Esercitazione in classe sulle curve

✍ **Esercizio 2.1.1.** *Sia γ la curva piana una cui parametrizzazione in coordinate polari è $\rho(\vartheta) = \vartheta^2 + 1$, on $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Dopo aver disegnato sommariamente il sostegno di γ, determinare i versori tangente e normale al sostegno di γ nel punto $\gamma(\pi)$ e scrivere un'equazione della retta tangente nello stesso punto.*

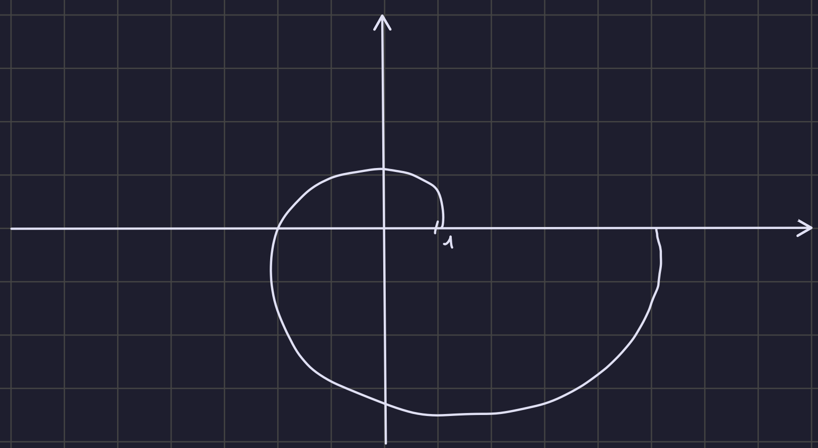
$$\rho(\theta) = \theta^2 + 1 \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

In coordinate cartesiane equivale a

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = (\theta^2+1)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = (\theta^2+1)\sin\theta \end{cases}$$

coordinate polari

Diamo valori a caso a theta e plottiamo il grafico a grandi linee



Rappresenta la curva

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \left((\theta^2+1)\cos\theta, (\theta^2+1)\sin\theta\right)$$

$$\gamma'(\theta) = \left(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta, \ 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\right)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{4\theta^2\cos^2\theta \cancel{- 4\theta(\theta^2+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta^2+1)^2\sin\theta + 4\theta^2\sin^2\theta \cancel{+ 4\theta(\theta^2+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta^2+1)^2\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{4\theta^2 + (\theta^2+1)^2}$$

Tangente:

$$T(\theta) = \frac{\gamma'(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\|} = \frac{\left(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta, \ 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\right)}{\sqrt{4\theta^2 + (\theta^2+1)^2}}$$

$\downarrow$

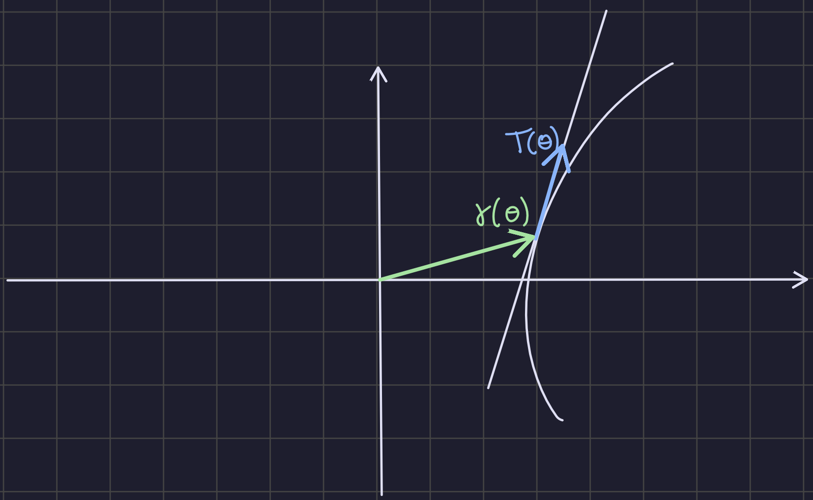
$$T(\pi) = \frac{(-2\pi, -(\pi^2+1))}{\sqrt{4\pi^2 + (\pi^2+1)^2}}$$

Direzione della tangente in pi

In R² il versore normale è il versore tangente ruotato di 90°

$$N(\pi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} T(\pi)$$

Per trovare la retta tangente alla curva bisogna trovare quel vettore che sposta lo spazio vettoriale formato dal vettore tangente sopra la curva e quel vettore è proprio $\gamma(\theta)$



Quindi la retta tangente è:

$$\gamma(\pi) + t\gamma'(\pi)$$

Componente x del vettore tangente

Componente y del vettore tangente

$$\begin{cases} x(t) = -(\pi^2+1) - t\,2\pi \\ y(t) = 0 - t(\pi^2+1) \end{cases}$$

$$-\frac{x + (1+\pi^2)}{2\pi} = t$$

$$y = \frac{x + (1+\pi^2)}{2\pi}(\pi^2+1)$$

$$y = \frac{\pi^2+1}{2\pi}x + \frac{(\pi^2+1)^2}{2\pi}$$

✍ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare l'integrale (curvilineo) di*

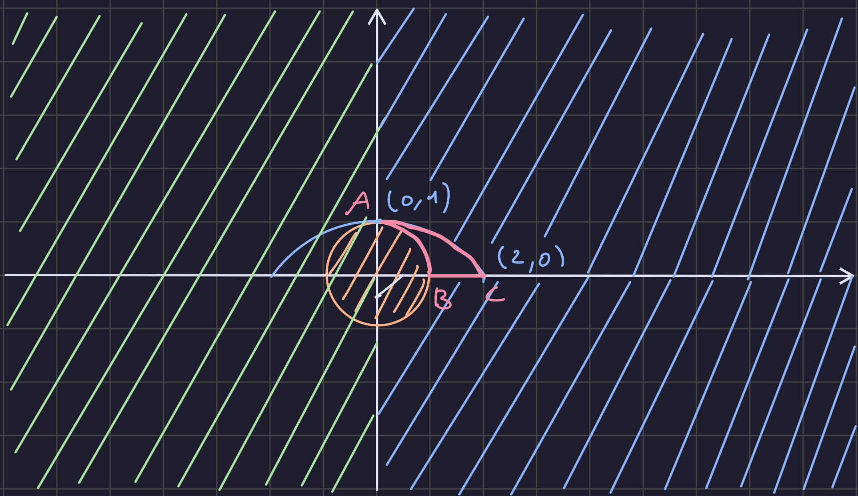
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ *il cui sostegno è il bordo* ∂E *di*

$$E = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\right\}$$

e determinare la retta tangente a γ *nel punto* $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

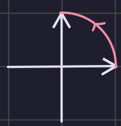
Disegnamo l'insieme E



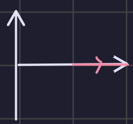
Consideriamo solo l'area rossa

Integriamo lungo le 3 curve parametrizzate:

$\gamma_{BA}(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$\gamma_{BC}(t) = (t, 0) \quad t \in [1, 2]$



$\gamma_{AC}(t) = (t, 1 - \frac{t^2}{4})$

Integriamo

$$\int_{\gamma_{BA}} F\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4+\cos^2 t}} \underbrace{\cancel{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}}_{|\gamma'(\theta)| = 1} dt$$

$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$

$w = \cos^2 t$

$dw = -2 \cos t \sin t \, dt$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \cos t \sin t \, dt}{\sqrt{4+\cos^2 t}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4+w}}\, dw = -(4+w)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[-\sqrt{4+\cos^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2+\sqrt{5}$$

Retta tangente a γ in (1,3/4) (γ(1))

$$\gamma(t) \begin{cases} \gamma_{BA} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{BC} \xrightarrow{\times} \\ \gamma_{AC} \xrightarrow{\checkmark} \end{cases} \left(1, \frac{3}{4}\right) \in \gamma_{AC}$$

$$\gamma_{AC}(t) = \left(t, 1-\frac{t^2}{4}\right) \to t \mid \gamma_{AC}(t) = \left(1, \frac{3}{4}\right) \Longrightarrow t = 1$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \frac{3}{4} \end{cases} \dots$$

$$\gamma'_{AC}(t) = \left(1, -\frac{t}{2}\right)$$

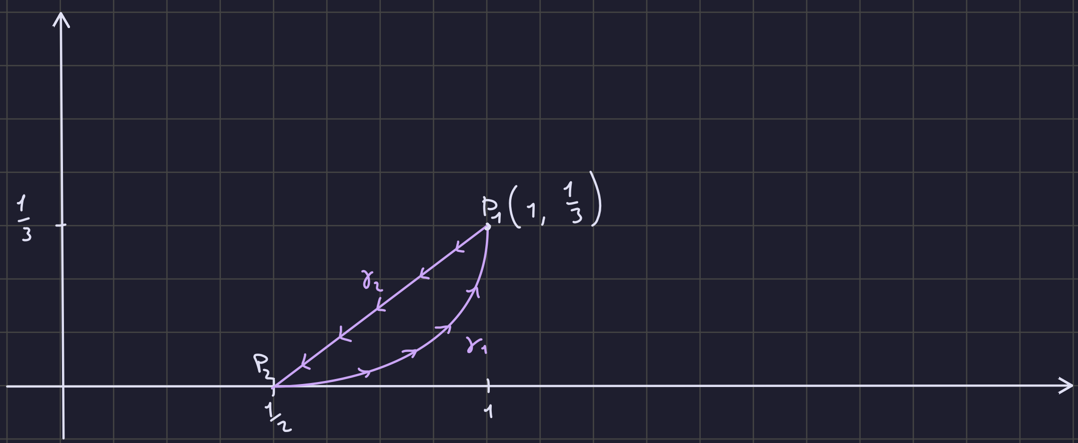
$$r_{TAN}(t) = \gamma_{AC}(t) + s\gamma'_{AC}(t) \quad s \in \mathbb{R}$$

$$r_{Tan}(1) = \gamma_{AC}(1) + s\gamma'_{AC}(1) = r_{TAN}(s) = \begin{cases} x(s) = 1+s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = 1+s \\ y(s) = \frac{3}{4} - \frac{s}{2} \end{cases} \to \begin{cases} s = x-1 \\ y = \frac{3}{4} - \frac{x-1}{2} \end{cases} \to y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{4}$$ retta tangente

✍ **Esercizio 2.1.2.** *Determinare una parametrizzazione della curva chiusa γ che si ottiene percorrendo prima da sinistra verso destra il grafico di $f(x) = (1/3)(2x-1)^{3/2}$ per $1/2 \leq x \leq 1$ e poi da destra a sinistra il segmento congiungente gli estremi del grafico di f stessa. Disegnare quindi il sostegno di γ e calcolarne la lunghezza.*

$f(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{1/2}$ $\quad f''(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(2x-1)^{1/2}} > 0$ concavità verso l'alto



$$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{1}{3}(2t-1)^{3/2}\right) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} \longleftarrow t \in [0,1] \quad (1-t)P_1 + tP_2$$

$$= \left((1-t) + \frac{t}{2}, \frac{1-t}{3}\right) \quad t \in [0,1]$$

Le due rette sono definite nello stesso intervallo, quindi in t = 1/2 si avrà un valore corrispondente a 2 rette contemporaneamente, e noi non vogliamo questo, ma vogliamo che gamma2 sia collegata a gamma1. Cambiamo di nuovo parametrizzazione

$$\gamma_1(t) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \to t = As + B \to \begin{cases} \frac{1}{2} = A \cdot 0 + B \\ 1 = A \cdot \frac{1}{2} + B \end{cases} \to \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = 1 \end{cases}$$

$$t = s + \frac{1}{2}$$

$$\gamma_1(s) = \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}(2s+1-1)^{3/2}\right)$$

$$= \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}(2s)^{3/2}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} s = 0 \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ s = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

La parametrizzazione è corretta

$$\gamma_2(t) \quad t \in [0,1] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to t = As + B$$

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \frac{1}{2} + B \\ 1 = A \cdot 1 + B \end{cases} \to \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases} \nearrow t = 2s - 1$$

$$\gamma_2(t) = \left((1-2s+1) + \frac{2s-1}{2}, \frac{(1-2s+1)}{3}\right)$$

$$= \left(2 - 2s + s - \frac{1}{2}, \frac{2(1-s)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - s, \frac{2(1-s)}{3}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} s = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{3}\right) \\ s = 1 \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{bmatrix} s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}(2s)^{3/2}\right) & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \left(\frac{3}{2} - s, \frac{2(1-s)}{3}\right) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

I passaggi per cambiare parametro sono:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$[c, d] \nearrow C^1$ (Mappa monotona)

$t \in [a, b]$
$s \in [c, d]$

$$t = As + B \to \begin{cases} a = Ac + B \\ b = Ad + B \end{cases} \to \begin{cases} A = \cdots \\ B = \cdots \end{cases}$$

✍ **Esercizio 2.2.6.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea) $\int_\alpha z\,ds$, ove α è la curva di parametrizzazione $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(-\pi, 0, \pi)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).*

$$\int_{\alpha(t)} F(x, y, z)\,\overbrace{ds}^{\text{spazio}} = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\,|\alpha'(t)|\,dt$$

$F(x, y, z) = z$

$$\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$$

$z = t$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\,|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1}\;dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2t\cos t}\sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t}\cos t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\, dt = \left[\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} (t^2+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{(4\pi^2+2)^{3/2} - 2^{3/2}}{3}$$

Calcoliamo il piano normale in $(-\pi, 0, \pi)$

$$\alpha(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t) \Rightarrow (-\pi, 0, \pi) \leftrightarrow t = \pi$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)$$

Cerchiamo una direzione tangente alla curva in π

$$\alpha'(\pi) = (-1, -\pi, 1)$$

L'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(-\pi, 0, \pi) \rightarrow r = (-\pi, 0, \pi) + s(-1, -\pi, 1)$

Bisogna trovare il piano perpendicolare alla retta tangente

Metodo 1:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-s_1 - \pi s_2 + s_3 = 0 \qquad s_1 = \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{s_3} - \pi \underset{\substack{\uparrow \\ t}}{s_2}$$ Teorema rouche capelli

$$\begin{pmatrix} k - \pi t \\ t \\ k \end{pmatrix} \longrightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}}_{\text{Vettore che sposta il piano nel punto interessato}} + \underbrace{k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Piano perpendicolare alla retta tangente (piano normale)}} \rightarrow \begin{cases} x(k,t) = -\pi + k - \pi t \\ y(k,t) = t \\ z(k,t) = \pi + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\pi + z - \pi - \pi y \\ t = y \\ k = z - \pi \end{cases} \rightarrow \quad z - x - \pi y = 2\pi$$

Metodo 2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Trasciniamo lo spazio affine nell'origine, così non bisogna calcolare il vettore che trasla lo spazio nel punto della retta tangente

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - (-\pi) \\ y \\ z - \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-(x + \pi) - \pi y + z - \pi = 0$$

$$z - x - \pi y = 2\pi$$