Esame 20/07/2022

ESERCIZIO DI ELETTROSTATICA

Un conduttore sferico cavo (**R_2=9cm; R_3=10cm**) contiene, in modo concentrico, una sfera conduttrice (**R_1=2cm)**. Sul conduttore interno viene depositata la carica **q_{int} = −10x10^{-9}C**. Il sistema finale è isolato e in equilibrio elettrostatico.

1- Calcolare la distribuzione di carica sulle pareti dei conduttori (Q e densità)
2- Ricavare applicando il teorema di Gauss il campo elettrico **E** generato in tutto lo spazio e disegnare il grafico E(r).
3- Ricavare il potenziale elettrostatico **V** nella sola regione esterna e disegnare il grafico.

Un elettrone viene posizionato a distanza **1cm** dalla superficie esterna.

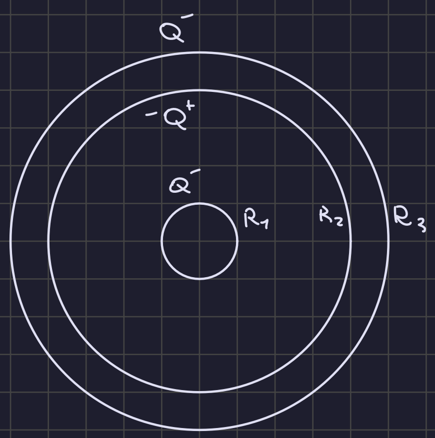
4- Calcolare il lavoro del campo elettrico **L** per far compiere all'elettrone il suo percorso.

$R_1 = 2 \cdot 10^{-2} m$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-2} m$

$R_3 = 10^{-1} m$

$Q = -10^{-8} C$



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

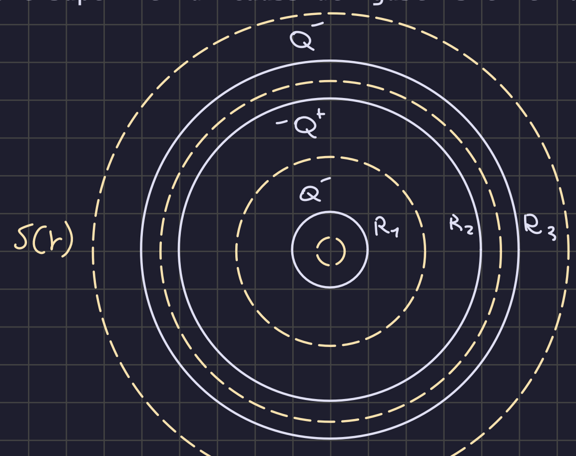
$$\sigma_{R_1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2} = -2 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \qquad Q_{R_1} = Q$$

$$\sigma_{R_2} = \frac{-Q}{4\pi R_2^2} = 9.8 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2} \qquad Q_{R_2} = -Q$$

$$\sigma_{R_3} = \frac{Q}{4\pi R_3^2} = -8 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2} \qquad Q_{R_3} = Q$$

Th. Gauss: $\oint_{Sup} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Per calcolare il campo elettrico bisogna scegliere delle superfici su cui il campo è costante per poterlo tirare fuori dall'integrale, queste superfici sono chiamate superfici di Gauss. In questo caso siccome il campo è radiale prendo come superfici di Gauss dei gusci sferici di raggio r



$$\oint_{S(r)} \overset{\text{cost}}{E(r)}\,dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

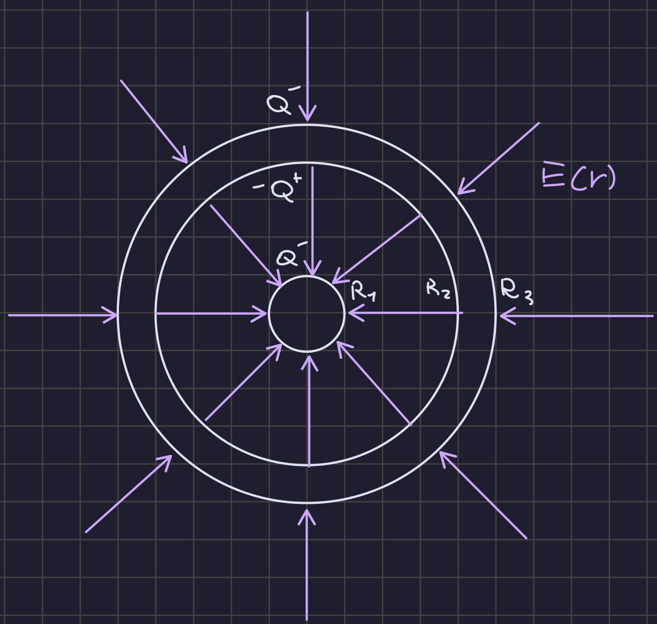
$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

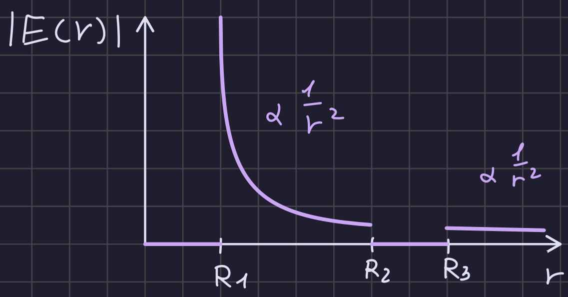
$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \lor R_2 < r < R_3 \\ Q & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \lor r \geq R_3 \end{cases} \quad [C]$$

$$\downarrow$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \lor R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \lor r \geq R_3 \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$





$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$$

Per calcolare il potenziale si prende un punto di riferimento in cui il potenziale vale 0, in questo caso prendiamo l'infinito

$$r_0 = \infty \rightarrow V(r_0) = 0$$

$$V(r) - \cancel{V(r_0)} = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,dr$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

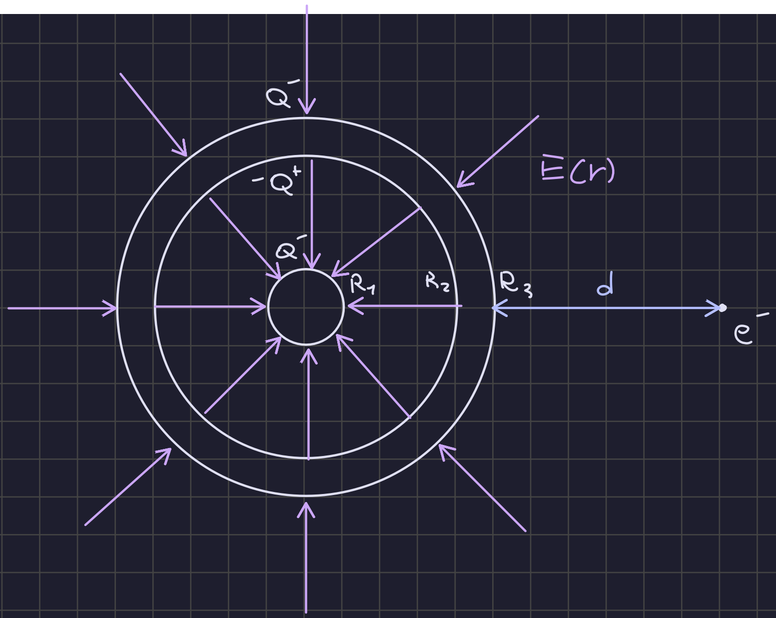
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{r_0}}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad [V] \quad \text{se} \quad r \geq R_3$$

Un elettrone viene posizionato a distanza **1cm** dalla superficie esterna.

4- Calcolare il lavoro del campo elettrico **L** per far compiere all'elettrone il suo percorso.



$d = 10^{-2}$ m

$e^- = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{l} \rightarrow L = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$L = \int_{\infty}^{R_3+d} e^- E(r)\,dr$$

$$= -e^-\int_{\infty}^{R_3+d} \nabla V\,dr \quad \text{perché } \vec{E} \text{ é conservativo}$$

$$= -e^-\left(V(R_3+d) - \cancel{V(\infty)}\right)$$

$$= -\frac{e^- Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3+d)}$$

$$= -1.3 \cdot 10^{-16} \quad [J]$$

$$L = \int_{\infty}^{R_3+d} e^- E(r)\,dr$$

$$= e^-\int_{\infty}^{R_3+d} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= \frac{e^- Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R_3+d} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{e^- Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_3+d} + \cancel{\frac{1}{\infty}}\right)$$

$$= -\frac{e^- Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3+d)} = -1.3 \cdot 10^{-16} \quad [J]$$

CASO A

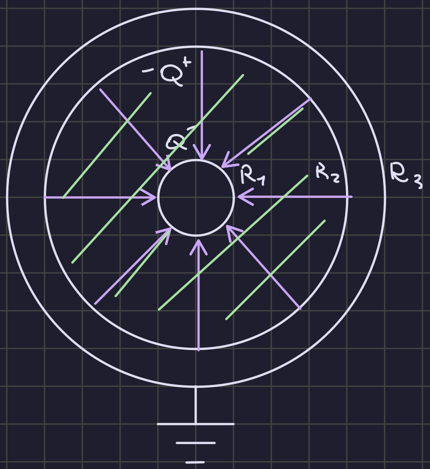
La superficie esterna viene collegata a terra.

5- Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare l'energia elettrostatica **U** del sistema

Lo spazio interno è riempito di dielettrico lineare **k=3**

6- Calcolare la capacità del sistema.
7- Calcolare il campo spostamento dielettrico D.

$k = 3$



Le cariche sulla superficie esterna si distribuiscono a terra e quindi la superficie esterna si scarica.
Il campo all'esterno è nullo, mentre quello all'interno rimane invariato perchè la superficie esterna agisce da gabbia di Faraday.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$= \frac{Q}{V(R_1) - V(R_2)}$$

$$= \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad [F]$$

$$= 2,9 \cdot 10^{-12} \ F$$

$$U_{TOT} = U_{int} + U_{est}$$
$$= U_{int} + 0$$
$$= \int_{Vol} \mu_E \, d\tau \qquad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad d\tau = 4\pi r^2 dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 \, 4\pi r^2 dr$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \cancel{4\pi r^2} dr$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \ [J]$$
$$= 1{,}7 \cdot 10^{-5} \ J$$

$$U_{TOT} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$
$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{2\cancel{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}} \frac{Q^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{\cancel{2}}$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \ [J]$$
$$= 1{,}7 \cdot 10^{-5} \ J$$

Per calcolare il campo spostamento dielettrico uso il teorema di Gauss per i dielettrici e anche in questo caso bisogna trovare delle superfici di Gauss in cui il campo sia costante che sono uguali al caso senza dielettrico.

$$\oint_{Sup} \vec{D} \, ds = Q_{libere}$$

$$\oint_{S(r)} D(r) = Q_{libere}$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{libere}$$

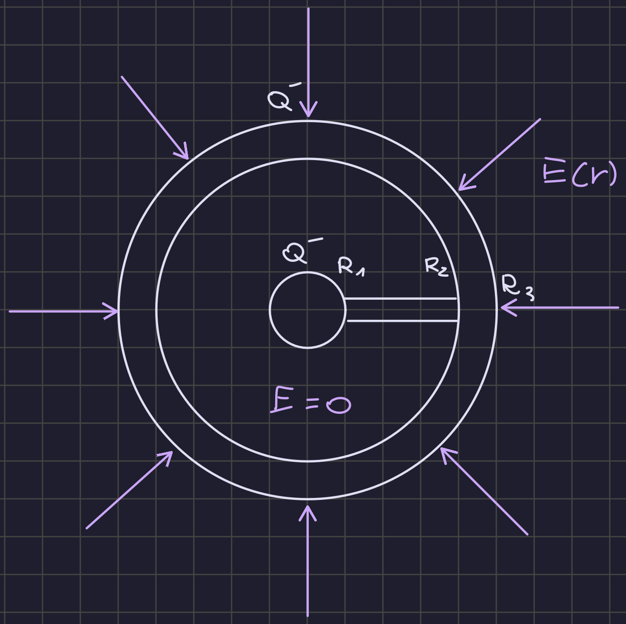
$$D(r) = \frac{Q_{libere}}{4\pi r^2}$$

$$D(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \geq R_2 \lor r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

CASO B

Diversamente, la sfera interna viene collegata alla superficie della cavità R2.

8- Descrivere la situazione che si viene a creare e calcolare l'energia elettrostatica **U** del sistema
9- Calcolare la capacità del sistema.



Le cariche all'interno si distribuiscono su tutta la superficie R_1 e R_2 e le cariche si annullano, mentre all'esterno il sistema rimane invariato.

$$U_{TOT} = U_{INT} + U_{EST} = 0 + U_{EST} = U_{EST}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\cancel{V(\infty)} - V(R_3)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}} = 4\pi\varepsilon_0 R_3 \ [F] = 1.1 \cdot 10^{-11} \ F$$

$$U_{TOT} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = 2\pi\varepsilon_0 R_3 \frac{Q^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 R_3^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3} \ [J] = 4,5 \cdot 10^{-6} \ J$$

ESERCIZIO DI MAGNETOSTATICA

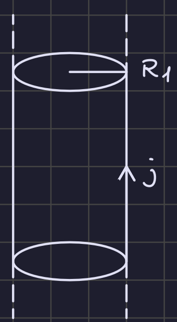
Un cavo conduttore di raggio $\mathbf{R_1=2mm}$ è percorso da una corrente elettrica stazionaria **i=5mA** parallela all'asse e distribuita uniformemente sulla sua superficie.

1- Ricavare applicando il teorema di Ampere il campo magnetico **B** generato nello spazio e disegnare in un grafico B(r).

$$R_1 = 2 \cdot 10^{-3} \ m$$

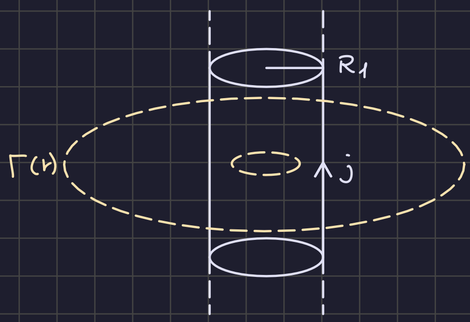
$$i = 5 \cdot 10^{-3} A$$

$$j = \frac{i}{\pi R_1^2} \quad \frac{A}{m^2} =$$



Th Ampere $\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \Sigma i_c$

Per calcolare il campo magnetico bisogna considerare dei circuiti su cui è costante per poterlo tirare fuori dall'integrale. In questo caso le linee amperiane che scelgo sono dei cerchi di raggio r



$$\oint_{\Gamma(r)} B(r) d\vec{l} = \mu_0 i_c$$

$$B(r) \oint_{\Gamma(r)} d\vec{l} = \mu_0 i_c$$

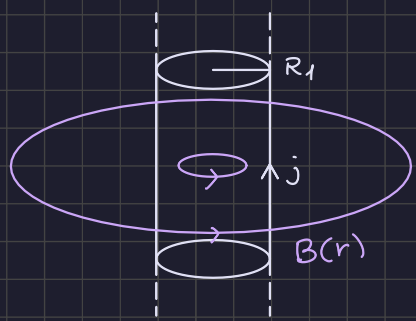
$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 i_c$$

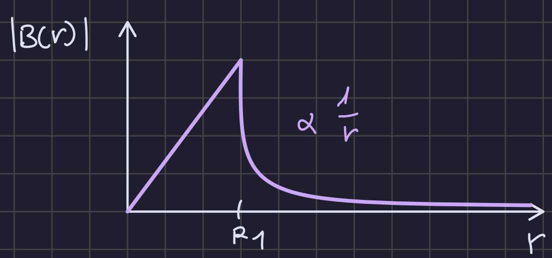
$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} \quad [T]$$

$$i_c = \begin{cases} j \cdot \pi r^2 = \frac{i}{\pi R_1^2} \cdot \pi r^2 = \frac{i r^2}{R_1^2} & \text{se } r < R_1 \\ i & \text{se } r \geq R_1 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1} & \text{se } r < R_1 \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{se } r \geq R_1 \end{cases} \quad [T]$$





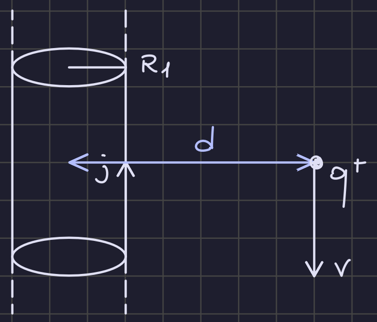
A distanza **d=5m** dall'asse del conduttore viene posta una particella carica **q=10^{-10} C** in moto con velocità **v=15ms^{-1}** in direzione opposta a quella della corrente del conduttore

2- Calcolare la forza **F** agente sulla particella

$d = 5\,m$

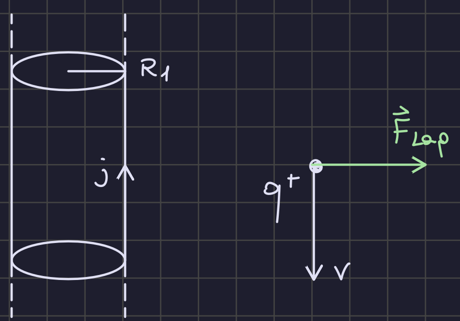
$V = 15\ \frac{m}{s}$

$q = 10^{-9}\,C$



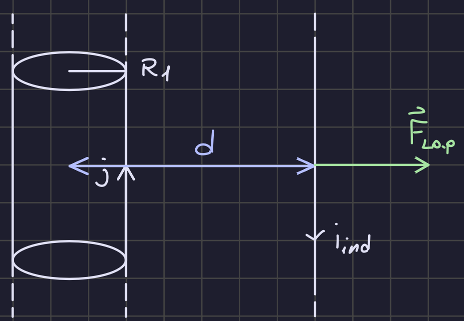
Legge di Laplace: $F_{Lap} = q\vec{v} \times \vec{B}\quad [N]$

$$F_{Lap} = qv \cdot B(d) = qv \cdot \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = 3 \cdot 10^{-19}\ N$$



In una diversa situazione, alla stessa distanza d=~~10~~m dall'asse del conduttore viene posto, parallelo ad esso, un filo percorso da corrente. $\rightarrow$ 5m ?

3- Calcolare la corrente i che scorre sul filo sapendo che esso risente della stessa forza, in modulo direzione e verso, osservata sulla particella del punto 2) dell'esercizio



$$F_{Lap} = q\vec{v} \times \vec{B} = i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$$
$\downarrow$

$$F_{Lap} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\downarrow$$

$$F_{Lap} = i_{ind} B(d)$$

$$i_{ind} = \frac{F_{Lap}}{B(d)}$$

$$= \frac{qv \cdot \cancel{\frac{\mu_0 i}{2\pi d}}}{\cancel{\frac{\mu_0 i}{2\pi d}}}$$

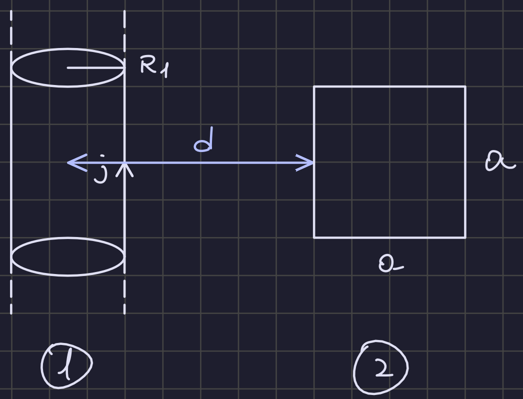
$$= qv$$

$$= 1.5 \cdot 10^{-9}\ A$$

In una diversa situazione, alla stessa distanza **d=5m**, viene posta una spira quadrata di lato **a=10cm** (con un lato parallelo al filo - vedere figura)

4- Calcolare il flusso magnetico concatenato alla spira e il coefficiente di mutua induzione filo-spira

$$a = 10^{-1}\ m$$



$$\Phi = \int_{Sup} \vec{B}\, d\vec{S} \quad [Wb]$$

$$\Phi_{12} = \int_{Sup} B(r)\, d\vec{S}$$

$$= \int_d^{d+a} B(r)\, a\, dr$$

$$= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i a}{2\pi r}\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln\left|\frac{d+a}{d}\right| \quad [Wb]$$

$$= 5 \cdot 10^{-9}\ Wb$$

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1}$$

$$= \frac{\mu_0 \cancel{i} a}{2\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{i}} \ln\left|\frac{d+a}{d}\right|$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left|\frac{d+a}{d}\right|$$

$$= 10^{-6} \quad [H]$$