Esame parziale Zivcovich 24/04/25

1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy[1]

$$\begin{cases} y' + (\log t)y = \log t \\ y(e) = 2 \end{cases}.$$

(3pt.)

$$y' + (\ln t)y = \ln t$$

$$y' = \ln t\,(1-y)$$

$$\frac{-y'}{1-y} = \ln t$$

$$\int \frac{-y'}{1-y}\,dy = \int \ln t\,dt$$

$$-\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int 1 \cdot \ln t\,dt \rightarrow$$

Per parti
$f: \ln t \quad f': \frac{1}{t}$
$g': 1 \quad g: t$
$fg - \int f'g$

$$-\ln|1-y| = t\ln t - \int \frac{1}{t}\cdot t\,dt$$

$$-\ln|1-y| = t\ln t - t + c$$

$$-\ln|y-1| = t\ln t - t + c$$

$$y(e) = 2$$

$$-\ln|2-1| = e - e + c$$

$$-\ln|1| = c$$

$$\boxed{c = 0}$$

$$-\ln|y-1| = t\ln t - t$$

$$\ln|y-1| = -t(\ln t - 1)$$

$$|y-1| = e^{-t(\ln t - 1)}$$

Siccome la condizione di cauchy in $y(e)=2>1$ possiamo dire che anche la soluzione intorno a $x=e$ é >1 quindi possiamo togliere il valore assoluto

$$y-1=e^{-t(\ln t-1)}$$

$$y(t)=e^{-t(\ln t-1)}+1 \to$$ é la soluzione

2. Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy definita per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''-2y'-3y=-1+2e^{3x} \\ y(0)=-\dfrac{2}{3} \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

(4pt.)

$$s^2-2s-3=0$$

$$(s+1)(s-3)=0$$

$$s_1=-1$$

$$s_2=3$$

$$z=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

$$\bar{y}=a+bxe^{3x}$$

$$\bar{y}'=be^{3x}+3bxe^{3x}$$

$$\bar{y}''=3be^{3x}+3be^{3x}+9bxe^{3x}$$

$$3be^{3x}+3be^{3x}+9bxe^{3x}-2be^{3x}-6bxe^{3x}-3a-3bxe^{3x}=-1+2e^{3x}$$

$$xe^{3x}(9b-6b-3b)+e^{3x}(3b+3b-2b)-3a=-1+2e^{3x}$$

$$\begin{cases} 4b=2 \\ -3a=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}xe^{3x}$$

$$y(x)=z+\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}xe^{3x}$$

$$y'(x)=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{3}{2}xe^{3x}$$

$$\begin{cases} y(0)=-\frac{2}{3} \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ -c_1 + 3c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3c_2 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ c_1 = 3c_2 + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4c_2 = -\frac{4}{6} - \frac{5}{6} \\ c_1 = 3c_2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -\frac{3}{8} \\ c_1 = -\frac{9}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$y(x) = -\frac{5}{8} e^{-x} - \frac{3}{8} e^{3x} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x e^{3x}$$

4. Determina il dominio $\mathbb{D}$ della funzione

$$f(x, y) = \log(xy^2 + x^2 y)$$

e rappresentalo graficamente. (2pt.)

Stabilisci inoltre se $\mathbb{D}$ è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso e motiva la risposta. (1pt.)

$$F(x,y) = \ln(xy^2 + x^2 y)$$

$$xy^2 + x^2 y > 0$$

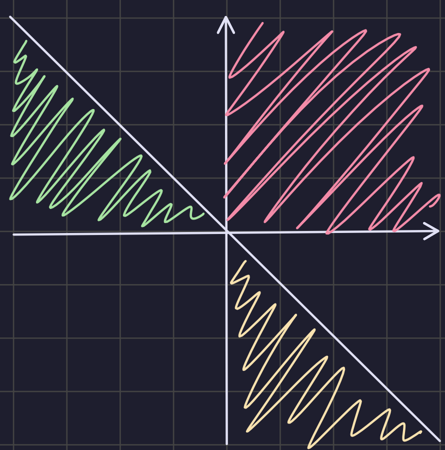
$$xy(y+x) > 0$$

$x > 0, \; y > 0, \; y > -x$

$x < 0, \; y < 0, \; y > -x$

$x > 0, \; y < 0, \; y < -x$

$x < 0, \; y > 0, \; y < -x$



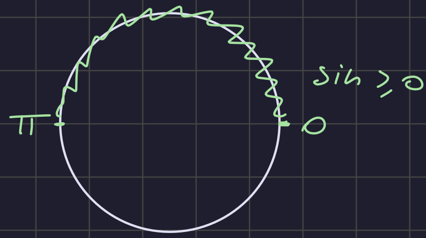
4. Determina il dominio $\mathbb{D}$ della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$$

e rappresentalo graficamente. (2pt.)

Stabilisci inoltre se $\mathbb{D}$ è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso e motiva la risposta. (1pt.)

$$\sin(x^2+y^2) \geq 0 \iff 2k\pi + 0 \leq x^2+y^2 \leq \pi + 2k\pi$$



$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 2k\pi \\ x^2+y^2 \leq \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$\mathbb{D}$