Esame 6/9/2023

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + x + y + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio **intervallo** su cui tale soluzione è definita.

$$y' = 1 + x + y + xy$$

$$y' = 1 + x + y(1+x)$$

$$y' = (1+x)(1+y)$$

$$\frac{y'}{1+y} = 1+x$$

$$\int \frac{1}{1+y}\, dy = \int 1+x\, dx$$

$$\ln|1+y| = x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$1+y = e^{x+\frac{1}{2}x^2+c}$$

$$y = e^{x+\frac{1}{2}x^2+c} - 1$$

$$y(0) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$e^c - 1 = 1$$

$$e^c = 2$$

$$c = \ln 2$$

$$y(x) = e^{x+\frac{1}{2}x^2+c} - 1$$

$$y(0) = e^{0+0+c} - 1$$

$$= e^{\ln 2} - 1$$

$$= 2 - 1 = 1 \checkmark$$

L'intervallo più ampio é $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 2 (punti: ....../4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 7 + 2t + e^{-t} \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$s^2 - 3s + 2 = 0$

$(s-2)(s-1) = 0$

$s_1 = 1$

$s_2 = 2$

$z = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$

$\bar{y} = a + bt + ct^2 + de^{-t}$

$\bar{y}' = b + 2ct - de^{-t}$

$\bar{y}'' = 2c + de^{-t}$

$2c + de^{-t} - 3b - 6ct + 3de^{-t} + 2a + 2bt + 2ct^2 + 2de^{-t} = 7 + 2t + e^{-t}$

$(2c - 3b + 2a) + t(-6c + 2b) + t^2(2c) + e^{-t}(d + 3d + 2d) = 7 + 2t + e^{-t}$

$$\begin{cases} 2c - 3b + 2a = 7 \\ -6c + 2b = 2 \\ c = 0 \\ 6d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 + 2a = 7 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$\bar{y} = 5 + t + \frac{1}{6} e^{-t}$

$y(t) = z + \bar{y} = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + 5 + t + \frac{1}{6} e^{-t}$

$y'(t) = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} + 1 - \frac{1}{6} e^{-t}$

$$\begin{cases} y(0)=5 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} C_1+C_2=-\frac{1}{6} \\ C_1+2C_2=\frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1=-C_2-\frac{1}{6} \\ -C_2-\frac{1}{6}+2C_2=\frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1=-\frac{1}{2} \\ C_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

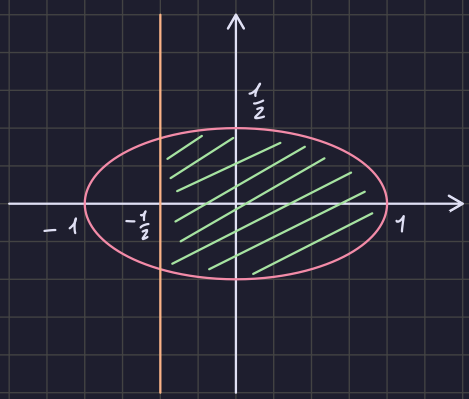
$$y(t)=-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}+5+t+\frac{1}{6}e^{-t}$$

Esercizio 3 (punti: . . . . . . /4)
Data la funzione

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-4y^2}-\sqrt{2x+1}$$

a) (2 punti) determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)

$$D=\begin{cases} 1-x^2-4y^2\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+(2y)^2\leq 1 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$



L'insieme è limitato, chiuso e connesso

b) (2 punti) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P(0,\frac{1}{4})$ in direzione $\vec{v}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.
Qual è il valore massimo di $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P)$ al variare di $\vec{v}$?

$$F(x,y)=\sqrt{1-x^2-4y^2}-\sqrt{2x+1}$$

$$\nabla F(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-4y^2}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ -\frac{4y}{\sqrt{1-x^2-4y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla F\left(0,\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\left(0,\frac{1}{4},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right)=\nabla F(x,y)\cdot\vec{v}$$

$$=\left(-1 \quad -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

Il valore massimo di $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}$ é quando $\vec{v}$ é nella stessa direzione del gradiente e vale: $\|\nabla F(0,\frac{1}{4})\|$

$$\left\|\nabla F\left(0,\frac{1}{4}\right)\right\|=\sqrt{1+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

a) (2 punti) La funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|y|}\sin(xy)}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$?

Suggerimento: prendere in considerazione la restrizione di f alla parabola di equazione $y=x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|y|}\sin(xy)}{x^4+y^2}$$

Lungo $y=x^2$ Lungo $y=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x^3)}{2x^4}\neq\lim_{y\to 0}\frac{0}{x^4}=0$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

Il limite non esiste, quindi la funzione non é continua in $(0,0)$

b) (2 punti) Data la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t),\ t \in [0,\ \tfrac{\pi}{2}]$$

scrivere le equazioni parametriche della retta tangente e della retta normale a γ nel suo punto T di coordinate $(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4})$.

$$\gamma(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t) \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\gamma'(t) = (-2\cos t \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$T = \gamma(t) \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \gamma(T) = \gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\gamma'(T) = \gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$r_T(s) = \gamma(T) + s\,\gamma'(T)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 0$$

Direzione normale

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{3}}t \\ b = t \end{cases} \rightarrow t \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_T(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} + s\sqrt{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

PARTE 2

Esercizio 5 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y - x - y$.

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 2yx - 1 \\ x^2 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} yx = \frac{1}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{1}{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Punti critici

$A = (1, \frac{1}{2})$ $B = (-1, -\frac{1}{2})$

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(H_F(A) - \lambda I = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$H_F(A)$ Indefinito

A sella

$$H_F(B) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(H_F(B) - \lambda I = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \begin{cases} \frac{+1+\sqrt{17}}{2} \\ \frac{+1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

HF(B) indefinita

B sella

b) (2 punti) Calcolare (se esistono) massimo e minimo assoluto della funzione f su

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$$

$$F(x,y) = x^2y - x - y \qquad xy = 2$$

$$\downarrow \qquad y = \frac{2}{x} \qquad x \neq 0$$

$$F(x) = x^2 \cdot \frac{2}{x} - x - \frac{2}{x}$$

$$= 2x - x - \frac{2}{x}$$

$$= x - \frac{2}{x}$$

$$F'(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$$

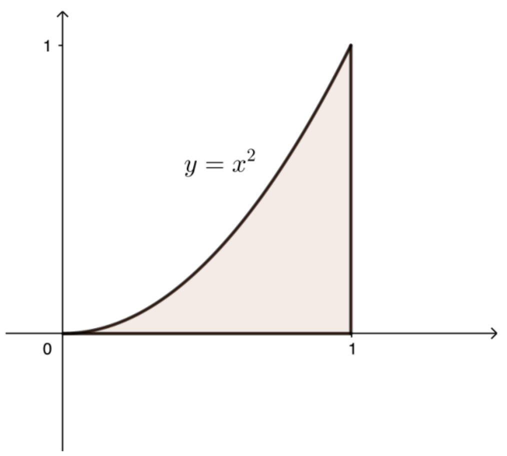
$$1 + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{2}{x^2} = -1$$

$$2 = -x^2$$

$$x^2 = -2 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$$

Esercizio 6 (punti: ....../4)
Calcolare il baricentro della regione piana rappresentata in figura.



$$\text{Area} = \int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$x \cdot Area = \int_0^1 \int_0^{x^2} x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$y \cdot Area = \int_0^1 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{x \cdot Area}{Area}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{y \cdot Area}{Area}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{3}{10}$$

$$\text{Baricentro} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{10}\right)$$

Esercizio 7 (punti: ....../4)
Calcolare

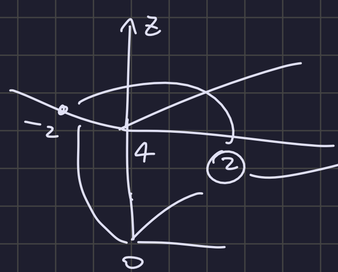
$$\iiint_\Omega y\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 4,\ y \ge 0\}$

$$\Omega = \begin{cases} z \ge x^2+y^2 \\ z \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Coordinate cilindriche (Polari solo x, y)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \in [0, 2) \\ \theta \in [0, \pi] \end{matrix}$$



$$\Omega = \begin{cases} z \ge \rho^2 \\ z \le 4 \end{cases}$$

$$\int_{\rho^2}^4 \int_0^\pi \int_0^2 \rho\sin\theta \sqrt{\rho^2}\, \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

$$= \int_{\rho^2}^4 \int_0^\pi \int_0^2 \rho^3 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, dz$$

$$= \int_0^2 \rho^3 \int_0^{\pi} \sin\theta \int_{\rho^2}^{4} dz\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^2 \rho^3 \int_0^{\pi} \sin\theta\,(4-\rho^2)\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^2 \rho^3\,(4-\rho^2) \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^2 \rho^3\,(4-\rho^2)\,\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi}\, d\rho$$

$$= \int_0^2 (4\rho^3-\rho^5)(2)\, d\rho$$

$$= 2\left[\frac{4}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2$$

$$= 2\cdot\left(2^4 - \frac{1}{6}2^6\right)$$

$$= 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Esercizio 8 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Verificare che il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (ze^{zx} + \alpha y,\ \alpha x - \beta + z,\ xe^{zx} + y)$$

è conservativo per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e determinare un suo potenziale nel caso $\alpha = 0, \beta = 1$.

Condizione necessaria e sufficiente

Dominio semplicemente connesso ✓

Derivate in croce ✓

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

$\partial x \quad \partial y \quad \partial z$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \alpha = \frac{\partial F_2}{\partial x} \checkmark$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} \checkmark$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = e^{zx} + zxe^{zx} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \checkmark$$

La condizione necessaria e sufficiente é verificata, quindi il campo é conservativo $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$

$$\vec{F}(x,y,z) = (ze^{zx}, -1+z, xe^{zx}+y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ze^{zx} \rightarrow U = \int ze^{zx}\, dx = e^{zx} + C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -1+z \rightarrow U = \int -1+z\, dy = -y+zy + C_2(x,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = xe^{zx}+y \Rightarrow U = \int xe^{zx}+y\, dz = e^{zx} + yz + C_3(x,y)$$

$$U(x,y,z) = e^{zx} + zy - y + k$$

b) (2 punti) Con $\alpha = 0$, $\beta = 1$, calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\int_\gamma F_z\, ds$, dove $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Nota: F_z è la terza componente del campo vettoriale $\vec{F}$.

$$\vec{F}(x,y,z) = (ze^{zx}, -1+z, xe^{zx}+y)$$

$$\gamma(0) = (2,0,0) \quad \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

$L = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$ perché $\vec{F}$ é conservativo

$$\downarrow$$

$$L = U(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) - U(2,0,0)$$

$$= e^0 + 0 - \sqrt{2} - e^0 + 0 - 0$$

$$= 1 - \sqrt{2} - 1$$

$$= -\sqrt{2}$$

$$F(\gamma(t)) = (0, -1, 2\cos t + 2\sin t) \qquad \gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4} = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} F_z(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos t + 2\sin t \cdot 2\, dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t + 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \, dt$$

$$= 4 \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 4 \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) + 4 \left(-\cos \frac{\pi}{4} + \cos 0 \right)$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

$$= 4 \left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 \right)$$

$$= 4$$