

Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2024/2025

Indice

1	Concetti base	5
1.1	Tipi di segnali	5
1.2	Rappresentazione dei sistemi	6
2	Notazioni	7
3	Modello di sistemi	9
3.1	Approccio classico	9
3.2	Approccio moderno	9
3.3	Obsolescenza	9
3.4	Causalità	10
3.5	Stabilità	10
3.5.1	Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)	11
3.5.2	Stabilità Asintotica	12
4	Modello di segnali	13
5	Funzioni in \mathbb{C}	15
5.1	Funzione a variabili complesse	15
5.2	Funzioni complesse	17
5.3	Funzioni polinomiali	18
5.3.1	Risoluzione	18
6	Segnali	18
6.1	Segnali continui	18
6.1.1	Sinusoidale	19
6.1.2	Esponenziali reali	20
6.1.3	Esponenziali complessi	21
6.2	Segnali discreti	23
6.2.1	Sinusoidale	23
6.2.2	Esponenziali Reali	24
6.2.3	Esponenziali Complessi	25
6.3	Rappresentazione	27
6.4	Problema della periodicità	28
7	Segnali generalizzati	30
7.1	Segnali di impulso	30
7.1.1	Finestra rettangolare unitaria	32
7.1.2	Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario	32
7.2	Come si realizza un impulso	33
7.3	Derivata dell'impulso	34
7.4	Integrale dell'impulso	35
7.4.1	Funzione gradino	35
7.4.2	Funzione rampa	36
7.4.3	Funzione parabolica	36
7.4.4	A cosa servono i segnali canonici	37
7.5	Proprietà degli impulsi	37

8	Sistemi	39
8.1	Proprietà dei sistemi LTI	41
8.1.1	Linearità	41
8.1.2	Tempo invarianza	42
8.1.3	Causalità	42
8.1.4	Proprietà di stabilità asintotica	43
8.1.5	Proprietà di BIBO stabilità	44
8.2	Sistemi descritti da equazioni differenziali	45
8.2.1	Risoluzione	48
8.2.2	Risposta libera (o evoluzione libera)	49
8.2.3	Convergenza dei modi elementari	53
8.2.4	Dimostrazioni	54
8.2.5	Prodotto di convoluzione	56
8.2.6	Risposta impulsiva	59
8.2.7	Risposta forzata	63
8.2.8	Risposta totale	65
8.3	Stabilità in base alle radici	65
8.4	Risposta in frequenza	66
9	Trasformata unilatera di Laplace (TDL)	67
9.1	Proprietà della trasformata di Laplace	69
9.1.1	Linearità	69
9.1.2	Traslazione nel tempo (ritardo temporale)	70
9.1.3	Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)	70
9.1.4	Cambio di scala	71
9.1.5	Proprietà della derivata	71
9.1.6	Moltiplicazione per una funzione polinomiale	72
9.1.7	Integrazione nel tempo	72
9.1.8	Integrale nel dominio dei complessi	73
9.1.9	Teorema del valore iniziale	73
9.1.10	Teorema del valore finale	73
9.1.11	Convoluzione nel dominio del tempo	73
9.2	Trasformate notevoli	74
9.2.1	Impulso	74
9.2.2	Gradino	75
9.2.3	Esponenziale complesso causale	75
9.2.4	Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale	76
9.2.5	Funzione coseno	77
9.2.6	Funzione seno	78
9.3	Risoluzione di sistemi LTI causali	78
9.3.1	Stabilità di sistemi LTI causali	81
9.4	Antitrasformata di Laplace unilatera	84
10	Sistemi a blocchi	92
10.1	Tipi di sistemi	92
10.1.1	Sistema in serie	92
10.1.2	Sistema in parallelo	92
10.1.3	Sistema di retroazione	93

10.1.4	Nodi sommatore	93
10.2	Controlli	94
10.2.1	Nomenclatura	95
10.3	Controllori	95
10.3.1	Nomenclatura della forma canonica	97
10.4	Operazioni sui blocchi	98
10.4.1	Combinazione di blocchi in serie	99
10.4.2	Combinazione di blocchi in parallelo	99
10.4.3	Rimozione di un anello feedback	100
10.4.4	Riorganizzazione degli input nel nodo sommatore	101
10.4.5	Spostamento dei nodi somma prima del blocco	102
10.4.6	Spostamento dei nodi somma dopo il blocco	102
10.4.7	Spostamento di un nodo prima di un blocco	102
10.4.8	Spostamento di un nodo dopo un blocco	103
11	Diagrammi di flusso	107
11.1	Nomenclatura	107
11.2	Regole di trasformazione	108
11.2.1	Regola dell'addizione	108
11.2.2	Regola della trasmissione	108
11.2.3	Regola della moltiplicazione	109
11.3	Passaggio dallo schema a blocchi al diagramma di flusso	109
12	Diagrammi di Bode	117
12.1	Motivo delle sinusoidi	117
12.2	Rappresentazione del diagramma di Bode	119
12.2.1	Risposta in frequenza	122
12.2.2	Logaritmo di un numero complesso	126
12.2.3	Operazioni tra numeri complessi	126
12.3	Esempi	127
12.3.1	Forma di Bode	127
12.3.2	Disegno del diagramma di Bode	132
12.3.3	Termine costante	132
12.3.4	Zero o polo nullo	133
12.3.5	Zero o polo reale	135
12.3.6	Polo o zero complesso coniugato	139
12.3.7	Esempio	142
12.4	Comportamento totale di Bode	147
13	Trasformata di Fourier	150
13.1	Sinusoidi come vettori	150
13.1.1	Segnali periodici	151
13.1.2	Segnali non periodici	151
13.2	Serie di Fourier	151
13.2.1	Segnali simmetrici e asimmetrici	154
13.2.2	Serie di Fourier troncata	156
13.3	Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier	158
13.3.1	Sviluppo dei coefficienti di Fourier	161
13.3.2	Trasformata di Fourier di un segnale periodico	163
13.3.3	Come usare la trasformata di Fourier	163

13.4	Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier	165
13.5	Trasformate notevoli	166
13.6	Proprietà della trasformata di Fourier	170
13.7	Campionamento e replicazione	174
13.7.1	Treno campionatore/impulsi	176
13.7.2	Campionamento	177
13.7.3	Replicazione	177
13.7.4	Teorema del campionamento ideale di Shannon	178
14	Sistemi a tempo discreto	180
14.1	Proprietà	180
14.2	Modellare un sistema a tempo discreto	181
14.2.1	Risoluzione di sistemi a tempo discreto	182

1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

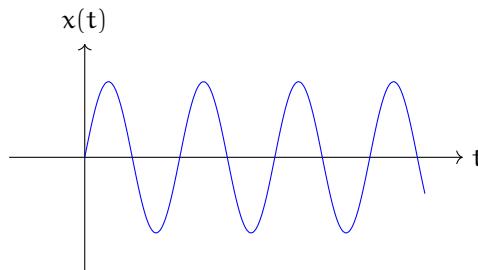


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

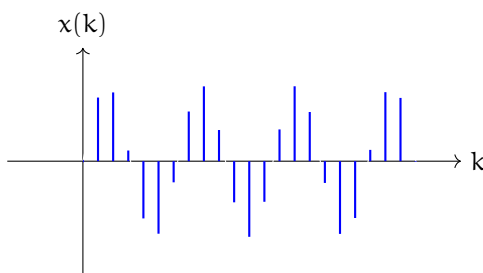


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

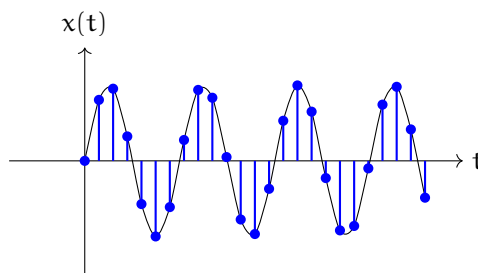


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

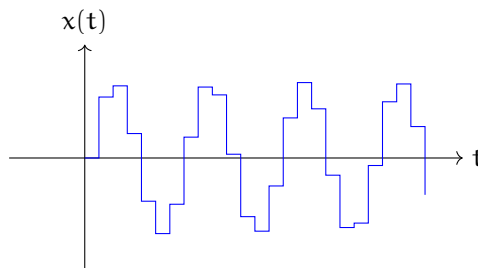


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni (x, y) .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale $(x, y)^3$ per rappresentare ogni colore (R,G,B).

1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

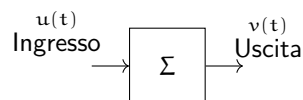


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

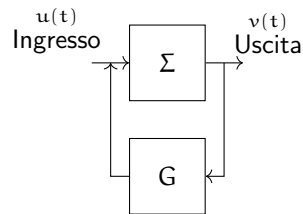


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

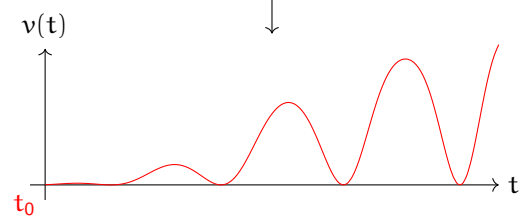
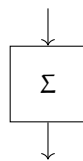
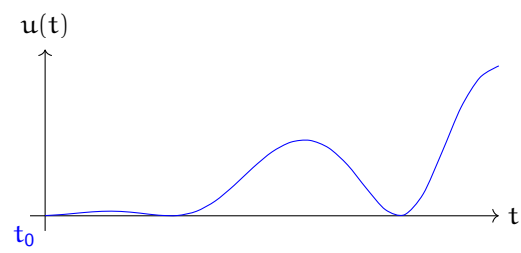
$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1. t, τ, t_i : tempo continuo
2. k : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se $v_1(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t)$ e $v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_2(t)$ allora $v_1(t) + v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t) + u_2(t)$.
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.



$$t_1 = t_0 + t_n$$

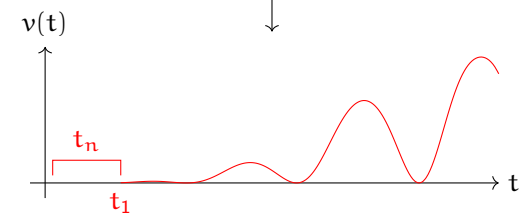
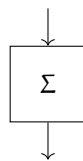
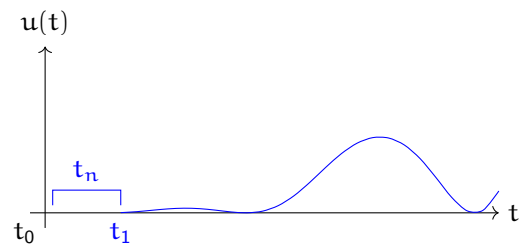


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

3 Modello di sistemi

3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:



Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

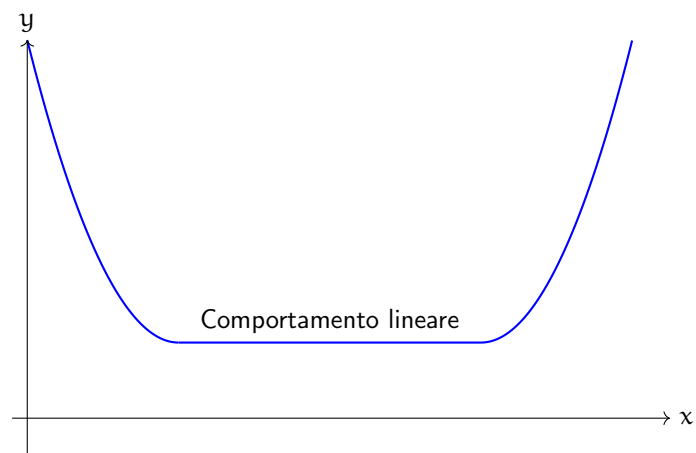


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

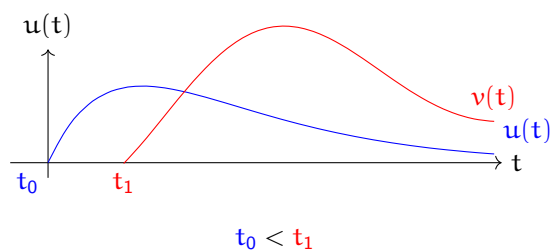


Figura 10: Esempio di causalità

3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

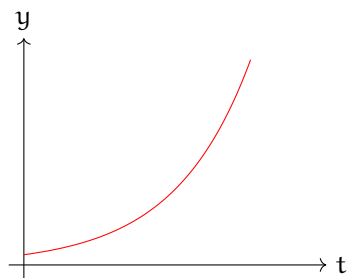


Figura 11: Sistema instabile

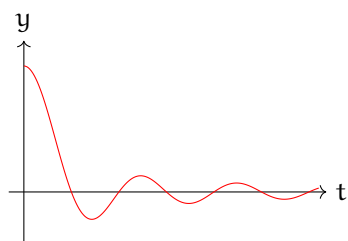


Figura 12: Sistema stabile

Ci sono 2 tipi di stabilità:

- **Stabilità asintotica** $\rightarrow \forall i \quad \text{Re}\{\lambda_i\} < 0$
- **Stabilità BIBO** verificare che $h(t)$ sia integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < +\infty$$

3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

\Downarrow

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con $M, N \in \mathbb{R}$ non per forza uguali

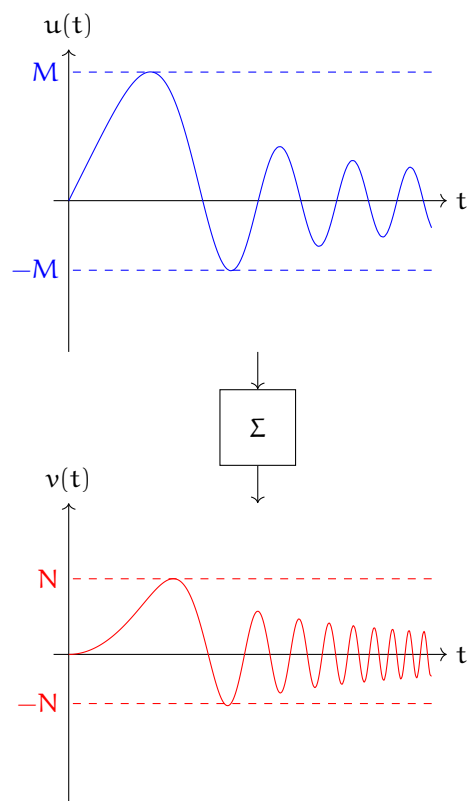


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

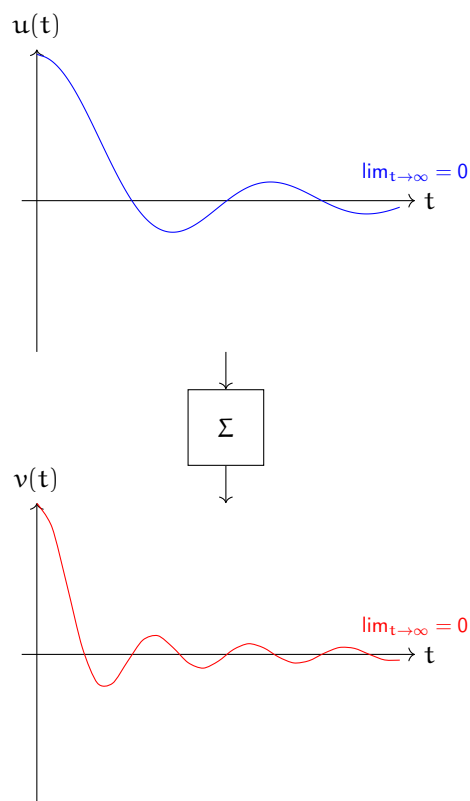


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

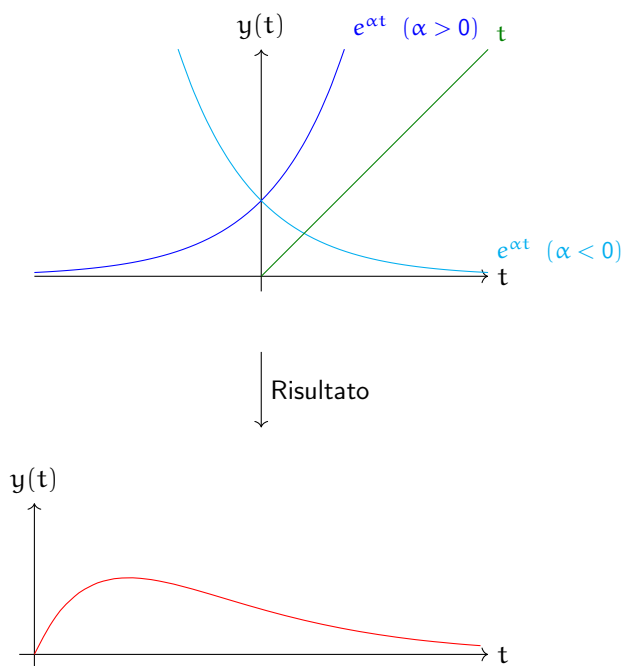


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con $l = 1$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con $\alpha < 0$ il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con $l = 2$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome $\alpha \in \mathbb{C}$ si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

λ è la parte reale

$j\omega$ è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Definizione 4.1 (Complesso coniugato). A ogni numero complesso è associato un coniugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

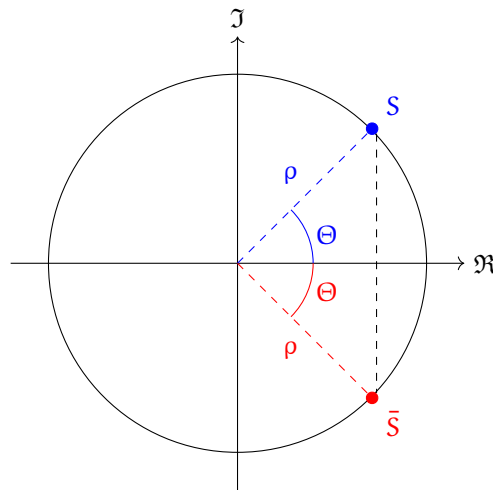


Figura 16: Circonferenza di proiezione

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

5 Funzioni in \mathbb{C}

5.1 Funzione a variabili complesse

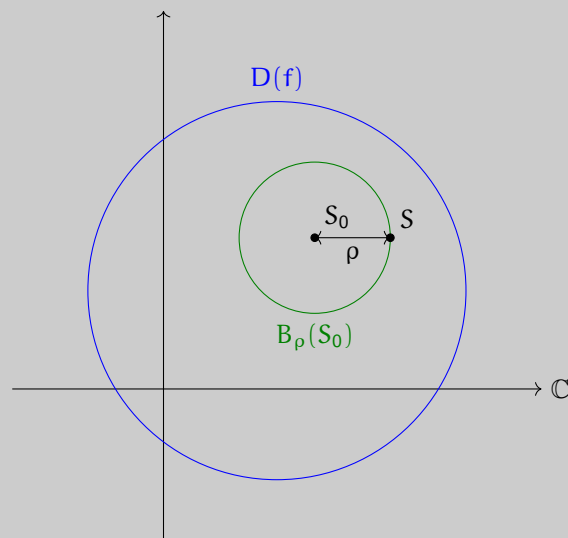
Definizione 5.1 (Funzione a variabile complessa). Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

Definizione 5.2 (Punto interno). Un punto S_0 appartenente a un intorno $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ è interno a $D(f)$ se e solo se esiste un disco $B_\rho(S_0)$ di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$ centrato in S_0 tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi $D(f)$ è un dominio e $B_\rho(S_0)$ è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$

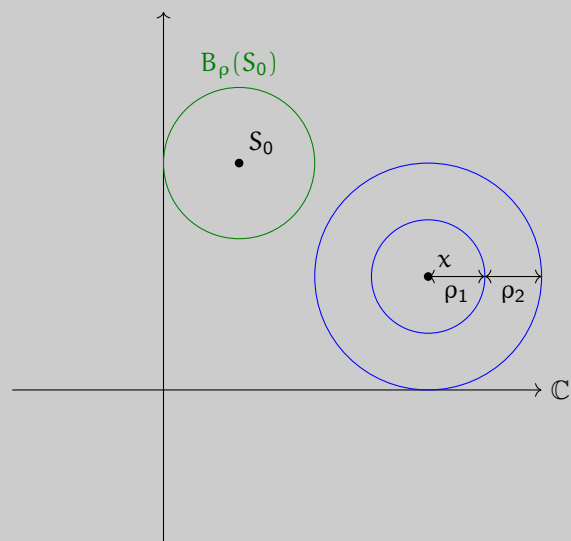


Definizione 5.3 (Insieme aperto). È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

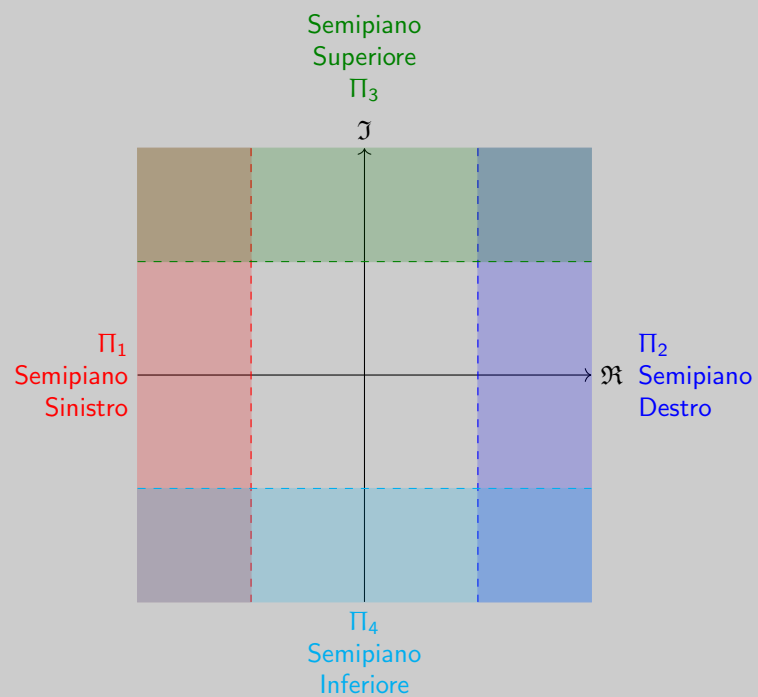
Ad esempio:

- insieme \mathbb{C}
- insieme \emptyset
- i dischi in un punto S_0 , $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto x ,

$$\{S \in \mathbb{C}, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$



- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$

- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \text{Re}(S) + j \text{Im}(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad k, n \in \mathbb{Z}$ (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad S, S_0 \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{Z}$ (Serie di potenze)

5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con $n = 2$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con $n = 3$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

Teorema 5.1 (Teorema fondamentale delle radici). Ogni polinomio $P(S)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^r (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:

s_r sono delle radici

μ_r sono le molteplicità delle radici

a_n è il coefficiente del polinomio

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$$

6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

6.1 Segnali continui

$$t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- ω è la frequenza $f = \frac{1}{T}$ (T = periodo)
- ϕ è la fase

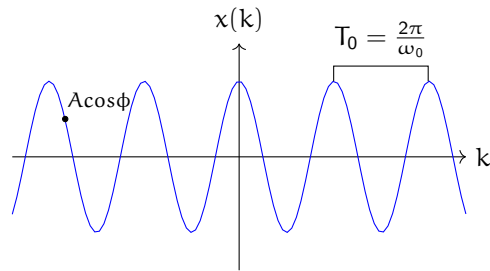


Figura 17: Funzione sinusoidale

• Periodico

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

• Shift temporale equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\omega_0(t - t_0)] = A \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta \phi})$$

$$A \cos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale assume la seguente forma:

$$A = \cos(\omega_0 t)$$

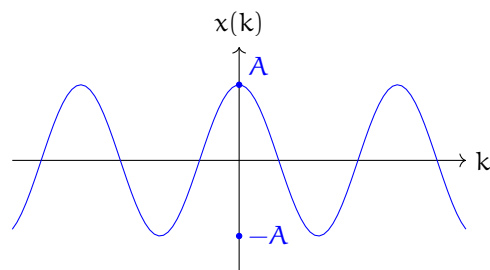


Figura 18: Funzione coseno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A\sin(\omega_0 t) \\ A\cos(\omega_0(t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$

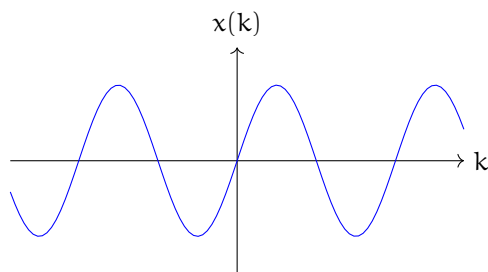


Figura 19: Funzione seno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

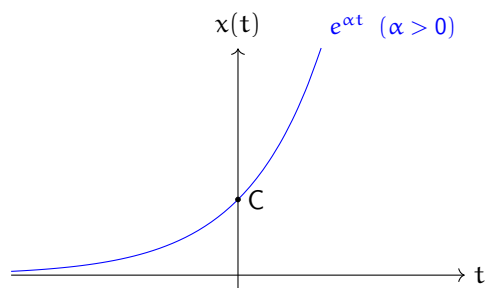


Figura 20: Esempio di segnale

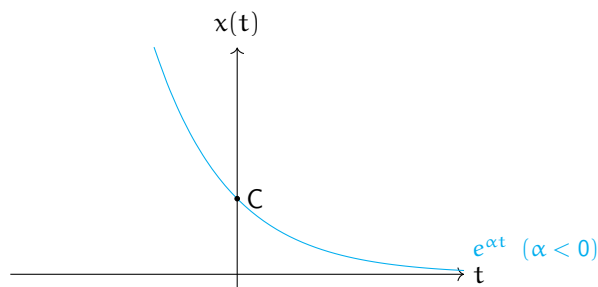


Figura 21: Esempio di segnale

- Shift Temporale

$$C e^{\alpha(t+t_0)} = C e^{\alpha t} \cdot \underbrace{C e^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = C e^{\alpha t}$$

$$C = |c| e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_o \text{ (cartesiana)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_o)t} = \\ &= |c| e^{rt} \cdot e^{j(\omega_o t + \Theta)} \text{ (Eulero)} \end{aligned}$$

Definizione 6.1 (Eulero). La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_o t + \Theta)} = \cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta)$$

$$x(t) = |c| e^{rt} \cdot (\cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta))$$

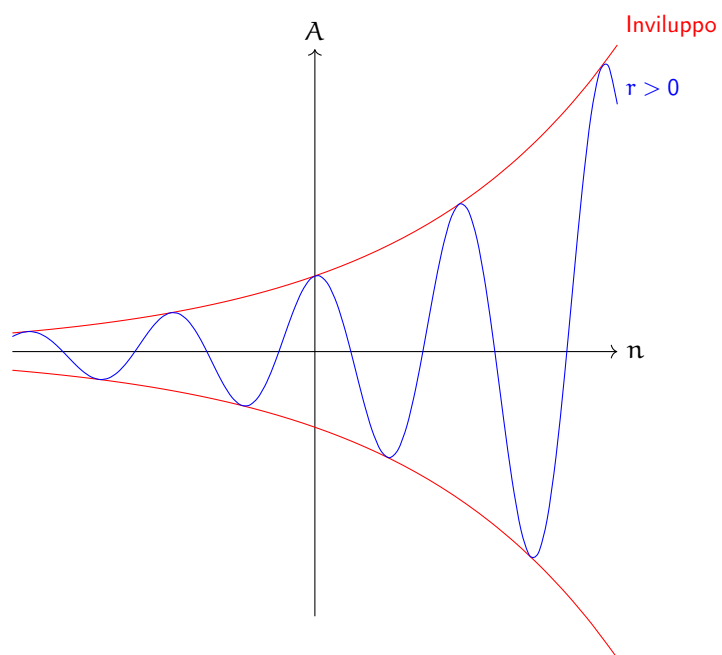


Figura 22: Esponenziale sinusoidale continuo con $r > 0$

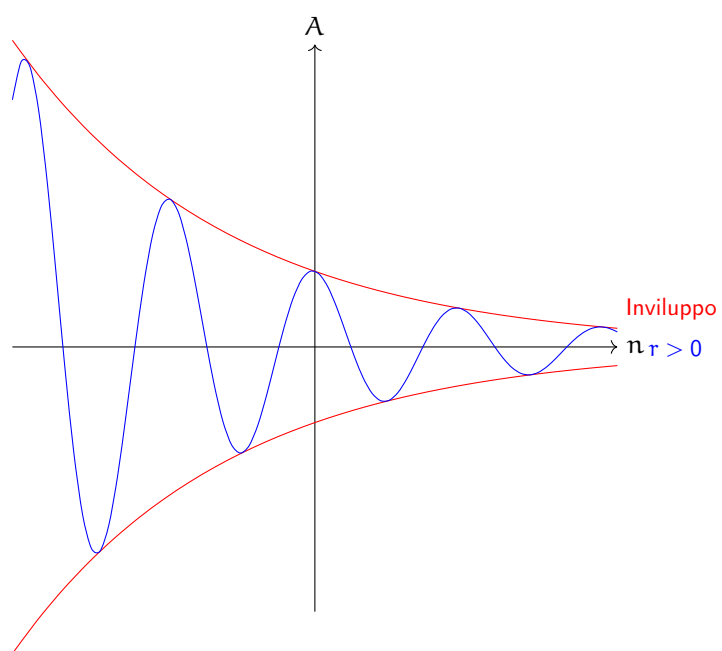


Figura 23: Esponenziale sinusoidale continuo con $r < 0$

6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- Ω_0 è la frequenza $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$
- ϕ è la fase

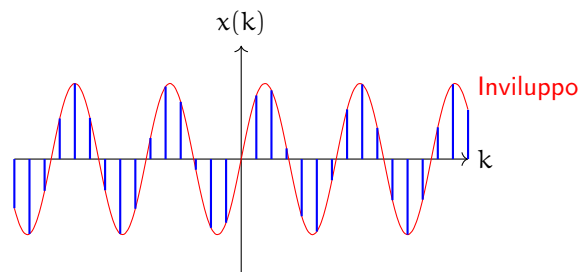


Figura 24: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] = A \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta \phi})$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] \stackrel{?}{=} A \cos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove ϕ è il rapporto tra ϕ e Ω_0 è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

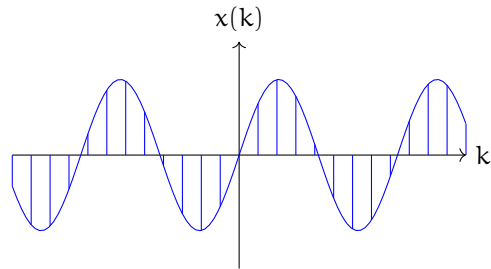


Figura 25: Calcolo del cambio di fase

Esempio 6.1.

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m = 1)$$

6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^\beta; \quad C, \alpha \in \mathbb{R}$$

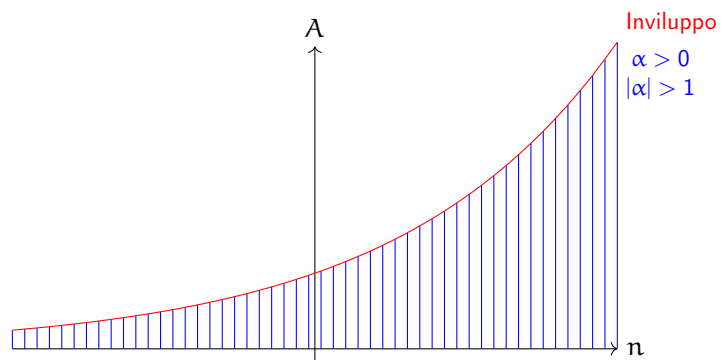


Figura 26: Esponenziale reale con $\alpha > 0$ $|\alpha| > 1$

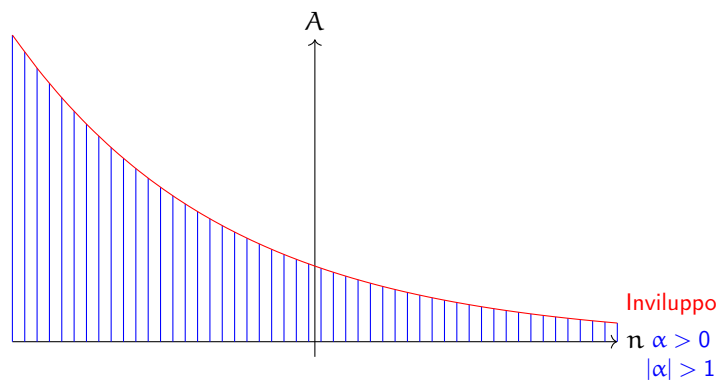


Figura 27: Esponenziale reale con $\alpha > 0$ $|\alpha| < 1$

6.2.3 Esponenziali Complessi

$$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

dove

$$C = |C|e^{j\Theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = |C|e^{j\Theta} \cdot (|\alpha|e^{j\omega_0})^n =$$

$$|C| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \Theta)}$$

Usando la formula di Eulero:

$$x[n] = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot (\cos(\omega_0 n + \Theta) + j\sin(\omega_0 n + \Theta))$$

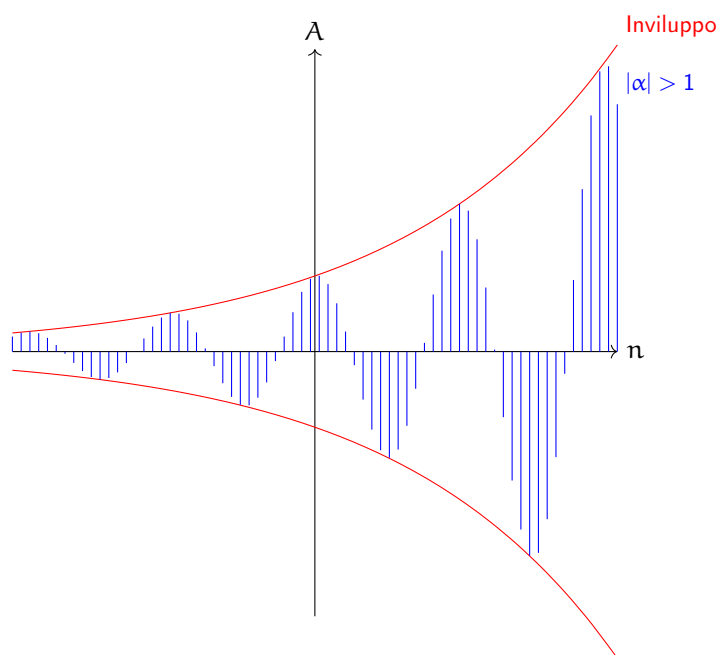


Figura 28: Esponenziale sinusoidale con $|\alpha| > 1$

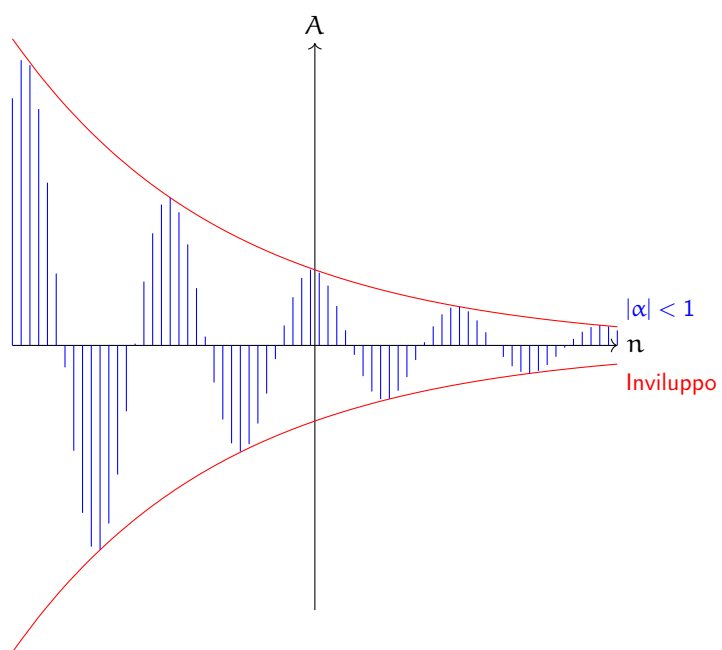


Figura 29: Esponenziale sinusoidale con $|\alpha| < 1$

6.3 Rappresentazione

I segnali che appartengono all'insieme dei complessi sono tridimensionali e sono rappresentati in 2 assi cartesiani diversi, che mostrano lo stesso segnale, ma da 2 punti di vista differenti. Il segnale viene generato da un punto che continua a girare periodicamente su una circonferenza proiettando su entrambi gli assi il suo valore.

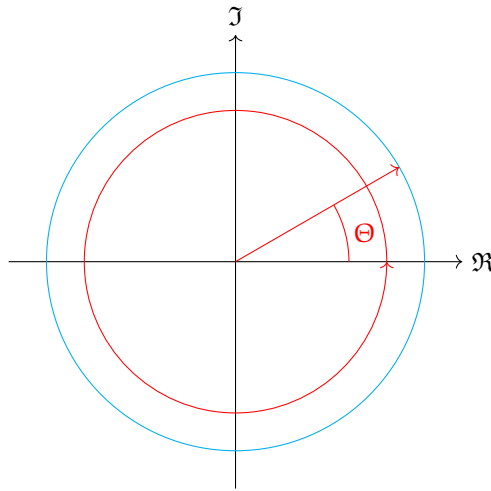


Figura 30: Circonferenza di proiezione

La proiezione sull'asse dei reali è la parte reale del segnale:

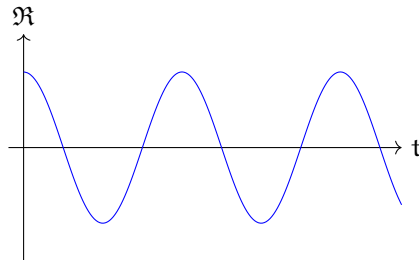


Figura 31: Proiezione su asse reale

La proiezione sull'asse degli immaginari è la parte immaginaria del segnale ed è traslata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla parte reale:

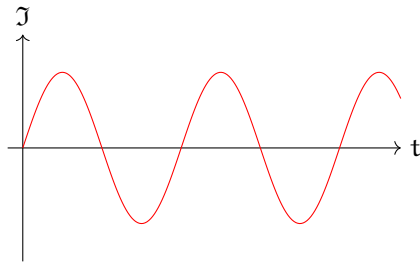


Figura 32: Proiezione su asse immaginario

In 3 dimensioni diventa:

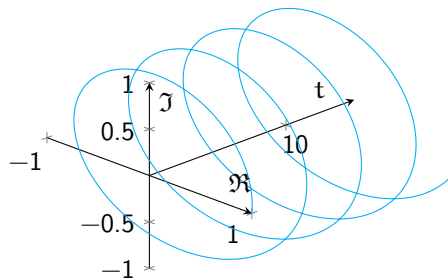


Figura 33: Circonferenza di proiezione in 3D

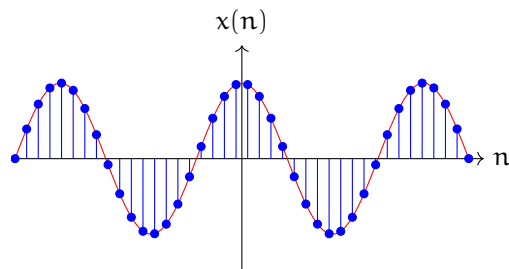
6.4 Problema della periodicità

Il problema della periodicità consiste nel fatto che alcuni segnali possono sembrare periodici anche se non lo sono. Ad esempio:

Esempio 6.2.

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}} m = 12m$$

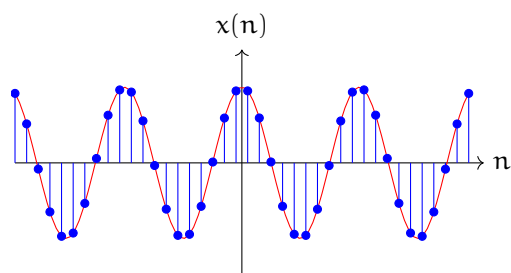
Con $m = 1$:

$$T_0 = 12 \cdot 1 = 12 \in \mathbb{Z}$$

Quindi il segnale è periodico.

Esempio 6.3.

$$\Omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$
$$\phi = 0$$



Il periodo è:

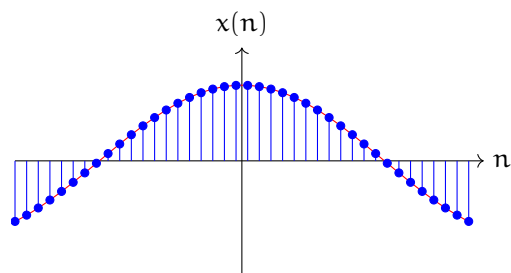
$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} m = \frac{31}{4} m$$

Con $m = 4$:

$$T_0 = \frac{31}{4} \cdot 4 = 31 \in \mathbb{Z}$$

Esempio 6.4.

$$\Omega_0 = \frac{1}{6}$$
$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

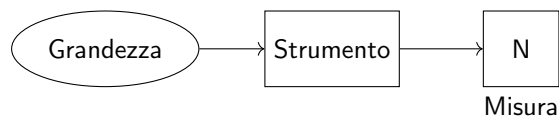
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} m = 2\pi \cdot 6m$$

Non esiste $m \in \mathbb{Z}$ che mi tolga π dalla formula del periodo, quindi il segnale non è periodico anche se lo sembra

7 Segnali generalizzati

Ci sono alcune grandezze che non si possono facilmente calcolare con i segnali tradizionali, quindi analiticamente, ma solo con strumenti appositi.

Esempio 7.1. La tensione della corrente elettrica



Per misurare la tensione si usa il multimetro. Queste sono grandezze definite all'interno di un'operazione integrale.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma(t)}_{\text{Grandezza}} \cdot \underbrace{\phi(t)}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{N}_{\text{Misura}}$$

7.1 Segnali di impulso

- **Impulso di Dirac** È una funzione con supporto **infinitesimo**, altezza **infinita** e area = 1

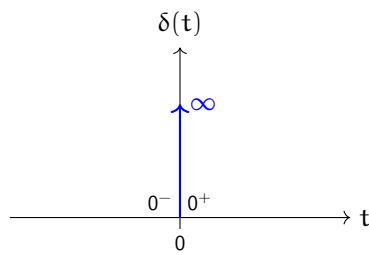


Figura 34: Impulso di Dirac

È definita in $[0^-, 0^+]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{\text{Impulso}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{1}_{\text{Valore}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Impulso unitario**

Matematicamente non si usa l'impulso di Dirac, ma l'**impulso unitario**.

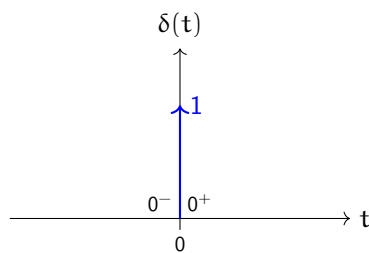


Figura 35: Impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In natura, il segnale che si avvicina di più al segnale di impulso è il seguente:

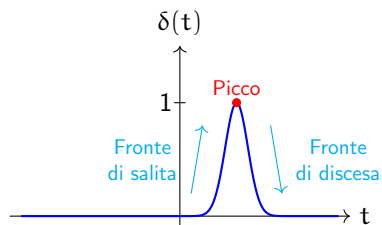


Figura 36: Segnale che si avvicina all'impulso

In ogni caso, non si avvicina mai all'impulso di Dirac, perchè ha sempre un fronte di salita e discesa, quindi non è istantaneo.

7.1.1 Finestra rettangolare unitaria

È una funzione che definisce un rettangolo di altezza $A = 1$ e larghezza T .

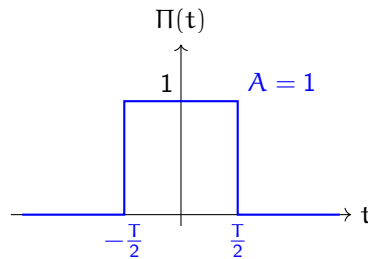


Figura 37: Finestra rettangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se questo segnale è ripetuto nel tempo si chiama **onda quadra**.

Alcune applicazioni possono essere:

- Gestione di motori elettrici
- Equalizzazione di audio

7.1.2 Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario

È una funzione che definisce un triangolo di altezza $A = 1$ e larghezza T .

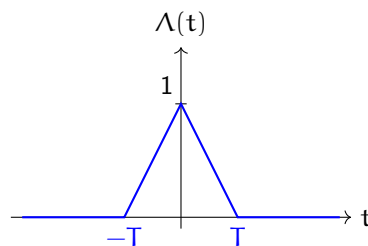


Figura 38: Finestra triangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{se } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le applicazioni sono le stesse del rettangolo, ma con una forma più armonica (smooth). Si possono anche generare segnali sinusoidali.

7.2 Come si realizza un impulso

- Rettangolo:

L'impulso si definisce come una successione di funzioni per cui vengono cambiati dei valori:

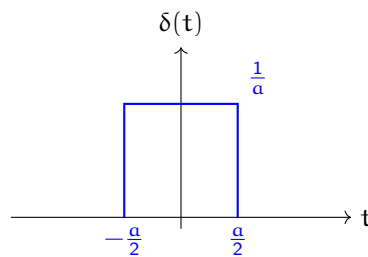


Figura 39: Impulso rettangolare

L'obiettivo è raddoppiare l'altezza e dimezzare la larghezza, mantenendo l'area uguale.

Calcoliamo l'area di questa funzione:

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

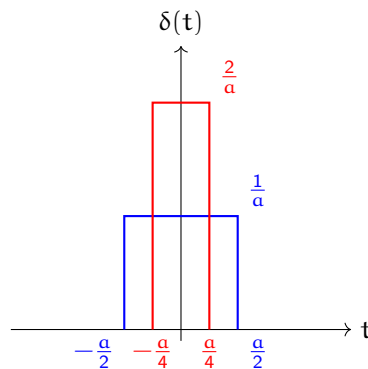


Figura 40: Impulsi rettangolari

E calcoliamo di nuovo l'area

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} = \frac{2a}{4} \cdot \frac{2}{a} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

- Triangolo:

Facciamo la stessa cosa con il triangolo:

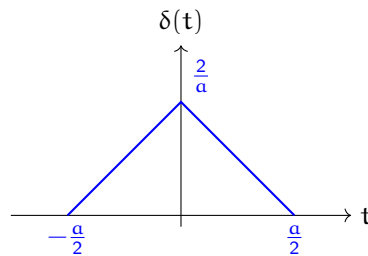


Figura 41: Impulso triangolare

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

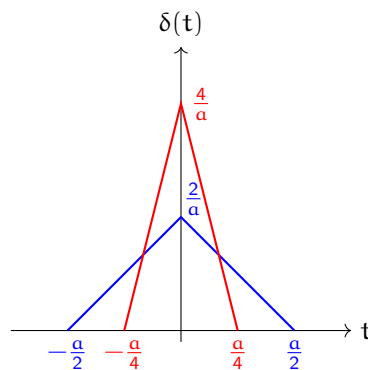


Figura 42: Impulsi triangolari

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

7.3 Derivata dell'impulso

Considerando l'impulso come successione di triangoli abbiamo che all'infinito ci sarà un fronte di salita e discesa, quindi la derivata saranno degli impulsi positivi e negativi.

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \dot{\delta}(t) = \delta'(t)$$

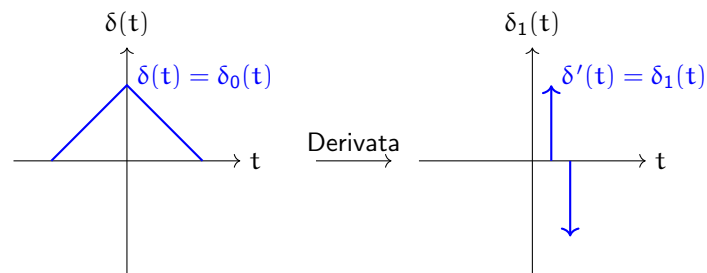


Figura 43: Derivata del segnale triangolare

7.4 Integrale dell'impulso

I segnali polinomiali (o segnali canonici) sono definiti come l'integrale di un impulso. È definito come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int \delta_0(t) dt = \delta_{-1}(t)$$

7.4.1 Funzione gradino

Si ottiene integrando una volta:

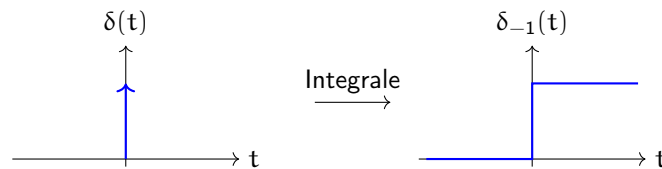


Figura 44: Funzione gradino

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Moltiplicare un segnale per il gradino unitario permette di ottenere la parte positiva del segnale:

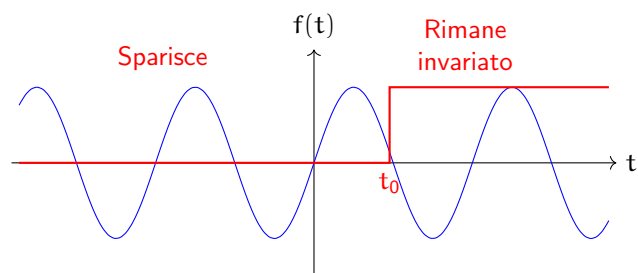


Figura 45: Moltiplicazione per gradino unitario

Si ottiene:

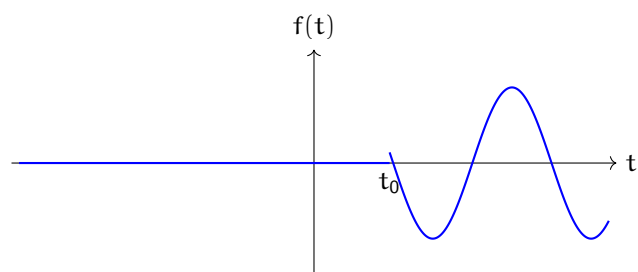


Figura 46: Risultato della moltiplicazione

$$f(t) \cdot \delta_{-1}(t) = f_1(t) \text{ (che è causale)}$$

La funzione del gradino è anche nota come **funzione di Heaviside**.

7.4.2 Funzione rampa

Si ottiene integrando due volte:

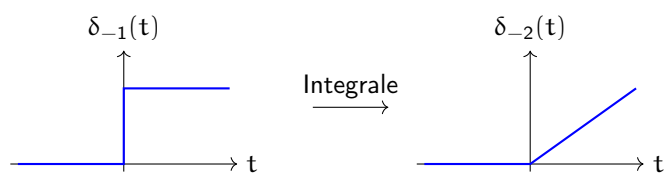


Figura 47: Funzione rampa

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.4.3 Funzione parabolica

Si ottiene integrando tre volte:

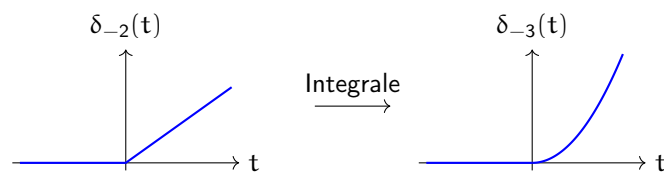


Figura 48: Funzione rampa

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.4.4 A cosa servono i segnali canonici

Non si sa cosa contengono i sistemi LTI che si analizzano, perchè si gestiscono solo gli input e gli output.

Di solito si cerca di dare il segnale gradino al sistema e si guarda qual'è la risposta del sistema a questo segnale. Ad esempio:

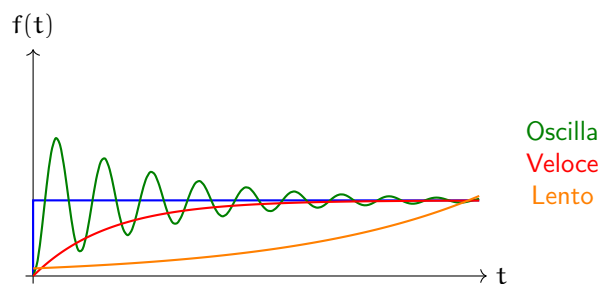


Figura 49: Esempi di risposta di un sistema

Esempio 7.2. Il sistema rosso cresce lentamente, ma ad un certo punto arriva a 1, mentre quello arancione è un sistema più lento.

Quello verde è più veloce, ma non arriva mai a regime perchè continua a oscillare e quindi non è asintoticamente stabile, ma potrebbe essere BIBO stabile.

- Per una luce il sistema verde potrebbe andare bene se l'oscillazione non è troppa
- Per un sistema frenante il sistema arancione potrebbe essere troppo lento

7.5 Proprietà degli impulsi

È un segnale ideale (canonico) centrato in 0 e definito in $[0^-, 0^1]$ con altezza 1.

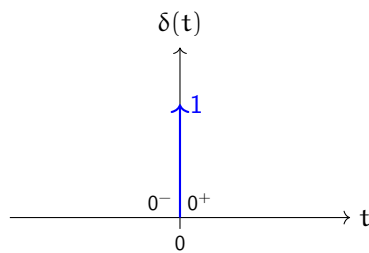


Figura 50: Impulso unitario

- **Pari:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Area unitaria**

Se

$$0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Allora

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1$$

Altrimenti

$$\int_a^b \delta(t) dt = 0$$

Cioè se l'intervallo contiene lo 0, l'area è 1, altrimenti è 0.

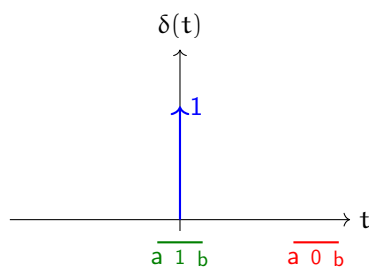


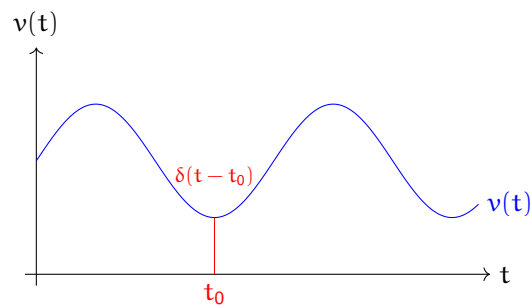
Figura 51: Area dell'impulso

- **Proprietà del campionamento o riproducibilità**

Se $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $t_0 \in \mathbb{R}$, allora:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Se prendo un impulso traslato in t_0 e lo moltiplico per una funzione ottengo il valore della funzione in quel punto.



Per riuscire a passare dal continuo al discreto si continua a moltiplicare la funzione per un impulso traslato in t_0 e si ottiene il valore della funzione in quel punto.

Questa formula può essere riscritta come:

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau$$

Il valore di una funzione in t_0 l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in t_0 .

8 Sistemi

Un sistema è un modello matematico o una formulizzazione di un processo o di un fenomeno fisico che permette di trasformare un input in un output. Ci sono più tipi di sistemi:

- **Sistemi SISO** (Single Input Single Output): Sono sistemi che hanno un solo input e un solo output.
- **Sistemi dinamici**: Sono sistemi che "ricordano" l'input precedente, quindi l'output dipende dall'input attuale e da quello precedente.

Esempio 8.1. Un esempio di sistema fisico stabile è il pendolo:

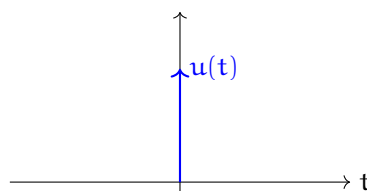


Figura 52: Input

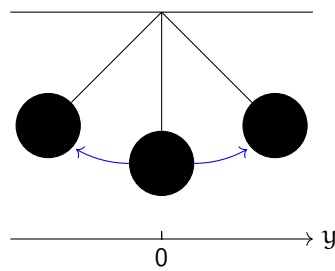


Figura 53: Sistema

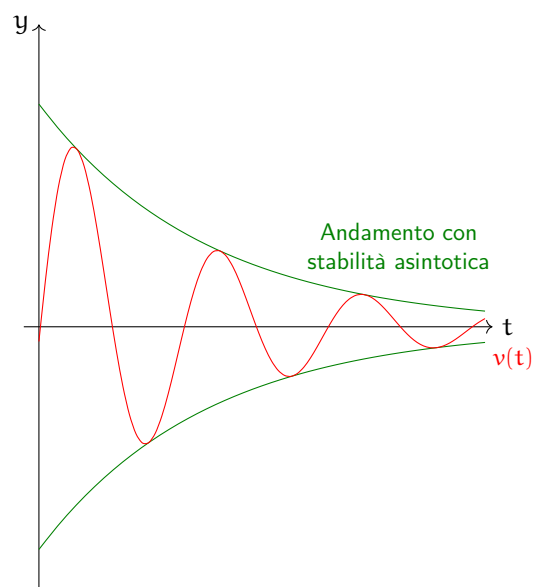


Figura 54: Output

Esempio 8.2. Un esempio di sistema fisico instabile è il seguente:

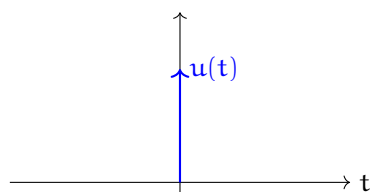


Figura 55: Input

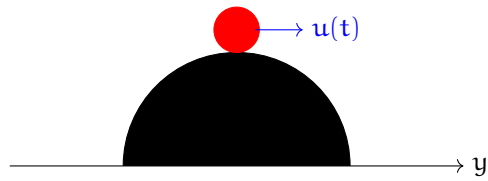


Figura 56: Sistema

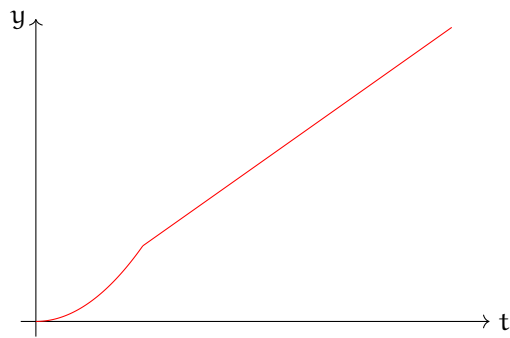


Figura 57: Output

8.1 Proprietà dei sistemi LTI

Definizione 8.1 (Sistema LTI). Un sistema a tempo continuo per cui valgono le proprietà di:

- Linearità
- Tempo invarianza
- Causalità

si definisce **Sistema Lineare Tempo Invariante (LTI)**.

8.1.1 Linearità

Se ho un sistema con un primo input $u_1(t)$ e un secondo input $u_2(t)$ che insieme fanno un terzo input allora l'output del sistema sarà la combinazione lineare degli output dei due input.

$$\underbrace{\underbrace{a u_1(t)}_{\text{Input 1}} + \underbrace{b u_2(t)}_{\text{Input 2}}}_{\text{Input 3}} \rightarrow \text{Sistema} \rightarrow \underbrace{\underbrace{a \cdot y_1(t)}_{\text{Output 1}} + \underbrace{b \cdot y_2(t)}_{\text{Output 2}}}_{\text{Output 3}}$$

8.1.2 Tempo invarianza

Un sistema a tempo continuo è tempo invariante se e solo se:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

8.1.3 Causalità

Un sistema si dice causale se e solo se l'uscita all'istante τ dipende soltanto dall'ingresso per $t \leq \tau$ ($v(\tau)$ dipende solo da $u(t)$ $t \leq \tau$ e non dipende dai valori successivi). La causa non precede mai l'effetto.

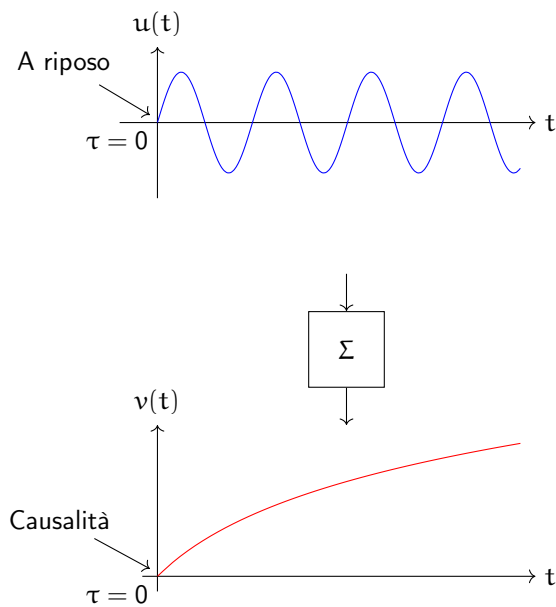


Figura 58: Sistema a riposo

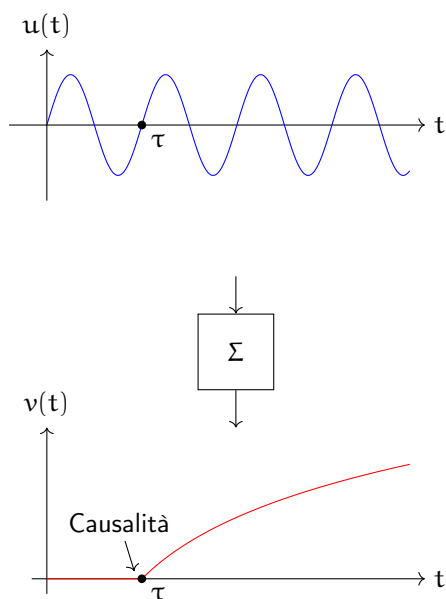


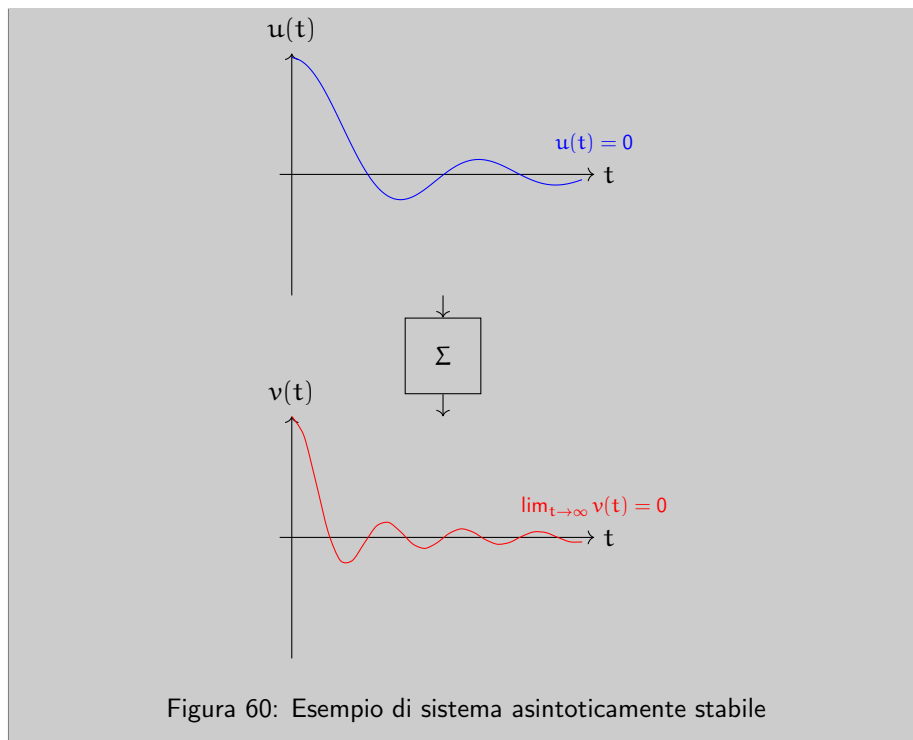
Figura 59: Sistema non a riposo

Per comodità si considerano solo i sistemi a riposo ($\tau = 0$).

8.1.4 Proprietà di stabilità asintotica

Definizione 8.2. Un sistema si dice **asintoticamente stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ t.c } u(\tau) = 0, \quad \forall t \leq \tau \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$



Per capire se un sistema è asintoticamente stabile bisogna verificare se ogni soluzione del sistema è minore di 0:

$$\forall i \quad \text{Re}(\lambda_i) < 0$$

8.1.5 Proprietà di BIBO stabilità

Definizione 8.3. Un sistema si dice **BIBO stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R}, \text{ e } U_u \in \mathbb{R} \text{ t.c se } |u(t)| \leq U_u, \forall t \leq \tau$$

$$\Downarrow$$

$$\exists U_v > 0 \text{ t.c } |v(t)| \leq U_v, \forall t \geq \tau$$

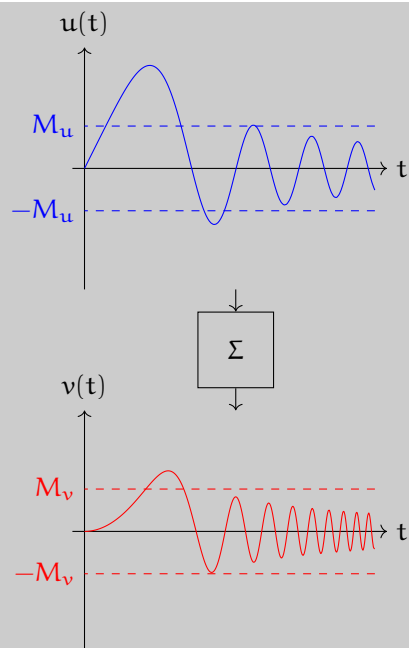


Figura 61: Esempio di sistema stabile BIBO

Ogni sistema asintoticamente stabile è anche BIBO stabile, ma non il contrario.

Per capire se un sistema è BIBO stabile si deve verificare che $h(t)$ (risposta all'impulso) sia assolutamente integrabile e che abbia un valore finito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

8.2 Sistemi descritti da equazioni differenziali

I sistemi che si analizzano in questo corso sono solo un sottoinsieme:

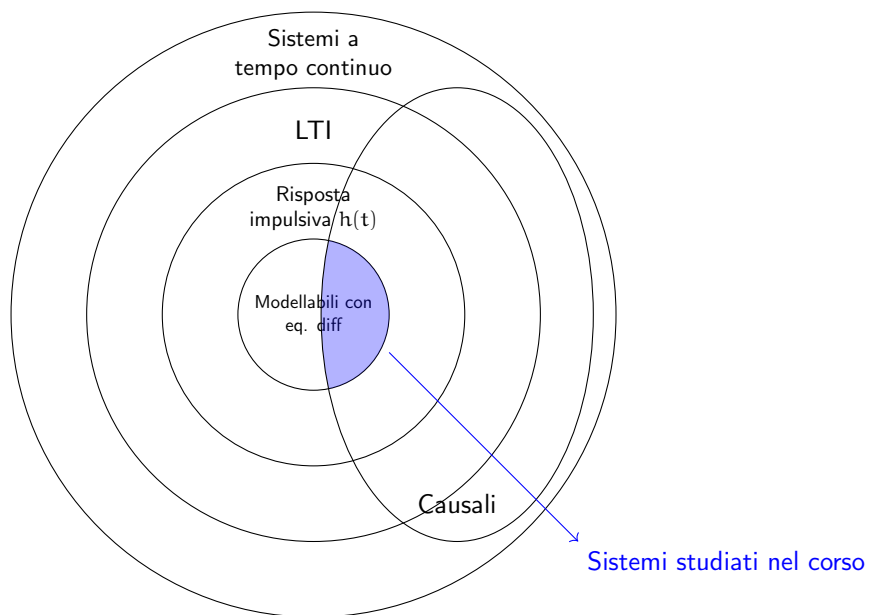


Figura 62: Sistemi LTI

Esempio 8.3. Prendiamo come esempio un sistema massa molla smorzatore:

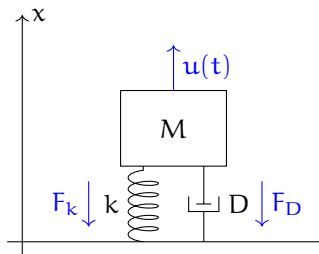


Figura 63: Sistema massa molla smorzatore

Andiamo a vedere le forze in gioco:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$x(t)$ è lo spostamento nel tempo

$$M \cdot a(t) = u(t) - F_k - F_D$$

che equivale a

$$M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = u(t) - k \cdot x(t) - D \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\underbrace{M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + D \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + k \cdot x(t)}_{\text{Segnale di uscita}} = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale di ingresso}}$$

*Il simbolo ∂ indica la derivata parziale. Una derivata parziale è una derivata rispetto ad una funzione a più variabili.

Esempio 8.4. Un altro esempio è il sistema RL (Resistenza Induttanza):

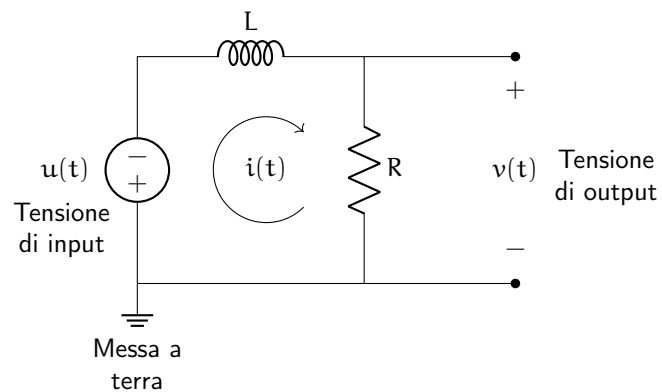


Figura 64: Sistema RL

Possiamo descrivere l'input del sistema come:

$$u(t) = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + \underbrace{R \cdot i(t)}_{v(t)}$$

Possiamo descrivere l'output come:

$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\text{Legge di Ohm}} i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

Usando la legge di Ohm ($V = Ri$) possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial v(t)}{\partial t}}_{\text{Segnale d'uscita}} + v(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale d'ingresso}}$$

Quindi in generale possiamo scrivere un sistema LTI come:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t} + a_{n-1} \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} + \dots + a_1 \frac{\partial v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t} + b_{m-1} \frac{\partial^{(m-1)} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Dove:

- $u(t)$ è il segnale di ingresso
- $v(t)$ è il segnale di uscita
- $a_n, b_m \neq 0 \in \mathbb{R}$

Tutto ciò si può riscrivere come:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t} \quad (1)$$

n e m sono gli ordini delle equazioni differenziali con $n \geq m$.

- Se $n > m$ il sistema è detto **strettamente proprio**
- Se $n \geq m$ il sistema è detto **proprio**

Ora possiamo inserire all'interno dei sistemi l'equazione differenziale:

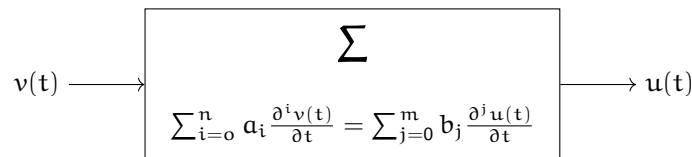


Figura 65: Contenuto del sistema

Esempio 8.5. Un esempio di sistema descritto da un'equazione differenziale è il seguente e riprende il sistema massa molla smorzatore dell'esempio 8.3:

$$\underbrace{M}_{\alpha_2} x''(t) + \underbrace{D}_{\alpha_1} x'(t) + \underbrace{K}_{\alpha_0} x(t) = \underbrace{1}_{b_0} u(t)$$

8.2.1 Risoluzione

Un sistema descritto da un'equazione differenziale non ha una sola soluzione, a meno che non vengano imposte n **condizioni iniziali**.

$$\left. v(t) \right|_{t=0^-} \quad \left. \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-}$$

Figura 66: Derivata di ordine $n - 1$ di $v(t)$ calcolata al tempo $t = 0^-$

La soluzione è l'uscita v del sistema (reale o complessa) che può essere scomposta in:

$$\underbrace{v_t}_{\text{risposta totale}} = \underbrace{v_l}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{v_f}_{\text{Risposta forzata}}$$

- **Risposta libera:** Dipende soltanto dalle condizioni iniziali, quindi è il comportamento del sistema in assenza di input.

$$\text{C.I.} \neq 0$$

$$u(t) = 0$$

- **Risposta forzata:** Dipende solo dall'input del sistema e la maggior parte delle volte è diversa dalla risposta libera.

$$\text{C.I.} = 0$$

$$u(t) \neq 0$$

8.2.2 Risposta libera (o evoluzione libera)

Per calcolare la risposta libera del sistema definito in 1 bisogna risolvere l'equazione omogenea ($= 0$) associata, quindi si prende la parte sinistra dell'equazione differenziale e si pone uguale a 0 la parte destra.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Per farlo bisogna definire il **polinomio caratteristico**:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

Esempio 8.6. Ad esempio:

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$$

Come prima cosa si toglie la parte destra

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Successivamente si scrive il polinomio caratteristico sostituendo a $y(t)$ la variabile s e mettendo come potenza di s l'ordine della derivata:

$$3s^2 + 2s + 1 = 0$$

Ricordando il teorema fondamentale dell'algebra, cioè che la somma delle molteplicità delle radici è uguale all'ordine del polinomio, si può dire che:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$$

sono le soluzioni del polinomio caratteristico $P(s)$ con relative molteplicità

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$$

vale che

$$\sum_{i=1}^r \mu_i = r$$

. Si ha quindi:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \underbrace{c_{i,l}}_{\in \mathbb{R}, \mathbb{C}} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}}$$

I valori $c_{i,l}$ vengono calcolati usando le condizioni iniziali.

Esempio 8.7. Prendendo come esempio il sistema definito in 8.3 abbiamo l'equazione:

$$Mx''(t) + Dx'(t) + Kx(t) = 0$$

Poniamo:

$$M = 1, \quad D = 2, \quad K = 1$$

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 + 2s + 1 = \\ &= (s + 1)^2 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

con molteplicità algebrica è $\mu_1 = 2$. Quindi si hanno 2 soluzioni coincidenti e una sola radice distinta: $r = 1$ La risposta libera quindi sarà:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= \sum_{i=1}^1 \sum_{l=0}^1 c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= c_{1,0} e^{-1t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_{1,1} \cdot e^{-1t} \cdot \frac{t^1}{1!} \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} \cdot 1 + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t \end{aligned}$$

Esempio 8.8. Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'''(t) + 3v''(t) + 3v'(t) + 1 = 0$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \\ &= (s + 1)^3 \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Il numero di soluzioni è $r = 1$ con molteplicità $\mu = 3$.

La risposta libera è:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &\vdots \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Ora troviamo i coefficienti $c_{i,l}$ per trovare la risposta libera specifica al nostro caso, considerando i seguenti valori iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \\ v''(0) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo t con 0 troviamo il valore di $c_{1,0}$:

$$\begin{aligned} v_l(0) &= c_{1,0} \cdot e^0 + c_{1,1} \cdot e^0 \cdot 0 + c_{1,2} \cdot e^0 \cdot \frac{0}{2} \\ &= c_{1,0} = 0 \end{aligned}$$

Troviamo il valore di $c_{1,1}$ derivando la risposta libera:

$$v'_l(t) = -1c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t - c_{1,1} \cdot e^{-t} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t$$

una volta calcolata la derivata, poniamo $t = 0$

$$\begin{aligned} v'_l(0) &= -c_{1,0} + c_{1,1} - c_{1,1} + c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} \cdot 0 \\ &= -c_{1,0} + c_{1,1} \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Troviamo il valore di $c_{1,2}$ facendo la derivata seconda:

$$v''_l(t) = 0 + 1 \cdot e^{-t} \cdot t - e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t}$$

poniamo $t = 0$:

$$\begin{aligned}v_l''(0) &= 0 + 1 \cdot 0 - 0 + c_{1,2} \cdot 0 - c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} = 0 \\&= c_{1,2} = 0\end{aligned}$$

Quindi alla fine la risposta libera specifica risulta:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \\&= e^{-t} \cdot t\end{aligned}$$

Esempio 8.9. Prendiamo ad esempio un sistema descritto nel seguente modo:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

Vogliamo calcolare la risposta libera del sistema. Per farlo bisogna imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Il primo passo è calcolare il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea:

$$\begin{aligned}P(s) &= s^2 + 3s - 4 = 0 \\&= (s - 1)(s + 4)\end{aligned}$$

Il secondo passo è trovare le radici e le molteplicità:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, & \mu_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -4, & \mu_2 &= 1\end{aligned}$$

La risposta libera generica si calcola come:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

e nel nostro caso è:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^t + c_{2,0} \cdot e^{-4t} \\&= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}\end{aligned}$$

Per trovare la risposta libera specifica bisogna calcolare i coefficienti c_1 e c_2 derivando e valutando nelle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}v(t) &= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} \\v'(t) &= c_1 \cdot e^t - 4c_2 \cdot e^{-4t}\end{aligned}$$

Mettiamo a sistema, valutando in $t = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \\ v'(0) = c_1 \cdot e^0 - 4c_2 \cdot e^0 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -5c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = -\frac{1}{5} \end{cases} & \end{aligned}$$

La risposta libera specifica è quindi:

$$v_l(t) = \frac{1}{5} \cdot e^t - \frac{1}{5} \cdot e^{-4t}$$

Definizione 8.4. Le formule più importanti sono:

- **Modello di un sistema:**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

- **Risposta libera:**

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}}_{\text{Modo elementare}}$$

Dove:

r = numero di radici distinte
 μ_i = molteplicità della radice λ_i
 $c_{i,l}$ = coefficienti da calcolare

8.2.3 Convergenza dei modi elementari

È una funzione che si comporta come un esponenziale, quindi la convergenza dipende dal valore di λ .

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Vale che:

1. $\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = 0$ se e solo se $\text{Re}(\lambda) < 0$. **Stabilità asintotica**
2. $m(t)$ è limitato, cioè può prendere solo valori limitati, su $[0, \infty)$ se e solo se $\text{Re}(\lambda) \leq 0$. Se $\text{Re}(\lambda) = 0$, allora perché questo valga l deve essere uguale a 0 $l = 0$. **Stabilità semplice.**
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$ in tutti gli altri casi. Quindi:

$$\text{Re}(\lambda) > 0$$

oppure

$$\text{Re}(\lambda) = 0, l \neq 0$$

Instabilità.

8.2.4 Dimostrazioni

1. $\text{Re}(\lambda) < 0$:

Riscriviamo λ come:

$$\lambda = a + bi = \sigma + j\omega$$

e riscriviamo $m(t)$ come:

$$m = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!} = (e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}) \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}} \cdot \underbrace{e^{\sigma t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Im}}$$

con $a = -\sigma$ diventa:

$$m = \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{at}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}}_{=0} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Limitato}}$$

Il blocco $e^{j\omega t}$ è un punto che gira su un cerchio di raggio 1, quindi è limitato.

Il blocco $\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}$ è limitato per $t = 0$ e quindi $m(t)$ tende a 0.

2. $\text{Re}(\lambda) = 0, l = 0$:

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \frac{t^0}{0!} \cdot e^0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$= e^{j\omega t}$$

che è per definizione limitato in modulo.

3. $\text{Re}(\lambda) > 0$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{Re}(\lambda) = 0 \text{ } l \neq 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\frac{1}{\sigma} t} \cdot e^{j\omega t}$$

Siccome $\sigma = \text{Re}(\lambda) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$$

Definizione 8.5. Un sistema LTI descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

è detto **asintoticamente stabile** (la risposta è asintoticamente stabile) se e solo se ogni suo modo elementare converge a 0, cioè:

$$\forall i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) = 0 \quad m_i = e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Osservazione

È detto **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico, $P(s)$, hanno parte reale negativa.

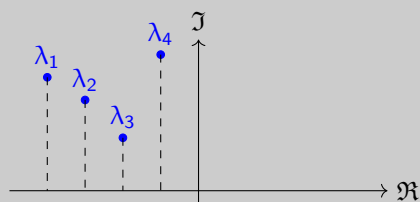


Figura 67: Asintoticamente stabile

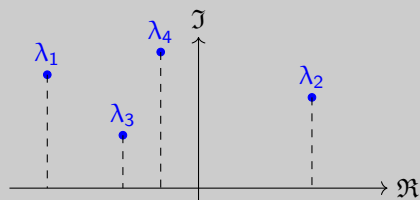
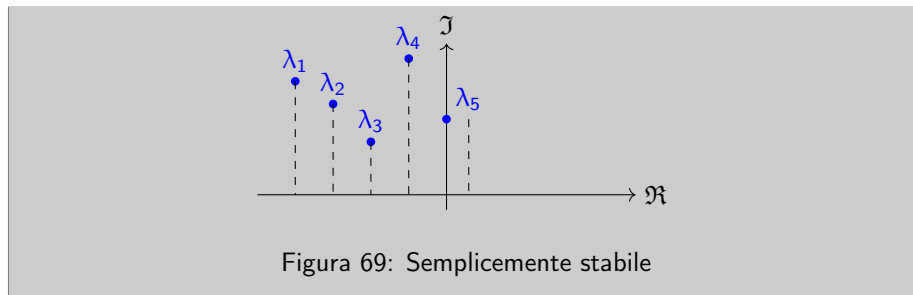


Figura 68: Non asintoticamente stabile



8.2.5 Prodotto di convoluzione

Il concetto di correlazione indica quanto due segnali siano simili tra loro e si calcola con il prodotto di convoluzione.

Il concetto di convoluzione è un'operazione tra due segnali che restituisce un terzo segnale.

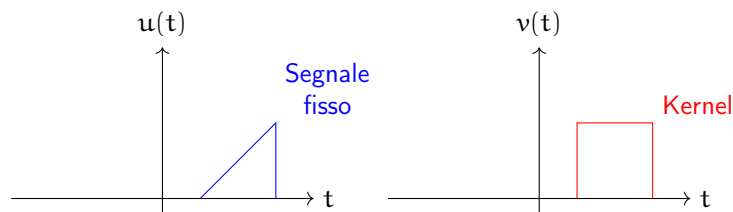


Figura 70: Segnale fisso e kernel

Il **kernel** è un segnale che viene riflesso rispetto all'asse y e traslato nel tempo t e moltiplicato per il segnale fisso. Il risultato è un segnale che rappresenta l'area sottesa dal prodotto dei due segnali.

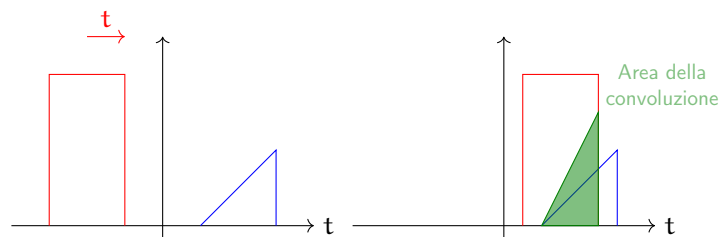


Figura 71: Convoluzione

Il grafico della convoluzione risultante è un segnale che rappresenta il cambiamento nel tempo del prodotto dei due segnali.

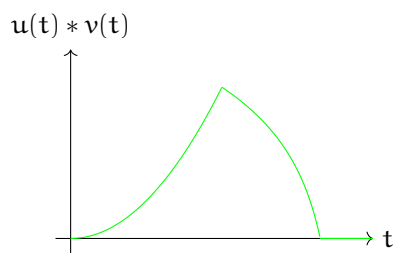


Figura 72: Grafico della convoluzione

Definizione 8.6. L'operatore di convoluzione tra due segnali $u(t)$ e $v(t)$ è definito come:

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau =$$

$$(v * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \cdot u(\underbrace{t}_{\text{Varia nel tempo}} \underbrace{-\tau}_{\text{Riflessione su y}}) d\tau$$

Il segnale riflesso viene moltiplicato per il segnale $u(t)$.

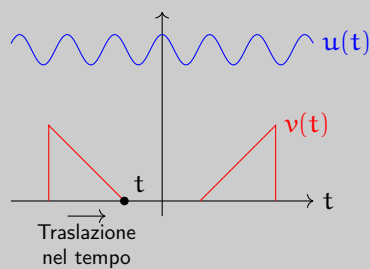


Figura 73: Convoluzione

Se la convoluzione viene effettuata con un impulso, il segnale viene campionato.

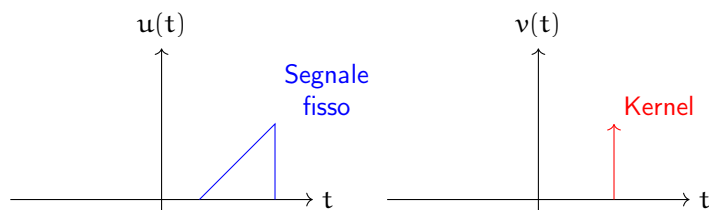


Figura 74: Segnale fisso e kernel

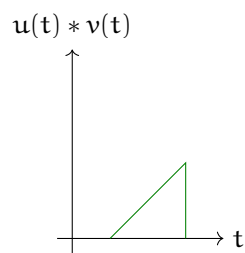
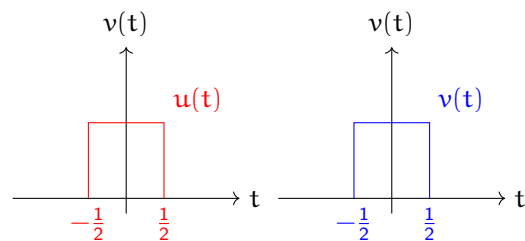


Figura 75: Grafico della convoluzione

Esempio 8.10. Ad esempio il segnale triangolo è formato dalla convoluzione di due segnali rettangolari.

$$u(t) = v(t) = \Pi(t)$$

($\Pi(t)$ è la funzione rettangolo)



1. Scegliere il segnale più semplice
2. Specchiare l'altro segnale rispetto a y ($f(t) \mapsto f(-t)$)
3. Traslare il segnale mobile (quello specchiato) nel tempo
4. Spostare $\forall t$ e calcolare l'integrale (aree sottese)

Il risultato della convoluzione sarà:

$$u(-2) * v(-2) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(-1) * v(-1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(0) * v(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

\vdots

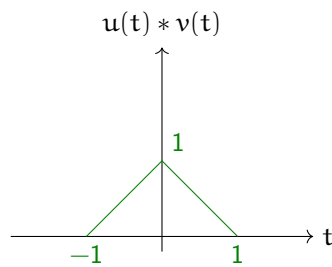


Figura 76: Grafico della convoluzione

8.2.6 Risposta impulsiva

Definizione 8.7. Dato un sistema a tempo continuo inizialmente a riposo (causale) definiamo la **risposta impulsiva** come l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso uguale all'impulso unitario

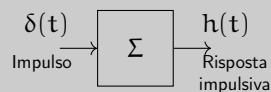


Figura 77: Risposta impulsiva

Teorema 8.1. L'uscita $v(t)$ di un sistema LTI, inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso $u(t)$ è dato dal seguente prodotto di convoluzione:

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Proprietà dell'integrale di convoluzione:

- **Commutativa:** $(u * v)(t) = (v * u)(t)$
- **Associativa:** $(u * v)(t) * w(t) = u(t) * (v * w)(t)$
- **Distributiva** (rispetto alla somma): $u(t) * (v(t) + w(t)) = (u * v)(t) + (u * w)(t)$

Osservazione: Un sistema LTI causale inizialmente a riposo, siccome $h(t) = 0, t < 0$ (perchè $\delta(t) = 0, t < 0$):

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Per calcolare la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right] \cdot \delta_{-1}(t)$$

dove:

- d_0 è il termine costante:
– $d_0 \neq 0$ se e solo se il sistema è proprio ($n = m$)
- $\delta(t)$ è l'impulso unitario
- $d_{i,l}$ sono i coefficienti della risposta impulsiva (diversi da $c_{i,l}$ della risposta libera)
- $\frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$ sono i modi elementari e sono gli stessi della risposta libera
- $\delta_{-1}(t)$ è il gradino e serve a moltiplicare per 0 la parte non causale della risposta impulsiva e serve quindi per la causalità

Esempio 8.11. Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

Questo sistema ha $n = m$ perchè è un sistema proprio, quindi: $d_0 \neq 0$

1. Il primo passo è quello di trovare l'equazione omogenea:

$$v'(t) + 2v(t) = 0$$

2. Poi bisogna calcolare il polinomio caratteristico:

$$P(s) = s + 2 = 0$$

3. Bisogna poi trovare le radici e i modi elementari:

$$\lambda_1 = -2 \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

($l = 0 \dots \mu_i - 1$) i modi elementari sono:

$$m(t) = e^{-2t}$$

4. Scriviamo la risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

5. Riscrivo l'equazione iniziale ponendo:

$$v(t) = h(t) \quad u(t) = \delta(t)$$

L'equazione diventa:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

\Downarrow

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

• Calcolo tutte le derivate di $h(t)$:

$$h'(t) = \delta_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t)$$

6. Sostituisco $v(t) \mapsto h(t)$ e $u(t) \mapsto \delta(t)$

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

\Downarrow

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\begin{aligned} & d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) \\ & + 2(d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t)) \\ & = \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

Valutiamo le funzioni in $t = 0$

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot e^{-2 \cdot 0} \cdot \delta(0) = \delta'(0) + \delta(0)$$

Sposto tutto a sinistra:

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot \delta(0) - \delta'(0) - \delta(0) = 0$$

Raccolgo per $\delta(0), \delta'(0) \dots \delta^n(t)$ che sono linearmente indipendenti:

$$(d_0 - 1) \cdot \delta'(0) + (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0$$

7. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} (d_0 - 1) \cdot \delta'(0) = 0 \\ (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \end{cases}$$

8. Sostituisco i coefficienti appena trovati

$$\begin{aligned} h(t) &= \underbrace{d_0}_1 \cdot \delta(t) + \underbrace{d_{1,0}}_{-1} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

E questa è la risposta impulsiva del sistema

9. Bisogna calcolare la risposta forzata...

Esercizio 8.1. Si vuole calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$2v'(t) - v(t) = u'(t) + 3u(t)$$

Siccome abbiamo la derivata prima sia a sinistra a destra il sistema è proprio ($n = m$) $\rightarrow d_0 \neq 0$.

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

1. Calcolo le radici usando l'equazione omogenea del polinomio caratteristico:

$$2s - 1 = 0$$

$$2s = 1$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

2. Calcolo la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

3. Riscrivo l'equazione iniziale con $v(t) = h(t)$, $u(t) = \delta_0(t)$:

$$2h'(t) - h(t) = \delta_0'(t) + 3\delta_0(t)$$

4. Calcolo le derivate di $h(t)$:

$$h'(t) = d_0 \cdot \delta_0'(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t)$$

5. Sostituisco:

$$2 \left[d_0 \delta'_0(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) \right] - \left[d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] = \delta'_0(t) + 3\delta_0(t)$$

Togliere tutti i termini $\delta_{-1}(0^-) = 0$

6. Raccolgo le funzioni indipendenti $\delta_0(t), \delta'_0(t), \delta''_0(t)$:

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \delta'_0(t) = \delta'_0(t) \\ 2d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) = 3\delta_0(t) \end{cases}$$

Imponiamo $t = 0^-$

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \cancel{\delta'_0(0)} = \cancel{\delta'_0(0)} \\ \left(2d_1 \cdot \underset{=1}{e^{\frac{1}{2} \cdot 0}} \right) \cdot \delta_0(0) = 3\delta_0(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_0 = 1 \\ 2d_1 - d_0 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = \frac{1}{2} \\ d_1 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

7. Scrivo la risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta_0(t) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

8. Calcolo la risposta forzata nell'esercizio 8.2

8.2.7 Risposta forzata

Definizione 8.8. La risposta forzata vuol dire che l'uscita del sistema dipende solo dall'input di un sistema LTI, causale per un ingresso $u(t)$ ($u(t) = 0, t < 0$) e si definisce come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

dove:

u = Input

h = Risposta impulsiva

Esempio 8.12. Riprendendo l'ultimo punto dell'esempio 8.11, la risposta forzata è:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t^-}^0 u(t) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Esercizio 8.2. Data la risposta impulsiva dell'esercizio 8.1 calcoliamo la risposta forzata con un input $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$ (gradino alto 3):

$$\begin{aligned} v_f &= (h * u)(t) \\ &= (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \delta_0(\tau) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \right] \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \delta_0(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta_0(\tau)}_{[0, 0^+]} \cdot \underbrace{\delta_{-1}(t - \tau)}_{[-\infty, t]} d\tau + \frac{21}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{21}{4} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\tau} d\tau \\ &\rightarrow \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^t \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{21}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= v_f(t) \end{aligned}$$

Teniamo fissa la risposta impulsiva $h(t)$ e trasliamo il gradino $u(t)$

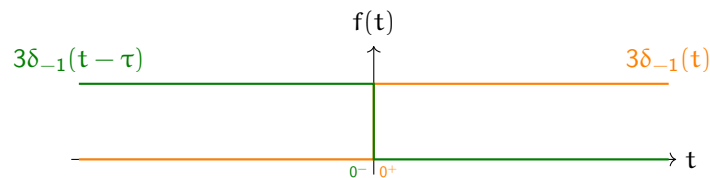


Figura 78: $3\delta_{-1}(t - \tau)$ viene traslato

$+\infty$ e $-\infty$ diventano 0 e t perchè:

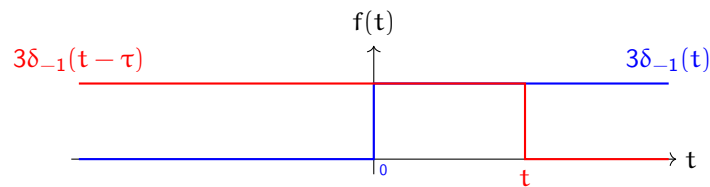


Figura 79: $3\delta_{-1}(t - \tau)$ viene traslato

8.2.8 Risposta totale

Data un'equazione che descrive un sistema LTI:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

la risposta totale si calcola come la somma della risposta libera e forzata:

$$v_t(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

La risposta libera è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$$

La risposta forzata è data da:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (\underbrace{u}_{\text{Input}} * \underbrace{h}_{\text{Risposta impulsiva}})(t) \\ &= \int_{0-}^{t+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0-}^{t+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

e la risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

8.3 Stabilità in base alle radici

Considerando 3 radici si ha:

- **Stabilità asintotica:** Tutte le radici devono avere parte reale minore di 0:

$$\forall i \quad \text{Re}(\lambda_i) < 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{-1}_{\text{Re}(\lambda_1) < 0} + i \quad \underbrace{-2}_{\text{Re}(\lambda_2) < 0} - i \quad \underbrace{-3}_{\text{Re}(\lambda_3) < 0}$$

- **Semplicemente stabile:** Solo una radice ha parte reale uguale a 0:

$$\exists i \quad \text{Re}(\lambda_i) = 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\text{Re}(\lambda_1)=0} + i - 2 > 0 - i - 3 > 0$$

- **Asintoticamente instabile:** Tutte le radici hanno parte reale minore di 0
tranne un sottoinsieme che hanno parte reale uguale a 0:

$$\forall i \quad \text{Re}(\lambda_i) \leq 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\text{Re}(\lambda_1=0)} + i \quad \underbrace{0}_{\text{Re}(\lambda_2=0)} - i - 3 + i$$

- **Totalmente instabile:** Almeno una radice ha la parte reale maggiore di 0:

$$\exists i \quad \text{Re}(\lambda_i) > 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{1}_{\text{Re}(\lambda_1)>0} + i \quad 0 - i - 3 + i$$

8.4 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza è la risposta di un sistema LTI a un segnale sinusoidale. Abbiamo visto che gli esponenziali complessi si rappresentano come:

$$Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Questi esponenziali si chiamano **Fasori** perchè vengono rappresentati come vettori rotanti in un piano complesso, come mostrato in figura 30.

$$u(t) = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t} \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow v(t)$$

Figura 80: Fasore

La risposta in frequenza si calcola come la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot Ae^{j(\omega_0(t - \tau) + \phi)} d\tau \\ &= \underbrace{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}}_{\text{Costante}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau}_{|f| < \infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau \right| &< \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot 1 d\tau < \infty
\end{aligned}$$

La risposta in frequenza è quindi:

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau$$

Da questa formula si ha che l'uscita $v(t)$ è uguale a:

$$v(t) = H(j\omega_0) \cdot A e^{j(\omega_0 t + \phi)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva del sistema e anche la trasformata di Laplace della risposta impulsiva ristretta al solo asse immaginario:

Teorema 8.2.

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s), \quad s = j\omega$$

Dove:

\mathcal{F} = Trasformata di Fourier

\mathcal{L} = Trasformata di Laplace

Esempio 8.13. Se prendiamo in considerazione un sistema dinamico, come ad esempio il sistema massa-molla-smorzatore dell'esempio 8.3, descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

Per calcolare la soluzione nel dominio del tempo si può fare il passaggio solito fatto fin'ora, oppure si può prendere una scorciatoia e calcolare la trasformata di Laplace delle equazioni algebriche per trovare poi la soluzione in \mathbb{C} rendendo più semplice il calcolo.

9 Trasformata unilatera di Laplace (TDL)

Definizione 9.1 (Trasformata unilatera di Laplace). Sia $v(t)$ una funzione generica (non l'uscita di un sistema) con $t \in \mathbb{R}$ ottenuta da somme di funzioni a variabili reali con valori reali o complessi (ad esempio somma di fasori).

- Localmente sommabile in $[0, \infty)$:

$$\int_a^b |v(t)| dt < \infty, \quad \forall a, b \in [0, \infty)$$

- Formata da un insieme finito di segnali polinomiali

Definiamo la trasformata unilatera di Laplace come:

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}[v(t)](s)$$

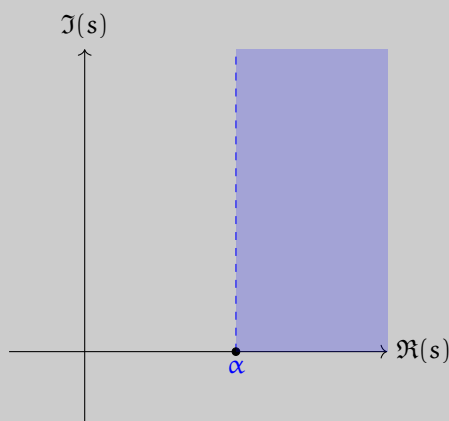
N.B.: Data $v(t)$ localmente sommabile, non significa che $V(s)$ sia localmente sommabile

Bisogna ora definire la **Regione di convergenza**:

Definizione 9.2. La regione di convergenza è un semipiano positivo definito come:

$$\text{RDC} = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \text{Re}(s) > \alpha\}$$

Dove α è l'ascissa di convergenza:



Dimostrazione: Sia $v(t)$ una combinazione lineare di esponenziali:

$$v(t) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$$

Vogliamo dimostrare che la regione di convergenza della trasformata di Laplace è un semipiano a destra di α :

$$\text{RDC} \mathcal{L}[v(t)](s) = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \text{Re}(s) > \alpha\}$$

Dimostro:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt\end{aligned}$$

Prendiamo un preciso $i \rightarrow \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ $s = \sigma + j\omega$

$$\begin{aligned}\int_{0-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{0-}^{+\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} \cdot e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) = \frac{1}{\sigma - \sigma_i + j\omega_i - j\omega}\end{aligned}$$

L'integrale converge se $\sigma_i - \sigma < 0 \rightarrow \sigma > \sigma_i$ e quindi:

$$\sigma = \text{Re}(s) \quad \sigma_i = \text{Re}(\lambda_i)$$

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(\lambda_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\alpha \geq \max(\text{Re}(\lambda_i))$$

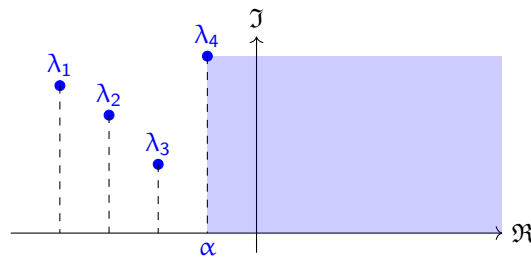


Figura 81: Asintoticamente stabile

Per un sistema LTI stabile RDC contiene sempre l'asse immaginario

9.1 Proprietà della trasformata di Laplace

9.1.1 Linearità

Siano v_1 e v_2 funzioni che ammettono la trasformata di Laplace e rispettivamente V_1 e V_2 le loro trasformate di Laplace:

$$v_1 \rightarrow V_1(s)$$

$$v_2 \rightarrow V_2(s)$$

allora: $\alpha v_1(t) + b v_2(t)$ ammette la trasformata di Laplace ed è definita come:

$$\mathcal{L}[\alpha v_1(t) + b v_2(t)](s) = \alpha V_1(s) + b V_2(s)$$

Ha come ascissa di convergenza:

$$\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

9.1.2 Traslazione nel tempo (ritardo temporale)

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $v(t - \tau)$, con $\tau > 0$ è:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

L'ascissa di convergenza rimane immutata

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{\tau-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau \\ x &= t - \tau \\ t &= x + \tau \\ dt &= dx \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \\ &= e^{-s\tau} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\ &= e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)\end{aligned}$$

9.1.3 Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $e^{\lambda t} \cdot v(t)$ è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) = V(s - \lambda)$$

L'ascissa di convergenza rimane spostata:

$$\alpha = \alpha_0 + \operatorname{Re}(\lambda)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda t} \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{(\lambda-s)t} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-\overbrace{(s-\lambda)}^r} t dt \\ &= \mathcal{L}[v(t)](r) \\ &= \mathcal{L}[v(t)](s - \lambda)\end{aligned}$$

9.1.4 Cambio di scala

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $v(rt)$ è:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} \cdot V\left(\frac{s}{r}\right)$$

L'ascissa di convergenza viene scalata:

$$\alpha = r \cdot \alpha_0$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(rt)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(rt) \cdot e^{-st} dt \\ x &= rt \\ t &= \frac{x}{r} \\ dt &= \frac{dx}{r} \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s \frac{x}{r}} dx \\ &= \frac{1}{r} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-\frac{s}{r} x} dx \\ &= \frac{\mathcal{L}[v(t)]\left(\frac{s}{r}\right)}{r} \end{aligned}$$

9.1.5 Proprietà della derivata

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$ ed esiste ed è finito il limite: $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$, allora anche la sua derivata i -esima ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = s^i \cdot V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{i-k-1}$$

L'ascissa di convergenza è minore dell'ascissa di convergenza originale

$$\alpha \leq \alpha_0$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) &= \int_{0-}^{+\infty} \overbrace{\frac{dv(t)}{dt}}^{f'(t)} \cdot \overbrace{e^{-st}}^{g(t)} dt \\ &= v(t) \cdot e^{-st} \Big|_{0-}^{+\infty} - \underbrace{\left(-s \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt\right)}_{\text{TdL}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \overbrace{v(\varepsilon)}^0 \cdot e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon) \cdot e^{-s\varepsilon} + s \cdot V(s) \\ &= s \cdot V(s) - v(0^-) \end{aligned}$$

Dimostrazione per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)\right](s) \\
 &= s \cdot \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0-} \\
 &= s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s) - v(0-)) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0-} \\
 &= s^2 \cdot V(s) - s \cdot v(0-) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0-}
 \end{aligned}$$

9.1.6 Moltiplicazione per una funzione polinomiale

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $t^i \cdot v(t)$ è:

$$\mathcal{L}[t^i \cdot v(t)](s) = (-1)^i \cdot \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Dimostrazione ($i = 1$):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t \cdot v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} t \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= - \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot (-t \cdot e^{-st}) dt \\
 &= - \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \underbrace{\int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt}_{\text{TdL } v(t)} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

9.1.7 Integrazione nel tempo

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $\psi(t) = \int_{0-}^t v(\tau) d\tau$ è:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

E l'ascissa di convergenza è:

$$\alpha = \max(\alpha_0, 0)$$

Dimostrazione:

$$v_i(t) = \int_{0-}^t v(\tau) d\tau \rightarrow v'_i(t) = v(t) \text{ e } v(0-) = \int_{0-}^{0-} v(\tau) d\tau = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &\stackrel{9.1.5}{=} \mathcal{L}[v_1'(t)](s) \\ &= s \cdot \mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= s \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

9.1.8 Integrale nel dominio dei complessi

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, se esiste il $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$, allora la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](s) ds$$

9.1.9 Teorema del valore iniziale

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, ed esiste ed è finito il limite $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$, allora:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

9.1.10 Teorema del valore finale

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, ed esiste ed è finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$, allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

9.1.11 Convoluzione nel dominio del tempo

Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulle per $t < 0$) che ammettono la trasformata di Laplace $U(s)$ e $V(s)$, allora $(u * v)(t)$ ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-st} dt \\
 \{u(t) = 0, \quad t < 0\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left(\int_{0^-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \right) d\tau \\
 \text{Sostituisco: } x &= t - \tau, \quad t = x + \tau, \quad dt = dx \\
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left(\int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

9.2 Trasformate notevoli

9.2.1 Impulso

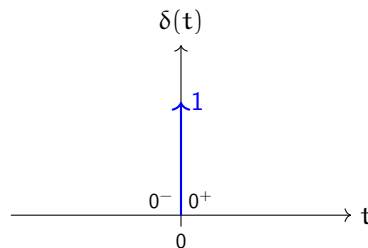


Figura 82: Impulso

- La trasformata di Laplace dell'impulso $\delta_0(t)$ è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \overset{\text{Proprietà impulso}}{\delta_0(t)} \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-st} \Big|_{t=0} = 1
 \end{aligned}$$

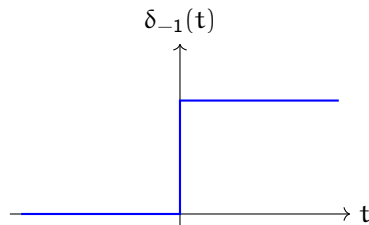
- La trasformata di Laplace di un impulso di altezza A è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A \cdot \delta_0(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) \\
 &= A
 \end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'impulso ritardato è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t - \tau)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_\tau(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-s\tau}
 \end{aligned}$$

9.2.2 Gradino



- La trasformata di Laplace del gradino $\delta_{-1}(t)$ è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty; \mu \rightarrow 0^-} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_{t=\mu}^{\varepsilon} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-s\varepsilon}}{s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

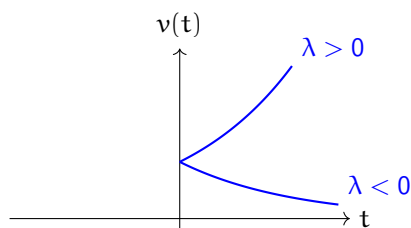
- La trasformata di Laplace del gradino di altezza A è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace del gradino ritardato è:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \frac{1}{s}$$

9.2.3 Esponenziale complesso causale



- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso causale $v(t) = e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$ è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$

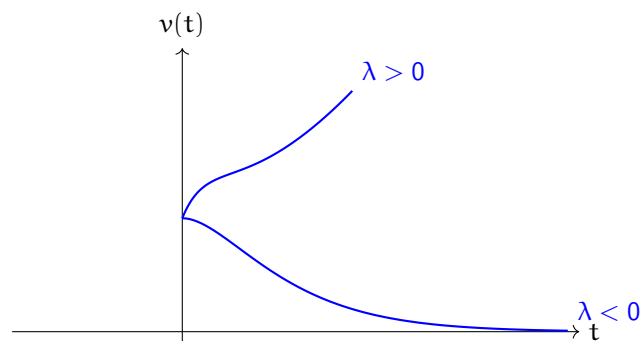
- La trasformata di Laplace dell'esponenziale con una costante A è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s - \lambda}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso ritardato è:

$$\mathcal{L} [e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

9.2.4 Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale



La trasformata di Laplace di $v(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$ è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[\frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) &= \frac{1}{l!} \cdot \mathcal{L}[t^l \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \left(\frac{1}{s - \lambda} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{l!(-1)^e}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}}\end{aligned}$$

Esempio 9.1. Ad esempio se:

- $l = 1$, la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L} [t \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

- $l = 2$

$$\mathcal{L} \left[\frac{t^2}{2} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

Esempio 9.2. Alcuni casi speciali sono:

-

$$\mathcal{L} \left[\frac{t}{l!} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{s^{l+1}}$$

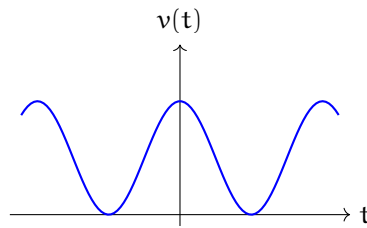
-

$$\mathcal{L} [t \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{l!}{s^{l+1}}$$

-

$$\mathcal{L} [e^{-\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{1}{s + \lambda}$$

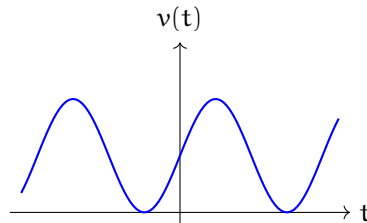
9.2.5 Funzione coseno



La trasformata di Laplace di $\cos(\omega t)$ è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] (s) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] (s) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L} [e^{j\omega t}] (s) + \mathcal{L} [e^{-j\omega t}] (s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

9.2.6 Funzione seno



La trasformata di Laplace di $\sin(\omega t)$ è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right](s) \\
 &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}](s) \\
 &= \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\
 &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

9.3 Risoluzione di sistemi LTI causali

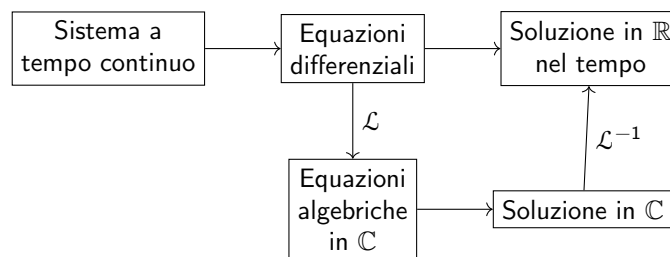


Figura 83: Risoluzione di sistemi LTI causali tramite trasformata di Laplace

Per un sistema LTI causale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Se $n \geq m$ e $u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)$, (cioè $u(t) = 0$, $t < 0$) e consideriamo le $n - 1$ condizioni iniziali:

$$v(0^-); \frac{dv(0^-)}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}v(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette la trasformata di Laplace $U(s)$ e $v(t)$ ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, con $t \geq 0$ allora si ha che:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot \mathcal{L} \left[\frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

Applicando $n + m$ vale la regola della derivata:

$$a_n \left[s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-1} \right] +$$

$$a_{n-1} \left[s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-2} \right] + \dots + a_0 V(s)$$

Imponiamo le condizioni iniziali $u(t) \Big|_{t=0^-} = 0$, quindi si ha che le derivate in 0 sono nulle:

$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

Espandendo le sommatorie e raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}_{d(s)} V(s)$$

$$- \overbrace{a_n \cdot v(0^-) \cdot s^{n-1} - \left(a_{n-1} \cdot v(0^-) + a_n \cdot \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) s^{n-2} - \dots}_{p(s)}$$

$$\dots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \cdot \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right) =$$

$$= \underbrace{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}_{n(s)} U(s)$$

Sostituendo diventa:

$$d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinomio di grado m che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. È il **polinomio caratteristico** di $u(t)$
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'uscita. È il **polinomio caratteristico** di $v(t)$

- $p(s)$ è un polinomio di grado $n - 1$ che dipende dalle condizioni iniziali

$$p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left(\sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \cdot \frac{d^{n-j}v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

- $\frac{p(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle condizioni iniziali del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita $v(t)$. È la **trasformata di Laplace della risposta libera**:

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'ingresso $u(t)$ e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita $v(t)$ moltiplicati per la trasformata di Laplace di $u(t)$. È la **trasformata di Laplace della risposta forzata** siccome una convoluzione diventa un prodotto di trasformate:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$ si chiama **Funzione di trasferimento** $H(s)$ ed è definita come:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

è il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $v(t)$. $H(s)$ è definita come la **trasformata di Laplace della risposta impulsiva**

$h(t)$

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + \left(\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}}$$

Esempio 9.3. Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

Si può trasformare usando la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^3v(t)}{dt^3} \right] (s) + \mathcal{L} \left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} \right] (s)$$

Applicando la regola della derivata:

$$s^3 V(s) - s^2 v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s - \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} \cdot s^0 + \\ + s^2 V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s^0 = s \cdot U(s)$$

Raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(s^3 + s^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} \right]}_{p(s)} = \underbrace{s}_{n(s)} \cdot U(s)$$

Quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \\ = \frac{s}{(s^3 + s^2)} \cdot U(s) + \frac{s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt}}{s^3 + s}$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 0; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} \cdot U(s)$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 1; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s} \cdot U(s) + \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2}$$

9.3.1 Stabilità di sistemi LTI causali

Considerando la funzione di trasferimento $H(s)$, cioè il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso e dell'uscita, si ha che il grado del numeratore è generalmente minore o uguale a quello del denominatore.

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Fattorizzando si ottiene:

$$H(s) = \frac{b_m \overbrace{(s - \beta_1)^{\xi_1} \cdot (s - \beta_2)^{\xi_2} \cdot \dots \cdot (s - \beta_q)^{\xi_q}}^{\text{Radici del numeratore}}}{a_n \underbrace{(s - \alpha_1)^{\mu_1} \cdot (s - \alpha_2)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (s - \alpha_r)^{\mu_r}}_{\text{Radici del denominatore}}}$$

Dove:

ξ_i = molteplicità delle soluzioni del numeratore

μ_i = molteplicità delle soluzioni del denominatore

$$q \leq m; \quad \sum \xi_i = m; \quad r \leq n; \quad \sum \mu_i = n$$

$$H(s) = k \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

Dove:

$(s - z_i)$ = Zeri della funzione razionale (radici numeratore)

$(s - p_i)$ = Poli della funzione razionale (radici denominatore)

Definiamo uno **zero** di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ tale che $H(\beta) = 0$.

Definiamo un **polo** di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi numero $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $H(\alpha) = \infty$.

Definizione 9.3. Dato $H(s)$ in forma ridotta (senza radici comuni), siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione. Se:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$$

allora il sistema è **BIBO stabile**.

Il sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli stanno nel semipiano complesso negativo.

Per BIBO stabilizzare un sistema bisogna togliere gli zeri λ_i con $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, semplificandoli dividendo per lo stesso valore.

Esempio 9.4. Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

In questo caso abbiamo che $n < m$. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Polinomio caratteristico dell'ingresso}}{\text{Polinomio caratteristico dell'uscita}} \\ &= \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} \\ &= \frac{(s - 1)(s - 4)}{s - 3} \end{aligned}$$

La soluzione è $\lambda_1 = 3$, quindi il sistema non è asintoticamente stabile, di conseguenza è instabile.

Per verificare se il sistema è BIBO stabile bisogna vedere se si possono semplificare gli zeri. In questo caso tutte le radici del denominatore (i poli) hanno parte reale maggiore di 0, quindi il sistema non è BIBO stabile.

Esempio 9.5. Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{(s - 3)(s - 1)}{(s + 2)(s + 1)} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ quindi il sistema è asintoticamente stabile, di conseguenza anche BIBO stabile.

Esempio 9.6. Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u'(t) - 4u(t)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} \\ &= \frac{(s - 4)(s - 1)}{(s + 3)(s + 2)(s - 1)} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = 1$$

Siccome $\text{Re}(\lambda_3) > 0$ il sistema non è asintoticamente stabile.

Controlliamo se il sistema è BIBO stabile:

$$\frac{(s-4)\cancel{(s-1)}}{(s+3)(s+2)\cancel{(s-1)}}$$

Il polo con parte reale minore di 0 si semplifica, quindi il sistema è BIBO stabile, perchè tutti i poli hanno parte reale minore di 0.

9.4 Antitrasformata di Laplace unilatera

Prendendo in considerazione la trasformata di Laplace del sistema:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot V(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

si vuole trovare l'antitrasformata, quindi si applicano le seguenti regole considerando soltanto ciò di cui si vuole trovare l'antitrasformata:

- Risposta forzata:

$$\frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- Risposta libera:

$$\frac{p(s)}{d(s)}$$

- Risposta impulsiva:

$$\frac{n(s)}{d(s)}$$

- Risposta totale:

$$\frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

Di conseguenza consideriamo:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- Se $\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]$ (sistema proprio) bisogna fare la divisione polinomiale e arrivare alla divisione in fratti semplici e infine applicare l'antitrasformata di Laplace.

– **Divisione polinomiale:**

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{con} \quad \deg[r(s)] < \deg[d(s)]$$

Si ha che k è la trasformata di Laplace dell'impulso:

$$\mathcal{L}[k \cdot \delta_0(t)](s) = k$$

e quindi la sua anti-trasformata è:

$$\mathcal{L}[k \cdot \delta_0(t)](s) = k \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow k \cdot \delta_0(t)$$

Esempio 9.7. Considerando la seguente risposta:

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1}$$

si ha che $m = 2$ e $n = 2$, quindi siamo nel caso:

$$\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]$$

quindi bisogna fare la divisione polinomiale:

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \\ &= \frac{6s - 1}{s^2 - s - 1} + 2 \end{aligned}$$

Ora bisogna trasformare in fratti semplici.

- Se $\deg[n(s)] < \deg[d(s)]$ (sistema strettamente proprio) si può saltare la divisione polinomiale e applicare direttamente l'antitrasformata.

Decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{r(s)}{d(s)} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s - \alpha_i)^{l+1}}$$

Per trovare i valori di $c_{i,l}$ si usa la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1}}{ds^{\mu_i-l-1}} \cdot \left((s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)$$

Esempio 9.8. Si vuole scomporre la seguente trasformata di Laplace in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s + 1)^2(s - 2)(s + 5)}$$

Quindi si ha che:

$$V(s) = \frac{A}{(s - 2)} + \frac{B}{(s + 1)} + \frac{C}{(s + 1)^2} + \frac{D}{(s + 5)}$$

dove A, B, C, D sono le costanti $c_{i,l}$ e i denominatori sono le radici $(s - \alpha_i)$ del polinomio $d(s)$. Poi si calcolano i valori di A, B, C, D e si ottiene la decomposizione in fratti semplici.

Esempio 9.9. Si vuole scomporre in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{s - 20}{(s + 4)(s - 2)}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -4 & \mu_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 & \mu_2 &= 1\end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$V(s) = \frac{c_{1,0}}{s + 4} + \frac{c_{2,0}}{s - 2} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2}$$

Per trovare A e B si può fare in due modi:

1. Fare il denominatore comune e sommare i numeratori

$$\begin{aligned}\frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2} &= \frac{A(s - 2) + B(s + 4)}{(s + 4)(s - 2)} \\ &= \frac{As - 2A + Bs + 4B}{(s + 4)(s - 2)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (A + B)s = 1s \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 4B - 2A = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{s - 20}{(s + 4)(s - 2)} = \frac{4}{s + 4} - \frac{3}{s - 2}$$

2. Si può usare la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i - l - 1} \left((s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i - l - 1}}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 \\ \alpha_1 &= -4\end{aligned}$$

$$c_{1,0} = A = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d^{1-0-1} \left((s+4) \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^{1-0-1}} = \frac{-24}{-6} = 4$$

e

$$\begin{aligned}\mu_2 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2\end{aligned}$$

$$c_{2,0} = B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left(\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^{1-0-1}} = \frac{-18}{6} = -3$$

Alla fine si ottiene:

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Antitrasformata di Laplace:

Dopo aver applicato tutti i passaggi precedenti si arriva ad avere:

$$V(s) = k + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}}$$

da questa forma si può antitrasformare:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \right] (t) \right] \\ &= k \cdot \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] \end{aligned}$$

Esempio 9.10. Consideriamo il seguente sistema:

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0^-) = 0 \\ v'(0^-) = -1 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Si vuole calcolare:

1. Stabilità
2. Risposta libera
 - (a) Nel tempo
 - (b) Nelle frequenze
3. Risposta impulsiva
4. Risposta forzata
5. Risposta totale

1. Stabilità:

Scriviamo l'equazione caratteristica:

$$s^2 - s - 2 = 0$$

Troviamo le soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \mu_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \mu_2 = 1$$

Il sistema non è asintoticamente stabile perchè $\lambda_1 > 0$. Per calcolare la BIBO stabilità bisogna calcolare la funzione di trasferimento e vedere se i suoi poli hanno tutti parte reale minore di 0:

$$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{h(s)}{d(s)}}_{H(s)} \cdot U(s)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)}$$

$$= \frac{s+1}{s-2}$$

Non è BIBO stabile perchè $\lambda_1 = 2$.

2. Risposta libera:

(a) Nel tempo:

$$s^2 - s - 2 = 0 \rightarrow (s-2)(s+1) = 0$$

$$r = 2$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \mu_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \mu_2 = 1$$

Utilizziamo l'equazione per la risposta libera nel tempo:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

Calcoliamo le derivate:

$$v_l(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

$$v'_l(t) = 2c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{-t}$$

li mettiamo a sistema con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v_1(0) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ v_1'(0) = 2c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$v_1(t) = e^{-t}$$

(b) Nelle frequenze:

Calcoliamo la trasformata di Laplace dell'ingresso e dell'uscita:

$$\mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)](s) = \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)](s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v''(t)](s) &= s^2V(s) - s \cdot \cancel{v(0)} - \cancel{s^0 \frac{dv(0)}{dt}} \\ &= s^2V(s) - s + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v'(t)](s) &= sV(s) - \cancel{s^0 v(0)} \\ &= sV(s) - 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[v(t)](s) = V(s)$$

Quindi l'uscita sarà:

$$s^2V(s) - s + 1 - sV(s) + 1 - 2V(s)$$

L'entrata diventa:

$$\mathcal{L}[u''(t)](s) = s^2U(s) - \cancel{s^1 u(0)} - \cancel{s^0 \frac{du(0)}{dt}}$$

$$\mathcal{L}[u'(t)](s) = sU(s) - \cancel{s^0 u(0)}$$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = U(s)$$

Quindi l'ingresso sarà:

$$s^2U(s) + 2sU(s) + U(s)$$

Tutto il sistema diventa:

$$s^2V(s) - s + 1 - sV(s) + 1 - 2V(s) = s^2U(s) + 2sU(s) + U(s)$$

Raccogliamo per $V(s)$ e $U(s)$:

$$\underbrace{(s^2 - s - 2)}_{\text{Pol. Car. uscita}} V(s) - s + 2 = \underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{Pol. Car. ingresso}} U(s)$$

$$V(s) = \frac{\cancel{s-2}}{(\cancel{s-2})(s+1)} + \frac{(s+1)\cancel{1}}{(s-2)(\cancel{s+1})} \cdot U(s)$$

La trasformata di Laplace di $u(t)$ è:

$$u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^{-1} [A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](t) = \frac{A}{(s - \lambda)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s + 3}$$

Quindi si ha:

$$\underbrace{V(s)}_{V_t(s)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{s+1}{s-2} \cdot \frac{1}{s+3}}_{\substack{H(s) \\ V_f(s)}}$$

La risposta libera in frequenza è:

$$V_l(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Il numeratore ha grado minore del denominatore, quindi si può antitrasformare passando subito a fare la decomposizione in fratti semplici. Siccome abbiamo una sola radice al denominatore si ha già la forma minima.

Passiamo a fare l'antitrasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s - \lambda} \right] (t) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$V_l(s) = \frac{1}{s + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s + 1}{s - 2}$$

Facciamo divisione polinomiale:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s + 1}{s - 2} \\ &= 1 + \frac{3}{s - 2} \end{aligned}$$

Possiamo calcolare l'antitrasformata di laplace di ogni singolo termine, ottenendo così la risposta impulsiva nel tempo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$h(t) = \delta_0(t) + 3 \cdot e^{2t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

4. Risposta forzata:

$$V_f(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$V_f(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

(a) Il primo metodo è quello di fare il denominatore comune:

$$\begin{aligned} \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} &= \frac{As + 3A + Bs - 2B}{(s-2)(s+3)} \\ &= \frac{(A+B)s + (3A-2B)}{(s-2)(s+3)} \end{aligned}$$

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} (A+B)s = 1s \\ 3A-2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ 3A-2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ 3-3B-2B = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ -5B = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L} \left[\frac{A}{s-\lambda} \right] (t) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$\left(\frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{2}{5} \cdot e^{-3t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

(b) Il secondo metodo è quello di usare la formula:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left(\frac{d^{\mu_i-1} \cdot \frac{r(s)}{d(s)}}{ds^{\mu_i-1}} \cdot (s-\lambda) \right)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \cdot \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} \cdot (s-2) = \frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \cdot \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} \cdot (s+3) = \frac{2}{5}$$

5. Risposta totale:

$$\begin{aligned} v_t &= \mathcal{L}^{-1}[V_l(s)](t) + \mathcal{L}^{-1}[V_f(s)](t) \\ &= e^{-t} \cdot \delta_{-1}(t) + \left(\frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{2}{5} \cdot e^{-3t} \right) \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= \left(e^{-t} + \frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{2}{5} \cdot e^{-3t} \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

10 Sistemi a blocchi

Un sistema è rappresentato da un blocco con un input e un output:

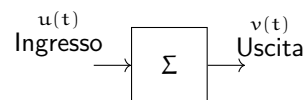


Figura 84: Rappresentazione di un sistema

I sistemi hanno sempre un input e un output perchè consideriamo solo sistemi SISO (Single Input Single Output).

10.1 Tipi di sistemi

I sistemi possono essere messi insieme e questo viene fatto in più modi:

10.1.1 Sistema in serie

In un sistema in serie si mettono i sistemi uno dietro l'altro:

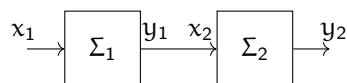


Figura 85: Sistema in serie

$$y_1 = x_2$$

10.1.2 Sistema in parallelo

In un sistema in parallelo si mettono i sistemi uno accanto all'altro:

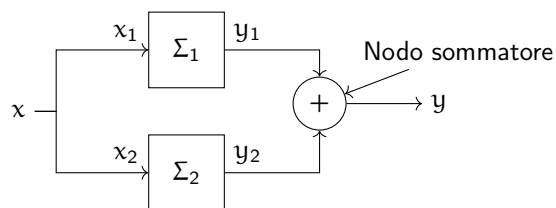


Figura 86: Sistema in parallelo

$$x = x_1 = x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

10.1.3 Sistema di retroazione

In un sistema di retroazione l'output di un sistema è l'input di un altro:

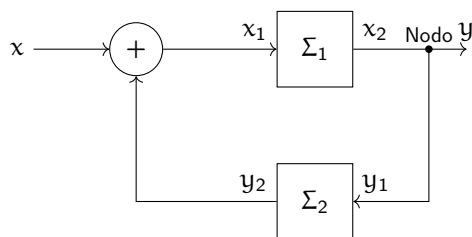


Figura 87: Sistema di retroazione

$$x_1 = x + y_2$$

$$y = y_1 = x_2$$

10.1.4 Nodi sommatori

I nodi sommatori hanno un numero indefinito di ingressi e una sola uscita:

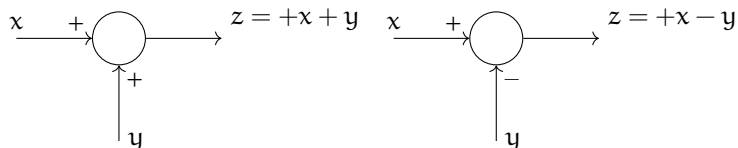


Figura 88: Nodi sommatori con segno diverso

(solitamente viene rappresentato con una X in un cerchio, ma quel simbolo lo useremo per rappresentare il prodotto).

10.2 Controlli

Un controllo è un sistema a tempo continuo con un ingresso e un'uscita e può essere di due tipi:

- **Controllo ad anello aperto:** l'uscita non torna nell'ingresso

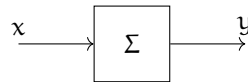


Figura 89: Controllo ad anello aperto

- **Controllo ad anello chiuso:** l'uscita torna nell'ingresso

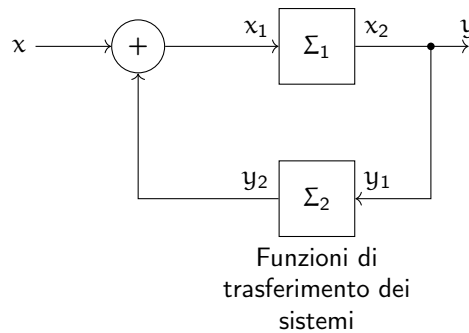


Figura 90: Controllo ad anello chiuso

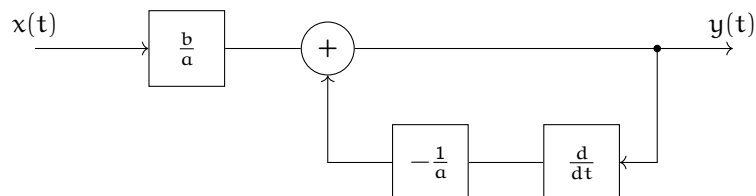
(un esempio è il termostato)

Esempio 10.1. Prendiamo ad esempio la seguente equazione:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t)$$

Il diagramma a blocchi è:



10.2.1 Nomenclatura

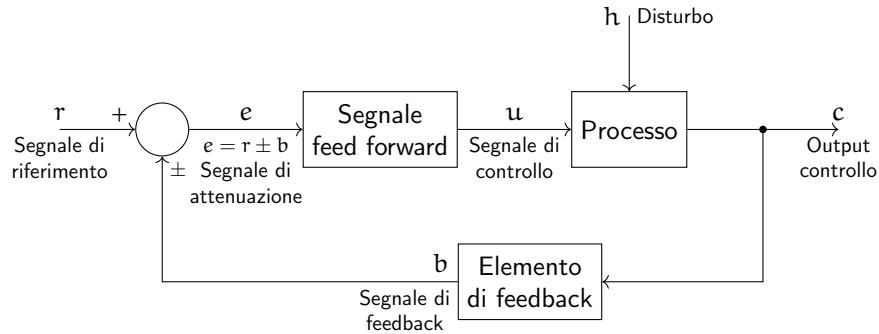


Figura 91: Nomenclatura di un sistema di controllo

Il segnale di attuazione viene chiamato:

- **Feedback negativo:** Quando:

$$e = r - b$$

- **Feedback positivo:** Quando:

$$e = r + b$$

10.3 Controllori

I controllori sono di 3 tipi e vanno a definire le regole di controllo:

- **Proporzionale (P):** L'output è proporzionale all'errore

$$u(t) = K_P \cdot e$$

- **Derivativo (D):** L'output è proporzionale alla derivata dell'errore

$$u(t) = K_D \cdot \frac{de}{dt}$$

- **Integrativo (I):** L'output è proporzionale all'integrale dell'errore

$$u(t) = K_I \cdot \int e \, dt$$

I tre controllori possono essere combinati e si rappresentano con la concatenazione delle lettere:

- **PD:** Proporzionale-Derivativo
- **PI:** Proporzionale-Integrativo
- **DI:** Derivativo-Integrativo

- **PID**: Proporzionale-Integrativo-Derivativo

$$u_{PID} = K_P \cdot e + K_D \cdot \frac{de}{dt} + K_I \cdot \int e dt$$

Un sistema può essere tradotto dal tempo continuo al tempo discreto, attraverso un campionatore:

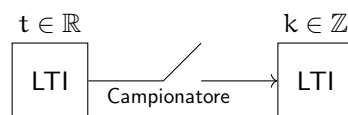
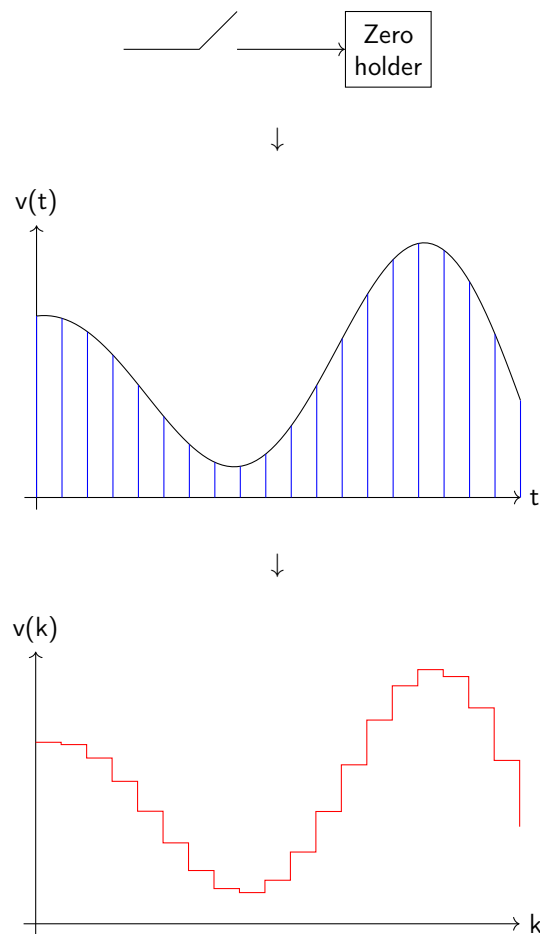
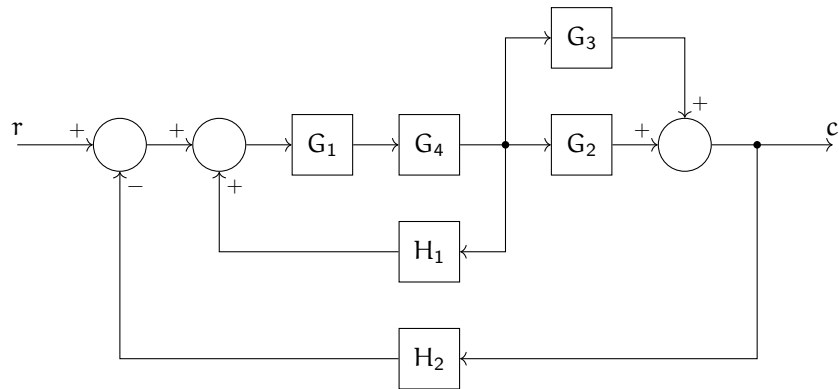


Figura 92: Campionamento di un sistema

Oltre al campionatore si utilizza anche un componente chiamato **zero holder**, che è un componente che mantiene il valore del segnale invariato fino all'istante successivo.



Esempio 10.2. Prendiamo ad esempio il seguente sistema iniziale:



Vogliamo ottenere un sistema in forma canonica, cioè un sistema con un solo nodo, ad esempio:

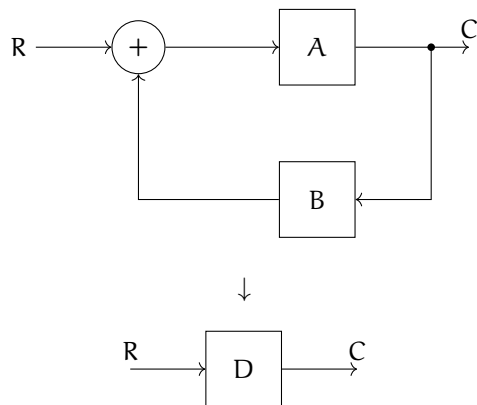


Figura 93: Sistema in forma canonica

10.3.1 Nomenclatura della forma canonica

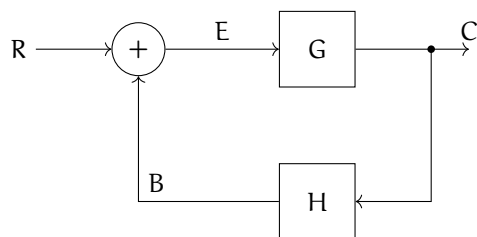


Figura 94: Nomenclatura della forma canonica

- G : Funzione di trasferimento discreta

- H: Funzione di trasferimento di feedback
- GH: Funzione di trasferimento dell'anello (loop)
- $\frac{C}{R}$: Funzione di trasferimento dell'anello chiuso ed è definita come:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} = \frac{\text{Equazione caratteristica dell'ingresso}}{\text{Equazione caratteristica dell'uscita}}$$

- $\frac{E}{R}$: Rapporto del segnale di attuazione (errore) ed è definito come:

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm GH}$$

- $\frac{B}{R}$: Rapporto di feedback ed è definito come:

$$\frac{B}{R} = \frac{GH}{1 \pm GH}$$

L'obiettivo è quello di semplificare il sistema finchè non si ottiene una forma canonica.

Esempio 10.3. Se prendiamo ad esempio il sistema massa-molla-smorzatore l'equazione sarà:

$$\begin{aligned} M \cdot a &= \sum F \\ &= F_{\text{ext}} - Kx - bx' \\ \underbrace{F_{\text{ext}}}_{\text{Ingresso}} &= \underbrace{kx + bx' + Ms''}_{\text{Uscita}} \\ \downarrow \mathcal{L}X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s) \\ &= kX(s) + bsX(s) + Ms^2X(s) \\ X(s) &= \frac{F_{\text{ext}}}{\underbrace{(k + bs + Ms^2)}_A} \end{aligned}$$

Il sistema di questo esempio è il seguente:

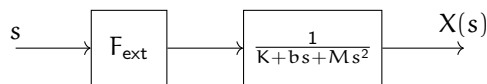


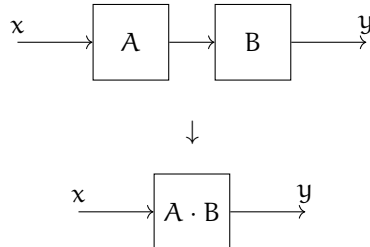
Figura 95: Sistema massa-molla-smorzatore

10.4 Operazioni sui blocchi

I blocchi possono essere combinati tra loro in diversi modi:

10.4.1 Combinazione di blocchi in serie

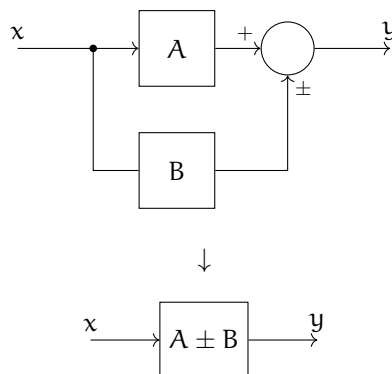
Dati due blocchi A e B si ottiene un nuovo blocco il cui contenuto è il prodotto dei due blocchi:



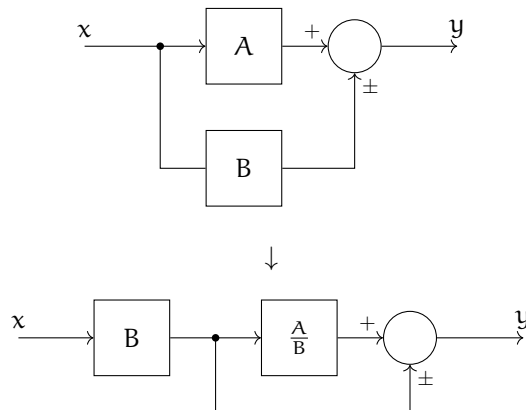
Questo perchè avere due sistemi in serie equivale a fare una convoluzione, di conseguenza un prodotto di sistemi.

10.4.2 Combinazione di blocchi in parallelo

Dati due blocchi A e B si ottiene un nuovo blocco il cui contenuto è la somma dei due blocchi:



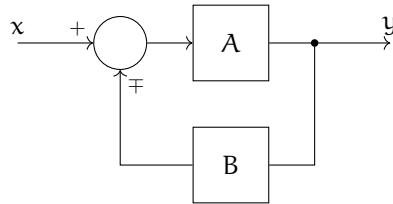
1. Rimozione di un blocco parallelo Dato un blocco A in parallelo con un blocco B si può rimuovere la connessione parallela sostituendola con il rapporto tra i 2 blocchi



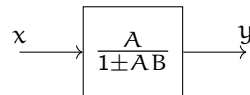
10.4.3 Rimozione di un anello feedback

Dato un blocco A in feedback con un blocco B si può rimuovere la connessione di feedback sostituendola con:

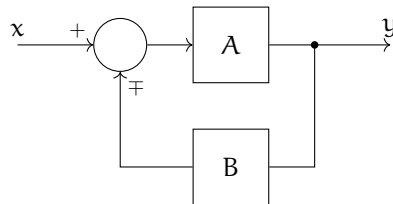
$$\frac{A}{1 \pm AB}$$



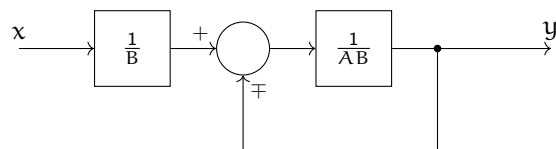
↓



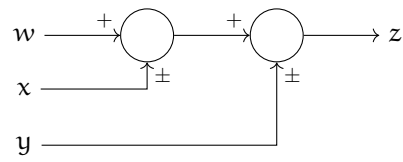
1. Rimozione dal loop



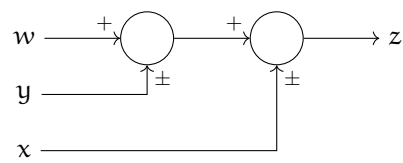
↓



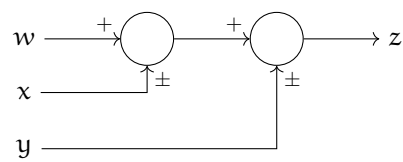
10.4.4 Riorganizzazione degli input nel nodo sommatore



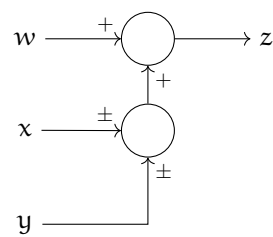
↓



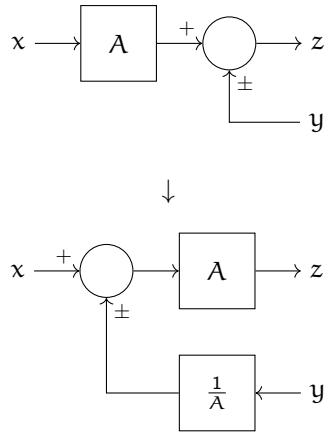
1. Riorganizzazione dei nodi sommatori



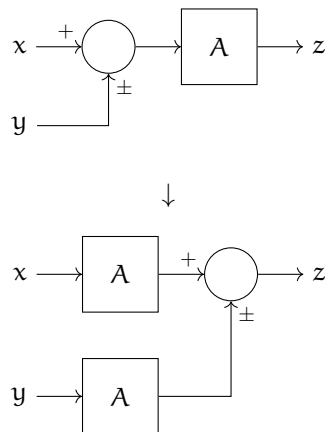
↓



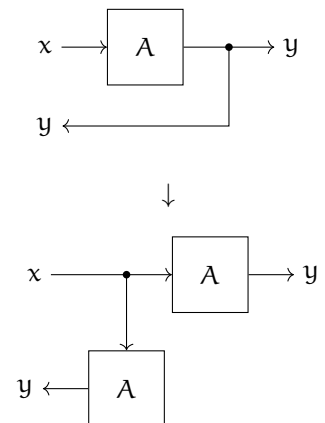
10.4.5 Spostamento dei nodi somma prima del blocco



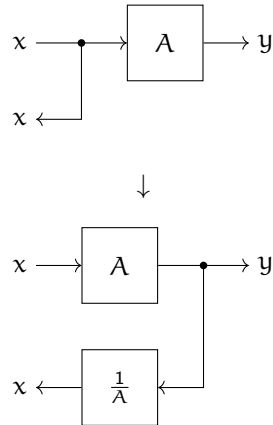
10.4.6 Spostamento dei nodi somma dopo il blocco



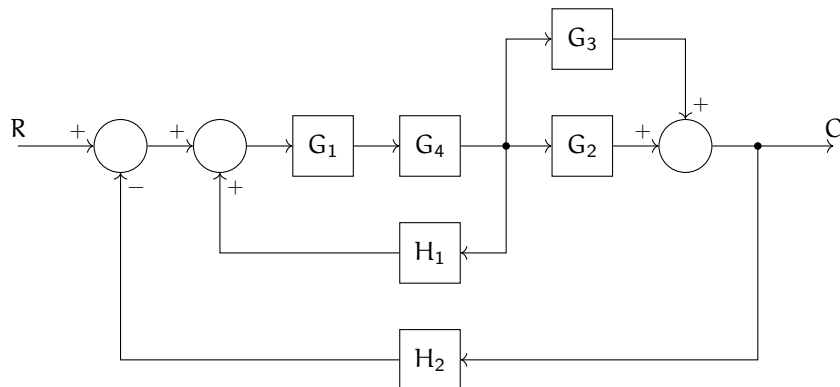
10.4.7 Spostamento di un nodo prima di un blocco



10.4.8 Spostamento di un nodo dopo un blocco

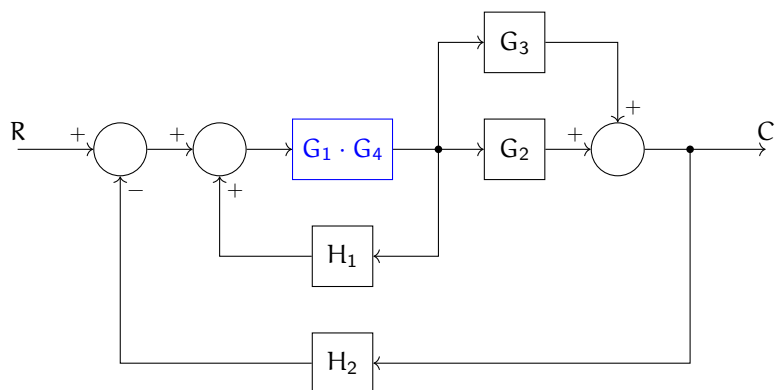


Esempio 10.4. Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

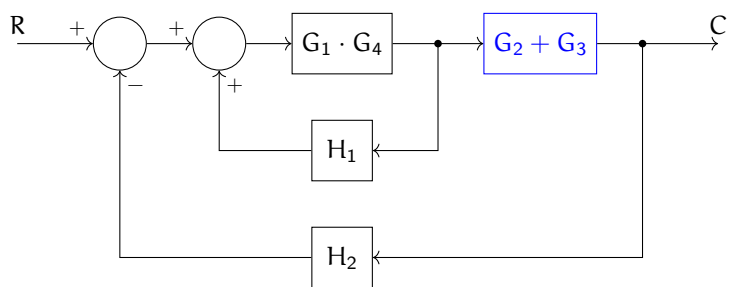


L'obiettivo è quello di trasformare tutto questo sistema in un unico blocco per poter poi fare la trasformata di Laplace.

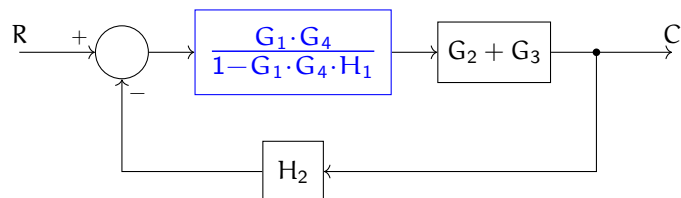
1. Applicare la trasformazione delle serie per ogni blocco in serie:



2. Applicare la trasformazione dei blocchi in parallelo per ogni blocco in parallelo:



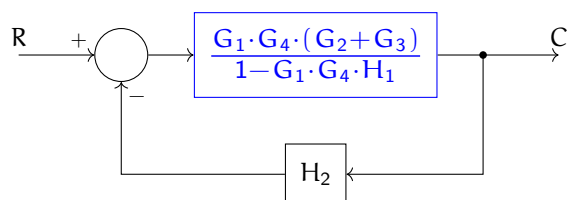
3. Applicare la trasformazione di retroazione per ogni blocco in retroazione:



4. Applicare la trasformazione dello spostamento dei nodi/nodi sommatrici:

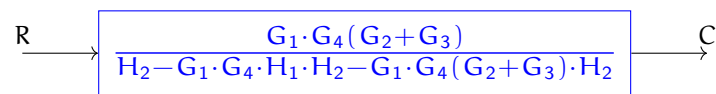
In questo caso non serve

5. Ripetere i passaggi fino ad ottenere un unico blocco:



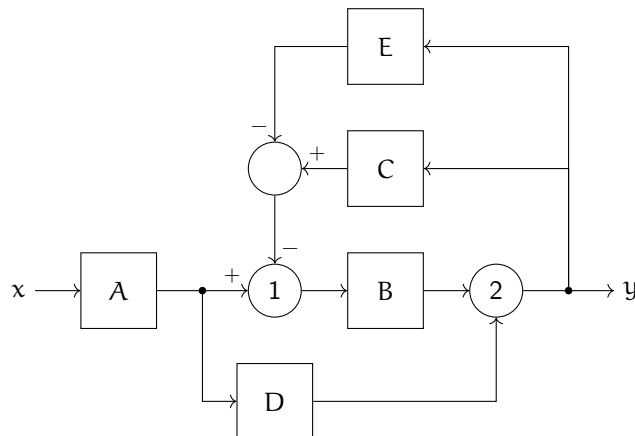
Il sistema finale è dato da:

$$\begin{aligned} & \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1} \cdot H_2} = \\ & = \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 - \cancel{G_1 \cdot G_4} \cdot H_1} \cdot \frac{1 - \cancel{G_1 \cdot G_4} \cdot H_1}{[1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1 - G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)] \cdot H_2} = \\ & = \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{H_2 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1 \cdot H_2 - G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3) \cdot H_2} = \end{aligned}$$



Questo è il sistema finale in forma canonica.

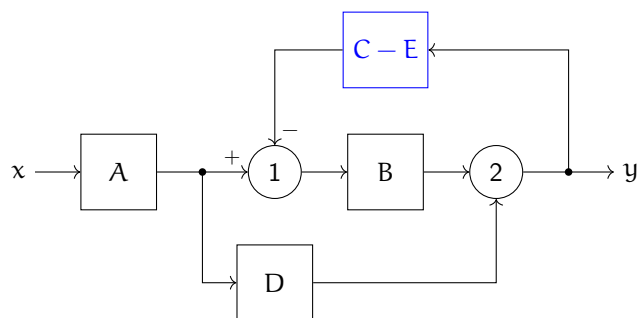
Esempio 10.5. Consideriamo il seguente sistema:



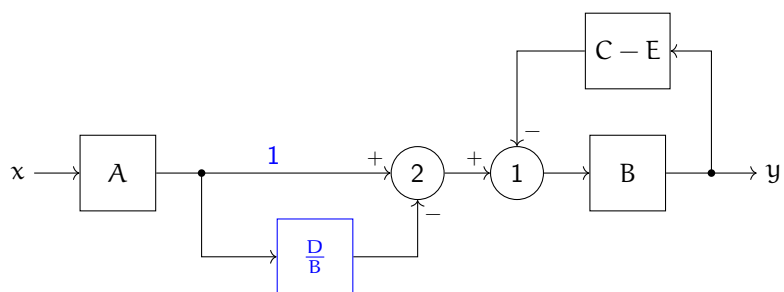
dove:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{s} \\ B &= s^2 \\ C &= \frac{(s-2)(s+1)}{s^2} \\ D &= s+2 \\ E &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

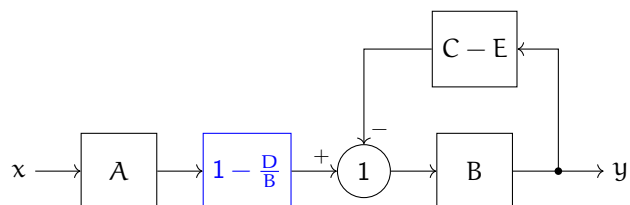
I passaggi sono i seguenti:



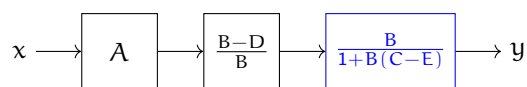
1.



2.



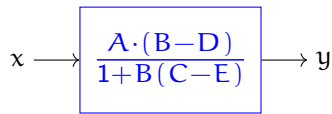
3.



4.

5. Il sistema finale è dato da:

$$A \cdot \frac{B-D}{B} \cdot \frac{B}{1+B(C-E)}$$



Alla fine la funzione di trasferimento del sistema sarà:

$$\frac{A \cdot (B - D)}{1 + B(C - E)} = \frac{\frac{1}{s} \cdot (s^2 - (s + 2))}{1 + \left(\cancel{s^2} \cdot \left(\frac{(s-2)(s+1)}{\cancel{s^2}} - \frac{1}{\cancel{s^2}} \right) \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{s} \cdot (s^2 - s + 2)}{1 + (s - 2)(s + 1) - 1}$$

11 Diagrammi di flusso

11.1 Nomenclatura

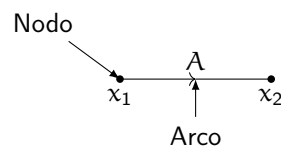
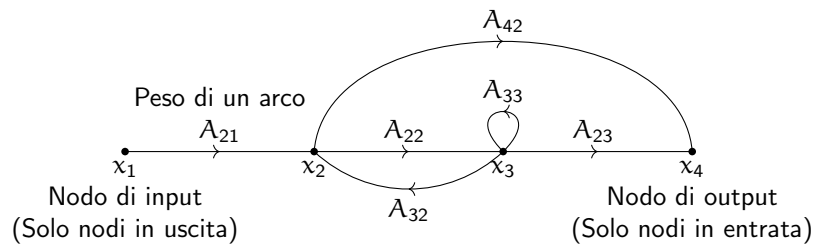


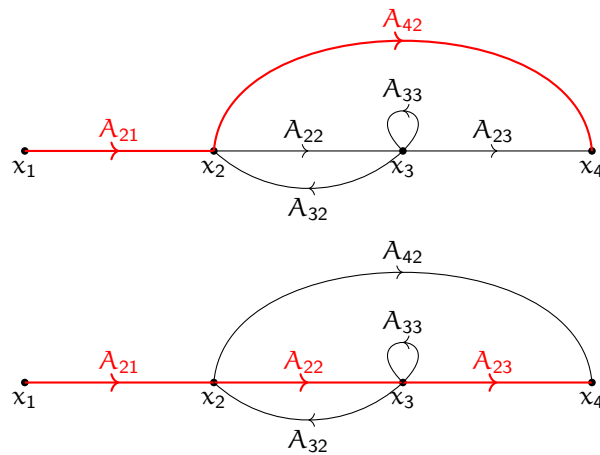
Figura 96: Nomenclatura base

Prendiamo ad esempio il seguente diagramma:

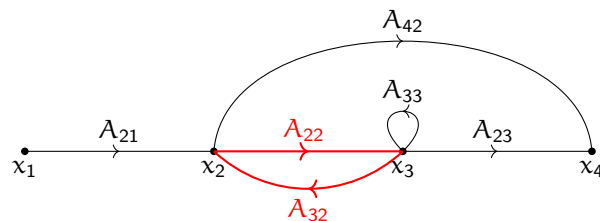


Definiamo:

- **Percorso in avanti:** Un cammino che unisce un nodo di ingresso ad un nodo di uscita



- **Percorso ad anello:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo senza passare più volte per nodi intermedi. Si dice **self loop** quando passa più volte per lo stesso nodo.



- **Guadagno:** Prodotto di tutti i pesi degli archi lungo un percorso

11.2 Regole di trasformazione

11.2.1 Regola dell'addizione

$$\sum x_i \cdot A_i = y$$

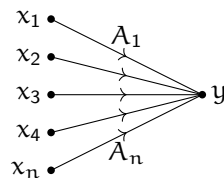


Figura 97: Regola dell'addizione

11.2.2 Regola della trasmissione

$$y_i = x \cdot A_i$$

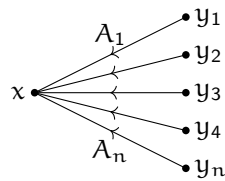


Figura 98: Regola della trasmissione

11.2.3 Regola della moltiplicazione

$$y = x_1 \cdot A \cdot x_2 \cdot B \dots$$

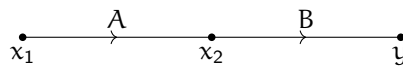
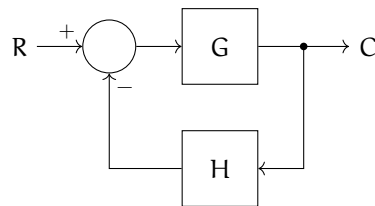


Figura 99: Regola della moltiplicazione

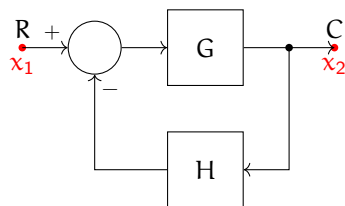
11.3 Passaggio dallo schema a blocchi al diagramma di flusso

Prendiamo uno schema a blocchi base:

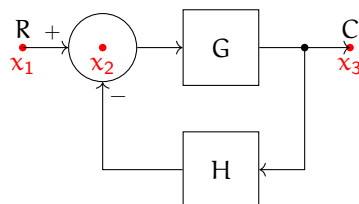


Per convertire questo schema in un diagramma di flusso dobbiamo seguire le seguenti regole:

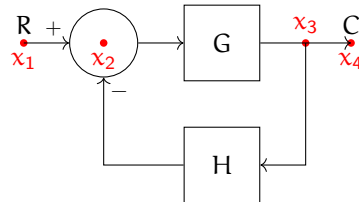
1. Individuare i nodi di ingresso e di uscita



2. Per ogni nodo somma si aggiunge un nodo



3. Per ogni nodo dello schema a blocchi si aggiunge un nodo al diagramma di flusso



4. Unisco i nodi con archi il cui peso è la funzione dentro al blocco. Se tra i due nodi non c'è un blocco, l'arco avrà peso 1

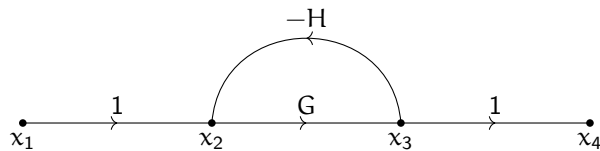


Figura 100: Diagramma di flusso

L'obiettivo anche in questo caso è quello di ridurre il diagramma di flusso ad un unico arco per ottenere la funzione di trasferimento:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm H \cdot G}$$

Definizione 11.1 (Formula di Mason). La funzione di trasferimento è data da:

$$T = \frac{\sum_i p_i \Delta_i}{\Delta}$$

dove:

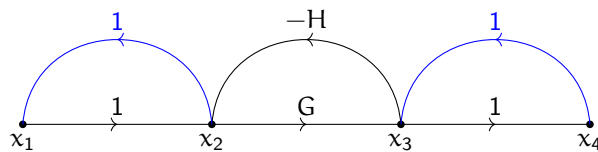
- p_i : È il guadagno dell' i -esimo percorso in avanti.
- Δ : È il discriminante del sistema ed è definito come:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j p_{j,k} \\ &= 1 - \sum_j p_{j,1} + \sum_j p_{j,2} - \sum_j p_{j,3} + \dots \\ &= 1 - \left(\text{somma dei guadagni di tutti gli archi} \right) + \left(\text{somma dei guadagni dei prodotti degli anelli che non si toccano due a due} \right) + \\ &\quad \left(\text{Somma dei guadagni dei prodotti degli anelli che non si toccano tre a tre} \right) + \dots \end{aligned}$$

Dove $p_{j,k}$ è il j -esimo prodotto dei percorsi di ordine k che non si toccano.

- Δ_i : Sono i discriminanti in cui i pesi degli archi che toccano il percorso vengono messi a 0.

Esempio 11.1. Prendiamo ad esempio il seguente diagramma di flusso:



Il percorso 1 è:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

Il percorso 1,1 è:

$$P_{1,1} = P_1^1 = A_{1,1} = A_1^1 = (x_2, x_3) = -GH$$

Ci sarebbero anche gli anelli che hanno guadagno 1, ma non vengono considerati.

$$P_{2,1} = P_2^1 = A_{2,1} = A_2^1 = (x_1, x_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ora si può calcolare il discriminante:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) + (0) = 1 + GH$$

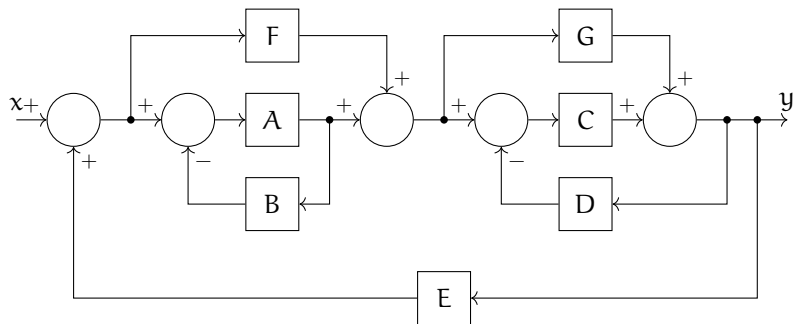
Annullo tutti gli archi che toccano il percorso 1:

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{P_{1,1}}^0 = 1 - 0 = 1$$

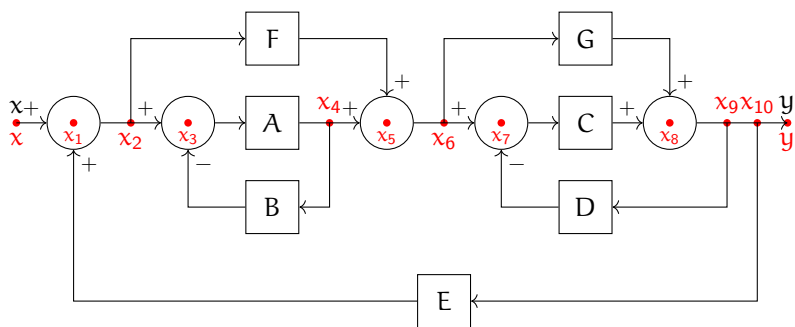
Ora si può calcolare la funzione di trasferimento:

$$T = \frac{\sum_1 P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G \cdot 1}{1 + GH} = \frac{G}{1 + GH}$$

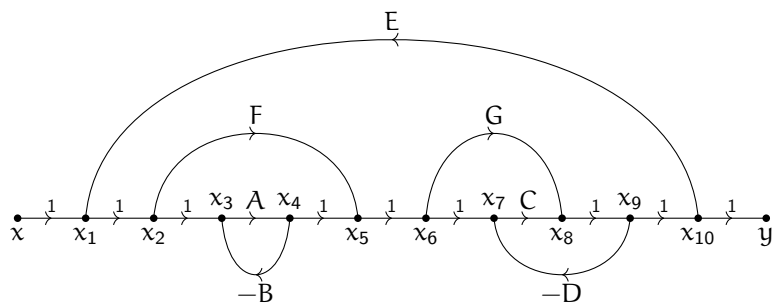
Esempio 11.2. Prendiamo ad esempio il seguente schema a blocchi:



Deriviamo i nodi del diagramma di flusso:



Rappresentiamo il diagramma di flusso:



Le due rappresentazioni sono equivalenti.

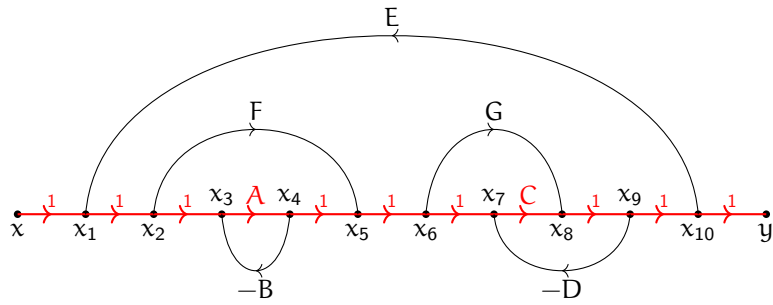
Utilizziamo la formula di Mason per calcolare la funzione di trasferimento:

1. Troviamo tutti i percorsi:

(a)

$$P_1 = AC$$

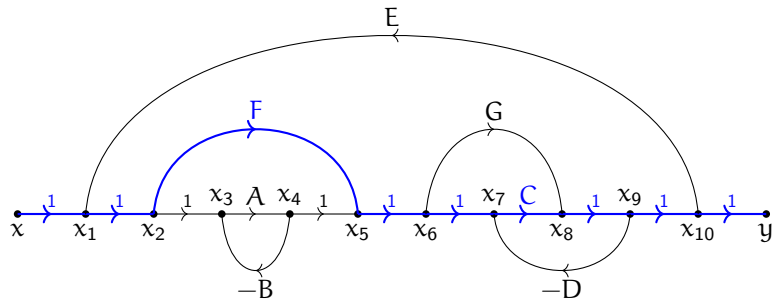
I nodi coinvolti sono: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$



(b)

$$P_2 = FC$$

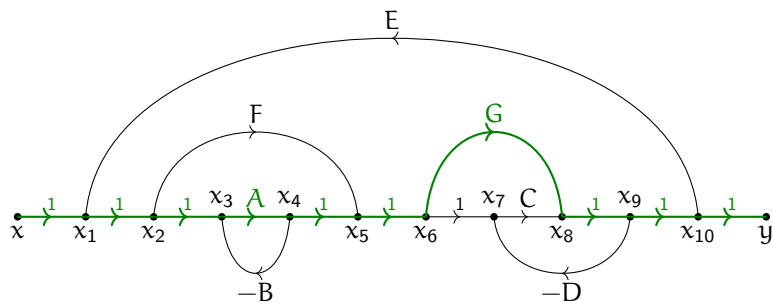
I nodi coinvolti sono: $(x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$



(c)

$$P_3 = AG$$

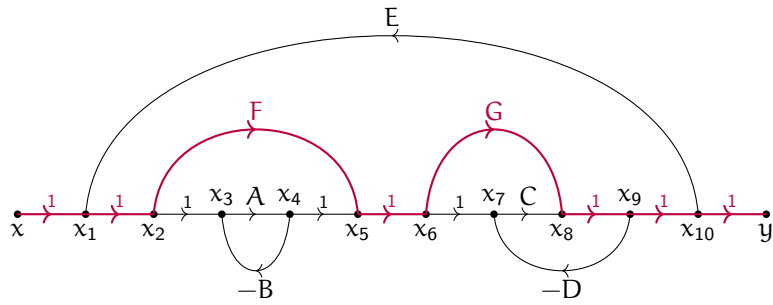
I nodi coinvolti sono: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10})$



(d)

$$P_3 = FG$$

I nodi coinvolti sono: $(x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10})$

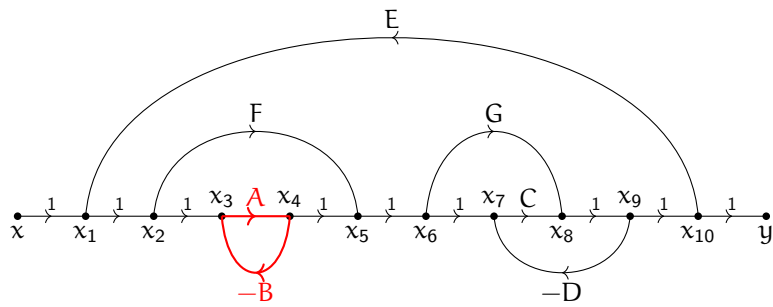


2. Troviamo tutti gli anelli:

- Anelli di ordine 1

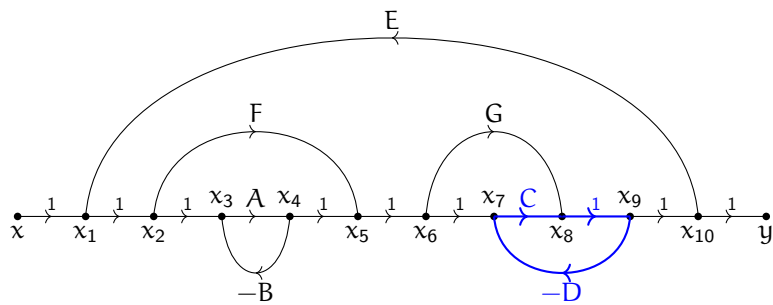
(a)

$$A_1^1 = -AB \quad (x_3, x_4)$$



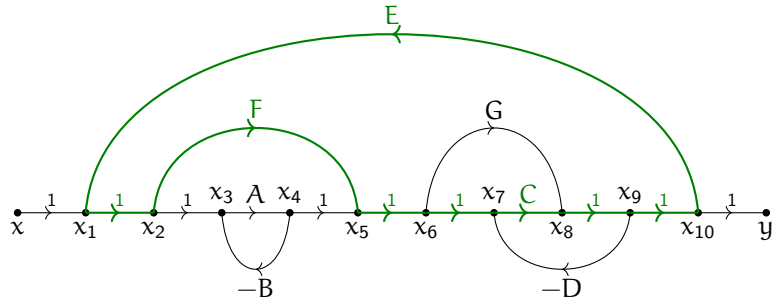
(b)

$$A_2^1 = -CD \quad (x_7, x_8, x_9)$$



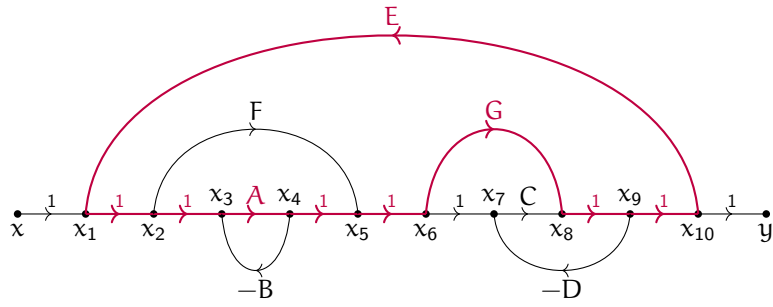
(c)

$$A_3^1 = FCE \quad (x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$



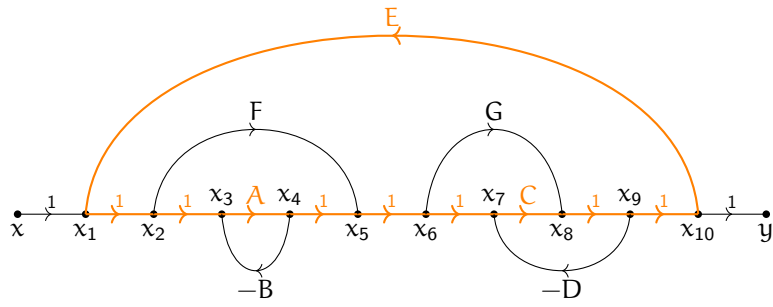
(d)

$$A_4^1 = FGE \quad (x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10})$$



(e)

$$A_5^1 = ACE \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$$



(f)

$$A_6^1 = AGE \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10})$$

4. Calcoliamo i discriminanti di tutti i percorsi:

$$P_1 = AC$$

$$\Delta_1 = 1 + \cancel{AB} + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1$$

$$P_2 = FC$$

$$\Delta_2 = 1 + AB + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1 + AB$$

$$P_3 = AG$$

$$\Delta_3 = 1 + \cancel{AB} + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1$$

$$P_4 = FG$$

$$\Delta_4 = 1 + AB + \cancel{CD} - \cancel{FCE} - \cancel{FGE} - \cancel{ACE} - \cancel{AGE} + \cancel{ABCD} - \cancel{ABCEF} - \cancel{ABEFG} = 1 + AB$$

5. Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta} \\ &= \frac{AC \cdot 1 + FC \cdot (1 + AB) + AG \cdot 1 + FG \cdot (1 + AB)}{1 + AB + CD - FCE - FGE - ACE - AGE + ABCD - ABCEF - ABEFG} \\ &= \frac{AC + FC + FCAB + AG + FG + FGAB}{1 + AB + CD - FCE - FGE - ACE - AGE + ABCD - ABCEF - ABEFG} \end{aligned}$$

12 Diagrammi di Bode

Questo diagramma ci aiuta a capire il comportamento del sistema al variare della frequenza del segnale di ingresso. In particolare ci permette di capire come si comporta un sistema descritto da segnali **sinusoidali**.

12.1 Motivo delle sinusoidi

I sistemi descritti da segnali sinusoidali sono utili perchè vedremo che qualsiasi segnale può essere rappresentato come una somma di sinusoidi.

Un sistema LTI causale permette le seguenti operazioni:

- $u(t) \cdot a$
- $\frac{du(t)}{dt}$
- $\int u(t) dt$
- $u_1(t) + u_2(t)$

L'output del sistema è un'onda scalata rispetto all'ampiezza o ritardata rispetto al tempo.

Esempio 12.1. Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

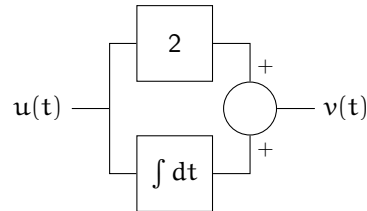


Figura 101: Esempio di sistema

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \alpha\text{Hz}$$

Calcoliamo l'ingresso:

$$\begin{aligned} v(t) &= 2 \cdot u(t) + \int u(t) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

Utilizziamo un'**identità trigonometrica**, cioè:

$$\begin{aligned} a \sin(x) + b \cos(x) &= \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \rho) \end{aligned}$$

dove: $\rho = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad a \geq 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \overbrace{2}^a \sin\left(\overbrace{\frac{1}{2}t}^x\right) \overbrace{-2}^b \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \text{atan}\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{8} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \text{atan}(-1)\right) \\ &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\ &= A \cdot \sin(\omega + \phi) \end{aligned}$$

12.2 Rappresentazione del diagramma di Bode

Il diagramma di bode permette di rappresentare il comportamento di un sistema LTI formato da sinusoidi, di seguito guardiamo un diagramma semi-logaritmico (cioè con un asse lineare e uno logaritmico) che rappresenta l'ampiezza (grafico in alto) e la fase (grafico in basso) di un sistema LTI:

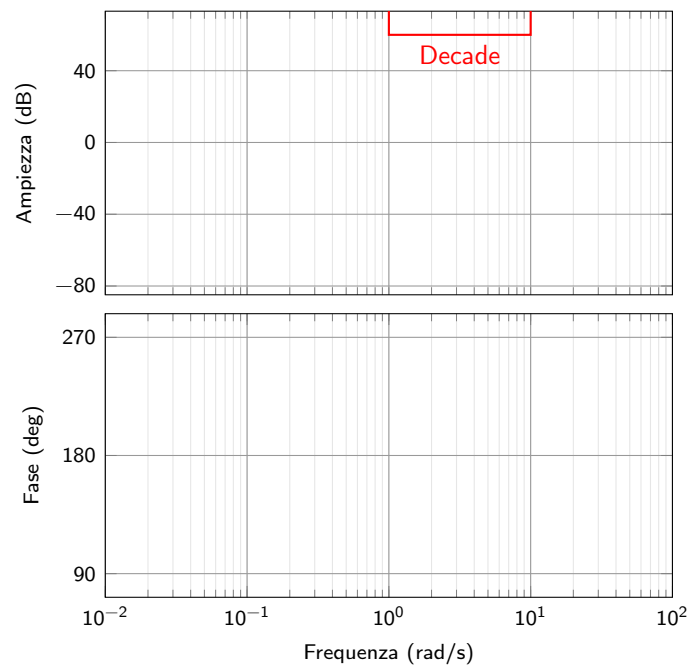


Figura 102: Diagramma di Bode

Osservazione:

Il decibel dB è un unità di misura inventata nel 1920 per misurare quanto si disperde il segnale acustico su una transmission unit ($1\text{TU} = 10 \log_{10} \Delta_{\text{Potenza}}$). Quindi un decibel è il minimo di potenza che un orecchio umano può percepire.

$$\text{Potenza} = \text{Ampiezza}^2$$

$$1\text{bel} = 1\text{TU} = 10 \log_{10} A^2 = 20 \log_{10} A$$

$$1\text{dB} = \frac{1}{10}\text{bel}$$

Esempio 12.2. Riprendiamo l'esempio 12.1:

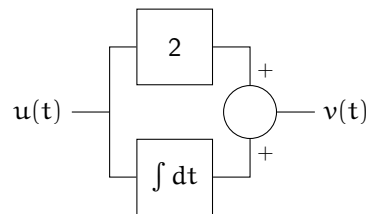
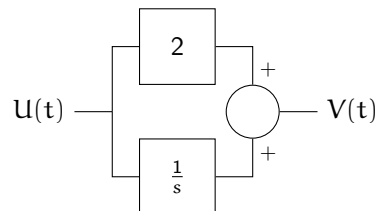


Figura 103: Esempio di sistema

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \omega = \frac{1}{2}$$

$$v(t) = 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right)$$

Studiamo il sistema in frequenza:



$$V(s) = \left(2 + \frac{1}{s}\right) U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s + 1}{s} \quad \text{Funzione di trasferimento del sistema}$$

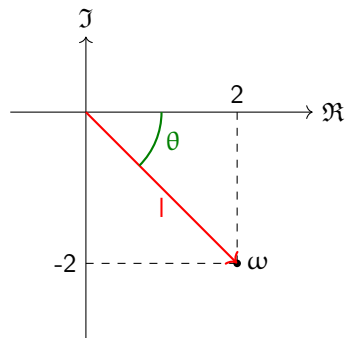
s è un numero complesso:

$$s = \sigma + j\omega$$

Con la risposta in frequenza la s diventa $s = j\omega$, quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\ &= \frac{2j\cancel{\omega}}{j\cancel{\omega}} + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} \\ &= 2 - \frac{1}{\omega} \cdot j \\ \omega &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La risposta del sistema nel piano dei complessi è:



dove:

$$\text{Ampiezza} = l = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

$$\text{Fase} = \theta = \text{atan2}(\text{Im}, \text{Re})$$

$$\text{atan2}(\sigma, j\omega) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \text{se } \sigma > 0, \omega \in \mathbb{R} \\ \text{segno}(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{se } \sigma = 0, \omega \neq 0 \\ \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot \text{segno}(\omega) & \text{se } \sigma < 0, \text{ o } \sigma = 0, \omega \geq 0 \end{cases}$$

Il diagramma di Bode sarà:

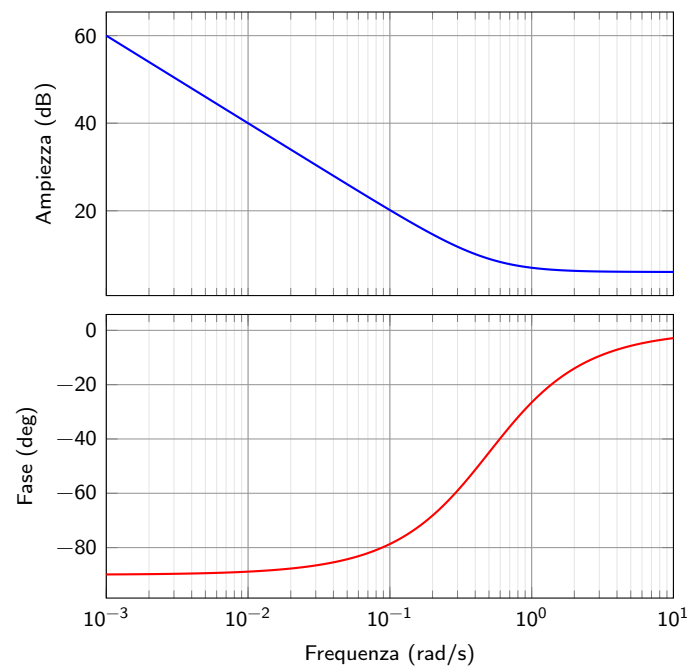


Figura 104: Diagramma di Bode

12.2.1 Risposta in frequenza

Si parte dal sistema con un input preciso:

$$u(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\omega_0 t} e^{j\phi}$$

dove:

$$A \in \mathbb{R}_+$$

$$\phi, \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Questo input viene messo in un sistema BIBO stabile e riceviamo un output $v(t)$. Poi calcoliamo:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

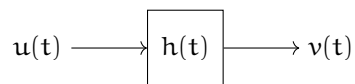
$$\downarrow s = j\omega_0$$

$$= \mathcal{L}[h(t)](s) \Big|_{s=j\omega_0}$$

Se in input avessimo degli esponenziali o delle sinusoidali, l'output cambia solo per un fattore di scala o di fase:

Esempio 12.3. Se consideriamo un **fasore**:

$$u(t) = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$



$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$= A \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= A \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$$

$$= A \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \cdot A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= A \cdot A(\omega) \cdot e^{j(\phi + \varphi(\omega))} \cdot e^{j\omega t}$$

dove:

A = Ampiezza di $u(t)$

$A(\omega)$ = Ampiezza della risposta in frequenza

ϕ = Fase di $u(t)$

$\varphi(\omega)$ = Fase della risposta in frequenza

Notiamo che la frequenza di $u(t)$, cioè ω , rimane invariata.

12.3 Esempi

Esempio 12.4. Consideriamo l'esempio 12.1 nel dominio del tempo:

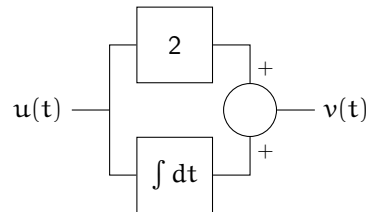
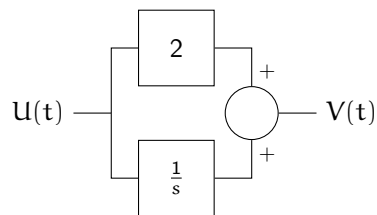


Figura 105: Esempio di sistema

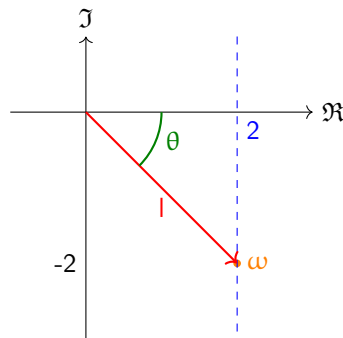
$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\
 v(t) &= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\
 &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\text{rad}\right)
 \end{aligned}$$

Possiamo andare a trasformare il sistema nel dominio delle frequenze:



$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\
 s &= \sigma + j\omega = j\omega \\
 \omega &= \frac{1 \text{ rad}}{2 \text{ s}} = \frac{1}{2} \text{ Hz} \quad \frac{V(t)}{U(t)} = \frac{2s + 1}{s} \\
 &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\
 &= 2 - \frac{1}{\omega}j \\
 \omega &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Il grafico sul piano complesso sarà:



Sappiamo che:

- L'ampiezza l vale:

$$l = |\sigma + j\omega| = |\sigma| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

- La fase θ vale:

$$\theta = \arg(\sigma + j\omega) = \text{atan2}(\text{Im}, \text{Re})$$

$$\arg(\sigma + j\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \sigma > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \sigma = 0, \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \sigma = 0, \omega < 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi & \sigma < 0, \omega \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \pi & \sigma < 0, \omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{segno}(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\arg(\sigma + j\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \sigma > 0 \\ \text{segno}(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \sigma = 0, \omega \neq 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot \text{segno}(\omega) & \sigma < 0 \end{cases}$$

Se volessimo disegnare il grafico del punto trovato sul grafico dei complessi esso diventa:

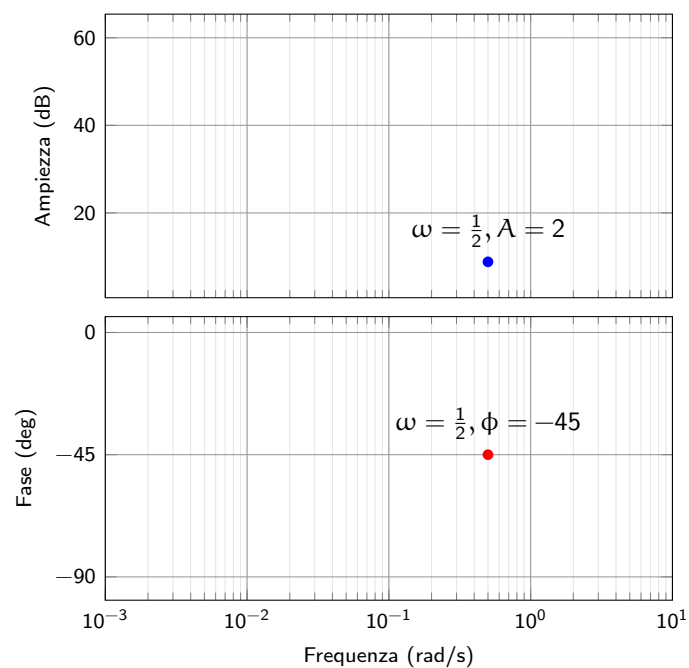


Figura 106: Singolo punto nel diagramma di Bode

Se il nostro punto andasse più in basso, cioè ω diventa più piccolo, allora la fase diventa più piccola fino a -90 gradi. Se invece il punto va più in alto, cioè ω diventa più grande, allora la fase diventa più grande fino a 0 gradi.

Per ogni frequenza ω abbiamo un'ampiezza e una fase diversa e si vuole rappresentare questo grafico in un diagramma di Bode:

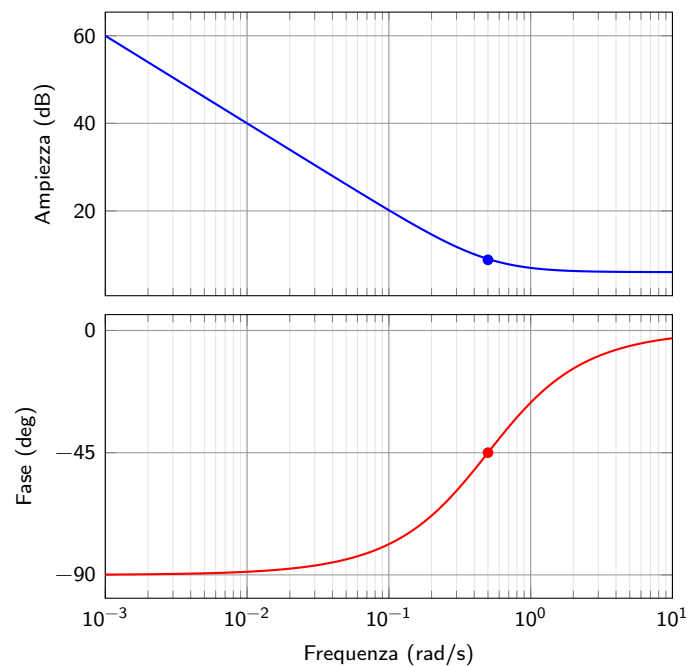


Figura 107: Diagramma di Bode

12.3.1 Operazioni tra numeri complessi

Siano $a, b \in \mathbb{C}$

$$1. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\arg(a \cdot b) = \arg(a) + \arg(b)$$

$$2. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$

$$3. |a^\mu| = |a|^\mu$$

$$\arg(a^\mu) = \mu \cdot \arg(a)$$

12.3.2 Logaritmo di un numero complesso

Il logaritmo di un numero complesso s è quel numero $x \in \mathbb{C}$ tale che:

$$\ln(s) = x \iff s = e^x$$

Se scriviamo s come:

$$s = \rho e^{j\theta}$$

e x in forma polare:

$$x = \sigma + j\omega$$

Abbiamo che:

$$s = e^x \rightarrow \rho e^{j\theta} = e^{\sigma + j\omega}$$

$$e^{\ln(\rho)} \cdot e^{j\theta} = e^\sigma \cdot e^{j\omega}$$

Da questo otteniamo:

$$\begin{aligned}\ln(\rho) &= \sigma \\ \theta &= \omega\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\ln(s) &= x \\ &= \ln(\rho) + j\theta \\ &= \ln|s| + j \cdot \arg(s)\end{aligned}$$

12.4 Forma di Bode

Sappiamo che la funzione di trasferimento è calcolata come il rapporto tra il polinomio caratteristico dell'ingresso e il polinomio caratteristico dell'uscita:

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{\sum_j b_j s^j}{\sum_i a_i s^i} \cdot U(s) \\ &= k \cdot \frac{(s - z_1)^{\mu_1} \cdot (s - z_2)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (s - z_l)^{\mu_l}}{(s - p_1)^{\nu_1} \cdot (s - p_2)^{\nu_2} \cdot \dots \cdot (s - p_r)^{\nu_r}} \\ &= \text{Costante} \cdot \frac{\text{Zeri di } H(s), \text{ radici del numeratore}}{\text{Poli di } H(s), \text{ radici del denominatore}}\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \text{molteplicità degli zeri} \\ \nu_i &= \text{molteplicità dei poli} \\ l \leq m, \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l &= m \\ r \leq n, \quad \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r &= n\end{aligned}$$

Da questa funzione di trasferimento vogliamo trovare la **forma di Bode**. Riscriviamo la funzione di trasferimento come:

$$H(s) = k_b \cdot \frac{\prod_i (1 + s\tau_i')^{\mu_i'} \cdot \prod_k \left(1 + 2\zeta_k' \frac{s}{\omega_{n,k}'} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k}')^2}\right)^{\mu_k'}}{(s^{\nu_i}) \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k \left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

Questa è detta **forma di Bode**, dove:

- k_b : È il termine costante chiamato **Guadagno di Bode**
- s^{ν_i} : Raggruppa tutte le radici nulle:

$$\frac{s^s}{s^n} = \frac{1}{s^{-1}}$$

- $(1 + s\tau_i)^{\mu_i}$: Raggruppa la singola radice reale:

$$(s + 1)$$

- $\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}$: Raggruppa la singola radice complessa coniugata

- τ : Costante di tempo

Per arrivare alla forma di Bode bisogna raccogliere tutte le "costanti":

1. Poli e zeri nulli:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= 4 \frac{s^3 + s^2 - 2s}{s^3 + s^4} \\
 &= 4 \frac{s (s^2 + s - 2)}{s^2 (s + 1)} \quad \text{nulli} \\
 &= 4 \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Forma di Bode}} \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s + 1}
 \end{aligned}$$

La forma di Bode è:

$$\frac{1}{s^v}$$

2. Poli e zeri reali

$$\begin{aligned}
 H(s) &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s + 1} \\
 \Delta &= b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 9 > 0 \quad \checkmark \\
 H(s) &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s + 1} \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(s - 1)(s + 2)}{s + 1} \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(-1)(1 - s) \cdot (+2)(1 + \frac{s}{2})}{(1)(1 + s)} \\
 &= \frac{4 \cdot (-1) \cdot (2)}{(1)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - s)(1 + \frac{s}{2})}{(1 + s)} \\
 &= -8 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - s)(1 + \frac{s}{2})}{(1 + s)}
 \end{aligned}$$

Siamo arrivati ad una forma di Bode:

$$k_b \cdot \frac{1}{s^v} \cdot \frac{(1 + s\tau'_1)^{\mu'_1} (1 + s\tau'_2)^{\mu'_2}}{(1 + s\tau_1)^{\mu_1}}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 k_b &= -8 \\
 \frac{1}{s^v} &= \text{Zero nullo} \\
 \tau'_1 &= -1 \\
 \tau'_2 &= \frac{1}{2} \\
 \tau_1 &= 1
 \end{aligned}$$

3. Poli e zeri complessi coniugati

$$\begin{aligned}
 z &= \sigma + j\omega \\
 \bar{z} &= \sigma - j\omega
 \end{aligned}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}
 & (s - (\sigma + j\omega))^{\mu} \cdot (s - (\sigma - j\omega))^{\mu} \\
 &= (s^2 - s\sigma + sj\omega - s\sigma - sj\omega + |z|^2)^{\mu} \\
 &= (s^2 - 2s\sigma + |z|^2)^{\mu} \\
 &= |z|^{2\mu} \left(1 - 2\frac{\sigma}{|z|^2}s + \frac{s^2}{|z|^2} \right)^{\mu} \\
 &= |z|^{2\mu} \left(1 - 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)^{\mu}
 \end{aligned}$$

Dove:

$$\begin{aligned}
 \zeta - \frac{\sigma}{|z|} &= \frac{-\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \text{Coefficiente di smorzamento} \\
 \omega_n &= |z| = \text{Pulsazione naturale}
 \end{aligned}$$

Esempio 12.5. Prendiamo ad esempio il sistema:

$$(s - (2 + j))^2 (s - (2 - j))^2$$

Calcoliamo la forma di Bode:

$$\begin{aligned}
 & (s - (2 + j))^2 (s - (2 - j))^2 \\
 &= (s^2 - 2s + sj - 2s - sj + |2 + j|^2)^2 \\
 &= (s^2 - 4s + 5)^2 \\
 &= 5 \left(1 - \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5} \right) \cdot 5 \left(1 - \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5} \right) \\
 &= (5)^2 \left(1 - \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5} \right)^2
 \end{aligned}$$

Dobbiamo trovare ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\omega_n^2} = \sqrt{5}$$

La formula diventa:

$$5^2 \left(1 - \frac{4}{\sqrt{5}}s + \frac{s^2}{(\sqrt{5})^2} \right)^2$$

Dobbiamo trovare ζ :

$$\begin{aligned}
 \frac{2\zeta}{\omega_n} &= -\frac{4}{\sqrt{5}} \\
 \frac{2\zeta}{\cancel{\sqrt{5}}} &= -\frac{4}{\cancel{\sqrt{5}}} \\
 \zeta &= -\frac{\cancel{4}^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

La formula diventa:

$$5^2 \left(1 + 2 \underbrace{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{\zeta} \underbrace{\frac{s}{\sqrt{5}}}_{\omega_n} + \underbrace{\frac{s^2}{(\sqrt{5})^2}}_{\omega_n^2} \right)$$

Esempio 12.6. Prendiamo in considerazione un trinomio:

$$5 \left(1 - \frac{2}{5}s + \frac{3}{5}s^2 \right)$$

Troviamo ω_n e ζ :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{5}{3}} \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} &= -\frac{2}{5} \\ \zeta &= -\frac{1}{5\omega_n} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

La formula diventa:

$$5 \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{15}} \right) \frac{s}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + \frac{s^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \right)^2} \right)$$

Attenzione:

Non tutti i trinomi sono complessi coniugati

Quello che si vuole fare una volta trovata la forma di bode è quella di trasformare tutto in frequenza:

$$H(s) \rightarrow H(j\omega)$$

Quindi la forma di Bode in frequenza diventa:

$$H(j\omega) = k_b \frac{\prod_i (1+j\omega\tau_i')^{\mu_i'} \cdot \prod_k \left(1+j2\zeta_k' \frac{\omega}{\omega_{n,k}'} - \frac{\omega^2}{(\omega_{n,k}')^2} \right)^{\mu_k'}}{(j\omega)^v \prod_i (1+j\omega\tau_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k \left(1+j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{n,k}} - \frac{\omega^2}{(\omega_{n,k})^2} \right)^{\mu_k}}$$

Esempio 12.7. Vogliamo portare in forma di bode la seguente funzione di

trasferimento:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^3 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2} \\ &= \frac{s(s^2 - 2s - 8)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)} \end{aligned}$$

Il delta del numeratore è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 36 > 0$$

È maggiore di 0, quindi si può semplificare.

Il delta del denominatore è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$$

È minore di 0, quindi non si può semplificare.

$$\begin{aligned} &= \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{(s - 4)(s + 2)}{s(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{(-4)\left(1 - \frac{s}{4}\right) \cdot (2)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s \cdot (2)\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} \\ &= -4 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{4}\right)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

Questa è la forma di Bode.

Ora vogliamo trovare tutte le costanti:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{s}{4}\right) &\rightarrow \tau_1 = -\frac{1}{4} \\ \left(1 + \frac{s}{2}\right) &\rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2} \\ \left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right) &\rightarrow \omega_n^2 = 2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} = -1 &\rightarrow \frac{2\zeta}{\sqrt{2}} = -1 \rightarrow \zeta = \frac{-1 \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Esempio 12.8. Prendiamo ad esempio la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{5 \cdot (s^2 - 5s + 2s)}{s^2 \cdot (s + 3)^2} \\ &= \frac{5 \cdot 2s \left(\frac{s^2}{2s} - \frac{5}{2s}s + 1 \right)}{9 \cdot s^2 \left(\frac{s}{3} + 1 \right)^2} \\ &= \frac{12s}{9} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{5}s + \frac{s^2}{2s} \right)}{s^2 \left(1 + \frac{s}{3} \right)^2} \end{aligned}$$

Si arriva ad una forma del tipo:

$$k_b \cdot \frac{\text{Radici}}{\text{Radici}}$$

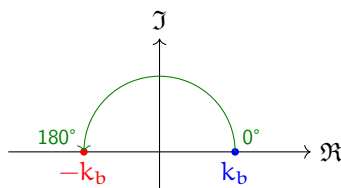
Si raccolgono tutte le costanti per arrivare alla forma di Bode.

12.5 Disegno del diagramma di Bode

Ci sono 4 possibili diagrammi di Bode:

1. Termine costante k_b
2. Uno zero o un polo nullo s^μ dove μ è la molteplicità
3. Uno zero o un polo reale $(1 + \tau s)^\mu$ dove τ è la costante di tempo
4. Uno zero o un polo complesso coniugato $\left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)^\mu$ dove ζ è il coefficiente di smorzamento e ω_n è la pulsazione naturale

12.5.1 Termine costante



Definizione 12.1. Si calcola l'ampiezza:

$$A = |H(j\omega)| = |k_b| = k_b$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10} (|k_b|)$$

E la fase:

$$\phi = \text{atan2}(\sigma + j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } k_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } k_b < 0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } k_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } k_b < 0 \end{cases}$$

Se prendiamo $k_b = 10$ avremo:

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(10) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$\phi(\omega) = 0^\circ$$

Se prendiamo $k_b = -10$ avremo:

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(10) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$\phi(\omega) = -180^\circ$$

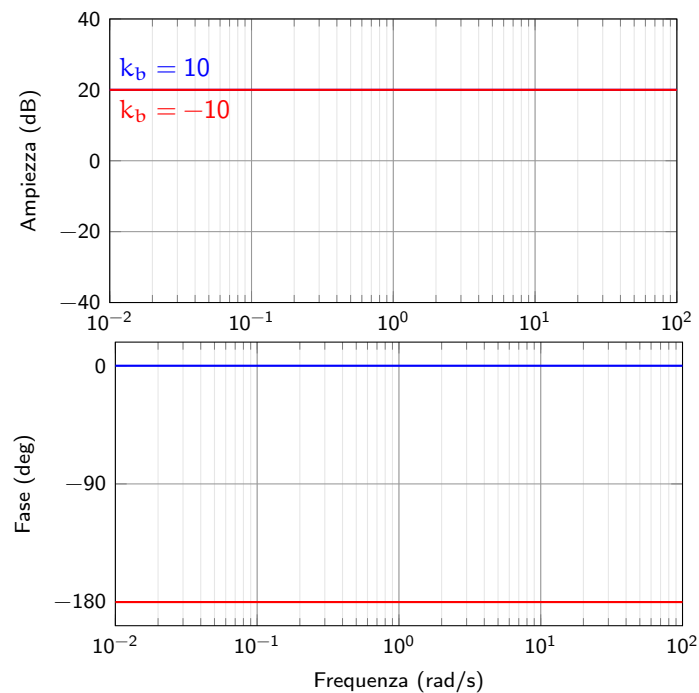


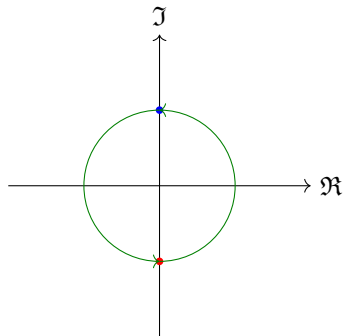
Figura 108: Diagramma con $k_b = 10$ e $k_b = -10$

12.5.2 Zero o polo nullo

$$H(s) = H(j\omega) \rightarrow (j\omega)^\mu$$

dove:

$$\mu \in \mathbb{Z}, \mu > 0 \text{ per gli zeri, } \mu < 0 \text{ per i poli}$$



Definizione 12.2.

$$|H(j\omega)| = |(j\omega)^\mu| = |\omega|^\mu = \omega^\mu$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(j\omega)|_{\text{dB}} \\ &= 20 \log_{10}(\omega^\mu) \\ &= 20\mu \log_{10}(\omega) \end{aligned}$$

È una retta che passa per $(10^0, 0)$ e cresce (o decresce) di 20μ dB/decade.

La fase:

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(j\omega)^\mu = \mu \cdot \text{atan2}(j\omega) = \mu \cdot 90^\circ$$

È una retta costante.

Consideriamo i seguenti zeri (s^1) e poli (s^{-1}) di $H(s)$

ω	s^1	s^{-1}	s^{-2}
10^{-2}	-40	40	80
10^{-1}	-20	20	40
10^0	0	0	0
10^1	20	-20	-40
10^2	40	-40	-80

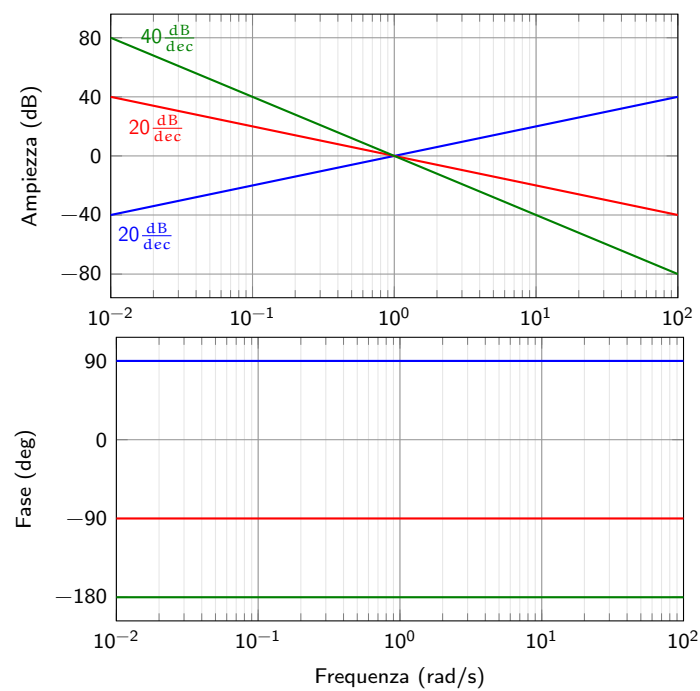
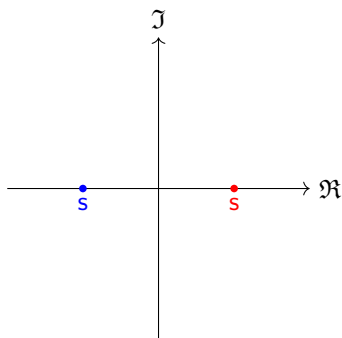


Figura 109: Diagramma di Bode con s^1 , s^{-1} e s^{-2}

12.5.3 Zero o polo reale

$$H(s) \rightarrow (1 + \tau s)^\mu$$



Abbiamo che un polo si può scrivere come:

$$\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

con:

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

Quindi il polo in $j\omega$ si può scrivere come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

La parte reale e immaginaria sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ \text{Im} &= \frac{-\frac{\omega}{\omega_0}j}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

Definizione 12.3. L'ampiezza e la fase sono:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 20 \log_{10} \left(\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \right) \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(\text{Re}, \text{Im}) \\ &\downarrow \\ A(\omega) &= -20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \\ \phi(\omega) &= \text{atan2} \left(-\frac{\omega}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

Se consideriamo le seguenti omega:

- $\omega \ll \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -20 \log_{10} (\sqrt{1}) = 0 \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(0) = 0 \end{aligned}$$

- $\omega = \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -20 \log_{10} (\sqrt{2}) = -3\text{dB} \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(-1) = -45^\circ \end{aligned}$$

- $\omega \gg \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -20 \log_{10} \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = -20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}} \\ \phi(\omega) &= \text{atan2}(-\infty) \approx -90^\circ \end{aligned}$$

Consideriamo un polo di $H(s)$

$$\left(1 + \frac{s}{10} \right)^{-1}$$

Calcoliamo ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

$$\tau = \frac{1}{10} \rightarrow \omega_0 = 10$$

Prima di ω_0 la funzione è nulla e successivamente cresce o decresce di 20 dB/decade.

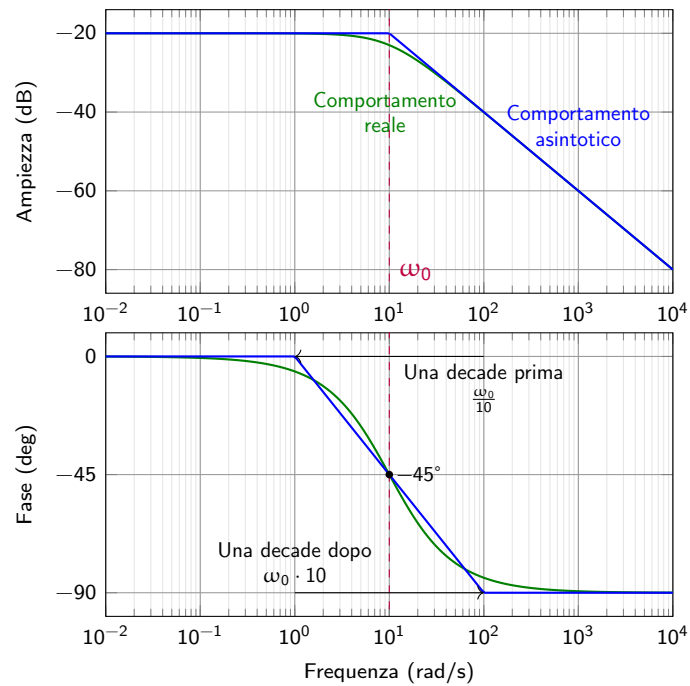


Figura 110: Diagramma di Bode di un polo reale: $\left(1 + \frac{s}{10}\right)^{-1}$

Consideriamo uno zero di $H(s)$

$$\left(1 + \frac{s}{10}\right)^1$$

$$\omega_0 = 10$$

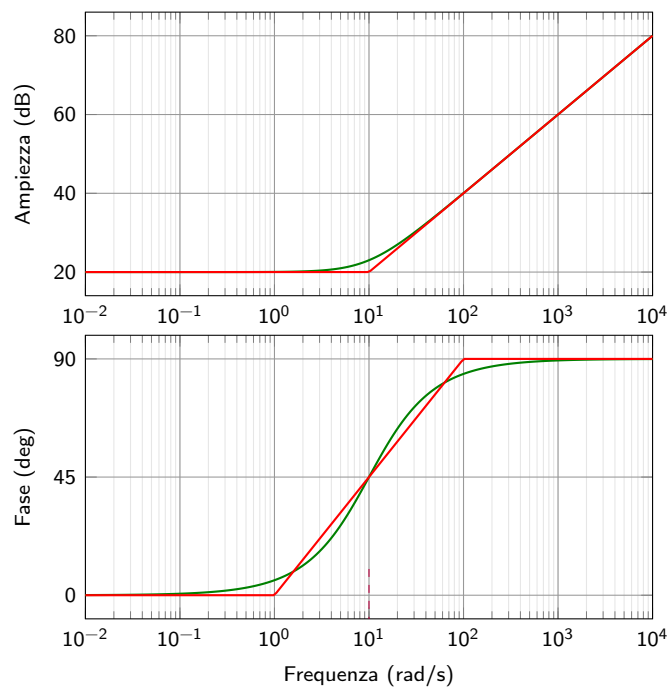


Figura 111: Diagramma di Bode di uno zero reale: $(1 + \frac{s}{10})^1$

La formula generale per calcolare l'ampiezza e la fase è:

- $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega) = 0$$

$$\phi(\omega) = 0$$

- $\omega \gg \omega_0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 20 \cdot \log_{10}(\omega|\tau|)^\mu \\ &= 20 \cdot \mu (\log_{10}(\omega) + \log_{10}(|\tau|)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \text{atan2}(\omega\tau)^\mu \\ &= \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ \end{aligned}$$

Il comportamento della decade prima e dopo si descrive come:

$$\text{Decade prima} = \left(\frac{\omega_0}{10}, 0^\circ \right)$$

$$\text{Decade dopo} = (10 \cdot \omega_0, \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ)$$

Definizione 12.4.

$$A(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega |\tau|) = 20 \cdot \mu (\log_{10}(\omega) + \log_{10}(|\tau|)) & \omega > \omega_n \end{cases}$$

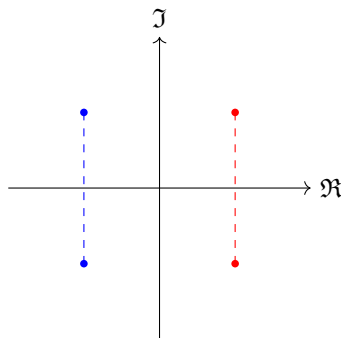
$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

La fase non cambia drasticamente.

Si prende $(\frac{\omega_n}{10}, 0^\circ)$ e $(10\omega_n, \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ)$ e si traccia una retta tra i due punti.

12.5.4 Polo o zero complesso coniugato

$$H(s) \rightarrow \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$$



I valori sono a coppie. Bisogna considerare sia la pulsazione naturale ω_n che il coefficiente di smorzamento ζ .

Consideriamo un polo:

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

se la portiamo in forma di bode abbiamo:

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

Si può passare a $s = j\omega$ per ottenere:

$$\frac{1}{1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fattorizzando si ottiene:

$$\text{Re} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{Im} = \frac{-2j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Consideriamo i seguenti casi:

- $\omega \ll \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20 \log_{10}(\sqrt{1}) = 0$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(0) = 0$$

- $\omega = \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(2\zeta)$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

Si distinguono 4 casi:

- $\zeta = 0.5$

$$A = 0$$

- $\zeta > 0.5$

Il grafico passa per ω_0

- $\zeta < 0.5$

Si presenta un picco di risonanza

- $\zeta = 0$

Si ha una discontinuità

- $\omega \gg \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$= -40 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$= \text{atan2}(+\infty) = -180^\circ$$

È una retta che decresce di 40 dB/decade.

Prendiamo ad esempio il polo:

$$\left(1 + 2j\left(\frac{1}{5}\right)\frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{4}\right)^{-1}$$

con:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \zeta &= \frac{1}{5} \\ \omega_n &= 2\end{aligned}$$

Il picco di risonanza si calcola come:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 1.92$$

Più ζ è piccolo, più il picco di risonanza diventa grande.

La massima ampiezza si calcola come:

$$M_r = 20 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left(2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) = 8.14$$

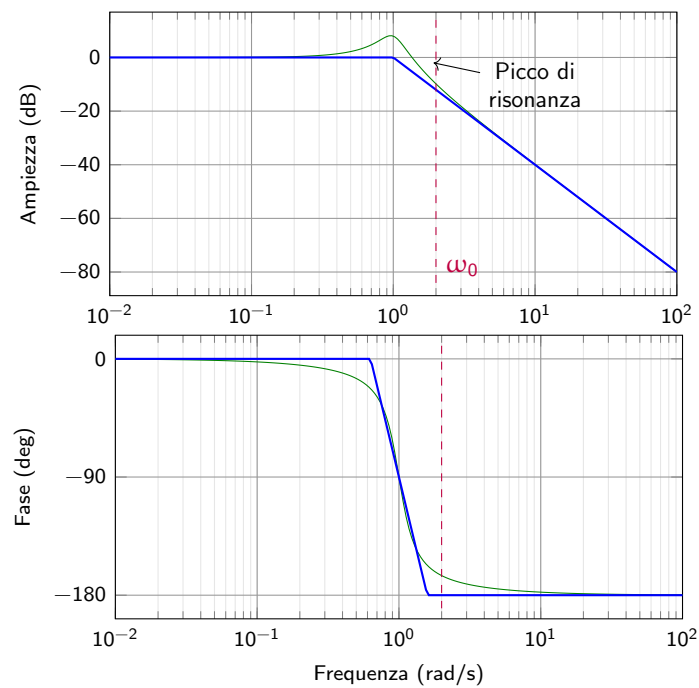


Figura 112: Diagramma di Bode di un polo complesso coniugato

Le formule generali per calcolare l'ampiezza e la fase sono:

- $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega) = 0$$

$$\phi(\omega) = 0$$

- $\omega \gg \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = 40 \cdot \mu (\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_n)$$

$$= 40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad \phi(\omega) = \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ$$

Si distinguono 4 casi:

– $\zeta = 0$

Si ha un asintoto verticale in $A(\omega)$ in ω_n

– $0 < \zeta < 0.5$

Si ha un picco di risonanza che vale:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

e una massima ampiezza di:

$$M_r = 20 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left(2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

Il picco di risonanza si trova in (ω_r, M_r)

– $\zeta = 0.5$

Si ha che $A(\omega) = 0$

– $0.5 < \zeta < 1$

Passa sotto il grafico asintotico

Definizione 12.5.

$$A(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 40 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = 40 \cdot \mu [\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_n)] & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Per la transizione di fasi bisogna calcolare:

$$\left(\frac{1}{5^{|\zeta|}} \cdot \omega_n, 0^\circ \right); \left(5^{|\zeta|} \cdot \omega_n, \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ \right)$$

oppure

$$\left(\frac{\omega_n}{10}, 0^\circ \right); (10 \cdot \omega_n, \mu \cdot \text{segno}(\zeta) \cdot 180^\circ)$$

e si traccia la retta che li collega.

Se $0 < \zeta \leq \frac{1}{2}$ c'è un picco di risonanza,

$$(\omega_r, \mu_r)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = 20 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left(2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

12.5.5 Esempio

Esempio 12.9. Prendiamo in considerazione la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 (s + 1) (s^2 + 3s + 16)}{2s - 1}$$

1. Portare in forma di bode:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 64 = -55 < 0$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2(1) \left(1 + \frac{s}{1}\right)^1 (16) \left(\frac{16}{16} + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)^1}{(-1) \left(+1 - \frac{2}{1}s\right)^1} \\ &= -16 \frac{s^2 (1 + s) \left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)}{(1 - 2s)} \end{aligned}$$

Disegniamo k_b

$$A = 20 \cdot \log_{10} (|-16|) = 24$$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } -16 > 0 \\ -180^\circ & \text{se } -16 < 0 \end{cases} = -180^\circ$$

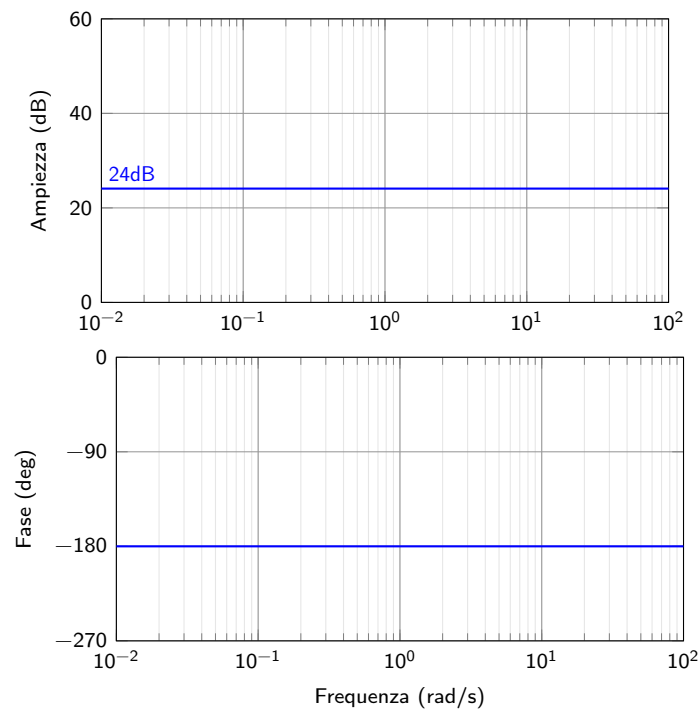


Figura 113: Diagramma di Bode di k_b

Disegniamo $(1 + s)$

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \tau &= 1 \\ \omega &= \frac{1}{|\tau|} = 1\end{aligned}$$

$$A = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 20 \cdot \mu \log_{10}(\omega |\tau|) = 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

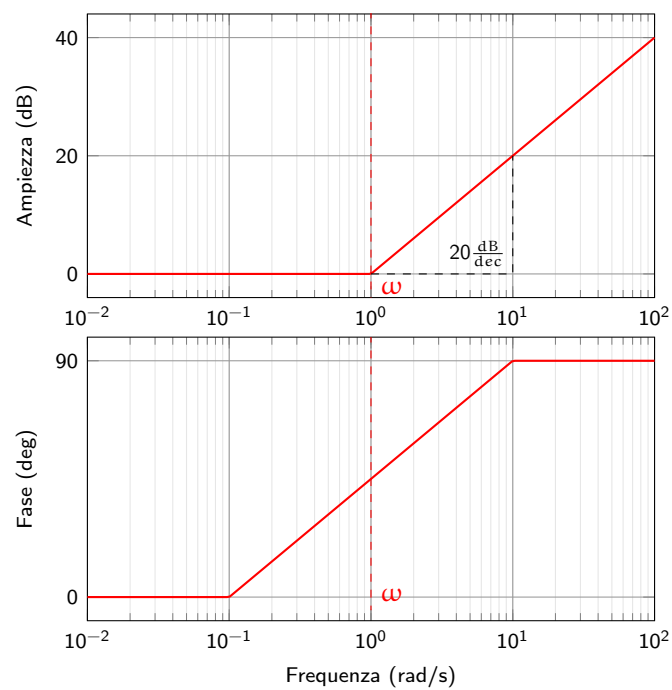


Figura 114: Diagramma di Bode di $(1 + s)$

Disegniamo s^2

$$\mu = 2$$

$$A = 20 \cdot \mu \log_{10}(\omega) = 40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$$

$$\phi = \mu \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

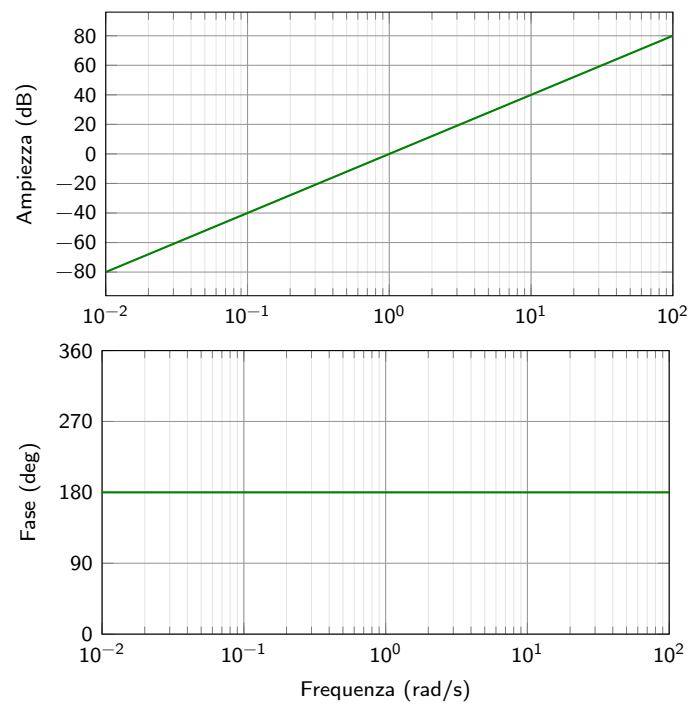


Figura 115: Diagramma di Bode di s^2

Disegniamo $\left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)$

$$\mu = 1$$

$$\omega_n = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{16} \rightarrow \zeta = \frac{3}{16} \cdot \frac{\omega_n}{2} = \frac{3}{8}$$

$$A = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 40 \cdot \mu \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 3.5$$

$$M_r = 20 \cdot \mu \log_{10} \left(2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) = 8.14$$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 180^\circ \cdot \mu \cdot \text{segno}(\zeta) = 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

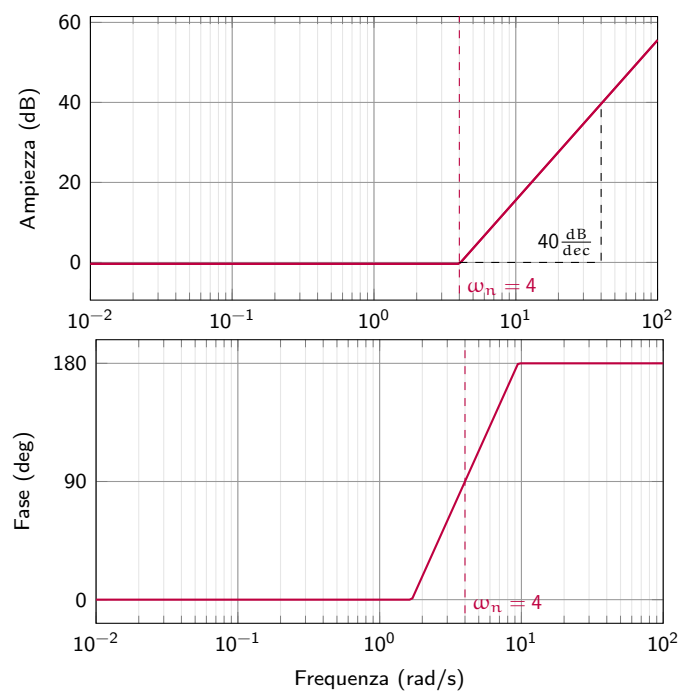


Figura 116: Diagramma di Bode di $\left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)$

Disegniamo $(1 - 2s)$

$$\mu = 1$$

$$\tau = -2$$

$$\omega_n = \frac{1}{|\tau|} = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ 20 \cdot \mu \log_{10}(\omega |\tau|) = 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega \leq \omega_n \\ \mu \cdot \text{segno}(\tau) \cdot 90^\circ = -90^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

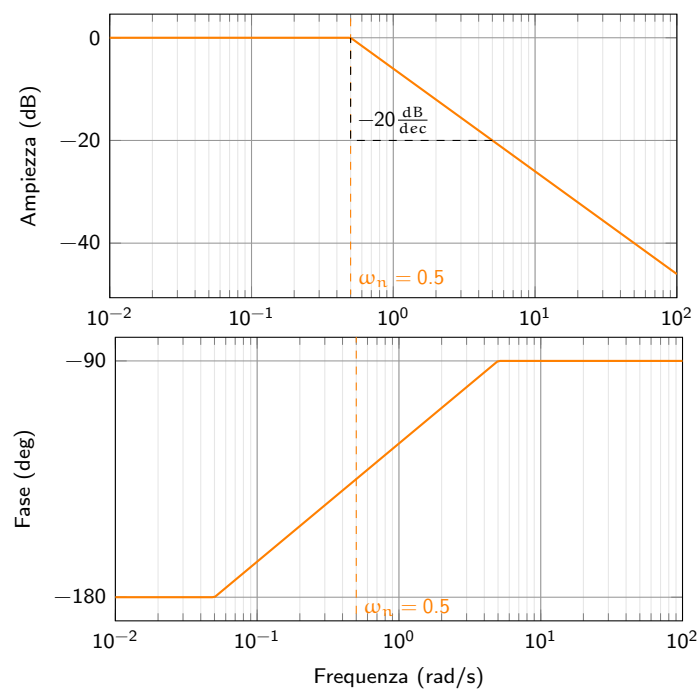


Figura 117: Diagramma di Bode di $(1 - 2s)$

12.6 Comportamento totale di Bode

Una volta disegnati i singoli grafici si sommano assieme:

Esempio 12.10. Riprendiamo l'esempio 12.9

1.

$10^0 \leftarrow$ Zero reale e zero nullo

$4 \leftarrow$ Zero complesso coniugato

$-0.5 \leftarrow$ Polo reale

Scriviamo una tabella con le decadi più vicine per vedere meglio l'andamento:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} {}^{(0.1)} & & {}^{(1)} & & {}^{(10)} \\ 10^{-1} & 0.5 & 10^0 & 4 & 10^1 \end{array}$$

2. Andiamo a calcolare il valore di ciascun termine dei valori trovati e sommiamo i contributi per ogni blocco

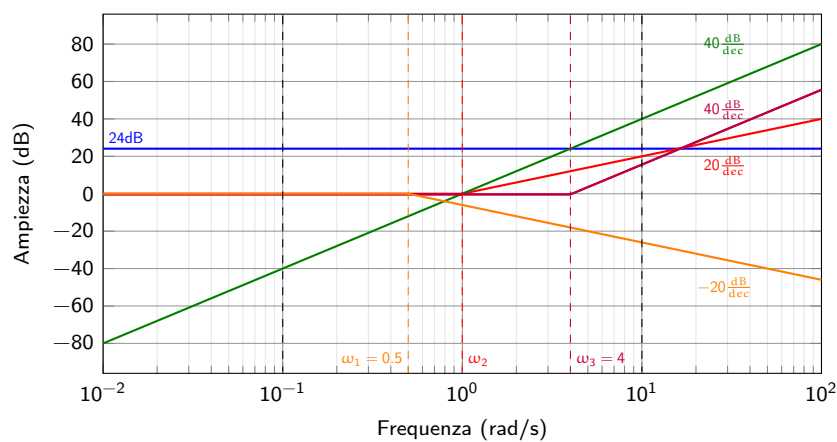


Figura 118: Unione di tutti i diagrammi

Andamento in tabella:

ω	10^{-1}	0.5	10^0	4	10^1
k_b db/dec	0	0	0	0	0
zero- \mathbb{R}_1 db/dec	0	0	0	20	20
zero-nullo $_1$ db/dec	40	40	40	40	40
zero-cc $_1$ db/dec	0	0	0	0	40
Polo- \mathbb{R}_1 db/dec	0	0	-20	-20	-20
Totale	40	40	20	40	80

3. Si fa il grafico delle ampiezze considerando gli omega che abbiamo calcolato:

ω	10^{-1}	0.5	10^0	4	10^1
k_b (dB)	24	24	24	24	24
zero- \mathbb{R}_1 ($20 \cdot \log(\omega \cdot \tau)$, $\tau = 1$)	0	0	0	12	20
zero-nullo $_1$ ($40 \cdot \log(\omega)$)	-40	-12	0	24	40
zero-cc $_1$ ($40 \cdot \log(\frac{\omega}{\omega_n})$, $\zeta = \frac{3}{8}$, $\omega_n = 4$)	0	0	0	0	16
Polo- \mathbb{R}_1 ($-20 \cdot \log(\omega \cdot \tau)$, $\tau = -2$)	0	0	-6	-18	-26
Totale (dB)	-16	12	18	42	74

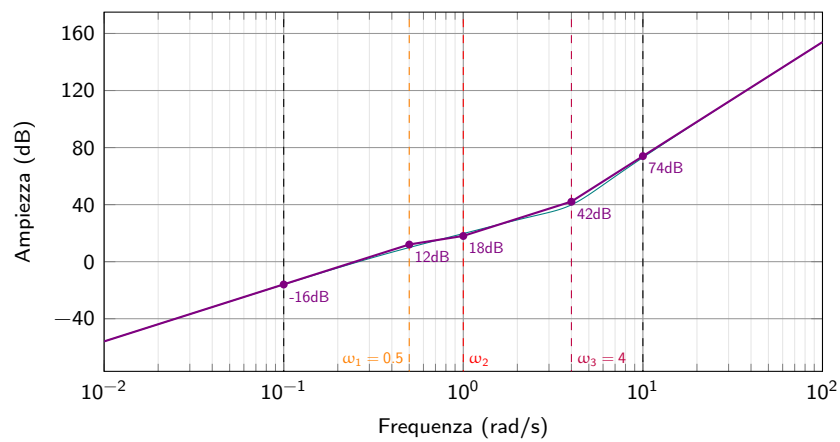


Figura 119: Ampiezza totale

4. Si fa il grafico delle fasi facendo lo stesso ragionamento fatto per le ampiezze, ma considerando solo il valore asintotico:

ω	10^{-1}	0.5	10^0	4	10^1
k_b	-180	-180	-180	-180	-180
zero- \mathbb{R}_1	0	0	0	90	90
zero-nullo $_1$	180	180	180	180	180
zero- cc_1	0	0	0	0	180
Polo- \mathbb{R}_1	0	0	90	90	90
Totale	0°	0°	90°	180°	360°

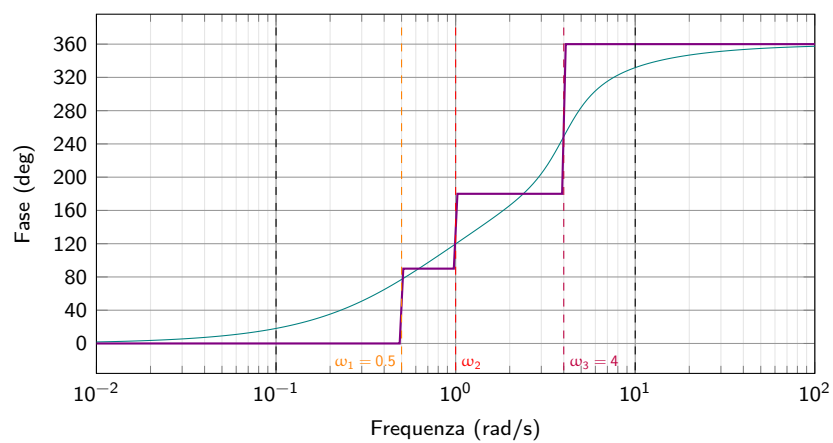


Figura 120: Fase totale

13 Trasformata di Fourier

Fourier ha dimostrato che qualsiasi segnale periodico o aperiodico può essere scomposto in una **somma di sinusoidi**, nello specifico somme di integrali di sinusoidi.

Esempio 13.1. L'esempio più classico è l'elaborazione dei suoni, se abbiamo un MI più un DO si ottiene una somma di due sinusoidi che rappresenta le due note:

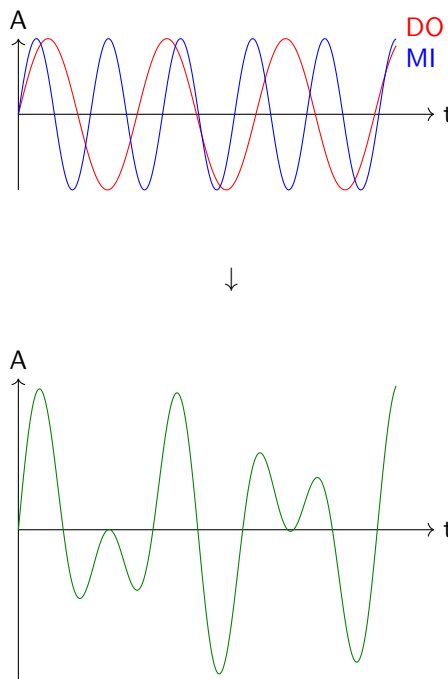


Figura 121: Somma di due sinusoidi

Per generare lo stesso segnale con la stessa frequenza servono più sinusoidi e quando la somma di sinusoidi è infinita si ottiene il segnale originale.

13.1 Sinusoidi come vettori

Ogni sinusoide può essere rappresentata come un vettore che ruota in senso antiorario su una circonferenza con velocità angolare ω e ampiezza A :

$$e^{i\omega t}$$

Da questo si può prendere una funzione e generare il grafico dell'avvolgimento della funzione sul piano bidimensionale (grafico del winding):

$$g(t) \cdot e^{-2\pi \cdot i f_0 \cdot \omega t}$$

Per calcolare il grafico di winding si deve calcolare il centro di massa come la media dei punti sul grafico:

$$cdm = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N g(t_k) \cdot e^{-2\pi \cdot i f_0 \cdot \omega t_k}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N g(t_k) \cdot e^{-2\pi \cdot i f_0 \cdot \omega t_k} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-2\pi \cdot i f_0 \cdot \omega t} dt$$

Questa è la quasi trasformata di Fourier, per ottenere la trasformata di Fourier bisogna togliere il peso iniziale:

$$TD_{\text{Fourier}} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-2\pi \cdot i f_0 \cdot \omega t} dt$$

Dal grafico della trasformata di Fourier si rilevano dei picchi che rappresentano tutte le frequenze che compongono il segnale totale.

Anche in questo caso il risultato ottenuto nel dominio delle frequenze è uguale a quello ottenuto nel dominio del tempo.

13.1.1 Segnali periodici

Un segnale periodico è rappresentabile tramite la **serie di Fourier**, cioè una somma infinita di segnali sinusoidali.

13.1.2 Segnali non periodici

Un segnale non periodico è rappresentabile tramite la **trasformata di Fourier**, cioè una somma di sinusoidi con frequenze continue. Un segnale non periodico può essere trasformato in un segnale periodico replicandolo un multiplo di volte.

13.2 Serie di Fourier

Consideriamo un segnale periodico $x(t)$ con periodo T_0 :

$$x(t) = x(t + T_0)$$

con **frequenza fondamentale**

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

Se si passa alla rappresentazione tramite esponenziali complessi si può riscrivere:

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

si può moltiplicare per una costante k per ottenere dei multipli della frequenza fondamentale:

$$e^{jk\omega_0 t} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0}$$

Definizione 13.1. Questo segnale si può riscrivere come una combinazione lineare di $e^{jk\omega_0 t}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

con periodo T_0 e frequenza fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$.
Questa rappresentazione si chiama **serie di Fourier**.

$a_k \in \mathbb{C}$, quindi si può riscrivere in forma polare o cartesiana:

$$\begin{aligned} a_k &= A_k e^{j\theta_k} \\ &= B_k + jC_k \end{aligned}$$

Una serie di fourier può essere scritta come serie di funzioni trigonometriche:

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)$$

Da cui si può scrivere la serie di Fourier come somma di seni e coseni:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - iC_k \sin(k\omega_0 t)] \end{aligned}$$

Per calcolare i coefficienti a_k si può fare un integrale su un periodo T_0 :

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ T_0 & k = 0 \end{cases}$$

Usando la rappresentazione con seno e coseno:

$$\int_{t_0} \cos(k\omega_0 t) dt + j \int_{t_0} \sin(k\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ T_0 & k = 0 \end{cases}$$

Si fa quindi l'integrale sul periodo di $x(t)$:

$$\int_{t_0} x(t) e^{-jN\omega_0 t} dt = \int_{t_0} e^{-jN\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} dt$$

si porta fuori dall'integrale la sommatoria:

$$\int_{t_0} e^{-jN\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\int_{t_0} e^{-j(k-N)\omega_0 t} dt}_{\begin{cases} 0 & k \neq N \\ T_0 & k = N \end{cases}}$$

e si può riscrivere tutto come:

$$\int_{t_0} x(t) e^{-jN\omega_0 t} dt = a_n \cdot t_0$$

$$a_n = \frac{1}{t_0} \int_{t_0} x(t) e^{-jN\omega_0 t} dt$$

generalizzando diventa:

Definizione 13.2.

$$a_k = \frac{1}{t_0} \int_{t_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Questa è la **equazione di analisi** e ci permette di calcolare i singoli coefficienti della serie di Fourier.

Definizione 13.3.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Questa è l'**equazione di sintesi** e ci permette di rappresentare qualsiasi segnale periodico come somma infinita di funzioni armonicamente correlate tra di loro, quindi che hanno una frequenza multipla della frequenza fondamentale.

Teorema 13.1. Sia $v(t)$ una funzione di valori reali o complessi, con $t \in \mathbb{R}$, periodica di periodo T_0 e con frequenza f_0 ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$)

- $v(t)$ è generalmente continua, cioè continua in un insieme finito di punti
- $v(t)$ è generalmente derivabile e la sua derivata prima è generalmente continua e anche generalmente limitata su un intervallo specifico $[t_0, t_0 + T_0]$, allora la funzione si dice **quadrato sommabile**, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < +\infty =$$

$$\int_{T_0} |v(t)|^2 dt < +\infty$$

È sviluppabile in serie di Fourier, quindi $\forall t$ in cui è continua vale che:

$$\text{Equazione di Sintesi: } v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\text{Equazione di analisi: } a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Nei punti in cui non è continua vale che:

$$\frac{v(t^-) + v(t^+)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Il primo coefficiente della serie di Fourier corrisponde al picco che si vede nel grafico della trasformata e corrisponde al valore medio della funzione:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt$$

La funzione di sintesi può essere scritta in diversi modi:

- Serie di Fourier in forma sinusoidale:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|a_k| \cos(k\omega_0 t + \arg(a_k)) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)] \end{aligned}$$

$$A_k = 2 \operatorname{Re}(a_k) \quad B_k = -2 \operatorname{Im}(a_k)$$

La sommatoria va da $-\infty$ a $+\infty$, ma non ci sono frequenze negative questo perchè serve solo a gestire i valori complessi.

13.2.1 Segnali simmetrici e asimmetrici

- Segnale periodico non-simmetrico

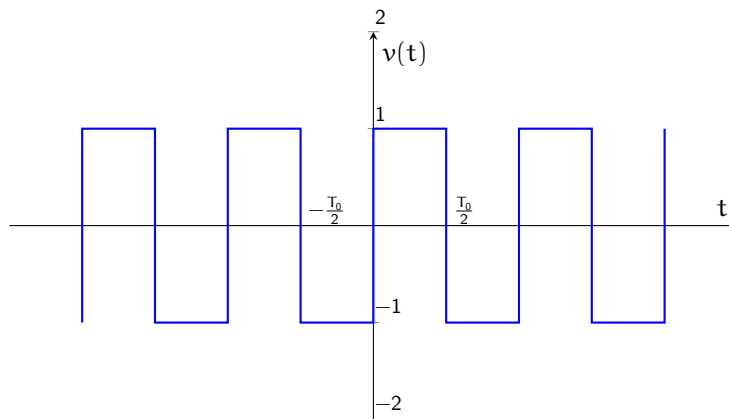


Figura 122: Segnale periodico non-simmetrico

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-1) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$a_k = \frac{1}{j\pi k} [1 - (-1)^k] \quad k \neq 0$$

Il grafico dei coefficienti è il seguente:

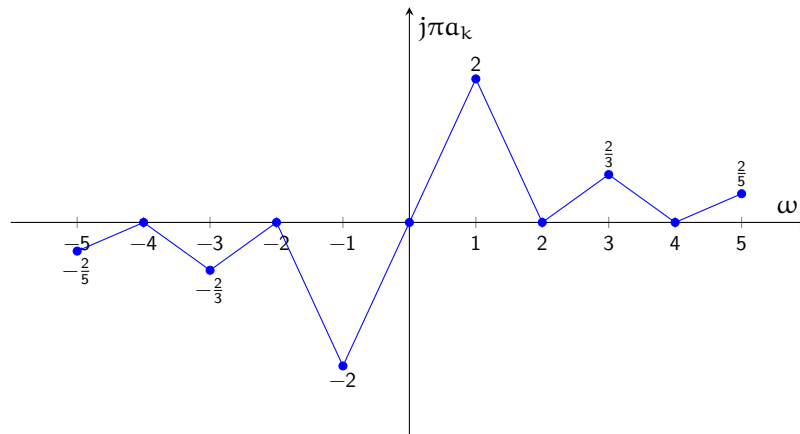


Figura 123: Coefficienti a_k per segnale non-simmetrico

- Armoniche dispari
- a_k immaginari
- $a_k = -a_{-k}$ antisimmetrico

Siccome tutti i coefficienti sono immaginari si ha una serie di seni e si può riscrivere come:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{2j}_{\text{Per avere termini reali}} \cdot a_k \sim (k\omega_0 t)$$

• **Segnale periodico simmetrico**

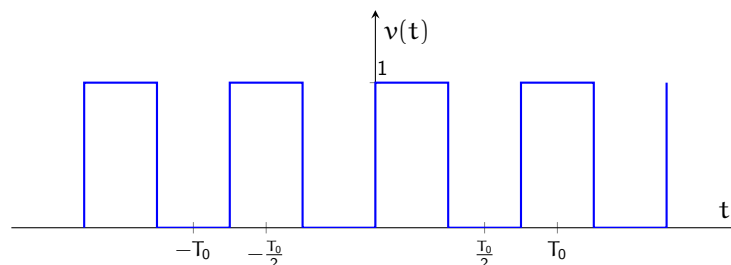


Figura 124: Segnale periodico simmetrico

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{\pi k} & k \neq 0 \end{cases}$$

Il grafico dei coefficienti è il seguente:

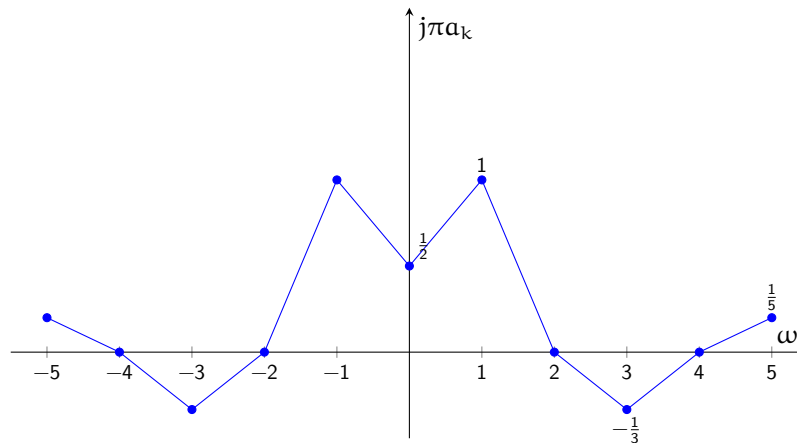


Figura 125: Coefficienti a_k per segnale simmetrico

- Armoniche dispari
- a_k è reale
- $a_k = a_{-k}$ simmetrico

Siccome tutti i coefficienti sono reali si ha una serie di coseni e si può riscrivere come:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot a_k \cos(k\omega_0 t)$$

13.2.2 Serie di Fourier troncata

Serve per limitare la sommatoria a N termini.

Sia $N \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{v_N(t)}_{v(t) \text{ rappresentato con } N \text{ componenti}} = \sum_{k=-N}^N \tilde{a}_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad \omega_0, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Calcoliamo l'errore quadratico medio (MSE, Mean Square Error) che è la misura dell'errore di approssimazione

$$\text{MSE}(v(t), v_N(t)) := \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t) - v_N(t)|^2 dt$$

misura l'energia della differenza di due segnali.

$$\tilde{a}_k = a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{MSE}(v(t), v_N(t)) = 0$$

Definizione utile 13.1. Fenomeno di Gibbs: Aumentando il numero di armoniche si ha un aumento di armoniche ad alta frequenza nei punti di discontinuità.

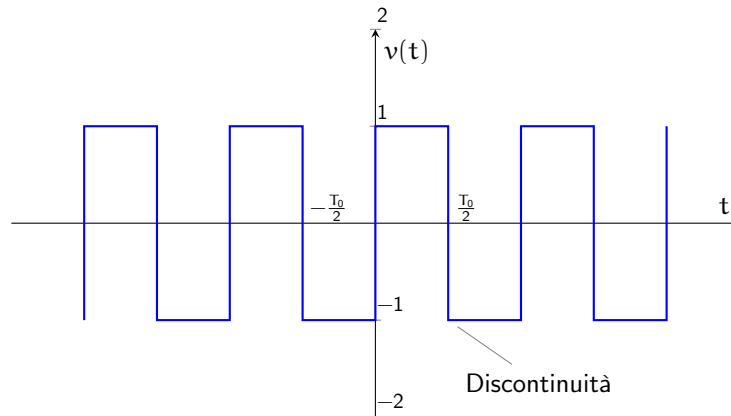


Figura 126: Discontinuità

$T = 2\pi$ Non simmetrico

$$t = k\pi$$

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{-i}{2\pi k} (2 - 2e^{-j\pi t}) \end{aligned}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{-2j}{k\pi} & k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

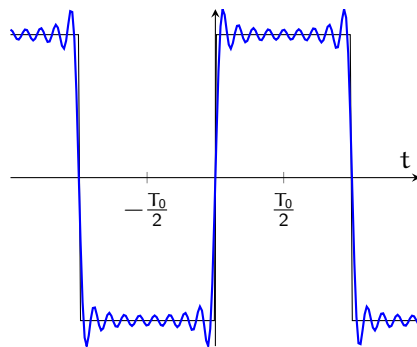


Figura 127: Fenomeno di Gibbs

13.3 Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

Se si ha un segnale non periodico che va da $[-T_1, T_1]$:

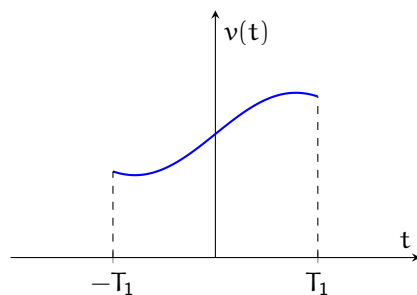


Figura 128: Segnale non periodico

$$\underbrace{\tilde{v}(t)}_{\text{Periodico}} = \underbrace{v(t)}_{\text{Non periodico}}$$

$$|t| < \frac{T_0}{2}$$

Se $T_0 \rightarrow \infty$ si ha che $\tilde{v}(t) \rightarrow v(t)$. Cioè si prende un segnale periodico e si fa tendere il periodo a infinito facendolo sembrare non periodico. Questo passaggio si può fare anche al contrario, cioè prendere un segnale non periodico e farlo diventare periodico.

- Usiamo la serie di Fourier per rappresentare $\tilde{v}(t)$
- Facciamo tendere T_0 a infinito $T_0 \rightarrow \infty$ per rappresentare $v(t)$

Esempio 13.2. Partiamo da un segnale non periodico e lo replichiamo nel tempo con periodo T_0

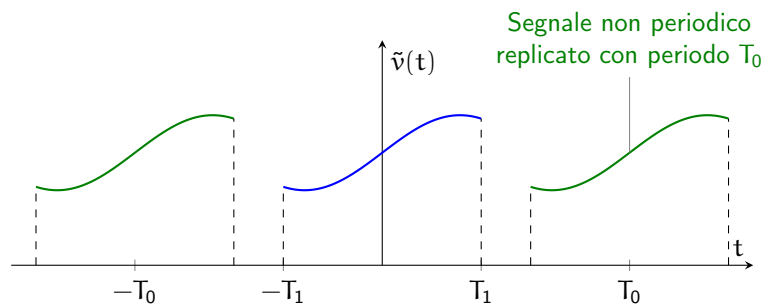


Figura 129: Segnale non periodico replicato

$$\tilde{v}(t) = v(t) \quad |t| < \frac{T_0}{2}$$

Applichiamo la serie di Fourier su $\tilde{v}(t)$:

$$\tilde{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{v}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Rappresentiamo $k\omega_0$ con una funzione $V(\omega)$

$$V(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad \rightarrow \quad T_0 a_k = V(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$V(\omega)$ è l'**inviluppo** di $T_0 a_k$:

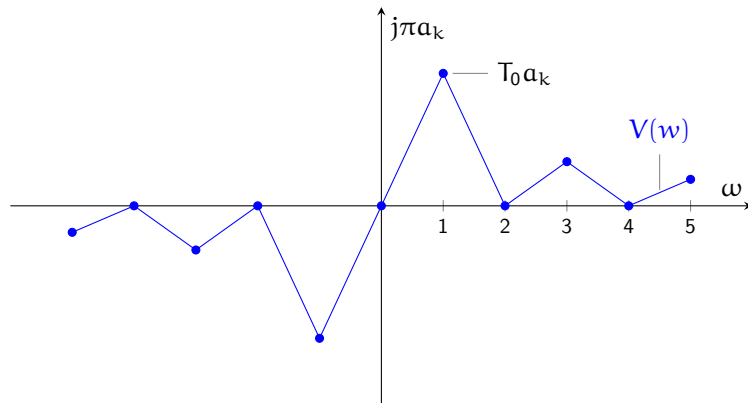


Figura 130: Involuppo di $T_0 a_k$

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \\
 &\quad \downarrow \\
 \tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \omega_0
 \end{aligned}$$

Se $T_0 \rightarrow \infty$ otteniamo che:

- $\omega_0 \rightarrow 0$
- $\tilde{v}(t) \rightarrow v(t)$
- $\omega_0 \rightarrow d\omega$
- $\sum \rightarrow \int$

Con queste premesse possiamo riscrivere la funzione come:

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \\
 &\quad \downarrow \\
 v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

È la trasformata di Fourier inversa.

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

È la trasformata di Fourier.

Definizione 13.4.

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

È l'equazione di sintesi per un segnale non periodico che equivale alla trasformata **inversa** di Fourier.

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

È l'equazione di analisi per un segnale non periodico che equivale alla trasformata di Fourier.

Esempio 13.3. Prendiamo ad esempio un segnale non periodico:

$$v(t) = e^{-at}$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(a+j\omega)} dt \\ &= \frac{-1}{a+j\omega} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Con Laplace sarebbe stato:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= \frac{1}{s-\lambda} \\ &\downarrow \\ e^{-at} &= \frac{1}{s+a} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

13.3.1 Sviluppo dei coefficienti di Fourier

Prendiamo in considerazione il segnale rettangolare:

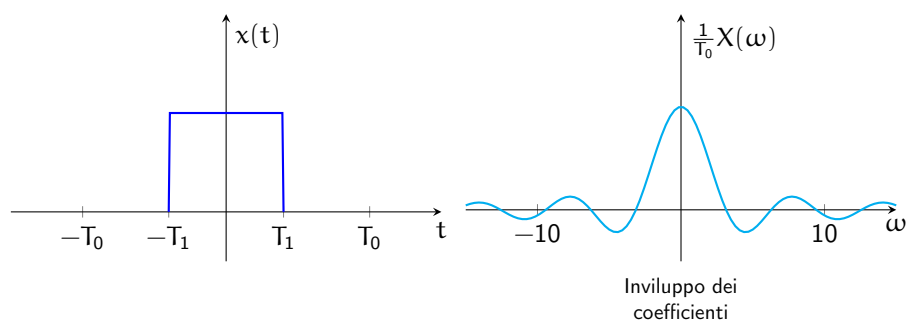


Figura 131: Segnale rettangolare

Replichiamo il segnale in un periodo T_0 e osserviamo il cambiamento dei coefficienti di Fourier:

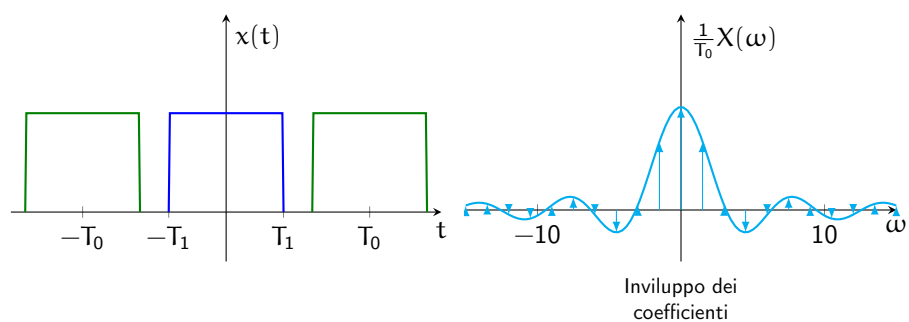


Figura 132: $T_0 = 4T_1$

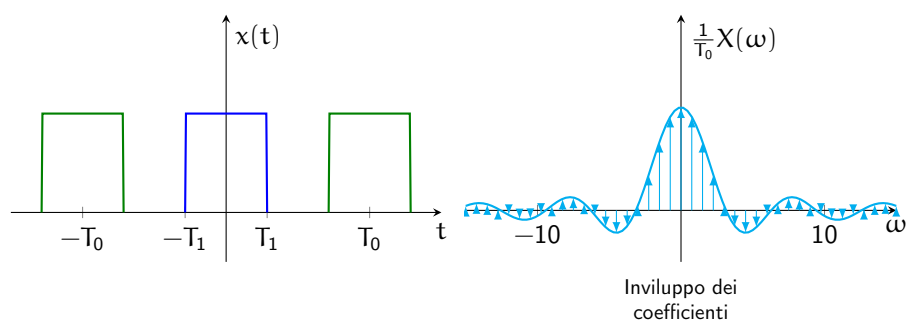


Figura 133: $T_0 = 8T_1$

...

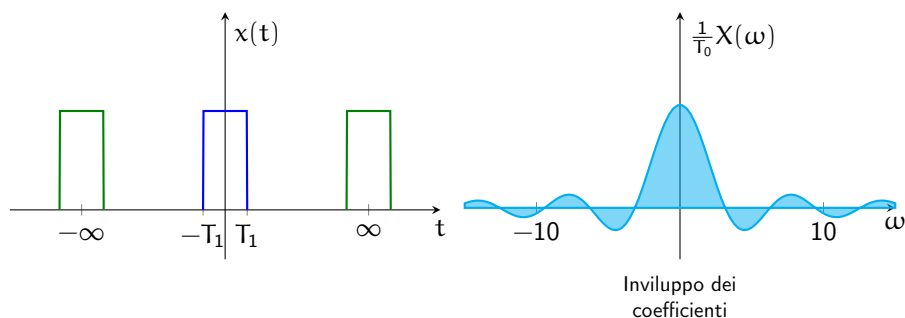


Figura 134: $T_0 \rightarrow \infty$

13.3.2 Trasformata di Fourier di un segnale periodico

$\tilde{v}(t) \leftrightarrow a_k$ Coefficienti delle serie di Fourier

$\tilde{v}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{V}(\omega)$ Trasformata di Fourier

$$\tilde{v}(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0) \text{ Treno di impulsi}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \cdot e^{-j\omega t} d\omega}_{e^{-jk\omega_0 t}} \end{aligned}$$

13.3.3 Come usare la trasformata di Fourier

1. $v(t)$ non periodico

- Costruisco un segnale periodico $\tilde{v}(T)$ in cui il singolo periodo è definito da $v(t)$
- $\tilde{v}(t)$ ha serie di Fourier
- All'aumentare del periodo $\tilde{v}(t) \rightarrow v(t)$ e la serie di Fourier di $\tilde{v}(t) \rightarrow \text{TdF di } v(t)$

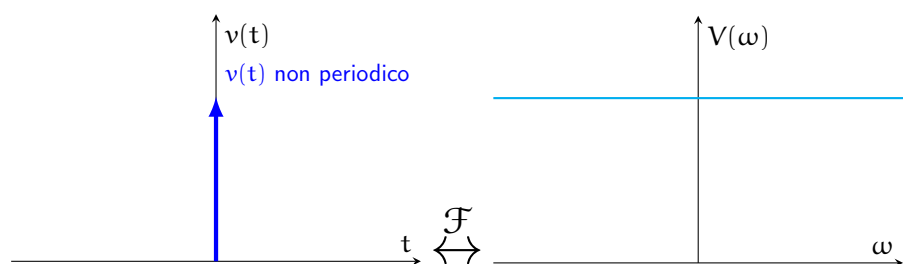
2. $\tilde{v}(t)$ è periodico, $v(t)$ rappresenta il singolo periodo

- Coefficienti della serie di Fourier = $\frac{1}{T_0} \cdot$ campioni delle TdF di $v(t)$

3. $\tilde{v}(t)$ è periodico

- La trasformata di Fourier di $\tilde{v}(t)$ è definita come **treno di impulsi**

$$\tilde{V}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$



Se $T_0 \rightarrow \infty$ allora il treno di impulsi diventa sempre più fitto fino ad una retta costante:

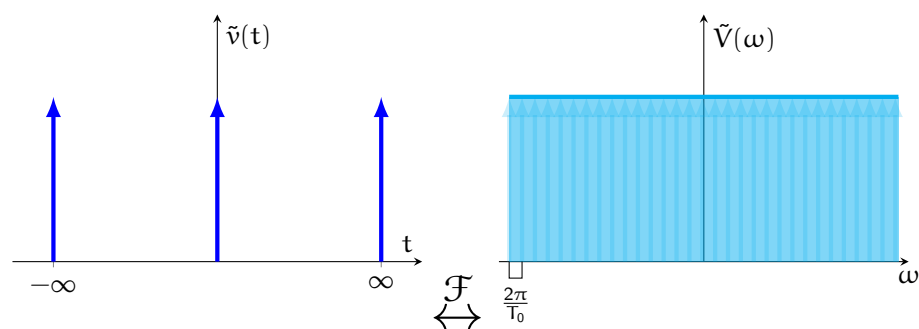
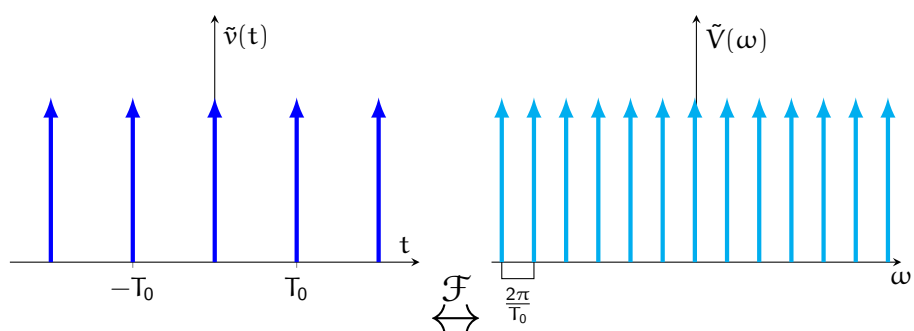
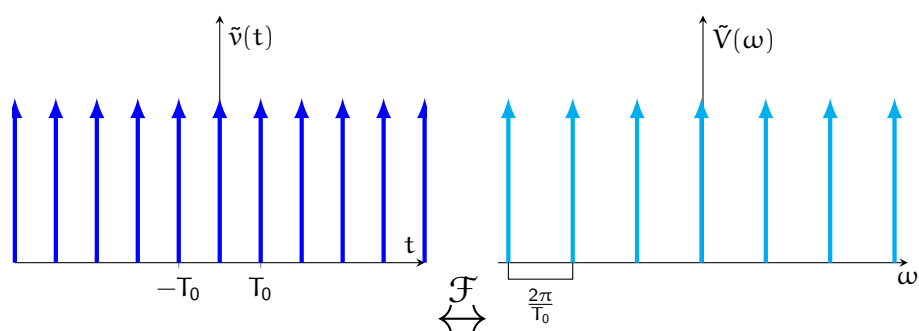


Figura 135: Trasformata di Fourier all'aumentare di T_0

13.4 Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier

Definizione 13.5 (Equazione di sintesi). Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un segnale a valori reali o complessi, si definisce la trasformata di Fourier del segnale come:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} dt = V(f)$$

Dove V è una funzione che va da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f \in \mathbb{R}$. Questa viene chiamata **equazione di sintesi**.

Definizione 13.6 (Equazione di analisi). Data una funzione $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si definisce anti-trasformata di Fourier la funzione:

$$\mathcal{F}^{-1}[V(f)](t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot e^{j\omega_0 t} df = v(t)$$

Dove v è una funzione che va da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con $t \in \mathbb{R}$. Questa viene chiamata **equazione di analisi**.

Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier:

Teorema 13.2. Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un segnale a valori reali o complessi. Se almeno una delle seguenti condizioni è vera, allora la funzione è trasformabile secondo \mathcal{F} :

1. $v(t)$ è sommabile, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)| dt < \infty$$

e a variabile limitata su ogni intervallo finito di \mathbb{R} , cioè è esprimibile come differenza di funzioni limitate non decrescenti.

2. $v(t)$ è un segnale di energia, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < \infty$$

3. $v(t)$ è un segnale di potenza, cioè:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |v(t)|^2 dt < \infty$$

bisogna però "**finestrare**" il segnale, cioè moltiplicarlo per una finestra rettangolare

13.5 Trasformate notevoli

Le trasformate di Fourier notevoli sono le seguenti:

- **Impulso**

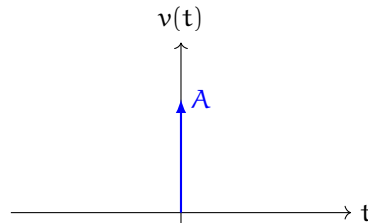


Figura 136: Impulso unitario

La trasformata di Fourier è:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[A\delta_0(t)](f) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \cdot 1 dt \\ &= A\end{aligned}$$

(per le regole del campionamento)

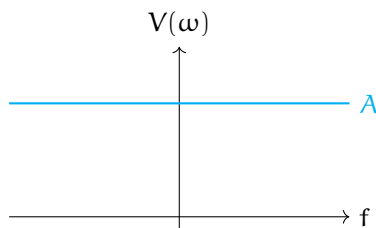


Figura 137: Trasformata di Fourier dell'impulso

- **Esponenziale causale**

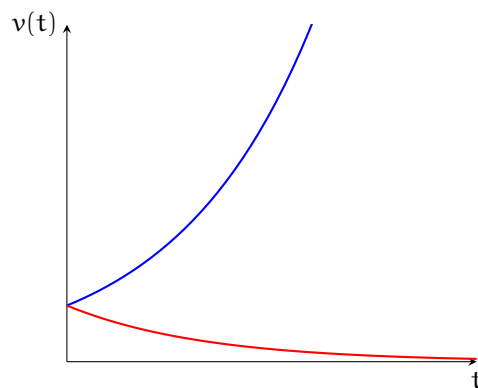


Figura 138: Esponenziale causale

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F} \left[A e^{j\phi} e^{\lambda t} \underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{Causalità}} \right] (t) = \frac{A e^{j\phi}}{j2\pi f - \lambda}$$

La trasformata di Laplace è molto simile, basta infatti sostituire la s con $j\omega = j2\pi f$ e si ottiene la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{L} [A e^{j\phi} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{A e^{j\phi}}{s - \lambda}$$

- **Finestra rettangolare di altezza A e supporto T**

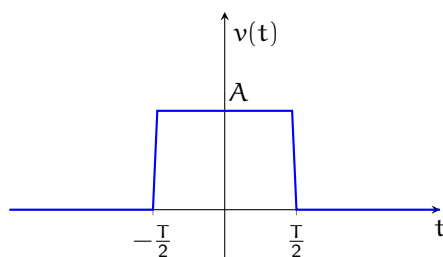


Figura 139: Finestra rettangolare

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F} \left[A \Pi \left(\frac{t}{T} \right) \right] (f) = AT \cdot \text{sinc}(fT)$$

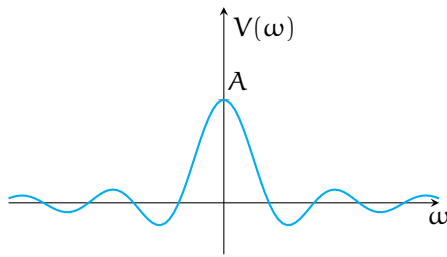


Figura 140: Trasformata di Fourier della finestra rettangolare

Questa funzione è chiamata **sinc**.

- **Funzione costante**

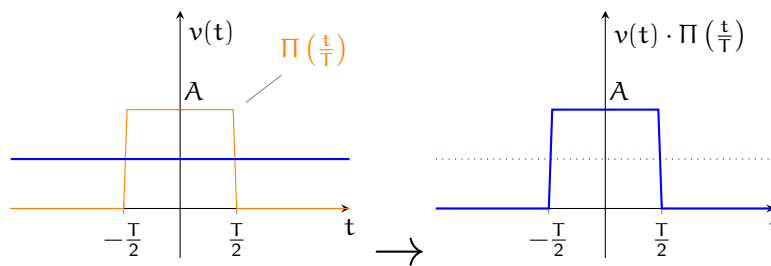


Figura 141: Funzione costante

La funzione costante non può essere trasformata facilmente, quindi bisogna "finestrarla", cioè moltiplicare il segnale per una finestra rettangolare:

$$v(t) = A \rightarrow v_T(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La sua trasformata di Fourier è la stessa del segnale rettangolare:

$$\mathcal{F} \left[\underbrace{v(t)}_{\text{Ampiezza} = A} \cdot \underbrace{\Pi\left(\frac{t}{T}\right)}_{\text{Ampiezza} = 1} \right] (f) = AT \cdot \text{sinc}(fT)$$

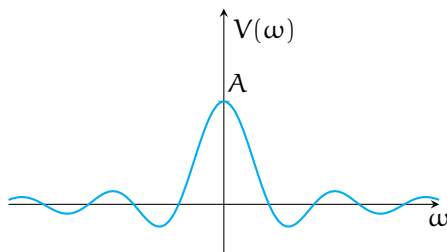


Figura 142: Trasformata di Fourier della funzione costante

- **Fasore**

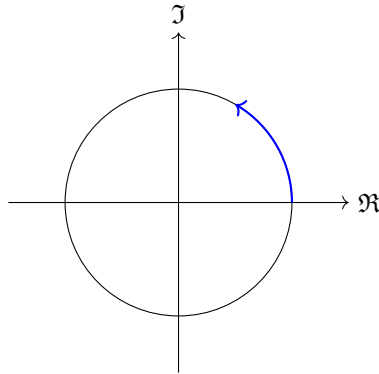


Figura 143: Fasore

$$v(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Anche in questo caso bisogna moltiplicare per il segnale rettangolare:

$$v_T(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}[v_T(t)](f) = AT \cdot \text{sinc}((f - f_0) \cdot t)$$

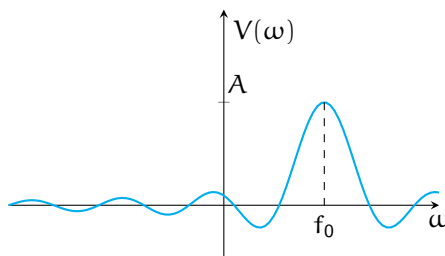


Figura 144: Trasformata di Fourier del fasore

- **Seno** Possiamo derivare il seno utilizzando la formula di Eulero su un fasore:

$$v(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \frac{A}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

Il seno è solo la parte immaginaria del fasore.

- **Coseno**

$$v(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Il coseno è solo la parte reale del fasore.

13.6 Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Laplace è un caso specifico della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \text{TdL} &\rightarrow \text{TdF} \\ s &\rightarrow j\omega \end{aligned}$$

Quindi alcune proprietà di Laplace valgono anche per Fourier.

1. **Linearità**

$$av_1(t) + bv_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aV_1(f) + bV_2(f)$$

2. **Riflessione e coniugazione**

$$v(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(-f) \quad \text{Riflessione}$$

$$\left. \begin{aligned} v^*(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} V^*(-f) \\ v^*(-t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} V^*(f) \end{aligned} \right\} \text{Coniugazione}$$

3. **Convoluzione nel dominio del tempo**

$$[v_1 * v_2](t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V_1(f) \cdot V_2(f)$$

4. **Traslazione nel dominio del tempo**

$$v(t - \tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f\tau} \cdot V(f)$$

5. **Traslazione nel dominio delle frequenze**

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot v(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(f - f_0)$$

6. **Modulazione/Prodotto nel dominio del tempo**

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} [V_1 * V_2](f)$$

Esempio 13.4. Consideriamo il seguente sistema a blocchi:

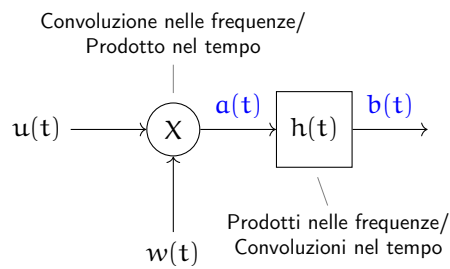


Figura 145: Sistema a blocchi

Vogliamo capire come si comporta questo segnale nelle frequenze ($a(t)$) e cosa succede quando viene alterato dalla sequenza degli operatori ($b(t)$).

$$u(t) = 3 \cdot \cos(6\pi t) + \cos(2\pi t)$$

$$w(t) = 2 \cdot \cos(4\pi t)$$

$$h(t) = 4 \cdot \text{sinc}(4t)$$

$$b(t) = ?$$

Possiamo risolvere in maniera grafica questo problema:

1. Applichiamo le trasformate di Fourier per andare nel dominio delle frequenze:

$$\text{Trasformata notevole: } A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$3 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{3}{2} (\delta(f - 3) + \delta(f + 3))$$

$$\cos(2\pi \cdot t) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2} (\delta(f - 1) + \delta(f + 1))$$

$$U(f) = \frac{3}{2} (\delta(f - 3) + \delta(f + 3)) + \frac{1}{2} (\delta(f - 1) + \delta(f + 1))$$

$$W(f) = \frac{2}{2} (\delta(f - 2) + \delta(f + 2)) = \delta(f - 2) + \delta(f + 2)$$

$$\text{Trasformata notevole: } AT \text{sinc}(tT) = A \Pi\left(\frac{f}{T}\right)$$

$$H(f) = 1 \cdot \Pi\left(\frac{f}{4}\right) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right)$$

2. Disegniamo tutti i singoli elementi su un grafico:

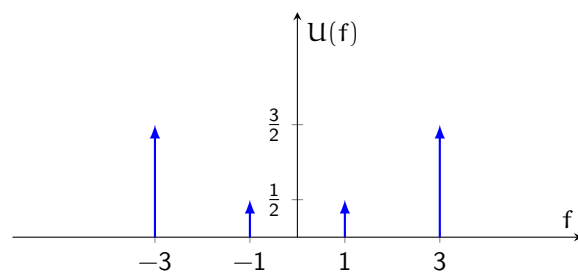


Figura 146: Segnale $U(f)$

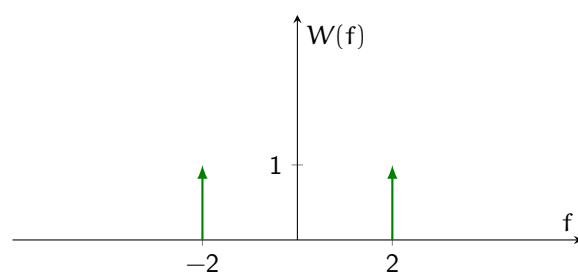


Figura 147: Segnale $W(f)$

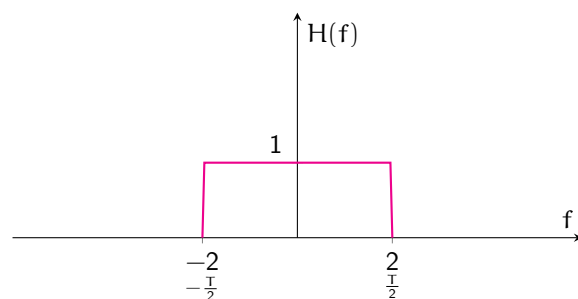


Figura 148: Segnale $H(f)$

3. Calcoliamo la convoluzione tra $U(f)$ e $W(f)$ per trovare $A(f)$: Eseguiamo la convoluzione tra $U(f)$ e $W(f)$ fissando un segnale e spostare l'altro specchiato. A livello più alto il segnale che si muove viene replicato ogni volta che l'asse centrale corrisponde con il segnale fermo:

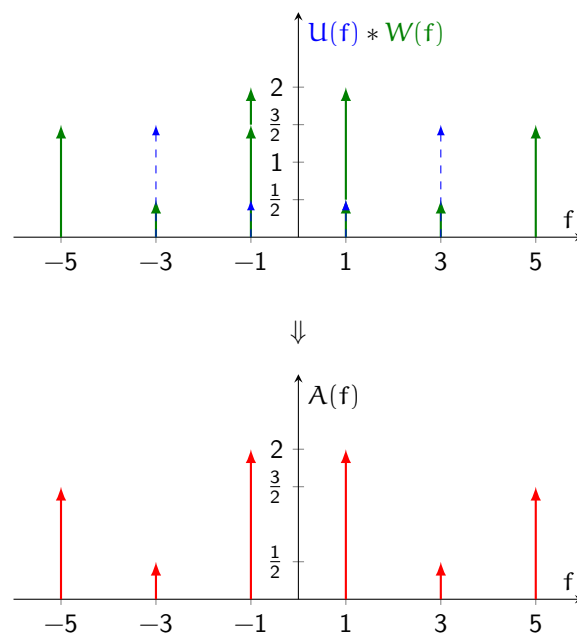


Figura 149: Segnale $A(f)$

Le altezze dei nuovi segnali replicati saranno la moltiplicazione dei segnali che si sovrappongono sommata alle altezze dei diversi segnali che si sovrappongono nello stesso punto.

4. Calcoliamo il prodotto tra $A(f)$ e $H(f)$ per trovare $B(f)$:

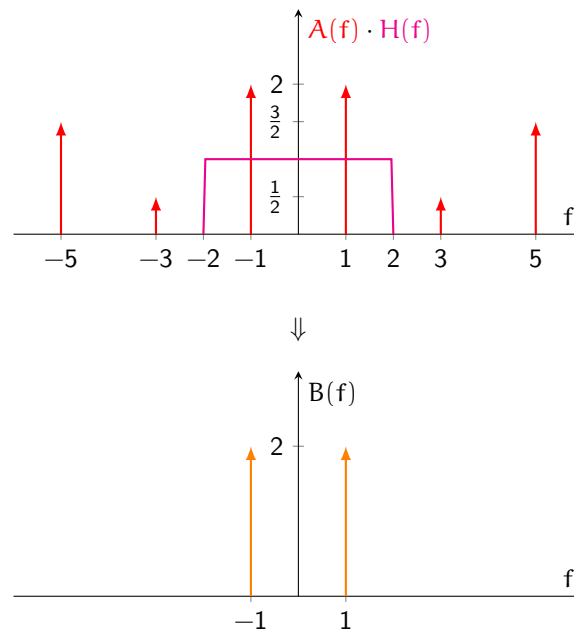


Figura 150: Segnale $B(f)$

13.7 Campionamento e replicazione

Prendiamo in considerazione il seguente sistema a blocchi

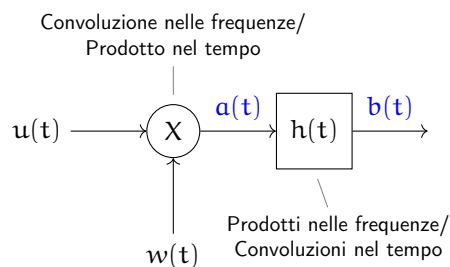


Figura 151: Sistema a blocchi

$$a(t) = u(t) \cdot w(t)$$

$$b(t) = [h(t) * a(t)](f)$$

Esiste un operatore chiamato **campionatore** che si chiude a intervalli regolari derivati da T_c (**frequenza di campionamento** [Hz]) e "compono" il segnale. È il componente che permette di passare dal segnale a tempo continuo a quello a tempo discreto.

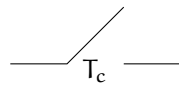


Figura 152: Campionatore

Quindi se prendiamo in considerazione il seguente segnale si ha un passaggio da continuo a discreto:

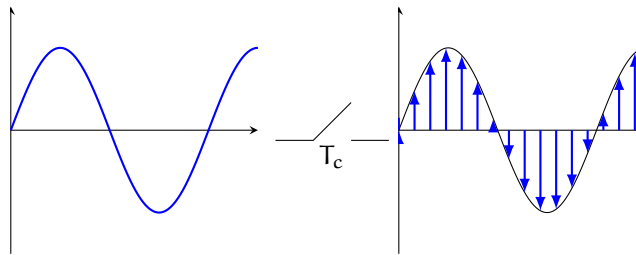


Figura 153: Campionamento del segnale

Nella realtà dopo il campionatore si inserisce uno **zero-holder** che mantiene il valore del segnale fino al prossimo campione:

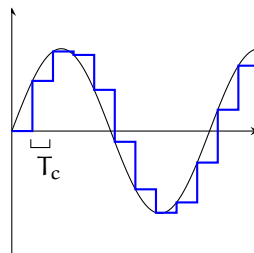


Figura 154: Zero-holder

Un segnale discreto può essere **quantizzato**, cioè approssimato ad un valore discreto. Questo processo è chiamato **quantizzazione**.

Inoltre un segnale quantizzato può essere **codificato** in binario, cioè rappresentato da una sequenza di bit, ovvero segnali alti e bassi:

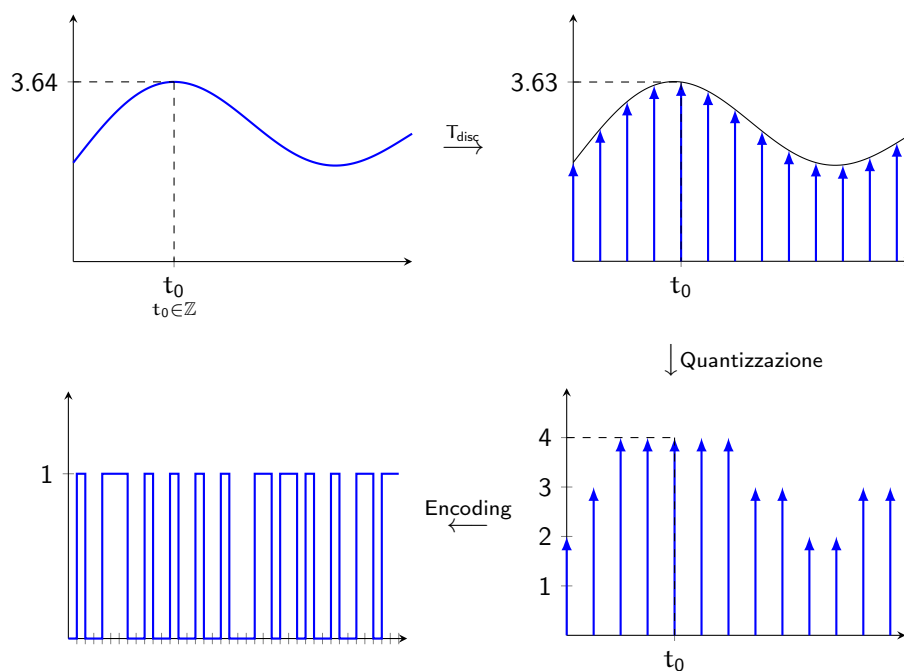


Figura 155: Discretizzazione, quantizzazione e codifica

13.7.1 Treno campionario/impulsi

Un treno di impulsi a distanza T_c moltiplicato per un altro segnale fa ottenere un segnale campionato in quel punto kT_c :

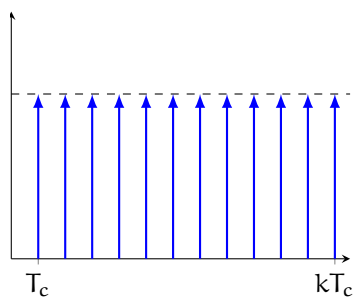


Figura 156: Treno di impulsi

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{T_c}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \\ &\quad \updownarrow \mathcal{F} \\ \frac{1}{T_c} \hat{\delta}_{\frac{1}{T_c}}(f) &= \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right) \end{aligned}$$

13.7.2 Campionamento

Definizione 13.7. Dato un segnale $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ e un periodo di campionamento $0 < T_c \in \mathbb{R}$, il campionamento è definito come:

$$[\text{samp}_{T_c} v](t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_c)$$

↓ Per la proprietà del campionamento dell'impulso

$$\begin{aligned} [\text{samp}_{T_c} v](t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_c) \cdot \delta(t - kT_c) \\ &= v(t) \cdot \hat{\delta}_{T_c}(t) \end{aligned}$$

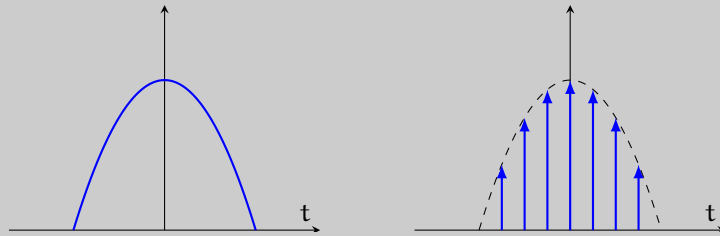
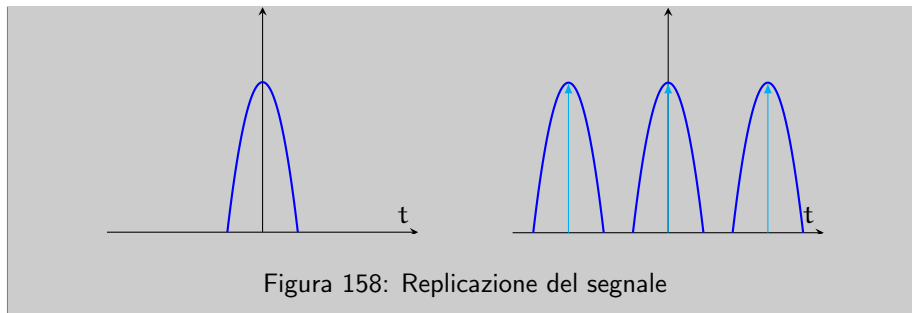


Figura 157: Campionamento del segnale

13.7.3 Replicazione

Definizione 13.8. Sia un segnale $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ e un periodo di campionamento $0 < T_c \in \mathbb{R}$, la replicazione è definita come:

$$\begin{aligned} [\text{rep}_{T_c} v](t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - kT_c) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t) * \delta(t - kT_c) \\ &= [v * \hat{\delta}_{T_c}](t) \end{aligned}$$



Se si replica nel tempo si ottiene un campionamento scalato nelle frequenze

$$[\text{rep}_{T_c} v](t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_c} [\text{samp}_{T_c} V](f)$$

Se si campiona nel tempo si ottiene una replicazione scalata nelle frequenze

$$[\text{samp}_{T_c} v](t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_c} [\text{rep}_{T_c} V](f)$$

13.7.4 Teorema del campionamento ideale di Shannon

Teorema 13.3. Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un segnale campionato con frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} v(k) &= v_0(kT_c) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(t) \cdot \delta(t - kT_c) \\ &= [\text{samp}_{T_c} v_0](t) \end{aligned}$$

Se:

1. $v_0(t)$ è limitato in banda, cioè esiste almeno un $B > 0$ tale che $V_0(f) = 0$ per frequenze $|f| > B$, e B è il più piccolo per cui questo è vero. Ad esempio:

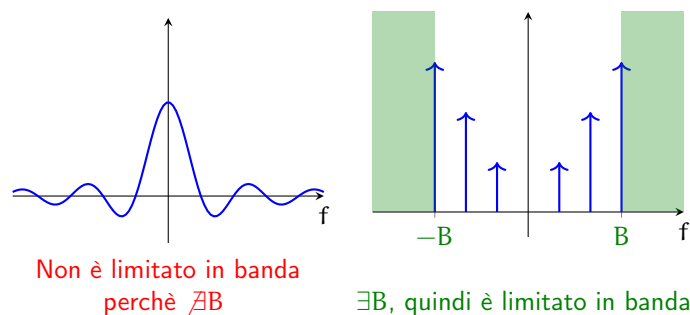


Figura 159: Esempi di segnali limitati in banda

2. e la frequenza di campionamento f_c è tale per cui $f_c > 2B$, dove $2B$ è detta **frequenza di Nyquist**. Ad esempio:

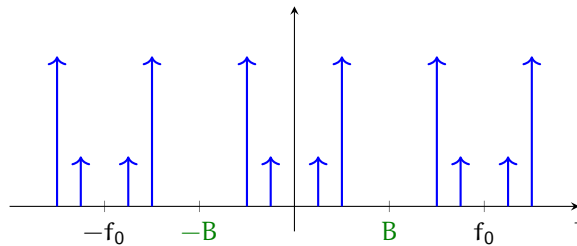


Figura 160: Esempio di frequenza di campionamento

Se:

$$\begin{aligned} B &= 10\text{Hz} \\ f_c &= 5\text{Hz} \\ f_c &> 2B \rightarrow 5 > 20 \text{ (FALSO)} \end{aligned}$$

Se:

$$\begin{aligned} B &= 5\text{Hz} \\ f_c &= 20\text{Hz} \\ f_c &> 2B \rightarrow 20 > 10 \text{ (VERO)} \end{aligned}$$

Allora $v_0(t)$ è ricostruibile a partire dal segnale campionato $[\text{samp}_{T_c} v_0](t)$ utilizzando un filtro di ricostruzione H_r :

$$\begin{aligned} H_r(f) &= T_c \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \frac{1}{f_c} \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) \\ B &< f_L < f_c - B \end{aligned}$$

Quindi:

$$v_0(t) = \left[(\text{samp}_{T_c} v_0) * \underbrace{h(T)}_{\text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)} \right] (t)$$

Se $f_c < 2B$ si presenta il fenomeno di **aliasing**

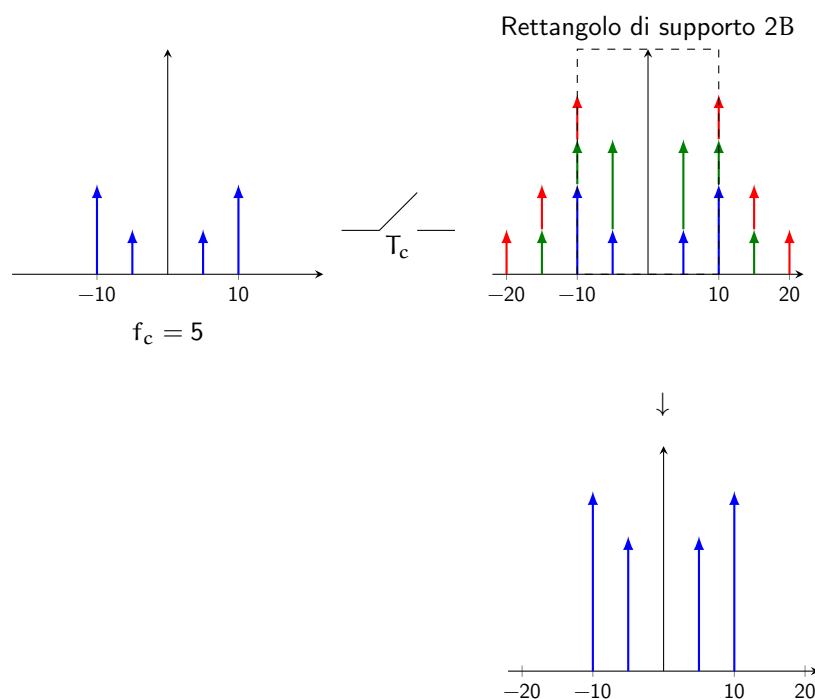


Figura 161: Fenomeno di aliasing

Cioè il segnale si mescola con le repliche delle bande laterali e la ricostruzione da origine ad un segnale diverso da quello originale.

14 Sistemi a tempo discreto

Definizione 14.1. Un sistema a tempo discreto è un sistema i cui elementi descrittivi (funzioni di ingresso e uscita) sono successioni di valori discreti:

$$(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

14.1 Proprietà

1. Linearità

$$au_1(k) + bu_2(k) \mapsto av_1(k) + bv_2(k)$$

2. Tempo invarianza

$$u(k) \mapsto v(k) \Rightarrow u(k-d) \mapsto v(k-d) \quad d \in \mathbb{Z}$$

3. **Causalità** L'uscita di $v(d)$ dipende solo da $u(k)$ con $k \leq d$. Da questo segue la definizione di **segnale inizialmente a riposo**, cioè dato un istante d sia l'ingresso che l'uscita sono nulli.

Se un sistema è lineare, causale e tempo invariante si dice **LTI**.

4. **Stabilità asintotica** $\exists d \in \mathbb{Z}$

$$u(k) = 0, \forall k \geq d \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} v(k) = 0$$

5. **BIBO stabilità** $\exists d \in \mathbb{Z}$ e $\exists \mu_u > 0$ tale che:

$$|u(k)| < \mu_u, \forall k \geq d \Rightarrow \exists \mu_v > 0 \text{ tale che } |v(k)| < \mu_v$$

Se un sistema è asintoticamente stabile è anche bibo stabile, ma non viceversa

14.2 Modellare un sistema a tempo discreto

Nel continuo il modello era il seguente:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

Nel **discreto** si ha un modello con equazioni alle differenze:

$$\sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j \underbrace{u(k-j)}_{\text{Derivata del segnale nel tempo}} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Si dice che n è l'**ordine del sistema** se e solo se $a_n \neq 0$. Questo modello è chiamato **Modello ARMA** (AutoRegressive Moving Average).

- **Auto regressivo:** ogni sistema descritto dall'equazione 3 e con $m = 0$ è descritto come:

$$\sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = u(k)$$

Cioè l'uscita in ogni istante si determina, una volta noto l'ingresso, tramite regressione con gli n valori precedenti dell'uscita.

- **Modello a media mobile:** ogni sistema descritto dall'equazione 3 e con $n = 0$ è descritto come:

$$v(k) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j)$$

Cioè l'uscita del sistema è descritta ad ogni istante da una combinazione lineare degli m valori precedenti dell'ingresso.

Per capire come si comporta un modello a tempo discreto bisogna imporre le n condizioni iniziali:

$$v(-1); v(-2); \dots; v(-n)$$

14.2.1 Risoluzione di sistemi a tempo discreto

Bisogna riscrivere l'equazione 3 esplicitando $v(k)$:

$$v(k) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{b_0} u(k-j) - \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{a_0} v(k-i)$$

Verifichiamo il comportamento anche ai tempi precedenti a k :

$$v(k-n) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{b_n} u(k-j) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} v(k-i)$$

Esempio 14.1. Prendiamo in considerazione il seguente sistema:

$$v(k) - v(k-1) + v(k-2) = u(k) + 4u(k-2)$$

Con condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(-1) = 1 \\ v(-2) = 2 \\ u(k) = 3k \cdot \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

- $k \geq 0$

- $k = 0$

$$\begin{aligned} k = 0 = v(0) &= v(-1) - v(-2) + u(0) + 4u(-2) \\ &= 1 - 2 + 0 + 0 = -1 \end{aligned}$$

- $k = 1$

$$\begin{aligned} k = 1 = v(1) &= v(0) - v(-1) + u(1) + 4u(-1) \\ &= -1 - 1 + 3 + 0 = 1 \end{aligned}$$

- $k = 2$

$$\begin{aligned} k = 2 = v(2) &= v(1) - v(0) + u(2) + 4u(0) \\ &= 1 + 1 + 6 + 0 = 8 \end{aligned}$$

- $k < 0$ Cosa succede al sistema per $k = -1$ e $k = -2$?

- $k = -1$

$$\begin{aligned} k = -1 = v(-3) &= v(-2) - v(-1) + u(-1) + 4u(-3) \\ &= 2 - 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$-k = -2$$

$$\begin{aligned} k = -2 = v(-4) &= v(-3) - v(-2) + u(-2) + 4u(-4) \\ &= 1 - 2 + 0 + 0 = -1 \end{aligned}$$

Anche per i sistemi a tempo discreto si può separare la risposta totale in risposta libera e risposta forzata.

$$v_t = v_l + v_f$$

1. **Equazione omogenea:**

$$\sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = 0$$

(uscita = 0)

2. **Polinomio caratteristico:**

$$p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i}$$

$r \leq n$ radici distinte

μ_r molteplicità algebrica

Moltiplicando per z^n si ottiene un polinomio caratteristico di un'altra forma:

$$p(z) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} z^i$$

3. **Risposta libera:**

$$v_l(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{k^l}{l!} \lambda_i^k$$

4. **Modi elementari:**

$$m_i(k) = \frac{k^l}{l!} \lambda_i^k$$

nel tempo continuo c'era il concetto di stabilità asintotica, cioè:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_l(k) = 0$$

nel **tempo discreto** il sistema è asintoticamente stabile se i modi elementari convergono:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_i(k) = 0$$

di conseguenza:

$$|\lambda_i| < 1$$

5. **Prodotto di convoluzione** Siano $u, v : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ due successioni, il prodotto di convoluzione è definito come la seguente successione, se esiste:

$$\begin{aligned} [u * v](k) &:= \sum_{l=-\infty}^{\infty} u(l) v(k-l) \\ &:= \sum_{l=-\infty}^{\infty} v(l) u(k-l) \end{aligned}$$

6. **Risposta impulsiva discreta:**

$$u(k) = \delta_0(k) \rightarrow v(k) = \underbrace{h(k)}_{\text{Risposta impulsiva}}$$

7. **Forma della risposta impulsiva:** Nel tempo continuo la risposta impulsiva era:

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t)$$

Nel **tempo discreto** la risposta impulsiva assume 2 forme diverse:

- Se $n \neq 0$ e $n > m$

$$h(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{k^l}{l!} \lambda_i^k \delta_{-1}(k)$$

- Se $n \neq 0$ e $n \leq m$

$$h(k) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \delta_0(k-i) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{k^l}{l!} \lambda_i^k \delta_{-1}(k-(m-n+1))$$

8. **Risposta forzata:**

$$\begin{aligned} v_f(k) &= [u * h](k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i) h(k-i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) u(k-i) \end{aligned}$$

Siccome la risposta impulsiva è causale si possono cambiare gli estremi della sommatoria:

$$\begin{aligned} v_f(k) &= [u * h](k) = \sum_{i=0}^k h(i) u(k-i) \\ &= \sum_{i=0}^k u(i) h(k-i) \end{aligned}$$

9. **Risposta totale:**

$$v_t(k) = v_l(k) + v_f(k)$$