Esercizio 1 (punti: ....../4)
Si trovi una soluzione del seguente problema di Cauchy e si determini il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

$$\begin{cases} y'y^3 - x = \cos 2x \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Qual è la pendenza della tangente alla curva soluzione nel punto $(0, -2)$? (la risposta è praticamente immediata, e va data anche senza sapere come è fatta $y(x)$).

$$\int y' y^3 dy = \int \cos(2x) + x \, dx \qquad y'y^3 - x = \cos^2 x$$

$y = u$
$y' dy = du$
$\downarrow u = y$

$$\int y^3 dy = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^4 = 2\sin(2x) + 2x^2 + c$$

$$(-2)^4 = 2\sin(0) + 0 + c$$

$$c = 16$$

$$y = -\sqrt[4]{2\sin(2x) + 2x^2 + 16}$$

$$\underbrace{2\sin(2x)}_{\in[-1,1]} + 2x^2 + 16 \geq 0$$

$$D \in (-\infty, +\infty)$$

La pendenza della tangente è:

$$y' = \frac{\cos(2x) + x}{y^3} = \frac{\cos(0) + 0}{-2^3} = \frac{1}{-8}$$

Esercizio 2 (punti: ....../4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' = 4t - 5\sin t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

$$s^2 - 2s = 0$$

$$s(s-2) = 0$$

$s_1 = 0$
$s_2 = 2$

$z_i = c_1 + c_2 e^{2t}$

$y'_{P1} = 2At + B$

$y_{P1} = At^2 + Bt + C \rightarrow$ $y''_{P1} = 2A$

$y_{P2} = \alpha \sin t + \beta \cos t \rightarrow$ $y'_{P2} = \alpha \cos t - \beta \sin t$

$y''_{P2} = -\alpha \sin t - \beta \cos t$

P1: $2A - 4At - 2B = 4t$

$t(-4A) + 2A - 2B = 4t$

$\begin{cases} -4A = 4 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \end{cases}$

$y_{P1} = -t^2 - t$

P2:

$-\alpha \sin t - \beta \cos t - 2(\alpha \cos t - \beta \sin t) = -5 \sin t$

$-\alpha \sin t - \beta \cos t - 2\alpha \cos t + 2\beta \sin t = -5 \sin t$

$\sin t(-\alpha + 2\beta) + \cos t(-\beta - 2\alpha) = -5 \sin t$

$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = -5 \\ -\beta - 2\alpha = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\alpha - 4\alpha = -5 \\ \beta = -2\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$

$y_{P2} = \sin t - 2\cos t$

$y_P = y_{P1} + y_{P2} = -t^2 - t + \sin t - 2\cos t$

$y = z_i + y_P = c_1 + c_2 e^{2t} - t^2 - t + \sin t - 2\cos t$

$y' = 2c_2 e^{2t} - 2t - 1 + \cos t + 2\sin t$

$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 + c_2 - 2 = 2 \\ 2c_2 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 + 3 - 2 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$

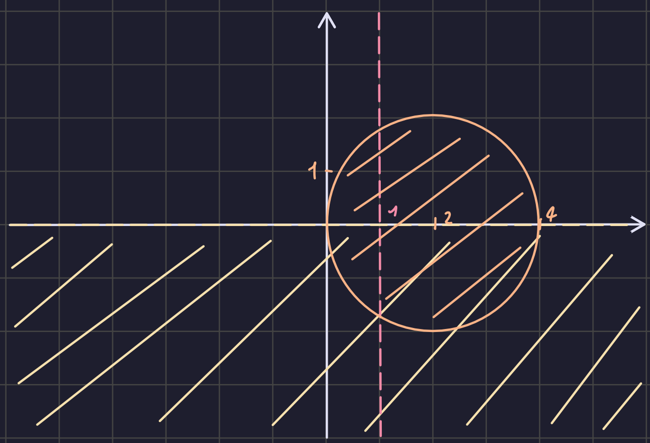
$y = 1 + 3e^{2t} - t^2 - t + \sin t - 2\cos t$

Esercizio 3 (punti: ....../4)
Si consideri la funzione
$$f(x,y)=\frac{\ln y}{x-1}\sqrt{x^2+y^2-4x}$$

(1) (2 punti) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Dire, motivando la risposta, se tale insieme è o non è aperto; chiuso; limitato.

(2) (2 punti) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P(0,2)$ e nella direzione del versore $\vec{v}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. Qual è il significato geometrico del valore trovato?

1)
$$\begin{cases} x\neq 1 \\ x^2+y^2-4x\geq 0 \\ y>0 \end{cases}$$



L'insieme è non limitato, nè aperto nè chiuso

2)
$$F(x,y)=\frac{\ln y}{x-1}\sqrt{x^2+y^2-4x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=\frac{-\ln y}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+y^2-4x}+\frac{\ln y}{x-1}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2-4x}+\frac{\ln y}{x-1}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4x}}$$

$$\overline{\nabla}F(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right)$$

$$\overline{\nabla}F(0,2)=\left(-\ln 2\ ,\ -1-\ln 2\right)$$

$$\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D_v F(0,2)=\left(-\ln 2+(-1-\ln 2)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2=-\sqrt{2}\ln 2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

(1) (2 punti) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2y-3y^3}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} & (x,y)\neq(2,0) \\ 0 & (x,y)=(2,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

(2) (2 punti) Si trovi una parametrizzazione dell'arco di ellisse di equazione

$$x^2+4y^2-4=0$$

che si trova nel secondo quadrante e si scrivano poi le equazioni parametriche della tangente alla curva in $P(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$. Verificare infine che tale retta tangente è ortogonale al gradiente di $f(x,y)=x^2+4y^2-4$ calcolato nel punto P.

1) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2y-3y^3}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad f(x+2,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to0} \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta-3\rho^3\sin\theta}{\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}$$

$$=\lim_{\rho\to0} \frac{\rho^{\cancel{3}2}\cos^2\theta\sin\theta-3\rho^{\cancel{3}2}\sin\theta}{\cancel{\rho}}$$

$$=\lim_{\rho\to0} \rho^2\cos^2\theta\sin\theta-3\rho^2\sin\theta = 0$$

Il limite esiste e fa 0, quindi la funzione è continua in (2,0)

2) $x^2+4y^2-4=0$

$4y^2=4-x^2$

$y=+\sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}}$

$$\frac{1}{2}\left(4-t^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2t)$$

$\gamma(t)=\left(t,\sqrt{\dfrac{4-t^2}{4}}\right)$ $\quad t\in[-2,0]$

$\gamma'(t)=\left(1,\dfrac{-t}{2\sqrt{4-t^2}}\right)$

$$P=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \begin{cases} t=-1 \\ \sqrt{\frac{4-t^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad t=-1$$

$$\gamma(-1) = \left(-1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\gamma'(-1) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$r_T = \gamma(-1) + s\,\gamma'(-1)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 + s \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3} + s\,\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} s = x + 1 \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3} + (x+1)\,\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{3} + (x+1)\,\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$$

$$\overline{\nabla} F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,y), \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\right) = (2x, 8y)$$

$$\overline{\nabla} F(P) = \overline{\nabla} F\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-2, 4\sqrt{3}\right)$$

$$\left\langle \overline{\nabla} F(P), \gamma'(-1) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-2 \cdot 1 + 4\cancel{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{3}}} = 0$$

$$-2 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

La retta tangente è ortogonale al gradiente

Secondo tentativo

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Si trovi una soluzione del seguente problema di Cauchy e si determini il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

$$\begin{cases} y'y^3 - x = \cos 2x \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Qual è la pendenza della tangente alla curva soluzione nel punto $(0, -2)$? (la risposta è praticamente immediata, e va data anche senza sapere come è fatta $y(x)$).

$$y'y^3 = x + \cos 2x$$

$$\int y^3 dy = \int x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos u \, du \qquad u = 2x$$

$$du = 2\,dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\downarrow$$

$$y(0) = -2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(-2)^4}{4} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2}\sin(0) + c$$

$$c = 4$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 4$$

$$y^4 = 2x^2 + 2\sin 2x + 16$$

$$y(t) = -\sqrt[4]{2x^2 + 2\sin 2x + 16}$$

$$2x^2 + \underbrace{2\sin 2x}_{[-2,2]} + 16 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

L'intervallo più ampio è $(-\infty, +\infty)$

Tangente nel punto (0,-2)

$$y'y^3 = x + \cos 2x$$

$$y' = \frac{x + \cos 2x}{y^3} \qquad y(0) = -2 \rightarrow y' = \frac{0 + \cos(0)}{-8} = -\frac{1}{8}$$

Esercizio 2 (punti: ....../4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' = 4t - 5\sin t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

$s^2 - 2s = 0$

$s(s-2) = 0$

$s_1 = 0$

$s_2 = 2$

$z = c_1 + c_2 e^{2t}$

$y_{p_1} = At^2 + Bt + C$

$y'_{p_1} = 2At + B$

$y''_{p_1} = 2A$

$2A - 4At - 2B = 4t$

$t(-4A) + 2A - 2B = 4t$

$$\begin{cases} -4A = 4 \\ 2A - 2B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$y_{p_1} = -t^2 - t$

$y_{p_2} = \alpha\cos t + \beta\sin t$

$y'_{p_2} = -\alpha\sin t + \beta\cos t$

$y''_{p_2} = -\alpha\cos t - \beta\sin t$

$-\alpha\cos t - \beta\sin t + 2\alpha\sin t - 2\beta\cos t = -5\sin t$

$\sin t(-\beta + 2\alpha) + \cos t(-\alpha - 2\beta) = -5\sin t$

$$\begin{cases} -\beta + 2\alpha = -5 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

$y_{p_2} = -2\cos t + \sin t$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = -t^2 - t - 2\cos t + \sin t$

$y(t) = z + y_p = c_1 + c_2 e^{2t} - t^2 - t - 2\cos t + \sin t$

$y'(t) = 2c_2 e^{2t} - 2t - 1 + 2\sin t + \cos t$

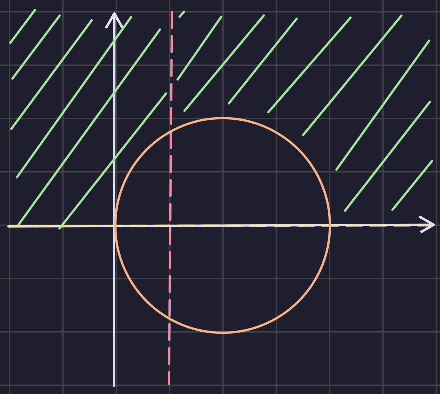
$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 - 2 = 2 \\ 2c_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$y(t) = 1 + 3e^{2t} - t^2 - t - 2\cos t + \sin t$

Esercizio 3 (punti: ....../4)
Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \frac{\ln y}{x-1}\sqrt{x^2+y^2-4x}$$

(1) (2 punti) Determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Dire, motivando la risposta, se tale insieme è o non è aperto; chiuso; limitato.

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x^2+y^2-4x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Il dominio è un insieme illimitato perchè va all'infinito, nè aperto nè chiuso perchè comprende i valori del cerchio, ma non comprende l'asse x e x=1, infine è sconnesso perchè x≠1

(2) (2 punti) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P(0,2)$ e nella direzione del versore $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Qual è il significato geometrico del valore trovato?

$$F(x,y) = \frac{\ln y}{x-1}\sqrt{x^2+y^2-4x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{-\ln y}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+y^2-4x} + \frac{\ln y}{x-1}\,\frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{1}{y(x-1)}\sqrt{x^2+y^2-4x} + \frac{\ln y}{x-1}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4x}}$$

$$\bar{\nabla}F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-\ln y}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+y^2-4x} + \frac{\ln y}{x-1}\,\frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4x}} \\ \frac{1}{y(x-1)}\sqrt{x^2+y^2-4x} + \frac{\ln y}{x-1}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4x}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\nabla}F(0,2) = \begin{pmatrix} -\ln 2 \\ -1-\ln 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D_{\vec{v}} F(0,2) = \overline{\nabla} F(0,2) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -\ln 2 & -1-\ln 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$$

$$= -\sqrt{2}\ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La derivata direzionale indica la pendenza della retta tangente nel punto (0,2) della funzione limitata al piano verticale con direzione v

Esercizio 4 (punti: ....../4)

(1) (2 punti) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2 y - 3y^3}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} & (x,y) \neq (2,0) \\ 0 & (x,y) = (2,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x+2,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\left(\cos^2\theta\sin\theta - 3\sin^3\theta\right)$$

$$|F| \to 0 \to F \to 0$$

$$0 \leq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \left| \underbrace{\cos^2\theta\sin\theta}_{[-1,1]} - \underbrace{3\sin^3\theta}_{[-3,3]} \right| \leq \lim_{\rho\to 0} 4\rho^2 = 0$$

$$[-4,4]$$

Il limite esiste e fa 0, quindi la funzione è continua in (2,0)

(2) (2 punti) Si trovi una parametrizzazione dell'arco di ellisse di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

che si trova nel secondo quadrante e si scrivano poi le equazioni parametriche della tangente alla curva in $P(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Verificare infine che tale retta tangente è ortogonale al gradiente di $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ calcolato nel punto P.

$$y = \sqrt{\frac{-x^2+4}{4}} \xrightarrow{y=0} x = \pm 2$$

$$\gamma(t) = \left(t, \sqrt{\frac{-t^2}{4}+1}\right) \quad t \in [-2, 0]$$

$$\gamma'(t) = \left(1, -\frac{t}{4\sqrt{\frac{-t^2}{4}+1}}\right)$$

$$\gamma(-1) = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \gamma'(-1) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$r_T = \gamma(-1) + s\,\gamma'(-1)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \left(-1+s, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}s\right)$$

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

$$\overline{\nabla} f(x,y) = (2x, 8y)$$

$$\overline{\nabla} f\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-2, 4\sqrt{3})$$

$$\left\langle \nabla f\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \gamma'(-1) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-2 \cdot 1 + 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$-2 + \frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 0$$

$$-2 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

La direzione tangente nel punto P è ortogonale al gradiente di f(P)