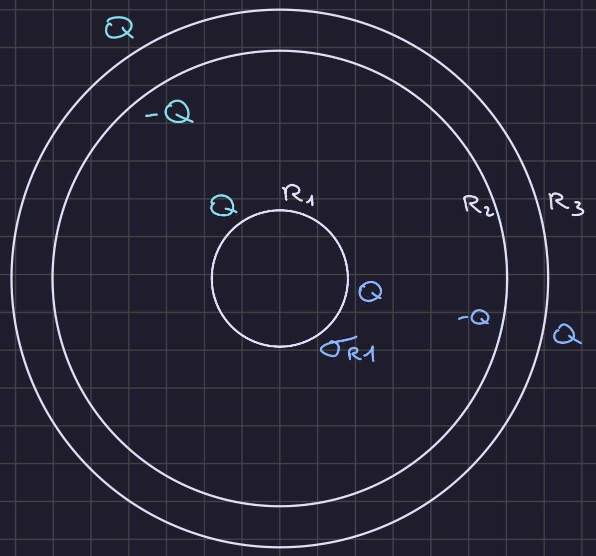
Esercitazione Amos

Elettrostatica

$Q : [C]$ Carica

o

$\sigma : \left[\frac{C}{m^2}\right]$ Distribuz. di carica



$Q = +10^{-10}\ C$

oppure

$\sigma_{R_1} = 3 \cdot 10^{-19}\ \frac{C}{m^2}$

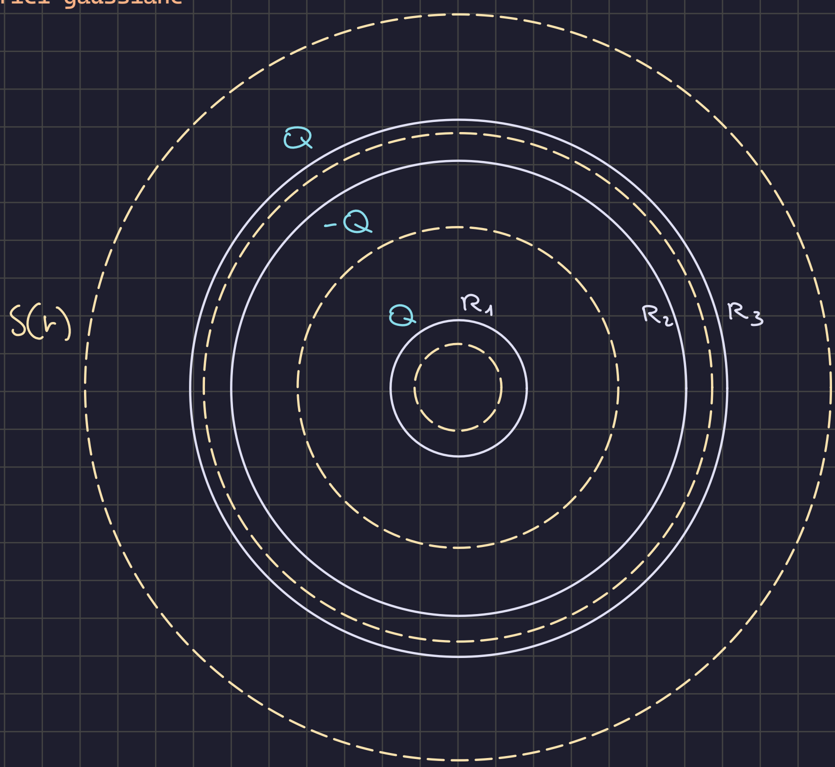
$S = 4\pi R_1^2\ m^2$

$Q = \sigma \cdot S = 3 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi R_1^2\ \frac{C}{\cancel{m^2}} \cancel{m^2}$

Calcolare il campo elettrico con il teorema di Gauss

$$\text{Th Gauss: } \quad \phi(\vec{E}) = \oint_{sup} \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_{Sup} \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Disegna le superfici gaussiane



Scelgo superfici gaussiane sferiche perchè rendono il campo costante:

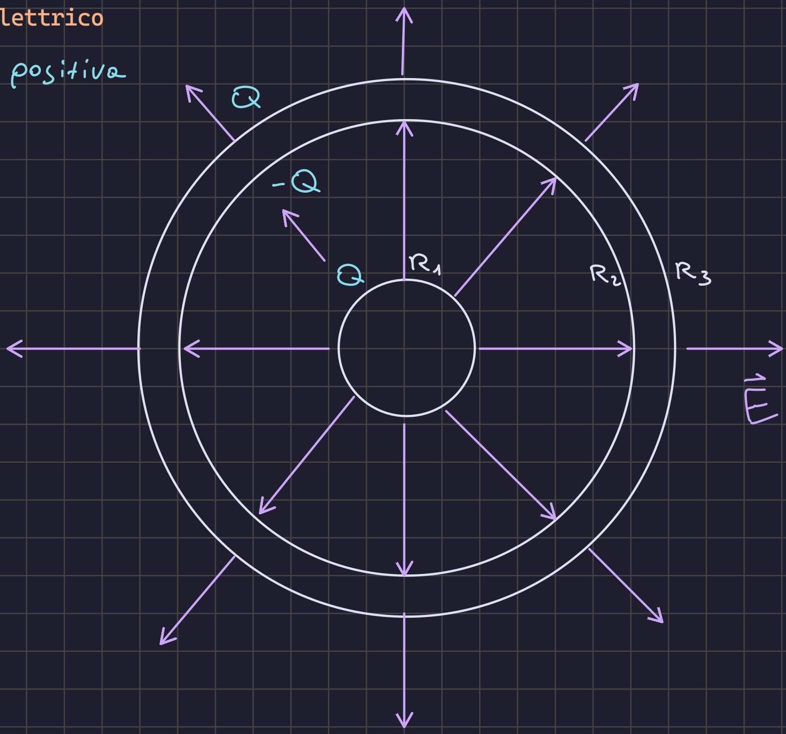
$$\oint_{S(r)} \overset{\text{cost.}}{\vec{E}}\, d\vec{S} = E(r) \cdot \oint_{S(r)} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\downarrow$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$

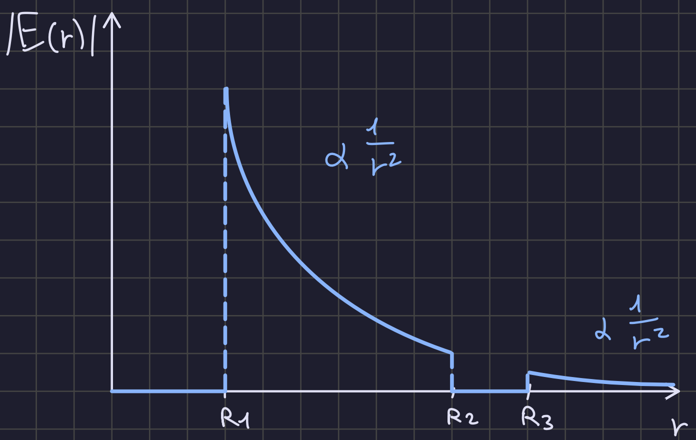
Disegnare il campo elettrico

Consideriamo Q positiva



Il campo elettrico è radiale uscente. (Se la carica fosse stata negativa sarebbe stato radiale entrante)

Disegnare l'andamento del campo elettrico



$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & \text{se } R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Calcolare il potenziale elettrico

Il potenziale è il lavoro che si compie spostando una carica di prova da una posizione di riferimento ad una posizione r'

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$$

Considero come punto di riferimento r_0 l'infinito $\rightarrow$ $r_0 = \infty$

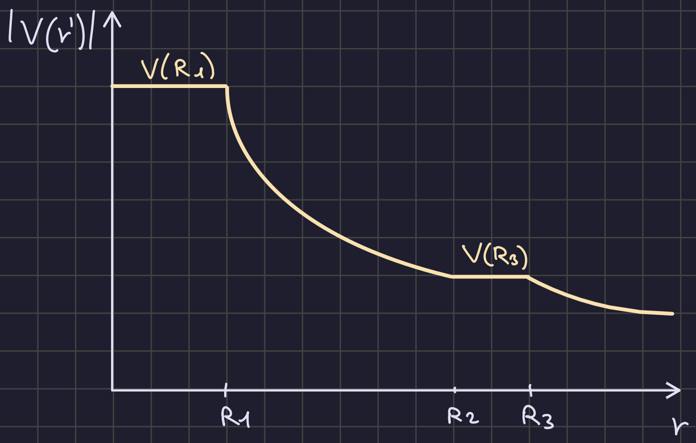
$V(r_0) = 0$

$$V(r') - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$V(r') = -\int_{r_0}^{r'} \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$V(r') = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r'} = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'} + \cancel{\frac{1}{\infty}}\right) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r'} \quad [V]$$

Disegnare l'andamento del potenziale



$$V(r') = \begin{cases} \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r'} & \text{se } r' \geq R_3 \\[2ex] \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & \text{se } R_2 \leq r' \leq R_3 \\[2ex] * \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{R_3}\right) & \text{se } R_1 \leq r' \leq R_2 \\[2ex] \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & \text{se } 0 < r' \leq R_1 \end{cases} \qquad [V]$$

$$* \quad V(R_3) - \int_{R_3}^{r'} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Calcolare l'energia elettrostatica

$$U = \int_{Vol} \underbrace{\mu_E}_{\text{densità di energia}} d\tau = \int_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

$$\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{3} r^2 \pi \, dr$$

Metodo 1

$$U_{TOT} = U_{int} + U_{est}$$

$$U_{int} = \int_{Vol} \mu_E \, d\tau$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q_{int}^2}{4^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}}} \cancel{4\pi r^2} \, dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \quad [J]$$

$$U_{est} = \int_{Vol} \mu_E \, d\tau$$
$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_3}^{\infty}$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_3}$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_{Tot} = \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Metodo 2

Calcolo la capacità del condensatore

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad [F]$$

L'energia elettrica immagazzinata in un condensatore è:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad [J]$$

Calcolare il lavoro

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\,E(r) = q \cdot \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

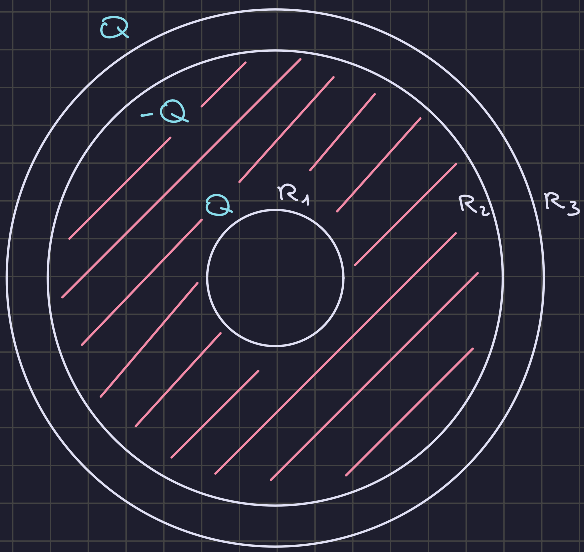
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Perché il campo é conservativo $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

$$L_{AB} = \int_A^B q\vec{E}\, d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} = -q \int_A^B \nabla V\, d\vec{l} = q(V_B - V_A) \quad [J]$$

Considerare un materiale dielettrico all'interno dell'intercapedine

$K > 1$



Calcolare il vettore di spostamento del dielettrico

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = D(r) \oint d\vec{S} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{int}$$

$$D(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Trovare il vettore di polarizzazione

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 K \vec{E} \end{cases} \rightarrow \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 K \vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (K - 1) \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Calcolare il campo elettrico in presenza di dielettrico

E_0 = Campo nel vuoto

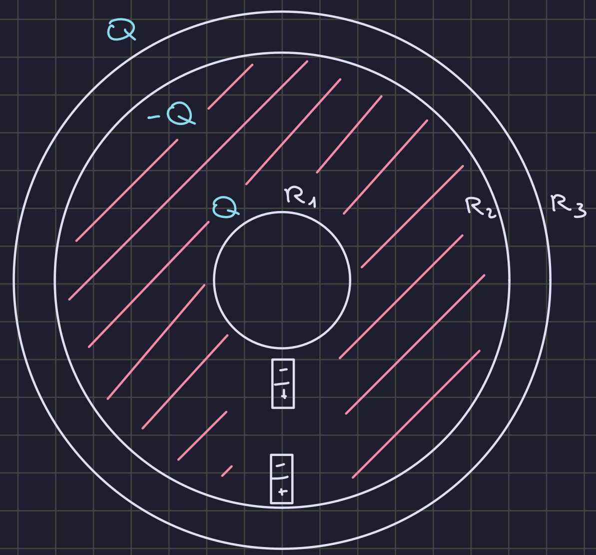
$$E_K = \frac{E_0}{K} \qquad C_K = C_0 \cdot K$$

$$V_K = \frac{V_0}{K} \qquad U_K = \frac{1}{2}\frac{Q_{in1}^2}{C_K} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{K \cdot C_0} = \frac{U_0}{K}$$

Calcolare la distribuzione delle cariche di polarizzazione sulla superficie

$$P(R) = \sigma_{Pol}(R) = \frac{Q\,(K-1)}{4\pi K R^2}$$

Disegnare le cariche di polarizzazione



Cilindro

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{lat} + \underbrace{\Phi_{basi}}_{=0}$$

$\downarrow$

$\rightarrow$ 

$$\sigma = \frac{C}{m^2}$$

$$Area = 2\pi R l$$

$$Q = \sigma \cdot A = \frac{C}{\cancel{m^2}} \, \cancel{m^2}$$

$$Q_{int} = \begin{cases} \sigma \cdot 2\pi r l & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad [C]$$

Campo:

$$\oint_{C(r)} \vec{E}\, d\vec{S} = E(r)\, 2\pi r l = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\downarrow$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi r l \varepsilon_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

Filo

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} \quad \frac{C}{m} \longrightarrow \lambda = \sigma\, 2\pi R$$

$$Q = \lambda \ell$$

$$E(r) = \frac{\lambda \cdot \cancel{\ell}}{2\pi\varepsilon_0 r \cancel{\ell}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\Delta V = V(r') - \underbrace{V(r_0)}_{\substack{=0 \\ r_0 \neq \infty}}$$

$$V(r') = -\int_{r_0}^{r'} E(r')\,dr'$$

$$= -\int_{r_0}^{r'} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'}\,dr'$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{r'}\,dr'$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r_0}\right) = \frac{\sigma\, \cancel{2}\pi R}{\cancel{2}\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r'}{r_0} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\frac{r}{r_0} \quad [V]$$

Esame 20/7/2022

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

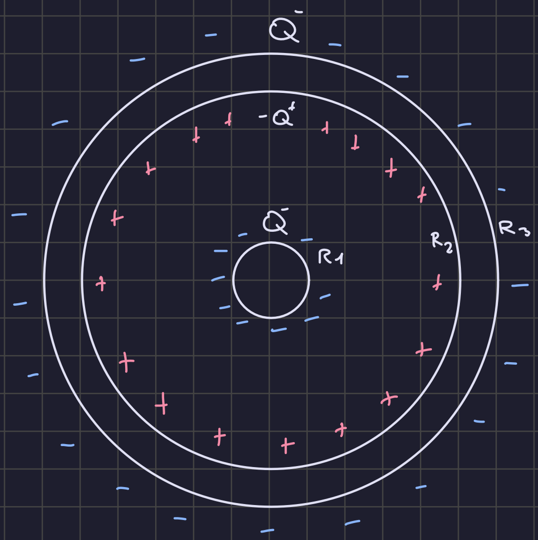
Un conduttore sferico cavo (**R_2=9cm; R_3=10cm**) contiene, in modo concentrico, una sfera conduttrice (**R_1=2cm)**. Sul conduttore interno viene depositata la carica **q_{int} = $-$10x10^{-9}C**. Il sistema finale è isolato e in equilibrio elettrostatico.

$R_1 = 2\,cm = 2 \cdot 10^{-2}\,m$

$R_2 = 9\,cm = 9 \cdot 10^{-2}\,m$

$R_3 = 10\,cm = 10 \cdot 10^{-2} = 10^{-1}\,m$

$Q_{inT} = -10 \cdot 10^{-9}\,C = -10^{-8}\,C$



1- Calcolare la distribuzione di carica sulle pareti dei conduttori (Q e densità)

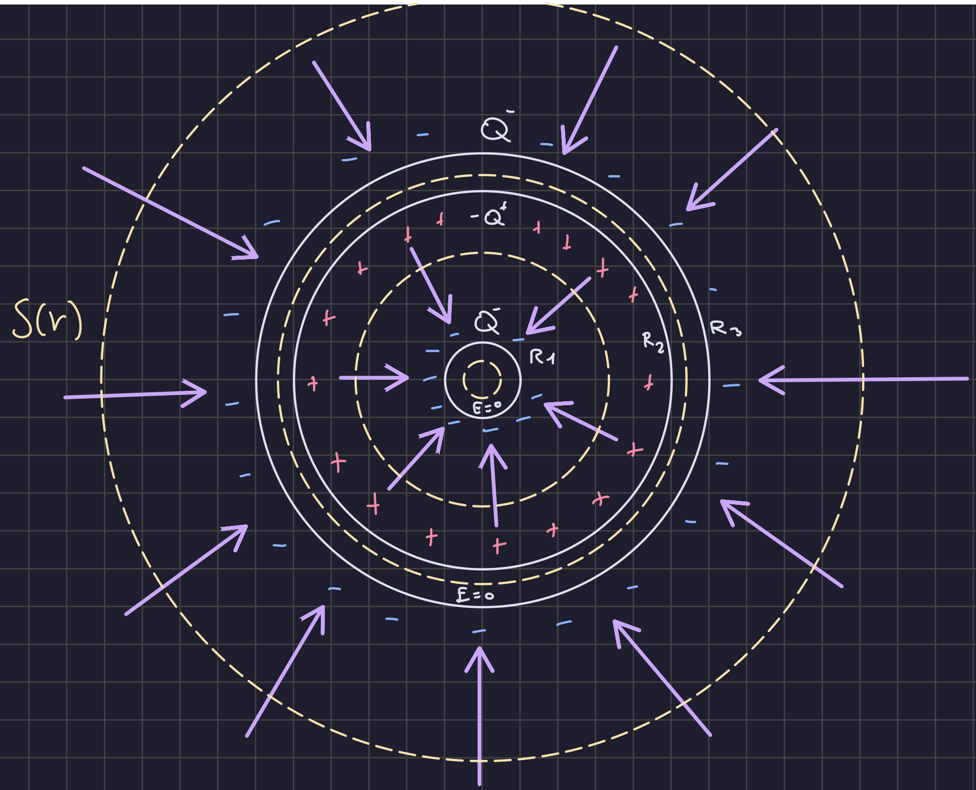
$\sigma = ?\quad \left[\frac{C}{m^2}\right] \rightarrow \frac{\text{Carica}}{\text{Area}}$

$\sigma^-_{R_1} = \frac{Q_{inT}}{4\pi R_1^2}\,\frac{C}{m^2} = \frac{-10^{-8}}{4\pi(2\cdot 10^{-2})^2}\,\frac{C}{m^2} \approx -2\cdot 10^{-6}$

$\sigma^+_{R_2} = \frac{Q_{inT}}{4\pi R_1^2}\,\frac{C}{m^2} = \frac{10^{-8}}{4\pi(9\cdot 10^{-2})^2}\,\frac{C}{m^2} = 9.8\cdot 10^{-8}$

$\sigma^-_{R_3} = \frac{Q_{inT}}{4\pi R_1^2}\,\frac{C}{m^2} = \frac{-10^{-8}}{4\pi(10^{-1})^2}\,\frac{C}{m^2} = -7{,}96\cdot 10^{-8}$

2- Ricavare applicando il teorema di Gauss il campo elettrico **E** generato in tutto lo spazio e disegnare il grafico E(r).

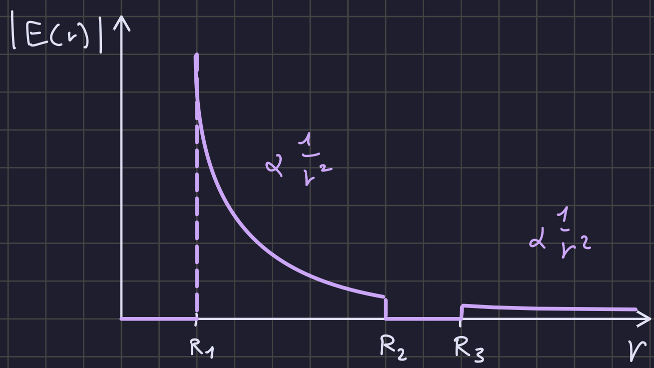


$$\oint_{S(r)} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S(r)} E(r)\, dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad \text{se} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \text{ e } r \geq R_3, \quad 0 \text{ altrimenti}$$

3- Ricavare il potenziale elettrostatico **V** nella sola regione esterna e disegnare il grafico.

$$\Delta V = V(r) - V(r_0) \qquad r_0 = \infty \rightarrow V(r_0) = 0$$

$$= -\int_{r_0}^{r} E(r)\, dr$$

$$\downarrow$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r)\, ds$$

$$= -\int_{r_0}^{r} \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\, dr$$

$$= -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2}\,dr$$

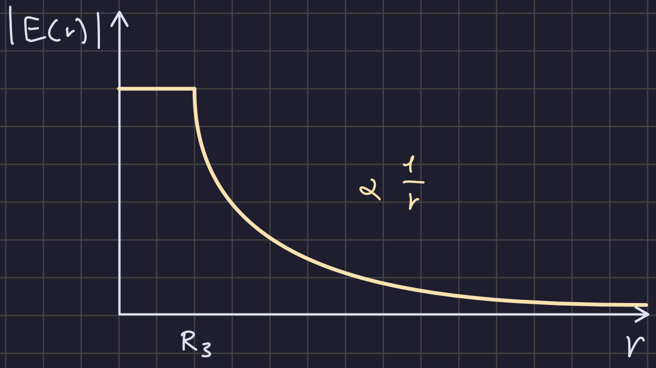
$$= -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r}$$

$$= -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right)$$

$$= -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{\infty}\right)$$

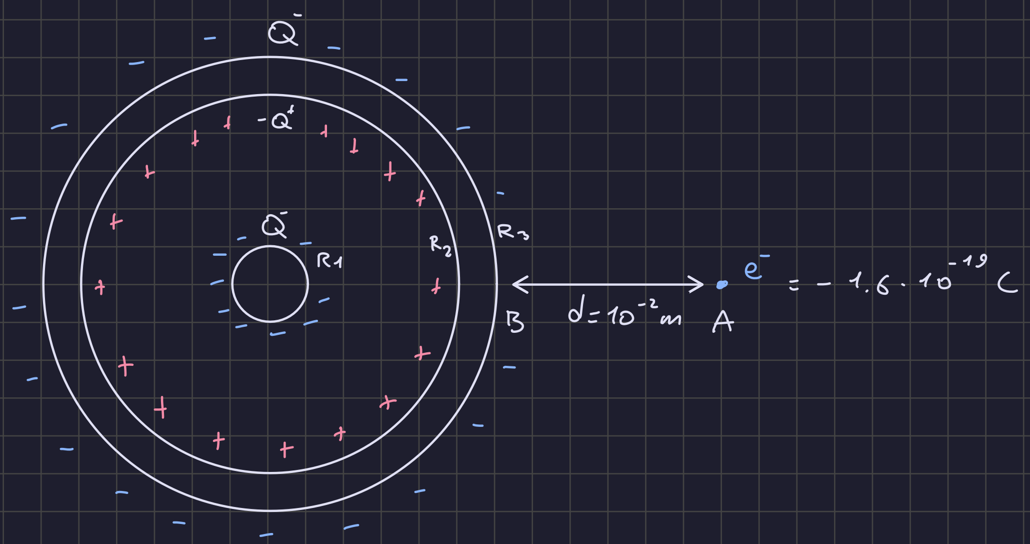
$$= -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r}\ [V]$$



Un elettrone viene posizionato a distanza **1cm** dalla superficie esterna.

4- Calcolare il lavoro del campo elettrico **L** per far compiere all'elettrone il suo percorso.



$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$
$$= q\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$A = R_3 + d = 10^{-1} + 10^{-2} = 0{,}11\ m$

$B = \infty$ (Repulsivo)

$$L_{AB} = \int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= q\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$$ Il campo é conservativo $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

$$= -q\int_A^B \nabla V\,d\vec{l}$$

$$= -q\left(V(B)-V(A)\right)\ [J]$$

$$= -q\left(V(\infty) - V(R_3+d)\right)$$

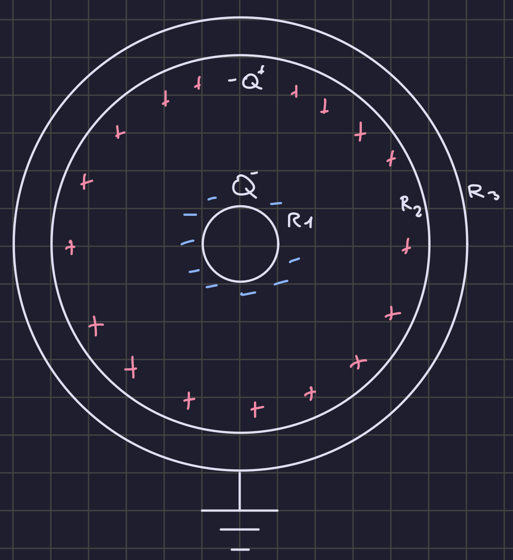
$$= q\,V(R_3+d)$$

$$= -\frac{q\,Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 (R_3+d)}\ [J] = -1.3\cdot 10^{-16}\ J$$

CASO A

La superficie esterna viene collegata a terra.

5- Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare l'energia elettrostatica **U** del sistema



La carica su R_3 diventa nulla $Q_{R3} = 0$

metodo 1

$$U_{TOT} = U_{inT} + U_{est}$$

$$= U_{int} + 0$$

$$= U_{inT}$$

$$U_{int} = \int_{vol} \mu_E\, d\tau \qquad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \mu_E\, 4\pi r^2 dr \qquad d\tau = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cancel{3} r^2\, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, 4\pi r^2\, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q_{int}^2}{\cancel{4}^2\cancel{\pi}^2 r^{\cancel{4}} \varepsilon_0^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{r^2}\, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}^2}{8\pi r^2 \varepsilon_0}\, dr$$

metodo 2

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q}{\cancel{\Delta V}}\Delta V^{\cancel{2}}$$

$$= \frac{1}{2} Q\,\Delta V$$

$$= \frac{1}{2} Q\left(V(R_1) - V(R_2)\right)$$

$$= 1.75\cdot 10^{-5}\ J$$

$$= \frac{Q_{int}}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q_{int}}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

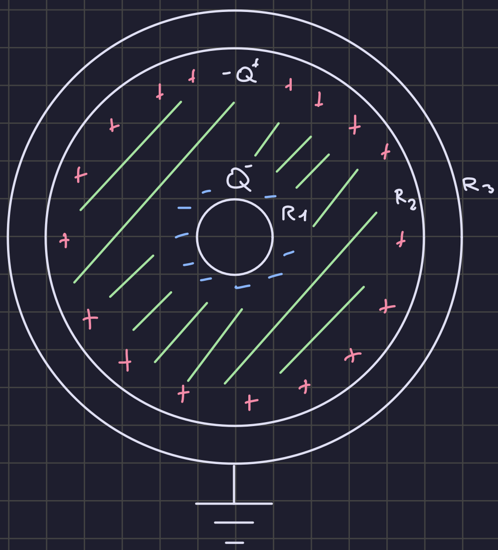
$$= \frac{Q_{int}}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \quad [J]$$

$$= 1.75 \cdot 10^{-5}\ J$$

Lo spazio interno è riempito di dielettrico lineare **k=3**

6- Calcolare la capacità del sistema.

$K = 3$



$$C_K = C_0 \cdot K$$

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V} \quad [F]$$

$$= \frac{Q_{int}}{V(R_2) - V(R_1)}$$

$$= 2.86 \cdot 10^{-12}\ F$$

$$C_K = 3 \cdot 2.86 \cdot 10^{-12}\ F = 8.58 \cdot 10^{-12}\ F$$

7- Calcolare il campo spostamento dielettrico D.

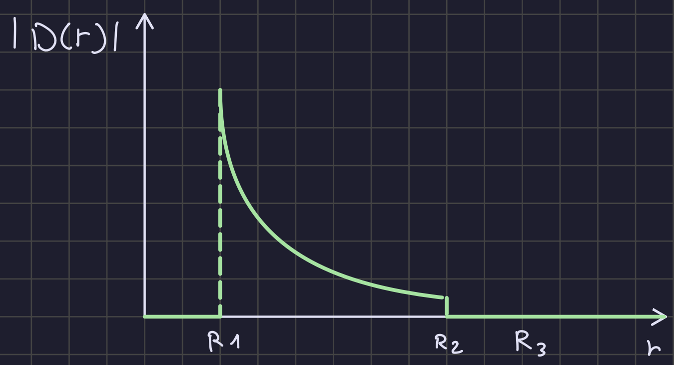
$$\oint_{sup} \vec{D}\, d\vec{S} = Q_{libere}$$

$$\oint_{sup} D(r)\, dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \oint_{sup} dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{libere}$$

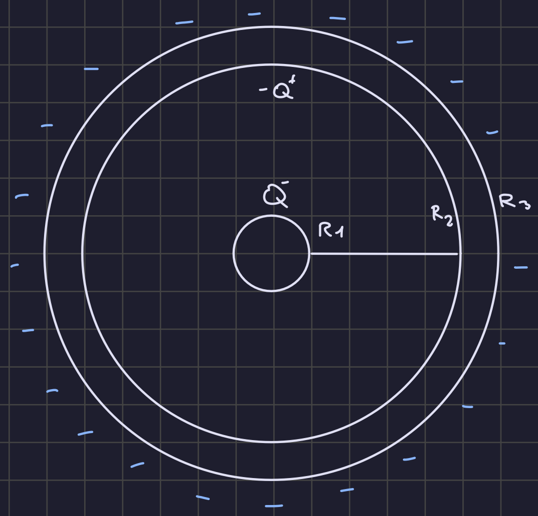
$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{4\pi r^2} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$



CASO B

Diversamente, la sfera interna viene collegata alla superficie della cavità R2.

8- Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare l'energia elettrostatica **U** del sistema



$$U_{Tot} = 0 + U_{EST}$$

$$U_{est} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

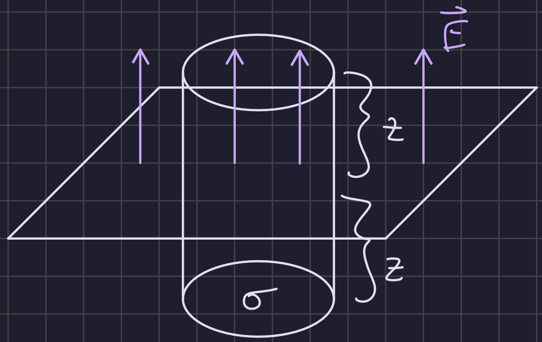
$$= \frac{1}{2} C (\cancel{V(\infty)} - V(R_3))^2$$

$$= \frac{1}{2} C\, V(R_3)^2$$

9- Calcolare la capacità del sistema.

$$C = \frac{Q}{V(R_3)} \quad [F]$$

Piano indefinito



$h = 2z$

$$\Phi = \Phi_{Basi} + \underbrace{\Phi_{lati}}_{=0}$$

$$= 2E(z) \cdot A = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow Q = \sigma \cdot A$$

$$2E(z) \cdot \cancel{A} = \frac{\sigma \cdot \cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{z} & z \geq 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

$$V(z) - \cancel{V(z_0)} = -\int_{z_0}^{z} \vec{E} \, d\vec{\ell} \qquad z_0 = 0$$

$$V(z_0) = 0$$

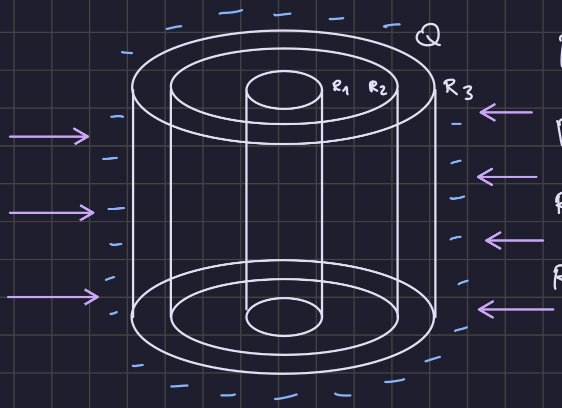
$$V(z) = -\int_{z_0}^{z} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dz$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{z_0}^{z} dz$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \; [V]$$

Esame 07/2021

B) un guscio cilindrico molto lungo da considerarsi indefinito di raggi **R1=0.1cm**, **R2=0.9cm**, **R3=1cm** sulla cui superficie esterna è stata depositata una carica **Q=−10^{-10} C** per ogni metro di lunghezza



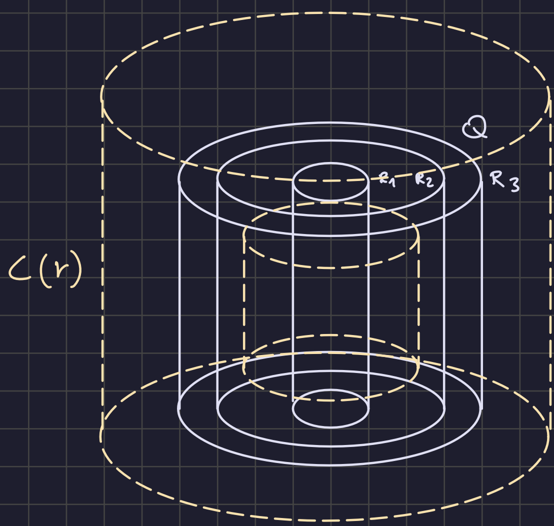
Per $h = 1 \rightarrow \quad Q = -10^{-10}\,C$

$R_1 = 10^{-3}\,m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\,m$

$R_3 = 10^{-2}\,m$

- disegnare le superfici gaussiane e spiegare la scelta



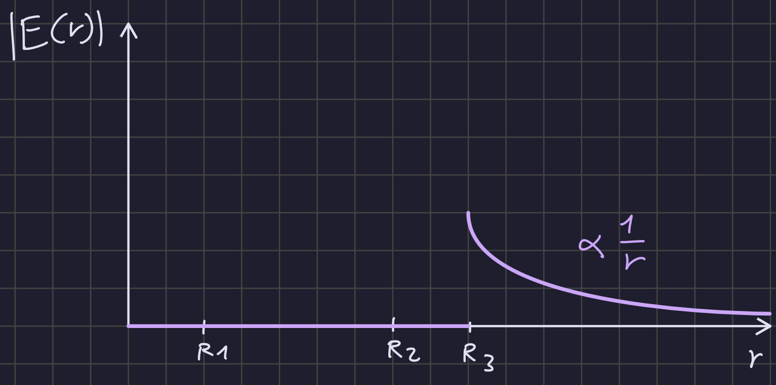
- ricavare il campo elettrico **E** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **E(r)**

$$\Phi_e = \oint_{C(r)} E(r)\,dr = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{C(r)} dr = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

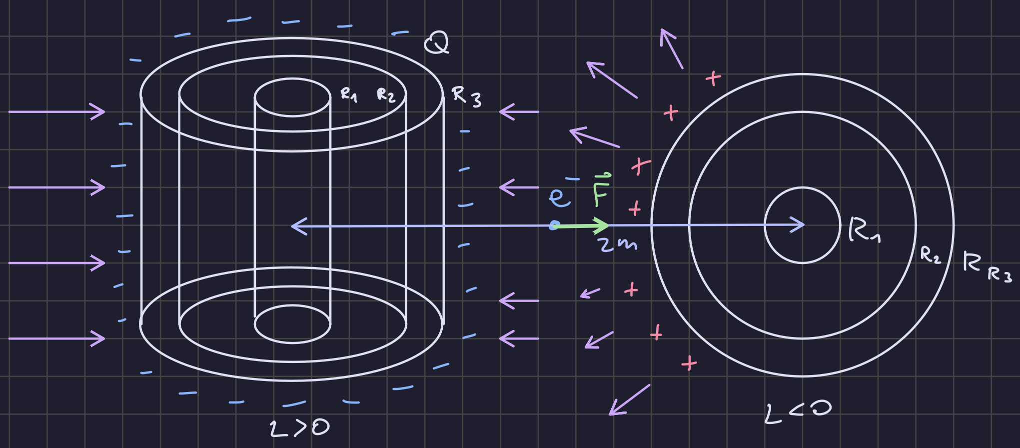
$$E(r)\, 2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$



- disegnare le linee di campo
- disegnare, in modo schematico, le superfici equipotenziali.

Considerare la situazione in cui il guscio sferico sia posizionato a una distanza di **d=2m** dal cilindro (distanza dall'asse del cilindro al centro della sfera).
In una posizione equidistante dai due conduttori vi è, libero di muoversi, un elettrone.



2. Calcolare il valore della forza **F** agente sull'elettrone in MODULO DIREZIONE VERSO!!!
- se l'aria è secca, ovvero nel vuoto (ε_0)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$F_s = q \cdot E(1)$$

$$F_c = q \cdot E(1)$$

Il lavoro della sfera è di assorbire energia, quello del cilindro accelera

L_s: Assorbe

L_c: Accelera

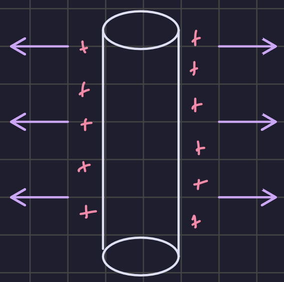
- se l'aria è umida, ovvero in uno spazio riempito di dielettrico **K=2**

$$F = qE_K$$

$$E_K = \frac{E_0}{K}$$

Esame 3/2023

B) un conduttore cilindrico indefinito di raggio **R=1cm** su cui è stata depositata una carica **Q=10^-10 C** per ogni metro di lunghezza



$R = 10^{-2}\ m$

$Q = 10^{-10}\ C$

$h = 1$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r \varepsilon_0} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

2. il potenziale elettrostatico **V** nella regione esterna

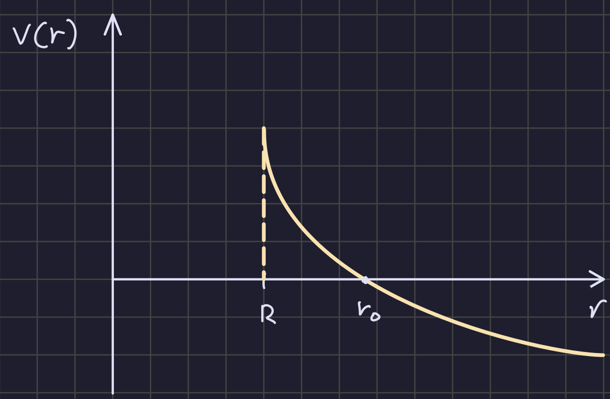
$$V(r) - \cancel{V(r_0)} = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,dr \qquad V(r_0) = 0$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,dr$$

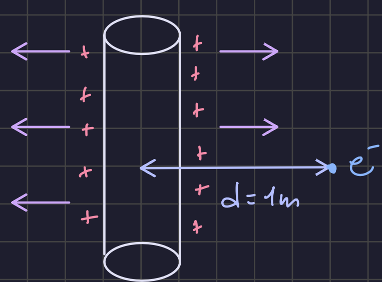
$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{Q}{2\pi r \varepsilon_0}\,dr$$

$$V(r) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r}\,dr$$

$$V(r) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{r_0} \quad [V]$$



3. la forza agente su un elettrone posto a distanza **d=1m** dal sistema



$$F = qE(1) = -2.9 \cdot 10^{-19}\ N$$

3. la forza agente su un elettrone posto a distanza ...
4. il lavoro del campo elettrico per portare l'elettrone sulla superficie del conduttore

$$L = -q \Delta V$$

$$= |e^-| \Delta V$$

$$= |e^-| \cdot (V(R) - V(1))$$

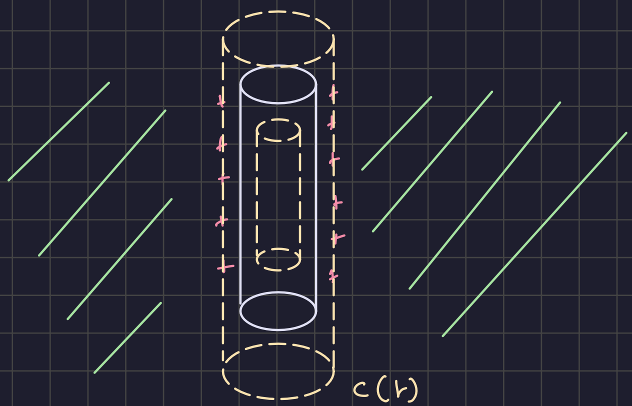
$$= e^- \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \ln(R)$$

$$= -1.3 \cdot 10^{-30} \ J$$

Si compie un lavoro contro il campo, per questo c'è il meno

Lo spazio esterno è ora riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica K=3

$K=3$



5. calcolare il vettore spostamento elettrico D nello spazio

$$\oint_{C(r)} D(r)\, dr = Q_{libere}$$

$$D(r) \int_{C(r)} dr = Q_{libere}$$

$$D(r)\, 2\pi r \ell = Q_{libere}$$

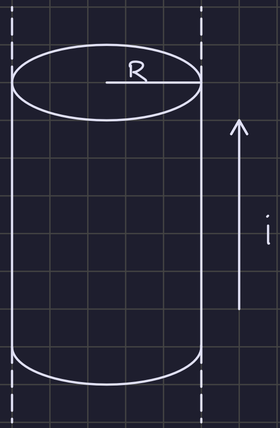
$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{2\pi r \ell} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

6. calcolare le cariche di polarizzazione

$$\sigma_{pol}(R) = \frac{Q(k-1)}{4\pi k R^2} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Magnetismo

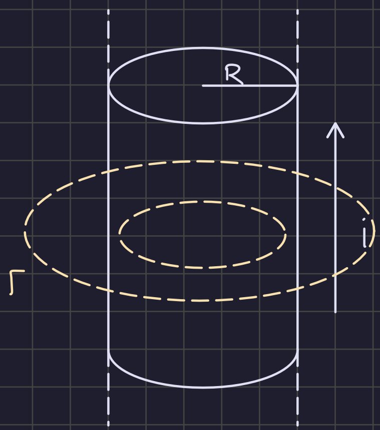
1. Caso:
   La corrente è solo sulla superficie



Ricavare il campo magnetico

Rappresenta una regione nello spazio in cui una carica subisce l'effetto della sua forza

Th Ampere $\oint_{\Gamma} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c$



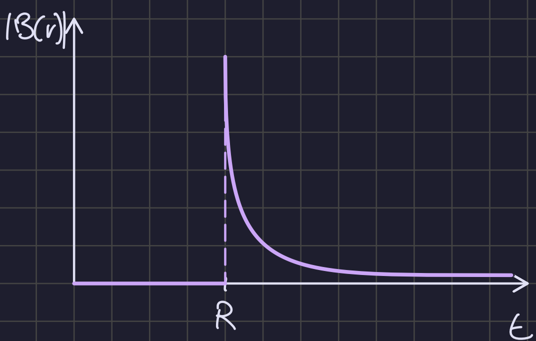
$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 i_c$$

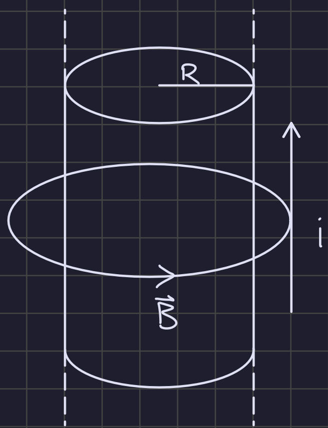
$$B(r) \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 i_c$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 i_c$$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \dfrac{\mu_0 i_c}{2\pi r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad [T]$$

Disegnare il grafico del campo





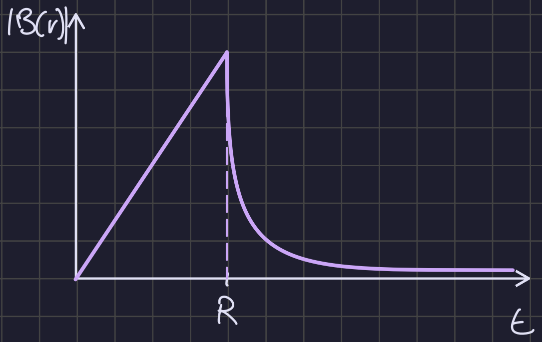
2. Caso:
La corrente è data come densità di corrente

$$j = \frac{i}{Sup} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

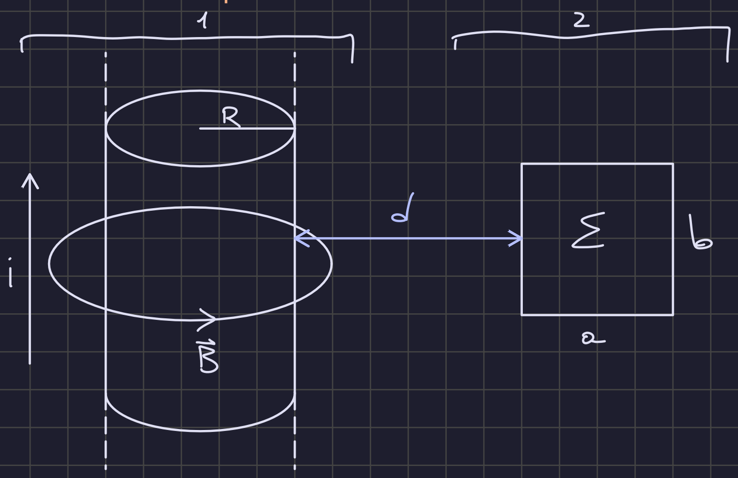
$$j = \frac{i}{\pi R^2}$$

$$i_c(r) = j\pi r^2 = \frac{i}{\cancel{\pi} R^2}\cancel{\pi} r^2 = \frac{i r^2}{R} \quad [A]$$

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i_c}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0}{2\pi \cancel{r}} \dfrac{i r^{\cancel{2}}}{R^2} = \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} & \text{se } r < R \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i_c}{2\pi r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \qquad [T]$$



Considerare una spira ad una distanza d dal filo



Calcolare il coefficiente di mutua induzione

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} \quad [H]$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \quad [Wb]$$

$$\phi_B = \oint B \, d\Sigma = \int_d^{d+a} B(r) \; x \, dr \qquad \Sigma = \underset{\text{spira}}{\text{Area}} = ab$$

$$\oint_d^{d+a} x \, dr = x \left[r \right]_d^{d+a}$$

$$= x \left[d + a - d \right]$$

$$= x a = a \cdot b$$

$$x = b$$

$$= \int_d^{d+a} B(r) \, b \, dr$$

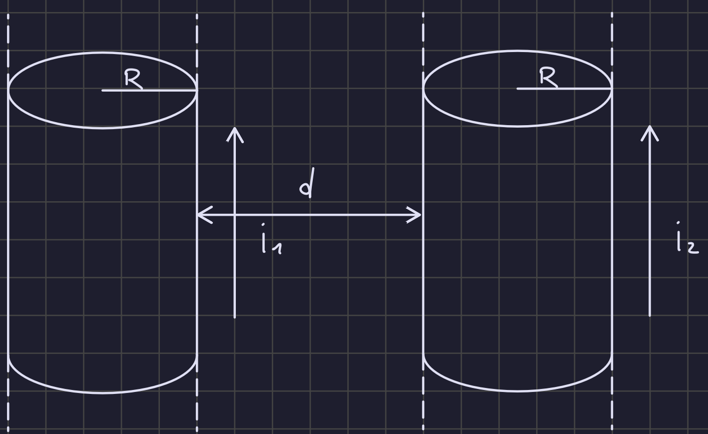
$$= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i_C}{2\pi r} \, b \, dr$$

$$= \frac{\mu_0 i_C b}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{1}{r} \, dr$$

$$= \frac{\mu_0 i_C b}{2\pi} \ln \left| \frac{d+a}{d} \right| \quad [Wb]$$

$$M = \frac{\phi_B}{i_C}$$

Viene aggiunto un altro filo accanto al filo originale



Calcolare la forza che agisce sui due fili

Legge di Laplace

$$d\vec{F} = i \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

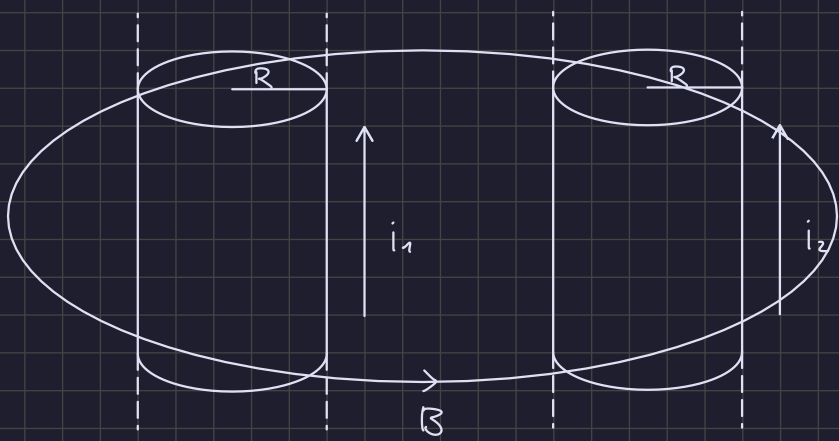
$$d\vec{F}_{21} = i_2 \, d\vec{\ell} \times \vec{B}_1(d)$$

Visto che il filo è indefinito si suppone che la lunghezza sia l = 1m

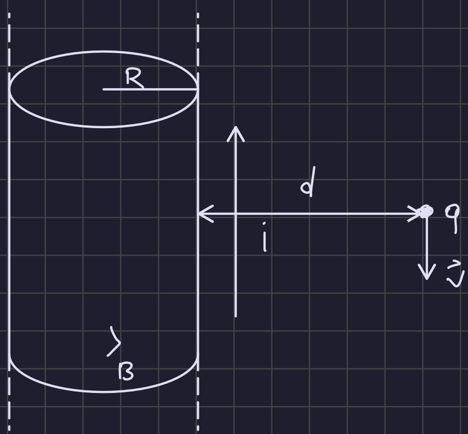
$$= i_2 \frac{\mu_0 \cdot i_1}{2\pi d} \xRightarrow{l=1} \frac{F}{l} = F_{21} = i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad [N]$$

$$dF_{12} = i_1 \, d\vec{\ell} \times \vec{B}_2(d)$$

$$= i_1 \frac{\mu_0 \cdot i_2}{2\pi d} \xRightarrow{l=1} \frac{F}{l} = F_{12} = i_1 \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \quad [N]$$



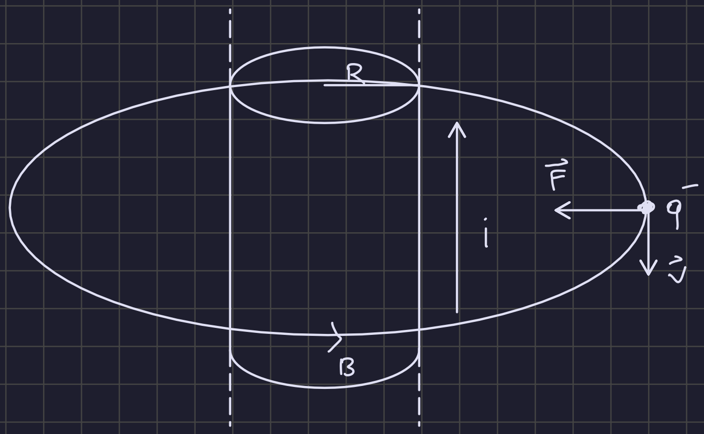
Considerare una carica ad una distanza d dal filo, calcolare la forza agente sulla particella

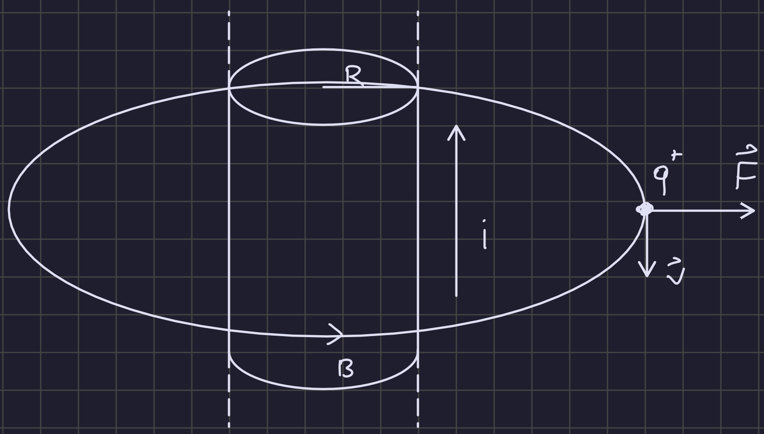


$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

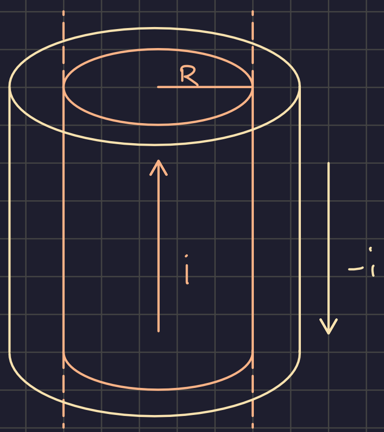
$$= q\vec{v} \times B(d)$$

$$= q\vec{v} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$





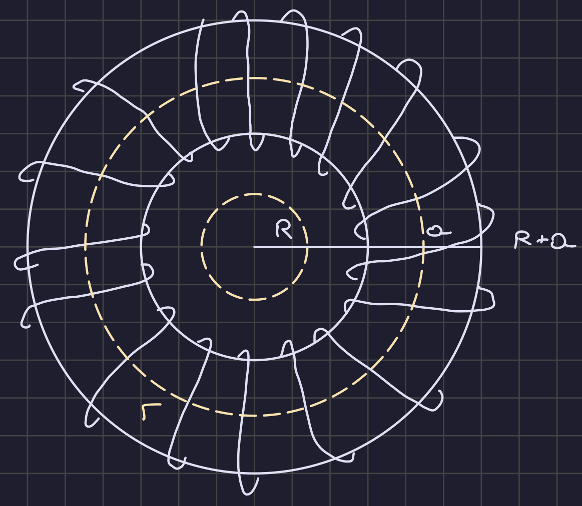
Consideriamo una guaina in cui passa una corrente, quanto vale la corrente per annullare il campo all'esterno?



Solenoide toroidale

$N =$ n° spire

$i =$ corrente



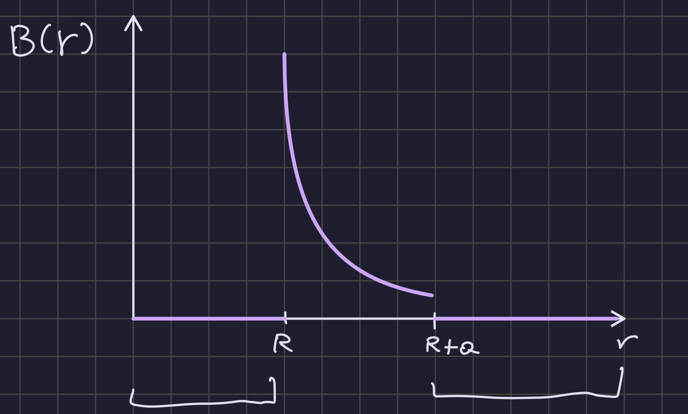
$$\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 i_c \qquad i_c = N \cdot i$$

$$B(r) \oint_\Gamma d\vec{\ell} = \mu_0 N i$$

$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 N i$$

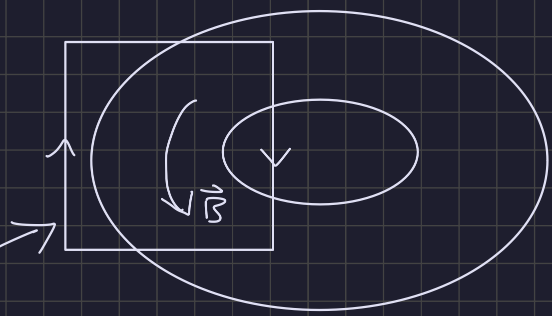
$$B(r) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \quad [T]$$

Disegnare l'andamento del campo



Non c'è corrente

La corrente scorre nell'altro verso, quindi si annulla



Calcolare il flusso del campo magnetico

$$\Phi = N \cdot \int_{\text{Spira}} B(r)\, d\Sigma$$

$$= N \int_R^{R+a} B(r)\, a\, dr$$

$$= N \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} a\, dr$$

$$= N \frac{\mu_0 N i}{2\pi} a \int_R^{R+a} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [Wb]$$

Calcolare il coefficiente di autoinduzione

$$L = \frac{\Phi}{i_c}$$

$$= \frac{\frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|}{i_c}$$

$$= \frac{1}{\cancel{N i}} \frac{\mu_0 N^{\cancel{2}} \cancel{i} a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

$$= \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [H]$$

Calcolare l'energia immagazzinata nel toroide

Metodo 1:

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 \quad [J]$$

Metodo 2:

$$U_B = \int_{Vol} u_B \, dV \qquad V = 2\pi r \cdot a^2$$

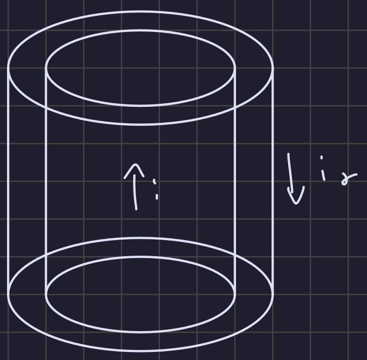
$$= \int_{Vol} \frac{B^2}{2\mu_0} dV \qquad \int_R^{R+a} x\, dr = x\left[\cancel{R} + a - \cancel{R}\right]$$

$$= x\, \cancel{a} = 2\pi r \cdot a^{\cancel{2}}$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{B^2}{2\mu_0} x\, dr \longleftarrow x = 2\pi r a$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r a\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i^2 \cdot a}{4\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [J]$$



$\bar{B}_{est} = 0 \quad T$

$i + i_r = 0$

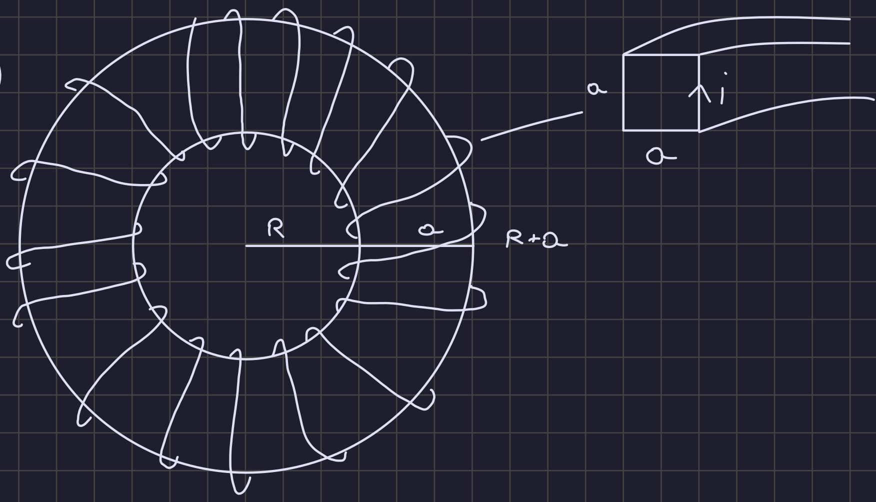
$i_r = -i = -1 A$

$i_c = \sum_n i_n$

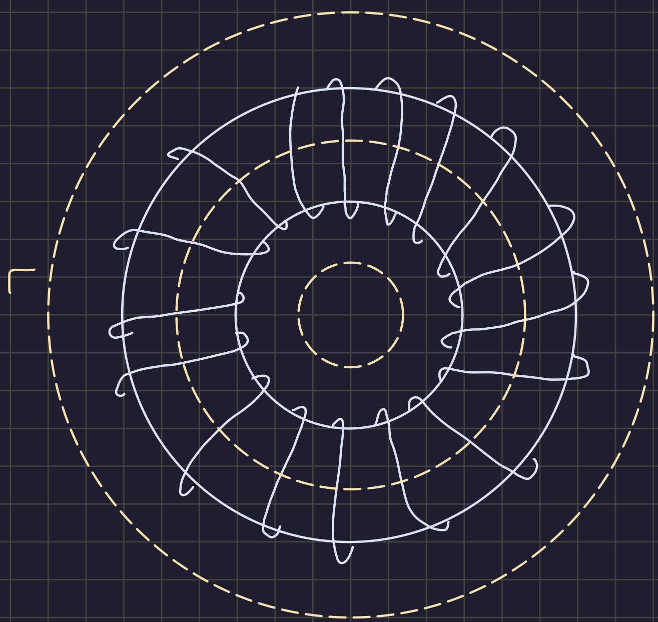
Solenoide toroidale

$N = 10^2$ (numero spire)

$i = 2A$



Linea amperiana



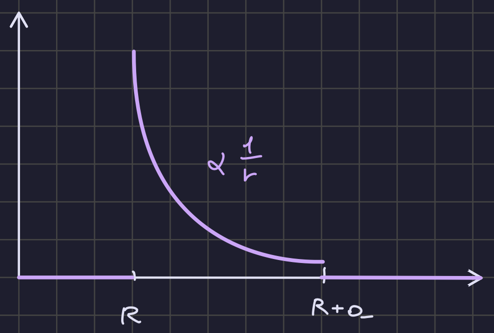
Th Ampere: $\oint_{\Gamma} \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \underbrace{Ni}_{i_c}$

$$B(r) \oint_{\Gamma} d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot Ni$$

$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 \cdot Ni$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \quad [T]$$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & r < R \quad \text{(non c'é corrente)} \\ \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r} & R \leq r < R+a \\ 0 & r \geq R+a \quad \text{(le correnti si annullano)} \end{cases} \quad [T]$$



$$\Phi = N \cdot \int_{spira} \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$= N \cdot \int_{spira} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}\, d\vec{S}$$

$$= N \cdot \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}\, a\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{1}{r}\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [Wb]$$

$$\Sigma = a^2$$

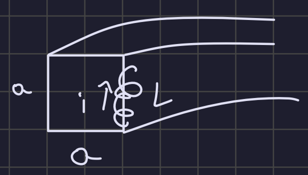
$$d\Sigma = x\, dr$$

$$\Sigma = \int_R^{R+a} x\, dr$$

$$= x(\cancel{r} + a - \cancel{r})$$

$$= x a$$

$$x = a$$



$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [H]$$

$$U_B = \int_{Vol} \frac{B^2}{2\mu_0}\, dV$$

$$= \int_R^{R+a} \left(\frac{\mu_0 i N}{2\pi r}\right)^2 \frac{1}{2\mu_0}\, 2\pi r a\, dr$$

$$V = 2\pi r a^2$$

$$dV = x\, dr = 2\pi r a\, dr$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{\mu_0^{\cancel{2}} i^2 N^2}{4\pi^{\cancel{2}} r^2} \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\mu_0}} \cancel{2\pi r}\, a\, dr$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 i^2 N^2 a}{4\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 i^2 N^2 a}{4\pi} \int_R^{R+a} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 i^2 N^2 a}{4\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [J]$$

oppure

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| i^2$$

$$= \frac{\mu_0 i^2 N^2 a}{4\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| \quad [J]$$

$$= 1.45 \cdot 10^{-5}$$

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

Si consideri un sistema di gusci sferici di raggi **R1=0.1cm**, **R2=0.9cm**, **R3=1cm** sulla cui superficie esterna R3 è stata depositata una carica **Q_A=–10^{-10} C**

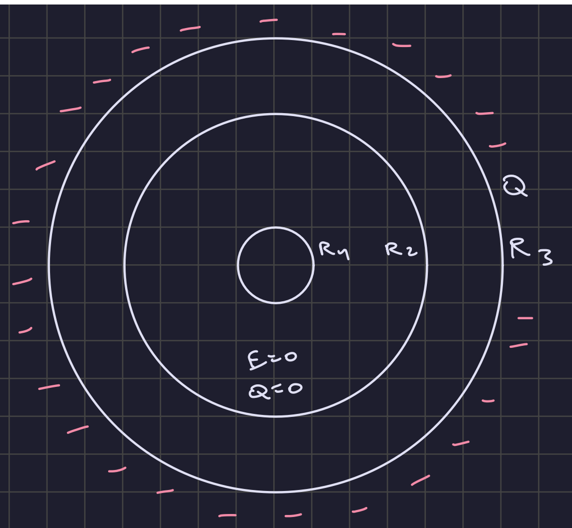
1. Si mostri l'applicazione del teorema di Gauss:
   - disegnare le superfici gaussiane e spiegare la scelta
   - ricavare il campo elettrico **E** (MODULO DIREZIONE VERSO!!!) tracciando il grafico **E(r)**
   - disegnare le linee di campo

$R_1 = 10^{-3}\,m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\,m$

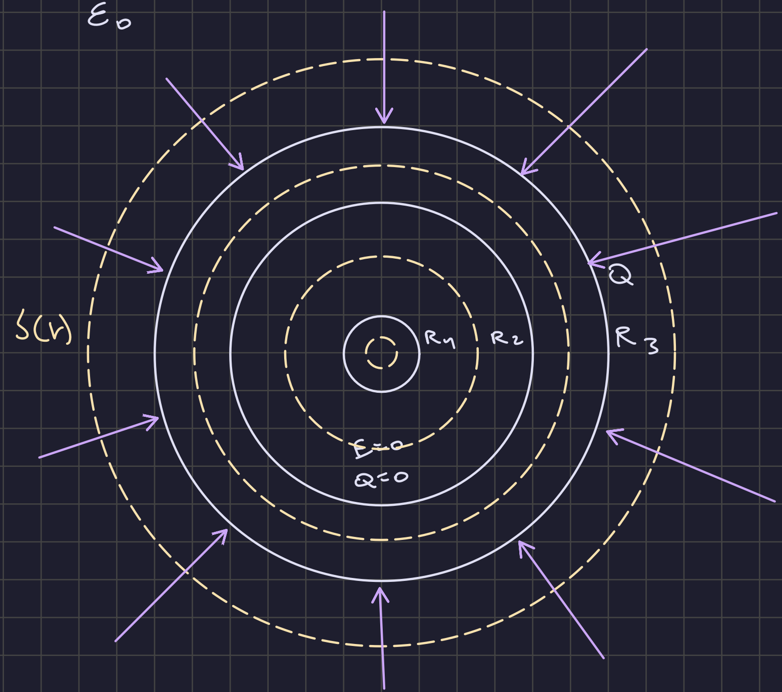
$R_3 = 10^{-2}\,m$

$Q_{R3} = -10^{-10}\,C$



All'interno della sfera non c'è carica perchè non c'è induzione interna siccome la sfera esterna si comporta come una gabbia di Faraday

$$\oint_{Sup} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



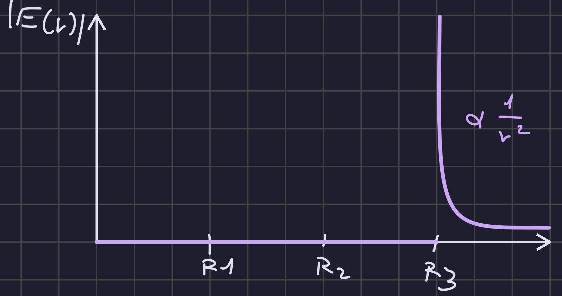
Come superfici di Gauss scegliamo superfici a simmetria sferica perchè il campo è radiale

$$\oint_{S(r)} E(r)\, dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\overbrace{E(r)}^{cost} \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \quad \text{se } r \geq R_3$$

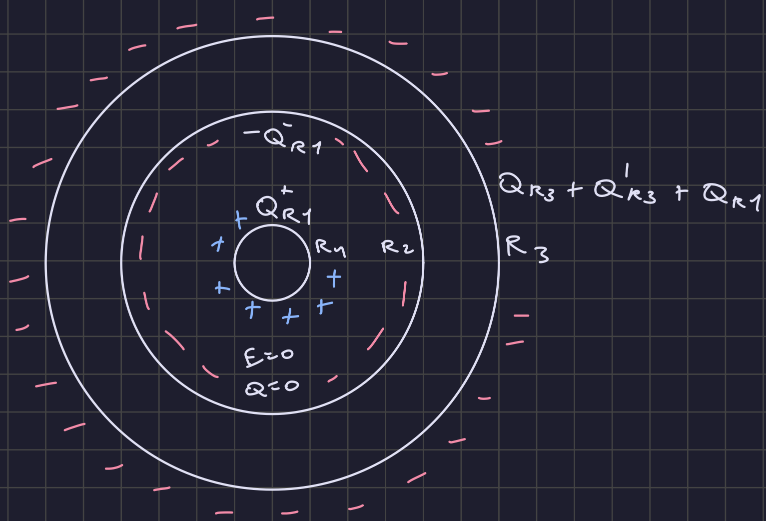


Successivamente, vengono depositate sul conduttore interno (**R1**) la quantità di carica **Q_B=+10^{-10} C** e sul conduttore esterno (**R3**) la quantità di carica **Q_C=–10^{-10} C**.

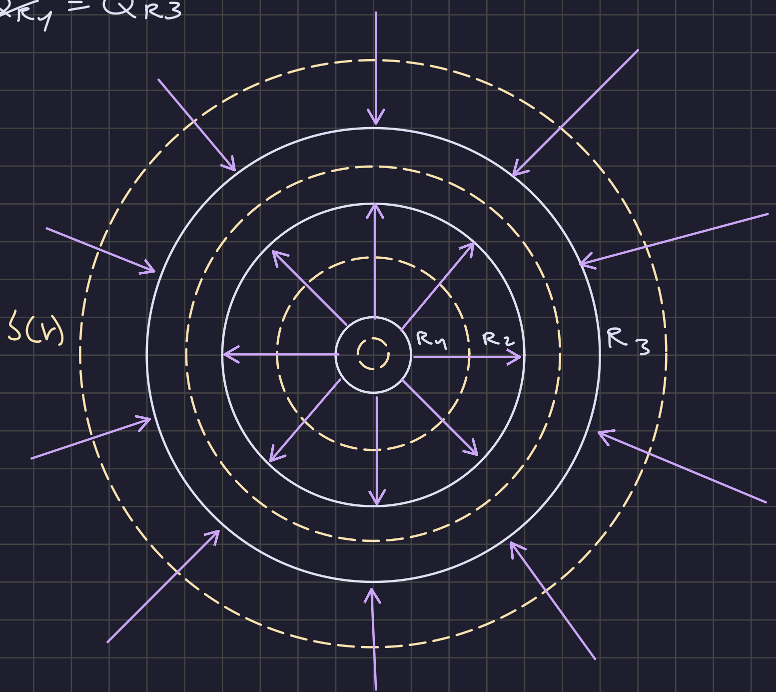
2. Descrivere la situazione di equilibrio elettrostatico e calcolare la distribuzione di carica sulle pareti dei conduttori (Q e densità)
3. Ricavare l'espressione del potenziale elettrostatico **V(r)** nello spazio esterno.

$Q_{R1} = 10^{-10}\,C$

$Q'_{R3} = -10^{-10}\,C$



$$Q_{est} = Q_{R3} \cancel{+ Q'_{R3} + Q_{R1}} = Q_{R3}$$



$$\sigma = \frac{Q}{Sup}$$

$$\sigma_{R_1} = \frac{Q_{R1}}{4\pi R_1^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi R_1^2} \ \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_{R_2} = \frac{-Q_{R1}}{4\pi R_2^2} = \frac{-10^{-10}}{4\pi R_2^2} \ \frac{C}{m^2}$$

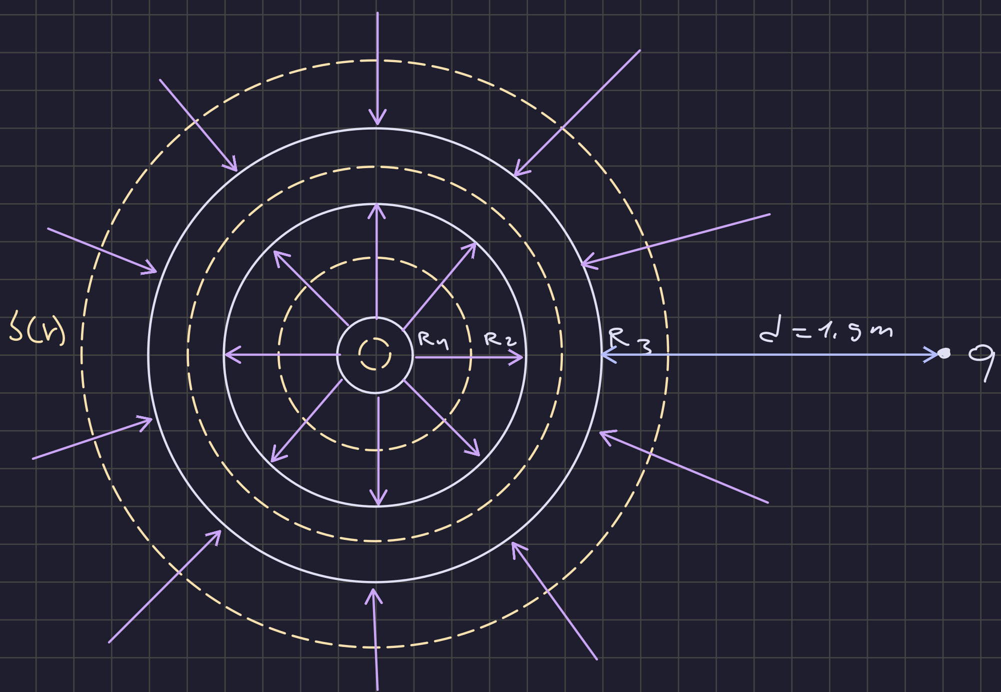
$$\sigma_{R_3} = \frac{Q_{R3}}{4\pi R_3^2} = \frac{-10^{-10}}{4\pi R_3^2} \ \frac{C}{m^2}$$

$$V(r) - V(r_0) = -\int_S \vec{E}\, d\vec{s}$$

Una particella puntiforme di carica **q=+10^{-12} C** – libera di muoversi – viene posizionata a distanza **d=1.5m** dal sistema.

4. Calcolare (numericamente) la forza agente sulla particella *(* ovviamente: si trascuri l'induzione elettrostatica tra particella e sistema)*
5. Ricavare il lavoro del campo elettrico per portare la carica **q** al termine del suo percorso (senza calcoli numerici)

$$q = 10^{-12}\ C$$



$$\vec{F} = q\vec{E} \quad N$$

$$= 10^{-12}\, E(1{,}5\ m)$$

$$= 3.99 \cdot 10^{-13}\ N$$

La particella è attirata dalla sfera

$$L = \int_d^{R_3} \vec{F}\, d\ell$$

$$= \int_d^{R_3} q E(r)\, d\ell$$

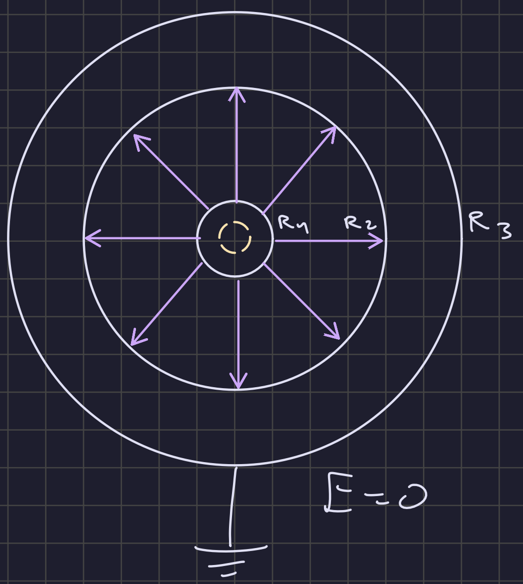
$$= \int_d^{R_3} -q \nabla V\, d\ell \qquad \text{(Perché } \vec{E} \text{ è conservativo)}$$

$$= -q \Delta V$$

$$= -q \left(V(R_3) - V(d)\right)$$

Nella nuova situazione il conduttore esterno R3 viene collegato a terra.

6. descrivere il sistema nella nuova situazione di equilibrio e calcolare l'energia del sistema.



$$U = U_{int} + U_{est}$$

$$= U_{int} + 0$$

$$= \int_{Vol} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2\, 4\pi r^2 dr$$

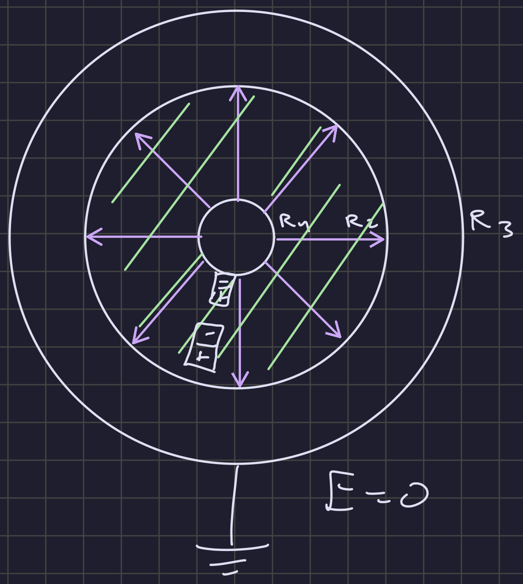
$$\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = 4\pi r^2 dr$$

Lo spazio interno viene riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=2**

7. calcolare il vettore di Polarizzazione **P(r)** le cariche di polarizzazione. Disegnare i dipoli.

$K = 2$



$$\oint_{Sup} \vec{D}\, d\vec{S} = Q_{libere}$$

$$D(r) \int_{S(r)} d\vec{S} = Q_{libere}$$

$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{4\pi r^2} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$P(r) = \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ D = \varepsilon_0 k \vec{E} \end{cases}$$

$$\vec{P} + \vec{E}\varepsilon_0 = \varepsilon_0 k \vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 k \vec{E} - \vec{E}\varepsilon_0$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}(k-1)$$