Esame 15/07/2022

1. **(6 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix}.$$

(a) Si studi $det(A)$ al variare di k.

(b) Si studi $rk(A)$ al variare di k.

(c) Si determini se A è invertibile. Se sì, per quali valori di k?

a)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & k \\ k-1 & k & k \end{bmatrix} - (k-1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & k \\ 1 & k & k \end{bmatrix} =$$

$$= \cancel{k^2} - \cancel{k^2} - (k - (k^2-k)) - (k-1)\left(\cancel{k^2} - \cancel{k^2} - (\cancel{k} - \cancel{k})\right) =$$

$$= -2k + k^2 - (k-1)(0) = k^2 - 2k$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{bmatrix} \overset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & k-1 & k \end{bmatrix} \overset{E_{32}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & k-2 & k-1 & k \end{bmatrix} \underset{k \neq 2}{\overset{E_2\left(\frac{1}{k-2}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & k-2 & k-1 & k \end{bmatrix} \overset{E_{42}(-k+2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix} \underset{k \neq 1}{\overset{E_3\left(\frac{1}{k-1}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix} \overset{E_{43}(-k)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{k-1} \end{bmatrix} \underset{k \neq 0}{\overset{E_4\left(-\frac{k-1}{k}\right)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$rk(A) = 4$ se $k \neq 2 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq 0$

$k = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{E_2(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{E_{32}(-1) \\ E_{42}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{E_3\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{E_{43}(-2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rk(A_2) = 3 \quad \text{se } k = 2$$

$k=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{E_{43}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad rk(A_1) = 4 \quad \text{se } k=1$$

$k=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rk(A_0) = 3 \quad \text{se } k=0$$

c) A é invertibile se $det(A) \neq 0$

$k^2 - 2k \neq 0$

$k(k-2) \neq 0$

$k \neq 0 \;\wedge\; k \neq 2$

A é invertibile se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$

2. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.

(b) Si verifichi che la matrice B è diagonalizzabile e si trovino la matrice diagonale D e le matrici S, S^{-1} tali che $B = SDS^{-1}$.

a) $det(B - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 4 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$E(\lambda_1) = E(1) = N(B - 1 I_2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{E_{21}}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{4})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 - \frac{1}{8}x_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $E(1)$

$E(\lambda_2) = E\left(\frac{1}{2}\right) = N\left(B - \frac{1}{2} I_2\right)$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_1(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $E\left(\frac{1}{2}\right)$

b) La matrice B é diagonalizzabile perché possiede 2 autovalori distinti

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(S \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_1(8)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{E_{21}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid S^{-1})$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **(12 punti)** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(v) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+4y-2z \\ -3x-6y+3z \end{pmatrix}$ per ogni $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si calcoli la matrice M associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino la dimensione e una base dell'immagine $Im(f) = C(M)$ di f e dello spazio nullo $N(f) = N(M)$ di f.

(c) Si dica se l'applicazione lineare f è un isomorfismo.

(d) Si calcoli la matrice N associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e rispetto alla base canonica nel codominio.

a)
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(3)}{\overset{E_{21}(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $C(M)$

$\dim(C(M)) = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2t + s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é una base di $N(M)$ $\quad \dim(N(M)) = 2$

c) f é un isomorfismo se $\det(M) \neq 0$ e $rk(M) = 3$

$rk(M) = 1$ quindi f non é un isomorfismo

d)

$$N = \left([f(b_1)]_{can} \quad [f(b_2)]_{can} \quad [f(b_3)]_{can} \right)$$

$$f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(b_2) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$f(b_3) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

4. **(4 punti)** Vero o falso? Si motivi la risposta!

(a) Il numero complesso $\frac{-3+6i}{2+i}$ in forma algebrica è $3i$.

(b) L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$.

a) $\frac{-3+6i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(-3+6i)(2-i)}{5} = \frac{\cancel{15}^{3} i}{\cancel{5}_{1}} = 3i$ VERO

b) FALSO perche il vettore $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ non é normale.