

Algebra Lineare - Esercizi da consegnare

UniVR - Dipartimento di Informatica

Scheda 2

Mattia Arganetto - VR502412

Chiara Baldo - VR500878

Paolo Imbriani - VR500437

Fabio Irimie - VR501504

2° Semestre 2023/2024

Indice

1	Scheda 2	2
1.1	Esercizio 1	2
1.2	Esercizio 2	6
1.3	Esercizio 3	10

1 Scheda 2

1.1 Esercizio 1

Si consideri

$$f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ix + y \\ x + iy \\ x + 3z \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che f è lineare.

Verifico se valgono le seguenti proprietà con $v, w \in \mathbb{C}^3$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$

$$f \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) + f \left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} iv_1 + v_2 \\ v_1 + iv_2 \\ v_1 + 3v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iw_1 + w_2 \\ w_1 + iw_2 \\ w_1 + 3w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 3(v_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv_1 + v_2 + iw_1 + w_2 \\ v_1 + iv_2 + w_1 + iw_2 \\ v_1 + 3v_3 + w_1 + 3w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 3(v_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 3(v_3 + w_3) \end{pmatrix}$$

Quindi vale la proprietà

- $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

$$f \left(\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = \alpha f \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} iv_1 + v_2 \\ v_1 + iv_2 \\ v_1 + 3v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i(\alpha v_1) + (\alpha v_2) \\ (\alpha v_1) + i(\alpha v_2) \\ (\alpha v_1) + 3(\alpha v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(iv_1 + v_2) \\ \alpha(v_1 + iv_2) \\ \alpha(v_1 + 3v_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\alpha v_1 + \alpha v_2 \\ \alpha v_1 + i\alpha v_2 \\ \alpha v_1 + 3\alpha v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha v_1 + \alpha v_2 \\ \alpha v_1 + i\alpha v_2 \\ \alpha v_1 + 3\alpha v_3 \end{pmatrix}$$

Quindi vale la proprietà

Entrambe le proprietà sono verificate, quindi f è lineare.

- (b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_A = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix + y \\ x + iy \\ x + 3z \end{pmatrix}$$

- (c) Stabilire se f è un isomorfismo

f è un isomorfismo se e solo se A è invertibile. A è invertibile se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (i \cdot i - (1 \cdot 1)) = 3 \cdot (-1 - 1) = 3 \cdot (-2) = -6$$

$\det(A) \neq 0$ quindi f è un isomorfismo.

- (d) Verificare che $\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di \mathbb{C}^3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{31}(-i)]{R_3 \sim R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 - i5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(\frac{1}{3-i5})]{\frac{1}{3-i5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ridotta ha tutte le colonne dominanti, cioè tutti gli elementi di \mathcal{B} sono linearmente indipendenti, quindi \mathcal{B} è una base di \mathbb{C}^3 .

- (e) Verificare che $\mathcal{C} = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di \mathbb{C}^3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{R_2 \sim R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)]{R_3 \sim R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}]{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(-1)]{(-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(i)]{iR_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ridotta ha tutte le colonne dominanti, cioè tutti gli elementi di \mathcal{C} sono linearmente indipendenti, quindi \mathcal{C} è una base di \mathbb{C}^3 .

- (f) Determinare la matrice D associata ad f rispetto alla base \mathcal{B} del dominio e alla base \mathcal{C} del codominio

La matrice D avrà come colonne $[f(b_i)]_C$ con $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
f(b_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+3i \end{pmatrix} \Rightarrow [f(b_1)]_C = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 \\
&= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \\
&\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 = i \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 + 3i \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 + 3i \\ \alpha_2 = -3i \\ \alpha_3 = \frac{i-1}{i} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(b_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [f(b_2)]_C = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3 \\
&= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 \\ \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\
&\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = i \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = i \\ \beta_3 = \frac{1-i}{i} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(b_3) &= f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4+5i \\ 5+4i \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow [f(b_3)]_C = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3 \\
&= \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 = 4 + 5i \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 5 + 4i \\ \gamma_1 = 14 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma_1 = 14 \\ \gamma_2 = -9 + 4i \\ \gamma_3 = \frac{i-1}{i} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 & 14 \\ -3i & i & -9+4i \\ \frac{i-1}{i} & \frac{1-i}{i} & \frac{i-1}{i} \end{pmatrix}$$

(g) Calcolare la matrice $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{C}

La matrice $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ del cambio di base ha come colonne $[b_i]_{\mathcal{C}}$ con $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow [b_1]_{\mathcal{C}} = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = i \end{cases} &\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = i \\ \alpha_2 = -i \\ \alpha_3 = \frac{1}{i} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [b_2]_{\mathcal{C}} = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3 \\ &= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 \\ \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + i\beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} &\rightsquigarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = -\frac{1}{i} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow [b_3]_{\mathcal{C}} = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3 \\ &= \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + i\gamma_3 = 5 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 4 \\ \gamma_1 = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma_1 = 3 \\ \gamma_2 = 1 \\ \gamma_3 = \frac{1}{i} \end{cases}$$

$$A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ -i & 1 & 1 \\ \frac{1}{i} & -\frac{1}{i} & \frac{1}{i} \end{pmatrix}$$

1.2 Esercizio 2

Si consideri

$$g : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad g(A) = AB - BA$$

dove $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Verificare che

$$\mathcal{D} = \left\{ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Verifico se le matrici D_i sono linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Tutte le matrici di \mathcal{D} sono linearmente indipendenti, quindi \mathcal{D} è una base di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Verificare che

$$\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Verifico se le matrici E_i sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Tutte le matrici di \mathcal{E} sono linearmente indipendenti, quindi \mathcal{E} è una base di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (c) Calcolare la matrice M associata a g rispetto alla base \mathcal{D} del dominio e rispetto alla base \mathcal{E} del codominio.

La matrice M avrà come colonne $[g(D_i)]_{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} g(D_1) &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [g(D_1)]_{\mathcal{E}} &= \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(D_2) &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [g(D_2)]_{\mathcal{E}} &= \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4 \\ &= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(D_3) &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [g(D_3)]_{\mathcal{E}} &= \gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2 + \gamma_3 E_3 + \gamma_4 E_4 \\ &= \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(D_4) &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [g(D_4)]_{\mathcal{E}} &= \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 + \delta_3 E_3 + \delta_4 E_4 \\ &= \delta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= ([g(D_1)]_{\mathcal{E}} \quad [g(D_2)]_{\mathcal{E}} \quad [g(D_3)]_{\mathcal{E}} \quad [g(D_4)]_{\mathcal{E}}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Calcolare il rango e la nullità di g

Il rango di g è uguale al rango della matrice M , quindi:

$$rk(M) = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\widetilde{E_{12}}]{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\widetilde{E_{24}}]{R_4 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\widetilde{E_{32}(2)}]{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\widetilde{E_{42}(1)}]{R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 2, quindi $rk(g) = rk(M) = 2$

Siccome $dim_{\mathbb{R}}(M) = rk(M) + dim_{\mathbb{R}}(N(M))$, allora

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{R}}(N(g)) &= dim_{\mathbb{R}}(N(M)) = rk(M) - dim_{\mathbb{R}}(M) \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

L'applicazione lineare g ha rango 2 e nullità 2.

(e) Calcolare una base di $N(g_M)$ ed una base di $Im(g_M)$

$$N(g_M) = N(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 2w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = -3y + w \\ z = -w \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + w \\ y \\ -w \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } N(g_M)$$

Una base di $Im(g_M)$ è data dalle colonne dominanti della matrice M :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } Im(g_M)$$

1.3 Esercizio 3

Data la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico P_N di N

$$\begin{aligned} P_N &= \det(N - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(-5+\lambda) + (3-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda) + 1) \\ &= 5-\lambda + (3-\lambda)(20-5\lambda-4\lambda+\lambda^2+1) \\ &= 5-\lambda + (3-\lambda)(21-9\lambda+\lambda^2) \\ &= 5-\lambda + 63-27\lambda+3\lambda^2-21\lambda+9\lambda^2-\lambda^3 \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 49\lambda + 68 \end{aligned}$$

(b) Calcolare tutti gli autovalori di N in \mathbb{C}

Utilizzo Ruffini per trovare gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 12 & -49 & 68 \\ 4 & & -4 & 32 & -68 \\ \hline & -1 & 8 & -17 & 0 \end{array}$$

$$(\lambda - 4)(-\lambda^2 + 8\lambda - 17) = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-68}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-4}}{-2} = \frac{-8 \pm 2i}{-2} = 4 \pm i$$

$$\lambda_2 = 4 + i$$

$$\lambda_3 = 4 - i$$

(c) Stabilire se la matrice N è diagonalizzabile

Siccome la matrice $N \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ ha 3 autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.