

# **Analisi 1**

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Numeri reali . . . . .	2
1.2	Maggiorante . . . . .	2
1.3	Minorante . . . . .	2
1.4	Estremo superiore . . . . .	3
1.5	Estremo inferiore . . . . .	3
1.6	Massimo . . . . .	3
1.7	Minimo . . . . .	4
1.8	Funzioni . . . . .	4
1.8.1	Dominio di una funzione . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Limiti</b>	<b>5</b>
2.1	Esempi . . . . .	6
2.2	Osservazioni . . . . .	8
2.3	Risultati utili per il calcolo dei limiti . . . . .	9
2.4	Forme indeterminate . . . . .	9
2.5	Esempi di calcolo di limiti . . . . .	10
2.6	Limiti razionali . . . . .	10
2.7	Limiti delle funzioni monotone . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Teorema dei carabinieri</b>	<b>13</b>
3.1	Variante . . . . .	13

# 1 Introduzione

## 1.1 Numeri reali

I numeri reali sono descritti tramite rappresentazioni decimali limitate o illimitate, periodiche o non periodiche, e sono tutti i numeri razionali e irrazionali; questo insieme viene indicato con il simbolo  $\mathbb{R}$

Proprietà necessarie dei numeri reali:

- **1<sup>a</sup> proprietà (Eudosso-Archimede):** due grandezze sono confrontabili quando esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Ciò significa che non possiamo confrontare linee con superfici, o superfici con volumi, ecc.

Questa proprietà veniva assunta come definizione di grandezze omogenee.

**Assioma:** dati due numeri reali positivi  $a, b$  con  $0 < a < b$  esiste un intero  $n$  tale che  $na > b$ .

- **2<sup>a</sup> proprietà (Intervalli inscatolati):** date due serie di grandezze:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$ : la prima crescente (numeri della famiglia  $a$ ) e la seconda decrescente (numeri della famiglia  $b$ ), in cui ogni  $a_k$  è minore di  $b_k$  e tali che per ogni altra grandezza  $d$  si ha  $b_k - a_k < c$  per qualche  $k$ , allora esiste una grandezza  $c$  tale che per ogni  $k$   $a_k \leq c \leq b_k$ .

## 1.2 Maggiorante

### **Definizione 1.1**

*Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme di numeri reali. Un numero  $y \in \mathbb{R}$  è un maggiorante dell'insieme  $S$  se per ogni  $x \in S$  si ha che  $y \geq x$ .*

Se sommassimo un qualsiasi numero positivo a questo maggiorante si otterrebbe un altro maggiorante.

Se l'intervallo tendesse verso  $+\infty$  non si sarebbe alcun maggiorante poichè  $+\infty$  non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$ : tutti i maggioranti sono quelli per  $y \geq 10$
- $I = [0, 3)$ : tutti i maggioranti sono quelli per  $y \geq 3$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ : non ha maggiorante

## 1.3 Minorante

### **Definizione 1.2**

*Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme di numeri reali. Un numero  $y \in \mathbb{R}$  è un minorante dell'insieme  $S$  se per ogni  $x \in S$  si ha che  $y \leq x$ .*

Se sottraessimo un qualsiasi numero negativo a questo minorante si otterrebbe un altro minorante.

Se l'intervallo tendesse verso  $-\infty$  non ci sarebbe alcun minorante poichè  $-\infty$  non è un numero reale. Esempi:

- $I = (1, 10]$ : tutti i minoranti sono quelli per  $y \leq 1$

- $I = [9, 3)$ : tutti i minoranti sono quelli per  $y \leq 9$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ : non ha minorante

## 1.4 Estremo superiore

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S$  è un insieme limitato superiormente con  $y \in \mathbb{R}$  estremo superiore di  $S$  se:

- $y$  è un maggiorante di  $S$
- $y$  è il più piccolo maggiorante di  $S$

Se  $S$  è un insieme illimitato superiormente allora l'estremo superiore di  $S$  è  $\sup(S) = +\infty$ . Esempi:

- $I = (1, 10]$ :  $\sup(I) = 10$
- $I = (-\infty, 0)$ :  $\sup(I) = 0$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ :  $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

## 1.5 Estremo inferiore

Dato un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S$  è un insieme limitato inferiormente con  $y \in \mathbb{R}$  estremo inferiore di  $S$  se:

- $y$  è un minorante di  $S$
- $y$  è il più grande minorante di  $S$

Se  $S$  è un insieme illimitato inferiormente allora l'estremo inferiore di  $S$  è  $\inf(S) = -\infty$ . Esempi:

- $I = [1, 8)$ :  $\inf(I) = 1$
- $I = (-13, 0)$ :  $\inf(I) = -13$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ :  $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

## 1.6 Massimo

### **Definizione 1.3**

*Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme reale, dove  $y \in \mathbb{R}$  è il massimo di  $S$  se  $y$  è l'estremo superiore di  $S$  e se  $y \in S$ .*

Quindi se l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà massimo indicato con  $\max(S) = y$ .

## 1.7 Minimo

### Definizione 1.4

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme reale, dove  $y \in \mathbb{R}$  è il minimo di  $S$  se  $y$  è l'estremo inferiore di  $S$  e se  $y \in S$ .

Quindi se l'estremo inferiore di un insieme appartiene all'insieme stesso, esso si chiamerà minimo indicato con  $\text{Min}(S) = y$ .

**Teorema 1** Ogni insieme di numeri reali che sia limitato superiormente ha estremo superiore.

## 1.8 Funzioni

### Definizione 1.5

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi dove tutti gli elementi del primo insieme hanno associati un solo elemento del secondo insieme:

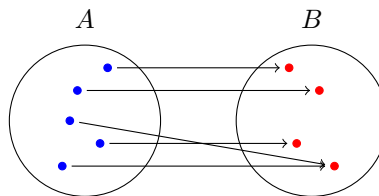
$$f : A \rightarrow B$$

Questa è una funzione se e solo se a ogni elemento di  $A$  è associato uno e uno solo elemento di  $B$ .

Tradotto in simboli diventa:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } f : A \rightarrow B$$

Esempio di funzione corretta:



### 1.8.1 Dominio di una funzione

#### Definizione 1.6

Dato un insieme di partenza  $A$  gli elementi ai quali è applicata la funzione  $f$  sono il dominio stesso della funzione

Esempio:

$$x \rightarrow x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

Si può dare un nome simbolico alla funzione scrivendo in questo modo:

$$f(x) = x^2 \text{ con } D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ con } D = [0, +\infty)$$

## 2 Limiti

I limiti sono il calcolo infinitesimale, ovvero il calcolo che si occupa di studiare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto.

Nelle definizioni che seguono, è data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  il cui dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$  è un insieme **non** limitato superiormente. (Questa ipotesi serve per definire i limiti per  $x \rightarrow +\infty$  )

### **Definizione 2.1**

Sia  $L \in \mathbb{R}$ . Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

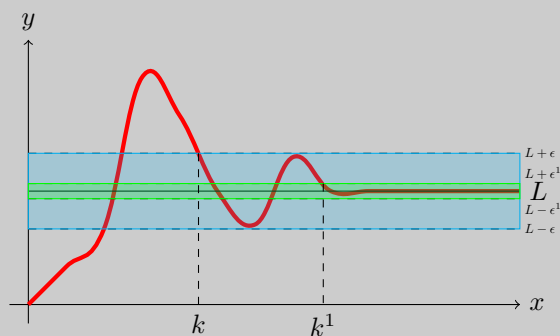
Se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A^a,$$

$$x \geq k \rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow L$  per  $x \rightarrow +\infty$  )

**La condizione deve essere soddisfatta per ogni  $\epsilon$  .**



Per la definizione di limite, la funzione deve entrare in un intorno di  $L$  e non uscirne più. Questo vale per ogni  $\epsilon$ , quindi anche per  $\epsilon^1$ .

<sup>a</sup>Il dominio della funzione

**Definizione 2.2**

Si dice che

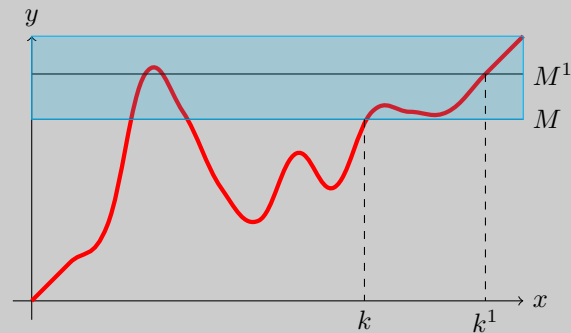
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

$$x \geq k \rightarrow f(x) \geq M$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ )

**Definizione 2.3**

Si dice che

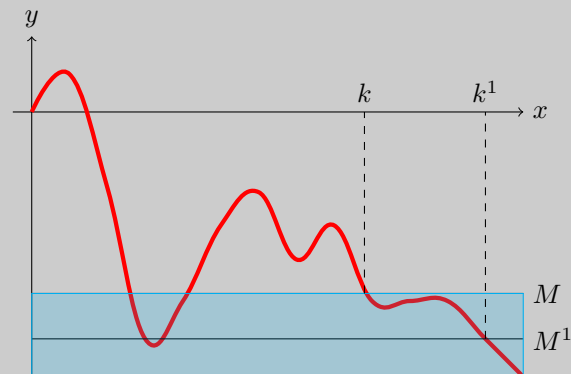
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se e solo se

$$\forall M > 0 \ \exists k > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A,$$

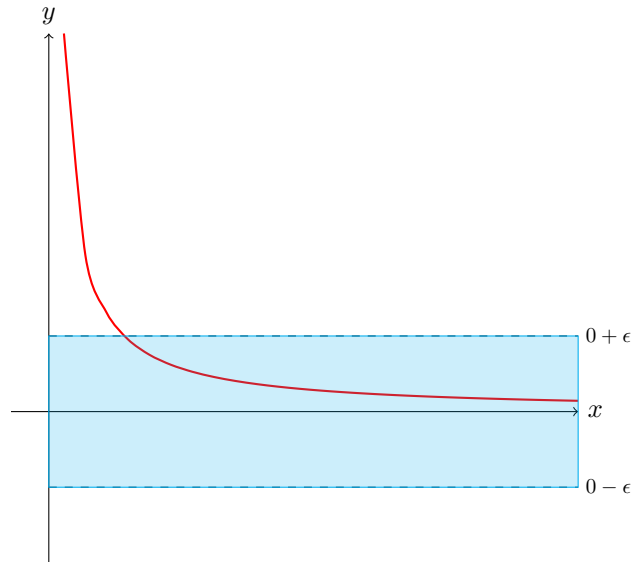
$$x \geq k \rightarrow f(x) \leq -M$$

(Notazione alternativa:  $f(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ )

**2.1 Esempi**

**Esempio 2.1**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Dominio} = \mathbb{R}/\{0\}$$



Sia dato  $\epsilon > 0$  arbitrario. Definisco  $k := \frac{1}{\epsilon}$ .  
Sia dato  $x > 0$  arbitrario, supponiamo  $x \geq k$ . Allora

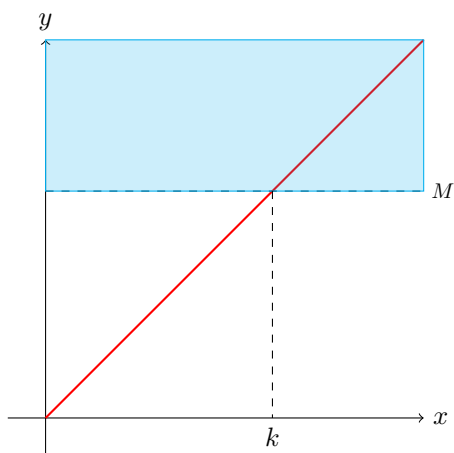
$$0 - \epsilon \leq 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

Quindi, ho dimostrato che la definizione di limite è soddisfatta (con  $L = 0$ ).

**Esempio 2.2**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$





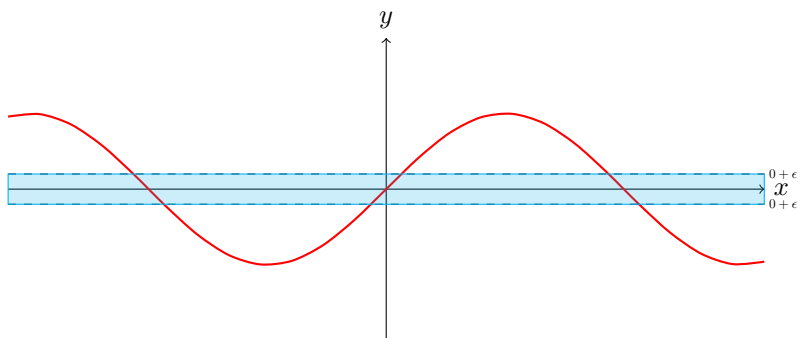
*Sia dato  $M > 0$  arbitrario. Definisco  $k := M$ .  
 Sia dato  $x \geq k$ . Allora  $x \geq M$ .  
 Quindi è verificata la definizione di limite.*

## 2.2 Osservazioni

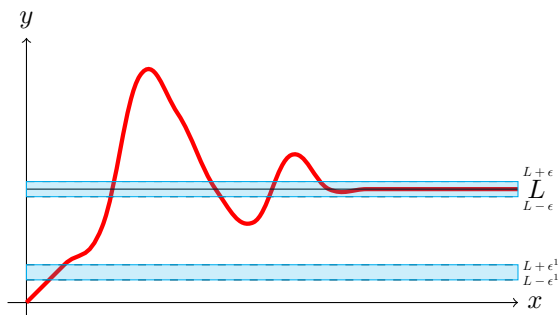
**Non** è detto che un limite esista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$



La funzione non entra in un intervallo limitato senza poi uscirne, quindi non esiste il limite.



Tuttavia, se una funzione ammette limite, allora esso è unico. Questa funzione dovrebbe entrare in entrambe le strisce e non uscirne più, ma questo non è possibile.

### 2.3 Risultati utili per il calcolo dei limiti

**Teorema 2 (Algebra dei limiti)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente,  $f$  e  $g$  due funzioni.  $A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che i limiti

$$F := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$G := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

esistano e siano **finiti**. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } G \neq 0$$

Il teorema si estende **parzialmente** nel caso  $F$  o  $G$  siano infiniti, secondo le regole seguenti:

- $F + \infty = +\infty, \quad F - \infty = -\infty \quad \forall F \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty, \quad +\infty - \infty = -\infty$
- $F \cdot \infty = \infty, \quad \forall F \in \mathbb{R}, \quad F \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{F}{\infty} = 0 \quad \forall F \in \mathbb{R}$
- $\frac{F}{0} = \infty \quad \forall F \in \mathbb{R}, \quad F \neq 0$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$

Il segno di  $\infty$  è da determinare secondo la regola usuale.

### 2.4 Forme indeterminate

Sono dei casi in cui il teorema **non** si applica e tutto può succedere:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $1^\infty$
- $0^0$
- $\infty^0$

**N.B.:** in questo contesto,  $0$ ,  $\infty$  e  $1$  sono da intendersi come abbreviazioni.

## 2.5 Esempi di calcolo di limiti

### *Esempio 2.3*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \rightarrow +\infty$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  (per il teorema dell'algebra dei limiti)

### *Esempio 2.4*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3 = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x^3}_{+\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{x}}_0 - 1 \right) \rightarrow -\infty$$

Per  $x \rightarrow +\infty$

### *Esempio 2.5*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^6 - 4x) = +\infty - \infty$$

$$\underbrace{x}_{+\infty} \left( \underbrace{5x^5}_{+\infty} - 4 \right) \rightarrow +\infty$$

## 2.6 Limiti razionali

Se  $P$  è un polinomio di grado  $p$  e  $Q$  è un polinomio di grado  $q$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > q \\ 0 & \text{se } p < q \\ \text{coefficiente denominante di } P & \text{se } p = q \\ \text{coefficiente denominante di } Q & \text{se } p = q \end{cases}$$

## 2.7 Limiti delle funzioni monotone

**Teorema 3 (di monotonia)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona<sup>1</sup>. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ esiste e}$$

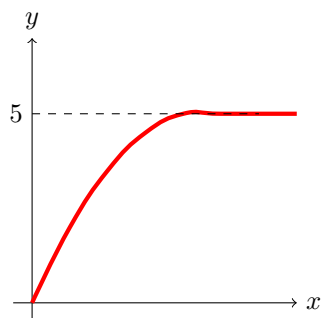
---

<sup>1</sup>Le funzioni **monotone** sono funzioni che sono sempre crescenti o sempre decrescenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce (nondecrecente)} \\ \inf\{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ decresce (noncrescente)} \end{cases}$$

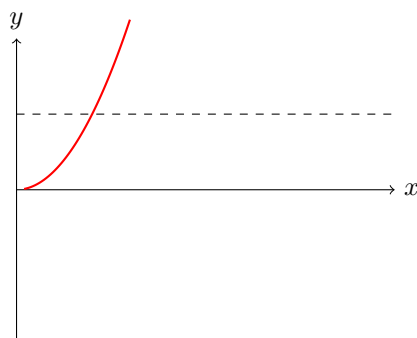
$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  è strettamente crescente e limitata (l'immagine di  $f$  è un insieme limitato).

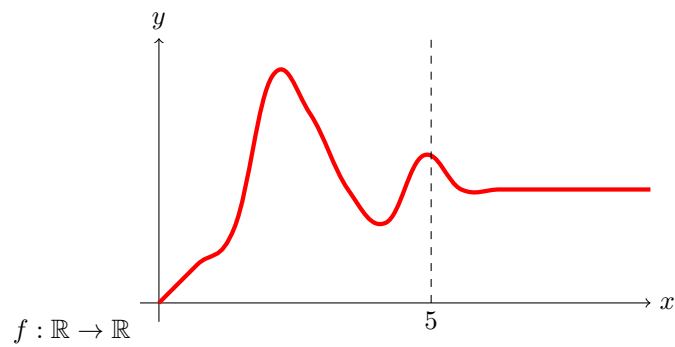


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente crescente e non limitata



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$



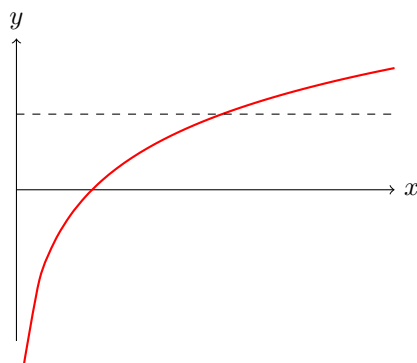
Questa funzione non è monotona, ma se guardiamo ciò che succede per  $x > 5$  si ottiene una funzione monotona. Quindi la funzione globalmente non è monotona, ma è decrescente ristrettamente a partire da  $x = 5$ .

Per il teorema di monotonia,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

### **Esempio 2.6**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$



Per il teorema di monotonia:

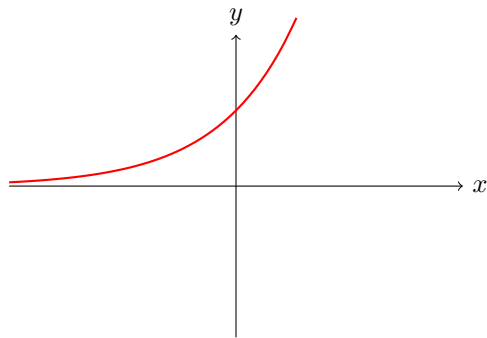
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) &= \sup\{\log(x) : x > 0\} \\ &\geq \sup\{\log(e^n) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} \text{ scelto arbitrariamente} \\ &= \sup\{n \cdot \log(e) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = +\infty \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato (per il postulato di Eudosso - Archimede) che il limite di questa funzione è uguale a  $+\infty$ .

### **Esercizio 2.1**

Dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



E similmente che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

### 3 Teorema dei carabinieri

**Teorema 4 (del confronto tra i limiti, o dei carabinieri)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non limitato superiormente e siano  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che

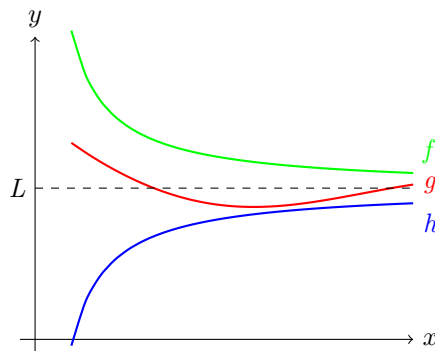
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$$

esistano (e che siano uguali tra di loro). Allora

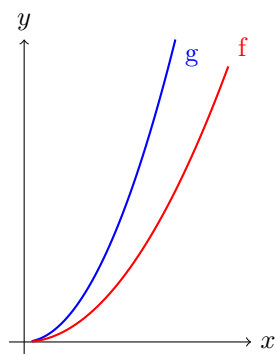
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$$



#### 3.1 Variante

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non limitato superiormente e siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .



Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

