Insiemi produttivi

Esercizio 3.1. *Dimostrare che l'insieme* $\mathrm{REC} = \{ i \mid W_i \text{ ricorsivo} \}$ *è un insieme produttivo.*

$REC = \{ x \mid W_x \text{ ricorsivo} \}$

Dimostro che REC è produttivo riducendolo funzionalmente a $\overline{K} \leq REC \equiv K \leq \overline{REC}$

- $x \in K \Leftrightarrow g(x) \notin REC$ ($W_{g(x)}$ non ricorsivo) $\to K$
- $x \notin K \Leftrightarrow g(x) \in REC$ ($W_{g(x)}$ ricorsivo) $\nearrow \emptyset$, $\searrow \mathbb{N}$ Banale

Definiamo la funzione parziale ricorsiva psi:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \wedge y \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \overset{?}{\equiv} \begin{cases} \varphi_y(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

```
input(x,y)
stopx = false
stopy = false
costruisci phi_x
costruisci phi_y
while !stopx {
  esegui next step di phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    stopx = true
  }
}
while !stopy {
  esegui next step di phi_y(y)
  if phi_y(y) ha terminato {
    stopy = true
  }
}
return 1
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \psi(x,y)\downarrow \Leftrightarrow y \in K$

$\overset{\text{def } K}{\Rightarrow} \psi(x,y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_y(y)\downarrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(y) \Leftrightarrow \varphi_y(y)\downarrow$

$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = K$

$\overset{\text{def } REC}{\Rightarrow} g(x) \notin REC$

$$- x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$$

$$\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$$

$$\overset{\text{def REC}}{\Rightarrow} x \in REC$$

Quindi REC è produttivo.

Esercizio 3.2. *Sia* $A = \{\ x \mid \varphi_x(x) = 0\ \}$, *dimostrare che il suo complementare è un insieme produttivo.*

$$\bar{A} = \{x \mid \varphi_x(x) \neq 0\}$$

Bisogna dimostrare che $\bar{K} \leq \bar{A} \equiv K \leq A$ quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow$ Ha terminato con 0
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in \bar{A} \rightarrow$ Non ha terminato con 0

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 0
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \exists g \text{ totale ricorsiva}.\ \psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$$

Per riduzione funzionale:

$$- x \in K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\downarrow = 0$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \in A \equiv g(x) \notin \bar{A}$$

$$- x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$$

$$\overset{\text{smn}}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$$

$$\Rightarrow g(x) \notin A \equiv g(x) \in \bar{A}$$

Quindi il complemento di A è produttivo

Esercizio 3.4. *Sia* $A = \{ x \mid W_x = \emptyset \}$, *dimostrare che tale insieme è produttivo.*

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\bar{K} \preceq A \equiv K \preceq \bar{A}$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow W_x \neq \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow W_x = \emptyset$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\stackrel{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \stackrel{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\downarrow$

  $\stackrel{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

  $\stackrel{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N}$

  $\stackrel{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \stackrel{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$

  $\stackrel{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

  $\stackrel{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$

  $\stackrel{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi A è produttivo

Esercizio 3.5. *Sia* $A = \{ x \mid W_x \neq \mathbb{N} \}$, *dimostrare tale insieme è produttivo.*

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\overline{K} \preceq A \equiv K \preceq \overline{A}$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow W_x = \mathbb{N}$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow W_x \neq \mathbb{N} \rightarrow \emptyset$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{def\ \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\downarrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

$\overset{def\ W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N}$

$\overset{def\ g(x)}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \overset{def\ \psi}{\Rightarrow} \forall y.\ \psi(x,y)\uparrow$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y.\ \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

$\overset{def\ W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset$

$\overset{def\ g(x)}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi A è produttivo

Esercizio 3.6. *Dimostrare che l'insieme* $A = \{ x \mid |W_x| < \omega \}$ *è un insieme produttivo.*

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\overline{K} \leq A \equiv K \leq \overline{A}$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A \rightarrow |W_x| = \omega$ termina su tutti gli input
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A \rightarrow |W_x| < \omega$ termina su un insieme finito di input

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g$ totale ricorsiva . $\psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$

- $x \in K \overset{\text{def } K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\downarrow$

  $\overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y . \psi(x,y)\downarrow$

  $\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y . \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$

  $\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N} \Rightarrow |W_{g(x)}| = \omega$

  $\overset{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \notin A$

- $x \notin K \overset{\text{def } \psi}{\Rightarrow} \forall y . \psi(x,y)\uparrow$

  $\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y . \varphi_{g(x)}(y)\uparrow$

  $\overset{\text{def } W_{g(x)}}{\Rightarrow} W_{g(x)} = \emptyset \Rightarrow |W_{g(x)}| < \omega$

  $\overset{\text{def } g(x)}{\Rightarrow} g(x) \in A$

Quindi A è produttivo

Esercizio 3.7. *Sia* $B = \{ i \mid \exists y . \varphi_i(y)\downarrow \wedge \varphi_y(i)\downarrow \wedge \varphi_i(y) = \varphi_y(i) \}$ *dimostrare che il suo complementare è un insieme produttivo.*

$$\overline{B} = \{ i \mid \forall y . \varphi_i(y)\uparrow \vee \varphi_y(i)\uparrow \vee \varphi_i(y) \neq \varphi_y(i) \}$$

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$$\overline{K} \leq \overline{B} \equiv K \leq B$$

Quindi se:

$$- x \in K \Rightarrow g(x) \in B \rightarrow \exists y . \varphi_i(y)\downarrow = \varphi_y(i)\downarrow$$

$$- x \notin K \Rightarrow g(x) \notin B$$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, di seguito fornisco lo pseudocodice:

```
input(x,y)
costruisci phi_x
while true {
  esegui next step phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 1
  }
}
```

Siccome psi è parziale ricorsiva, allora si può applicare smn

$$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g \text{ totale ricorsiva} . \ \psi(x,y) = \varphi_{g(x)}(y)$$

$$- x \in K \overset{def K}{\Rightarrow} \varphi_x(x)\downarrow$$

$$\overset{def \psi}{\Rightarrow} \forall y . \psi(x,y)\downarrow$$

$$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y . \varphi_{g(x)}(y)\downarrow$$

$$\overset{y=g(x)}{\Rightarrow} \varphi_{g(x)}(g(x))\downarrow \quad (\exists y . \varphi_i(y)\downarrow = \varphi_y(i)\downarrow \wedge i = y)$$

$$\overset{def B}{\Rightarrow} g(x) \in B$$

$$- x \notin K \overset{def \psi}{\Rightarrow} \forall y . \psi(x,y)\uparrow$$

$$\overset{smn}{\Rightarrow} \forall y . \varphi_{g(x)}(y)\uparrow \Rightarrow \nexists i . \varphi_{g(x)}(i)\downarrow$$

$$\overset{def B}{\Rightarrow} g(x) \notin B$$

Quindi il complemento di B è produttivo

Esercizio 3.8. *Sia* $B = \{ \langle i, j \rangle \mid \exists x \,.\, \varphi_i(\varphi_j(x)) = x \}$, *dimostrare che il suo complementare è un insieme produttivo.*

$$\overline{B} = \{ \langle i, j \rangle \mid \forall x.\ \varphi_i(\varphi_j(x)) \neq x \}$$

Per dimostrare che l'insieme è produttivo bisogna ridurlo funzionalmente al complemento di K

$\overline{K} \preceq \overline{B} \equiv K \preceq B$

Quindi se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \in B$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \notin B$