Esame 29/06/2022

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

Si consideri un sistema di gusci sferici di raggi **R1=0.1cm, R2=0.9cm, R3=1cm** sulla cui superficie esterna R3 è stata depositata una carica **Q=+10^{-10} C**

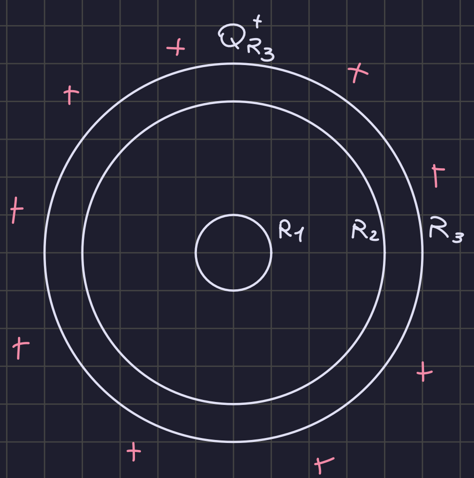
✓ 1. Applicare il teorema di Gauss – giustificando ogni passaggio – per calcolare il campo elettrico **E** tracciando anche il grafico **E(r)** e disegnare le linee di campo

$R_1 = 10^{-3}\ m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}\ m$

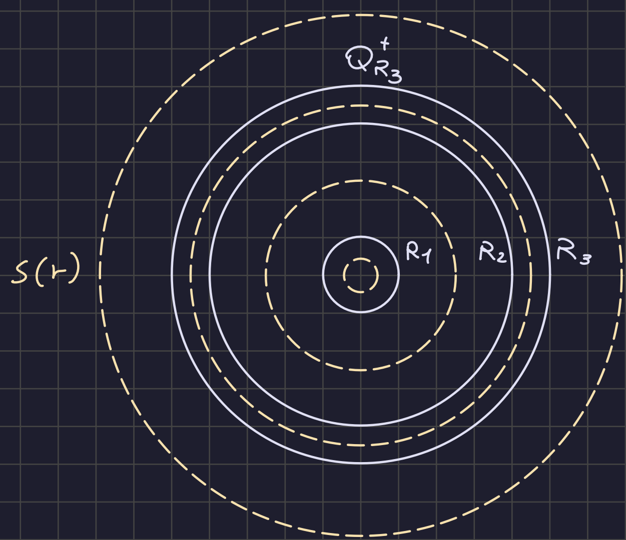
$R_3 = 10^{-2}\ m$

$Q_{R3} = 10^{-10}\ C$



Th Gauss $\quad \Phi = \oint_{sup} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Per calcolare il campo elettrico con il teorema di Gauss bisogna scegliere delle superfici gaussiane su cui il campo è costante in modo da poterlo tirare fuori dall'integrale. In questo caso siccome la simmetria è sferica e il campo è radiale scelgo come superfici dei gusci sferici di raggio r



cost.

$$\oint_{S(r)} E(r)\, dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

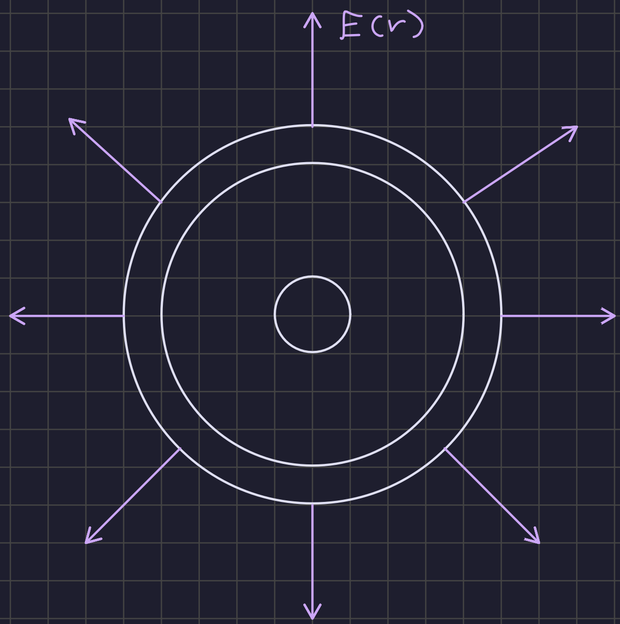
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

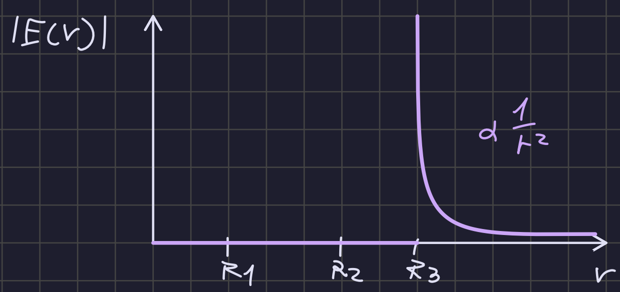
$$E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & se\ r < R_3 \\ Q_{R3} & se\ r \geq R_3 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & se\ r < R_3 \\ \dfrac{Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & se\ r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$





Successivamente, sul conduttore <u>interno</u> (**R1**) e sul conduttore <u>esterno</u> (**R3**) vengono depositate le stesse quantità di carica **Q=−10⁻¹⁰ C**.

√ 2. calcolare la distribuzione di carica nella situazione di equilibrio

√ 3. ricavare l'espressione del potenziale elettrostatico **V(r)** nella regione esterna

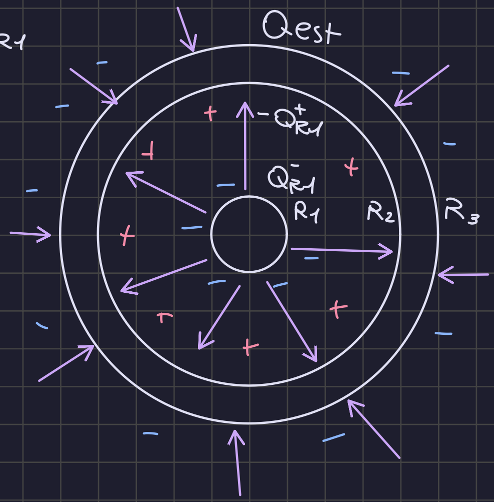
√ 4. calcolare la forza agente su una particella puntiforme di carica **Q=2x10⁻¹⁰ C** posta a distanza **d=1m** dal sistema

(ovviamente: si trascuri l'induzione elettrostatica tra particella e sistema)*

√ 5. calcolare il lavoro del campo elettrico per portare la carica **Q** al termine del suo percorso

$$Q_{R1} = -Q_{R3}$$

$$Q_{est} = Q_{R3} - Q_{R3} + Q_{R1}$$
$$= \cancel{Q_{R3} - Q_{R3}} - Q_{R3}$$
$$= -10^{-10}\, C$$



$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \vee R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q_{R1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R_3 \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{Q}{Sup}$$
$$\downarrow$$

$$\sigma_{R1} = \frac{Q_{R1}}{4\pi R_1^2} = \frac{-10^{-10}}{4\pi \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{-4\pi \cdot 10^{4}} = -8 \cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m}$$

$$\sigma_{R2} = \frac{-Q_{R1}}{4\pi R_2^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 9^2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9^2 \cdot 10^{4}} = 9.8 \cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m}$$

$$\sigma_{R3} = \frac{Q_{est}}{4\pi R_3^2} = \frac{-Q_{R3}}{4\pi R_3^2} = \frac{-10^{-10}}{4\pi \cdot 10^{-4}} = -\frac{1}{4\pi \cdot 10^{6}} = -8 \cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m}$$

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{S} \quad [V]$$

Per calcolare il potenziale bisogna prendere un punto di riferimento in cui il potenziale sia nullo. In questo caso lo prendo all'infinito:

$$r_0 = \infty \Rightarrow V(r_0) = 0$$

$$V(r) - \cancel{V(r_0)} = -\int_{r_0}^{r} E(r)\, dr$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{-Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\, dr$$

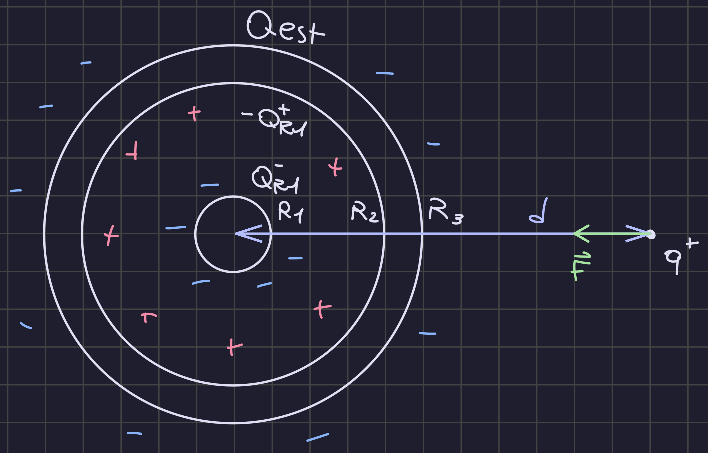
$$= \frac{Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r}$$

$$= \frac{Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{r_0}}\right)$$

$$= \frac{-Q_{R3}}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{se } r \geq R_3 \quad [V]$$

$d = 1\ m$

$q = 2 \cdot 10^{-10} C$



$$\vec{F} = q\vec{E} \quad [N]$$

$\downarrow$

$$F = q\,E(d)$$

$$= \frac{q\,Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = -1.8 \cdot 10^{-10}\ N$$

$$L = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad [J]$$

$\downarrow$

$$L = -\int_d^{R_3} q\,E(r)\,dr$$

$$= -\int_d^{R_3} \frac{q\,Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

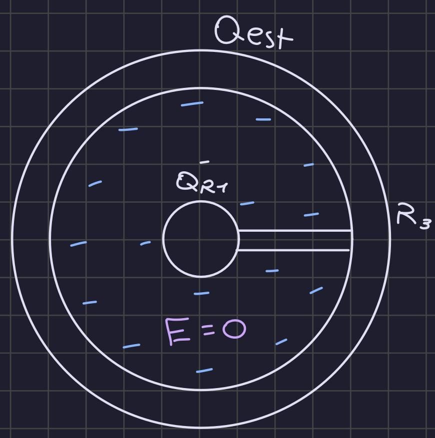
$$= -\frac{q\,Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_3} + \frac{1}{d}\right)$$

$$= -\frac{q\,Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 (d - R_3)}$$

$$= 1.8 \cdot 10^{-10}\ [J]$$

Nella nuova situazione il conduttore interno R1 viene poi collegato elettricamente alla parete R2.

✓ 6. descrivere il sistema nella nuova situazione di equilibrio e calcolare l'energia del sistema.



Il sistema all'esterno rimane invariato perchè la superficie esterna fa da gabbia di Faraday, mentre all'interno la carica depositata su R_1 si distribuisce su tutta la superficie, che ora comprende anche R_2, quindi non si forma alcuna carica indotta e il campo all'interno del sistema è nullo.

$$U_{tot} = U_{int} + U_{est} \qquad [J]$$

$$= 0 + U_{est}$$

$$= \int_{Vol} u_E \, d\tau \longrightarrow \tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \int_{R3}^{\infty} u_E \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \, E(r)^2 \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q_{est}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R3}^{\infty} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q_{est}^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \, \cancel{4\pi r^2} dr$$

$$= \frac{Q_{est}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R3}^{\infty}$$

$$= \frac{Q_{est}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{R_3}\right)$$

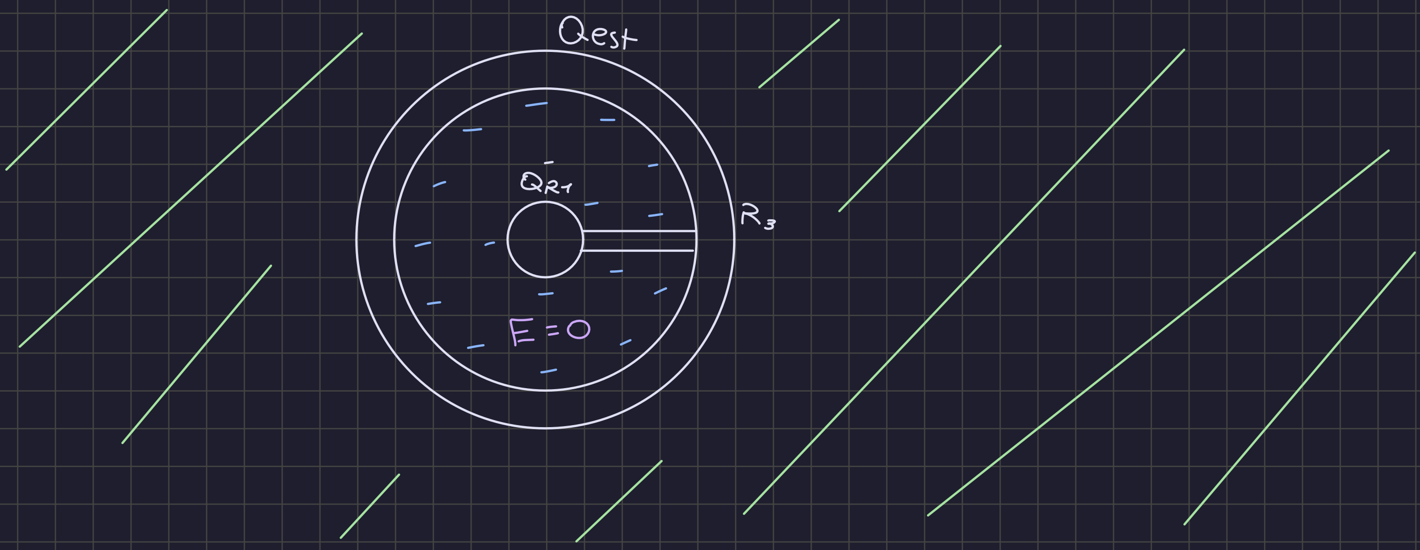
$$= \frac{Q_{est}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$= 4.5 \cdot 10^{-9} \, J$$

Lo spazio esterno viene riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=2**

√ 7. calcolare il vettore spostamento elettrico **D** nello spazio

$K = 2$



Il vettore spostamento si calcola con il teorema di Gauss applicato ai dielettrici e come nel calcolo del campo elettrico bisogna scegliere delle superfici che rendano D costante per tirarlo fuori dall'integrale, anche in questo caso le superfici sono gusci sferici di raggio r

$$\oint_{sup} \vec{D}\, ds = Q_{libere}$$

$$\oint_{s(r)} D(r)\, dr = Q_{lib}$$

$$D(r) \oint_{s(r)} dr = Q_{lib}$$

$$D(r) = \frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$$

$$D(r) = \begin{cases} 0 & se \ r < R_3 \\ \dfrac{Q_{est}}{4\pi r^2} & se \ r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

ESERCIZIO DI MAGNETOSTATICA

Si consideri un solenoide toroidale di raggio interno **R=10cm**, composto da **N=10³** spire a sezione quadrata di lato **a=1cm**, percorso da una corrente elettrica stazionaria **i=1A**.

√ 1. Calcolare applicando il teorema di Ampere – giustificando ogni passaggio – il campo magnetico **B** tracciando anche il grafico **B(r)** e disegnare le linee di campo
√ 2. calcolare il flusso del campo magnetico concatenato con il sistema
√ 3. calcolare il coefficiente di autoinduzione

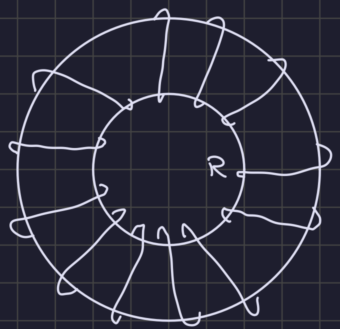
0.095

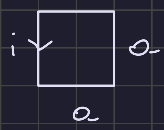
$R = 10^{-1}\ m$

$N = 10^{3}$

$a = 10^{-2}\ m$

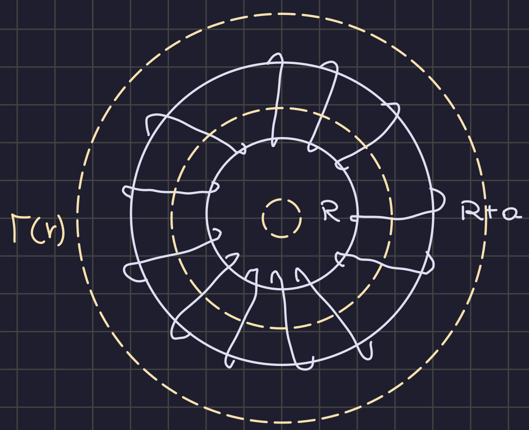
$i = 1\ A$





Th Ampere: $\oint_{\Gamma} \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 \Sigma i_c \quad [T]$

Per calcolare il campo magnetico bisogna scegliere dei circuiti su cui il campo è costante chiamati linee amperiane. In questo caso le linee amperiane sono cerchi di raggio r



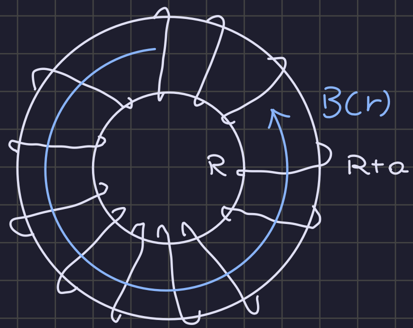
$$\oint_{\Gamma(r)} \overset{cost}{B(r)}\, dr = \mu_0 N i_c$$

$$B(r) \oint_{\Gamma(r)} dr = \mu_0 N i_c$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 N i_c$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 N i_c}{2\pi r}$$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & se\ r < R \lor r > R+a \\ \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r} & se\ R \leq r \leq R+a \end{cases} \quad [T]$$



$$\Phi(B) = N\Phi_{spira} \quad [Wb]$$

$$\Phi_{spira} = \int_{spira} \vec{B}\, d\vec{S} \quad [Wb]$$

$$\downarrow$$

$$\Phi_{spira} = \int_R^{R+a} B(r)\, a\, dr$$

$$= \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 N i a}{2\pi r}\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{1}{r}\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

$$= 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

$$\Phi(B) = N \cdot \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

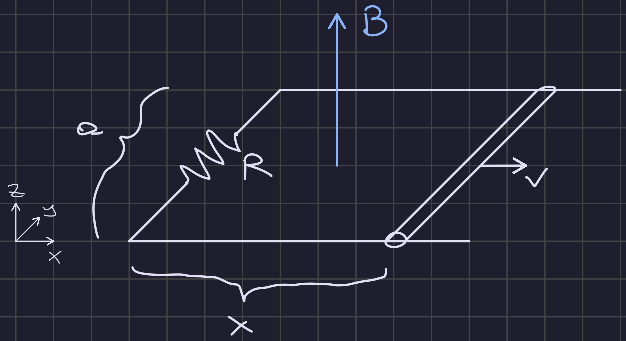
$$= \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right|$$

$$= 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left|\frac{R+a}{R}\right| = 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

ESERCIZIO DI INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Un circuito a U vincolato nel piano XY e formato da due binari paralleli ad X distanti **a=5cm,** ha una parte mobile libera di scorrere senza attrito, in direzione x. Nello spazio è presente un campo magnetico stazionario e uniforme **B=0.2T** in direzione normale al circuito, uscente. Il tratto mobile viene tenuto in moto con velocità **v_0=2m/s** lungo x <u>costante</u>. La resistenza dell'intero circuito (filo+barretta) è **R=5Ω.**



$a = 5 \cdot 10^{-2}\ m$

$B = 2 \cdot 10^{-1}\ T$

$v = 2\ \frac{m}{s}$ cost.

$R = 5\ \Omega$

CASO A

Si trascuri il fenomeno dell'autoinduzione.

1. Determinare valore della forza elettromotrice $\mathcal{E}$ indotta nella barretta
2. Calcolare il verso e il valore della corrente indotta i_{ind}
3. Calcolare la forza agente sulla barretta

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad [V]$$

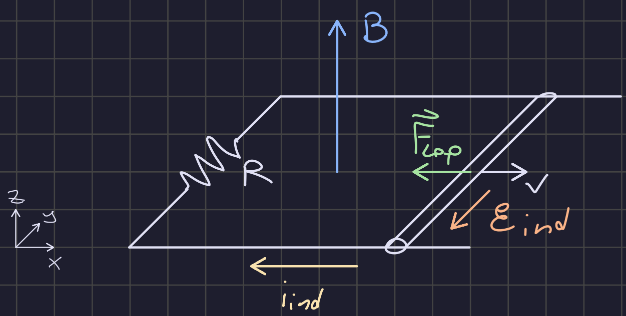
$$\Phi(B) = B \cdot Sup = B a x \quad [Wb]$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -Bav = -2 \cdot 10^{-2}\ V$$

La forza elettromotrice è negativa per la legge di Lenz che dice che la FEM indotta si oppone alla variazione del flusso che l'ha generata.

$$\mathcal{E}_{ind} = R\, i_{ind}$$

$$i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{Bav}{R} = -4 \cdot 10^{-3}\ A$$



$$\vec{F}_{Lap} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

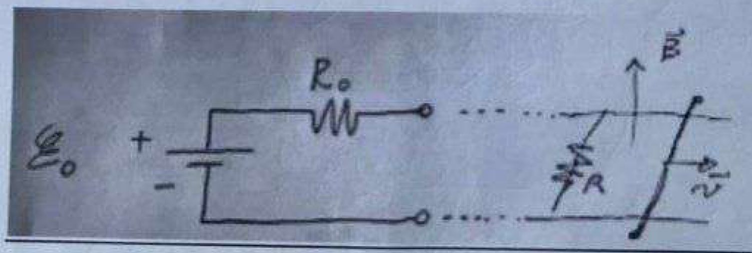
$$= i_{ind} \cdot a \cdot B$$

$$= -\frac{Bav}{R} \cdot aB$$

$$= -\frac{B^2 a^2 v}{R} = -4 \cdot 10^{-7}\ N$$

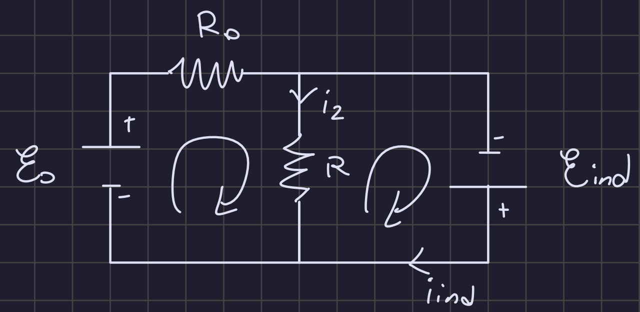
Il circuito mobile viene ora collegato all'elemento in figura ($\mathcal{E}_0$=10mV, R_0=2Ω) in modo da formare una rete lineare di Kirchhoff

V 4. Disegnare lo schema del circuito
V 5. Calcolare la corrente che scorre nelle maglie
V 6. Esprimere il bilancio energetico in termini delle potenze.



$\mathcal{E}_0 = 10^{-2}$ V

$R_0 = 2\ \Omega$



$$i_{ind} = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = 4 \cdot 10^{-3}\ A$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0} = 5 \cdot 10^{-3}\ A$$

Potenze erogate

$$P_{\mathcal{E}_{ind}} = \mathcal{E}_{ind} \cdot i = \mathcal{E}_{ind} \cdot \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{ind}^2}{R} = 8 \cdot 10^{-5}\ [W]$$

$$P_{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}_0 \cdot i = \mathcal{E}_0 \cdot \frac{\mathcal{E}_0}{R_0} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R_0} = 5 \cdot 10^{-5}\ [W]$$

Potenze dissipate

$$P_R = V_R \cdot i_{ind} = R i_{ind}^2 = R\left(\frac{\mathcal{E}_{ind}}{R}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_{ind}^2}{R} = 8 \cdot 10^{-5}\ [W]$$

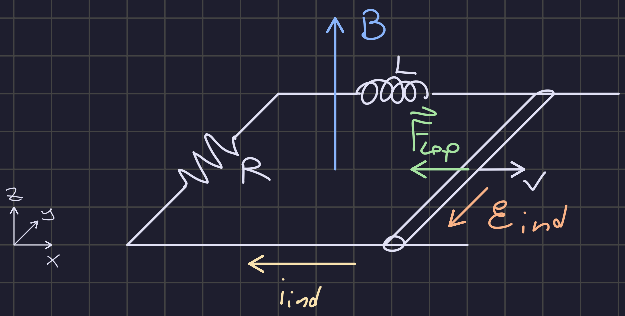
$$P_{R_0} = V_{R_0} \cdot i_2 = R_0\, i_2^2 = 5 \cdot 10^{-5}\ [W]$$

CASO B

Si consideri ora il fenomeno dell'autoinduzione

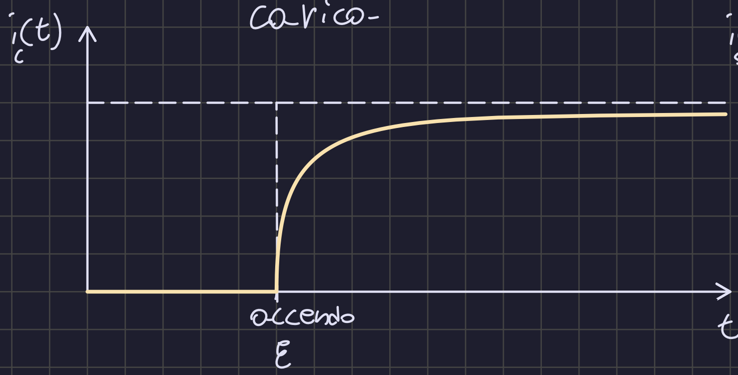
(NB - nel circuito mobile del testo del problema, senza le resistenze aggiunte)

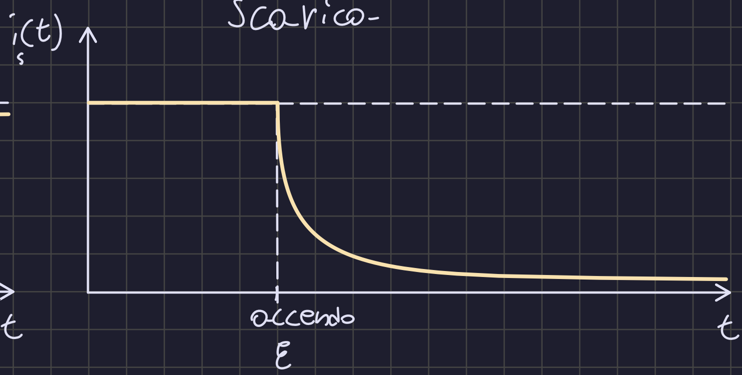
7. Disegnare lo schema del circuito
8. Scrivere la legge di variazione della corrente **i(t)** riportandone un grafico.
9. ....E' una rete lineare?



$$i_c(t) = i_{ind}\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_s(t) = i_{ind}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$





Non è una rete lineare perchè l'induttore fa variare la corrente secondo una legge esponenziale