

Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2024/2025

Indice

1	Concetti base	3
1.1	Tipi di segnali	3
1.2	Rappresentazione dei sistemi	4
2	Notazioni	5
3	Modello di sistemi	7
3.1	Approccio classico	7
3.2	Approccio moderno	7
3.3	Obsolescenza	7
3.4	Causalità	8
3.5	Stabilità	8
3.5.1	Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)	9
3.5.2	Stabilità Asintotica	10
4	Modello di segnali	11
5	Funzioni in \mathbb{C}	13
5.1	Funzione a variabili complesse	13
5.2	Funzioni complesse	15
5.3	Funzioni polinomiali	16
5.3.1	Risoluzione	16
6	Segnali	16
6.1	Segnali continui	16
6.1.1	Sinusoidale	17
6.1.2	Esponenziali reali	18
6.1.3	Esponenziali complessi	19
6.2	Segnali discreti	21
6.2.1	Sinusoidale	21
6.2.2	Esponenziali Reali	22
6.2.3	Esponenziali Complessi	23
6.3	Rappresentazione	25
6.4	Problema della periodicità	26
7	Segnali generalizzati	28
7.1	Segnali di impulso	28
7.1.1	Finestra rettangolare unitaria	30
7.1.2	Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario	30
7.2	Come si realizza un impulso	31
7.3	Derivata dell'impulso	32
7.4	Integrale dell'impulso	33
7.4.1	Funzione gradino	33
7.4.2	Funzione rampa	34
7.4.3	Funzione parabolica	34
7.4.4	A cosa servono i segnali canonici	35
7.5	Proprietà degli impulsi	35

8	Sistemi	37
8.1	Proprietà dei sistemi LTI	39
8.1.1	Linearità	39
8.1.2	Tempo invarianza	40
8.1.3	Causalità	40
8.1.4	Proprietà di stabilità asintotica	41
8.1.5	Proprietà di BIBO stabilità	42
8.2	Sistemi descritti da equazioni differenziali	43
8.2.1	Risoluzione	46
8.2.2	Risposta libera (o evoluzione libera)	47
8.2.3	Convergenza dei modi elementari	51
8.2.4	Dimostrazioni	52
8.2.5	Prodotto di convoluzione	54
8.2.6	Risposta impulsiva	57
8.2.7	Risposta forzata	61
8.2.8	Risposta totale	63
8.3	Stabilità in base alle radici	63
8.4	Risposta in frequenza	64
9	Trasformata unilatera di Laplace (TDL)	65
9.1	Proprietà della trasformata di Laplace	67
9.1.1	Linearità	67
9.1.2	Traslazione nel tempo (ritardo temporale)	68
9.1.3	Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)	68
9.1.4	Cambio di scala	69
9.1.5	Proprietà della derivata	69
9.1.6	Moltiplicazione per una funzione polinomiale	70
9.1.7	Integrazione nel tempo	70
9.1.8	Integrale nel dominio dei complessi	71
9.1.9	Teorema del valore iniziale	71
9.1.10	Teorema del valore finale	71
9.1.11	Convoluzione nel dominio del tempo	71
9.2	Trasformate notevoli	72
9.2.1	Impulso	72
9.2.2	Gradino	73
9.2.3	Esponenziale complesso causale	73
9.2.4	Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale	74
9.2.5	Funzione coseno	75
9.2.6	Funzione seno	76
9.3	Risoluzione di sistemi LTI causali	76
9.3.1	Stabilità di sistemi LTI causali	79
9.4	Antitrasformata di Laplace unilatera	82

1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

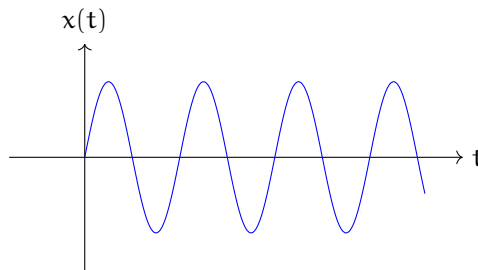


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

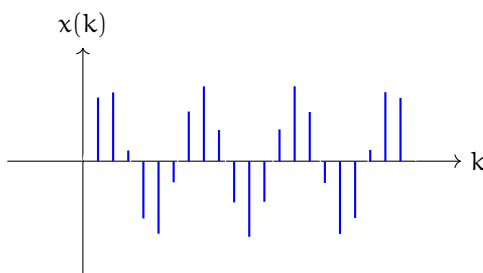


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

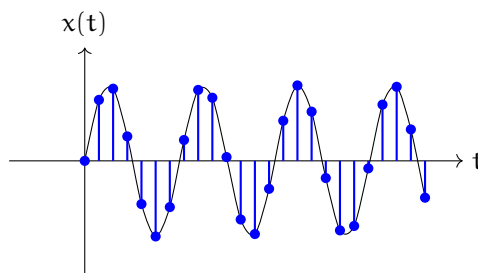


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

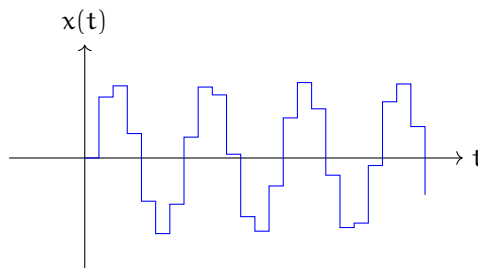


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni (x, y) .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale $(x, y)^3$ per rappresentare ogni colore (R,G,B).

1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

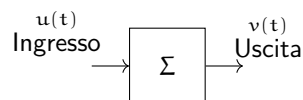


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

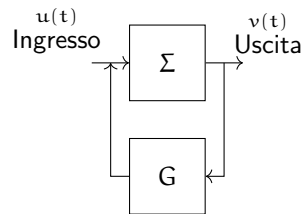


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

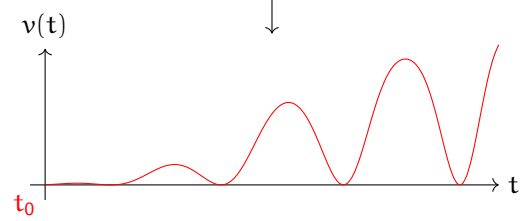
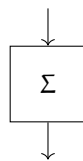
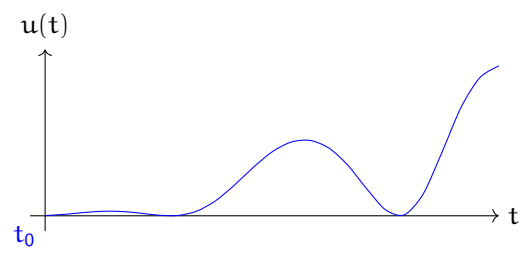
$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1. t, τ, t_i : tempo continuo
2. k : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se $v_1(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t)$ e $v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_2(t)$ allora $v_1(t) + v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t) + u_2(t)$.
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.



$$t_1 = t_0 + t_n$$

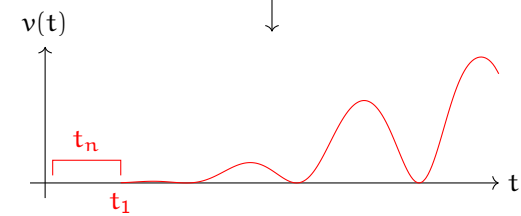
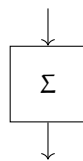
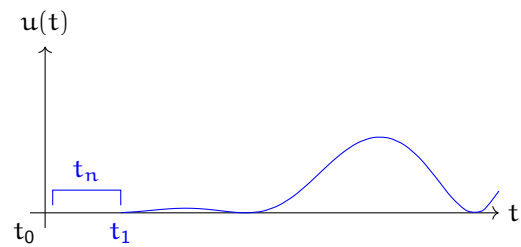


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

3 Modello di sistemi

3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:



Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

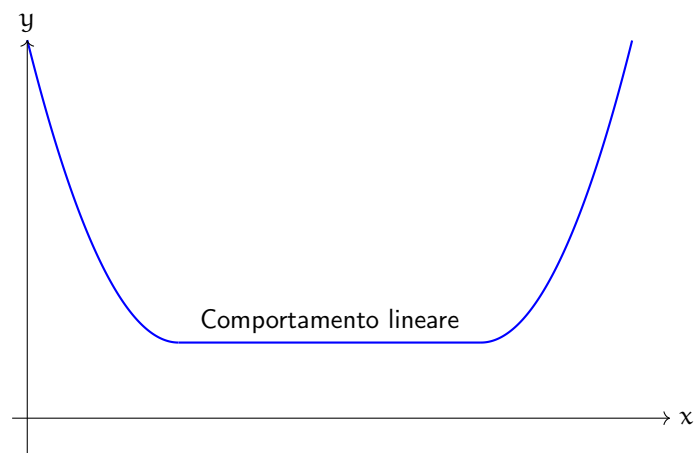


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

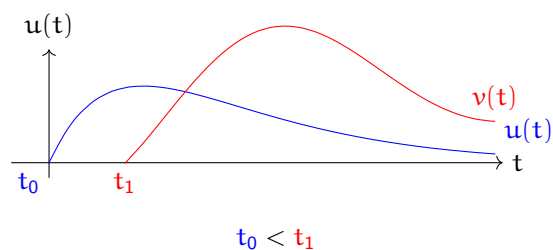


Figura 10: Esempio di causalità

3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

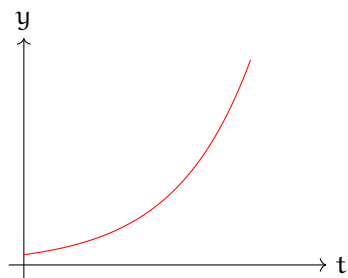


Figura 11: Sistema instabile

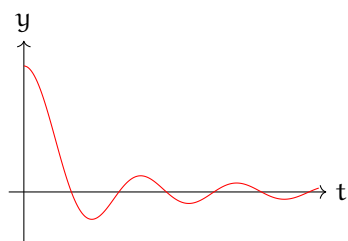


Figura 12: Sistema stabile

Ci sono 2 tipi di stabilità:

- **Stabilità asintotica** $\rightarrow \forall i \Re \lambda_i < 0$
- **Stabilità BIBO** verificare che $h(t)$ sia integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < +\infty$$

3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

\Downarrow

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con $M, N \in \mathbb{R}$ non per forza uguali

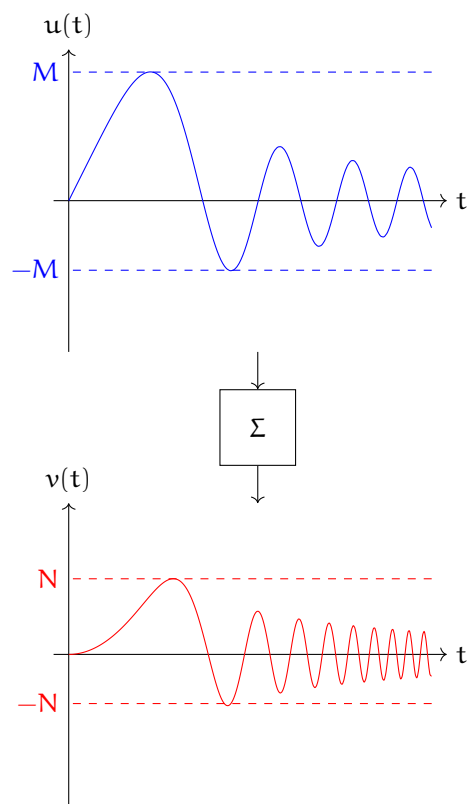


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

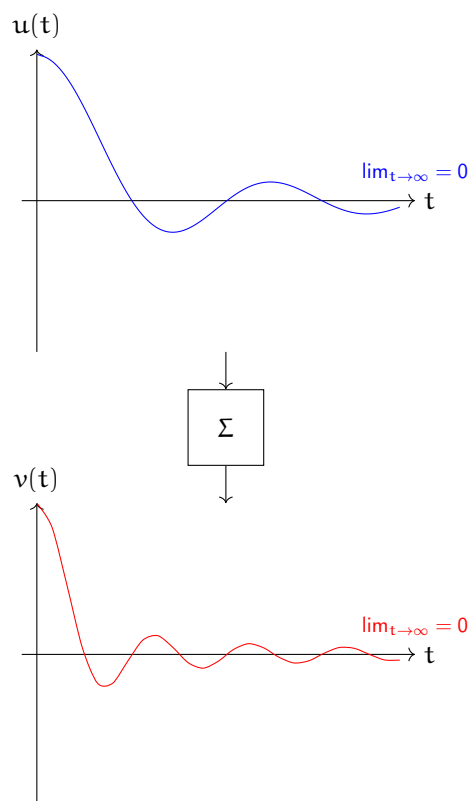


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

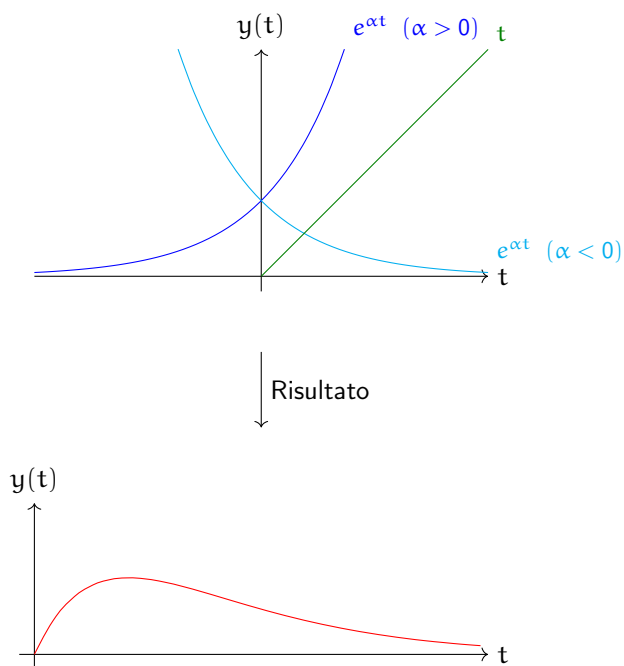


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con $l = 1$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con $\alpha < 0$ il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con $l = 2$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome $\alpha \in \mathbb{C}$ si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

λ è la parte reale

$j\omega$ è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Definizione 4.1 (Complesso coniugato). A ogni numero complesso è associato un coniugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

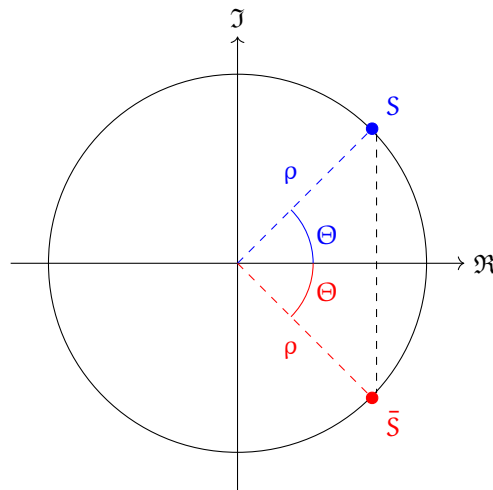


Figura 16: Circonferenza di proiezione

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

5 Funzioni in \mathbb{C}

5.1 Funzione a variabili complesse

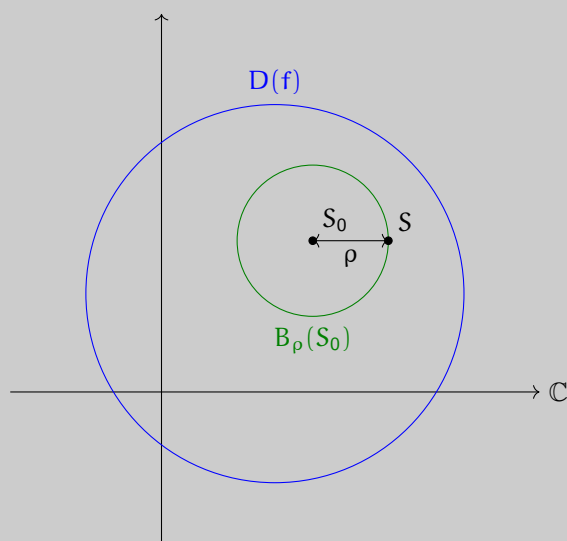
Definizione 5.1 (Funzione a variabile complessa). Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

Definizione 5.2 (Punto interno). Un punto S_0 appartenente a un intorno $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ è interno a $D(f)$ se e solo se esiste un disco $B_\rho(S_0)$ di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$ centrato in S_0 tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi $D(f)$ è un dominio e $B_\rho(S_0)$ è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$

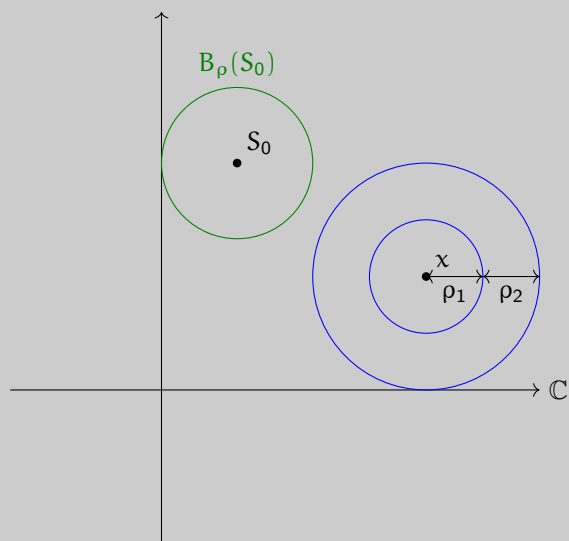


Definizione 5.3 (Insieme aperto). È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

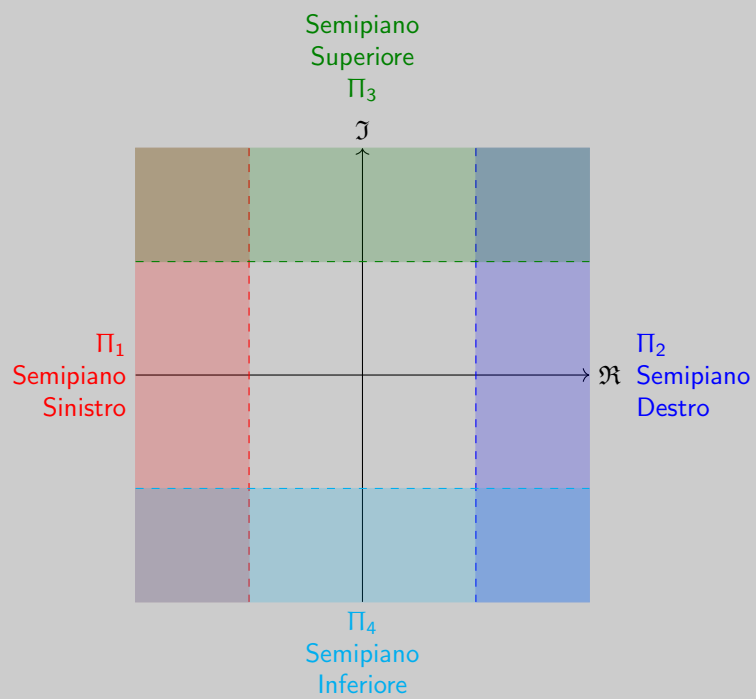
Ad esempio:

- insieme \mathbb{C}
- insieme \emptyset
- i dischi in un punto S_0 , $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto x ,

$$\{S \in \mathbb{C}, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$



- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$

- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad k, n \in \mathbb{Z}$ (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad S, S_0 \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{Z}$ (Serie di potenze)

5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con $n = 2$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con $n = 3$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

Teorema 5.1 (Teorema fondamentale delle radici). Ogni polinomio $P(S)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^r (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:

s_r sono delle radici

μ_r sono le molteplicità delle radici

a_n è il coefficiente del polinomio

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$$

6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

6.1 Segnali continui

$$t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- ω è la frequenza $f = \frac{1}{T}$ (T = periodo)
- ϕ è la fase

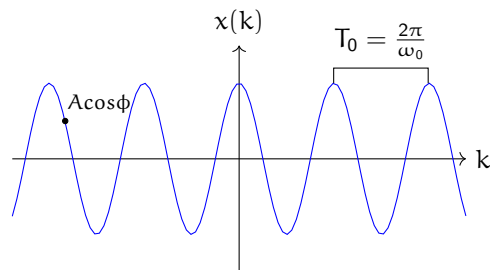


Figura 17: Funzione sinusoidale

• Periodico

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

• Shift temporale equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\omega_0(t - t_0)] = A \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta \phi})$$

$$A \cos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

• Se $\phi = 0$ Il segnale assume la seguente forma:

$$A = \cos(\omega_0 t)$$

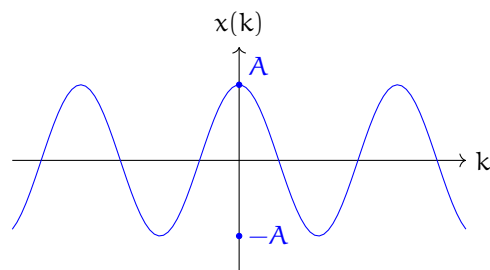


Figura 18: Funzione coseno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A\sin(\omega_0 t) \\ A\cos(\omega_0(t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$

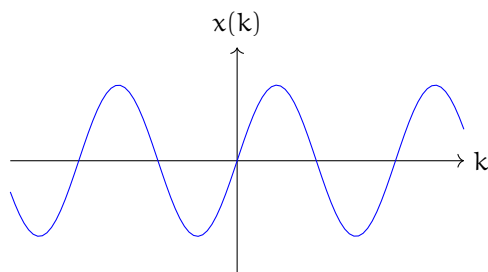


Figura 19: Funzione seno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

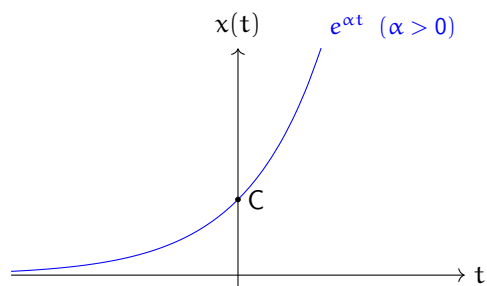


Figura 20: Esempio di segnale

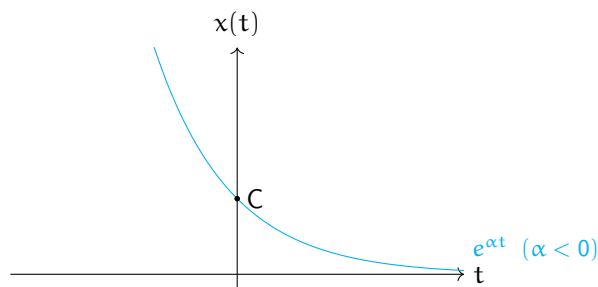


Figura 21: Esempio di segnale

- Shift Temporale

$$Ce^{\alpha(t+t_0)} = Ce^{\alpha t} \cdot \underbrace{Ce^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

$$C = |c|e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_o \text{ (cartesiana)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c|e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_o)t} = \\ &= |c|e^{rt} \cdot e^{j(\omega_o t + \Theta)} \text{ (Eulero)} \end{aligned}$$

Definizione 6.1 (Eulero). La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_o t + \Theta)} = \cos(\omega_o t + \Theta) + j\sin(\omega_o t + \Theta)$$

$$x(t) = |c|e^{rt} \cdot (\cos(\omega_o t + \Theta) + j\sin(\omega_o t + \Theta))$$

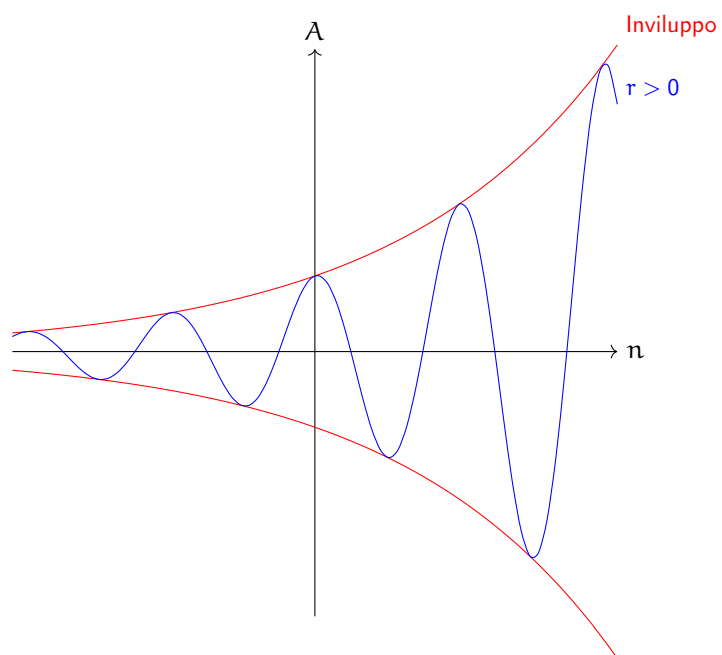


Figura 22: Esponenziale sinusoidale continuo con $r > 0$

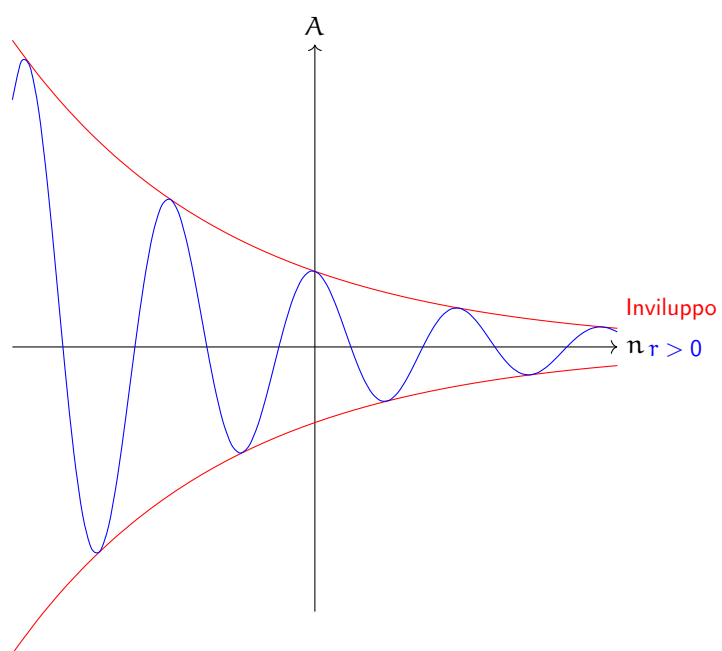


Figura 23: Esponenziale sinusoidale continuo con $r < 0$

6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- Ω_0 è la frequenza $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$
- ϕ è la fase

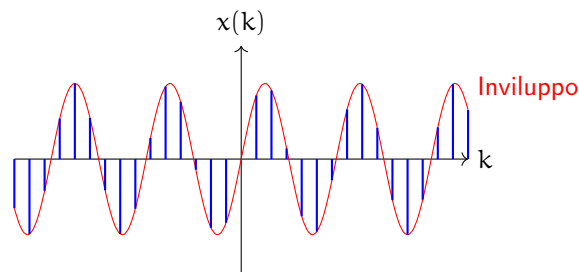


Figura 24: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] = A \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta \phi})$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] \stackrel{?}{=} A \cos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove ϕ è il rapporto tra ϕ e Ω_0 è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

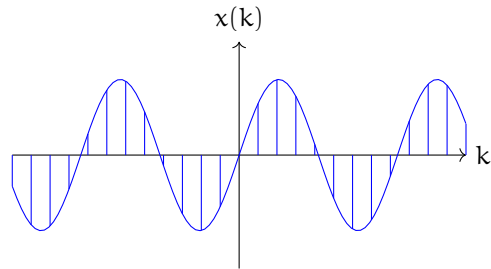


Figura 25: Calcolo del cambio di fase

Esempio 6.1.

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m = 1)$$

6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^\beta; \quad C, \alpha \in \mathbb{R}$$

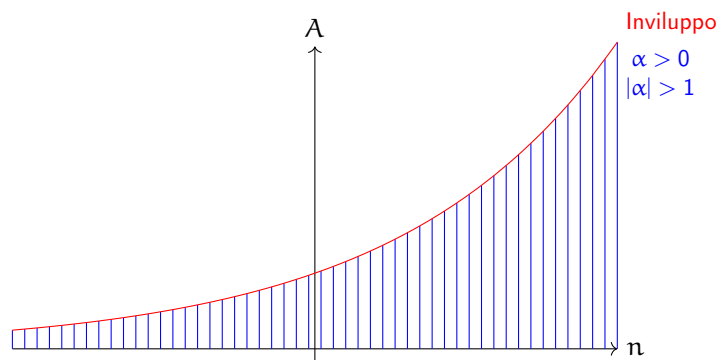


Figura 26: Esponenziale reale con $\alpha > 0$ $|\alpha| > 1$

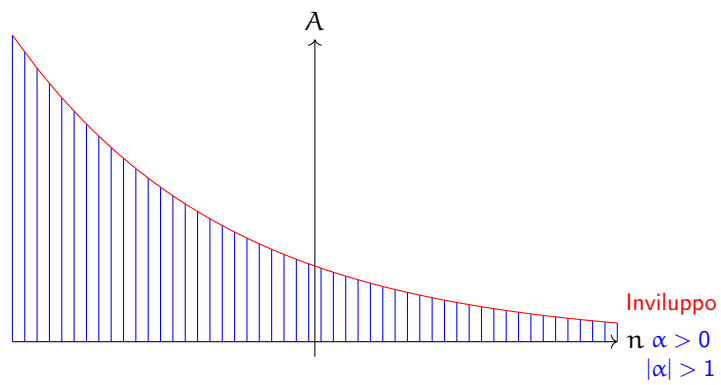


Figura 27: Esponenziale reale con $\alpha > 0$ $|\alpha| < 1$

6.2.3 Esponenziali Complessi

$$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

dove

$$C = |C|e^{j\Theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = |C|e^{j\Theta} \cdot (|\alpha|e^{j\omega_0})^n =$$

$$|C| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \Theta)}$$

Usando la formula di Eulero:

$$x[n] = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot (\cos(\omega_0 n + \Theta) + j\sin(\omega_0 n + \Theta))$$

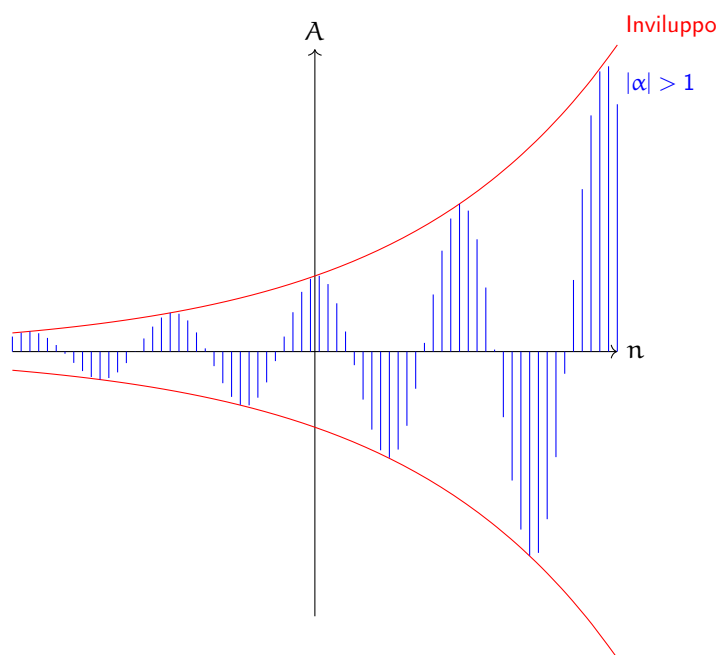


Figura 28: Esponenziale sinusoidale con $|\alpha| > 1$

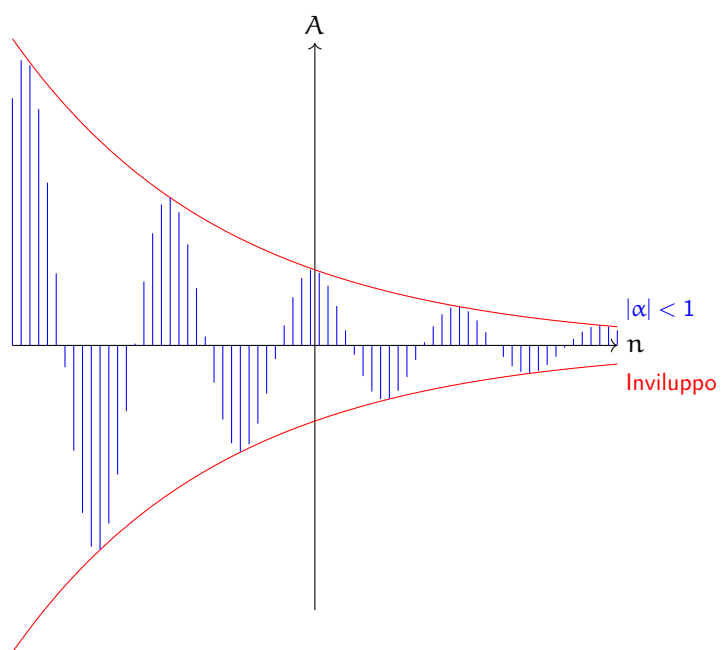


Figura 29: Esponenziale sinusoidale con $|\alpha| < 1$

6.3 Rappresentazione

I segnali che appartengono all'insieme dei complessi sono tridimensionali e sono rappresentati in 2 assi cartesiani diversi, che mostrano lo stesso segnale, ma da 2 punti di vista differenti. Il segnale viene generato da un punto che continua a girare periodicamente su una circonferenza proiettando su entrambi gli assi il suo valore.

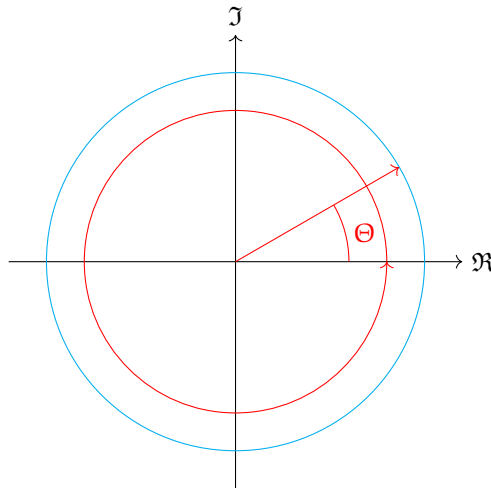


Figura 30: Circonferenza di proiezione

La proiezione sull'asse dei reali è la parte reale del segnale:

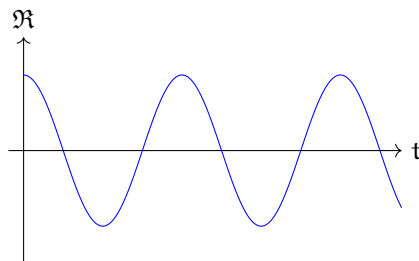


Figura 31: Proiezione su asse reale

La proiezione sull'asse degli immaginari è la parte immaginaria del segnale ed è traslata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla parte reale:

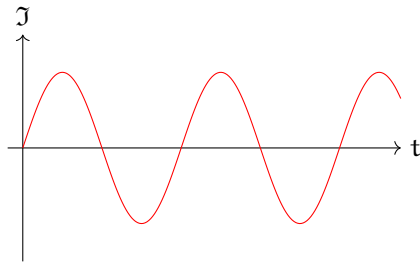


Figura 32: Proiezione su asse immaginario

In 3 dimensioni diventa:

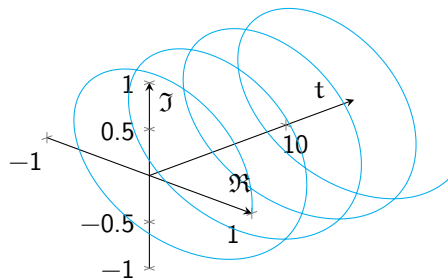


Figura 33: Circonferenza di proiezione in 3D

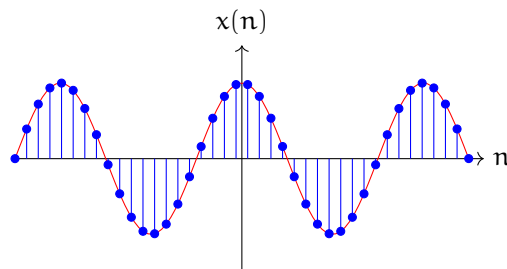
6.4 Problema della periodicità

Il problema della periodicità consiste nel fatto che alcuni segnali possono sembrare periodici anche se non lo sono. Ad esempio:

Esempio 6.2.

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}} m = 12m$$

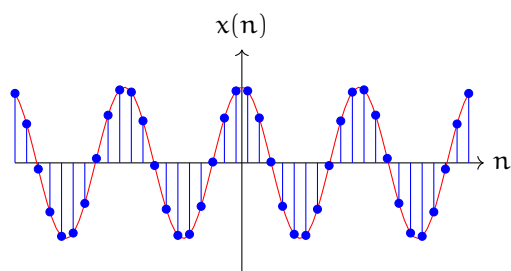
Con $m = 1$:

$$T_0 = 12 \cdot 1 = 12 \in \mathbb{Z}$$

Quindi il segnale è periodico.

Esempio 6.3.

$$\Omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$
$$\phi = 0$$



Il periodo è:

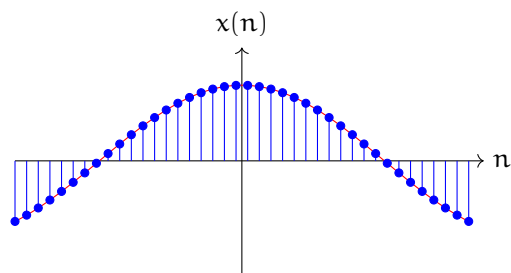
$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} m = \frac{31}{4} m$$

Con $m = 4$:

$$T_0 = \frac{31}{4} \cdot 4 = 31 \in \mathbb{Z}$$

Esempio 6.4.

$$\Omega_0 = \frac{1}{6}$$
$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

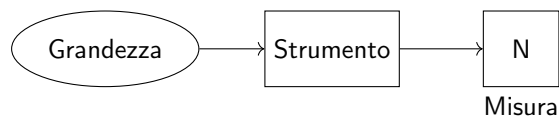
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} m = 2\pi \cdot 6m$$

Non esiste $m \in \mathbb{Z}$ che mi tolga π dalla formula del periodo, quindi il segnale non è periodico anche se lo sembra

7 Segnali generalizzati

Ci sono alcune grandezze che non si possono facilmente calcolare con i segnali tradizionali, quindi analiticamente, ma solo con strumenti appositi.

Esempio 7.1. La tensione della corrente elettrica



Per misurare la tensione si usa il multimetro. Queste sono grandezze definite all'interno di un'operazione integrale.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma(t)}_{\text{Grandezza}} \cdot \underbrace{\phi(t)}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{N}_{\text{Misura}}$$

7.1 Segnali di impulso

- **Impulso di Dirac** È una funzione con supporto **infinitesimo**, altezza **infinita** e area = 1

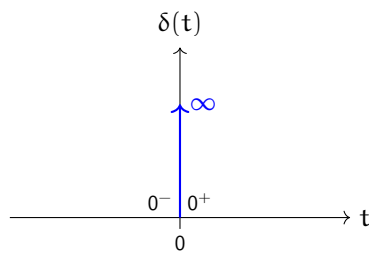


Figura 34: Impulso di Dirac

È definita in $[0^-, 0^+]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{\text{Impulso}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{1}_{\text{Valore}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Impulso unitario**

Matematicamente non si usa l'impulso di Dirac, ma l'**impulso unitario**.

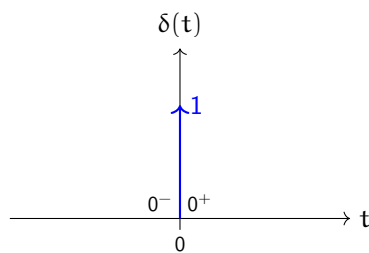


Figura 35: Impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In natura, il segnale che si avvicina di più al segnale di impulso è il seguente:

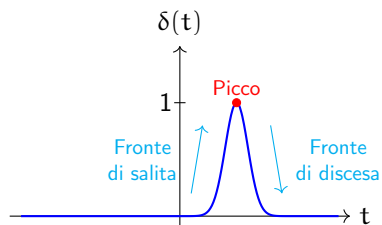


Figura 36: Segnale che si avvicina all'impulso

In ogni caso, non si avvicina mai all'impulso di Dirac, perchè ha sempre un fronte di salita e discesa, quindi non è istantaneo.

7.1.1 Finestra rettangolare unitaria

È una funzione che definisce un rettangolo di altezza $A = 1$ e larghezza T .

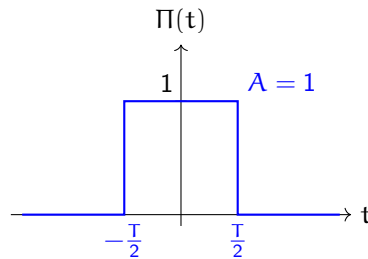


Figura 37: Finestra rettangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se questo segnale è ripetuto nel tempo si chiama **onda quadra**.

Alcune applicazioni possono essere:

- Gestione di motori elettrici
- Equalizzazione di audio

7.1.2 Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario

È una funzione che definisce un triangolo di altezza $A = 1$ e larghezza T .

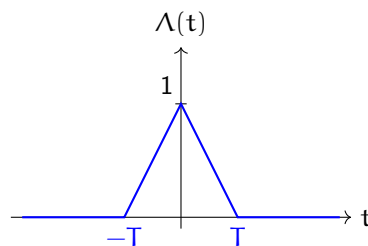


Figura 38: Finestra triangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{se } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le applicazioni sono le stesse del rettangolo, ma con una forma più armonica (smooth). Si possono anche generare segnali sinusoidali.

7.2 Come si realizza un impulso

- Rettangolo:

L'impulso si definisce come una successione di funzioni per cui vengono cambiati dei valori:

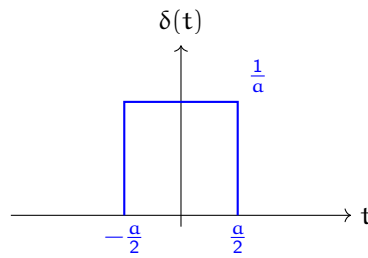


Figura 39: Impulso rettangolare

L'obiettivo è raddoppiare l'altezza e dimezzare la larghezza, mantenendo l'area uguale.

Calcoliamo l'area di questa funzione:

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

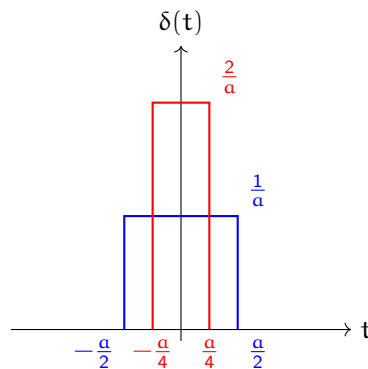


Figura 40: Impulsi rettangolari

E calcoliamo di nuovo l'area

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} = \frac{2a}{4} \cdot \frac{2}{a} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

- Triangolo:

Facciamo la stessa cosa con il triangolo:

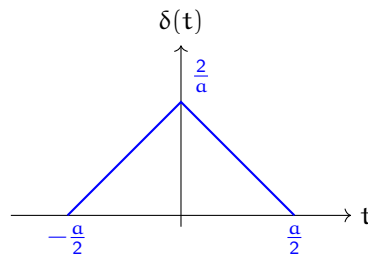


Figura 41: Impulso triangolare

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

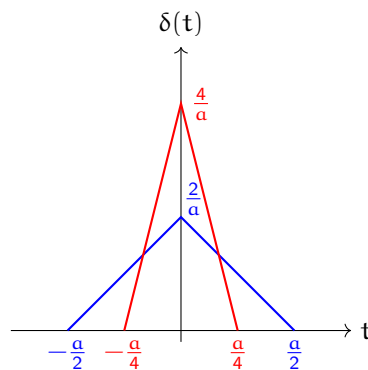


Figura 42: Impulsi triangolari

$$\text{Area} = \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

7.3 Derivata dell'impulso

Considerando l'impulso come successione di triangoli abbiamo che all'infinito ci sarà un fronte di salita e discesa, quindi la derivata saranno degli impulsi positivi e negativi.

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \dot{\delta}(t) = \delta'(t)$$

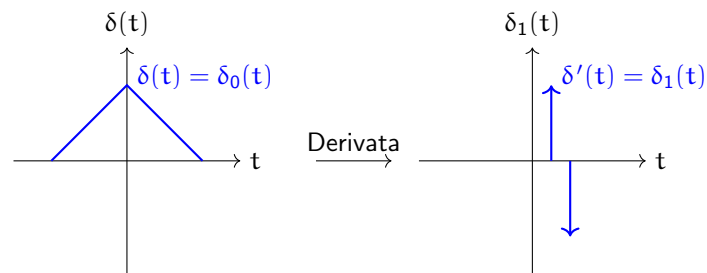


Figura 43: Derivata del segnale triangolare

7.4 Integrale dell'impulso

I segnali polinomiali (o segnali canonici) sono definiti come l'integrale di un impulso. È definito come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int \delta_0(t) dt = \delta_{-1}(t)$$

7.4.1 Funzione gradino

Si ottiene integrando una volta:

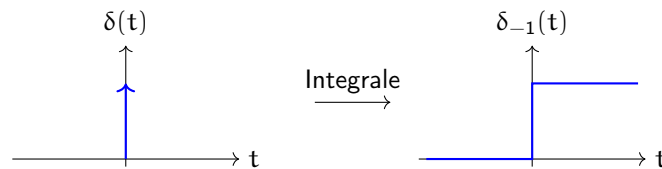


Figura 44: Funzione gradino

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Moltiplicare un segnale per il gradino unitario permette di ottenere la parte positiva del segnale:

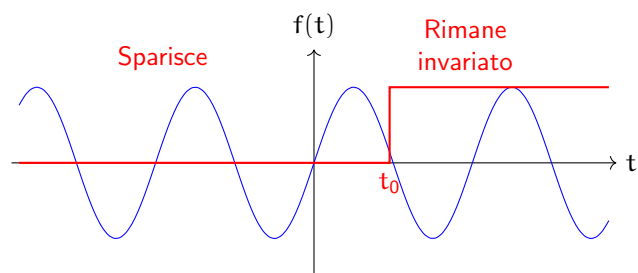


Figura 45: Moltiplicazione per gradino unitario

Si ottiene:

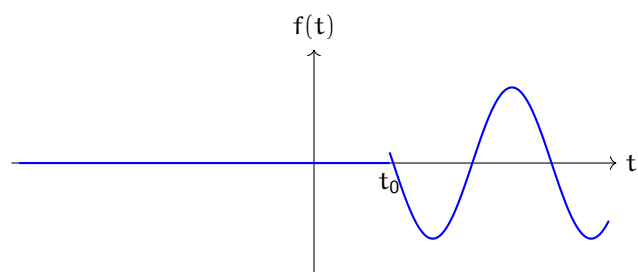


Figura 46: Risultato della moltiplicazione

$$f(t) \cdot \delta_{-1}(t) = f_1(t) \text{ (che è causale)}$$

La funzione del gradino è anche nota come **funzione di Heaviside**.

7.4.2 Funzione rampa

Si ottiene integrando due volte:

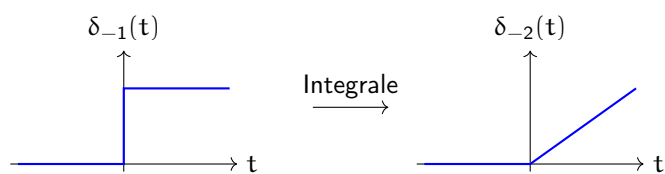


Figura 47: Funzione rampa

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.4.3 Funzione parabolica

Si ottiene integrando tre volte:

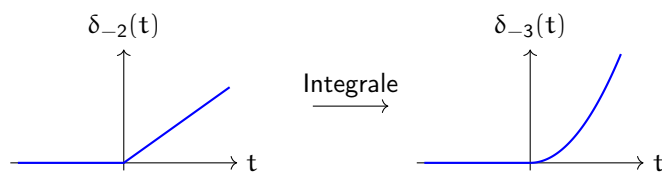


Figura 48: Funzione rampa

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.4.4 A cosa servono i segnali canonici

Non si sa cosa contengono i sistemi LTI che si analizzano, perchè si gestiscono solo gli input e gli output.

Di solito si cerca di dare il segnale gradino al sistema e si guarda qual'è la risposta del sistema a questo segnale. Ad esempio:

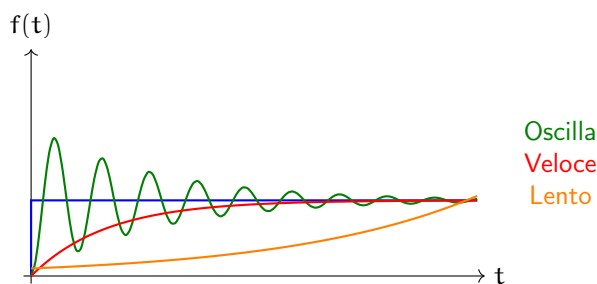


Figura 49: Esempi di risposta di un sistema

Esempio 7.2. Il sistema rosso cresce lentamente, ma ad un certo punto arriva a 1, mentre quello arancione è un sistema più lento.

Quello verde è più veloce, ma non arriva mai a regime perchè continua a oscillare e quindi non è asintoticamente stabile, ma potrebbe essere BIBO stabile.

- Per una luce il sistema verde potrebbe andare bene se l'oscillazione non è troppa
- Per un sistema frenante il sistema arancione potrebbe essere troppo lento

7.5 Proprietà degli impulsi

È un segnale ideale (canonico) centrato in 0 e definito in $[0^-, 0^1]$ con altezza 1.

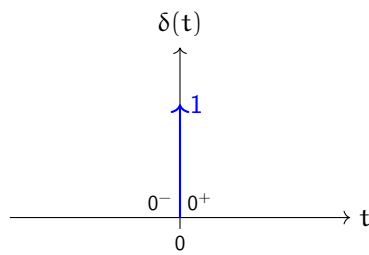


Figura 50: Impulso unitario

- **Pari:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Area unitaria**

Se

$$0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Allora

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1$$

Altrimenti

$$\int_a^b \delta(t) dt = 0$$

Cioè se l'intervallo contiene lo 0, l'area è 1, altrimenti è 0.

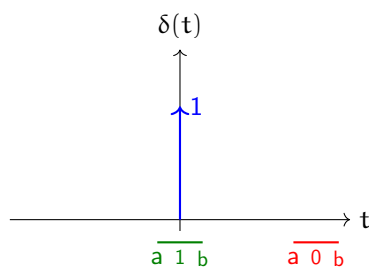


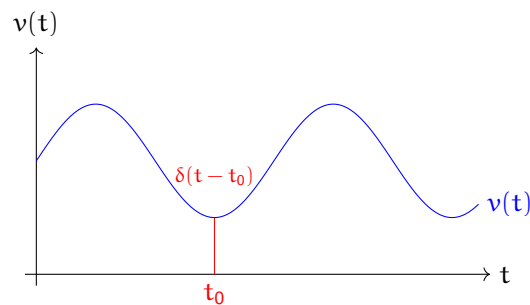
Figura 51: Area dell'impulso

- **Proprietà del campionamento o riproducibilità**

Se $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $t_0 \in \mathbb{R}$, allora:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Se prendo un impulso traslato in t_0 e lo moltiplico per una funzione ottengo il valore della funzione in quel punto.



Per riuscire a passare dal continuo al discreto si continua a moltiplicare la funzione per un impulso traslato in t_0 e si ottiene il valore della funzione in quel punto.

Questa formula può essere riscritta come:

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau$$

Il valore di una funzione in t_0 l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in t_0 .

8 Sistemi

Un sistema è un modello matematico o una formulizzazione di un processo o di un fenomeno fisico che permette di trasformare un input in un output. Ci sono più tipi di sistemi:

- **Sistemi SISO** (Single Input Single Output): Sono sistemi che hanno un solo input e un solo output.
- **Sistemi dinamici**: Sono sistemi che "ricordano" l'input precedente, quindi l'output dipende dall'input attuale e da quello precedente.

Esempio 8.1. Un esempio di sistema fisico stabile è il pendolo:

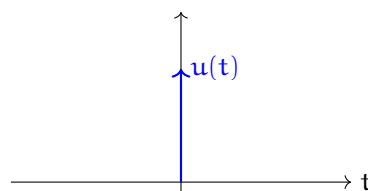


Figura 52: Input

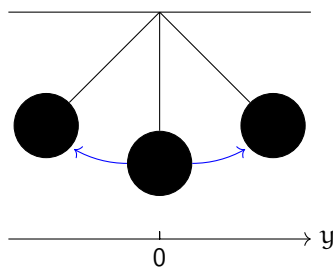


Figura 53: Sistema

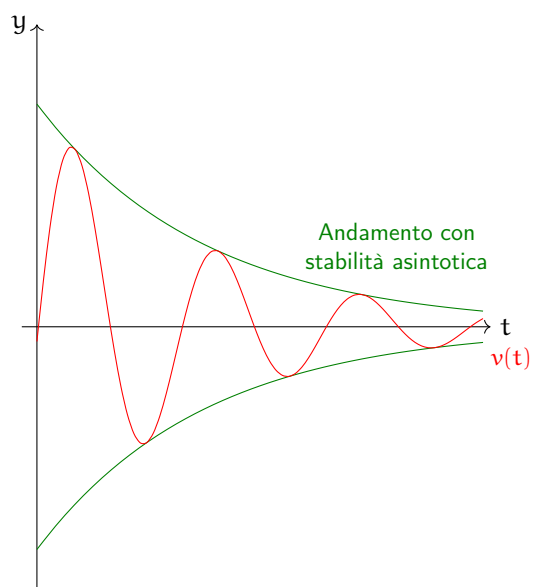


Figura 54: Output

Esempio 8.2. Un esempio di sistema fisico instabile è il seguente:

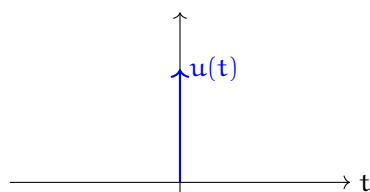


Figura 55: Input

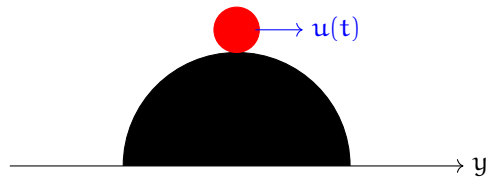


Figura 56: Sistema

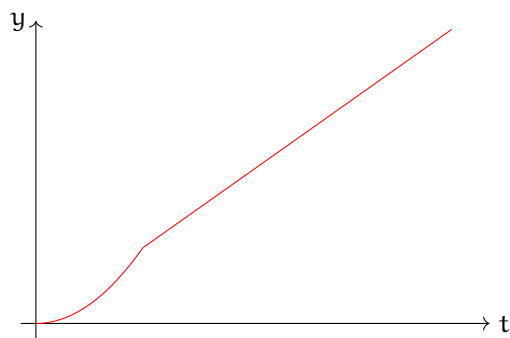


Figura 57: Output

8.1 Proprietà dei sistemi LTI

Definizione 8.1 (Sistema LTI). Un sistema a tempo continuo per cui valgono le proprietà di:

- Linearità
- Tempo invarianza
- Causalità

si definisce **Sistema Lineare Tempo Invariante (LTI)**.

8.1.1 Linearità

Se ho un sistema con un primo input $u_1(t)$ e un secondo input $u_2(t)$ che insieme fanno un terzo input allora l'output del sistema sarà la combinazione lineare degli output dei due input.

$$\underbrace{\underbrace{a u_1(t)}_{\text{Input 1}} + \underbrace{b u_2(t)}_{\text{Input 2}}}_{\text{Input 3}} \rightarrow \text{Sistema} \rightarrow \underbrace{\underbrace{a \cdot y_1(t)}_{\text{Output 1}} + \underbrace{b \cdot y_2(t)}_{\text{Output 2}}}_{\text{Output 3}}$$

8.1.2 Tempo invarianza

Un sistema a tempo continuo è tempo invariante se e solo se:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

8.1.3 Causalità

Un sistema si dice causale se e solo se l'uscita all'istante τ dipende soltanto dall'ingresso per $t \leq \tau$ ($v(\tau)$ dipende solo da $u(t)$ $t \leq \tau$ e non dipende dai valori successivi). La causa non precede mai l'effetto.

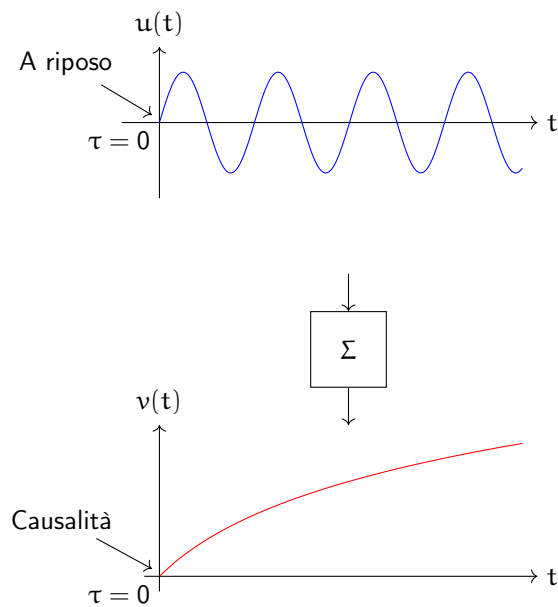


Figura 58: Sistema a riposo

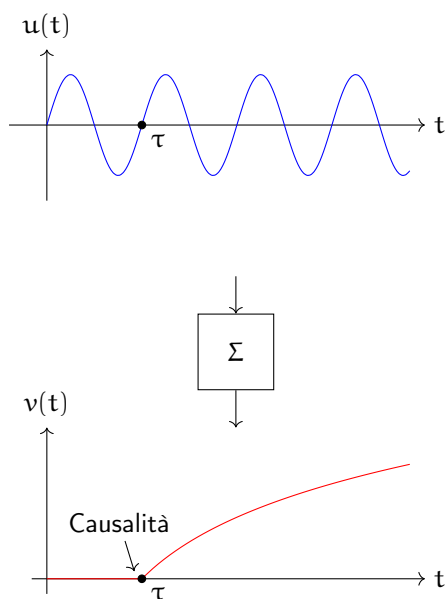


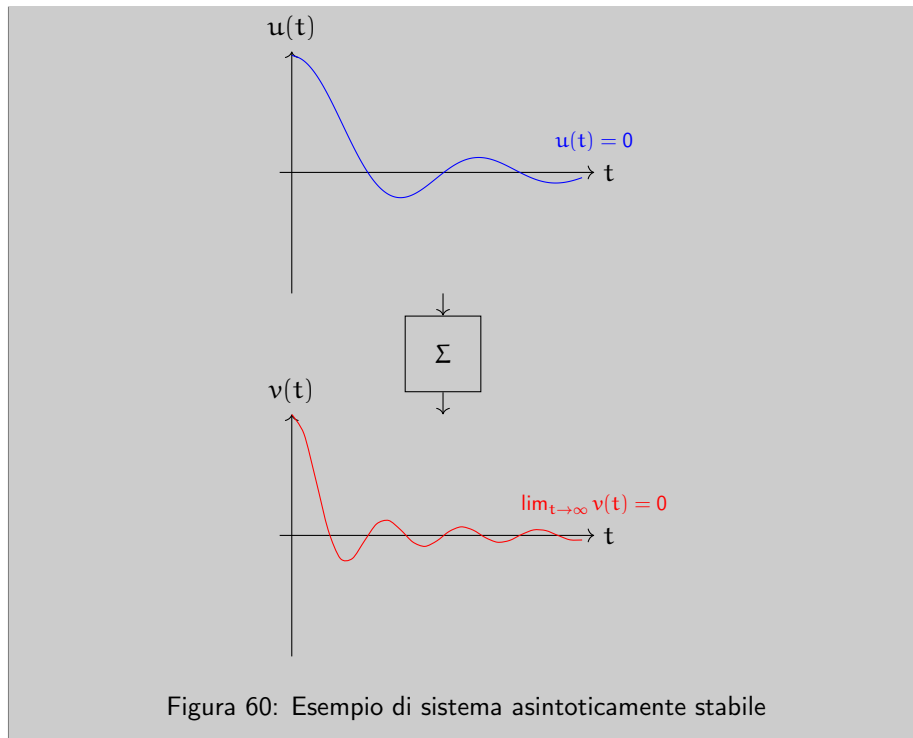
Figura 59: Sistema non a riposo

Per comodità si considerano solo i sistemi a riposo ($\tau = 0$).

8.1.4 Proprietà di stabilità asintotica

Definizione 8.2. Un sistema si dice **asintoticamente stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ t.c } u(\tau) = 0, \quad \forall t \leq \tau \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$



Per capire se un sistema è asintoticamente stabile bisogna verificare se ogni soluzione del sistema è minore di 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) < 0$$

8.1.5 Proprietà di BIBO stabilità

Definizione 8.3. Un sistema si dice **BIBO stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R}, \text{ e } U_u \in \mathbb{R} \text{ t.c se } |u(t)| \leq U_u, \forall t \leq \tau$$

$$\Downarrow$$

$$\exists U_v > 0 \text{ t.c } |v(t)| \leq U_v, \forall t \geq \tau$$

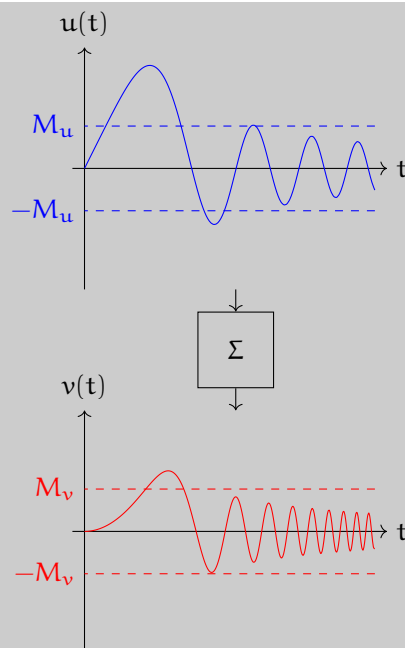


Figura 61: Esempio di sistema stabile BIBO

Ogni sistema asintoticamente stabile è anche BIBO stabile, ma non il contrario.

Per capire se un sistema è BIBO stabile si deve verificare che $h(t)$ (risposta all'impulso) sia assolutamente integrabile e che abbia un valore finito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

8.2 Sistemi descritti da equazioni differenziali

I sistemi che si analizzano in questo corso sono solo un sottoinsieme:

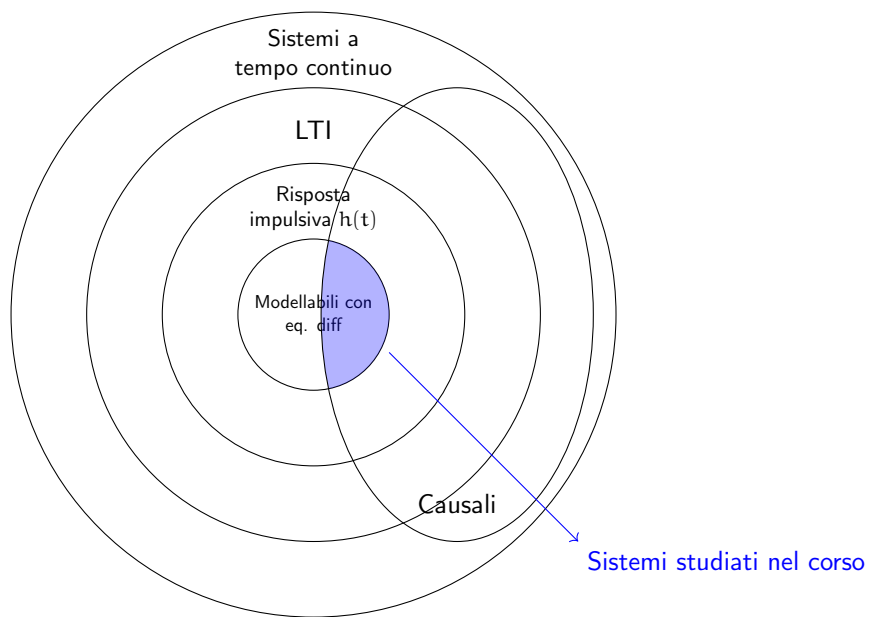


Figura 62: Sistemi LTI

Esempio 8.3. Prendiamo come esempio un sistema massa molla smorzatore:

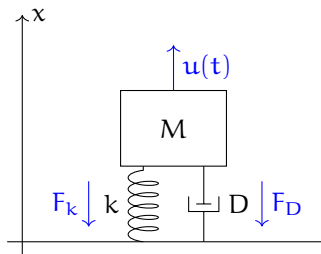


Figura 63: Sistema massa molla smorzatore

Andiamo a vedere le forze in gioco:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$x(t)$ è lo spostamento nel tempo

$$M \cdot a(t) = u(t) - F_k - F_D$$

che equivale a

$$M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = u(t) - k \cdot x(t) - D \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\underbrace{M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + D \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + k \cdot x(t)}_{\text{Segnale di uscita}} = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale di ingresso}}$$

*Il simbolo ∂ indica la derivata parziale. Una derivata parziale è una derivata rispetto ad una funzione a più variabili.

Esempio 8.4. Un altro esempio è il sistema RL (Resistenza Induttanza):

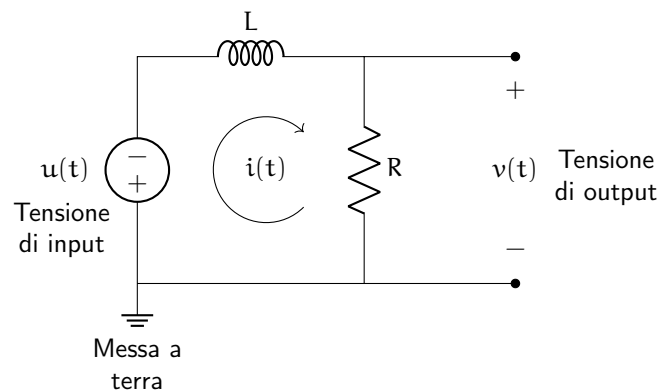


Figura 64: Sistema RL

Possiamo descrivere l'input del sistema come:

$$u(t) = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + \underbrace{R \cdot i(t)}_{v(t)}$$

Possiamo descrivere l'output come:

$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\text{Legge di Ohm}} i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

Usando la legge di Ohm ($V = Ri$) possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial v(t)}{\partial t}}_{\text{Segnale d'uscita}} + v(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale d'ingresso}}$$

Quindi in generale possiamo scrivere un sistema LTI come:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t} + a_{n-1} \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} + \dots + a_1 \frac{\partial v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t} + b_{m-1} \frac{\partial^{(m-1)} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Dove:

- $u(t)$ è il segnale di ingresso
- $v(t)$ è il segnale di uscita
- $a_n, b_m \neq 0 \in \mathbb{R}$

Tutto ciò si può riscrivere come:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t} \quad (1)$$

n e m sono gli ordini delle equazioni differenziali con $n \geq m$.

- Se $n > m$ il sistema è detto **strettamente proprio**
- Se $n \geq m$ il sistema è detto **proprio**

Ora possiamo inserire all'interno dei sistemi l'equazione differenziale:

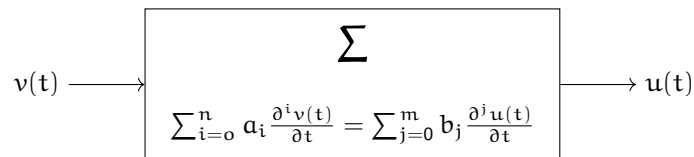


Figura 65: Contenuto del sistema

Esempio 8.5. Un esempio di sistema descritto da un'equazione differenziale è il seguente e riprende il sistema massa molla smorzatore dell'esempio 8.3:

$$\underbrace{M}_{\alpha_2} x''(t) + \underbrace{D}_{\alpha_1} x'(t) + \underbrace{K}_{\alpha_0} x(t) = \underbrace{1}_{b_0} u(t)$$

8.2.1 Risoluzione

Un sistema descritto da un'equazione differenziale non ha una sola soluzione, a meno che non vengano imposte n **condizioni iniziali**.

$$\left. v(t) \right|_{t=0^-} \quad \left. \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-}$$

Figura 66: Derivata di ordine $n - 1$ di $v(t)$ calcolata al tempo $t = 0^-$

La soluzione è l'uscita v del sistema (reale o complessa) che può essere scomposta in:

$$\underbrace{v_t}_{\text{risposta totale}} = \underbrace{v_l}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{v_f}_{\text{Risposta forzata}}$$

- **Risposta libera:** Dipende soltanto dalle condizioni iniziali, quindi è il comportamento del sistema in assenza di input.

$$\text{C.I.} \neq 0$$

$$u(t) = 0$$

- **Risposta forzata:** Dipende solo dall'input del sistema e la maggior parte delle volte è diversa dalla risposta libera.

$$\text{C.I.} = 0$$

$$u(t) \neq 0$$

8.2.2 Risposta libera (o evoluzione libera)

Per calcolare la risposta libera del sistema definito in 1 bisogna risolvere l'equazione omogenea ($= 0$) associata, quindi si prende la parte sinistra dell'equazione differenziale e si pone uguale a 0 la parte destra.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Per farlo bisogna definire il **polinomio caratteristico**:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

Esempio 8.6. Ad esempio:

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$$

Come prima cosa si toglie la parte destra

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Successivamente si scrive il polinomio caratteristico sostituendo a $y(t)$ la variabile s e mettendo come potenza di s l'ordine della derivata:

$$3s^2 + 2s + 1 = 0$$

Ricordando il teorema fondamentale dell'algebra, cioè che la somma delle molteplicità delle radici è uguale all'ordine del polinomio, si può dire che:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$$

sono le soluzioni del polinomio caratteristico $P(s)$ con relative molteplicità

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$$

vale che

$$\sum_{i=1}^r \mu_i = r$$

. Si ha quindi:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \underbrace{c_{i,l}}_{\in \mathbb{R}, \mathbb{C}} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}}$$

I valori $c_{i,l}$ vengono calcolati usando le condizioni iniziali.

Esempio 8.7. Prendendo come esempio il sistema definito in 8.3 abbiamo l'equazione:

$$Mx''(t) + Dx'(t) + Kx(t) = 0$$

Poniamo:

$$M = 1, \quad D = 2, \quad K = 1$$

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 + 2s + 1 = \\ &= (s + 1)^2 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

con molteplicità algebrica è $\mu_1 = 2$. Quindi si hanno 2 soluzioni coincidenti e una sola radice distinta: $r = 1$ La risposta libera quindi sarà:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= \sum_{i=1}^1 \sum_{l=0}^1 c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= c_{1,0} e^{-1t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_{1,1} \cdot e^{-1t} \cdot \frac{t^1}{1!} \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} \cdot 1 + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t \end{aligned}$$

Esempio 8.8. Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'''(t) + 3v''(t) + 3v'(t) + 1 = 0$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \\ &= (s + 1)^3 \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Il numero di soluzioni è $r = 1$ con molteplicità $\mu = 3$.

La risposta libera è:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &\vdots \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Ora troviamo i coefficienti $c_{i,l}$ per trovare la risposta libera specifica al nostro caso, considerando i seguenti valori iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \\ v''(0) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo t con 0 troviamo il valore di $c_{1,0}$:

$$\begin{aligned} v_l(0) &= c_{1,0} \cdot e^0 + c_{1,1} \cdot e^0 \cdot 0 + c_{1,2} \cdot e^0 \cdot \frac{0}{2} \\ &= c_{1,0} = 0 \end{aligned}$$

Troviamo il valore di $c_{1,1}$ derivando la risposta libera:

$$v'_l(t) = -1c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t - c_{1,1} \cdot e^{-t} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t$$

una volta calcolata la derivata, poniamo $t = 0$

$$\begin{aligned} v'_l(0) &= -c_{1,0} + c_{1,1} - c_{1,1} + c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} \cdot 0 \\ &= -c_{1,0} + c_{1,1} \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Troviamo il valore di $c_{1,2}$ facendo la derivata seconda:

$$v''_l(t) = 0 + 1 \cdot e^{-t} \cdot t - e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t}$$

poniamo $t = 0$:

$$\begin{aligned}v_l''(0) &= 0 + 1 \cdot 0 - 0 + c_{1,2} \cdot 0 - c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} = 0 \\&= c_{1,2} = 0\end{aligned}$$

Quindi alla fine la risposta libera specifica risulta:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \\&= e^{-t} \cdot t\end{aligned}$$

Esempio 8.9. Prendiamo ad esempio un sistema descritto nel seguente modo:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

Vogliamo calcolare la risposta libera del sistema. Per farlo bisogna imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Il primo passo è calcolare il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea:

$$\begin{aligned}P(s) &= s^2 + 3s - 4 = 0 \\&= (s - 1)(s + 4)\end{aligned}$$

Il secondo passo è trovare le radici e le molteplicità:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, & \mu_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -4, & \mu_2 &= 1\end{aligned}$$

La risposta libera generica si calcola come:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

e nel nostro caso è:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^t + c_{2,0} \cdot e^{-4t} \\&= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}\end{aligned}$$

Per trovare la risposta libera specifica bisogna calcolare i coefficienti c_1 e c_2 derivando e valutando nelle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}v(t) &= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} \\v'(t) &= c_1 \cdot e^t - 4c_2 \cdot e^{-4t}\end{aligned}$$

Mettiamo a sistema, valutando in $t = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \\ v'(0) = c_1 \cdot e^0 - 4c_2 \cdot e^0 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -5c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = -\frac{1}{5} \end{cases} & \end{aligned}$$

La risposta libera specifica è quindi:

$$v_l(t) = \frac{1}{5} \cdot e^t - \frac{1}{5} \cdot e^{-4t}$$

Definizione 8.4. Le formule più importanti sono:

- **Modello di un sistema:**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

- **Risposta libera:**

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}}_{\text{Modo elementare}}$$

Dove:

r = numero di radici distinte
 μ_i = molteplicità della radice λ_i
 $c_{i,l}$ = coefficienti da calcolare

8.2.3 Convergenza dei modi elementari

È una funzione che si comporta come un esponenziale, quindi la convergenza dipende dal valore di λ .

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Vale che:

1. $\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = 0$ se e solo se $\Re(\lambda) < 0$. **Stabilità asintotica**
2. $m(t)$ è limitato, cioè può prendere solo valori limitati, su $[0, \infty)$ se e solo se $\Re(\lambda) \leq 0$. Se $\Re(\lambda) = 0$, allora perché questo valga l deve essere uguale a 0 $l = 0$. **Stabilità semplice.**
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$ in tutti gli altri casi. Quindi:

$$\Re(\lambda) > 0$$

oppure

$$\Re(\lambda) = 0, l \neq 0$$

Instabilità.

8.2.4 Dimostrazioni

1. $\Re(\lambda) < 0$:

Riscriviamo λ come:

$$\lambda = a + bi = \sigma + j\omega$$

e riscriviamo $m(t)$ come:

$$m = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!} = (e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}) \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}} \cdot \underbrace{e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}}_{\text{Esponenziale}}$$

con $a = -\sigma$ diventa:

$$m = \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{at}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}}_{=0} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Limitato}}$$

Il blocco $e^{j\omega t}$ è un punto che gira su un cerchio di raggio 1, quindi è limitato.

Il blocco $\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}$ è limitato per $t = 0$ e quindi $m(t)$ tende a 0.

2. $\Re(\lambda) = 0 \quad l = 0$:

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \frac{t^0}{0!} \cdot e^0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$= e^{j\omega t}$$

che è per definizione limitato in modulo.

$$3. \Re(\lambda) > 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Re(\lambda) = 0 \quad l \neq 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\frac{1}{\sigma} t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{Siccome } \sigma = \Re(\lambda) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$$

Definizione 8.5. Un sistema LTI descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

è detto **asintoticamente stabile** (la risposta è asintoticamente stabile) se e solo se ogni suo modo elementare converge a 0, cioè:

$$\forall i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) = 0 \quad m_i = e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Osservazione

È detto **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico, $P(s)$, hanno parte reale negativa.

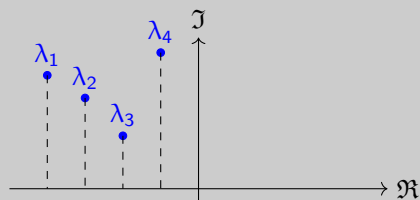


Figura 67: Asintoticamente stabile

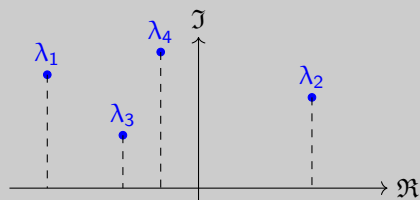
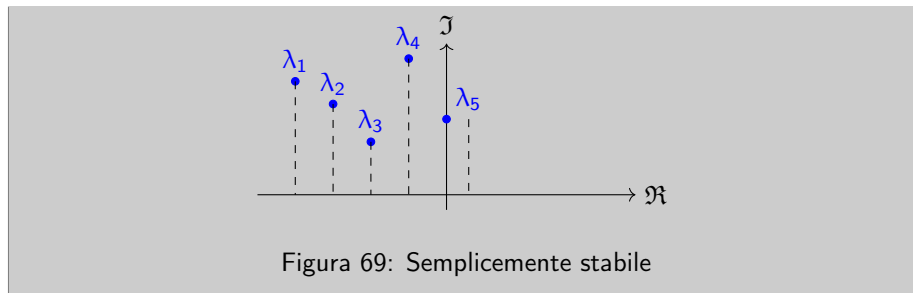


Figura 68: Non asintoticamente stabile



8.2.5 Prodotto di convoluzione

Il concetto di correlazione indica quanto due segnali siano simili tra loro e si calcola con il prodotto di convoluzione.

Il concetto di convoluzione è un'operazione tra due segnali che restituisce un terzo segnale.

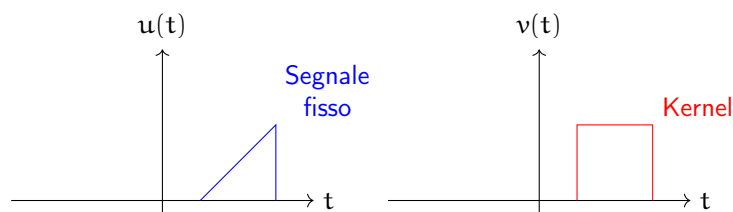


Figura 70: Segnale fisso e kernel

Il **kernel** è un segnale che viene riflesso rispetto all'asse y e traslato nel tempo t e moltiplicato per il segnale fisso. Il risultato è un segnale che rappresenta l'area sottesa dal prodotto dei due segnali.

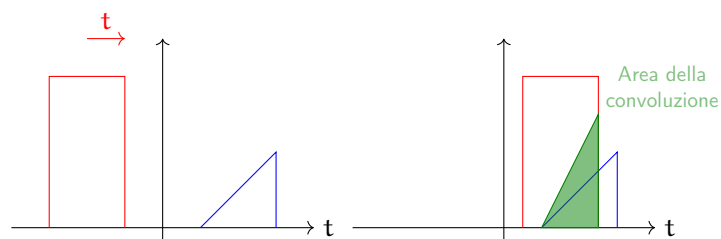


Figura 71: Convoluzione

Il grafico della convoluzione risultante è un segnale che rappresenta il cambiamento nel tempo del prodotto dei due segnali.

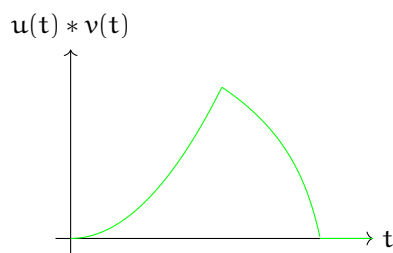


Figura 72: Grafico della convoluzione

Definizione 8.6. L'operatore di convoluzione tra due segnali $u(t)$ e $v(t)$ è definito come:

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau =$$

$$(v * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \cdot u(\underbrace{t}_{\text{Varia nel tempo}} \underbrace{-\tau}_{\text{Riflessione su y}}) d\tau$$

Il segnale riflesso viene moltiplicato per il segnale $u(t)$.

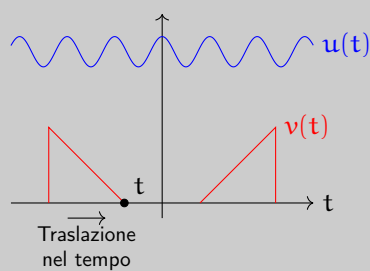


Figura 73: Convoluzione

Se la convoluzione viene effettuata con un impulso, il segnale viene campionato.

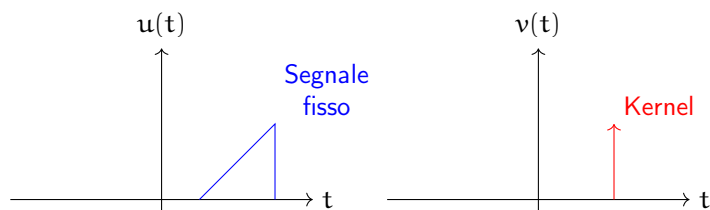


Figura 74: Segnale fisso e kernel

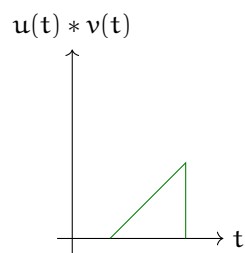
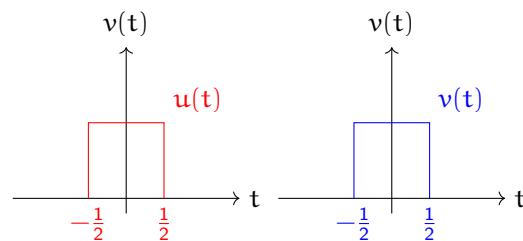


Figura 75: Grafico della convoluzione

Esempio 8.10. Ad esempio il segnale triangolo è formato dalla convoluzione di due segnali rettangolari.

$$u(t) = v(t) = \Pi(t)$$

($\Pi(t)$ è la funzione rettangolo)



1. Scegliere il segnale più semplice
2. Specchiare l'altro segnale rispetto a y ($f(t) \mapsto f(-t)$)
3. Traslare il segnale mobile (quello specchiato) nel tempo
4. Spostare $\forall t$ e calcolare l'integrale (aree sottese)

Il risultato della convoluzione sarà:

$$u(-2) * v(-2) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(-1) * v(-1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(0) * v(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

\vdots

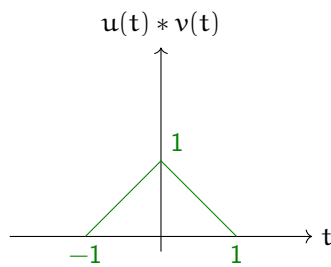


Figura 76: Grafico della convoluzione

8.2.6 Risposta impulsiva

Definizione 8.7. Dato un sistema a tempo continuo inizialmente a riposo (causale) definiamo la **risposta impulsiva** come l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso uguale all'impulso unitario

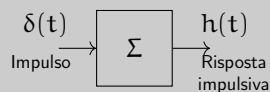


Figura 77: Risposta impulsiva

Teorema 8.1. L'uscita $v(t)$ di un sistema LTI, inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso $u(t)$ è dato dal seguente prodotto di convoluzione:

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Proprietà dell'integrale di convoluzione:

- **Commutativa:** $(u * v)(t) = (v * u)(t)$
- **Associativa:** $(u * v)(t) * w(t) = u(t) * (v * w)(t)$
- **Distributiva** (rispetto alla somma): $u(t) * (v(t) + w(t)) = (u * v)(t) + (u * w)(t)$

Osservazione: Un sistema LTI causale inizialmente a riposo, siccome $h(t) = 0, t < 0$ (perchè $\delta(t) = 0, t < 0$):

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Per calcolare la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right] \cdot \delta_{-1}(t)$$

dove:

- d_0 è il termine costante:
– $d_0 \neq 0$ se e solo se il sistema è proprio ($n = m$)
- $\delta(t)$ è l'impulso unitario
- $d_{i,l}$ sono i coefficienti della risposta impulsiva (diversi da $c_{i,l}$ della risposta libera)
- $\frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$ sono i modi elementari e sono gli stessi della risposta libera
- $\delta_{-1}(t)$ è il gradino e serve a moltiplicare per 0 la parte non causale della risposta impulsiva e serve quindi per la causalità

Esempio 8.11. Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

Questo sistema ha $n = m$ perchè è un sistema proprio, quindi: $d_0 \neq 0$

1. Il primo passo è quello di trovare l'equazione omogenea:

$$v'(t) + 2v(t) = 0$$

2. Poi bisogna calcolare il polinomio caratteristico:

$$P(s) = s + 2 = 0$$

3. Bisogna poi trovare le radici e i modi elementari:

$$\lambda_1 = -2 \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

($l = 0 \dots \mu_i - 1$) i modi elementari sono:

$$m(t) = e^{-2t}$$

4. Scriviamo la risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

5. Riscrivo l'equazione iniziale ponendo:

$$v(t) = h(t) \quad u(t) = \delta(t)$$

L'equazione diventa:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

\Downarrow

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

• Calcolo tutte le derivate di $h(t)$:

$$h'(t) = \delta_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t)$$

6. Sostituisco $v(t) \mapsto h(t)$ e $u(t) \mapsto \delta(t)$

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

\Downarrow

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\begin{aligned} & d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) \\ & + 2(d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t)) \\ & = \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

Valutiamo le funzioni in $t = 0$

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot e^{-2 \cdot 0} \cdot \delta(0) = \delta'(0) + \delta(0)$$

Sposto tutto a sinistra:

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot \delta(0) - \delta'(0) - \delta(0) = 0$$

Raccolgo per $\delta(0), \delta'(0) \dots \delta^n(t)$ che sono linearmente indipendenti:

$$(d_0 - 1) \cdot \delta'(0) + (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0$$

7. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} (d_0 - 1) \cdot \delta'(0) = 0 \\ (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \end{cases}$$

8. Sostituisco i coefficienti appena trovati

$$\begin{aligned} h(t) &= \underbrace{d_0}_1 \cdot \delta(t) + \underbrace{d_{1,0}}_{-1} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

E questa è la risposta impulsiva del sistema

9. Bisogna calcolare la risposta forzata...

Esercizio 8.1. Si vuole calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$2v'(t) - v(t) = u'(t) + 3u(t)$$

Siccome abbiamo la derivata prima sia a sinistra a destra il sistema è proprio ($n = m$) $\rightarrow d_0 \neq 0$.

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

1. Calcolo le radici usando l'equazione omogenea del polinomio caratteristico:

$$2s - 1 = 0$$

$$2s = 1$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

2. Calcolo la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

3. Riscrivo l'equazione iniziale con $v(t) = h(t)$, $u(t) = \delta_0(t)$:

$$2h'(t) - h(t) = \delta_0'(t) + 3\delta_0(t)$$

4. Calcolo le derivate di $h(t)$:

$$h'(t) = d_0 \cdot \delta_0'(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t)$$

5. Sostituisco:

$$2 \left[d_0 \delta'_0(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) \right] - \left[d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] = \delta'_0(t) + 3\delta_0(t)$$

Togliere tutti i termini $\delta_{-1}(0^-) = 0$

6. Raccolgo le funzioni indipendenti $\delta_0(t), \delta'_0(t), \delta''_0(t)$:

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \delta'_0(t) = \delta'_0(t) \\ 2d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) = 3\delta_0(t) \end{cases}$$

Imponiamo $t = 0^-$

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \cancel{\delta'_0(0)} = \cancel{\delta'_0(0)} \\ \left(2d_1 \cdot \underset{=1}{e^{\frac{1}{2} \cdot 0}} \right) \cdot \delta_0(0) = 3\delta_0(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_0 = 1 \\ 2d_1 - d_0 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = \frac{1}{2} \\ d_1 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

7. Scrivo la risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta_0(t) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

8. Calcolo la risposta forzata nell'esercizio 8.2

8.2.7 Risposta forzata

Definizione 8.8. La risposta forzata vuol dire che l'uscita del sistema dipende solo dall'input di un sistema LTI, causale per un ingresso $u(t)$ ($u(t) = 0, t < 0$) e si definisce come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

dove:

u = Input

h = Risposta impulsiva

Esempio 8.12. Riprendendo l'ultimo punto dell'esempio 8.11, la risposta forzata è:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t^-}^0 u(t) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Esercizio 8.2. Data la risposta impulsiva dell'esercizio 8.1 calcoliamo la risposta forzata con un input $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$ (gradino alto 3):

$$\begin{aligned} v_f &= (h * u)(t) \\ &= (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \delta_0(\tau) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \right] \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \delta_0(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta_0(\tau)}_{[0, 0^+]} \cdot \underbrace{\delta_{-1}(t - \tau)}_{[-\infty, t]} d\tau + \frac{21}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{21}{4} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\tau} d\tau \\ &\rightarrow \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^t \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{21}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= v_f(t) \end{aligned}$$

Teniamo fissa la risposta impulsiva $h(t)$ e trasliamo il gradino $u(t)$

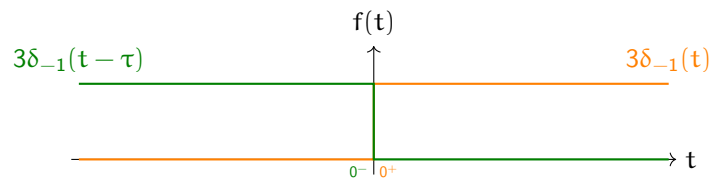


Figura 78: $3\delta_{-1}(t - \tau)$ viene traslato

$+\infty$ e $-\infty$ diventano 0 e t perchè:

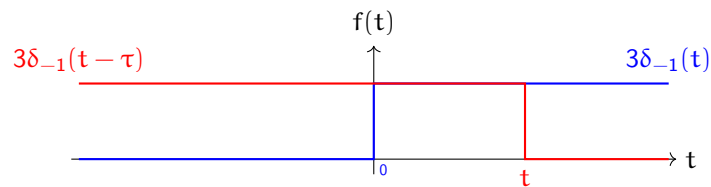


Figura 79: $3\delta_{-1}(t - \tau)$ viene traslato

8.2.8 Risposta totale

Data un'equazione che descrive un sistema LTI:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

la risposta totale si calcola come la somma della risposta libera e forzata:

$$v_t(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

La risposta libera è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$$

La risposta forzata è data da:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (\underbrace{u}_{\text{Input}} * \underbrace{h}_{\text{Risposta impulsiva}})(t) \\ &= \int_{0-}^{t+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0-}^{t+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

e la risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

8.3 Stabilità in base alle radici

Considerando 3 radici si ha:

- **Stabilità asintotica:** Tutte le radici devono avere parte reale minore di 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) < 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{-1}_{\Re(\lambda_1) < 0} + i \quad \underbrace{-2}_{\Re(\lambda_2) < 0} - i \quad \underbrace{-3}_{\Re(\lambda_3) < 0}$$

- **Semplicemente stabile:** Solo una radice ha parte reale uguale a 0:

$$\exists i \Re(\lambda_i) = 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\Re(\lambda_1)=0} + i \quad -2 > 0 - i \quad -3 > 0$$

- **Asintoticamente instabile:** Tutte le radici hanno parte reale minore di 0 tranne un sottoinsieme che hanno parte reale uguale a 0:

$$\forall i \Re(\lambda_i) \leq 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\Re(\lambda_i=0)} + i \quad \underbrace{0}_{\Re(\lambda_i=0)} - i \quad -3 + i$$

- **Totalmente instabile:** Almeno una radice ha la parte reale maggiore di 0:

$$\exists i \Re(\lambda_i) > 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{1}_{\Re(\lambda_1)>0} + i \quad 0 - i \quad -3 + i$$

8.4 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza è la risposta di un sistema LTI a un segnale sinusoidale. Abbiamo visto che gli esponenziali complessi si rappresentano come:

$$Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Questi esponenziali si chiamano **Fasori** perchè vengono rappresentati come vettori rotanti in un piano complesso, come mostrato in figura 30.

$$u(t) = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t} \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow v(t)$$

Figura 80: Fasore

La risposta in frequenza si calcola come la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot Ae^{j(\omega_0(t-\tau) + \phi)} d\tau \\ &= \underbrace{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}}_{\text{Costante}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau}_{|f| < \infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau \right| &< \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot 1 d\tau < \infty
\end{aligned}$$

La risposta in frequenza è quindi:

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau$$

Da questa formula si ha che l'uscita $v(t)$ è uguale a:

$$v(t) = H(j\omega_0) \cdot A e^{j(\omega_0 t + \phi)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva del sistema e anche la trasformata di Laplace della risposta impulsiva ristretta al solo asse immaginario:

Teorema 8.2.

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s), \quad s = j\omega$$

Dove:

\mathcal{F} = Trasformata di Fourier

\mathcal{L} = Trasformata di Laplace

Esempio 8.13. Se prendiamo in considerazione un sistema dinamico, come ad esempio il sistema massa-molla-smorzatore dell'esempio 8.3, descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

Per calcolare la soluzione nel dominio del tempo si può fare il passaggio solito fatto fin'ora, oppure si può prendere una scorciatoia e calcolare la trasformata di Laplace delle equazioni algebriche per trovare poi la soluzione in \mathbb{C} rendendo più semplice il calcolo.

9 Trasformata unilatera di Laplace (TDL)

Definizione 9.1 (Trasformata unilatera di Laplace). Sia $v(t)$ una funzione generica (non l'uscita di un sistema) con $t \in \mathbb{R}$ ottenuta da somme di funzioni a variabili reali con valori reali o complessi (ad esempio somma di fasori).

- Localmente sommabile in $[0, \infty)$:

$$\int_a^b |v(t)| dt < \infty, \quad \forall a, b \in [0, \infty)$$

- Formata da un insieme finito di segnali polinomiali

Definiamo la trasformata unilatera di Laplace come:

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}[v(t)](s)$$

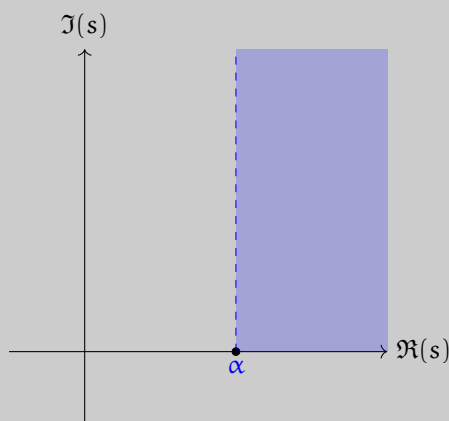
N.B.: Data $v(t)$ localmente sommabile, non significa che $V(s)$ sia localmente sommabile

Bisogna ora definire la **Regione di convergenza**:

Definizione 9.2. La regione di convergenza è un semipiano positivo definito come:

$$\text{RDC} = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > \alpha\}$$

Dove α è l'ascissa di convergenza:



Dimostrazione: Sia $v(t)$ una combinazione lineare di esponenziali:

$$v(t) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$$

Vogliamo dimostrare che la regione di convergenza della trasformata di Laplace è un semipiano a destra di α :

$$\text{RDC} \mathcal{L}[v(t)](s) = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > \alpha\}$$

Dimostro:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt\end{aligned}$$

Prendiamo un preciso $i \rightarrow \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ $s = \sigma + j\omega$

$$\begin{aligned}\int_{0-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{0-}^{+\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} \cdot e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) = \frac{1}{\sigma - \sigma_i + j\omega_i - j\omega}\end{aligned}$$

L'integrale converge se $\sigma_i - \sigma < 0 \rightarrow \sigma > \sigma_i$ e quindi:

$$\begin{aligned}\sigma &= \Re(s) \quad \sigma_i = \Re(\lambda_i) \\ \forall s \in \mathbb{C} \quad \Re(s) &> \Re(\lambda_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \alpha &\geq \max(\Re(\lambda_i))\end{aligned}$$

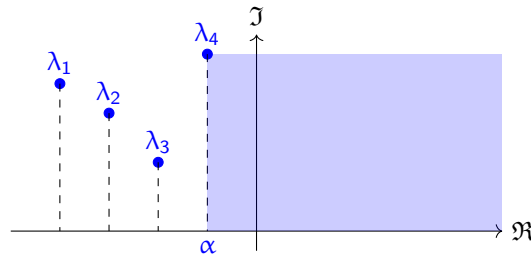


Figura 81: Asintoticamente stabile

Per un sistema LTI stabile RDC contiene sempre l'asse immaginario

9.1 Proprietà della trasformata di Laplace

9.1.1 Linearità

Siano v_1 e v_2 funzioni che ammettono la trasformata di Laplace e rispettivamente V_1 e V_2 le loro trasformate di Laplace:

$$\begin{aligned}v_1 &\rightarrow V_1(s) \\ v_2 &\rightarrow V_2(s)\end{aligned}$$

allora: $av_1(t) + bv_2(t)$ ammette la trasformata di Laplace ed è definita come:

$$\mathcal{L}[av_1(t) + bv_2(t)](s) = aV_1(s) + bV_2(s)$$

Ha come ascissa di convergenza:

$$\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

9.1.2 Traslazione nel tempo (ritardo temporale)

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $v(t - \tau)$, con $\tau > 0$ è:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

L'ascissa di convergenza rimane immutata

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{\tau-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau \\ x &= t - \tau \\ t &= x + \tau \\ dt &= dx \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \\ &= e^{-s\tau} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\ &= e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)\end{aligned}$$

9.1.3 Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $e^{\lambda t} \cdot v(t)$ è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) = V(s - \lambda)$$

L'ascissa di convergenza rimane spostata:

$$\alpha = \alpha_0 + \Re(\lambda)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda t} \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{(\lambda-s)t} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-\overbrace{(s-\lambda)}^r} t dt \\ &= \mathcal{L}[v(t)](r) \\ &= \mathcal{L}[v(t)](s - \lambda)\end{aligned}$$

9.1.4 Cambio di scala

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $v(rt)$ è:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} \cdot V\left(\frac{s}{r}\right)$$

L'ascissa di convergenza viene scalata:

$$\alpha = r \cdot \alpha_0$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(rt)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(rt) \cdot e^{-st} dt \\ x &= rt \\ t &= \frac{x}{r} \\ dt &= \frac{dx}{r} \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s \frac{x}{r}} dx \\ &= \frac{1}{r} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-\frac{s}{r} x} dx \\ &= \frac{\mathcal{L}[v(t)]\left(\frac{s}{r}\right)}{r} \end{aligned}$$

9.1.5 Proprietà della derivata

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$ ed esiste ed è finito il limite: $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$, allora anche la sua derivata i -esima ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = s^i \cdot V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{i-k-1}$$

L'ascissa di convergenza è minore dell'ascissa di convergenza originale

$$\alpha \leq \alpha_0$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) &= \int_{0-}^{+\infty} \overbrace{\frac{dv(t)}{dt}}^{f'(t)} \cdot \overbrace{e^{-st}}^{g(t)} dt \\ &= v(t) \cdot e^{-st} \Big|_{0-}^{+\infty} - \underbrace{\left(-s \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt\right)}_{\text{TdL}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \overbrace{v(\varepsilon)}^0 \cdot e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon) \cdot e^{-s\varepsilon} + s \cdot V(s) \\ &= s \cdot V(s) - v(0^-) \end{aligned}$$

Dimostrazione per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)\right](s) \\
 &= s \cdot \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-} \\
 &= s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-} \\
 &= s^2 \cdot V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-}
 \end{aligned}$$

9.1.6 Moltiplicazione per una funzione polinomiale

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $t^i \cdot v(t)$ è:

$$\mathcal{L}[t^i \cdot v(t)](s) = (-1)^i \cdot \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Dimostrazione ($i = 1$):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t \cdot v(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot (-t \cdot e^{-st}) dt \\
 &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt}_{\text{TdL } v(t)} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

9.1.7 Integrazione nel tempo

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, allora la trasformata di Laplace di $\psi(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau$ è:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

E l'ascissa di convergenza è:

$$\alpha = \max(\alpha_0, 0)$$

Dimostrazione:

$$v_i(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau \rightarrow v'_i(t) = v(t) \text{ e } v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(\tau) d\tau = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &\stackrel{9.1.5}{=} \mathcal{L}[v_1'(t)](s) \\ &= s \cdot \mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= s \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

9.1.8 Integrale nel dominio dei complessi

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, se esiste il $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$, allora la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](s) ds$$

9.1.9 Teorema del valore iniziale

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, ed esiste ed è finito il limite $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$, allora:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

9.1.10 Teorema del valore finale

Sia $v(t)$ una funzione che ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, ed esiste ed è finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$, allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

9.1.11 Convoluzione nel dominio del tempo

Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulle per $t < 0$) che ammettono la trasformata di Laplace $U(s)$ e $V(s)$, allora $(u * v)(t)$ ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-st} dt \\
 \{u(t) = 0, \quad t < 0\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left(\int_{0^-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \right) d\tau \\
 \text{Sostituisco: } x &= t - \tau, \quad t = x + \tau, \quad dt = dx \\
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left(\int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

9.2 Trasformate notevoli

9.2.1 Impulso

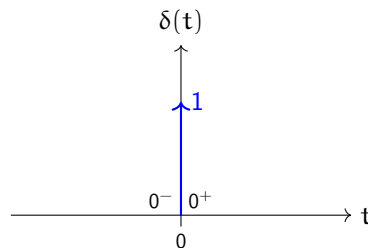


Figura 82: Impulso

- La trasformata di Laplace dell'impulso $\delta_0(t)$ è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \overset{\text{Proprietà impulso}}{\delta_0(t)} \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-st} \Big|_{t=0} = 1
 \end{aligned}$$

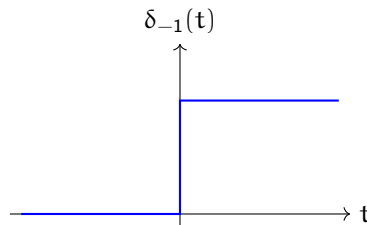
- La trasformata di Laplace di un impulso di altezza A è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A \cdot \delta_0(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) \\
 &= A
 \end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'impulso ritardato è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t - \tau)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_\tau(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-s\tau}
 \end{aligned}$$

9.2.2 Gradino



- La trasformata di Laplace del gradino $\delta_{-1}(t)$ è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty; \mu \rightarrow 0^-} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_{t=\mu}^{\varepsilon} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-s\varepsilon}}{s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

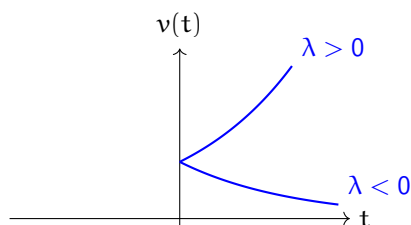
- La trasformata di Laplace del gradino di altezza A è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace del gradino ritardato è:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \frac{1}{s}$$

9.2.3 Esponenziale complesso causale



- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso causale $v(t) = e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$ è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$

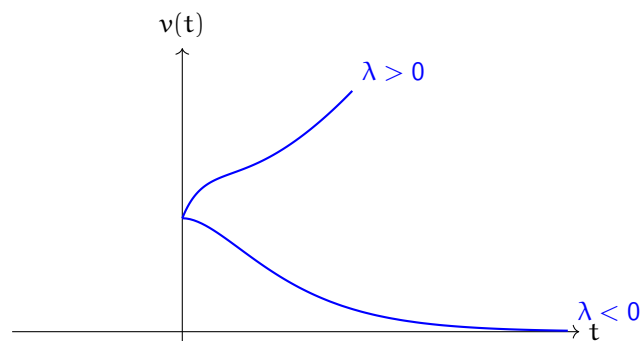
- La trasformata di Laplace dell'esponenziale con una costante A è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s - \lambda}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso ritardato è:

$$\mathcal{L} [e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

9.2.4 Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale



La trasformata di Laplace di $v(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$ è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[\frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) &= \frac{1}{l!} \cdot \mathcal{L}[t^l \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \left(\frac{1}{s - \lambda} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{l!(-1)^e}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}}\end{aligned}$$

Esempio 9.1. Ad esempio se:

- $l = 1$, la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L} [t \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

- $l = 2$

$$\mathcal{L} \left[\frac{t^2}{2} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

Esempio 9.2. Alcuni casi speciali sono:

-

$$\mathcal{L} \left[\frac{t}{l!} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{s^{l+1}}$$

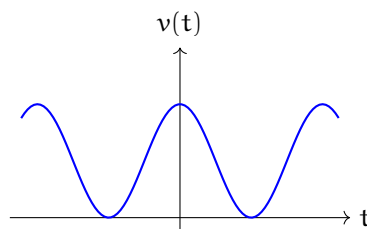
-

$$\mathcal{L} [t \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{l!}{s^{l+1}}$$

-

$$\mathcal{L} [e^{-\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{1}{s + \lambda}$$

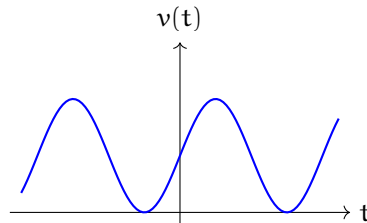
9.2.5 Funzione coseno



La trasformata di Laplace di $\cos(\omega t)$ è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] (s) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] (s) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L} [e^{j\omega t}] (s) + \mathcal{L} [e^{-j\omega t}] (s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

9.2.6 Funzione seno



La trasformata di Laplace di $\sin(\omega t)$ è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right](s) \\
 &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}](s) \\
 &= \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\
 &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

9.3 Risoluzione di sistemi LTI causali

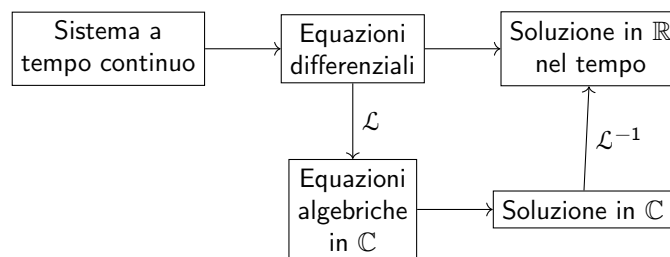


Figura 83: Risoluzione di sistemi LTI causali tramite trasformata di Laplace

Per un sistema LTI causale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Se $n \geq m$ e $u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)$, (cioè $u(t) = 0$, $t < 0$) e consideriamo le $n - 1$ condizioni iniziali:

$$v(0^-); \frac{dv(0^-)}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}v(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette la trasformata di Laplace $U(s)$ e $v(t)$ ammette la trasformata di Laplace $V(s)$, con $t \geq 0$ allora si ha che:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot \mathcal{L} \left[\frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

Applicando $n + m$ vale la regola della derivata:

$$a_n \left[s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-1} \right] +$$

$$a_{n-1} \left[s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-2} \right] + \dots + a_0 V(s)$$

Imponiamo le condizioni iniziali $u(t) \Big|_{t=0^-} = 0$, quindi si ha che le derivate in 0 sono nulle:

$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

Espandendo le sommatorie e raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}_{d(s)} V(s)$$

$$- \overbrace{a_n \cdot v(0^-) \cdot s^{n-1} - \left(a_{n-1} \cdot v(0^-) + a_n \cdot \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) s^{n-2} - \dots}_{p(s)}$$

$$\dots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \cdot \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right) =$$

$$= \underbrace{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}_{n(s)} U(s)$$

Sostituendo diventa:

$$d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinomio di grado m che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. È il **polinomio caratteristico** di $u(t)$
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'uscita. È il **polinomio caratteristico** di $v(t)$

- $p(s)$ è un polinomio di grado $n - 1$ che dipende dalle condizioni iniziali

$$p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left(\sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \cdot \frac{d^{n-j}v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

- $\frac{p(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle condizioni iniziali del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita $v(t)$. È la **trasformata di Laplace della risposta libera**:

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'ingresso $u(t)$ e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita $v(t)$ moltiplicati per la trasformata di Laplace di $u(t)$. È la **trasformata di Laplace della risposta forzata** siccome una convoluzione diventa un prodotto di trasformate:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$ si chiama **Funzione di trasferimento** $H(s)$ ed è definita come:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

è il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $v(t)$. $H(s)$ è definita come la **trasformata di Laplace della risposta impulsiva**

$h(t)$

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + \left(\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}}$$

Esempio 9.3. Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

Si può trasformare usando la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^3v(t)}{dt^3} \right] (s) + \mathcal{L} \left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} \right] (s)$$

Applicando la regola della derivata:

$$s^3 V(s) - s^2 v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s - \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} \cdot s^0 + \\ + s^2 V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s^0 = s \cdot U(s)$$

Raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(s^3 + s^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} \right]}_{p(s)} = \underbrace{s}_{n(s)} \cdot U(s)$$

Quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \\ = \frac{s}{(s^3 + s^2)} \cdot U(s) + \frac{s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt}}{s^3 + s}$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 0; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} \cdot U(s)$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 1; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s} \cdot U(s) + \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2}$$

9.3.1 Stabilità di sistemi LTI causali

Considerando la funzione di trasferimento $H(s)$, cioè il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso e dell'uscita, si ha che il grado del numeratore è generalmente minore o uguale a quello del denominatore.

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Fattorizzando si ottiene:

$$H(s) = \frac{b_m \overbrace{(s - \beta_1)^{\xi_1} \cdot (s - \beta_2)^{\xi_2} \cdot \dots \cdot (s - \beta_q)^{\xi_q}}^{\text{Radici del numeratore}}}{a_n \underbrace{(s - \alpha_1)^{\mu_1} \cdot (s - \alpha_2)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (s - \alpha_r)^{\mu_r}}_{\text{Radici del denominatore}}}$$

Dove:

ξ_i = molteplicità delle soluzioni del numeratore

μ_i = molteplicità delle soluzioni del denominatore

$$q \leq m; \quad \sum \xi_i = m; \quad r \leq n; \quad \sum \mu_i = n$$

$$H(s) = k \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

Dove:

$(s - z_i)$ = Zeri della funzione razionale (radici numeratore)

$(s - p_i)$ = Poli della funzione razionale (radici denominatore)

Definiamo uno **zero** di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ tale che $H(\beta) = 0$.

Definiamo un **polo** di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi numero $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $H(\alpha) = \infty$.

Definizione 9.3. Dato $H(s)$ in forma ridotta (senza radici comuni), siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione. Se:

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$$

allora il sistema è **BIBO stabile**.

Il sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli stanno nel semipiano complesso negativo.

Per BIBO stabilizzare un sistema bisogna togliere gli zeri λ_i con $\Re(\lambda_i) > 0$, semplificandoli dividendo per lo stesso valore.

Esempio 9.4. Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

In questo caso abbiamo che $n < m$. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Polinomio caratteristico dell'ingresso}}{\text{Polinomio caratteristico dell'uscita}} \\ &= \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} \\ &= \frac{(s - 1)(s - 4)}{s - 3} \end{aligned}$$

La soluzione è $\lambda_1 = 3$, quindi il sistema non è asintoticamente stabile, di conseguenza è instabile.

Per verificare se il sistema è BIBO stabile bisogna vedere se si possono semplificare gli zeri. In questo caso tutte le radici del denominatore (i poli) hanno parte reale maggiore di 0, quindi il sistema non è BIBO stabile.

Esempio 9.5. Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{(s - 3)(s - 1)}{(s + 2)(s + 1)} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$\Re(\lambda_i) < 0$ quindi il sistema è asintoticamente stabile, di conseguenza anche BIBO stabile.

Esempio 9.6. Studiamo la stabilità del seguente sistema:

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u'(t) - 4u(t)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} \\ &= \frac{(s - 4)(s - 1)}{(s + 3)(s + 2)(s - 1)} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = 1$$

Siccome $\Re(\lambda_3) > 0$ il sistema non è asintoticamente stabile.

Controlliamo se il sistema è BIBO stabile:

$$\frac{(s-4)\cancel{(s-1)}}{(s+3)(s+2)\cancel{(s-1)}}$$

Il polo con parte reale minore di 0 si semplifica, quindi il sistema è BIBO stabile, perchè tutti i poli hanno parte reale minore di 0.

9.4 Antitrasformata di Laplace unilatera

Prendendo in considerazione la trasformata di Laplace del sistema:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot V(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

si vuole trovare l'antitrasformata, quindi si applicano le seguenti regole considerando soltanto ciò di cui si vuole trovare l'antitrasformata:

- Risposta forzata:

$$\frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- Risposta libera:

$$\frac{p(s)}{d(s)}$$

- Risposta impulsiva:

$$\frac{n(s)}{d(s)}$$

- Risposta totale:

$$\frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

Di conseguenza consideriamo:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- Se $\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]$ (sistema proprio) bisogna fare la divisione polinomiale e arrivare alla divisione in fratti semplici e infine applicare l'antitrasformata di Laplace.

– **Divisione polinomiale:**

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{con} \quad \deg[r(s)] < \deg[d(s)]$$

Si ha che k è la trasformata di Laplace dell'impulso:

$$\mathcal{L}[k \cdot \delta_0(t)](s) = k$$

e quindi la sua anti-trasformata è:

$$\mathcal{L}[k \cdot \delta_0(t)](s) = k \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow k \cdot \delta_0(t)$$

Esempio 9.7. Considerando la seguente risposta:

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1}$$

si ha che $m = 2$ e $n = 2$, quindi siamo nel caso:

$$\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]$$

quindi bisogna fare la divisione polinomiale:

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \\ &= \frac{6s - 1}{s^2 - s - 1} + 2 \end{aligned}$$

Ora bisogna trasformare in fratti semplici.

- Se $\deg[n(s)] < \deg[d(s)]$ (sistema strattamente proprio) si può saltare la divisione polinomiale e applicare direttamente l'antitrasformata.

Decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{r(s)}{d(s)} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s - \alpha_i)^{l+1}}$$

Per trovare i valori di $c_{i,l}$ si usa la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1} \left((s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

Esempio 9.8. Si vuole scomporre in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

Quindi si ha che:

$$V(s) = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

dove A, B, C, D sono le costanti $c_{i,l}$ e i denominatori sono le radici $(s - \alpha_i)$ del polinomio $d(s)$. Poi si calcolano i valori di A, B, C, D e si ottiene la decomposizione in fratti semplici.

Esempio 9.9. Si vuole scomporre in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{s - 20}{(s + 4)(s - 2)}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -4 & \mu_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 & \mu_2 &= 1\end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$V(s) = \frac{c_{1,0}}{s + 4} + \frac{c_{2,0}}{s - 2} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2}$$

Per trovare A e B si può fare in due modi:

1. Fare il denominatore comune e sommare i numeratori

$$\begin{aligned}\frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2} &= \frac{A(s - 2) + B(s + 4)}{(s + 4)(s - 2)} \\ &= \frac{As - 2A + Bs + 4B}{(s + 4)(s - 2)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (A + B)s = 1s \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 4B - 2A = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{s - 20}{(s + 4)(s - 2)} = \frac{4}{s + 4} - \frac{3}{s - 2}$$

2. Si può usare la formula:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i - l - 1} \left((s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i - l - 1}}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 \\ \alpha_1 &= -4\end{aligned}$$

$$c_{1,0} = A = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d^{1-0-1} \left((s+4) \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^{1-0-1}} = \frac{-24}{-6} = 4$$

e

$$\begin{aligned}\mu_2 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2\end{aligned}$$

$$c_{2,0} = B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left(\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^{1-0-1}} = \frac{-18}{6} = -3$$

Alla fine si ottiene:

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Antitrasformata di Laplace:

Dopo aver applicato tutti i passaggi precedenti si arriva ad avere:

$$V(s) = k + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}}$$

da questa forma si può antitrasformare:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \right] (t) \right] \\ &= k \cdot \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] \end{aligned}$$