Esame 21/06/2024

QUESITI DI TEORIA

A. Discutere le proprietà dei conduttori in equilibrio

Le proprietà dei conduttori in equilibrio sono:

1. Il campo all'interno di un conduttore è nullo. Se viene immerso in un campo esterno, le cariche positive si muovono nella direzione del campo, quelle negative nella direzione opposta e quindi si crea un campo indotto all'interno del conduttore che ha direzione opposta a quello esterno e di conseguenza si annullano.

2. Siccome il campo all'interno è nullo, il potenziale all'interno dei conduttori è costante

$$V - V_0 = \int_{r_0}^{r} \cancel{E}\, dr$$

$$V = \text{costante}$$

3. Siccome il campo all'interno è nullo, le cariche si distribuiscono solo sulla superficie

4. Il campo sulla superficie di un conduttore è ortogonale alla superficie e per il teorema di Coulomb vale:

$$E_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

B. Spiegare il significato della Legge di Lenz nella legge del flusso di Faraday

La legge di Lenz indica che la corrente indotta dalla variazione del flusso si oppone alla variazione del flusso magnetico. Più generalmente la legge di Lenz dice che l'effetto si oppone alla causa che l'ha generato.

C. Ricavare il collegamento tra seconda legge elementare di Laplace e Forza di Lorentz

La forza di Lorentz rappresenta la forza applicata su una carica:

$$dF_{Lor} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La seconda legge elementare di Laplace è la forza di Lorentz applicata su un gruppo di cariche:

$$dF_{Lap} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

ELETTROSTATICA

Si consideri un sistema di <u>gusci sferici</u> di raggi **R1=0.1cm, R2=0.9cm, R3=1cm** sulla cui superficie <u>interna R1</u> è depositata una densità di carica **σ=+2x10^{-10} C/m^2**

1. Applicare il teorema di Gauss – giustificando ogni passaggio – per calcolare il campo elettrico **E**. Disegnare il grafico **E(r)** e le linee di campo.

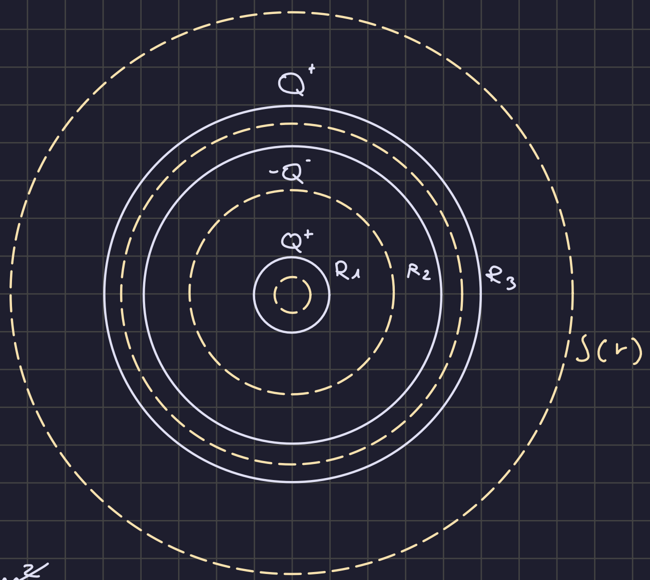
$R_1 = 10^{-3}$

$R_2 = 9 \cdot 10^{-3}$

$R_3 = 10^{-2}$

$\sigma = +2 \cdot 10^{-10} \frac{C}{m^2}$

$\sigma = \frac{Q}{Sup}$



$$
\begin{aligned}
Q &= \sigma \cdot Sup \\
&= 2 \cdot 10^{-10} \frac{C}{\cancel{m^2}} \cdot 4 \pi R_1^2 \cancel{m^2} \\
&= 8 \pi R_1^2 \cdot 10^{-10} \; C \\
&= 8 \pi \cdot 10^{-12} \; C \\
&= 2,5 \cdot 10^{-11}
\end{aligned}
$$

Il teorema di gauss dice che la circuitazione del campo elettrico su una superficie qualsiati è uguale al rapporto tra le cariche interne e la costante dielettrica del vuoto:

$$\oint_{Sup} \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Per calcolare il campo elettrico bisogna segliere una superficie su cui il campo è costante per poterlo tirare fuori dall'integrale, queste superfici si chiamano superfici Gaussiane. Come superfici Gaussiane scelgo dei gusci sferici di raggio r (S(r)) e siccome il campo è radiale so che sulla superficie sferica è costante.

$$\oint_{S(r)} E(r) \, dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{S(r)} dr = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La circuitazione di un guscio sferico è la sua superficie

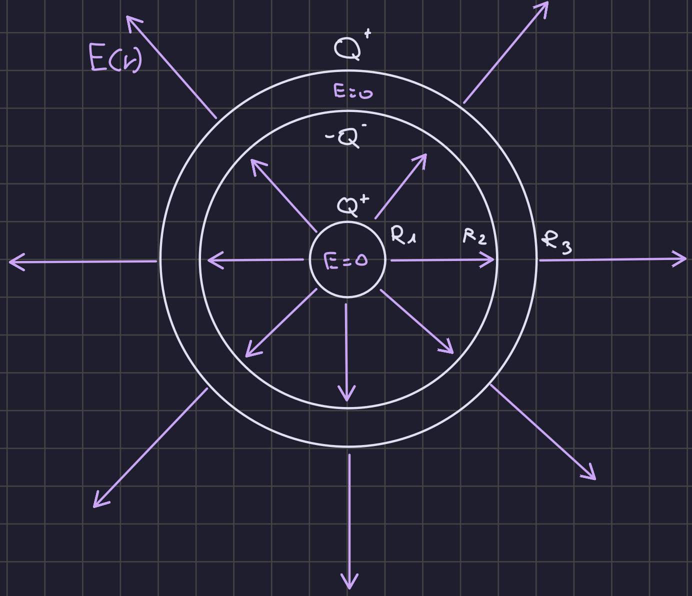
$$E(r) \, 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

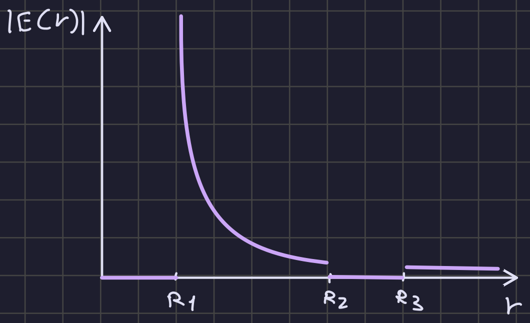
Le cariche in un conduttore si distribuiscono soltanto sulla superficie, quindi il campo all'interno del conduttore è nullo:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \lor R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} & \text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \lor r \geq R_3 \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Le linee di campo saranno radiali uscenti perchè la carica depositata sulla superficie R_1 è positiva:



L'andamento del campo è il seguente:



2. Ricavare l'espressione del potenziale elettrostatico **V(r)** nella regione esterna.

Il potenziale elettrostatico è l'energia necessaria per spostare una carica da un punto di riferimento ad un altro punto. Per calcolarlo prendo come punto di riferimento l'infinito, in modo da rendere il potenziale in quel punto nullo:

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\, dr$$

$$r_0 = \infty \rightarrow V(r_0) = 0$$

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r)\, dr$$

$$= -\int_{r_0}^{r} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\, dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r}^{r_0}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right)$$

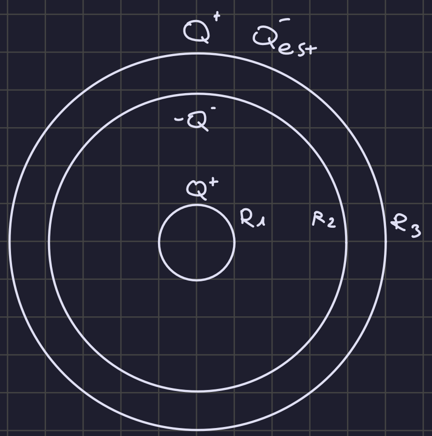
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+\cancel{\frac{1}{\infty}}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi r\varepsilon_0}\ [V] \quad \text{se } r > R_3$$

Successivamente, sul conduttore <u>esterno</u> (**R3**) viene depositata la quantità di carica **$Q=-10^{-10}$ C.**

3. calcolare la distribuzione di carica all'equilibrio

$Q_{est} = -10^{-10}$



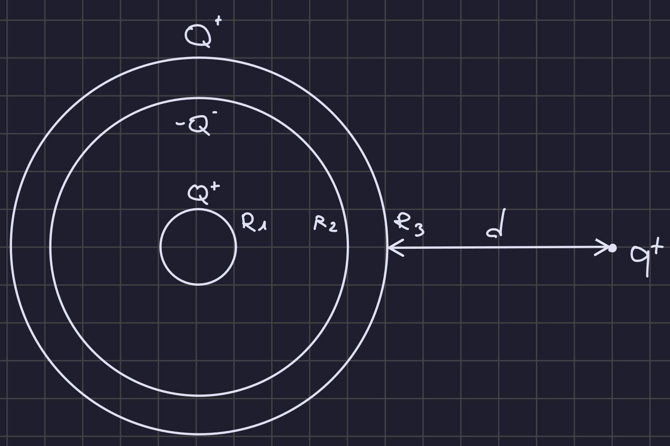
La carica aggiunta all'esterno non influisce sul sistema all'interno della sfera perchè agisce come gabbia di Faraday, però all'esterno le due cariche si sommano per il principio di sovrapposizione:

$$Q_{TOT} = Q + Q_{est}$$
$$= 2,5 \cdot 10^{-11} - 10^{-10}$$
$$= 25 \cdot 10^{-10} - 10^{-10}$$
$$= 2,4 \cdot 10^{-11}\ C$$

Le linee di campo rimangono uscenti perchè la somma delle due cariche è positiva

Una particella **q positiva - libera di muoversi -** viene posizionata a distanza **d** dalla superficie esterna.

4. ricavare il lavoro del campo elettrico (senza calcoli numerici).



Il lavoro è l'energia che serve per muovere una particella da un punto A ad un punto B

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = qE(r) \cdot dr$$

$$L_{AB} = \int_A^B qE(r)\, dr$$

$$= \int_{R_3+d}^{\infty} qE(r)\,dr$$

$$= q \int_{R_3+d}^{\infty} E(r)\,dr$$

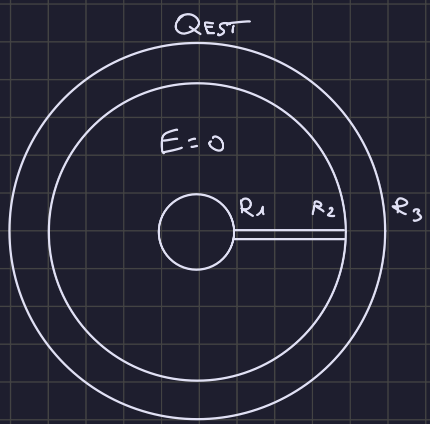
$$= q \int_{R_3+d}^{\infty} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\,dr$$

$$= q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_3+d} + \cancel{\frac{1}{\infty}}\right)$$

$$= q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3+d)} \quad [J]$$

Il conduttore interno R1 viene poi collegato elettricamente alla parete R2.

5. descrivere il sistema nella nuova situazione di equilibrio e calcolare l'energia del sistema.



Il campo nella concavità diventa nullo perchè tutte le cariche si distribuiscono sulla superficie R_1 e R_2 che sono collegate, all'esterno invece rimane soltanto la carica depositata esternamente

$$U_{TOT} = U_{int} + U_{EST}$$

$$= 0 + U_{EST}$$

$$U_{EST} = \int_{Vol} \mu_E \, d\tau \qquad \tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d\tau = 4\pi r^2$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \mu_E \, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r)\, 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{\cancel{16}\pi^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}} \varepsilon_0^2} \cancel{4\pi} \cancel{r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_3}^{\infty}$$

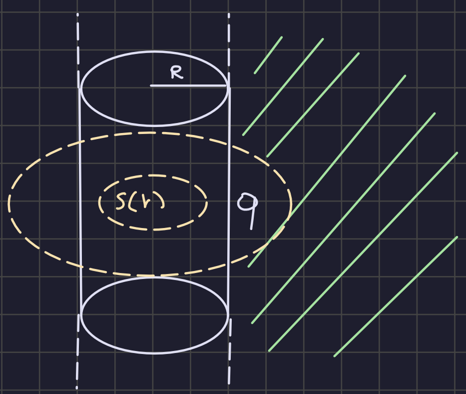
$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3} \quad [J]$$

$$= \frac{-10^{-20}}{8\pi\varepsilon_0 10^{-2}} \simeq -4,5 \cdot 10^{31} \ J$$

In una diversa situazione, si consideri un cilindro conduttore di lunghezza infinita e raggio R su cui è depositata una carica q per ogni metro della sua lunghezza
Lo spazio esterno è riempito di materiale dielettrico lineare di costante dielettrica **K=3**

6. calcolare il vettore spostamento elettrico **D** nello spazio e le cariche di polarizzazione.



$K = 3$

Applico il teorema di Gauss per i dielettrici

$$\oint_{S(r)} \vec{D}\, d\vec{S} = Q_{lib}$$

$$D(r) \oint_{S(r)} d\vec{S} = Q_{lib}$$

$$D(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\sigma_{pol}(r) = \frac{q(k-1)}{4\pi k r^2} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$