# Probabilità e Statistica
# Esercizi

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

2° Semestre 2023/2024

# Indice

# 1 Probabilità elementari e probabilità condizionate

## 1.1 Esercizio 1

Un corso è frequentato da 10 studenti: 6 maschi e 4 femmine. Viene effettuato un esame ed i punteggi degli studenti sono tutti diversi. Si suppone ciascuna classifica equiprobabile.

a. Qual è la cardinalità dello spazio dei campioni costituito da tutte le possibili classifiche? Qual è una possibile misura di probabilità associata?

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}$$

Tutte le possibili classifiche equivalgono a tutti i modi in cui si possono ordinare i punteggi degli studenti. Quindi, la cardinalità dello spazio degli eventi è 10!:

$$card(\Omega) = 10!$$

La probabilità associata è calcolata come il rapporto tra il numero di eventi favorevoli e il numero di eventi possibili:

$$P(\omega) = \frac{card(\omega)}{card(\Omega)} = \frac{1}{10!}$$

b. Qual è la probabilità che le quattro studentesse ottengano punteggi migliori?

$$E = \text{"Studentesse ottengono punteggi migliori"}$$

La probabilità che le studentesse ottengano punteggi migliori è data dal rapporto tra il numero di eventi favorevoli e il numero di eventi possibili:

$$P(E) = \frac{4!}{10!}$$

## 1.2 Esercizio 2

In uno stock di 100 prodotti, 20 sono difettosi.

a. Dieci vengono scelti a caso, senza rimpiazzo.

Qual è la probabilità che esattamente la metà siano difettosi?

Per calcolare la probabilità che esattamente la metà dei prodotti siano difettosi si deve fare il rapporto tra la moltiplicazione del numero di modi in cui si possono scegliere 5 prodotti difettosi e 5 prodotti non difettosi e il numero di modi in cui si possono scegliere 10 prodotti:

$$P(E) = \frac{\binom{20}{5} \cdot \binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{20!}{5! \cdot 15!} \cdot \frac{80!}{5! \cdot 75!}}{\frac{100!}{10! \cdot 90!}} = \frac{15504 \cdot 24040016}{1.731030946 \cdot 10^{13}} \approx 0.214 = 21.4\%$$

b. Dieci vengono scelti a caso, con rimpiazzo.

Qual è la probabilità che esattamente la metà siano difettosi? Si può considerare una variabile di Bernoulli:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prodotto è difettoso} p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \\ 0 & \text{altrimenti} p = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

La probabilità che esattamente la metà dei prodotti siano difettosi è data dalla distribuzione binomiale:

$$P(\omega) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$$

$$P(E) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0.0264 = 2.64\%$$

### 1.3 Esercizio 3

Consideriamo l'estrazione di una carta da una mazzo di 40 carte napoletane (4 semi; per ciascun seme 10 carte dall'asso al 7 più tre figure).

a. Qual'è la probabilità di estrarre un asso?

   Il numero di semi in un mazzo di carte napoletane è 4. Quindi ci sono 4 assi, di conseguenza la probabilità di trovare un asso è:

$$P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$

Estraiamo ora 2 carte.

b. Qual'è la probabilità di estrarre un asso e un re, rispettivamente?

   Calcolare le probabilità nel caso di:

   - Estrazione con reinserimento

     La probabilità di estrarre un asso e un re con reinserimento è data dal prodotto delle probabilità di estrarre un asso e un re:

$$P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\% \quad \text{Estrarre un asso}$$

$$P(R) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\% \quad \text{Estrarre un re}$$

$$P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01 = 1\%$$

   - Estrazione senza reinserimento

     La probabilità di estrarre un re dopo aver estratto un asso è data dalla probabilità condizionata:

$$P(R \mid A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$

## 1.4 Esercizio 4

Una popolazione si compone per un 40 percento di fumatori (F) e per il restante 60 per cento di non fumatori (N). Si sa che il 25 per cento dei fumatori e il 7 per cento dei non fumatori ha una malattia respiratoria cronica (M).

1. Calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso sia effetto dalla malattia respiratoria.

   Un individuo scelto a caso ha una probabilità di essere fumatore malato:

   $$P(M \mid F) = 0.25$$

   e una probabilità di essere non fumatore malato:

   $$P(M \mid N) = 0.07$$

   La probabilità che un individuo scelto a caso sia affetto dalla malattia respiratoria è data dalla probabilità totale:

   $$P(M) = P(M \mid F) \cdot P(F) + P(M \mid N) \cdot P(N)$$

   $$P(M) = 0.25 \cdot 0.4 + 0.07 \cdot 0.6 = 0.1 + 0.042 = 0.142 = 14.2\%$$

2. Se l'individuo scelto è affetto dalla malattia, calcolare la probabilità che sia un fumatore.

   La probabilità che un individuo affetto dalla malattia sia un fumatore è data dalla probabilità condizionata:

   $$P(F \mid M) = \frac{P(M \mid F) \cdot P(F)}{P(M)} = \frac{0.25 \cdot 0.4}{0.142} = \frac{0.1}{0.142} = 0.704 = 70.4\%$$

## 1.5 Esercizio 5

Una particolare analisi del sangue è efficace al 99% nell'individuare una determinata malattia quando essa è presente. Si possono però verificare dei falsi positivi (ovvero una persona sana che si sottopone al test ha una probabilità pari a 0.01 di risultare erroneamente positiva al test). Se l'incidenza della malattia è del 0.5%, calcolare la probabilità che un individuo risultato positivo al test sia effettivamente malato.

$$T = \text{Test positivo}$$

$$M = \text{Persona malata} \quad \overline{M} = \text{Persona sana}$$

La probabilità che il test sia efficace è:

$$P(T \mid M) = 0.99$$

La probabilità che il test non sia efficace è:

$$P(T \mid \overline{M}) = 0.01$$

La probabilità di essere malato è:

$$P(M) = 0.005 = 0.5\%$$

La probabilità che il test sia positivo è data dalla probabilità totale:

$$P(T) = P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M})$$

$$P(T) = 0.99 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995 = 0.00495 + 0.00995 = 0.0149 = 1.49\%$$

La probabilità che un individuo risultato positivo al test sia effettivamente malato è data dalla probabilità condizionata:

$$P(T \mid P) = \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{P(T)}$$

$$P(T \mid P) = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.0149} = \frac{0.00495}{0.0149} \approx 0.332 = 33.2\%$$

## 1.6 Esercizio 6

In un vivaio si vendono dei sacchetti con 30 bulbi di dalie. I sacchetti sono di due tipi $S_1$ e $S_2$ . Tre quarti di tali sacchetti sono di tipo $S_1$ e contengono 10 bulbi di dalie rosse (R) e 20 bulbi di dalie gialle (G), mentre il restante quarto dei sacchetti è di tipo $S_2$ e contiene 5 bulbi di dalie rosse e 25 bulbi di dalie gialle.
Mario compra un sacchetto a caso e pianta un bulbo e vede di che colore è.

I sacchetti $S_1$ sono:

$$P(S_1) = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

$$P(R \mid S_1) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%$$

$$P(G \mid S_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0.666 = 66.6\%$$

I sacchetti $S_2$ sono:

$$P(S_2) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(R \mid S_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0.166 = 16.6\%$$

$$P(G \mid S_2) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \approx 0.833 = 83.3\%$$

- Determinare la probabilità che il bulbo produca una dalia rossa.

  La probabilità che il bulbo produca una dalia rossa è data dalla probabilità totale:

  $$P(R) = P(R \mid S_1) \cdot P(S_1) + P(R \mid S_2) \cdot P(S_2)$$

  $$P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \approx 0.291 = 29.1\%$$

- Se la dalia nata è rossa, qual è la probabilità che provenga da un sacchetto di tipo $S_1$?

  La probabilità che una dalia rossa provenga da $S_1$ è data dalla probabilità condizionata:
$$P(S_1 \mid R) = \frac{P(R \mid S_1) \cdot P(S_1)}{P(R)}$$
$$P(S_1 \mid R) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{7} = \frac{6}{7} \approx 0.857 = 85.7\%$$

## 1.7 Esercizio 7

In un test clinico, un individuo viene sottoposto ad un esame di laboratorio, per stabilire se ha o non ha una data malattia. Il test può avere esito positivo o negativo. C'è però sempre una possibilità di errore: può darsi che alcuni degli individui risultati positivi siano in realtà sani (falsi positivi), e che qualcuno degli individui risultati negativi siano in realtà malati (falsi negativi). Prima di applicare su larga scala un test nei laboratori, è quindi indispensabile valutarne la bontà, sottoponendo al test un campione di persone che sappiamo già se sono sane o malate. Uno dei parametri che definiscono la qualità diagnostica del test è la Sensibilità = 1 - P(falsi negativi).
In Italia c'è un malato di HIV ogni 40.000 persone. Un paziente si sottopone ad un test con una procedura che fornisce statisticamente lo 0,7% di falsi negativi e lo 0,01% di falsi positivi. Calcolare la probabilità a posteriori di essere ammalato, a test effettuato con esito positivo. Come cambia questa probabilità se però paziente e medico si convincono che, in base ai sintomi ed alle circostanze del possibile contagio, la probabilità a priori sia ad esempio 10 volte pi'u alta della media nazionale?