Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

2° Semestre 2023/2024

Indice

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come

$$\mathbb{C} = \big\{ z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \big\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, ma ha soluzioni in $\mathbb{C}$.

Teorema 1 ***(Teorema fondamentale dell'algebra)***
Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, \;\; a_n \neq 0$$

ed x è un incognita, ammette n soluzioni

Definizioni utili 1.1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \;\; \textit{con} \;\; a_n \neq 0$$

*è detto **polinomio di grado** n con **coefficienti** $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$*

1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero i che è definito come $i^2 = -1$. Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$ è detta **forma algebrica** di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$.

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

Definizioni utili 1.2
Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

1.2.1 Esempi

Esempio 1.1

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \quad \in \mathbb{R}$

1.3 Operazioni tra i numeri complessi

1.3.1 Somma

Definizione 1.1
L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Esempio 1.2

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$

1.3.2 Prodotto

Definizione 1.2
Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che $i^2 = -1$ *si ha che* $bdi^2 = -bd$ *quindi*

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Esempio 1.3

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso $z = a + bi \ \in \mathbb{C}$, il numero complesso $-a - bi$ è l'unico numero complesso tale che $z + (-z) = 0$. Questo numero complesso è detto **opposto** di z e si indica con $-z$.

Definizione 1.3
La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Esempio 1.4

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

1.3.4 Divisione

Definizione 1.4
La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo $\frac{1}{z_2}$ *come l'unico numero complesso tale che:*

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia $z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$ *e* $z \neq 0$. *Supponiamo che* $z' = c + di$ *sia un numero complesso tale che* $z \cdot z' = 1$, *cioè:*

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo $ac - bd = 1$ *e* $ad + bc = 0$.
Possiamo trovare c sostituendo $d = \frac{-1-ac}{b}$ *nella prima equazione:*

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1-ac)}{b} = \frac{1-ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{-1+ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{-1+ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1+ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2 c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare d sostituendo $c = \frac{-ad}{b}$ *nella seconda equazione:*

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1-bd)}{a} = \frac{1-bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1-bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2 d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$. *Definiamo:*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Esempio 1.5

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 \cancel{+abi} \cancel{-abi} + b^2 = a^2+b^2 \quad \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

Esempio 1.6

$$\frac{1+2i}{2-i}$$

$$\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)\left(\frac{2+i}{2+i}\right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2+(-1)^2} =$$

$$= \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

1.4 Coniugato e modulo

1.4.1 Coniugato

Sia $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Il numero complesso $\overline{z} = a-bi$ è detto **coniugato** di z.

1.4.2 Modulo

Il **modulo** di z è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Proprietà

Siano $z_1 = a+bi, z_2 = c+di \quad \in \mathbb{C}$

1. $z_1\overline{z_1} = a^2+b^2 = |z_1|^2$
2. $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
4. Se
$$z_1 \neq 0,\ \overline{\frac{1}{z_1}} = \frac{1}{\overline{z_1}}$$
Infatti:
$$\overline{z_1}\cdot\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \overline{\left(z_1\cdot\frac{1}{z_1}\right)} = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$

5. Se $z_2 \neq 0$ allora:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se $z_1 \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z_1} \overset{def}{=} \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

Esempio 1.7

$$z = \frac{1+i}{2-i} = (1+i)\left(\frac{1}{2-i}\right)$$

$$\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$z = (1+i)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\overline{z} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

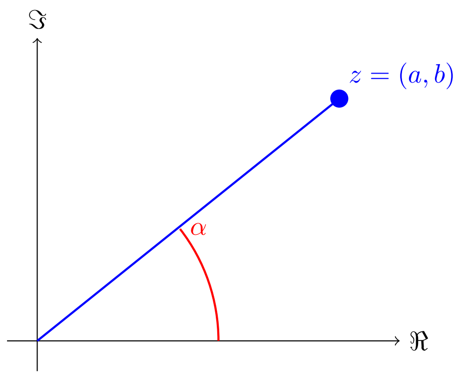


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ, detto **raggio polare**, ed α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ in senso antiorario. α viene misurato in radianti

Esempio 1.8

$$z_1 = (1,0) \to 1$$
$$z_2 = (1,\frac{\pi}{2}) \to i$$
$$z_3 = (1,\pi) \to -1$$
$$z_4 = (1,\frac{3\pi}{2}) \to -i$$

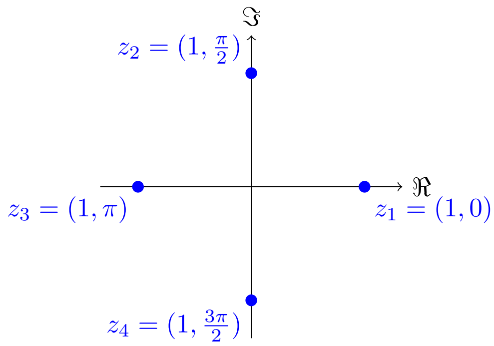


Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

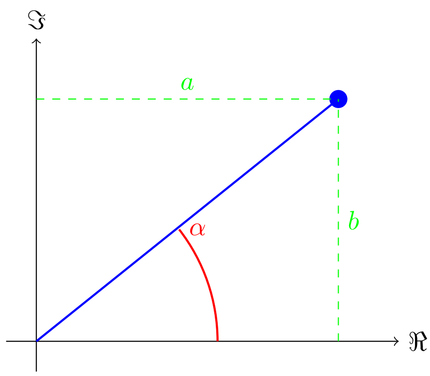


Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

Definizione 1.5
*La **forma trigonometrica** di un numero complesso è definita come:*

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha) i) = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \quad \textit{se } a = 0,\ b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} \quad \textit{se } a = 0,\ b < 0 \\ \textit{non definito} \quad \textit{se } a = 0,\ b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \textit{se } a > 0,\ b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi \quad \textit{se } a > 0,\ b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \textit{se } a < 0,\ b \textit{ qualsiasi} \end{cases}$$

Esempio 1.9

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$
$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$$
$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$
$$-i = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})$$

1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica

Definizione 1.6

$$z_1 = r\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right), \quad z_2 = s\left(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\right) \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 z_2 = rs(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) =$$
$$= rs\left((\cos\alpha\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))i\right) =$$
$$= rs\left(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)\right)$$

1.8 Formula di de Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}, \quad z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

Esempio 1.10

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6} \cdot 6) + i\sin(\frac{\pi}{6} \cdot 6)\right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -64$$

1.9 Definizione di radice n-esima

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.10 Teorema delle radici n-esime

Teorema 2 *Siano $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esistono precisamente n radici n-esime complesse distinte $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di y. Se $y = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, allora per $k = 0, \ldots, n-1$:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Si somma $2k\pi$ per ottenere tutte le radici n-esime, siccome sin *e* cos *sono periodiche.*

1.10.1 Dimostrazione

Per la formula di de Moivre sappiamo che:

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n (\cos\alpha + (2\pi)k + i\sin\alpha + (2\pi)k) =$$

$$= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = y$$

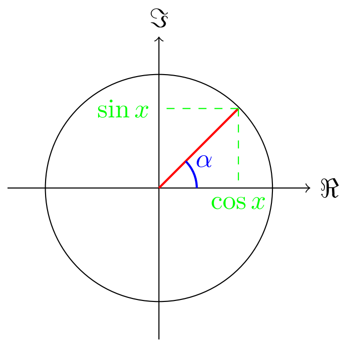


Figura 4: Circonferenza goinometrica

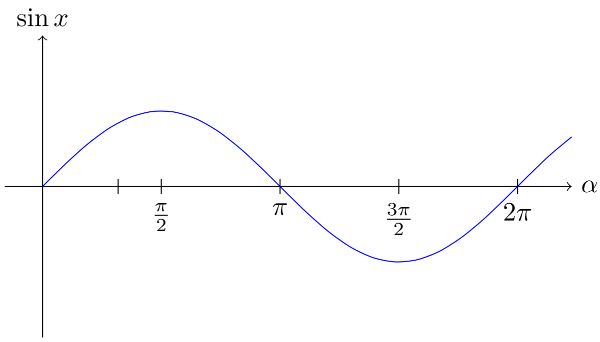


Figura 5: Funzione seno

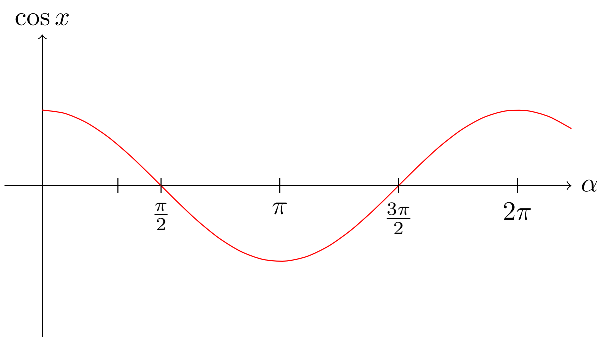


Figura 6: Funzione coseno

Quindi $z_0, \dots, z_{n-1}$ sono soluzioni di $y = x^n$, cioè sono radici n-esime di y. Siccome il periodo di $\sin$ e $\cos$ è 2π, le radici n-esime sono tutte distinte.

1.11 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ tale che $a < 0$. Esistono precisamente due radici quadrate di a in $\mathbb{C}$. Infatti, abbiamo:

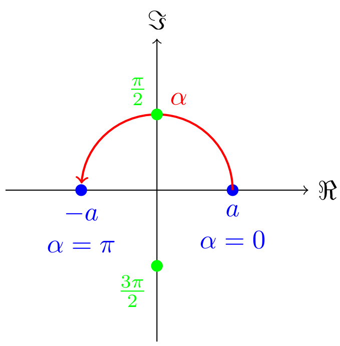


Figura 7: Radici quadrate di numeri reali negativi

$$a = (-a)(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Per il teorema 2:

$$z_0 = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{-a}$$

Definizioni utili 1.3
Se abbiamo un polinomio della forma:

$$ax^2 + bx + c, \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In $\mathbb{C}$ esistono 2 soluzioni anche se $\Delta < 0$.

2 Sistemi lineari e matrici

2.1 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni in n incognite che può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $b_k,\ a_{ij} \in \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{R}$ per $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m$. Se i **termini noti** sono tutti nulli il sistema è detto **omogeneo**. Una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di numeri complessi (o reali) è una soluzione se soddisfa tutte le m equazioni.

Esempio 2.1
Presa in considerazione la seguente tabella nutrizionale di cereali (per porzione):

	Cheerios	*Quakers*
Proteine (g)	*4*	*3*
Carboidrati (g)	*20*	*18*
Grassi (g)	*2*	*5*

Quante porzioni di Cheerios e Quakers dobbiamo mangiare per ottenere $9g$

di proteine, 48g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4C + 3Q = 9 \quad \textit{(P)} \\ 20C + 18Q = 48 \quad \textit{(C)} \\ 2C + 5Q = 8 \quad \textit{(G)} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema lineare:

- *Moltiplichiamo le per* $\frac{1}{4}$ *e otteniamo un sistema lineare* ***equivalente*** *(cioè con* ***esattamente*** *le stesse soluzioni):*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C) \quad 20C + 18Q = 48$$

$$(G) \quad 2C + 5Q = 8$$

- *Calcoliamo* $(C) - 20(P')$ *e* $(G) - 2(P')$ *e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + 15Q = 18$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- *Moltiplichiamo* (C') *per* $\frac{1}{3}$ *e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + \frac{7}{2}Q = \frac{7}{2}$$

- *Calcoliamo* $(G') - \frac{7}{2}(C")$ *e otteniamo:*

$$(P') \quad C + \frac{3}{4}Q = \frac{9}{4}$$

$$(C') \quad 0C + Q = 1$$

$$(G') \quad 0C + 0Q = 0$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ *e* $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Per agevolare la risoluzione del sistema lineare si può utilizzare una matrice:

- ***R1*** *= Riga 1*
- ***R2*** *= Riga 2*

- ***R3*** = *Riga 3*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \frac{1}{4} \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\downarrow R2 - 20 \cdot R1$$

$$\downarrow R3 - 2 \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow \frac{1}{3} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow R3 - \frac{7}{2} \cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ *e* $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

2.2 Definizione

Definizione 2.1
Siano m ,n,; < 1. Una tabella A tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

*di $m \times n$ elementi di $\mathbb{C}$ disposti in m righe e n colonne si chiama una **matrice** di **dimensione** $m \times n$. Gli elementi si chiamano **coefficienti** (o entrate) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice ij dove i indica la riga e j la colonna di appartenenza.*

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ con entrate in $\mathbb{C}$ si indica con $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

L'insieme di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ con entrate in $\mathbb{R}$ si indica con $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

2.3 Definizione

Un sistema lineare di n incognite e m equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

può essere rappresentato nella forma **matriciale**:

$$Ax = b$$

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice dei coefficienti}} \quad \underbrace{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vettore delle incognite}} \quad \underbrace{b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Vettore dei termini noti}}$$

La matrice

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

è detta **matrice aumentata**.

Esempio 2.3

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$R2 - R1 \quad R3 + R1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\frac{-1}{5}R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$R3 - 4R2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$5R3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

Si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegiamo un parametro alla **variabile libera** x_4 :

$$t = x_4 \quad x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8-5t) + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + t + \frac{1}{4}t = \frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3(\frac{-7}{5} + \frac{5}{4}t)\frac{-3}{2}(8-5t) - t = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t - \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10+21-60}{5} + \frac{15+30}{4}t - t = \frac{-29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = \frac{-29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni $t \in \mathbb{C}$.

2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumenta $(A|b)$, si ottiene un sistema equivalente di forma più semplice:

- Moltiplicare una riga (R_i) per uno scalare $\alpha \in \mathbb{C}$ **non nullo**:

$$\alpha R_i$$

- Sommare una riga (R_i) con un multiplo di un'altra riga (R_j):

$$R_i + \alpha R_j$$

- Scambiare riga R_i con riga R_j:

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

Esempio 2.4
Prendiamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{R3+R1}{\overset{R2-R1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right) \overset{\frac{-1}{5}R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{R3-4R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{array}\right) \overset{\frac{5}{8}R3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, non ha soluzioni.

2.5 Linee in $\mathbb{R}^2$

2 equazioni a 2 incognite con coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (I) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$$

Questo sistema lineare può essere rappresentato come:

$$y = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}} \quad (I)$$

$$y = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} \quad (II)$$

Il sistema può essere rappresentato come un sistema di rette nel piano cartesiano in cui la soluzione è l'intersezione delle rette.

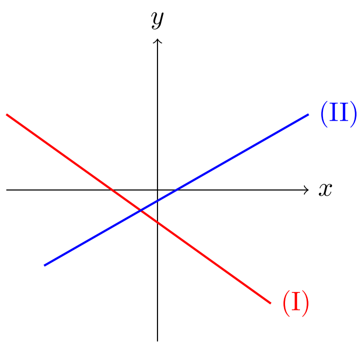


Figura 8: Intersezione di due rette

Può anche succedere che le rette siano parallele, in questo caso il sistema è impossibile:

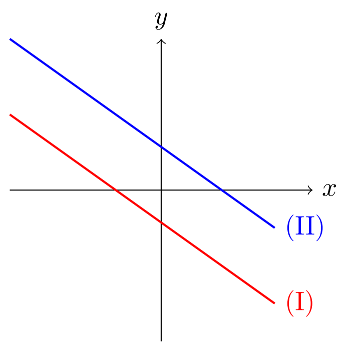


Figura 9: Retta parallela

Oppure che le rette siano coincidenti, in questo caso il sistema è indeterminato, cioè con infinite soluzioni:

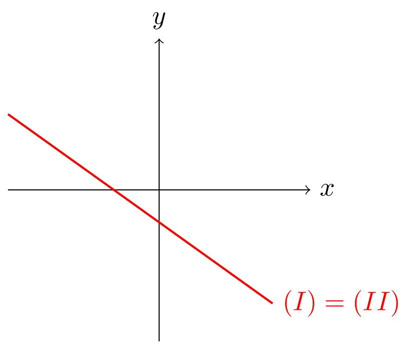


Figura 10: Retta coincidente

2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice $M = (a_{ij}) \quad 1 <= i <= m \quad 1 <= j <= n$ in $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ (oppure in $M_{m \times n}(\mathbb{R})$) con righe $R1, \dots, Rn$, eseguiamo le seguenti opreazioni elementari:

1. Scegliamo la prima colonna non nulla j di M (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato 2 righe di M, otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{con } a_{ij} \neq 0$$

   Moltiplicando $R1$ per $\frac{1}{a_{ij}}$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   Adesso, per ogni $2 \leq i \leq m$, eseguiamo l'operazione elementare $Ri - a_{ij}R1$. Otteniamo una matrice della forma:

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & M' & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & *
\end{pmatrix} \\
\uparrow \\
\text{Colonna } j
\end{array}
$$

2. Ripetiamo il procedimento 1. su M' per ottenere:

$$
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & M'' & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

e così via...

3. Dopo un numero finito di passi, si ottiene una matrice che si chiama **matrice a scala**:

Pivot

$$
r \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & \dots & \ddots & * & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & * & \dots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

Colonne dominanti

cioè esiste un numero $1 <= r <= m$ tale che:

(a) Le righe $1 \leq i \leq r$ non sono nulle.

(b) Ogni riga $2 \leq i \leq m$ ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente.

(c) le righe $r + 1 \leq i \leq m$ sono tutte nulle.

Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga i è uguale a 1 e si chiama **pivot**. La matrice è detta **forma ridotta** di M. Le colonne che contengono pivot sono dette **dominanti**.

Esempio 2.5
Prendiamo in considerazione la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{C})$$

$$\overset{R1 \leftrightarrow R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{10}R1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R3+iR1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{5}i \end{pmatrix}$$

$$\overset{R3-(6+3i)R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{11}{5} - \frac{11}{5}i} \end{pmatrix} \overset{\frac{R3}{\frac{11}{5}-\frac{11}{5}i}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Risoluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*) \quad Ax = b$$

con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ procediamo con il metodo di eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata $(A|b)$ fino ad ottenere la forma ridotta $(U|c)$ e un sistema lineare corrispondente

$$Ux = c$$

che è equivalente a $(*)$. Chiamiamo **variabili dominanti** le r variabili che corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti.

Esempio 2.6
Prendiamo in considerazione il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

Scritto come matrice aumentata diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{array}\right) \overset{EG}{\rightsquigarrow} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \end{array}$$

x_1 e x_3 sono variabili dominanti e x_2 è variabile libera.

Si ha uno dei seguenti casi:

1) Tutte le colonne di $(U|c)$ tranne c sono dominanti. In questo caso il sistema ha una soluzione unica. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

∞) L'ultima colonna e almeno una colonna di U **non** sono dominanti. In tal caso il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono assegnando parametri alle $n - r$ variabili libere. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

0) L'ultima colonna c è dominante. In questo tal caso il sistema non ammette soluzioni. Ad esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Attenzione: la forma ridotta di una matrice **non** è unicovamente determinata, ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

2.8 Definizione di rango di una matrice

Definizione 2.2
*Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ con forma ridotta U. Il numero r di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di U e si indica con $rk(U)$.*

Verrà dimostrato più avanti che ogni forma ridotta di A ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di A come $rk(A) = rk(U)$.
Si ha $rk(A) \leq min(m, n)$.

2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni [1], [∞], [0] usando il rango:

Teorema 3 (Teprema di Rouchè-Capelli) *Sia* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, *sia* $b \in M_{m\times 1}((C))$.

$$[1] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) = n$$
$$"rk(U) = rk(U|c)"$$

$$[\infty] \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|b) < n$$
$$"rk(U) = rk(U|c) < n"$$

$$[0] \Leftrightarrow rk(A) < rk(A|b)$$
$$"rk(U) < rk(U|c)"$$

3 Matrici e le loro operazioni

3.1 Definizione di somma

Definizione 3.1
Siano $A = (a_{ij}) \quad 1 <= i <= m \ , \ 1 <= j <= n$ *e* $B = (b_{ij}) \quad 1 <= i <= m \ , \ 1 <= j <= n$ *due matrici in* $M_{m\times n}(\mathbb{C})$. *La* ***somma*** *di* A *e* B *è la matrice*

$$A + B(a_{ij} + b_{ij}) \quad 1 <= i <= m \ , \ 1 <= j <= n =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

in $M_{m\times n}(\mathbb{C})$

Esempio 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ -1 & 1-i & 5+i \end{pmatrix}$$

3.1.1 Proprietà

L'addizione di matrici è:

- **Associativa**, cioè:
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- **Commutativa**, cioè:
$$A + B = B + A$$

3.2 Definizione di prodotto per uno scalare

Definizione 3.2
Data una matrice $A = (a_{ij})_{1<=i<=m\ ,\ 1<=j<=n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$*, il* ***prodotto*** *della matrice* A *per lo scalare* α *è la matrice:*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1<=i<=m\ ,\ 1<=j<=n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 3.2

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix}$$

3.2.1 Proprietà

Il prodotto di una matrice per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$
$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

  per $A, b \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

3.3 Definizione di matrice trasposta

Definizione 3.3
Accanto a una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$*, consideriamo la matrice* A^T *ottenuta da* A *scambiando le righe con le colonne, è detta* ***trasposta*** *di* A*.*

Esempio 3.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 7 \\ \pi & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ i & \frac{1}{12} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Definizione di prodotto di matrici

- Una matrice di dimensione $m \times 1$ è detta **vettore** (colonna) e si usa la notazione $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$.

Una matrice di dimensione $1 \times n$ è detta **vettore riga** e si usa la notazione $v^T = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$.

Sia $v^T = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ un vettore riga in $M_{1\times n}(\mathbb{C})$ e $u = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vettore colonna in $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Il **prodotto** di v^T per u è il numero complesso: $v^T u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \in \mathbb{C}$

Esempio 3.4

$$v^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v^T u = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 1 + 0 + 9 = 10$$

- Possiamo vedere una matrice $A = (a_{ij})_{1<=i<=m\ ,\ 1<=j<=n}$ come m vettori riga $Ri = (a_{i1} \dots a_{in})_{1<=i<=m}$ detti **righe di** A oppure n vettori colonna $Cj = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{1<=j<=n}$ detti **colonne di** A.

Siano

$$A = (a_{ij})_{1<=i<=m\ ,\ 1<=j<=n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$$

$$B = (b_{ij})_{1<=i<=s\ ,\ 1<=j<=t} \in M_{n\times t}(\mathbb{C})$$

Se $n = s$, allora possiamo formare il prodotto di A e B:

$$AB = (c_{ij})_{1<=i<=m\ ,\ 1<=j<=t}$$

dove

$$c_{ij} = RiCj = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

è il prodotto della riga i di A e la colonna j di B.

Esempio 3.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1C1 & R1C2 & R1C3 \\ R2C1 & R2C2 & R2C3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 12 & 22 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

3.4.1 Proprietà

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà:

- **Associativa**, cioè:
$$A(BC) = (AB)C$$

- **Distributiva rispetto all'addizione**, cioè:
$$(A + B)C = AC + BC$$
Con $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{n\times t}(\mathbb{C})$
$$A(B + C) = AB + AC$$
In sostanza le matrici devono avere il numero di colonne uguale al numero di righe.

- Scriviamo $I_n \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ per la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
Questa matrice viene detta **matrice identità**.
Per ogni matrice $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, abbiamo che:
$$M \cdot I_m = I_m \cdot M = M$$

Esempio 3.6

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.7

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

- $(AB)^T = B^T A^T$ con
$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \quad B \in M_{n\times t}(\mathbb{C})$$
$$A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) \quad B^T \in M_{t\times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto di matrici **non** è commutativo:

$$AB \neq BA$$

Infatti:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Osservazione

Siano $A = (a_{ij})_{1<=i<=m\ ,\ 1<=j<=n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times i}(\mathbb{C})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Consideriamo $Ax = b$ in forma matriciale. Abbiamo

$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\in M_{m\times n}(\mathbb{C})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{n\times 1}(\mathbb{C})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\in M_{m\times 1}(\mathbb{C})}$$

che è uguale a $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esempio 3.9

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6 Definizione

Una matrice $A = (a_{ij})_{1<=i,j<=n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ di dimensione $n\times n$ si dice **matrice quadrata** di ordine n. Gli elementi di A: $a_{ii} \quad 1 <= i <= n$ formano la **diagonale** di A.

Esempio 3.10

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti gli elementi fuorri dalla diagonale sono nulli, la matrice è detta **matrice diagonale**.

Esempio 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sotto della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare superiore**.

Esempio 3.12

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sopra della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta **matrice triangolare inferiore**.

Esempio 3.13

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}$$

3.7 Matrici elementari

Prendiamo la matrice identità:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le operazioni elementari alla matrice identità I_n per ottenere le matrici elementari che denotiamo come segue:

- E_{ij} la matrice ottenuta da I_n scambiando la riga i con la riga j

Esempio 3.14

$$n = 3 \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E_i(\alpha)$ ottenuta da I_n moltiplicando la riga i per lo scalare $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$

Esempio 3.15

$$n = 3 \quad \alpha = i + 5 \in \mathbb{C}$$

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

- $E_{ij}(\alpha)$ ottenuta da I_n sommando la riga i con la riga j moltiplicata per lo scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

Esempio 3.16

$$n = 3 \quad \alpha = \frac{-5}{6} \in \mathbb{C}$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Moltiplicazione con matrici elementari

Esempio 3.17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -i-5 & 5(i+5) \end{pmatrix}$$

$$E_{13}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-25}{6} \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che ogni operazione elementare su una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ corrisponde alla (pre)moltiplicazione di A con la matrice elementare ottenuta da I_m effettuando la medesima operazione elementare.

Definizioni utili 3.1

$$AE_1(-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \overset{EG}{\rightsquigarrow}$$

$$\underset{E_{21}(-3)}{\overset{R2-3R1}{\rightsquigarrow}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}}_{\equiv E_{21}A} \underset{E_2(\frac{1}{5})}{\overset{\frac{1}{5}R2}{\rightsquigarrow}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\equiv E_2(\frac{1}{5})(E_{21}(-3)A)} = U$$

Otteniamo una matrice con 2 pivot e 2 colonne dominanti. Questa matrice viene chiamata ***forma ridotta di*** *A . Quindi il calcolo può essere anche fatto in questo modo:*

$$U = E_2\left(\frac{1}{5}\right)(E_{21}(-3)A) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{E} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R2-3R1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{5}R2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

A sinistra della barra abbiamo la matrice U e a destra la matrice E.

3.9 Definizione di matrice invertibile

Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ si dice **invertibile** se esiste $C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che:

$$CA = I_n \quad \text{e} \quad AC = I_n$$

In tal caso, C è detta **inversa** di A. L'inversa di A, quando esiste, è univocamente determinata e si denota con A^{-1}. Infatti, se C e C' sono due matrici inverse di A , allora:

$$C = I_nC = (C'A)C = C'(AC) = C'I_n = C'$$

Esempio 3.19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow C = A^{-1}$$

Se $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sono invertibili, allora lo è anche il loro prodotto AB. Infatti l'inversa di AB è $B^{-1}A^{-1}$. Infatti:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

oppure

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.10 Inverse di matrici elementari

Le matrici elementari sono tutte invertibili con inverse:

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

Esempio 3.20

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\frac{1}{\alpha})$$

Esempio 3.21

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$E_3(\frac{1}{i+5})E_3(i+5) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

Esempio 3.22

$$E_{23}(-\frac{5}{6}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}(\frac{5}{6})E_{23}(-\frac{5}{6}) = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.11 Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare in forma matriciale, cioè $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$. Se $(U|c)$ è una forma ridotta della matrice aumentata $(A|b)$, allora i sistemi lineari $Ax = b$ e $Ux = c$ hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti.

3.11.1 Dimostrazione

Siano $E_1, \ldots, E_s$ le matrici elementari che trasformano $(A|b)$ nella forma ridotta $(U|c)$. Allora:

$$(A|b) \underset{E_1}{\sim} (A'|b') \underset{E_2}{\sim} \ldots \underset{E_s}{\sim} (U|c)$$

Allora abbiamo:

$$(U|c) = E_s \ldots \underbrace{E_1(A|b)}_{(A'|b')}$$

Per 3.10, le matrici elementari $E_1, \ldots, E_s$ sono invertibili. Dunque anche il prodotto $E = E_s \ldots E_1$ è invertibile con $E^{-1} = E_1^{-1} \ldots E_s^{-1}$. Abbiamo che

$E(A|b) = (U|c)$, ovvero $EA = U$ e $Eb = c$. Pertanto, se $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ è una soluzione di $Ax = b$, cioè $Av = b$, allora:

$$Uv = (EA)v = E(Av) = Eb = c$$

Quindi v è soluzione di $Ux = c$.

Se $v \in M_{a\times 1})\mathbb{C}$ è soluzione di $Ux = c$, cioè $Uv = c$, allora:

$$Av = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m}Av = E^{-1}(EA)v = E^{-1}(Uv) = E^{-1}c =$$

$$= E^{-1}(Eb) = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_m}b = b$$

Quindi v è soluzione di $Ax = b$ $\square$.

3.12 Proposizione

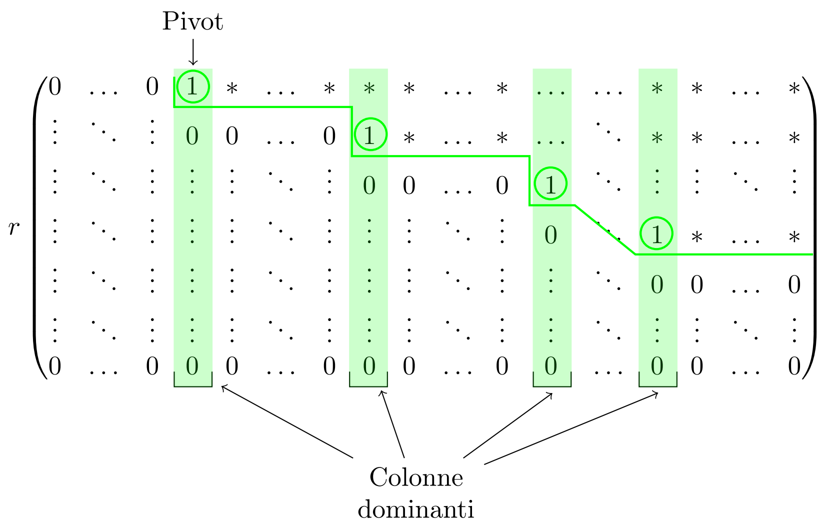
Sono equivalenti i seguenti enunciati per $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$:

1. Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$.
2. Il rango $rk(A)$ di A è pari al numero di righe di A.

3.12.1 Dimostrazione

Dimostriamo che 1. implica 2. Supponiamo (1.)

Sia U una forma ridotta di A:



Queste righe esistono se e solo se $rk(U) <$ numero di righe di U.

Esiste una matrice invertibile E tale che $U = EA$ ($E =$ prodotto delle matrici elementari dell'Eliminaizone di Gauss). Consideriamo il vettore $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e mettiamo $b = E^{-1}C$. Allora il sistema lineare $Ax = b$ ammette una soluzione v per (1.), cioè $Av = b$. Allora $Uv = Eb = E(E^{-1}C) = C$ per (3.11). Per il teorema di **Rouché-Capelli**, $rk(U) = rk(U|c)$, cioè:

$$(U|c) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & * & \dots & * & * & \dots & * & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & & 1 \end{array}\right)$$

L'ultima riga non può essere nulla, altrimenti l'ultima colonna di $(U|c)$ sarebbe una colonna dominante.

Dunque $rk(A) = rk(U) =$ numero di righe di $U =$ numero di righe di A.

Dimostriamo che 2. implica 1. Supponiamo (2.)

Sia $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ e consideriamo $Ax = b$. Eseguendo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice $(A|b)$, otteniamo una forma ridotta $(U|c)$. Siccome $rk(U) =$ numero di righe di U, ogni riga di U contiene un pivot. Perciò $rk(U) = rk(U|c)$ e quindi $rk(A) = rk(A|b)$. Quindi siamo nel caso di una soluzione unica, oppure nel caso di infinite soluzioni del teorema di **Rouché-Capelli**. $\square$