

Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

Fabio Irimie

1° Semestre 2024/2025

Indice

1	Concetti base	2
1.1	Tipi di segnali	2
1.2	Rappresentazione dei sistemi	3
2	Notazioni	4
3	Sistemi	6
3.1	Approccio classico	6
3.2	Approccio moderno	6
3.3	Obsolescenza	6
3.4	Causalità	7
3.5	Stabilità	7
3.5.1	Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)	8
3.5.2	Stabilità Asintotica	9
4	Modello di segnali	10
5	Funzioni in C	12
5.1	Funzione a variabili complesse	12
5.2	Funzioni complesse	14
5.3	Funzioni polinomiali	15
5.3.1	Risoluzione	15
6	Segnali	15
6.1	Segnali continui	15
6.1.1	Sinusoidale	16
6.1.2	Esponenziali reali	17
6.1.3	Esponenziali complessi	18
6.2	Segnali discreti	20
6.2.1	Sinusoidale	20
6.2.2	Esponenziali Reali	21
6.3	Rappresentazione	23

1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

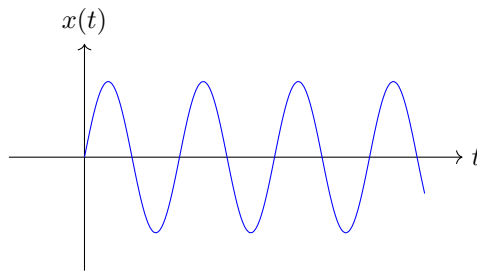


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

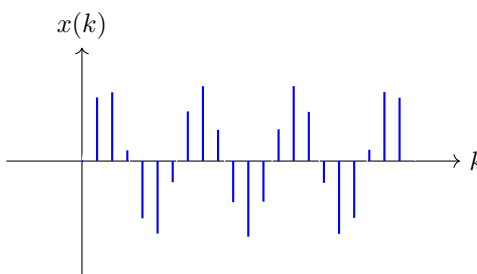


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

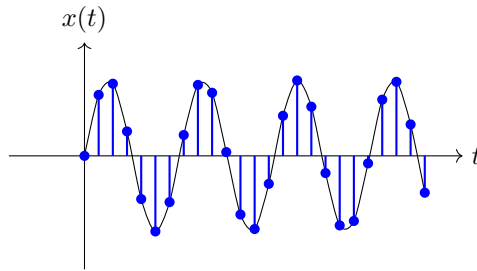


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

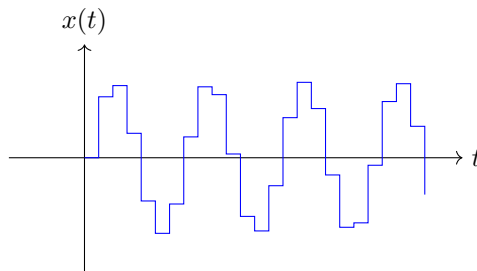


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni (x, y) .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale $(x, y)^3$ per rappresentare ogni colore (R,G,B).

1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

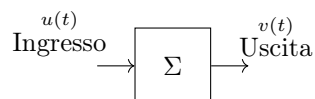


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

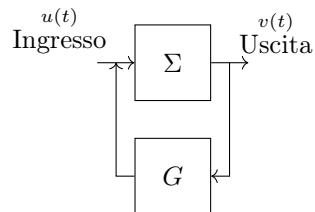


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1. t, τ, t_i : tempo continuo
2. k : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se $v_1(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t)$ e $v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_2(t)$ allora $v_1(t) + v_2(t)$ è l'uscita del sistema per $u_1(t) + u_2(t)$.
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.

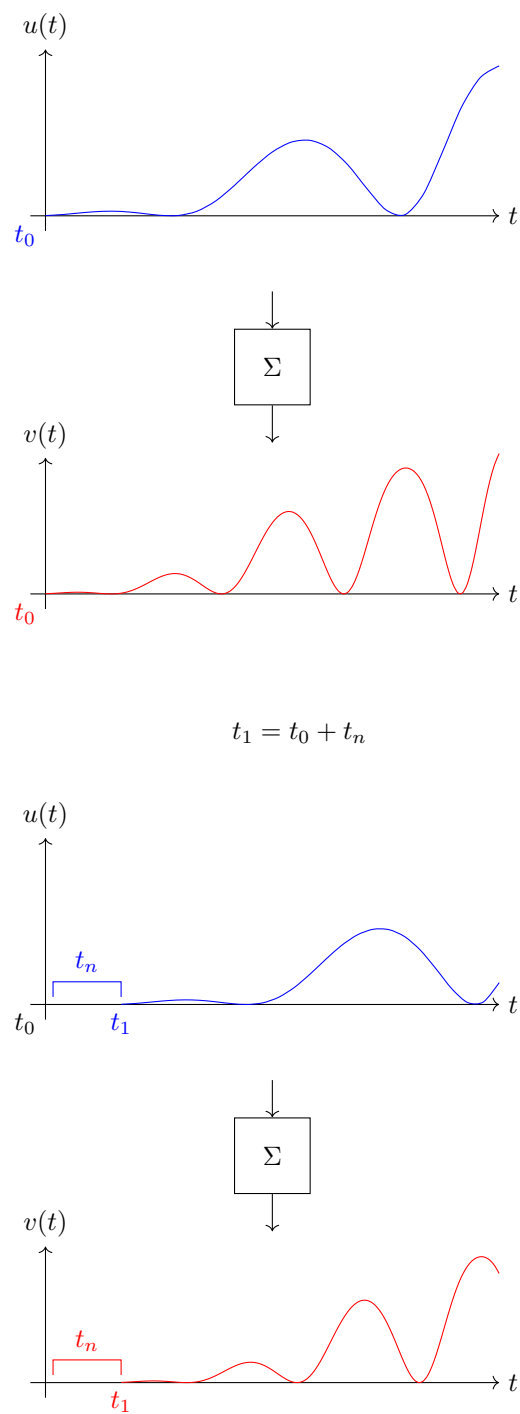


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

3 Sistemi

3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:

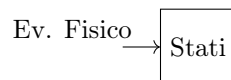


Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.

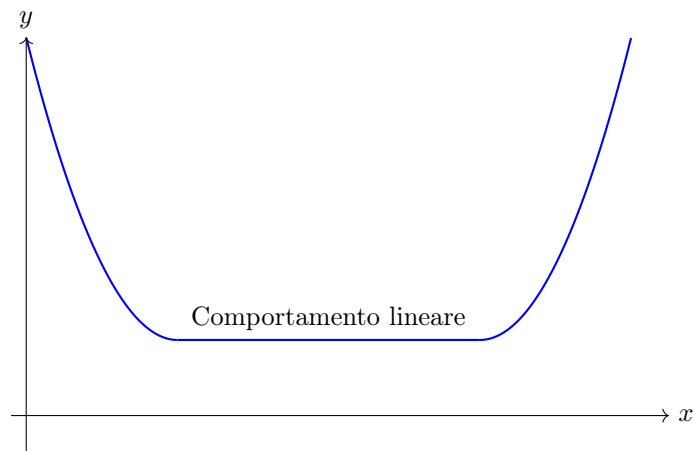


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

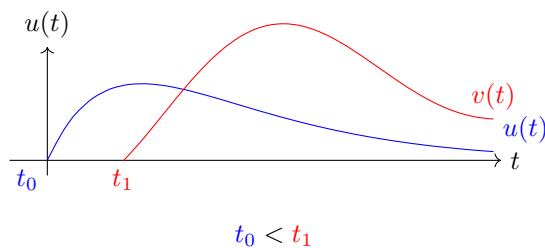


Figura 10: Esempio di causalità

3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

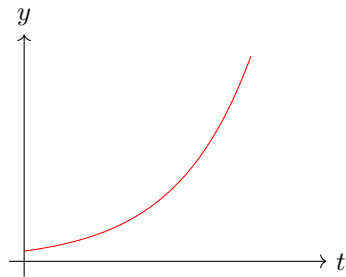


Figura 11: Sistema instabile

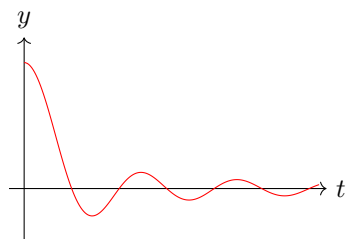


Figura 12: Sistema stabile

3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con $M, N \in \mathbb{R}$ non per forza uguali

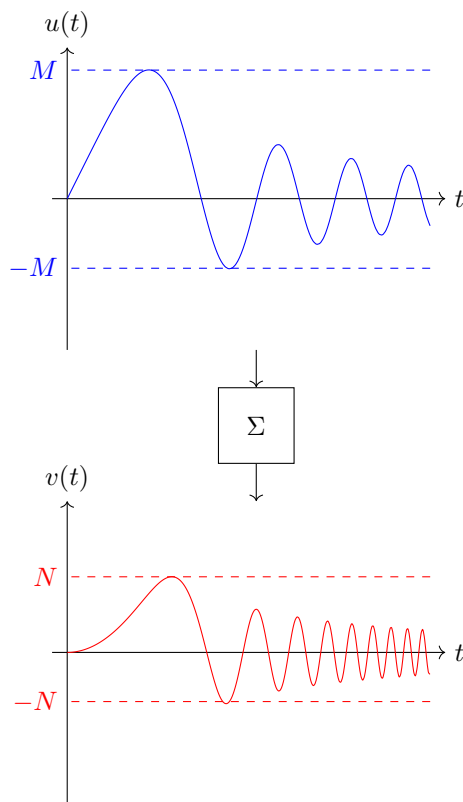


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

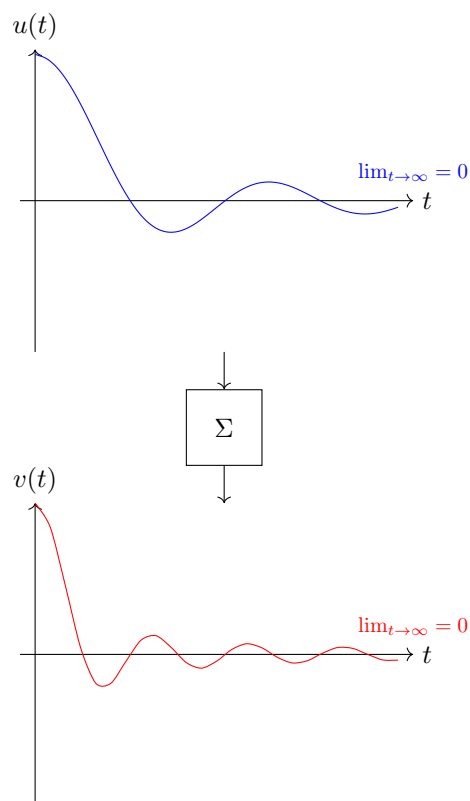


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

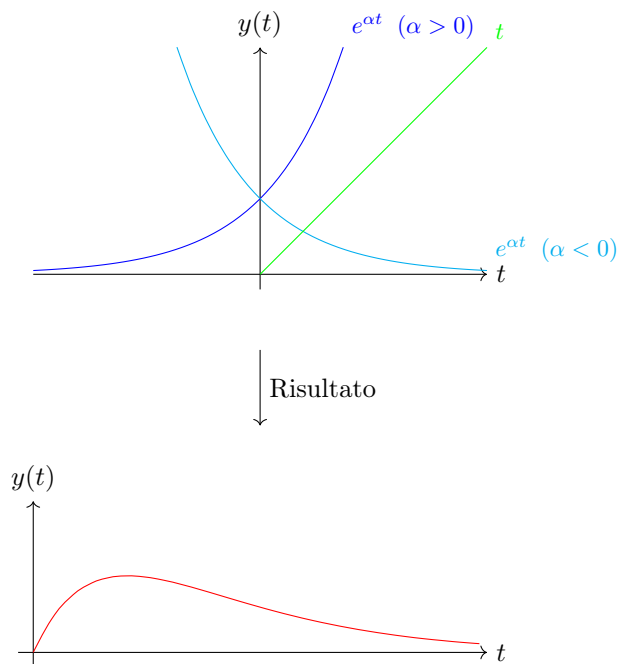


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con $l = 1$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con $\alpha < 0$ il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con $l = 2$:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome $\alpha \in \mathbb{C}$ si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

λ è la parte reale

$j\omega$ è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Definizione 4.1 (Complesso coniugato). A ogni numero complesso è associato un coniugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

5 Funzioni in C

5.1 Funzione a variabili complesse

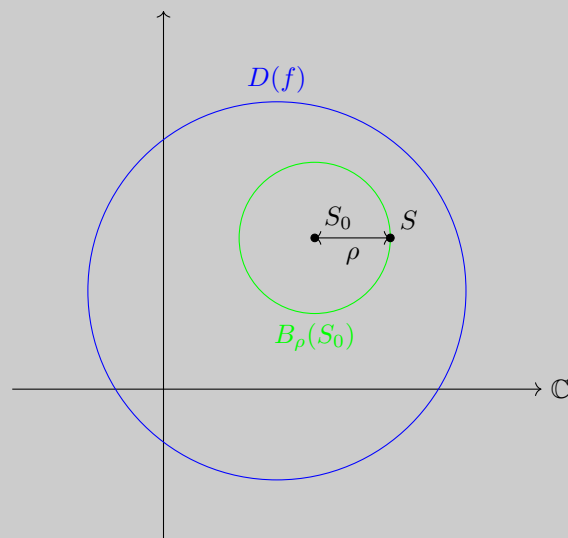
Definizione 5.1 (Funzione a variabile complessa). Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

Definizione 5.2 (Punto interno). Un punto S_0 appartenente a un intorno $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ è interno a $D(f)$ se e solo se esiste un disco $B_\rho(S_0)$ di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$ centrato in S_0 tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi $D(f)$ è un dominio e $B_\rho(S_0)$ è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$

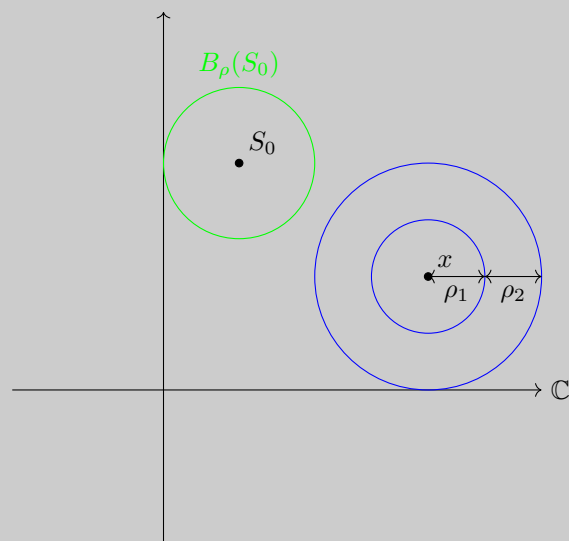


Definizione 5.3 (Insieme aperto). È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

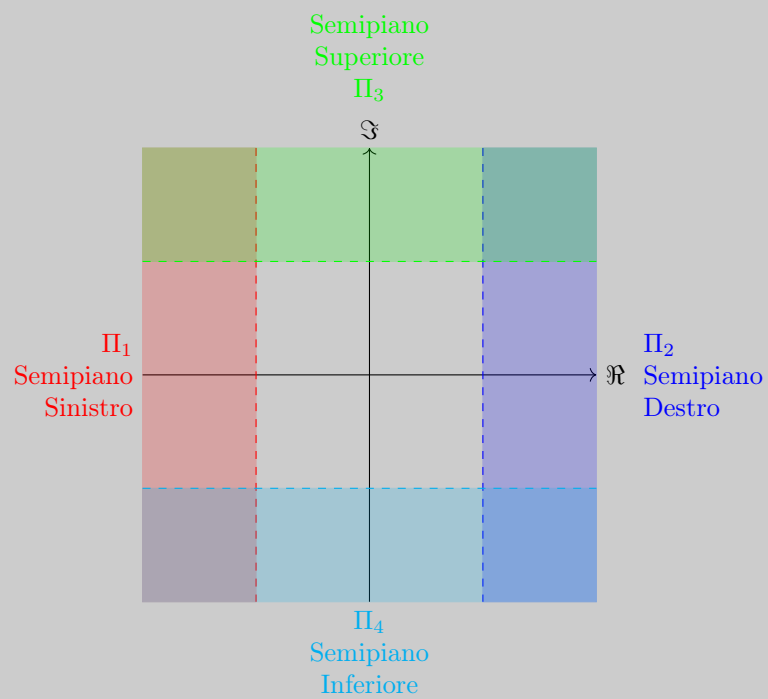
Ad esempio:

- insieme \mathbb{C}
- insieme \emptyset
- i dischi in un punto S_0 , $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto x ,

$$\{S \in \mathbb{C}, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$



- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$

- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad k, n \in \mathbb{Z}$ (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad S, S_0 \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{Z}$ (Serie di potenze)

5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con $n = 2$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con $n = 3$:

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

Teorema 5.1 (Teorema fondamentale delle radici). Ogni polinomio $P(S)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^r (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:

s_r sono delle radici

μ_r sono le molteplicità delle radici

a_n è il coefficiente del polinomio

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$$

6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

6.1 Segnali continui

$$t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- ω è la frequenza $f = \frac{1}{T}$ (T = periodo)
- ϕ è la fase

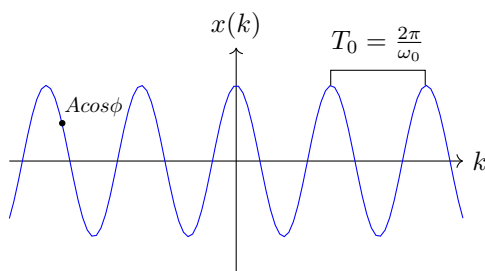


Figura 16: Funzione sinusoidale

- **Periodico**

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\omega_0(t - t_0)] = A \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta \phi})$$

$$A \cos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale assume la seguente forma:

$$A = \cos(\omega_0 t)$$

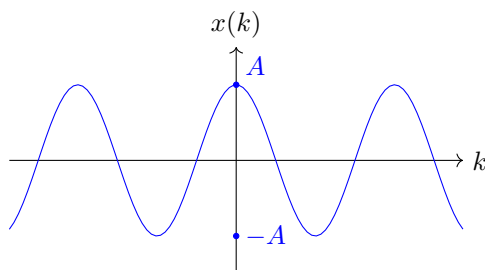


Figura 17: Funzione coseno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A\sin(\omega_0 t) \\ A\cos(\omega_0(t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$

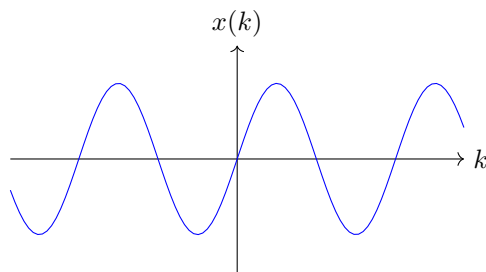


Figura 18: Funzione seno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

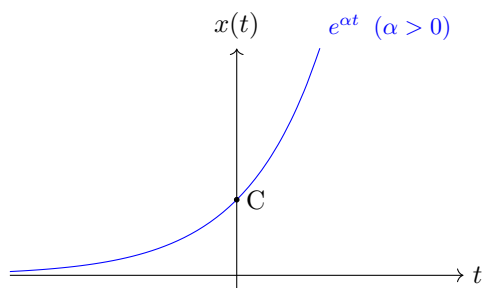


Figura 19: Esempio di segnale

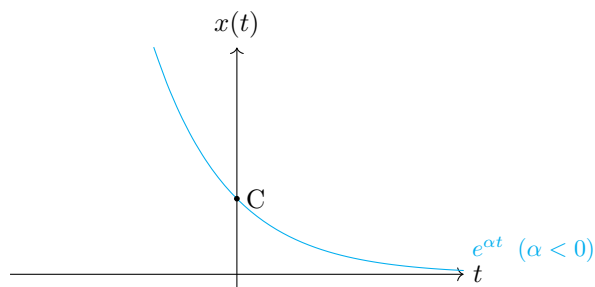


Figura 20: Esempio di segnale

- Shift Temporale

$$C e^{\alpha(t+t_0)} = C e^{\alpha t} \cdot \underbrace{C e^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = C e^{\alpha t}$$

$$C = |c| e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_o \text{ (cartesiana)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_o)t} = \\ &= |c| e^{rt} \cdot e^{j(\omega_o t + \Theta)} \text{ (Eulero)} \end{aligned}$$

Definizione 6.1 (Eulero). La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_o t + \Theta)} = \cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta)$$

$$x(t) = |c| e^{rt} \cdot (\cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta))$$

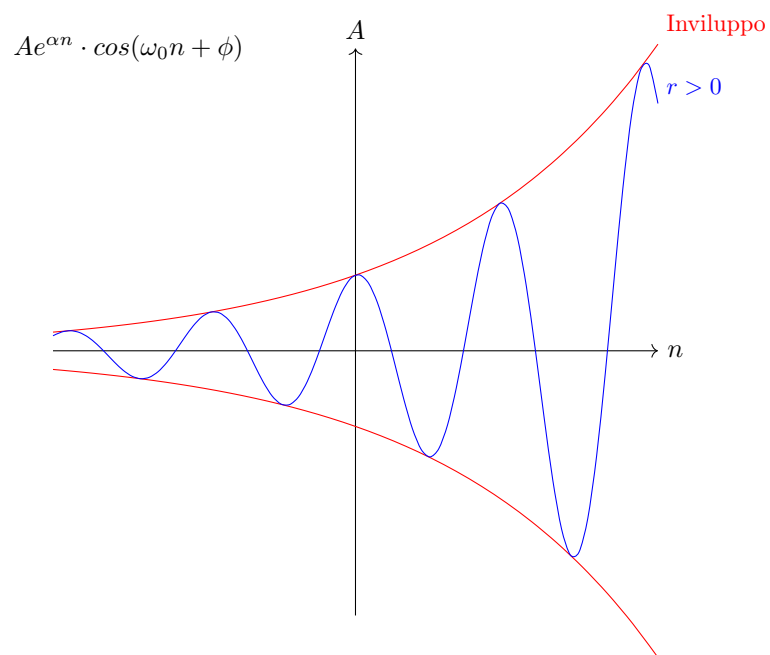


Figura 21: Esponenziale sinusoidale continuo con $r > 0$

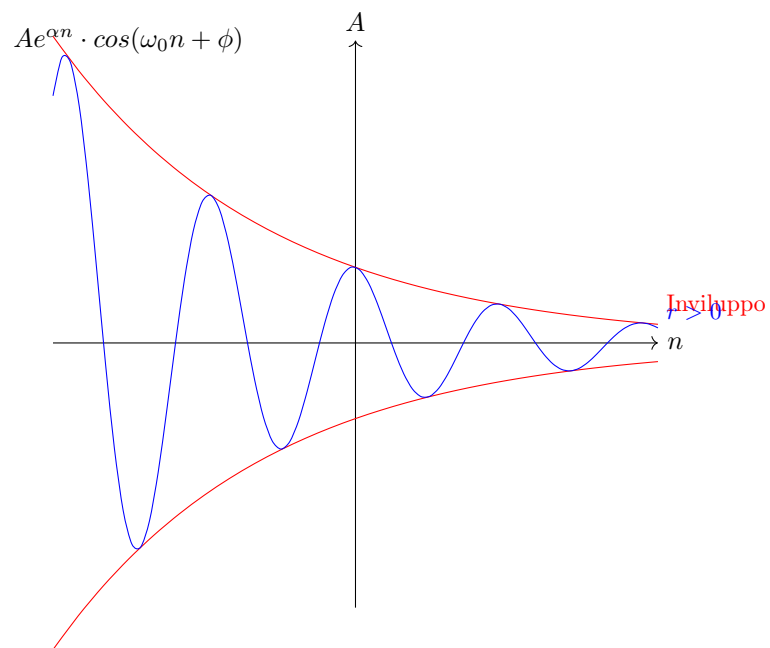


Figura 22: Esponenziale sinusoidale continuo con $r < 0$

6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza
- Ω_0 è la frequenza $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$
- ϕ è la fase

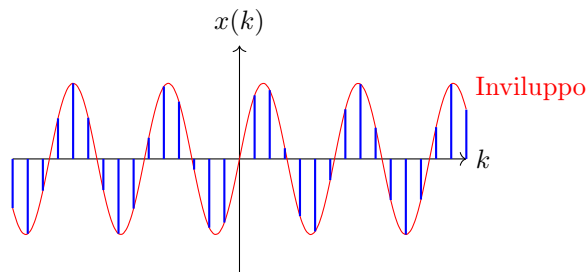


Figura 23: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] = A \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta\phi})$$

- Se $\phi = 0$ Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] \stackrel{?}{=} A \cos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove ϕ è il rapporto tra ϕ e Ω_0 è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

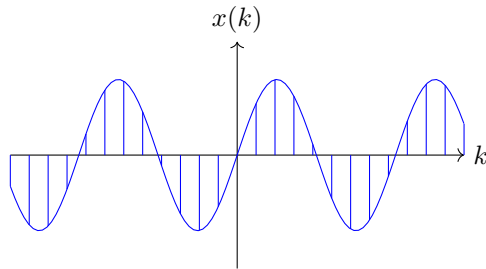


Figura 24: Calcolo del cambio di fase

Esempio 6.1.

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m = 1)$$

Esempio 6.2.

$$\phi = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{1}{6} = \Omega_0 = \frac{1}{3}\pi$$

6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^\beta; \quad C, \alpha \in \mathbb{R}$$

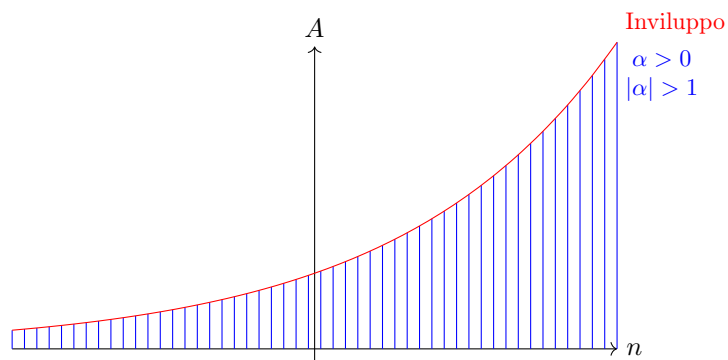


Figura 25: Esponenziale reale con $\alpha > 0$ $|\alpha| > 1$

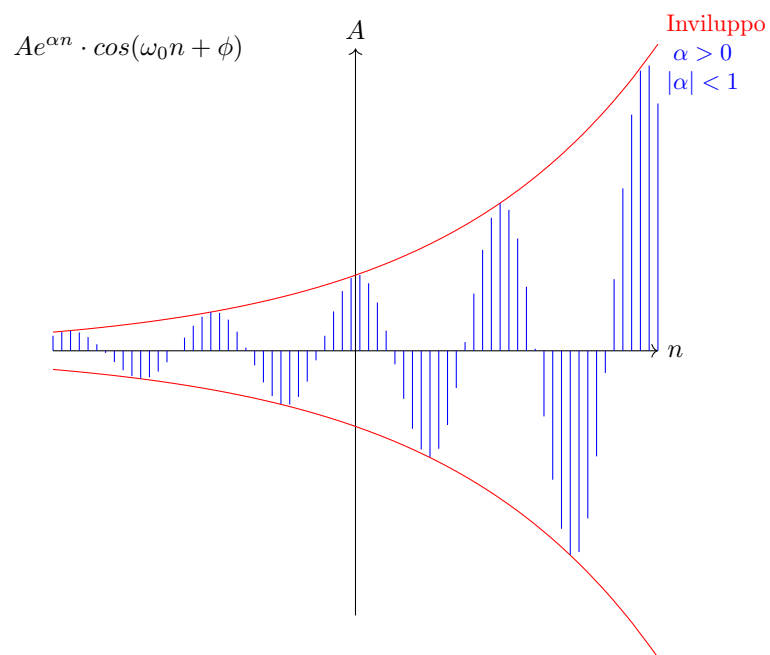


Figura 26: Esponenziale sinusoidale con $\alpha > 0$ $|\alpha| < 1$

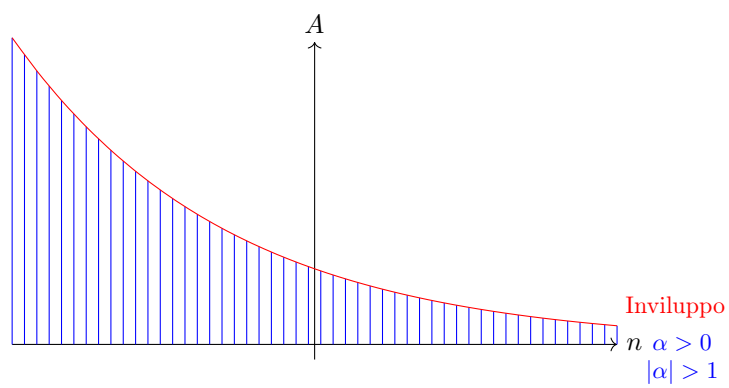


Figura 27: Esponenziale reale con $\alpha > 0$ $|\alpha| < 1$

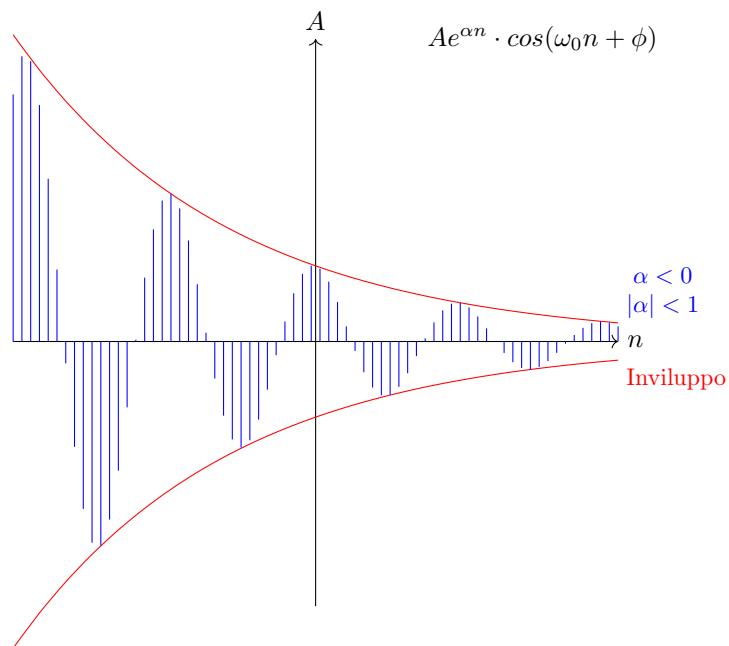


Figura 28: Esponenziale sinusoidale con $\alpha < 0$ $|\alpha| < 1$

6.3 Rappresentazione

I segnali che appartengono all'insieme dei complessi sono tridimensionali e sono rappresentati in 2 assi cartesiani diversi, che mostrano lo stesso segnale, ma da 2 punti di vista differenti. Il segnale viene generato da un punto che continua a girare periodicamente su una circonferenza proiettando su entrambi gli assi il suo valore.

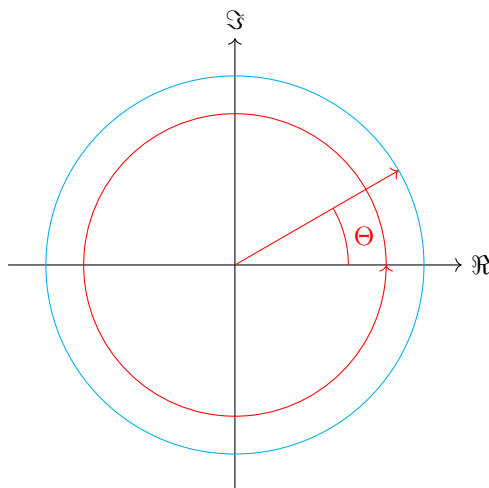


Figura 29: Circonferenza di proiezione

La proiezione sull'asse dei reali è la parte reale del segnale:

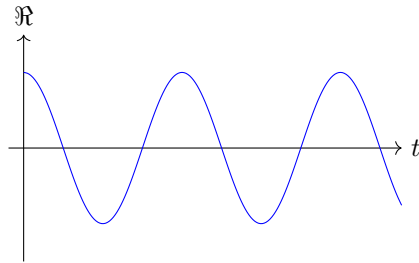


Figura 30: Proiezione su asse reale

La proiezione sull'asse degli immaginari è la parte immaginaria del segnale ed è traslata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla parte reale:

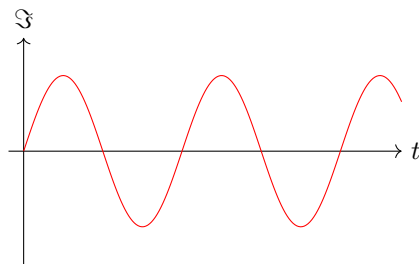


Figura 31: Proiezione su asse immaginario

In 3 dimensioni diventa:

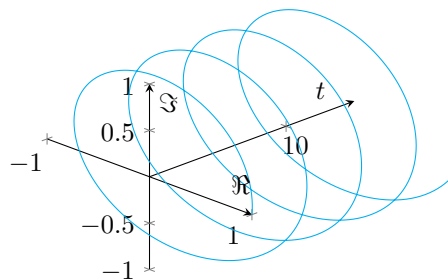


Figura 32: Circonferenza di proiezione in 3D