Esame 3/3/23

PARTE 1

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3x^2(y-1)^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio **intervallo** su cui tale soluzione è definita.

$$y' = 3x^2(y-1)^2$$

$$\frac{y'}{(y-1)^2} = 3x^2$$

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = 3\int x^2\,dx \qquad y-1 = u \qquad du = dy$$

$$\int u^{-2}\,du = x^3 + c$$

$$-\frac{1}{u} = x^3 + c$$

$$\frac{1}{1-y} = x^3 + c$$

$$1 - y = \frac{1}{x^3+c}$$

$$y = -\frac{1}{x^3+c} + 1$$

Applico la condizione iniziale

$$y(0) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$-1 = -\frac{1}{c} + 1$$

$$-2 = -\frac{1}{c}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = -\frac{1}{x^3 + \frac{1}{2}} + 1$$

$$y(0) = -\frac{1}{\frac{1}{2}} + 1$$
$$= -2 + 1$$
$$= -1 \quad \checkmark$$

$x^3 + \frac{1}{2} \neq 0$

$x^3 \neq -\frac{1}{2}$

$x \neq \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

L'intervallo più ampio è $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

Esercizio 2 (punti: ....../4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 2\sin 3t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$s^2 + 4 = 0$

$s^2 = -4$

$s_1 = -2i$

$s_2 = 2i$

$z = C_1 e^{-2it} + C_2 e^{2it} = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)$

Tramite il metodo di somiglianza trovo una soluzione specifica

$\bar{y} = a\cos(3t) + b\sin(3t)$

$\bar{y}' = -3a\sin(3t) + 3b\cos(3t)$

$\bar{y}'' = -9a\cos(3t) - 9b\sin(3t)$

Sostituisco nell'equazione originale

$-9a\cos(3t) - 9b\sin(3t) + 4a\cos(3t) + 4b\sin(3t) = 2\sin(3t)$

$\cos(3t)(-9a + 4a) + \sin(3t)(-9b + 4b) = 2\sin(3t)$

$\cos(3t)(-5a) + \sin(3t)(-5b) = 2\sin(3t)$

$$\begin{cases} -5a=0 \\ -5b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\bar{y} = -\frac{2}{5}\sin(3t)$$

$$y(t) = z + \bar{y} = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(3t)$$

$$y'(t) = 2C_1 \cos(2t) - 2C_2 \sin(2t) - \frac{6}{5}\cos(3t)$$

Applico le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=\frac{4}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2=2 \\ 2C_1-\frac{6}{5}=\frac{4}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2=2 \\ C_1=1 \end{cases}$$

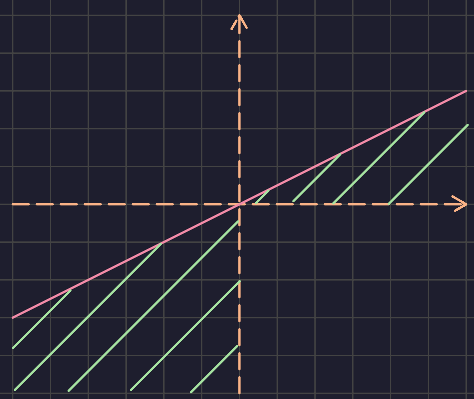
$$y(t) = \sin(2t) + 2\cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(3t)$$

Esercizio 3 (punti: ....../4)
Data la funzione

$$f(x,y) = ye^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

a) (2 punti) determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)

$$D = \begin{cases} x-2y \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x \\ x>0 \wedge y>0 \quad \vee \quad x<0 \vee y<0 \end{cases}$$



L'insieme è:
Illimitato perchè non esiste un circuito chiuso che contiene tutti i punti del dominio
Nè aperto nè chiuso perchè i punti x=0 y=0 non sono compresi nel dominio, mentre i punti y=1/2x sono compresi
Sconnesso perchè non tutti i segmenti che collegano due punti qualsiasi nel dominio hanno tutti i loro punti all'interno del dominio.

b) (2 punti) Calcolare la derivata direzionale di f in $P(3,1)$ nella direzione del versore $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$. Qual è la direzione di massima crescita per f?

$$F(x,y) = y e^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{x-2y}} e^{\sqrt{x-2y}} - \frac{1}{x} \\ e^{\sqrt{x-2y}} + \frac{-y}{\sqrt{x-2y}} e^{\sqrt{x-2y}} - \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(3,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e - \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(3,1) = \nabla F(3,1) \cdot \vec{v}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3} \quad -1 \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3e}{2\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{3e}{2\sqrt{10}}$$

La direzione di massima crescita é $\nabla F(x,y)$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua nell'origine?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$$

Coordinate polari

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2+\rho^2\cos\theta\sin\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{1+\cos\theta\sin\theta}$$

Il limite dipende da θ, quindi la funzione non é continua in $(0,0)$ per nessun valore di k

b) (2 punti) Si consideri l'arco di curva parametrizzato da

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ \ t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare la lunghezza dell'arco e scrivere le equazioni parametriche della retta tangente alla curva nel punto $P(\frac{\pi}{2} - 1, 1)$.

NOTA: è utile ricordare la seguente identità goniometrica

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\ \forall x \in [0, 2\pi]$$

$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos t}$$

$$= \sqrt{2(1-\cos t)}$$

$$= \sqrt{2^2 \frac{(1-\cos t)}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{t}{2}$$

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt \qquad u = \frac{t}{2} \qquad du = \frac{1}{2}\, dt$$

$$= 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4(1+1)$$

$$= 8$$

$$P=\gamma(t) \to \begin{cases} t-\sin t = \frac{\pi}{2}-1 \\ 1-\cos t = 1 \end{cases} \to \begin{cases} t-\sin t = \frac{\pi}{2}-1 \\ \cos t = 0 \end{cases} \to t=\frac{\pi}{2}$$

$$r_T(s) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) + s\,\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}-1, 1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1,1)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}-1+s \\ y = 1+s \end{cases} \to \begin{cases} s = x-\frac{\pi}{2}+1 \\ y = x-\frac{\pi}{2}+2 \end{cases} \to y = x-\frac{\pi}{2}+2$$

PARTE 2

Esercizio 5 (punti: . . . . . ./4)

b) (3 punti) Trovare, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, massimo e minimo assoluto (se esistono) di $f(x,y) = x^3 - y^2$ su

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$$

Massimo e minimo esistono per il teorema di Weierstrass siccome il dominio è chiuso e limitato

$$F(x,y) = x^3 - y^2$$

$$L(x,y,\lambda) = x^3 - y^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$= x^3 - y^2 - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2\lambda x \\ -2y - 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ y(-2-2\lambda) = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(3x-2\lambda) = 0 \\ y=0 \lor \lambda = -1 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3x-2\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(3x+2) = 0 \\ \lambda = -1 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \pm \frac{3}{2} \\ y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \lor x = -\frac{2}{3} \\ \lambda = -2 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ \lambda = -1 \\ y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Punti critici

$A = (1, 0, \frac{3}{2})$ $B = (-1, 0, -\frac{3}{2})$

$C = (0, 1, -2)$ $D = (0, -1, -2)$

$E = (-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, -1)$ $F = (-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}, -1)$

Per classificare i punti critici sostituisco i punti nella funzione $F(x,y) = x^3 - y^2$

$F(A) = F(1, 0) = 1$ Massimo assoluto

$F(B) = F(-1, 0) = -1$ Minimo assoluto

$F(C) = F(0, 1) = -1$ Minimo assoluto

$F(D) = (0, -1) = -1$ Minimo assoluto

$$F(E) = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{\sqrt{5}}{3}) = -\frac{2^3}{3^3} - \frac{5}{9} = \frac{-8-15}{27} = -\frac{23}{27}$$

$$F(F) = (-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{\sqrt{5}}{3}) = -\frac{23}{27}$$

b) (1 punto) Dimostrare che il punto $(0,0)$ è un punto di sella per f.

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

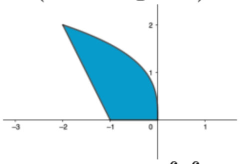
Hessiano semidefinito $\rightsquigarrow$ Bisogna studiare ulteriormente

$F(x,0) = x^3 \rightarrow$ Punto di flesso in $x=0 \rightarrow F(x,0) > 0 \quad \forall x<0$

$F(x,0) > 0 \quad \forall x>0$

Quindi $(0,0)$ é un punto di sella

Esercizio 6 (punti: ....../4)
Sia D la regione del piano limitata dalla curva $y = -\sqrt[3]{4x}$, dal segmento che unisce i punti $(-1,0)$ e $(-2,2)$ e dall'asse x (vedi figura).



Calcolare $\iint_D y \, dx \, dy$

Sapendo che l'area della regione D è 2, determinare la quota y del baricentro di D.

Retta passante per $(-1,0)$ e $(-2,2) \rightarrow y = -2x-2 \rightarrow x = -\frac{1}{2}y - 1$

$y = -\sqrt[3]{4x} \rightarrow x = -\frac{y^3}{4}$

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \ -\frac{1}{2}y+1 \leq x \leq -\frac{y^3}{4} \right\}$

$\iint_D y \, dxdy =$

$= \int_0^2 y \int_{-\frac{1}{2}y-1}^{-\frac{1}{4}y^3} dx \, dy$

$= \int_0^2 y \left(-\frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{2}y + 1 \right) dy$

$= \int_0^2 -\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + y \, dy$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2$

$= -\frac{2^5}{20} + \frac{2^3}{6} + 2$

$= -\frac{8}{5} + \frac{4}{3} + 2$

$= \frac{-24+20+30}{15} = \frac{26}{15}$

Area $= 2$

$$G_y = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\text{Area}} = \frac{26}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$$

Esercizio 7 (punti: ....../4)
Si consideri la regione

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le x-y\}$

Calcolare

$$\iiint_\Omega (x - \cos z)\, dx\, dy\, dz$$

e dare una possibile interpretazione fisica al risultato trovato.

$$\iiint_\Omega (x-\cos z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x - \cos z \; dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \left[xz - \sin z \right]_0^{x-y} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x x^2 - xy - \sin(x-y) \; dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y - x\frac{y^2}{2} - \cos(x-y) \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^3 - 1 + \cos(x) \; dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - x + \sin(x) \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{x^4}{8} - x + \sin(x) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{8} - 1 + \sin(1)$$

$$= -\frac{7}{8} + \sin(1)$$

Esercizio 8 (punti: ....../4)

Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x+y, y-x)$ e il cammino **chiuso** $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove $\gamma_1(t) = (t, t^2-1)$, con $t \in [1,2]$ (arco di parabola) e γ_2 è il segmento che unisce i punti $(2,3)$ e $(1,0)$.

a) (2 punti) Calcolare $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Il risultato ottenuto ci permette di affermare che il campo non è conservativo? (motivare la risposta).

$\vec{F}(x+y, y-x)$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$\gamma_1(t) = (t, t^2-1) \quad t \in [1,2] \qquad \gamma_1'(t) = (1, 2t)$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= (2-t, 3-3t) \quad t \in [0,1] \qquad \gamma_2'(t) = (-1, -3)$$

$$\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r} =$$

$$= \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$= \int_1^2 \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_0^1 \vec{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt$$

$$= \int_1^2 (t+t^2-1, t^2-1-t) \cdot \begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix} dt + \int_0^1 (5-4t, -2t+1) \cdot \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^2 t+t^2-1+2t^3-2t-2t^2\, dt + \int_0^1 -5+4t+6t-3\, dt$$

$$= \int_1^2 2t^3-t^2-t-1\, dt + \int_0^1 10t-8\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 + \left[\frac{10}{2}t^2 - 8t\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2^4}{2} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)\right] + [5-8]$$

$$= \frac{6 \cdot 2^3 - 2^4 - 24 + 2 + 6}{6} - 3$$

$$= \frac{16}{6} - 3$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{1}{3}$$

Il campo non è conservativo perchè il lavoro su un circuito chiuso dovrebbe essere nullo

b) (2 punti) Verificare che, in accordo con il teorema di Green, si ha

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy$$

dove F_1 e F_2 sono le componenti scalari del campo $\vec{F}$ e D è la regione limitata da γ.

?