Esame 28/06/2023

1. **(7 punti)** Si consideri il numero complesso $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

   (a) Si calcolino i seguenti numeri:

   i. Il modulo $|z|$ di z.

   ii. Il coniugato $\bar{z}$ di z.

   iii. Il numero complesso $\frac{1}{z}$.

   (b) Si calcoli il prodotto zw dove $w = 5(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$.

   (c) Si calcolino tutte le radici quadrate di z.

a) $|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\,\frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\bar{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\frac{1}{z} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $zw = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(5\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)\right) =$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(5\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}i^2 =$

$= \frac{5\cdot 2}{4} + \cancel{\frac{5\cdot 2}{4}i} - \cancel{\frac{5\cdot 2}{4}i} + \frac{5\cdot 2}{4} = 2\,\frac{10}{4} = \frac{10}{2} = 5$

c) $z = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi = \frac{5}{4}\pi$

$\sqrt[2]{1}\left(\cos\left(\frac{5\pi + 2k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 2k\pi}{8}\right)\right) =$

$= \cos\left(\frac{5\pi + 2k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 2k\pi}{8}\right)$

2. **(7 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli una forma ridotta U di A e si determini il rango di A.

(b) Si trovi una matrice invertibile E tale che $A = EU$.

(c) Si risolva il sistema lineare per cui la matrice A è la matrice aumentata corrispondente.

(d) Si dica se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ammette una sola soluzione.

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$rk(A) = rk(U) = 2$

b) $U = AE^{-1}$

$A = UE$

$E^{-1} = E_1(\frac{1}{2}) \cdot E_{21}(-1) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{41}(-2)$

$E = E_{41}(2) \cdot E_{31}(1) \cdot E_{21}(1) \cdot E_1(2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{E_{41}(2) \\ E_{31}(1) \\ E_{21}(1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_1(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Le matrici elementari sono invertibili, di conseguenza anche il prodotto di matrici elementari lo é.

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

d) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per il teorema di Rouché-Capelli: il sistema lineare ammette infinite soluzioni perché l'ultima colonna non é dominante e almeno 1 colonna di U non é dominante

3. **(10 punti)** Si consideri la seguente matrice con $t \in \mathbb{C}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ t & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino gli autovalori di A_t.

(b) Si determini i valori di $t \in \mathbb{C}$ per cui la matrice A_t è diagonalizzabile.

(c) Si trovino basi per ognuno degli autospazi di A_0.

a) $\det(A_t - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ t & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

b) $m_1 = 1 \quad m_2 = 2$

$1 \le d_1 \le m_1 \Rightarrow d_1 = 1$

$d_2 = \dim(E(\lambda_2)) = \dim(N(A_t - \lambda_2 I_3)) = n - rk(A_t - \lambda_2 I_3) = 3 - 2 = 1$ se $t \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{t \neq 0}{\overset{E_2(\frac{1}{t})}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se $t \neq 0$ la matrice non é diagonalizzabile perché $d_2 \neq m_2$

$d_2 = n - rk(A_0 - \lambda_2 I_3) = 3 - 1 = 2$ se $t = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se $t = 0$ la matrice é diagonalizzabile perché $m_1 = d_1$ e $m_2 = d_2$

c) $E_{A_0}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é una base di } E_{A_0}(1)$$

$$E_{A_0}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é una base di } E_{A_0}(2)$$

4. **(6 punti)** Si consideri la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Vero o falso? Si giustifichi la risposta!

(a) La matrice B è la matrice associata all'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3x \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Lo spazio delle colonne $C(B)$ di B ha dimensione 3.

(c) Lo spazio nullo $N(B)$ di B possiede una base ortonormale.

$$B_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}} = \left([F(b_1)]_{\mathcal{E}} \quad [F(b_2)]_{\mathcal{E}} \right)$$

$$F(b_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [F(b_1)]_{\mathcal{E}} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = 1e_1 + 0e_2 + 3e_3$$

$$F(b_2) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [F(b_2)]_{\mathcal{E}} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

$$B_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

VERO

b) $C(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ Ha dimensione 2 FALSO

d) $N(B) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{E_2(\frac{1}{2})}{\overset{E_{31}(-3)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Non possiede una base ortonormale perché non ha una base

FALSO