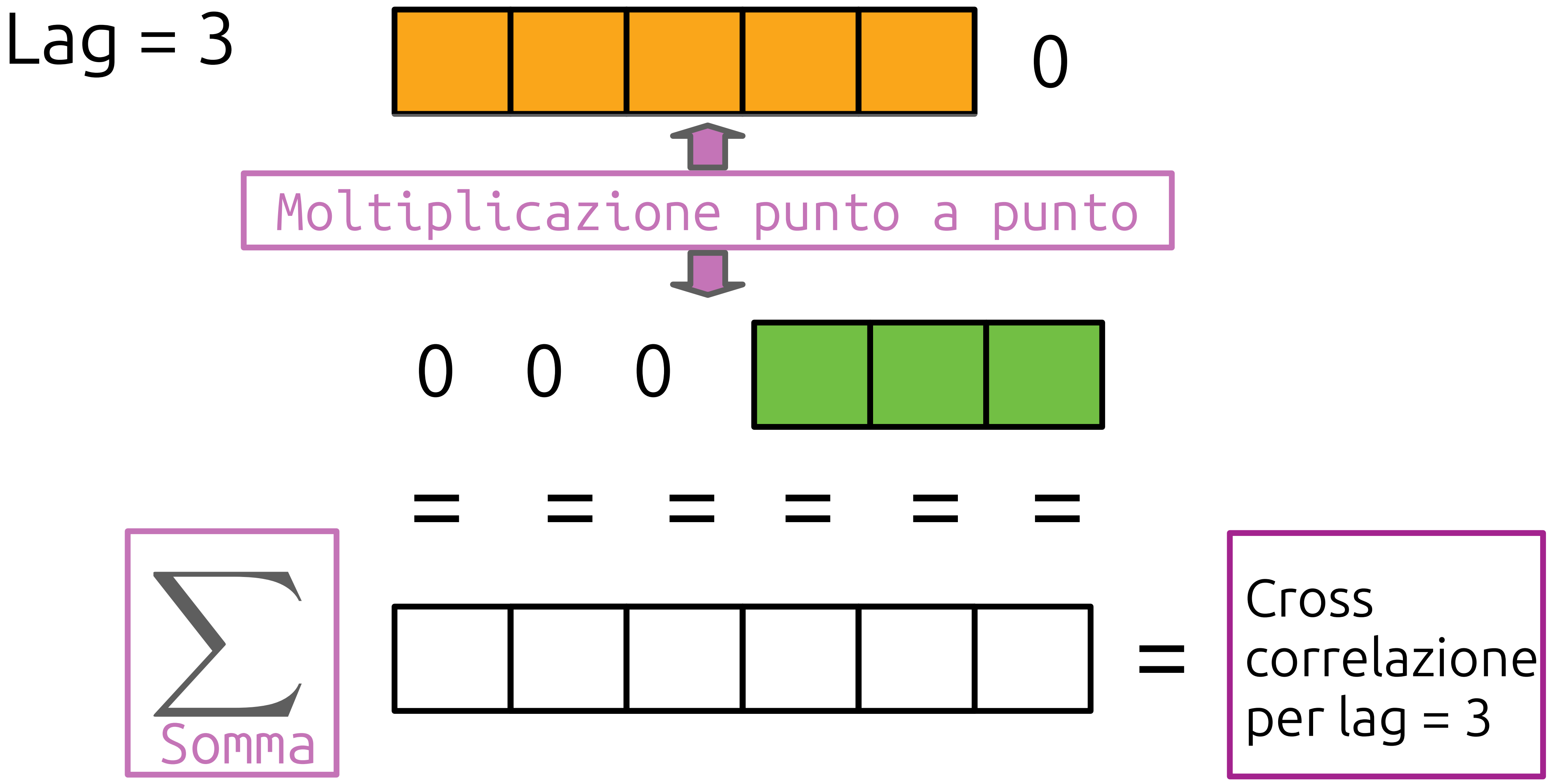
$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k)x_2(k-n)$$

- Cross-correlazione per lag =0: nessuno spostamento, moltiplicazione punto a punto e somma

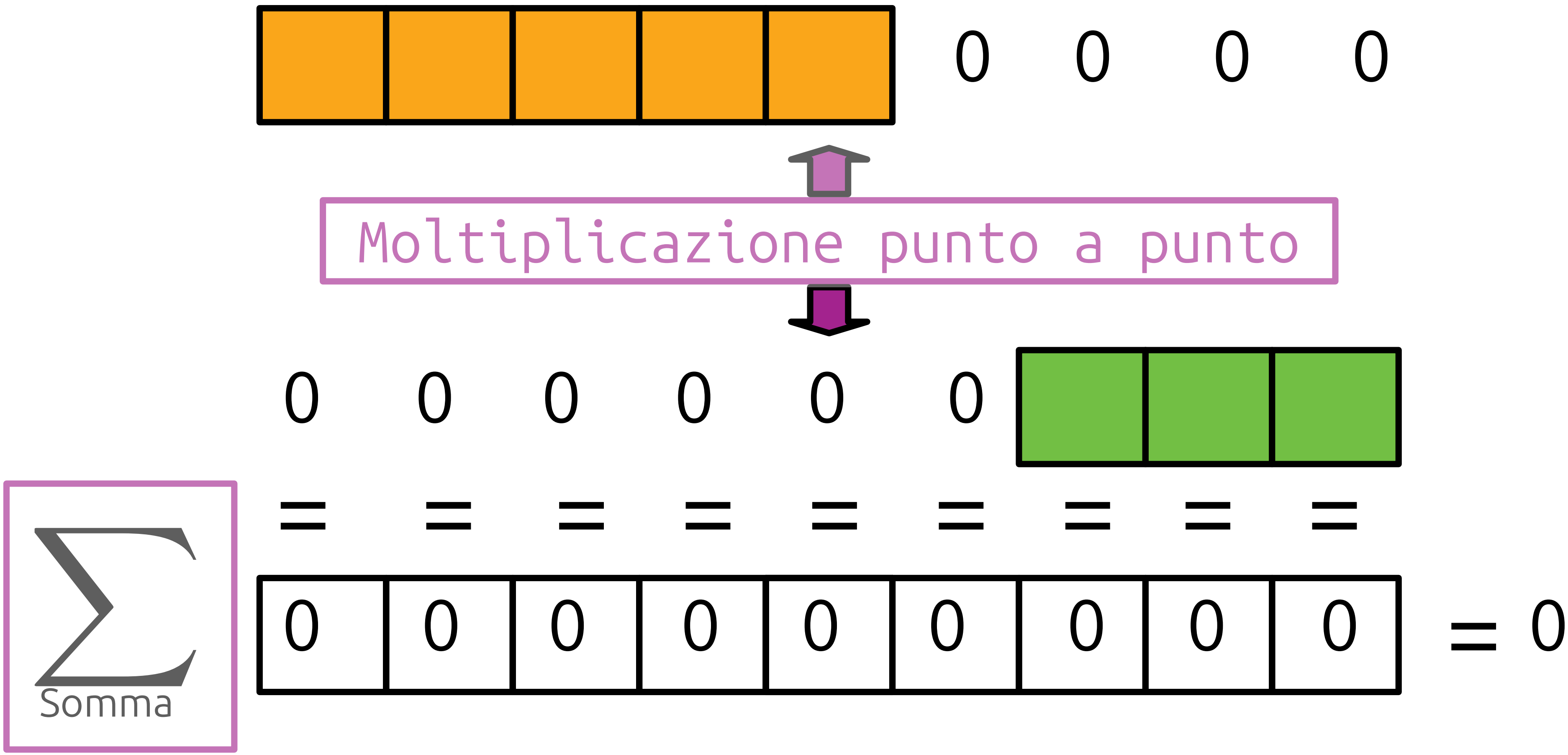


$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k)x_2(k-n)$$

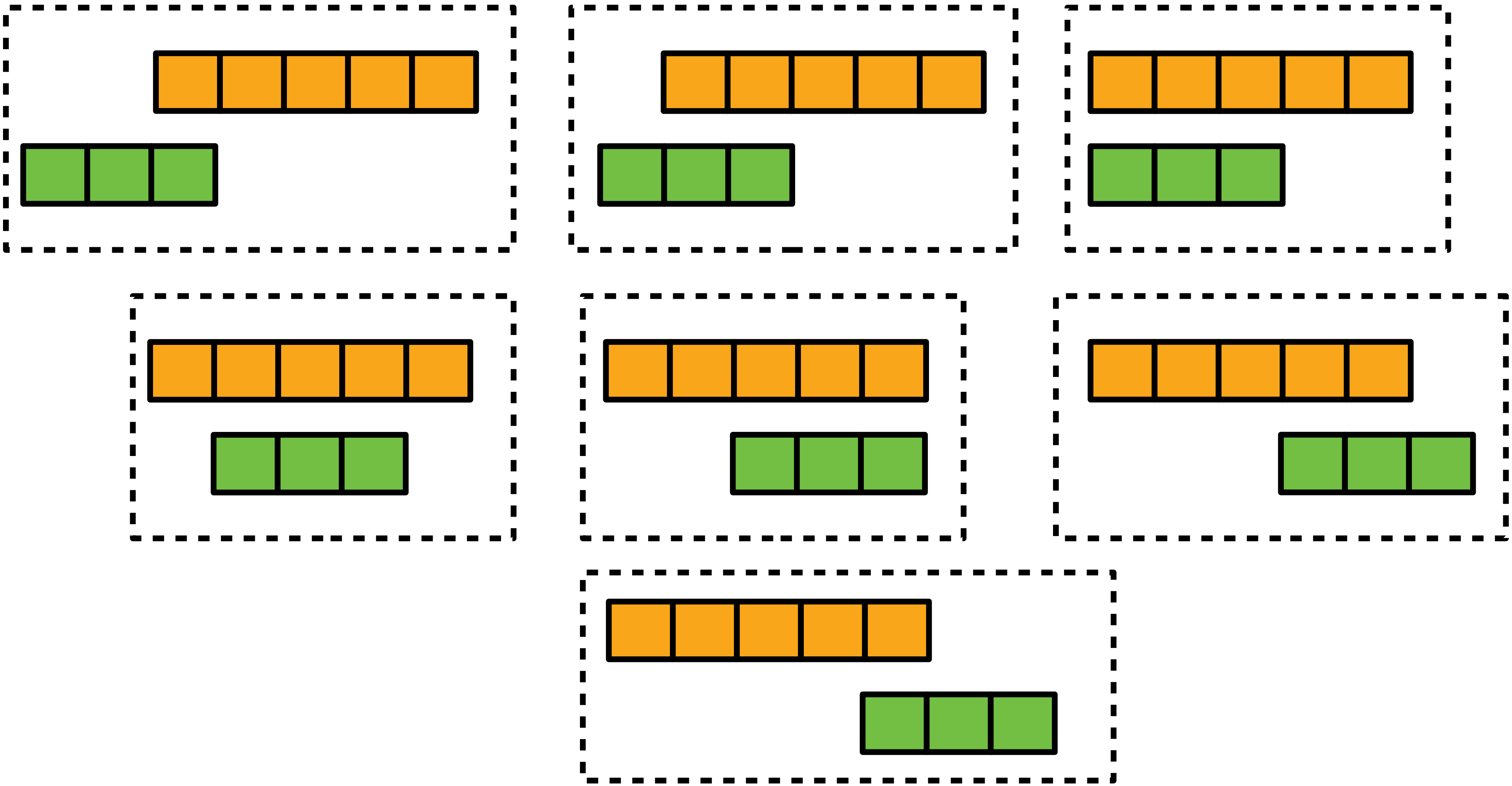
- Cross-correlazione per un certo lag (o offset): si sposta f2, si moltiplica punto a punto e si somma



- In teoria la cross-correlazione è definita per tutti i possibili valori di lag
- Ma: in pratica ci sono molti lag per cui la cross-correlazione è zero (dove non c'è sovrapposizione)



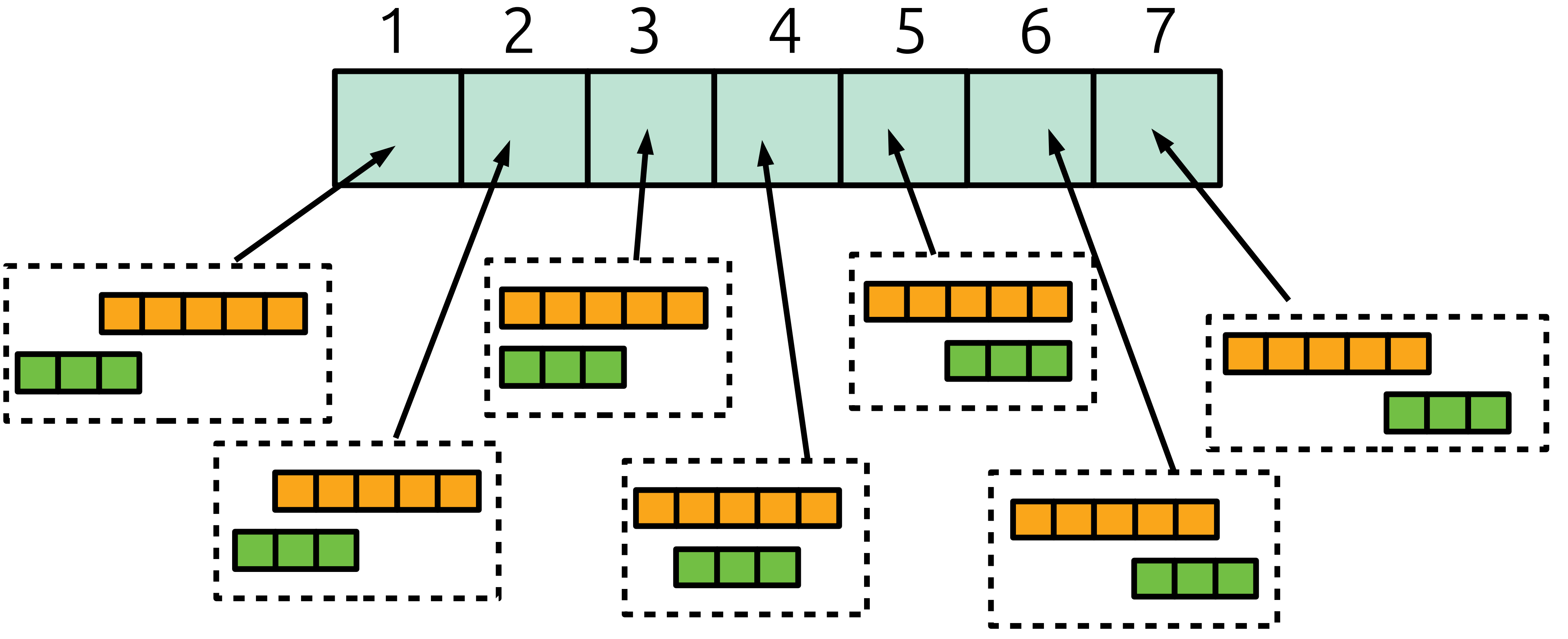
- Matlab (**xcorr**): si calcola il vettore di cross-correlazione solo per i lag per cui c’è sovrapposizione



Quanti sono in totale? M+N-1 (5+3-1 = 7)

Vettore di cross-correlazione:

- Dimensione: M+N-1 (5+3-1 = 7)



Confrontare segnali con la cross-correlazione

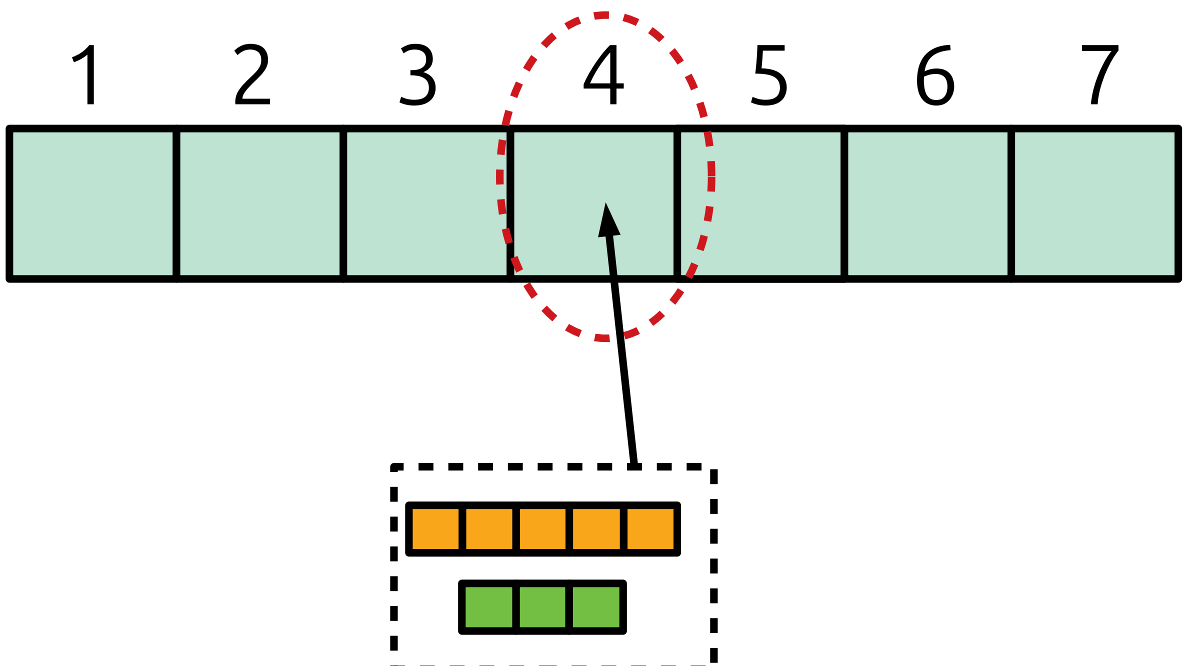
- Possiamo utilizzare la cross-correlazione per misurare la similarità tra due segnali.
- La cross-correlazione mi indica:
  - **Quanto sono simili**: il massimo del vettore di cross-correlazione
  - **L'allineamento** (lag) **ottimale**: quanto devo traslare il secondo segnale in modo da massimizzare la cross-correlazione

- Come si determina l'allineamento ottimale?
    - Si calcola il massimo del vettore di cross-correlazione
    - Nell'allineamento ottimale il secondo segnale inizia in posizione Max – N + 1 del primo segnale

- **Esempio**:

Il max è in posizione 4.

Allineamento ottimale: il secondo segnale inizia in posizione 4-3+1 = 2 del primo



Cross-correlazione normalizzata

- In alcuni casi può essere utile calcolare la **cross-correlazione normalizzata**.

- Non vediamo la teoria, ma l'idea è che ci sono situazioni in cui è meglio calcolare la cross-correlazione focalizzandosi più sulla forma che sulla scala

- In matlab: opzione "**`normalized`**" di **`xcorr`** (si veda l'help della funzione)

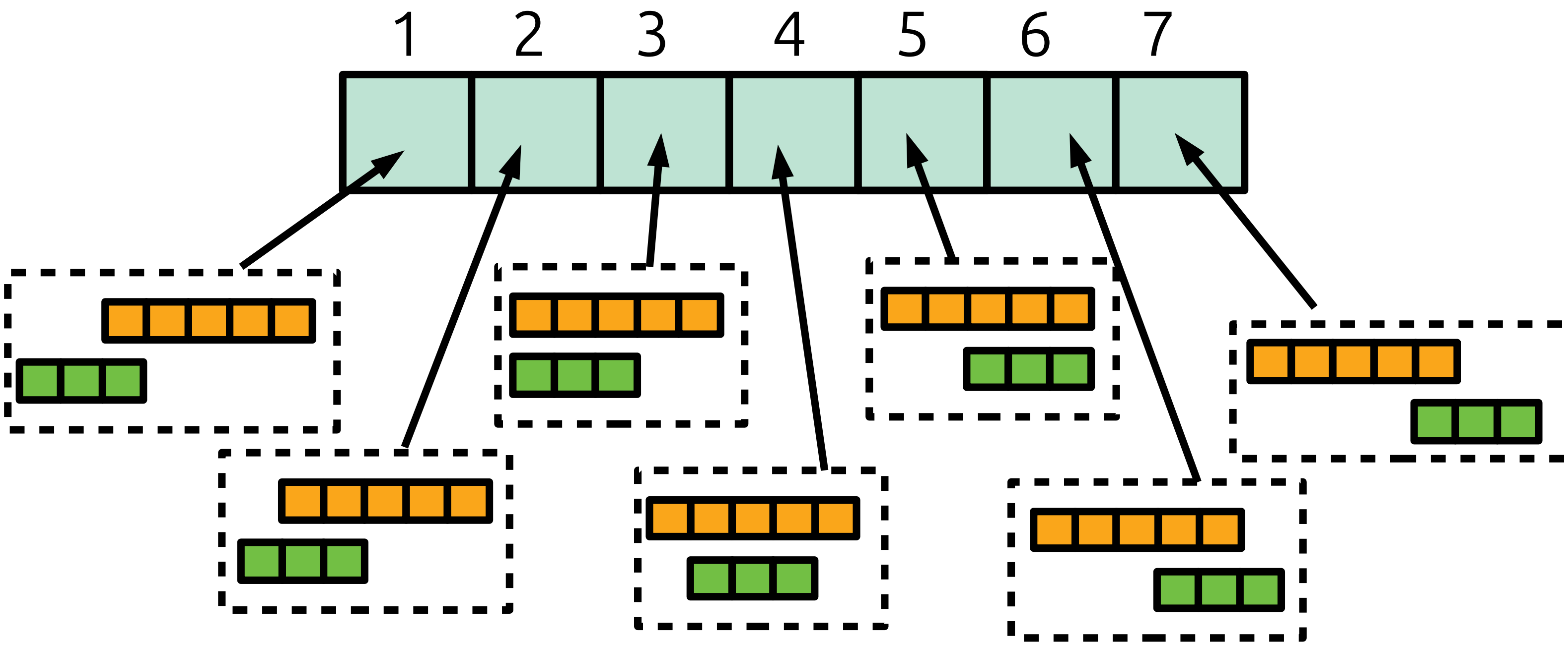
Esempi in Matlab

- File “**Lezione3_EserciziPrincipali.m**”
  - ESEMPIO 1: Esempio sintetico di cross-correlazione - rettangolo e triangolo
  - ESEMPIO 2: Cross-correlazione tra segnali di vibrazione su un ponte emessi da un veicolo in prossimità di due diversi sensori.

Esercizi principali

Esercizio 1

- Implementare a mano la cross-correlazione 1D, partendo dallo script presente nel file "**Lezione3_EserciziPrincipali.m**"
  - Occorre creare questo vettore:

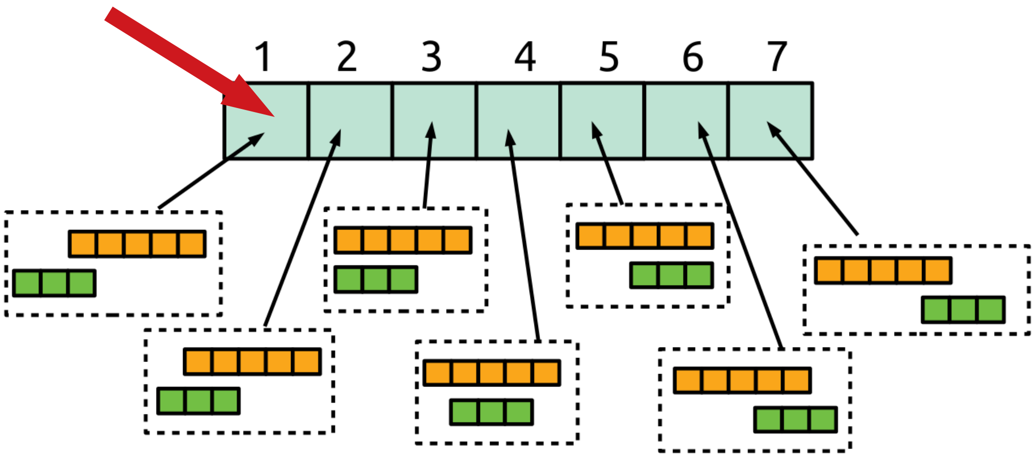


Esercizio 1: suggerimenti

- **Opzione 1 (zero-padding)**: per ogni elemento del vettore di cross-correlazione:
  - Creo due vettori della stessa lunghezza, aggiungendo opportunamente ai due vettori zeri a sx e a dx (zero-padding)
  - Li moltiplico punto a punto e ne faccio la somma

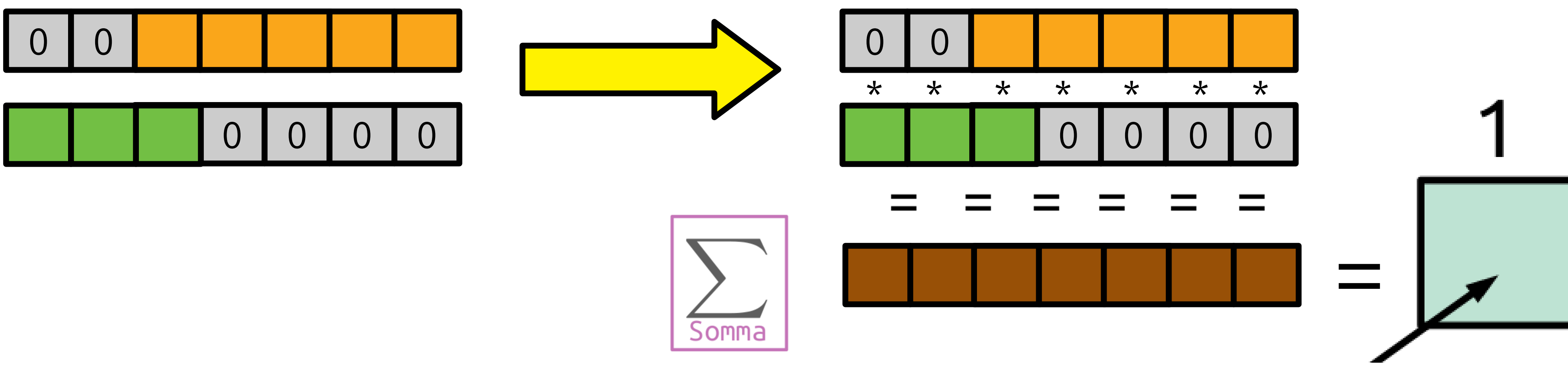
Esercizio 1: suggerimenti

Esempio:



Step 1: Zero-padding

Step 2: Moltiplicazione punto a punto

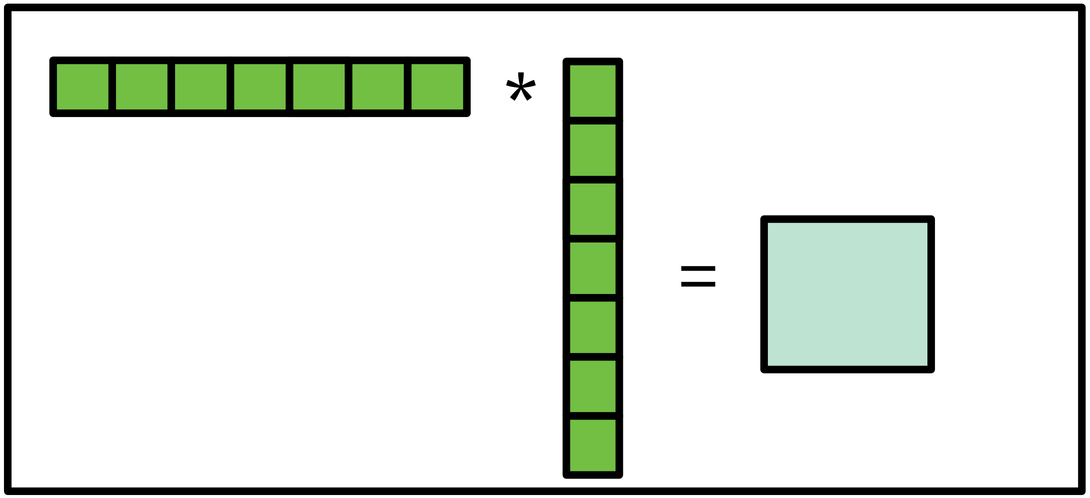


Step 3: Somma

Primo valore del vettore di cross correlazione

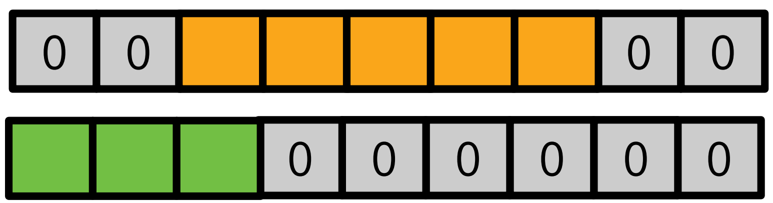
Esercizio 1: suggerimenti

- Nota: la moltiplicazione punto a punto seguita dalla somma si può ottenere con il prodotto scalare (vettore moltiplicato vettore trasposto)

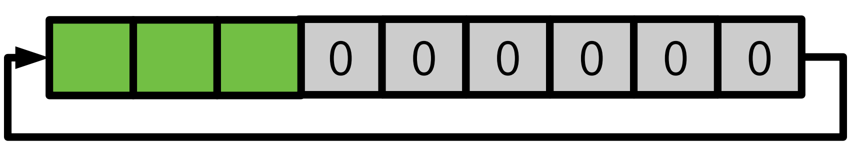


Esercizio 1: suggerimenti

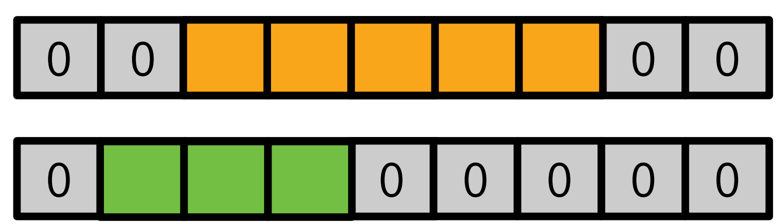
- **Opzione 2 (shifting circolare):**
  - Primo valore: creo questi due vettori e calcolo la cross-correlazione (moltiplicazione punto a punto e somma)



  - Secondo valore: shift circolare del secondo vettore, e calcolo cross-correlazione



Shift circolare: sposto l'ultimo elemento in prima posizione (in matlab: **`circshift`**)



Esercizio 1: suggerimenti

- Nota: se **M** è la lunghezza del primo vettore e **N** è la lunghezza del secondo vettore
  - Primo vettore: devo aggiungere (N-1) zeri a sx e (N-1) zeri a dx
  - Secondo vettore: devo aggiungere (N-1 + M-1) zeri a dx

Confrontare il risultato con quanto ottenuto nell'**`ESEMPIO`** 1 del file **`Lezione3_EserciziPrincipali.m`**

Esercizio 2

- Cross-correlazione su segnali audio: riconoscimento del suono attraverso la cross-correlazione
  - Caricare i segnali audio presenti nel file **`audioSignals.mat`**
    - Le variabili "Y1", "Y2", "Y3"... corrispondono ai primi 20 secondi dei segnali audio delle canzoni 'funky.mp3', 'lost.mp3', 'Diana.mp3', 'never.mp3', 'T69.mp3' (in particolare i segnali corrispondono al primo canale)
    - La variabile "test" contiene un segnale audio caricato da 'Test.wav'

Esercizio 2

- Confrontare l'esempio di test con le varie canzoni della galleria usando la cross-correlazione: riusciamo a capire da quale canzone proviene?
- Suggerimenti:
  - determinare la similarità tra il segnale di test e ogni canzone tramite la cross-correlazione (si veda esempio 2 nel file **`Lezione3_EserciziPrincipali.m`**)
  - determinare la canzone più simile guardando quella con similarità più grande

Esercizi extra

Esercizio 3

- Provare la cross-correlazione con differenti segnali definiti a mano.
  - Analizzare l'help di **`xcorr`** per adottare anche la versione normalizzata
- Provare a calcolare la cross-correlazione (normalizzata e non) di (x1,x2) e di (x1,x3)

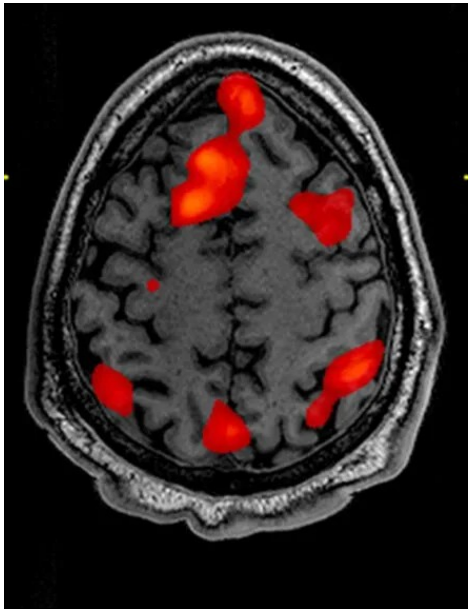
```
x1 = [1 1 1 1 1 1 1 1];
x2 = [1 2 3 4 5 6 7 8];
x3 = [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
```

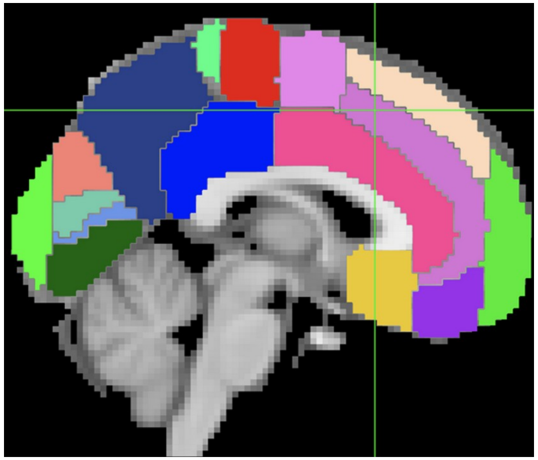
  - Domanda: quando ha senso utilizzare la versione normalizzata?

Esercizio 4

- Cross-correlazione tra segnali di risonanza magnetica funzionale.
  - Caricare il file "Ab_pASL_Yeo_Average.txt": contiene segnali medi di fMRI (functional MRI) di un soggetto, misurati per 200 istanti in 100 diverse regioni del cervello

Functional MRI: tipo di risonanza magnetica che ci permette di capire quali aree del cervello si attivano durante l'esecuzione di un determinato compito



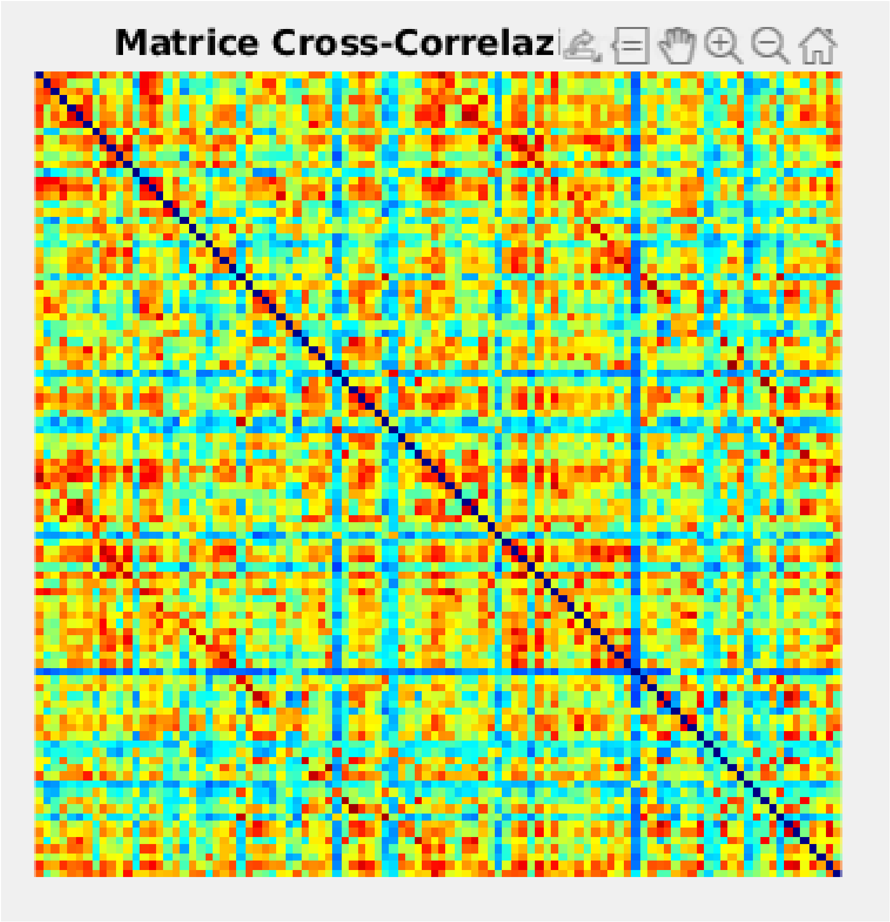


Esercizio 4

- Utilizzare questa informazione per estrarre delle matrici di connettività, che spiegano come le aree cerebrali comunicano tra di loro. In particolare:
  - sottrarre da ogni segnale la sua media
  - calcolare per ogni coppia di segnali (i,j) la cross-correlazione normalizzata.
  - salvare il massimo di tale cross-correlazione nella posizione (i,j) della matrice "matrice_xcorr_max"
  - questa matrice rappresenta una possibile stima di una matrice di connettività

Esercizio 4

- Visualizzare la matrice e rispondere alla seguente domanda: quali sono le due regioni più simili?



Regioni più simili: (37,87)