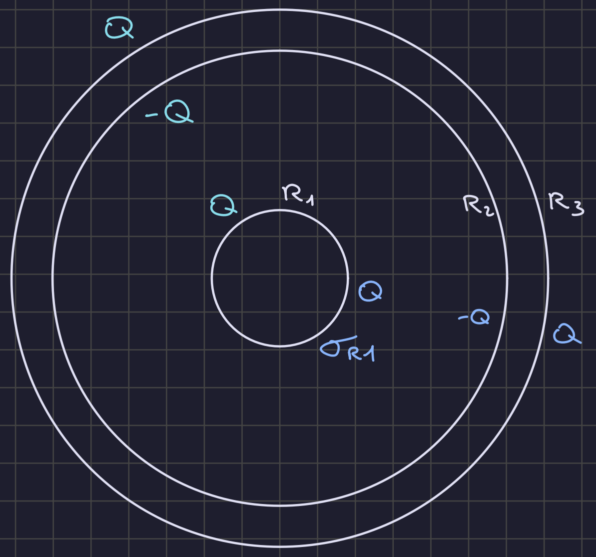
Esercitazione Amos

Elettrostatico-

Q : $[C]$ Carica

o

σ : $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ Distribuz. di carica



$Q = +10^{-10}\, C$

oppure

$\sigma_{R_1} = 3 \cdot 10^{-19}\ \frac{C}{m^2}$

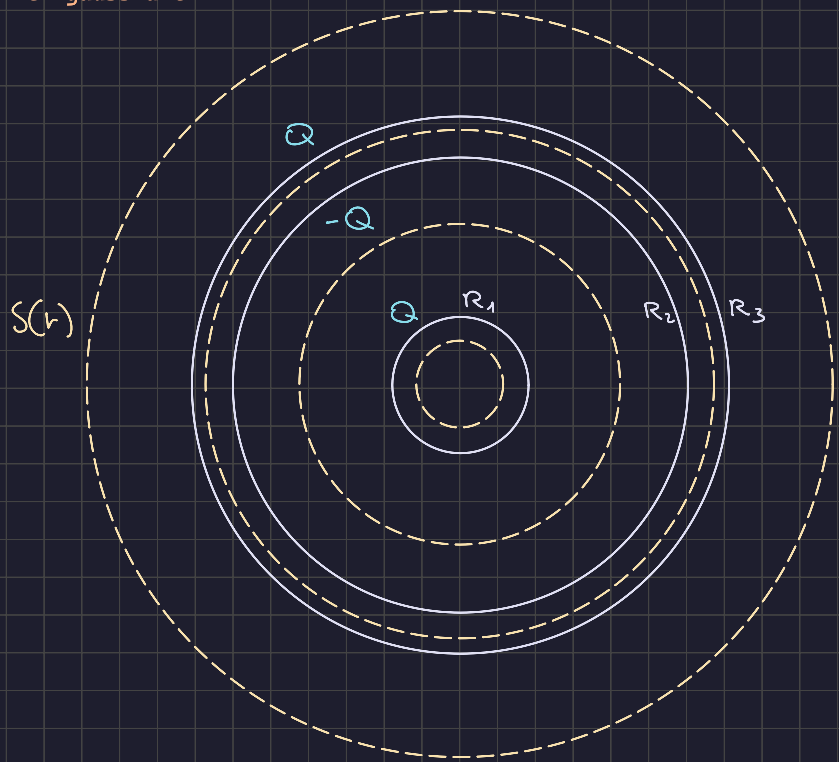
$S = 4\pi R_1^2\ m^2$

$Q = \sigma \cdot S = 3 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi R_1^2\ \frac{C}{\cancel{m^2}} \cancel{m^2}$

Calcolare il campo elettrico con il teorema di Gauss

$$\text{Th Gauss: } \quad \phi(\vec{E}) = \oint_{sup} \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_{sup} \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Disegna le superfici gaussiane



Scelgo superfici gaussiane sferiche perchè rendono il campo costante:

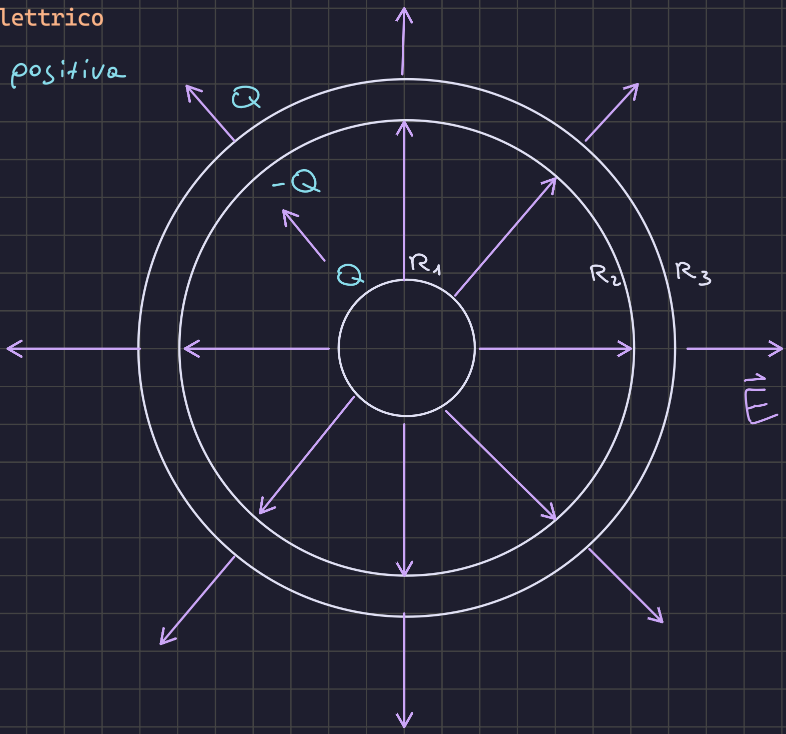
$$\oint_{S(r)} \overbrace{\vec{E}}^{cost.}\, d\vec{S} = E(r) \cdot \oint_{S(r)} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\downarrow$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$

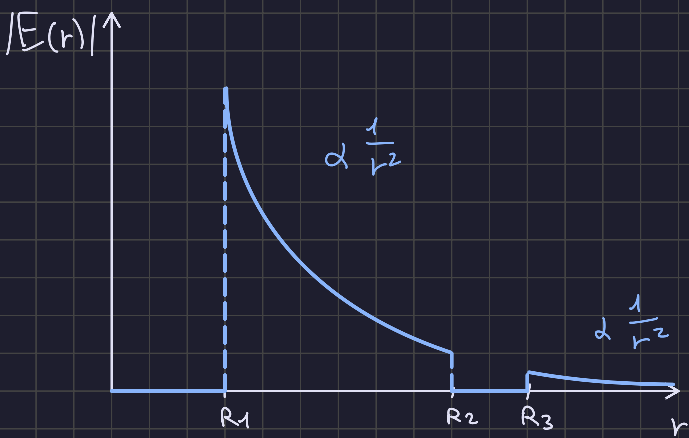
Disegnare il campo elettrico

Consideriamo Q positiva



Il campo elettrico è radiale uscente. (Se la carica fosse stata negativa sarebbe stato radiale entrante)

Disegnare l'andamento del campo elettrico



$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & \text{se } R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \geq R_3 \end{cases} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Calcolare il potenziale elettrico

Il potenziale è il lavoro che si compie spostando una carica di prova da una posizione di riferimento ad una posizione r'

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$$

Considero come punto di riferimento r_0 l'infinito $\rightarrow$ $r_0 = \infty$

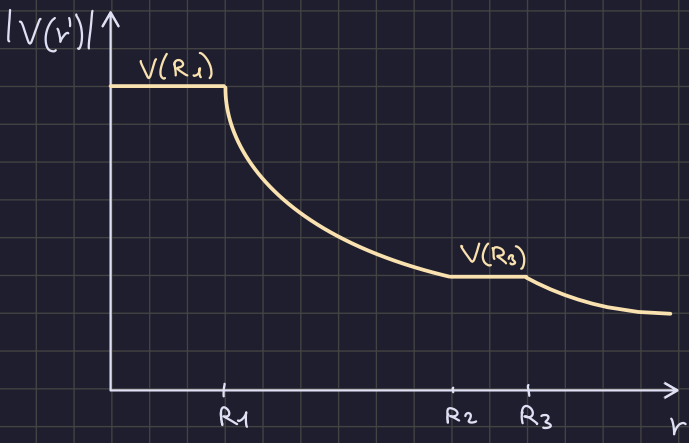
$V(r_0) = 0$

$$V(r') - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$V(r') = -\int_{r_0}^{r'} \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$V(r') = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r'} \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r'} = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'} + \cancel{\frac{1}{\infty}}\right) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r'} \; [V]$$

Disegnare l'andamento del potenziale



$$V(r') = \begin{cases} \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r'} & \text{se } r' \geq R_3 \\[2mm] \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & \text{se } R_2 \leq r' \leq R_3 \\[2mm] * \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{R_3}\right) & \text{se } R_1 \leq r' \leq R_2 \\[2mm] \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & \text{se } 0 < r' \leq R_1 \end{cases} \quad [V]$$

$$* \quad V(R_3) - \int_{R_3}^{r'} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Calcolare l'energia elettrostatica

$$U = \int_{Vol} \underbrace{\mu_E}_{\text{densità di energia}} d\tau = \int_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

$$\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = \frac{4}{\cancel{3}} \cancel{3} r^2 \pi \, dr$$

Metodo 1

$$U_{Tot} = U_{int} + U_{est}$$

$$U_{int} = \int_{Vol} \mu_E \, d\tau$$
$$= \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$
$$= \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q_{int}^2}{4^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}}} \cancel{4\pi r^2} \, dr$$
$$= \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1}$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \quad [J]$$

$$U_{est} = \int_{Vol} \mu_E \, d\tau$$
$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_3}^{\infty}$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_3}$$
$$= \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_{Tot} = \frac{Q_{int}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Metodo 2

Calcolo la capacità del condensatore

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad [F]$$

L'energia elettrica immagazzinata in un condensatore è:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad [J]$$

Calcolare il lavoro

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\,E(r) = q \cdot \frac{Q_{int}}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

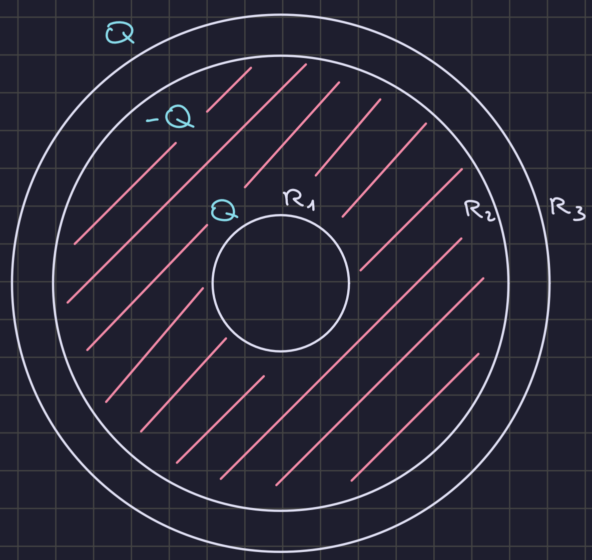
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Perché il campo é conservativo $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

$$L_{AB} = \int_A^B q\vec{E}\, d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} = -q \int_A^B \nabla V\, d\vec{l} = q(V_B - V_A) \quad [J]$$

Considerare un materiale dielettrico all'interno dell'intercapedine

$K > 1$



Calcolare il vettore di spostamento del dielettrico

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = D(r) \oint d\vec{s} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q_{int}$$

$$D(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Trovare il vettore di polarizzazione

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 K \vec{E} \end{cases} \rightarrow \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 K \vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (K - 1) \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Calcolare il campo elettrico in presenza di dielettrico

E_0 = Campo nel vuoto

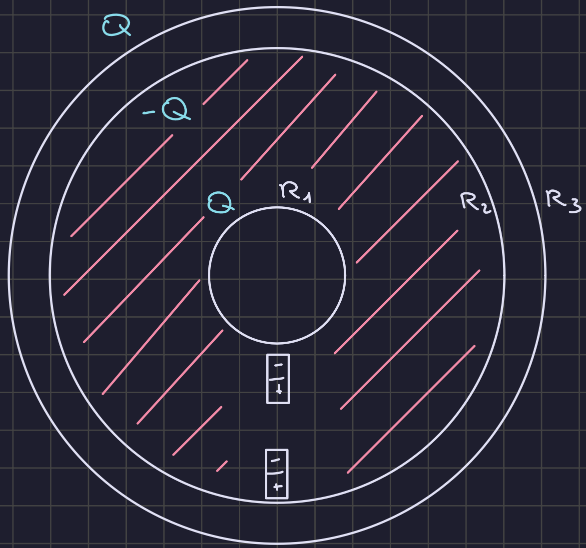
$$E_K = \frac{E_0}{K} \qquad C_K = C_0 \cdot K$$

$$V_K = \frac{V_0}{K} \qquad U_K = \frac{1}{2}\frac{Q_{in1}^2}{C_K} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{K \cdot C_0} = \frac{U_0}{K}$$

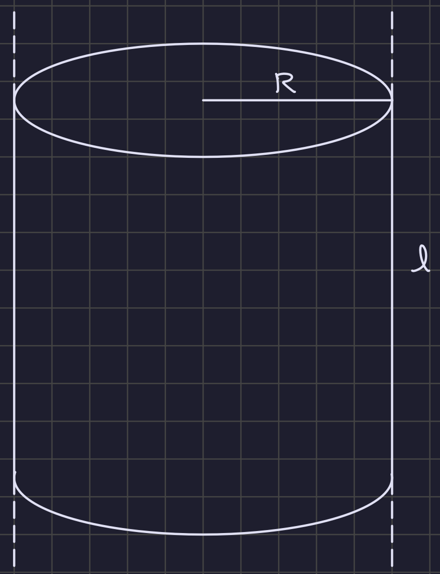
Calcolare la distribuzione delle cariche di polarizzazione sulla superficie

$$P(R) = \sigma_{Pol}(R) = \frac{Q(K-1)}{4\pi K R^2}$$

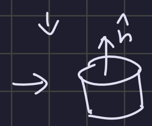
Disegnare le cariche di polarizzazione



Cilindro



$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{lat} + \underbrace{\Phi_{basi}}_{=0}$$



$$\sigma = \frac{C}{m^2}$$

$$Area = 2\pi R l$$

$$Q = \sigma \cdot A = \frac{C}{\cancel{m^2}} \cancel{m^2}$$

$$Q_{int} = \begin{cases} \sigma \cdot 2\pi r l & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad [C]$$

Campo:

$$\oint_{C(r)} \vec{E}\, d\vec{S} = E(r)\, 2\pi r l = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\downarrow$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi r l \varepsilon_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

Filo

$\lambda = \frac{Q}{l} \quad \frac{C}{m} \longrightarrow \lambda = \sigma\, 2\pi R$

$Q = \lambda l$

$$E(r) = \frac{\lambda \cdot \cancel{l}}{2\pi\varepsilon_0 r \cancel{l}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\Delta V = V(r') - \underbrace{V(r_0)}_{\substack{=0 \\ r_0 \neq \infty}}$$

$$V(r') = -\int_{r_0}^{r'} E(r')\, dr'$$

$$= -\int_{r_0}^{r'} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'}\, dr'$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r'} \frac{1}{r'}\, dr'$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r_0}\right) = \frac{\sigma\, \cancel{2}\pi R}{\cancel{2}\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r'}{r_0} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \quad [V]$$