

Algebra Lineare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

2° Semestre 2023/2024

Indice

1	Numeri complessi	2
1.1	Insiemi di numeri	2
1.2	Numeri immaginari	3
1.2.1	Esempi	4
1.3	Operazioni tra i numeri complessi	4
1.3.1	Somma	4
1.3.2	Prodotto	5
1.3.3	Sottrazione	5
1.3.4	Divisione	5
1.4	Coniugato e modulo	7
1.4.1	Coniugato	7
1.4.2	Modulo	7
1.4.3	Proprietà	7
1.5	Coordinate polari	8
1.6	Forma trigonometrica di un numero complesso	9
1.7	Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica	10
1.8	Formula di de Moivre	10
1.9	Definizione di radice n-esima	11
1.10	Teorema delle radici n-esime	11

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

I numeri sono divisi in insiemi in base alle operazioni che si possono fare con essi:

- I numeri sono stati pensati per contare e per farlo è stato definito l'insieme dei numeri naturali che è definito come

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di sottrazione è stato definito l'insieme dei numeri interi che è definito come

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Per fare operazioni di divisione è stato definito l'insieme dei numeri razionali che è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- Per fare operazioni di radice quadrata è stato definito l'insieme dei numeri reali che è definito come

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

- Infine, per fare operazioni di radice quadrata di numeri negativi è stato definito l'insieme dei numeri complessi che è definito come

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme dell'insieme successivo, ovvero

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le equazioni non risolvibili in un insieme vengono risolte in un insieme successivo, ad esempio

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni in \mathbb{R} , ma ha soluzioni in \mathbb{C} .

Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'algebra)

Qualsiasi equazione di forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

ed x è un'incognita, ammette n soluzioni

Definizioni utili 1.1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

è detto **polinomio di grado n con coefficienti** $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

1.2 Numeri immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero i che è definito come $i^2 = -1$. Questo numero è detto: **unità immaginaria**. Per agevolare le operazioni con i numeri immaginari si definisce l'insieme dei **numeri complessi** in modo da poter moltiplicare e sommare un numero reale con un numero immaginario:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$ è detta **forma algebrica** di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$.

$$a = \Re(z) \quad \text{è detta parte reale di } z$$

$$b = \Im(z) \quad \text{è detta parte immaginaria di } z$$

Definizioni utili 1.2

Per agevolare la scrittura, al posto di scrivere:

$$a + (-b)i$$

si scrive:

$$a - bi$$

1.2.1 Esempi

Esempio 1.1

- $3 + 2i$
- $-12 + \frac{1}{2}i$
- $3 - \sqrt{2}i$
- $1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{R}$

1.3 Operazioni tra i numeri complessi

1.3.1 Somma

Definizione 1.1

L'addizione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Esempio 1.2

$$z_1 = 6 + 7i \quad z_2 = -12 + 1732i$$

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (-12 + 1732i) = -6 + 1739i$$

1.3.2 Prodotto

Definizione 1.2

Il prodotto tra due numeri complessi è definito come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

visto che $i^2 = -1$ si ha che $bdi^2 = -bd$ quindi

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Esempio 1.3

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (10 - i) = 30 - 3i + 20i - 2i^2 = 32 + 17i$$

1.3.3 Sottrazione

Notiamo che per ogni numero complesso $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il numero complesso $-a - bi$ è l'unico numero complesso tale che $z + (-z) = 0$. Questo numero complesso è detto **opposto** di z e si indica con $-z$.

Definizione 1.3

La sottrazione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Esempio 1.4

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (10 - i) = -7 + 3i$$

1.3.4 Divisione

Definizione 1.4

La divisione tra due numeri complessi è definita come:

$$z_1, z_2, z_2 \neq 0 \quad \in \mathbb{C}$$

Definiamo $\frac{1}{z_2}$ come l'unico numero complesso tale che:

$$z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Sia $z = a + bi \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$. Supponiamo che $z' = c + di$ sia un numero complesso tale che $z \cdot z' = 1$, cioè:

$$1 = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Abbiamo $ac - bd = 1$ e $ad + bc = 0$.

Possiamo trovare c sostituendo $d = \frac{-1-ac}{b}$ nella prima equazione:

$$c = -\frac{ad}{b} \quad d = \frac{-(1-ac)}{b} = \frac{1-ac}{b}$$

$$c = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} = \frac{-a(\frac{1-ac}{b})}{b} \cdot \frac{b}{b} = \frac{-a(-1+ac)}{b^2}$$

$$cb^2 = a - a^2c$$

$$c(a^2 + b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Possiamo trovare d sostituendo $c = \frac{ad}{b}$ nella seconda equazione:

$$d = \frac{-bc}{a} \quad c = \frac{-(1-bd)}{a} = \frac{1-bd}{a}$$

$$d = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} = \frac{-b(\frac{1-bd}{a})}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-b(1-bd)}{a^2}$$

$$ad^2 = b - b^2d$$

$$d(a^2 + b^2) = b$$

$$d = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Quindi:

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

di conseguenza

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \neq 0 \in \mathbb{C}$. Definiamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Esempio 1.5

$$\frac{1+2i}{2-i} = (1+2i) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \right) i = i$$

Un trucco per dividere i numeri complessi è moltiplicare per 1 la frazione:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} - \cancel{abi} + b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

In questo modo si arriva ad ottenere un numero reale al denominatore facilitando la divisione.

Esempio 1.6

$$\begin{aligned} & \frac{1+2i}{2-i} \\ & \left(\frac{1+2i}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) = \frac{(1+2i)(2+i)}{2^2 + (-1)^2} = \\ & = \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+4i+i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i \end{aligned}$$

1.4 Coniugato e modulo**1.4.1 Coniugato**

Sia $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Il numero complesso $\bar{z} = a - bi$ è detto **coniugato** di z .

1.4.2 Modulo

Il **modulo** di z è definito come:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Proprietà

Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$

1. $z_1 \bar{z}_1 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. Se

$$z_1 \neq 0, \quad \frac{\overline{1}}{z_1} = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

Infatti:

$$\bar{z}_1 \cdot \left(\frac{1}{z_1} \right) = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_1} \right)} = \overline{1+0i} = 1-0i = 1$$

5. Se $z_2 \neq 0$ allora:

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

6. Se $z_1 \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z_1} \stackrel{def}{=} \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

Esempio 1.7

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{2-i} = (1+i) \left(\frac{1}{2-i} \right) \\ \frac{1}{2-i} &= \frac{2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ z &= (1+i) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right)i = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ \overline{z} &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

1.5 Coordinate polari

Per ogni numero complesso si ha una coppia di coordinate:

$$z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (\Re(z), \Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

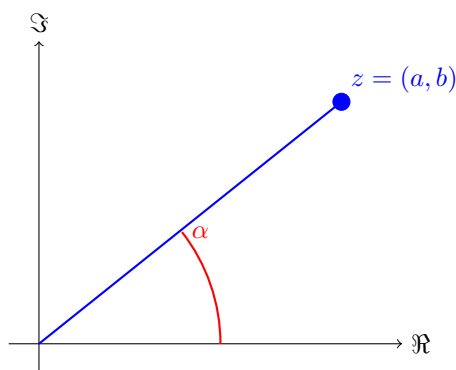


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso

Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ , detto **raggio polare**, ed α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ in senso antiorario. α viene misurato in radianti

Esempio 1.8

$$z_1 = (1, 0) \rightarrow 1$$

$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow i$$

$$z_3 = (1, \pi) \rightarrow -1$$

$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow -i$$

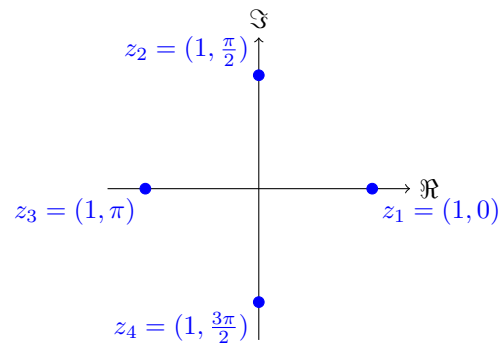


Figura 2: Esempi di numeri complessi in coordinate polari

1.6 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica. Per fare ciò usiamo il seno e il coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

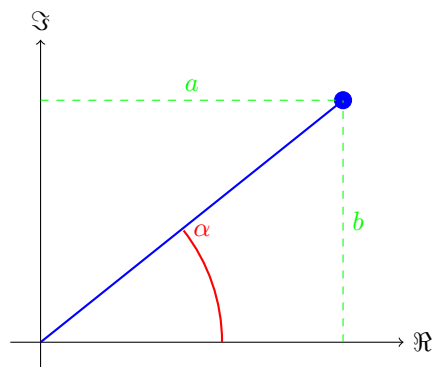


Figura 3: Forma trigonometrica di un numero complesso

Definizione 1.5

La **forma trigonometrica** di un numero complesso è definita come:

$$z = (r \cdot \cos(\alpha)) + (r \cdot \sin(\alpha))i = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

Esempio 1.9

$$1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$$

$$-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

1.7 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica**Definizione 1.6**

$$z_1 = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)), \quad z_2 = s(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \quad \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= rs(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = \\ &= rs((\cos \alpha \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) + (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))i) = \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

1.8 Formula di de Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}$, $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Esempio 1.10

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right)\right) = 64 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -64$$

1.9 Definizione di radice n-esima

$$y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si dicono **radici n-esime** di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.10 Teorema delle radici n-esime

Siano $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esistono precisamente n radici n-esime complesse distinte z_0, z_1, \dots, z_{n-1} di y . Se $y = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, allora per $k = 0, \dots, n-1$:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

Si somma $2k\pi$ per ottenere tutte le radici n-esime, siccome \sin e \cos sono periodiche.