Riepilogo

1. Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che:

$$\bigcup_n X_n = K \leftarrow \text{creativo}$$

I passi da fare sono:
1. Vanno definiti X_n al variare di n
2. Va dimostrato che X_n sono ricorsivi
3. Dimostrare che $\bigcup_n X_n = K$

$$K = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\}$$

Sappiamo che $\bigcup_n X_n = K$ corrisponde a $\exists n . y \in X_n$

Sappiamo anche che la terminazione è $\exists n.\ \varphi_x(x)$ termina in n passi

Quindi possiamo riscrivere X_n:

1. $X_n = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ termina in n passi}\}$

   Bisogna dimostrare che X_n è ricorsivo e che $\bigcup_n X_n = K$
   2. 3.

2. Dobbiamo costruire l'algoritmo per la funzione caratteristica di X_n

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_n \quad \text{se termina in n passi} \\ 0 & x \notin X_n \quad \text{se non termina in n passi} \end{cases}$$

```
input(x)
costruisci phi_x
for y = 0 to n - 1 {
  esegui prossimo passo di phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    // Significa che termina in y < n passi e quindi non in n passi
    return 0
  }
}
esegui prossimo passo di phi_x(x) // Passo n
if phi_x(x) ha terminato {
  // Significa che termina in y < n passi e quindi non in n passi
  return 1
} else {
  return 0
}
```

Questo è l'algoritmo per f_n che è totale, quindi X_n è ricorsivo

3. $\bigcup_n X_n = K$

$$\bigcup_n X_n \overset{\text{per def di } X_n}{=} \bigcup_n \{x \mid \varphi_x(x) \text{ termina in n passi}\}$$

$$= \{x \mid \exists n.\ \varphi_x(x) \text{ termina in n passi}\}$$

$$\text{def}\downarrow \rightarrow = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\} = K \quad \text{def } K$$

2. Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che

$$\bigcap_n X_n = \overline{K}$$

È diverso dall'esercizio precedente perchè:

$$\neg\left(\overline{\bigcup X_n = \overline{K}}\right) = \bigcap \overline{X}_n = \overline{K}$$

I passi da seguire sono:

a. Definire X_n

b. Dimostrare X_n ricorsivi

c. Dimostrare $\bigcap_n X_n = \overline{K}$

Sappiamo che $\bigcap_n$ corrisponde a $\forall n$

$$\overline{K} = \{x \mid \varphi_x(x)\uparrow\} = \{x \mid \forall n.\ \varphi_x(x) \text{ non termina in n passi}\}$$

a) $X_n = \{x \mid \varphi_x(x)$ non termina in n passi $\}$

Dobbiamo dimostrare che la funzione caratteristica è ricorsiva:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_n \text{ (non termina in n passi)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Forniamo l'algoritmo:

```
input(x)
  costruisci phi_x
  for y = 0 to n-1 {
    esegui next step di phi_x(x)
    if phi_x(x) ha terminato {
      // phi_x(x) ha terminato in y < n passi
      return 1
    }
  }
  esegui next step di phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    return 0
  } else {
    return 1
  }
```

Quindi X_n è ricorsivo

b) $\bigcap_n X_n \overset{\text{def di } \bigcap_n}{=} \{x \mid \forall n.\ x \in X_n\}$

$$\overset{\text{def } X_n}{=} \{x \mid \forall n.\ x \in \{y \mid \varphi_y(y) \text{ non termina in n passi}\}\}$$

$$\overset{\text{def } \in}{=} \{x \mid \forall n.\ \varphi_x(x) \text{ non termina in n passi}\}$$

$\overset{def \uparrow}{=} \{x \mid \varphi_x(x) \uparrow\} \overset{def \overline{K}}{=} \overline{K}$

3. Fornire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che

$$A = \{x \mid \bigcup_n \overline{X} \preceq W_x\} \text{ sia produttivo}$$

I passi da seguire sono

a. Definire X_n

b. Dimostrare che X_n è ricorsivo

c. Dimostrare che $A = \{x \mid \bigcup_n \overline{X} \preceq W_x\}$

d. Dimostrare che A è produttivo

Riguardo a $\bigcup_n \overline{X} \preceq W_x$ sappiamo che W_x è sempre RE per definizione, quindi $\bigcup_n X_n \neq$ produttivo

Abbiamo visto prima che l'unione di insiemi PUÒ ESSERE k (non sempre)

$$\bigcup_n \overline{X} \rightsquigarrow K \preceq W_x$$

Quindi W_x è RE ed è anche creativo

a) $\overline{X}_n = \{x \mid \varphi_x(x)$ termina in n passi $\}$

$X_n = \{x \mid \varphi_x(x)$ termina in n passi $\}$ Ricorsivo (visto nell'esercizio 1)

b) $\bigcup_n \overline{X}_n = K$ Visto nell'esercizio 1

c) $A = \{x \mid K \preceq_F W_x\}$

d) A è produttivo se $\overline{K} \preceq_F A$

Vogliamo che se:

- $x \in K \Rightarrow g(x) \notin A$ ovvero W_x non creativo $\Rightarrow$ ricorsivo $\to \emptyset$, $\to \mathbb{N}$
- $x \notin K \Rightarrow g(x) \in A$ ovvero $W_{g(x)}$ sia creativo $\to K$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \vee y \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è parziale ricorsiva, lo pseudocodice è il seguente:

```
input(x, y)
costruisci phi_x
costruisci phi_y
stopx = false
stopy = false

...
```

```
...

while !stopx and !stopy {
  esegui next step di phi_x(x)
  if phi_x(x) ha terminato {
    stopx = true;
  }
  esegui next step di phi_y(y)
  if phi_y(y) ha terminato {
    stopy = true;
  }
}
return 1
```

Siccome la funzione è parziale ricorsiva si può applicare smn:

$$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists g \text{ totale ricorsiva} . \ \varphi_{g(x)}(y) = \psi(x, y)$$

Dimostro la riduzione $\overline{K} \le_r A$

$$- \ x \in K \overset{def \ \psi}{\Longrightarrow} \forall y . \ \psi(x, y) \downarrow$$

$$\overset{smn}{\Longrightarrow} \forall y . \ \varphi_{g(x)}(y) \downarrow$$

$$\overset{def \ W_{g(x)}}{\Longrightarrow} W_{g(x)} = \mathbb{N}$$ Ricorsivo non creativo

$$\overset{def \ A}{\Longrightarrow} g(x) \notin A$$

$$- \ x \in K \overset{def \ \psi}{\Longrightarrow} \forall y . \ \psi(x, y) \downarrow \iff y \in K$$

$$\overset{smn}{\Longrightarrow} \forall y . \ \varphi_{g(x)}(y) \downarrow \iff y \in K$$

$$\overset{def \ W_{g(x)}}{\Longrightarrow} W_{g(x)} = K$$ creativo

$$\overset{def \ A}{\Longrightarrow} g(x) \in A$$

Quindi A è produttivo

4. Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che:

$$C = \{ x \mid \bigcap_n X_n \le_r W_x \}$$ sia ricorsivo

Per dimostare che un insieme sia ricorsivo si può ricondurre ad un insieme banale.

Riguardo a $\bigcap_n X_n \le_r W_x$ sappiamo che W_x è sempre RE.

Sappiamo anche che $\overline{K} \le_r W_x$ è sempre falso perchè implicherebbe che W_x sia produttivo e quindi non RE

Ci basta trovare X_n ricorsivi tale che $\bigcap_n X_n = \overline{K}$ (Visto nell'esercizio 2)

$$\Rightarrow C = \{ x \mid \bigcap_n X_n \le_r W_x \} = \{ x \mid \overline{K} \le_r W_x \} = \emptyset \Rightarrow$$ BANALE

5. Fornire una successione di funzioni parziali ricorsive ψ_n tali che $dom(\psi)$ sono RE non completi e che:

$$\bigcup_{n} dom(\psi_n) = \{x \mid 2x \in W_x\}$$

$\exists n$

$$= \{x \mid \varphi_x(2x)\downarrow\}$$

$\hookrightarrow \exists n.$ termina in n

Sappiamo che se generiamo dei ricorsivi sono anche RE non completi:

$$Ric \Rightarrow RE \text{ non completi}$$

I passi da seguire sono

a. Definire $X_n = dom(\psi_n)$

b. Dimostrare X_n ricorsivo

c. Mostrare $\bigcup_n X_n = \{x \mid \varphi_x(2x)\downarrow\}$

a) $X_n = \{x \mid \varphi_x(2x)$ termina in n passi $\}$

$\psi_n \,.\, X_n = dom(\psi_n)$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_n \iff \varphi_x(2x) \text{ termina in n passi} \\ \uparrow & \end{cases}$$

b) X_n ricorsivo (completare, analogo all'esercizio 1)

c) $\bigcup_n dom(\psi_n) \overset{def \cup}{=} \{x \mid \exists n.\ x \in dom\, \psi_n\}$

$$= \{x \mid \exists n.\ \varphi_x(2x) \text{ termina in n passi}\}$$

$$= \{x \mid \varphi_x(2x)\downarrow\}$$

6. Definire una successione di funzioni parziali ricorsive Ψ_n tale che $dom(\Psi_n)$ sono ricorsivi:

$$\bigcap_n dom(\Psi_n) = \{x \mid \varphi_x(2^x+2)\uparrow\}$$

$\forall n$

$\forall n$ non termina

I passi da seguire sono:

a. $X = dom(\Psi_n) = \{x \mid \varphi_x(2^x+2)$ non rermina in n passi$\}$

anche se il test è decidibile, visto che si chiede il dominio non si può scrivere una funzione totale perchè a quel punto il dominio è tutto N.

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_n \\ \uparrow & \text{oltrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \varphi_x(2^x+2) \text{ non termina in n passi} \\ \uparrow & \text{oltrimenti} \end{cases}$$

b. Dimostrare che X_n è ricorsivo (analogo all'esercizio 2)

c. $\bigcap_n X_n \overset{def\ \cap}{=} \{x \mid \forall n.\ x \in X_n\}$

$\overset{def\ X_n}{=} \{x \mid \forall n.\ \varphi_x(2^x+2)$ non termina in n passi $\}$

$\overset{def\ \uparrow}{=} \{x \mid \varphi_x(2^x+2)\uparrow\}$

7. Determinare una successione Ψ_n di funzioni parziali ricorsive tale che $range(\Psi_n)$ sono creativi e

$$\bigcap_n range(\Psi_n) = \{x^2 \mid W_x = \mathbb{N}\}$$

$\forall n$

$\forall n.\ n \in W_x\ (\varphi_n(n)\downarrow)$

I passi da seguire sono:

a. $X_n = range(\Psi_n) = \{x^2 \mid \varphi_x(n)\downarrow\} = \{x^2 \mid n \in W_x\}$

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} x^2 & se\ \varphi_x(n)\downarrow \\ \uparrow & \end{cases}$$

b. Dimostrare che X_n sono creativi

$b_1)$ $X_n \in Re$ ...

$b_2)$ $K \leq_r X_n$ ...

c. $\bigcap_n X_n \overset{def\ X_n}{=} \bigcap_n range(\Psi_n)$

$\overset{def\ \cap}{=} \{x^2 \mid \forall n.\ \varphi_x(n)\downarrow\}$

$\overset{def\ W_x}{=} \{x^2 \mid W_x = \mathbb{N}\}$

8. Fornire una successione di insiemi X_n produttivi tale che $\bigcap_n X_n \leq_r K$

$(K \text{ completo} \Rightarrow \forall x \text{ RE } \underset{(x \text{ Ric})}{} \quad x \leq K)$

$\bigcap_n X_n = \emptyset$ può essere una soluzione in quanto l'insieme vuoto si riduce a k perchè è ricorsivo e quindi anche RE

$$\emptyset \in Ric \Rightarrow \emptyset \in RE \Rightarrow \underset{K \text{ completo}}{\emptyset \leq_r K}$$

a) $X_n = \{x \mid W_x = [0, n]\} \quad \forall_m \neq n. \; W_x \neq [0, m]$

b) $\bigcap_n X_n = \emptyset$ perchè se $y \in X_n \Rightarrow W_y = [0, n] \neq [0, n+1] \Rightarrow y \notin X_{n+1}$

Vista la genericità di y e n, l'intersezione non ha elementi in comune: $\Rightarrow \bigcap X_n = \emptyset$

c) $\emptyset \leq_r K$ perchè k è completo

Una soluzione alternativa sarebbe potuta essere: $X_n = \{x \mid W_x = n\mathbb{N}\}$

oppure: $X_n = \{x \mid W_x = \{n\}^{\mathbb{N}}\}$ (potenze di n)