

# **Logica**

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Ripasso di matematica</b>	<b>2</b>
1.1	Relazioni . . . . .	2
1.2	Sottoinsieme delle parti . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Sintassi della logica proposizionale</b>	<b>2</b>
3.1	Connettivi . . . . .	2
3.2	Ausiliari . . . . .	3
3.3	Simboli proposizionali . . . . .	3
3.4	Altri simboli . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Principio di induzione</b>	<b>3</b>
4.1	Definizione induttiva formale dell'insieme <i>PROP</i> . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Proprietà su un insieme</b>	<b>4</b>
5.1	Principio di induzione sui numeri naturali $\mathbb{N}$ . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Teorema del principio di induzione su <i>PROP</i></b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Definizione ricorsiva di funzioni su PROP</b>	<b>6</b>
7.1	Definizione più precisa dell'esercizio 6.1 . . . . .	7
<b>8</b>	<b>Dimostrazione ricorsiva di rango e sottoformula</b>	<b>8</b>
8.1	Applicazione della definizione di sottoformula . . . . .	8
<b>9</b>	<b>Semantica delle formule proposizionali</b>	<b>9</b>
9.1	Valutazione delle formule logiche . . . . .	9
9.2	Valutazione atomica . . . . .	10
9.3	Tavole di verità . . . . .	10
9.3.1	Tavola di verità per $\vee$ . . . . .	10
9.3.2	Tavola di verità per $\wedge$ . . . . .	11
9.3.3	Tavola di verità per $\rightarrow$ . . . . .	11
9.4	Esempi di tabelle di verità . . . . .	11
9.5	Formule privilegiate . . . . .	11
<b>10</b>	<b>Struttura esercizi di semantica</b>	<b>12</b>
10.1	Prova con il contromodello . . . . .	13
<b>11</b>	<b>Soddisfacibilità della formula</b>	<b>14</b>
<b>12</b>	<b>Conseguenza logica</b>	<b>14</b>

# 1 Ripasso di matematica

## 1.1 Relazioni

Prendendo in considerazione 2 insiemi  $A, B$  e una relazione  $f \subseteq A \times B$  si definisce **dominio** l'insieme  $A$  e **codominio** l'insieme  $B$ . Il prodotto cartesiano è definito nel seguente modo:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Ciò significa che si prende in considerazione una coppia ordinata di elementi formata da un elemento di  $A$  e uno di  $B$ . La relazione  $f$  è una funzione sse (se e solo se)  $\forall a \in A \exists$  unico  $b \in B$  si dice che:  $(a, b) \in f$ , oppure  $f(a) = b$ .

## 1.2 Sottoinsieme delle parti

Dato un insieme  $A$  si definisce **sottoinsieme delle parti** (scritto  $\mathcal{P}(A)$  o  $2^A$ ) l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $A$ , cioè  $2^A = \{x | x \subseteq A\}$ .

Un esempio è il seguente:

$$A = \{3, 5\}$$

$$2^A = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$$

$\emptyset$  è l'insieme vuoto, cioè l'insieme che non contiene nessun elemento.

# 2 Introduzione

La logica ha lo scopo di formalizzare il ragionamento matematico che è caratterizzato dal concetto di dimostrazione senza ambiguità

# 3 Sintassi della logica proposizionale

La logica proposizionale è formata da simboli formali ben definiti e sono divisi in:

## 3.1 Connettivi

- $\vee$  Congiunzione, And logico
- $\wedge$  Disgiunzione, Or logico
- $\neg$  Negazione, Not logico (non connette niente, è solo una costante logica che equivale a 0 nella logica booleana)
- $\perp$  Falso, Bottom, Assurdo
- $\rightarrow$  Implicazione, If-then

### 3.2 Ausiliari

- $()$  Le parentesi non fanno parte della proposizione, ma servono solo a costruire il linguaggio

### 3.3 Simboli proposizionali

- $p_n, q_n, \psi_n, \dots$  Le lettere minuscole indicizzate vengono usate per indicare una proposizione (sono infiniti simboli numerabili)

### 3.4 Altri simboli

- $|$  Tale che
- $\leftrightarrow$  Se e solo se

#### *Definizioni utili 3.1*

1. **Stringa:** Una sequenza finita di simboli o caratteri
2. **Infinito numerabile:** Un insieme è infinito numerabile se è il più piccolo infinito possibile, cioè se è in corrispondenza biunivoca con l'insieme  $\mathbb{N}$

## 4 Principio di induzione

Il principio di induzione è un principio logico che permette di dimostrare che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un insieme infinito numerabile.

Una prima definizione induttiva fatta in modo non formale, ma con frasi in italiano è la seguente:

L'insieme di proposizioni *PROP* è così definito *induttivamente*:

1.  $\perp \rightarrow PROP$
2. se  $p$  è un simbolo proposizionale allora  $p \in PROP$
3. **(Caso induttivo)** se  $\alpha, \beta \in PROP$  allora  $(\alpha \wedge \beta) \in PROP, (\alpha \vee \beta) \in PROP, (\alpha \rightarrow \beta) \in PROP, (\neg \alpha) \in PROP$
4. nient'altro appartiene a *PROP*

In questo modo è stato creato l'insieme *PROP* che contiene tutte le proposizioni che possono essere create usando gli unici simboli che abbiamo definito  $(\wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$ .

Esempi di proposizioni corrette e scorrette:

- $(p_7 \rightarrow p_0) \in PROP$

- $p_7 \rightarrow p_0 \notin PROP$  (mancano le parentesi)
- $((\perp \vee p_{32}) \wedge (\neg p_2)) \in PROP$
- $((\rightarrow \wedge) \notin PROP$
- $\neg\neg\perp \notin PROP$

#### 4.1 Definizione induttiva formale dell'insieme $PROP$

Adesso l'insieme  $PROP$  viene definito in modo formale usando i simboli proposizionali.

##### **Definizione 4.1**

*L'insieme  $PROP$  è il più piccolo insieme  $X$  di stringhe tale che:*

1.  $\perp \in X$
  2.  $p \in X$  (Perchè è un simbolo proposizionale)
  3. se  $\alpha, \beta \in X$  allora  $(\alpha \rightarrow \beta) \in X, (\alpha \vee \beta) \in X, (\alpha \wedge \beta) \in X, (\neg\alpha) \in X$
- $p, \alpha, \beta, \dots$  sono elementi proposizionali generici*

$AT = \text{simboli proposizionali} + \perp$  è l'insieme di tutte le proposizioni atomiche, cioè quelle che non contengono connettivi, sono quindi la più piccola parte non ulteriormente scomponibile

## 5 Proprietà su un insieme

Definito  $P$  un insieme di proprietà assunte da un insieme  $A$  si ha che:

- $P \subseteq A$
- $a \in A$  dove  $a$  è un elemento generico dell'insieme  $A$

Si dice che  $a$  gode della proprietà  $P$  se  $a \in P$ .

Altri modi per dire che  $a$  gode della proprietà  $P$  sono:

- $P(a)$
- $P[a]$  (per non creare confusione con le parentesi tonde che sono usate come simboli ausiliari per costruire il linguaggio)

$$P \subseteq PROP \quad \forall \alpha \in PROP . P(\alpha)$$

(il punto mette in evidenza ciò che viene dopo di esso e può anche essere omesso)

##### **Esempio 5.1**

*Esempio di una proprietà sull'insieme  $\mathbb{N}$ :*

$P = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ ed è pari} \}$  essendo  $n$  un numero generico indica la proprietà di essere pari.

$$\begin{array}{l} P[5] \times \\ P[4] \checkmark \end{array}$$

## 5.1 Principio di induzione sui numeri naturali $\mathbb{N}$

$$P \subseteq \mathbb{N}$$

1. **Caso base:** se  $P[0]$  e
2. **Passo induttivo:** se  $\forall n \in \mathbb{N} (P[n] \Rightarrow P[n+1])$  allora  $\forall n \in \mathbb{N} . P[n]$

Se si dimostra la proprietà per  $n$  e per il successivo  $(n+1)$ , allora si dimostra che la proprietà è vera per tutti i numeri naturali. Si sfrutta il fatto che esiste un minimo a cui prima o poi si arriva.

### **Esercizio 5.1**

*Dimostra per induzione che:*

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

## 6 Teorema del principio di induzione su $PROP$

### **Definizione 6.1**

$$P \subseteq PROP$$

1. Se  $P[\alpha], \alpha \in AT$  e
2. Se  $P[\alpha] \Rightarrow P[(\neg\alpha)]$  e
3. se  $P[\alpha]$  e  $P[\beta] \Rightarrow P[(\alpha \wedge \beta)], P[(\alpha \vee \beta)] P[(\alpha \rightarrow \beta)]$   
allora  $\forall \psi \in PROP . P[\psi]$

Con questo teorema si possono dimostrare intere proposizioni complesse dimostrando i pezzi più piccoli (**sottoformule**) come mostrato nella figura 1.

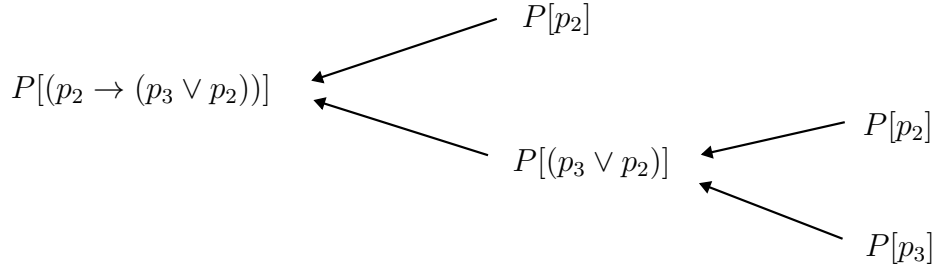


Figura 1: Dimostrazione di una formula complessa

### Esercizio 6.1

Dimostra che ogni  $\psi \in PROP$  ha un numero pari di parentesi usando il principio di induzione per dimostrare proprietà sintattiche sulla struttura delle formule.

$P[\psi] \equiv \psi$  ha un numero pari di parentesi

1. **Caso base**  $\psi \in AT$  quindi  $\psi$  ha 0 parentesi e quindi è pari:  $P[\psi] \checkmark$
2. **Ipotesi induttiva**  $\alpha, \beta \in PROP$ ,  $P[\alpha], P[\beta] \text{ ? } P[(\alpha \rightarrow \beta)]$  (per  $\alpha$  vale e per  $\beta$  vale, si sono aggiunte due parentesi, quindi la formula è ancora pari)
3. **Passo induttivo**  $P[\alpha], P[\beta] \Rightarrow P[(\alpha \rightarrow \beta)], P[(\alpha \vee \beta)], P[(\alpha \wedge \beta)]$  allora  $\forall \psi \in PROP . P[\psi]$

## 7 Definizione ricorsiva di funzioni su PROP

### Definizione 7.1

Riprendendo l'esercizio 6.1 si definisce la funzione  $\pi$  che associa ad ogni formula proposizionale (equivalente di un input nell'informatica) un numero naturale (equivalente di un output nell'informatica). La funzione  $\pi$  quindi dopo aver dato in input un argomento (qualsiasi formula proposizionale atomica o complessa) restituisce in output il numero di parentesi che contiene la formula in input.

$$\pi : PROP \rightarrow \mathbb{N}$$

1. **Caso base**  $\pi[\alpha] = 0$  se  $\alpha \in AT$
2. **Ipotesi induttiva**  $\pi[(\neg \alpha)] = \pi[\alpha] + 2$  In questo passaggio viene chiamata la funzione  $\pi$  dentro la funzione  $\pi$  stessa, quindi è una defini-

zione ricorsiva. In questo caso si aggiungono 2 parentesi al numero di parentesi di  $\alpha$   $\pi[\alpha]$

3. **Passo induttivo**  $\pi[(\alpha \rightarrow \beta)] = \pi[(\alpha \vee \beta)] = \pi[(\alpha \wedge \beta)] = \pi[\alpha] + \pi[\beta] + 2$  dove  $\pi[\alpha]$  e  $\pi[\beta]$  sono il numero di parentesi di  $\alpha$  e  $\beta$  e si aggiungono 2 parentesi per il connettivo.

Di seguito ci sono 2 esempi in cui viene messa in pratica la funzione  $\pi$  definita sopra in modo da capire meglio come funziona.

### Esempio 7.1

$$\pi[(p_2 \rightarrow p_1)] \stackrel{caso\ 3}{=} \pi[p_2] + \pi[p_1] + 2 \stackrel{caso\ 1}{=} 0 + 0 + 2 = 2$$

### Esempio 7.2

$$\pi[(p_1 \vee (p_2 \vee p_1))] = (\pi[p_2] + \pi[p_1] + 2) + \pi[p_1] + 2 = (0 + 0 + 2) + 0 + 2 = 4$$

Tutte le funzioni definite ricorsivamente sono funzioni, e non tutte le funzioni possono essere definite ricorsivamente.

## 7.1 Definizione più precisa dell'esercizio 6.1

Ogni  $\alpha \in PROP$  ha un numero pari di parentesi:  $\forall \alpha \in PROP \ P[\alpha] \stackrel{sse}{\Leftrightarrow} \pi[\alpha]$  è pari

1.  $P[\alpha] \ \alpha \in AT$

se  $\alpha \in AT \ \pi[\alpha] \stackrel{def}{=} 0$  quindi  $\checkmark$

2. Suppongo che valga  $P[\alpha]$ ,  $P[(\neg \alpha)]$  ?

$P[\alpha] \Leftrightarrow \pi[\alpha] \text{ pari}$  è pari perchè lo abbiamo supposto prima (consideriamo 0 come pari)

$$\pi[(\neg \alpha)] = \pi[\alpha] + 2 \text{ è pari quindi } P[(\neg \alpha)] \checkmark$$

Si può definire un simbolo nuovo che non vuole dire niente nel linguaggio proposizionale e gli si assegnano i connettivi possibili per non doverli più scrivere ogni volta. Per questo esercizio prendiamo in considerazione

$$\circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$$

3.  $(\alpha \circ \beta)$

suppongo  $P[\alpha]$ ,  $P[\beta]$

allora  $\pi[\alpha]$  e  $\pi[\beta]$  sono pari

quindi  $\pi[(\alpha \circ \beta)] = \pi[\alpha] + \pi[\beta] + 2$  (è pari)



Ho dimostrato per induzione che  $\forall \psi \in PROP \ P[\psi] \quad \square$   
 ( $\square$  è un simbolo che indica la fine della dimostrazione.)

## 8 Dimostrazione ricorsiva di rango e sottoformula

Il rango di una formula è il numero di connettivi che contiene.

### **Definizione 8.1**

Considerato  $r$  il rango di una proposizione

$$r : PROP \rightarrow \mathbb{N}$$

1.  $r[\psi] = 0$  se  $\psi \in AT$
2.  $r[(\neg\psi)] = 1 + r[\psi]$
3.  $r[(\psi \circ \gamma)] = 1 + \max(r[\psi], r[\gamma]) \quad \circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

La sottoformula è una formula che è contenuta in un'altra formula più grande.

### **Definizione 8.2**

Considerata  $sub$  la sottoformula di una proposizione

$$sub : PROP \rightarrow 2^{PROP}$$

1.  $sub[\alpha] = ((p_2 \vee p_1) \vee p_0)$
2.  $sub[\alpha] = \{\alpha, p_2, p_0, (p_2 \vee p_1)\}$

### 8.1 Applicazione della definizione di sottoformula

1.  $sub[\psi] = \{\psi\}$  se  $\psi \in AT$
2.  $sub[(\neg\psi)] = \{(\neg\psi)\} \cup sub[\psi]$
3.  $sub[(\psi \rightarrow \gamma)] = \{(\psi \rightarrow \gamma)\} \cup sub[\psi] \cup sub[\gamma]$

**Teorema 1** Vogliamo dimostrare per induzione su  $\beta$  :

Se  $\alpha \in sub[\beta]$  e  $\alpha \neq \beta$  (dove  $\alpha$  è una sottoformula propria, cioè vengono considerate tutte le sottoformule di  $\beta$  tranne  $\beta$  stessa) allora  $r[\alpha] < r[\beta]$

1. **Caso base**  $\beta \in AT$   
 $\beta$  non ha sottoformule proprie, quindi  $\alpha$  non può essere una sottoformula propria di  $\beta$ . Essendo falsa la premessa la tesi è vera.
2. Se  $\beta = (\neg\beta_1)$  : se  $\alpha \in sub[\beta]$  e  $\alpha \neq \beta$  allora  $\alpha \in sub[\beta_1]$  e si dimostra  $r[\alpha] \leq r[\beta_1]$  (*ipotesi induttiva*)

(a)  $\alpha \in \text{sub}[\beta_1]$  e  $\alpha \neq \beta_1$  per ipotesi induttiva  $r[\alpha] < r[\beta_1]$

(b)  $\alpha = \beta_1$   $r[\alpha] = r[\beta_1]$   
 $r[\alpha] \leq r[\beta_1]$

Quindi

$$r[(\neg\beta_1)] \stackrel{\beta}{\text{def}} r 1 + r[\beta_1] \geq 1 + r[\alpha] > r[\alpha]$$

Quindi

$$r[\alpha] < r[\beta]$$

### 3. **Caso induttivo**

$\beta = (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$  se  $\alpha$  è sottoformula di  $\beta$  e  $\alpha \neq \beta$  allora  $\alpha \in \text{sub}[\beta_1]$  o  $\alpha \in \text{sub}[\beta_2]$

(a) se  $\alpha \in \text{sub}[\beta_1]$  (ipotesi induttiva)

i. Se  $\alpha \neq \beta_1 \Rightarrow r[\alpha] \stackrel{ii \text{ su } \beta_1}{\leq} r[\beta_1]$

ii. Se  $\alpha = \beta_1 \Rightarrow r[\alpha] = r[\beta_1]$

Da 3(a)i e 3(a)ii si ricava  $r[\alpha] \leq r[\beta_1]$

(b) se  $\alpha \in \text{sub}[\beta_2]$

i. Se  $\alpha \neq \beta_2 \Rightarrow r[\alpha] \stackrel{ii \text{ su } \beta_2}{\leq} r[\beta_2]$

ii. Se  $\alpha = \beta_2 \Rightarrow r[\alpha] = r[\beta_2]$

Da 3(b)i e 3(b)ii si ricava  $r[\alpha] \leq r[\beta_2]$

$$r[(\beta_1 \rightarrow \beta_2)] \stackrel{\beta}{=} 1 + \max\{r[\beta_1], r[\beta_2]\} \stackrel{\geq \alpha}{\geq} 1 + \max\{r[\alpha], r[\alpha]\} \geq 1 + r[\alpha] > r[\alpha]$$

## 9 Semantica delle formule proposizionali

Considerando una formula  $\alpha$  si associano 2 possibili valori:

- Vero (1)
- Falso (0)

### 9.1 Valutazione delle formule logiche

$$V : PROP \rightarrow \{0, 1\}$$

$$V(p_1) = ? \quad 0 \text{ o } 1$$

#### **Esempio 9.1**

Le seguenti funzioni non sono valide:

- $V(\alpha) = V(\neg\alpha)$
- $V(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha$

$V : PROP \rightarrow \{0, 1\}$  è una valutazione se:

1.  $V(\alpha \wedge \beta) = 1 \leftrightarrow V(\alpha) = 1 \ \& \ V(\beta) = 1$
2.  $V(\alpha \vee \beta) = 1 \leftrightarrow V(\alpha) = 1 \ \text{or} \ V(\beta) = 1$
3.  $V(\neg \alpha) = 1$
4.  $V(\perp) = 0$
5.  $V(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \leftrightarrow [V(\alpha) = 1 \Rightarrow V(\beta) = 1]$
- 5.2  $V(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \leftrightarrow V(\alpha) = 0 \ \text{or} \ V(\beta) = 1$

## 9.2 Valutazione atomica

$v$  è detta **valutazione (atomica)** se:

$v : AT \rightarrow \{0, 1\}$  e  $v(\perp) = 0$

### *Definizione 9.1*

*Teorema:*

*Data una valutazione atomica  $v$  esiste ed è unica una valutazione*

$$[\![ \cdot ]\!]_v^a : PROP \rightarrow \{0, 1\}$$

*tale che:*

$$[\![ \alpha ]\!]_v = V(\alpha) \ \text{per} \ \alpha \in AT$$

<sup>a</sup> $[\![ \cdot ]\!]$  sono parentesi denotazionali, cioè indicano che stiamo valutando il valore della valutazione, quindi della semantica

## 9.3 Tavole di verità

Il valore di verità di una formula è determinato (universalmente) dal valore dei suoi atomi.

### 9.3.1 Tavola di verità per $\vee$

$$[\![ (\alpha \vee \beta) ]\!]_v = 1 \leftrightarrow [\![ \alpha ]\!]_v = 1 \ \text{or} \ [\![ \beta ]\!]_v = 1$$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 9.3.2 Tavola di verità per $\wedge$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### 9.3.3 Tavola di verità per $\rightarrow$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

## 9.4 Esempi di tabelle di verità

### *Esempio 9.2*

$$\alpha = ((p_2 \rightarrow p_1) \vee p_2)$$

$p_1$	$p_2$	$(p_1 \rightarrow p_2)$	$((p_2 \rightarrow p_1) \vee p_2)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

A ogni riga corrisponde una valutazione atomica:  $v_1[p_1] = 0, v_1[p_2] = 0$  ecc...

### **Esercizio 9.1**

Valutare:  $[[\alpha]]_{v_1}$  dell'esercizio precedente:

$$[[p_2 \rightarrow p_1]]_{v_1} = 1 \leftrightarrow [[p_2]]_{v_1} \stackrel{\text{punto 5.2}}{=} 0 \text{ or } [[p_1]]_{v_1} = 1$$

$$[[((p_2 \rightarrow p_1) \vee p_2)]]_{v_1} = 1 \leftrightarrow [[p_2 \rightarrow p_1]]_{v_1} = 1; \text{ or } [[p_2]]_{v_1} = 1$$

### **Esercizio 9.2 (A casa)**

Valutare  $[[\alpha]]_{v_2}$

## 9.5 Formule privilegiate

**Teorema 2**  $\phi \in PROP$  sia  $\phi^{AT} = \{p | p \in AT \text{ \& } p \text{ è in } \phi\}$

Siano  $v_1$  e  $v_2$  valutazioni atomiche

tali che:  $\forall p \in \phi^{AT} \ v_1[p] = v_2[p]$   
allora  $[[\phi]]_{v_1} = [[\phi]]_{v_2}$

### Definizione 9.2

$\alpha \in PROP$  è detta **tautologia** se per ogni valutazione  $v$ :  $[[\alpha]]_v = 1$   
 $\models \phi$  indica una formula privilegiata (di cui fa parte la tautologia)

$\forall v [[\alpha]]_v = 1$  è una formula privilegiata?  $\models \alpha$

- Sì  $\Rightarrow$  dimostro **per ogni**  $v$  che  $[[\alpha]]_v = 1$  ( $\forall^1$ )
- No  $\Rightarrow$  esibisco una specifica valutazione tale che  $[[\alpha]]_v = 0$  ( $\exists^2$ )

## 10 Struttura esercizi di semantica

### Esercizio 10.1

Vogliamo dimostrare una formula che implica se stessa:

$$\models (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$\forall v . [[(\alpha \rightarrow \alpha)]_v = 1$$

$$[[(\alpha \rightarrow \alpha)]_v = 1 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} [[\alpha]]_v = 0 \text{ or } [[\alpha]]_v = 1$$

### Esercizio 10.2

Vogliamo dimostrare:

$$\models ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$$

$$\forall v . [[((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)]_v = 1 \Leftrightarrow$$

$$[[ (\alpha \wedge \beta) ]_v = 0 \text{ or } [[\alpha]]_v = 1 \Leftrightarrow$$

$$([[\alpha]]_v = 0 \text{ or } [[\beta]]_v = 0) \text{ or } [[\alpha]]_v = 1$$

<sup>1</sup>Per far sì che sia vero dobbiamo dimostrare che sia vero per ogni elemento

<sup>2</sup>Per far sì che sia falso dobbiamo dimostrare che almeno una valutazione sia falsa (controesempio)

**Esercizio 10.3**

Vogliamo dimostrare:

$$\begin{aligned} & \models (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \\ & \forall v . \llbracket (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rrbracket_v = 1 \Leftrightarrow \\ & \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket (\beta \rightarrow \alpha) \rrbracket_v = 1 \Leftrightarrow \\ & \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } (\llbracket \beta \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1) \end{aligned}$$

Ho tutte le possibilità per  $\alpha$  ( $\llbracket \alpha \rrbracket_v = 0$ ,  $\llbracket \alpha \rrbracket_v = 1$ ), quindi la formula è vera.

**10.1 Prova con il contromodello****Esercizio 10.4**

È vero che la seguente formula è una tautologia? NO Ragiona sullo stesso esercizio, ma se ci fosse  $\vee$

$$\models (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$$

Bisogna trovare un'istanza di  $\alpha$  e  $\beta$  e una valutazione  $v$ .

Assumo che  $\alpha$  sia  $p_0$  e  $\beta$  sia  $p_1$

$$\exists v \text{ t.c. } \llbracket p_0 \rightarrow (p_0 \wedge p_1) \rrbracket_v = 0$$

Per assegnare i valori a  $p_0$  e  $p_1$  si può anche usare la tabella di verità della formula intera.

$$v[p_0] = 1 \text{ } v[p_1] = 0$$

(**Contromodello**) 1 non può implicare 0

Verifichiamo che sia vero che esca il contromodello

$$\llbracket (p_0 \rightarrow (p_0 \wedge p_1)) \rrbracket_v = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_0 = \delta \quad (p_0 \wedge p_1) = \gamma$$

$$(\delta \rightarrow \gamma) = 0$$

$$\llbracket p_0 \rrbracket_v = 1 \ \& \ \llbracket (p_0 \wedge p_1) \rrbracket_v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\llbracket p_0 \rrbracket_v = 1 \ \& \ (\llbracket p_0 \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket p_1 \rrbracket_v = 0)$$

$\llbracket p_0 \rrbracket_v = 1$  è vero e anche il pezzo dopo  $\&$ , quindi è tutto vero.

## 11 Soddisfacibilità della formula

Si definisce:

- $\alpha \in PROP$  è soddisfacibile se esiste  $v$ :

$$[[\alpha]]_v = 1$$

- $\alpha$  non è soddisfacibile quando non esiste:

$$\nexists v \text{ t.c. } [[\alpha]]_v = 1$$

$\Gamma$  insieme formule proposizionali

$\Gamma$  è soddisfacibile quando:

$$\exists v \text{ t.c. } \forall \phi \in \Gamma \ [[\phi]]_v = 1$$

## 12 Conseguenza logica

Ipotesi  $\rightarrow$  tesi

$\Gamma, E, \Delta$  Insiemi arbitrari di formule  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\overset{ipotesi}{\Gamma} \models \overset{tesi}{\alpha}$$

Si può leggere in più modi:

- Da  $\Gamma$  segue semanticamente  $\alpha$
- $\alpha$  è conseguenza logica/semantica di  $\Gamma$

### **Definizione 12.1**

*La verità dell'ipotesi fa conseguire la verità della tesi.*

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \forall v \text{ se } \forall \phi \in \Gamma \text{ allora } [[\phi]]_v = 1 \text{ allora } [[\alpha]]_v = 1$$

*Le denotazione dell'insieme vuol dire che tutte le formule dell'insieme sono vere.*

$$[[\Gamma]]_v = 1 \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Gamma \ [[\alpha]]_v = 1 \Rightarrow [[\alpha]]_v = 1$$

$$\Gamma \models \alpha \Leftrightarrow \forall v \ [[\Gamma]]_v = 1 \text{ allora } [[\alpha]]_v = 1$$

*La seguente formula vuol dire che esiste almeno una formula falsa nell'insieme  $\Gamma$*

$$[[\Gamma]]_v \neq 1$$

*Che è diverso dal dire:*

$$[[\Gamma]]_v = 0$$

*Che significa che tutte le formule di  $\Gamma$  valgono 0.*

**Esercizio 12.1 (easy)**

Vogliamo provare:

$$(\alpha \wedge \beta) \models \alpha$$

Applico la definizione e prendo una valutazione generica

$$[(\alpha \wedge \beta)]_v = 1 \Rightarrow [\alpha]_v = 1$$

Usiamo le definizioni semantiche dei connettivi per valutare la prima parte dell'espressione

$$[(\alpha \wedge \beta)]_v = 1 \Leftrightarrow [\alpha]_v = 1 \ \& \ [\beta]_v = 1 \Rightarrow [\alpha]_v = 1$$

**Esercizio 12.2**

Definiamo un insieme separando con la virgola le formule che lo compongono<sup>a</sup>

$$(\alpha \rightarrow \beta), \alpha \models \beta$$

$$\forall v. [(\alpha \rightarrow \beta), \alpha]_v = 1 \Rightarrow [\beta]_v = 1$$

$$[(\alpha \rightarrow \beta), \alpha]_v = 1 \Leftrightarrow$$

$$[\alpha \rightarrow \beta]_v = 1 \ \& \ [\alpha]_v = 1 \Leftrightarrow$$

$$([\alpha]_v = 0 \text{ or } [\beta]_v = 1) \ \& \ [\alpha]_v = 1 \Rightarrow$$

$$[\beta]_v = 1$$

---

<sup>a</sup>Equivale a dire:  $\Gamma = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$  la virgola vuol dire  $\Gamma \cup \Delta \models \alpha$  o  $\alpha \wedge \beta$

**Esercizio 12.3 (a casa)**

$$\Gamma, \alpha \models \beta \Rightarrow \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$$

**Esercizio 12.4 (a casa)**

$$\phi \models \psi \vee \phi$$

**Esercizio 12.5 (a casa)**

Risolvi con tavole di verità:

$$\models (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$



***Esercizio 12.6***

$$\Gamma, \alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$$

*Prendiamo una  $v$  generica*

$$\forall v. ([\Gamma, \alpha, \beta]_v = 1 \Rightarrow [\alpha \wedge \beta]_v = 1)$$

$$([\Gamma]_v = 1 \ \& \ [\alpha]_v = 1 \ \& \ [\beta]_v = 1) \Rightarrow$$

$$([\Gamma]_v = 1 \ \& \ [(\alpha \wedge \beta)]_v = 1) \Rightarrow [\alpha \wedge \beta]_v = 1$$