Esercizi su risposta libera e impulsiva

1. Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI)

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} - 5\frac{dv(t)}{dt} - 6v(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

e le seguenti condizioni inziali:

$$v(0^-) = 3 \qquad \frac{dv(0^-)}{dt} = 1.$$

(a) si calcoli la risposta libera nel tempo,

(b) si calcoli la risposta impulsica nel tempo.

a) Risposta libera

Equazione del sistema

$$v''(t) - 5v'(t) - 6v(t) = u'(t) + 5u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} v(0^-) = 3 \\ v'(0^-) = 1 \end{cases}$$

Equazione omogenea del polinomio caratteristico

$$P(s) = s^2 - 5s - 6s = 0$$

Soluzioni

$$s_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2} = 6 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1 \qquad r = 2$ (numero di soluzioni)

$\lambda_2 = 6 \qquad \mu_{1,2} = 1$ (molteplicitá)

Risposta libera generica

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_2 \cdot e^{6t} \cdot \frac{t^0}{0!}$$

$$= c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{6t}$$

Derivata della risposta libera

$$v(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{6t}$$

$$v'(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot (-1) + c_2 \cdot e^{6t} \cdot 6$$

$$= -c_1 \cdot e^{-t} + 6 c_2 \cdot e^{6t}$$

Calcolo dei coefficienti c_1 e c_2

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 \cdot e^{-0^-} + c_2 \cdot e^{6 \cdot 0^-} \\ v'(0^-) = -c_1 \cdot e^{-0^-} + 6 c_2 \cdot e^{6 \cdot 0^-} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 + c_2 \\ v'(0^-) = -c_1 + 6 c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0^-) = 3 \\ v'(0^-) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 + 6 c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 3 - c_2 \\ -3 + c_2 + 6 c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{17}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Risposta libera specifica

$$v_l(t) = \frac{17}{7} e^{-t} + \frac{4}{7} e^{6t}$$

b) Risposta impulsiva

Equazione del sistema

$$v''(t) - 5 v'(t) - 6 v(t) = u'(t) + 5 u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

Equazione omogenea del polinomio caratteristico

$$P(s) = s^2 - 5s - 6s = 0$$

Soluzioni

$\lambda_1 = -1 \qquad r = 2$ (numero di soluzioni)

$\lambda_2 = 6 \qquad \mu_{1,2} = 1$ (molteplicitá)

Risposta impulsiva generica

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$d_0 = 0$ perché il sistema non é proprio

$$= \left(d_1 \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^0}{0!} + d_2 \cdot e^{6t} \cdot \frac{t^0}{0!} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$= \left(d_1 \cdot e^{-t} + d_2 \cdot e^{6t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

Riscrivo l'equazione del sistema ponendo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$

$$v''(t) - 5v'(t) - 6v(t) = u'(t) + 5u(t)$$

$$\downarrow$$

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Calcolo delle derivate di $h(t)$

$$h(t) = \left(d_1 \cdot e^{-t} + d_2 \cdot e^{6t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$h'(t) = \delta_1(t) + \left(-d_1 \cdot e^{-t} + 6 d_2 e^{6t} \right) \cdot \delta_0(t)$$

↓ Sbagliato ↓

$$h''(t) = \delta_2(t) + \left(d_1 \cdot e^{-t} + 36 d_2 e^{6t} \right) \cdot \delta_1(t)$$

Sostituisco nell'equazione del sistema

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

$$\downarrow$$

$$\overset{h''}{\left[\delta_2(t) + \left(d_1 \cdot e^{-t} + 36 d_2 e^{6t} \right) \cdot \delta_1(t) \right]} - 5 \overset{h'}{\left[\delta_1(t) + \left(-d_1 \cdot e^{-t} + 6 d_2 e^{6t} \right) \cdot \delta(t) \right]}$$

$$-6 \overset{h}{\left[\delta(t) + \left(d_1 \cdot e^{-t} + d_2 \cdot e^{6t} \right) \cdot \delta_{-1}(t) \right]} = \delta_1(t) + 5\delta(t)$$

Valuto le funzioni in $t = 0^-$

$$\left[\delta_2(0^-) + \left(d_1 \cdot e^{-0^-} + 36 d_2 e^{6 \cdot 0^-} \right) \cdot \delta_1(0^-) \right] - 5 \left[\delta_1(0^-) + \left(-d_1 \cdot e^{-0^-} + 6 d_2 e^{6 \cdot 0^-} \right) \cdot \delta(0^-) \right]$$

$$-6 \left[\delta(0^-) + \left(d_1 \cdot e^{-0^-} + d_2 \cdot e^{6 \cdot 0^-} \right) \cdot \delta_{-1}(0^-) \right] = \delta_1(0^-) + 5\delta(0^-)$$

$$\left[\delta_2(0^-) + (d_1 + 36 d_2)\cdot \delta_1(0^-)\right] - 5\left[\delta_1(0^-) + (-d_1 + 6 d_2)\cdot \delta(0^-)\right]$$

$$-6\left[\delta(0^-) + (d_1 + d_2)\cdot \delta_{-1}(0^-)\right] = \delta_1(0^-) + 5\delta(0)$$

Sposto tutto a sinistra

$$\left[\delta_2(0^-) + (d_1 + 36 d_2)\cdot \delta_1(0^-)\right] - 5\left[\delta_1(0^-) + (-d_1 + 6 d_2)\cdot \delta(0^-)\right]$$

$$-6\left[\delta(0^-) + (d_1 + d_2)\cdot \delta_{-1}(0^-)\right] - \delta_1(0^-) - 5\delta(0^-) = 0$$

$$\delta_2(0^-) + (d_1 + 36 d_2)\cdot \delta_1(0^-) - 5\delta_1(0^-) - 5(-d_1 + 6 d_2)\cdot \delta(0^-)$$

$$-6\delta(0^-) - \cancel{6(d_1+d_2)\,\delta_{-1}(0^-)} - \delta_1(0^-) - 5\delta(0^-) = 0$$

tolgo il gradino perché in $t=0^-$ fa 0

$$\delta_2(0^-) + (d_1 + 36 d_2)\cdot \delta_1(0^-) - 5\delta_1(0^-) - 5(-d_1 + 6 d_2)\cdot \delta(0^-) - 6\delta(0^-) - \delta_1(0^-) - 5\delta(0^-) = 0$$

$$\delta_2(0^-) + (d_1 + 36 d_2)\cdot \delta_1(0^-) - 6\delta_1(0^-) - 5(-d_1 + 6 d_2)\cdot \delta(0^-) - 11\delta(0^-) = 0$$

Raccolgo per $\delta(0), \delta_1(0), \dots, \delta_n(0)$ che sono linearmente indipendenti

$$\delta_2(0^-) + \left[(d_1 + 36 d_2) - 6\right]\delta_1(0^-) + \left[-5(-d_1 + 6 d_2) - 11\right]\delta(0^-) = 0$$

Risolvo il sistema

$$\begin{cases} \delta_2(0^-) = 0 \\ \left[(d_1 + 36 d_2) - 6\right]\delta_1(0^-) = 0 \\ \left[-5(-d_1 + 6 d_2) - 11\right]\delta(0^-) = 0 \end{cases}$$