

# Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2024/2025

## Indice

<b>1</b>	<b>Concetti base</b>	<b>2</b>
1.1	Tipi di segnali . . . . .	2
1.2	Rappresentazione dei sistemi . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Notazioni</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Sistemi</b>	<b>6</b>
3.1	Approccio classico . . . . .	6
3.2	Approccio moderno . . . . .	6
3.3	Obsolescenza . . . . .	6
3.4	Causalità . . . . .	7
3.5	Stabilità . . . . .	7
3.5.1	Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output) . . . . .	8
3.5.2	Stabilità Asintotica . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Modello di segnali</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Funzioni in C</b>	<b>12</b>
5.1	Funzione a variabili complesse . . . . .	12
5.2	Funzioni complesse . . . . .	13
5.3	Funzioni polinomiali . . . . .	13

# 1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

## 1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

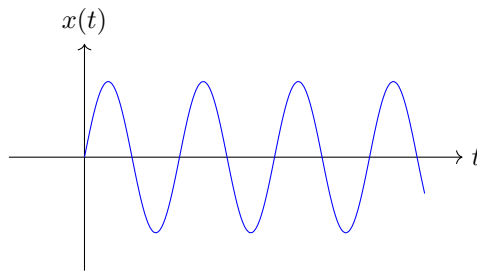


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

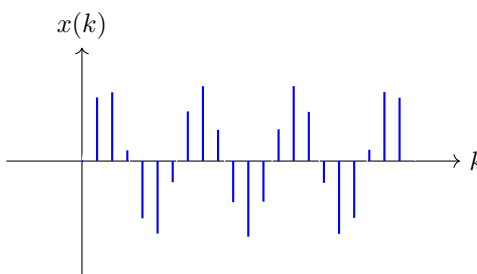


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

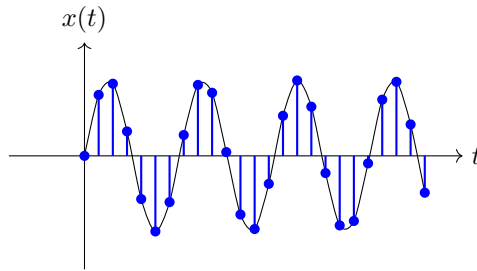


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

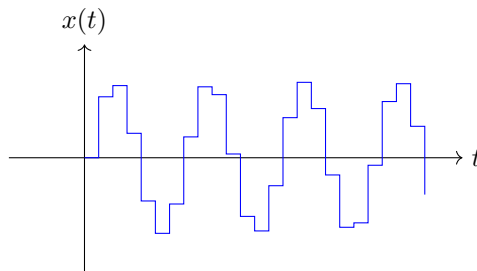


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni  $(x, y)$ .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale  $(x, y)^3$  per rappresentare ogni colore (R,G,B).

## 1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

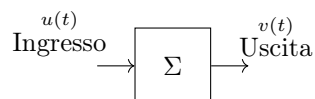


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

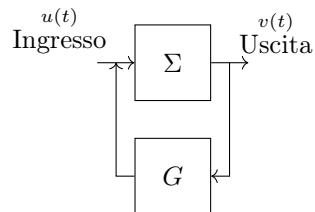


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

## 2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1.  $t, \tau, t_i$ : tempo continuo
2.  $k$ : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se  $v_1(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t)$  e  $v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_2(t)$  allora  $v_1(t) + v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t) + u_2(t)$ .
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.

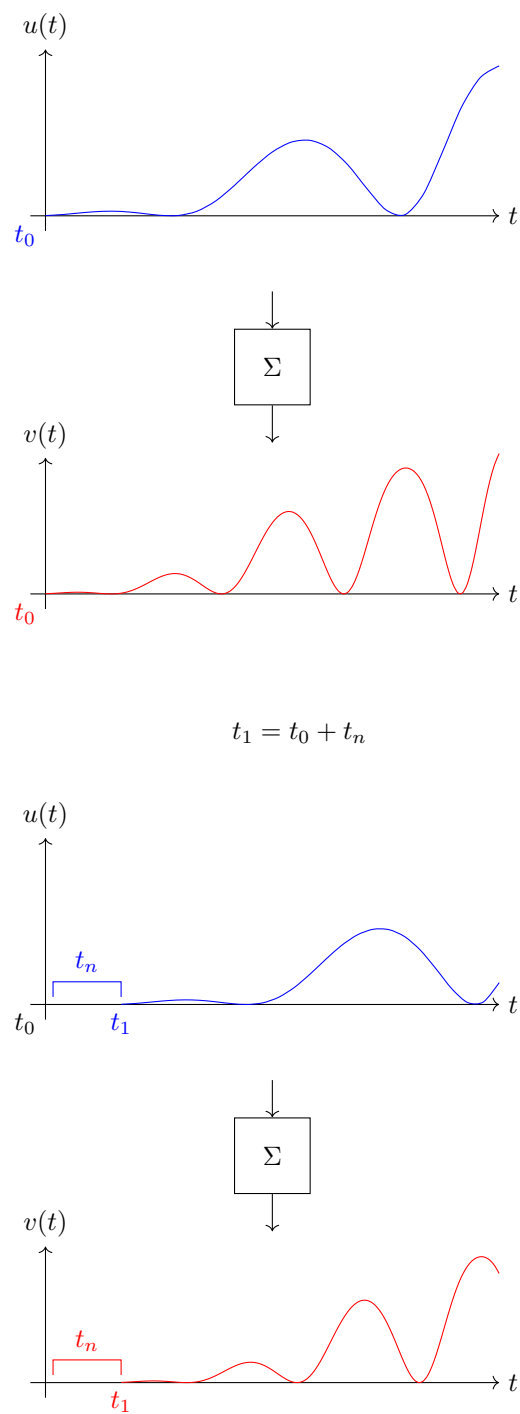


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

## 3 Sistemi

### 3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

### 3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:

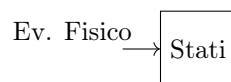


Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

### 3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

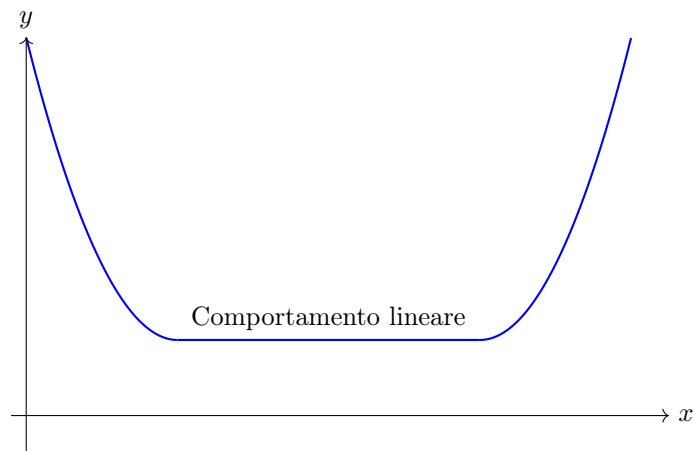


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

### 3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

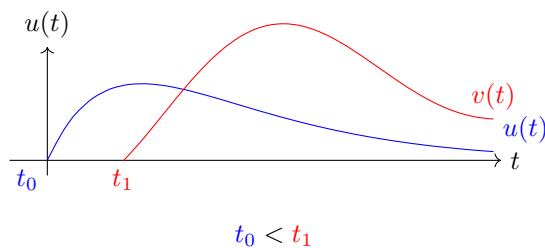


Figura 10: Esempio di causalità

### 3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.



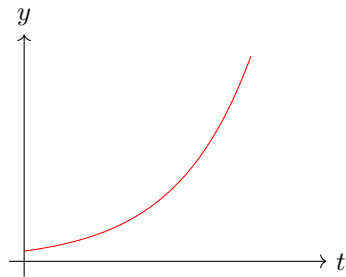


Figura 11: Sistema instabile

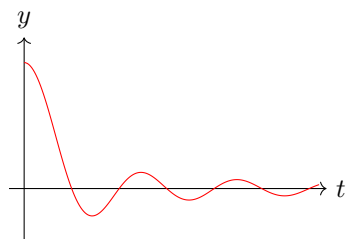


Figura 12: Sistema stabile

### 3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $M, N \in \mathbb{R}$  non per forza uguali

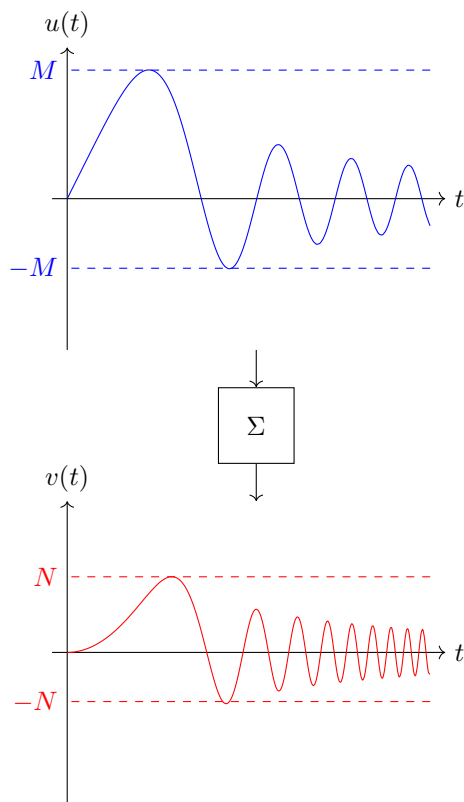


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

### 3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

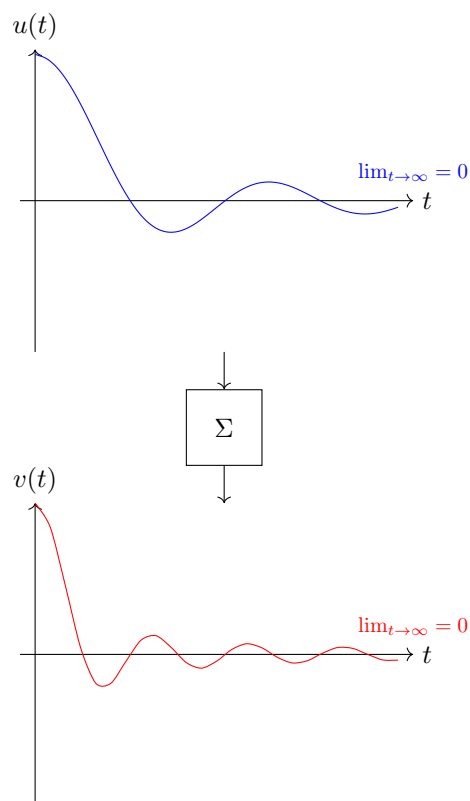


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

## 4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

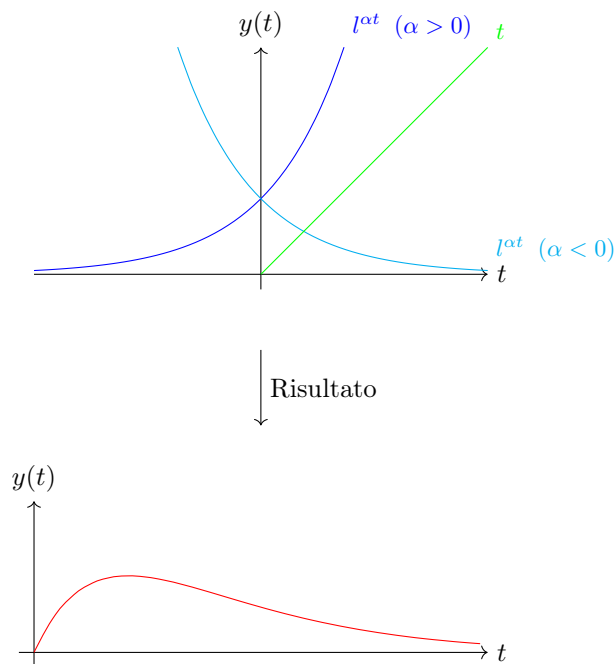


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con  $l = 1$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con  $\alpha < 0$  il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con  $l = 2$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome  $\alpha \in \mathbb{C}$  si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

$\lambda$  è la parte reale

$j\omega$  è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

**Definizione 4.1 (Complesso cognugato)**

A ogni numero complesso è associato un cognugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

## 5 Funzioni in C

### 5.1 Funzione a variabili complesse

**Definizione 5.1 (Funzione a variabile complessa)**

Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

**Definizione 5.2 (Punto interno)**

Un punto  $S_0$  appartiene a un intorno  $D(f) \subseteq \mathbb{C}$  è interno a  $D(f)$  se e solo se esiste un disco di raggio  $\rho \in \mathbb{R}$  centrato in  $S_0$  che è contenuto in  $D(f)$ .

**Definizione 5.3 (Insieme aperto)**

È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

Ad esempio:

- insieme  $\mathbb{C}$
- insieme  $\emptyset$
- i dischi in un punto  $S_0$ ,  $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- TODO
- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori

**5.2 Funzioni complesse**

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; K; n \in \mathbb{Z}$
- TODO

**5.3 Funzioni polinomiali**

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{s^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con  $n = 2$ :

$$a_0 s^0 + a_1 s^1 + a_2 s^2$$

Con  $n = 3$ :

$$a_0 s^0 + a_1 s^1 + a_2 s^2 + a_3 s^3$$

**Teorema 1 (Teorema fondamentale delle radici)** Ogni polinomio  $P(S)$  a coefficienti complessi di grado  $n > 0$  ha  $n$  **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{k=1}^r (s - s_k)^{u_k}$$

$s_k$  sono delle radici

$u_k$  sono le molteplicità delle radici

$a_n$  è il coefficiente del polinomio