

# Sistemi

UniVR - Dipartimento di Informatica

**Fabio Irimie**

1° Semestre 2024/2025

## Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Concetti base</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Tipi di segnali . . . . .  | 3         |
| 1.2      | Rappresentazione dei sistemi . . . . .                                 | 4         |
| <b>2</b> | <b>Notazioni</b>   | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Modello di sistemi</b>  | <b>7</b>  |
| 3.1      | Approccio classico . . . . .   | 7         |
| 3.2      | Approccio moderno . . . . .  | 7         |
| 3.3      | Obsolescenza . . . . .   | 7         |
| 3.4      | Causalità . . . . .  | 8         |
| 3.5      | Stabilità . . . . .  | 8         |
| 3.5.1    | Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output) . . . . .                | 9         |
| 3.5.2    | Stabilità Asintotica . . . . .   | 10        |
| <b>4</b> | <b>Modello di segnali</b>  | <b>11</b> |
| <b>5</b> | <b>Funzioni in <math>\mathbb{C}</math></b>                             | <b>13</b> |
| 5.1      | Funzione a variabili complesse . . . . .                               | 13        |
| 5.2      | Funzioni complesse . . . . .   | 15        |
| 5.3      | Funzioni polinomiali . . . . .   | 16        |
| 5.3.1    | Risoluzione . . . . .  | 16        |
| <b>6</b> | <b>Segnali</b>   | <b>16</b> |
| 6.1      | Segnali continui . . . . .   | 16        |
| 6.1.1    | Sinusoidale . . . . .  | 17        |
| 6.1.2    | Esponenziali reali . . . . .   | 18        |
| 6.1.3    | Esponenziali complessi . . . . .                                       | 19        |
| 6.2      | Segnali discreti . . . . .   | 21        |
| 6.2.1    | Sinusoidale . . . . .  | 21        |
| 6.2.2    | Esponenziali Reali . . . . .   | 22        |
| 6.2.3    | Esponenziali Complessi . . . . .                                       | 23        |
| 6.3      | Rappresentazione . . . . .   | 25        |
| 6.4      | Problema della periodicità . . . . .                                   | 26        |
| <b>7</b> | <b>Segnali generalizzati</b>   | <b>28</b> |
| 7.1      | Segnali di impulso . . . . .   | 28        |
| 7.1.1    | Finestra rettangolare unitaria . . . . .                               | 30        |
| 7.1.2    | Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario . . . . . | 30        |
| 7.2      | Come si realizza un impulso . . . . .                                  | 31        |
| 7.3      | Derivata dell'impulso . . . . .  | 32        |
| 7.4      | Integrale dell'impulso . . . . .                                       | 33        |
| 7.4.1    | Funzione gradino . . . . .   | 33        |
| 7.4.2    | Funzione rampa . . . . .   | 34        |
| 7.4.3    | Funzione parabolica . . . . .  | 34        |
| 7.4.4    | A cosa servono i segnali canonici . . . . .                            | 35        |
| 7.5      | Proprietà degli impulsi . . . . .                                      | 35        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>8</b> | <b>Sistemi</b>   | <b>37</b> |
| 8.1      | Proprietà dei sistemi LTI  | 39        |
| 8.1.1    | Linearità  | 39        |
| 8.1.2    | Tempo invarianza   | 40        |
| 8.1.3    | Causalità  | 40        |
| 8.1.4    | Proprietà di stabilità asintotica  | 41        |
| 8.1.5    | Proprietà di BIBO stabilità  | 42        |
| 8.2      | Sistemi descritti da equazioni differenziali                             | 43        |
| 8.2.1    | Risoluzione  | 46        |
| 8.2.2    | Risposta libera (o evoluzione libera)                                    | 47        |
| 8.2.3    | Convergenza dei modi elementari  | 51        |
| 8.2.4    | Dimostrazioni  | 52        |
| 8.2.5    | Prodotto di convoluzione   | 54        |
| 8.2.6    | Risposta impulsiva   | 57        |
| 8.2.7    | Risposta forzata   | 61        |
| 8.2.8    | Risposta totale  | 63        |
| 8.3      | Stabilità in base alle radici  | 63        |
| 8.4      | Risposta in frequenza  | 64        |
| <b>9</b> | <b>Trasformata unilatera di Laplace (TDL)</b>                            | <b>65</b> |
| 9.1      | Proprietà della trasformata di Laplace                                   | 67        |
| 9.1.1    | Linearità  | 67        |
| 9.1.2    | Traslazione nel tempo (ritardo temporale)                                | 68        |
| 9.1.3    | Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)         | 68        |
| 9.1.4    | Cambio di scala  | 69        |
| 9.1.5    | Proprietà della derivata   | 69        |
| 9.1.6    | Moltiplicazione per una funzione polinomiale                             | 70        |
| 9.1.7    | Integrazione nel tempo   | 70        |
| 9.1.8    | Integrale nel dominio dei complessi                                      | 71        |
| 9.1.9    | Teorema del valore iniziale  | 71        |
| 9.1.10   | Teorema del valore finale  | 71        |
| 9.1.11   | Convoluzione nel dominio del tempo                                       | 71        |
| 9.2      | Trasformate notevoli   | 72        |
| 9.2.1    | Impulso  | 72        |
| 9.2.2    | Gradino  | 73        |
| 9.2.3    | Esponenziale complesso causale   | 73        |
| 9.2.4    | Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale | 74        |
| 9.2.5    | Funzione coseno  | 75        |
| 9.2.6    | Funzione seno  | 75        |
| 9.3      | Risoluzione di sistemi LTI causali                                       | 75        |

# 1 Concetti base

Un sistema è formato da **segnali trasmessi**, un'esempio di segnale è la voce che usiamo per comunicare tra di noi. Il sistema prende le informazioni ricevute dal segnale e le rielabora.

Degli esempi di sistema sono:

- Microfono-Casse
- Freno della macchina

## 1.1 Tipi di segnali

I segnali possono essere di due tipi:

- **Segnali a tempo continuo:** Segnali che hanno infiniti punti per ogni infinitesimo di tempo.

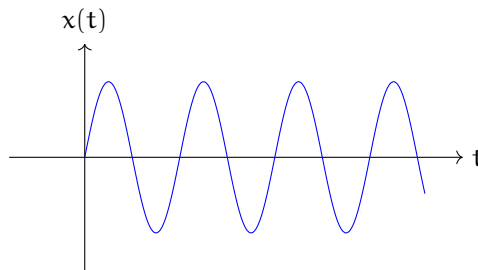


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo

- **Segnali a tempo discreto:** Segnali che hanno un numero finito di punti per ogni intervallo di tempo.

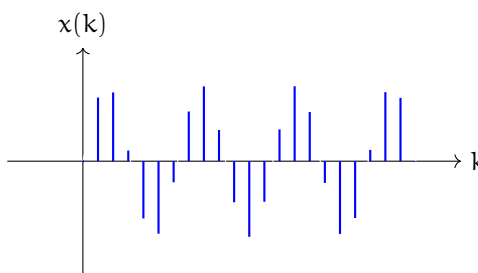


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto

Per elaborare i dati attraverso un computer bisogna convertire un segnale continuo in uno discreto, questo processo è chiamato **campionamento** e non è **distruttivo**, cioè si può tornare indietro al segnale originale.

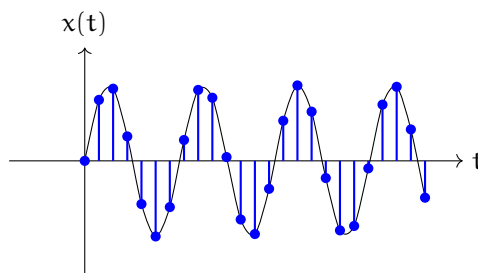


Figura 3: Esempio di campionamento

Una volta campionato il segnale si deve **quantizzare**, ovvero approssimare il valore del segnale a un valore discreto, questa operazione è **parzialmente distruttiva**, cioè si può tornare indietro al segnale originale perdendo alcune informazioni.

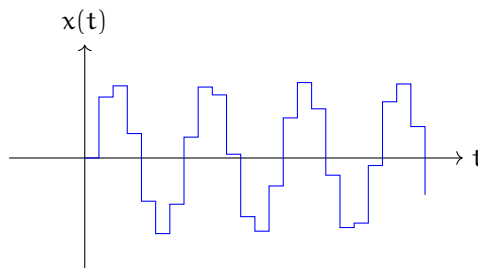


Figura 4: Esempio di quantizzazione

Infine si fa **encoding**, ovvero si codifica il segnale per poterlo adattare ad un altro tipo di segnale, questo processo è **completamente distruttivo**.

I segnali possono essere di dimensioni diverse, ad esempio:

- L'andamento di una borsa è un segnale a 1 dimensione.
- Una foto in bianco e nero è un segnale a 2 dimensioni  $(x, y)$ .
- Una foto colorata è un segnale multidimensionale  $(x, y)^3$  per rappresentare ogni colore (R,G,B).

## 1.2 Rappresentazione dei sistemi

Un sistema lo rappresentiamo con un blocco, dove all'ingresso mettiamo il segnale in ingresso e all'uscita il segnale in uscita.

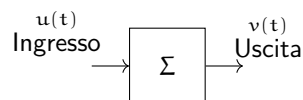


Figura 5: Rappresentazione di un sistema

L'output di un sistema può essere rielaborato per essere inserito nuovamente come input in un altro sistema, ad esempio:

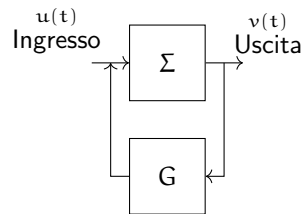


Figura 6: Rappresentazione di due sistemi in cascata

## 2 Notazioni

Tutti i segnali sono indicati con la lettera minuscola, ad esempio:

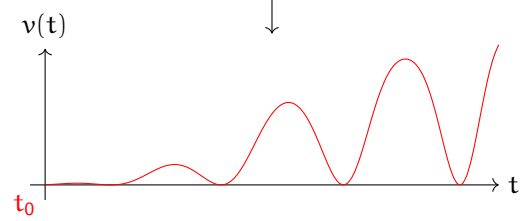
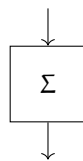
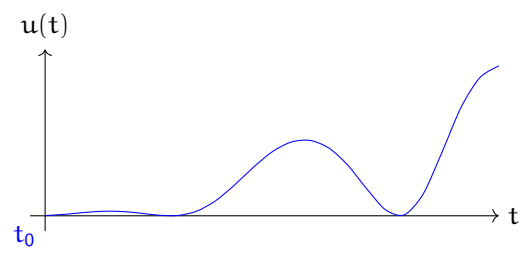
$$\underbrace{f}_{\text{segnale}} \quad \underbrace{f(t)}_{\text{segnale a tempo continuo}}$$

Oppure si utilizzano delle notazioni standard:

1.  $t, \tau, t_i$ : tempo continuo
2.  $k$ : tempo discreto

In questo corso si considerano solo segnali continui o discreti monodimensionali non negativi e solo sistemi **LTI** (Lineari e Tempo Invarianti):

1. **Lineare**: Vale la **sovrapposizione degli effetti**, cioè se  $v_1(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t)$  e  $v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_2(t)$  allora  $v_1(t) + v_2(t)$  è l'uscita del sistema per  $u_1(t) + u_2(t)$ .
2. **Tempo Invariante**: A prescindere dal punto di tempo in cui si applica il segnale, l'uscita del sistema è sempre la stessa.



$$t_1 = t_0 + t_n$$

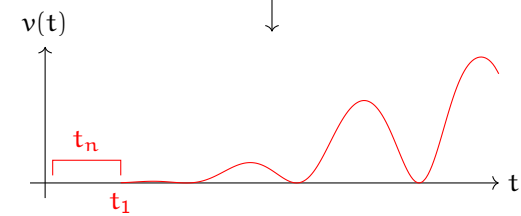
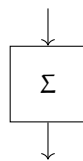
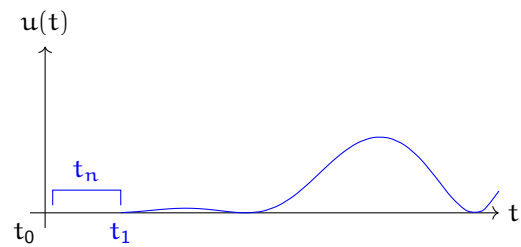


Figura 7: Esempio di invarianza nel tempo

I sistemi vengono rappresentati con lettere maiuscole greche o non.

## 3 Modello di sistemi

### 3.1 Approccio classico

Questo approccio prevede di avere un **evento fisico** (circuito, molla, ecc...) e per questo evento bisogna definire un **modello** del sistema. Questo si può fare attraverso degli strumenti grafici o matematici. Come strumenti matematici si usano:

1. **Continuo:**

- (a) Equazioni differenziali
- (b) Trasformate di Laplace
- (c) Trasformate di Fourier

2. **Discreto:**

- (a) Equazioni alle differenze
- (b) Trasformate Z

Una volta modellato l'evento fisico si può fare un'analisi del sistema e ciò permette di descrivere la **stabilità** e le **proprietà** del sistema.

L'ultima fase è quella di **sintesi**, cioè la fase di correzione del sistema per far sì che risulti stabile.

### 3.2 Approccio moderno

L'approccio moderno ha solo un blocco per rappresentare gli stati:



Figura 8: Rappresentazione di un sistema con l'approccio moderno

### 3.3 Obsolescenza

L'obsolescenza è il numero di anni che un sistema può durare. I sistemi che verranno studiati sono quelli che si trovano nella sezione di comportamento lineare, cioè i sistemi che non cambiano nel tempo.



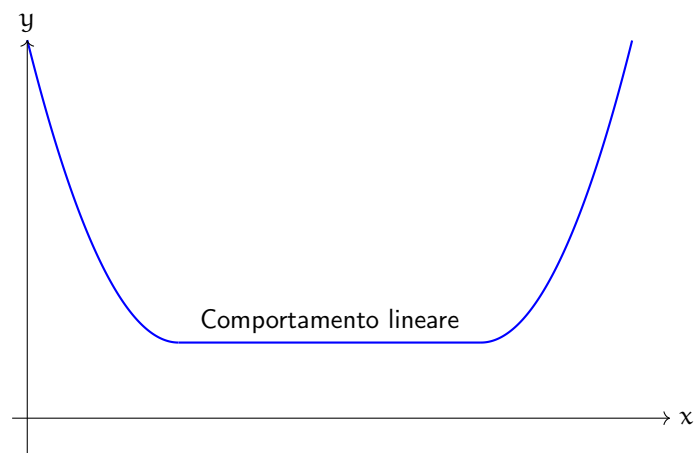


Figura 9: Sezione di comportamento lineare

Un'esempio è una molla che si deforma in base alla forza applicata, quando essa si deforma assume un comportamento plastico e quindi non lineare, mentre quando non si deforma assume un comportamento elastico e quindi lineare.

### 3.4 Causalità

La causalità è l'input del sistema e l'effetto è l'output che produce, quindi la causa precede sempre l'effetto. Non esiste un sistema causale che abbia l'output prima dell'input.

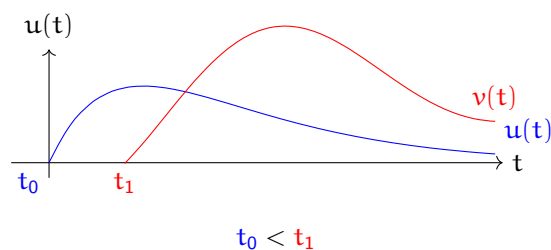


Figura 10: Esempio di causalità

### 3.5 Stabilità

Un sistema è stabile se, a seguito di un'oscillazione, ritorna al suo stato di equilibrio e il sistema si ferma. Un sistema è instabile se, a seguito di un'oscillazione, si allontana dal suo stato di equilibrio.

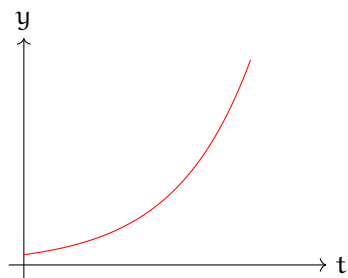


Figura 11: Sistema instabile

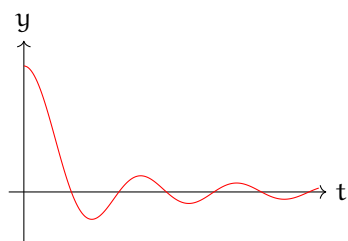


Figura 12: Sistema stabile

Ci sono 2 tipi di stabilità:

- **Stabilità asintotica**  $\rightarrow \forall i \Re \lambda_i < 0$
- **Stabilità BIBO** verificare che  $h(t)$  sia integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < +\infty$$

### 3.5.1 Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se il segnale di ingresso è limitato in ampiezza allora il segnale di uscita è limitato in ampiezza.

$$\exists M > 0, |u(t)| < M \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\exists N > 0, |v(t)| < N \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $M, N \in \mathbb{R}$  non per forza uguali

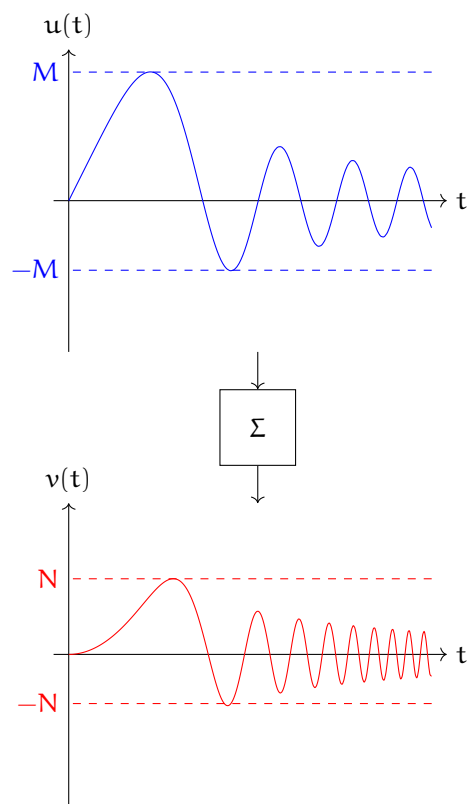


Figura 13: Esempio di sistema stabile BIBO

### 3.5.2 Stabilità Asintotica

Se il segnale di ingresso si annulla allora il segnale di uscita si annulla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad \forall r \text{ di } u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

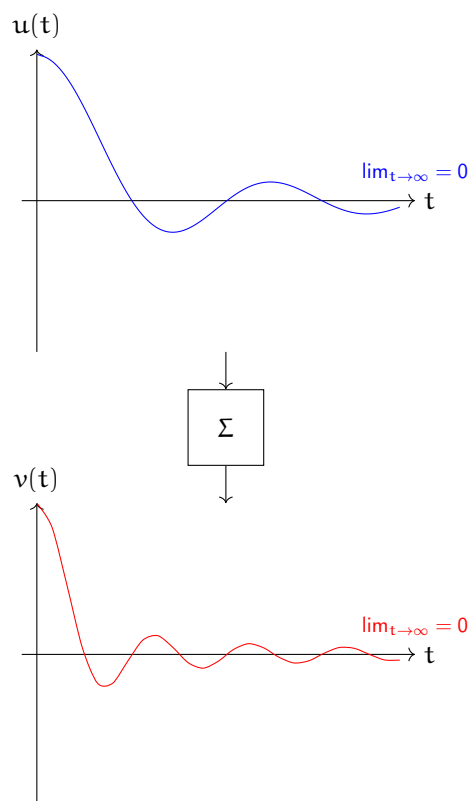


Figura 14: Esempio di sistema stabile asintotico

La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma non viceversa.

## 4 Modello di segnali

Un segnale si può scrivere nel seguente modo:

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Parte esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Parte polinomiale}}$$

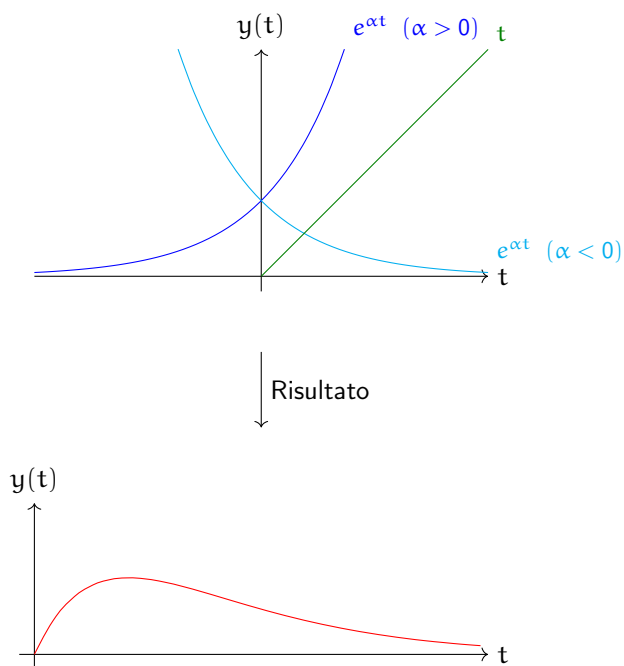


Figura 15: Esempio di segnale

Ad esempio con  $l = 1$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^1}{1!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot t$$

Con  $\alpha < 0$  il sistema è stabile perchè l'esponenziale tende a 0.

Con  $l = 2$ :

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2!} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

ecc...

Siccome  $\alpha \in \mathbb{C}$  si può riscrivere come:

$$\alpha = \lambda + j\omega$$

$\lambda$  è la parte reale

$j\omega$  è la parte immaginaria

Quindi il segnale diventa:

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Utilizzando la forma trigonometrica dei numeri complessi si ha che:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{(\lambda+j\omega)t} = e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Per le formule di Eulero che dice:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

**Definizione 4.1** (Complesso coniugato). A ogni numero complesso è associato un coniugato che ha la stessa parte reale, ma parte immaginaria opposta.

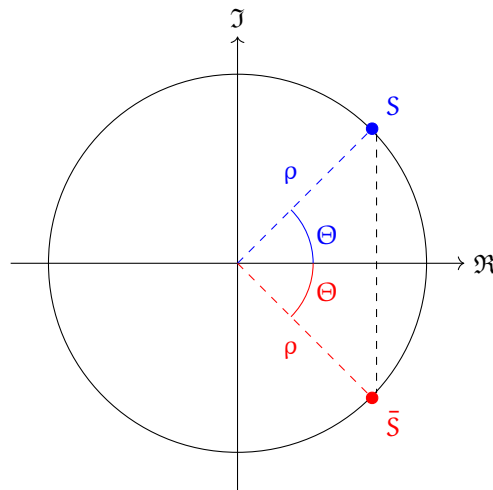


Figura 16: Circonferenza di proiezione

$$S = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

$$\bar{S} = \rho(\cos(-\theta) + j \sin(-\theta))$$

## 5 Funzioni in $\mathbb{C}$

### 5.1 Funzione a variabili complesse

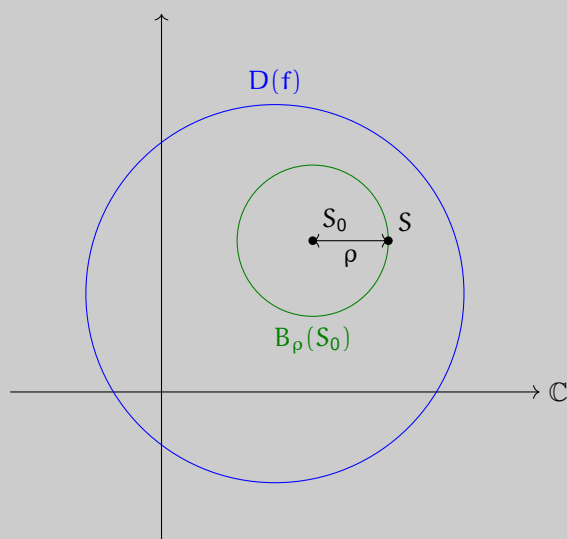
**Definizione 5.1** (Funzione a variabile complessa). Una funzione a variabile complessa è una funzione che ha come dominio un insieme di numeri complessi e come codominio un insieme di numeri complessi.

**Definizione 5.2** (Punto interno). Un punto  $S_0$  appartenente a un intorno  $D(f) \subseteq \mathbb{C}$  è interno a  $D(f)$  se e solo se esiste un disco  $B_\rho(S_0)$  di raggio  $\rho \in \mathbb{R}_+$  centrato in  $S_0$  tale che:

$$B_\rho(S_0) \subset D(f)$$

Quindi  $D(f)$  è un dominio e  $B_\rho(S_0)$  è un sottoinsieme:

$$B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$$

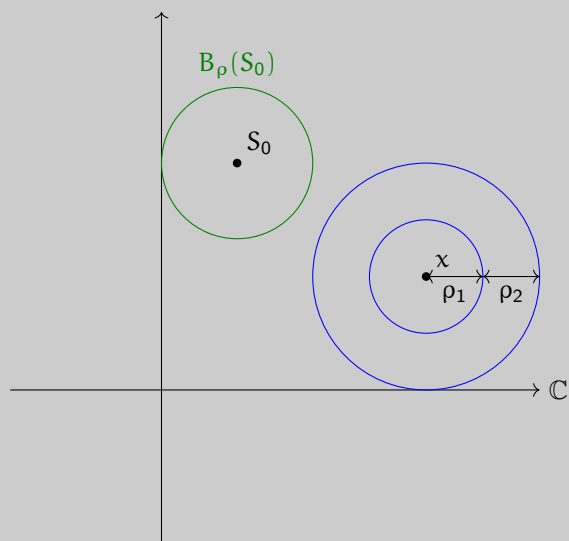


**Definizione 5.3** (Insieme aperto). È l'insieme di tutti i punti che sono definiti interni.

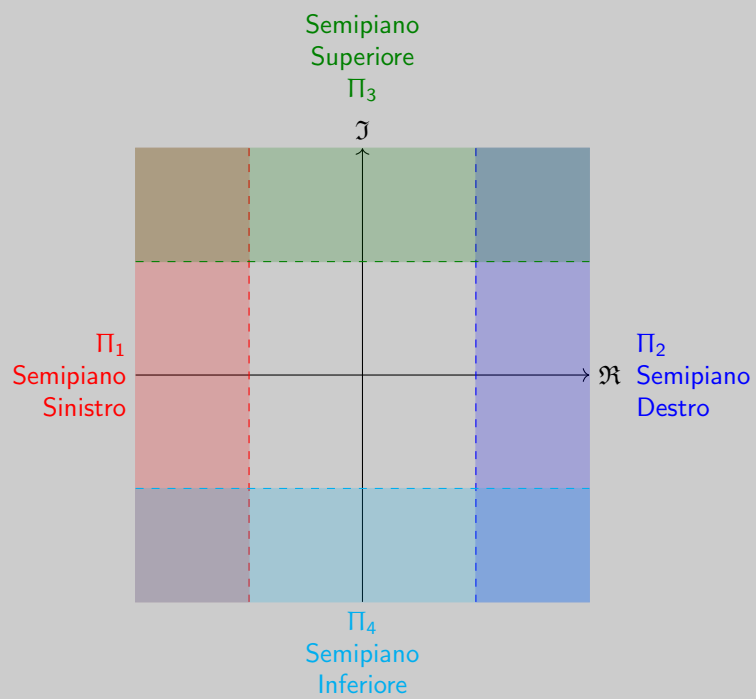
Ad esempio:

- insieme  $\mathbb{C}$
- insieme  $\emptyset$
- i dischi in un punto  $S_0$ ,  $B_\rho(S_0) = \{S \in \mathbb{C} \mid \|S_0 - S\| < \rho\}$
- corone circolari centrate in un punto  $x$ ,

$$\{S \in \mathbb{C}, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \mid \rho_1 < |S - x| < \rho_2\}$$



- semipiani destri o sinistri, superiori o inferiori



## 5.2 Funzioni complesse

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{C} \quad D(f) \subseteq \mathbb{C} \text{ e aperto}$$

Alcuni esempi sono:

- $S \rightarrow S \quad D(f) = \mathbb{C}$



- $S \rightarrow S^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \Re(S) + j\Im(S)^2 \quad D(f) = \mathbb{C}$
- $S \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k^S \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad k, n \in \mathbb{Z}$  (Funzioni polinomiali)
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (S - S_0)^k \quad a_k \in \mathbb{C}; \quad S, S_0 \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{Z}$  (Serie di potenze)

### 5.3 Funzioni polinomiali

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \underbrace{S^k}_{\text{Variabile complessa}}$$

Con  $n = 2$ :

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2$$

Con  $n = 3$ :

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + a_3 S^3$$

#### 5.3.1 Risoluzione

Per risolvere una funzione polinomiale si usano le solite tecniche, ad esempio:

$$S^2 - 2S + 1 = (S - 1)^2$$

Che ha una sola soluzione, ma con molteplicità 2.

**Teorema 5.1** (Teorema fondamentale delle radici). Ogni polinomio  $P(S)$  a coefficienti complessi di grado  $n > 0$  ha  $n$  **radici complesse** ed è decomponibile in un solo modo

$$P(s) = a_n \prod_{r=1}^r (s - s_r)^{\mu_r}$$

Dove:

$s_r$  sono delle radici

$\mu_r$  sono le molteplicità delle radici

$a_n$  è il coefficiente del polinomio

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = n$$

## 6 Segnali

Il segnale più presente è quello **sinusoidale**.

### 6.1 Segnali continui

$$t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

### 6.1.1 Sinusoidale

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Dove:

- $A$  è l'ampiezza
- $\omega$  è la frequenza  $f = \frac{1}{T}$  ( $T$  = periodo )
- $\phi$  è la fase

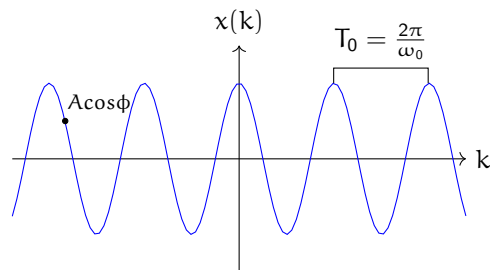


Figura 17: Funzione sinusoidale

#### • Periodico

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \rightarrow \text{periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (indica il multiplo)}$$

Il sistema si comporta nello stesso modo per ogni periodo.

#### • Shift temporale equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\omega_0(t - t_0)] = A \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\Delta \phi})$$

$$A \cos[\omega_0(t + t_0) + \phi] = A \cos(\omega_0 t + \omega_0 t_0 + \phi)$$

#### • Se $\phi = 0$ Il segnale assume la seguente forma:

$$A = \cos(\omega_0 t)$$

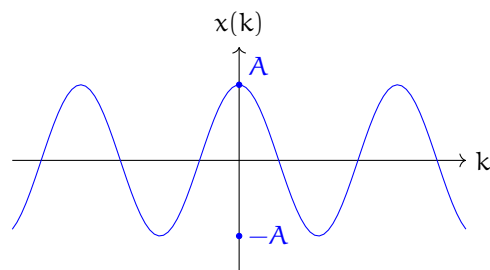


Figura 18: Funzione coseno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Pari

$$x(t) = x(-t)$$

Se  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  Il segnale assume la seguente forma:

$$x(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A \sin(\omega_0 t) \\ A \cos(\omega_0(t + \frac{T_0}{4})) \end{cases}$$

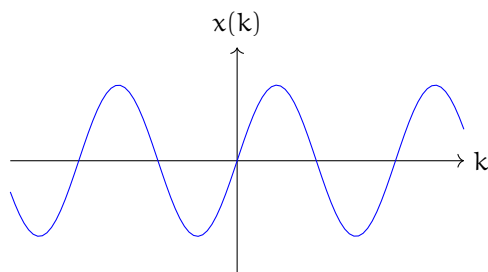


Figura 19: Funzione seno

e ha le seguenti proprietà:

- Periodico

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

### 6.1.2 Esponenziali reali

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

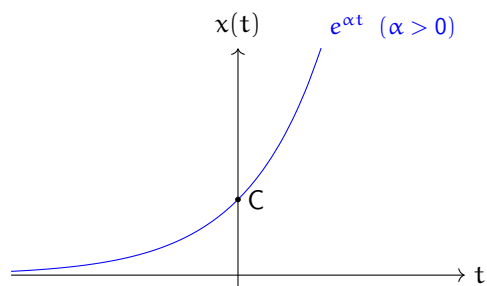


Figura 20: Esempio di segnale

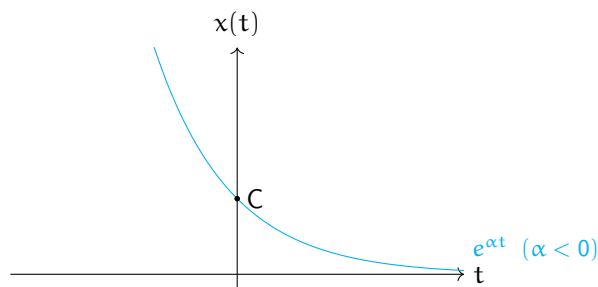


Figura 21: Esempio di segnale

- Shift Temporale

$$C e^{\alpha(t+t_0)} = C e^{\alpha t} \cdot \underbrace{C e^{\alpha t_0}}_{\mathbb{R}}$$

### 6.1.3 Esponenziali complessi

$$x(t) = C e^{\alpha t}$$

$$C = |c| e^{j\Theta} \text{ (polare)}$$

$$\alpha = r + j\omega_o \text{ (cartesiana)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\Theta} \cdot e^{(r+j\omega_o)t} = \\ &= |c| e^{rt} \cdot e^{j(\omega_o t + \Theta)} \text{ (Eulero)} \end{aligned}$$

**Definizione 6.1** (Eulero). La formula di Eulero è la seguente:

$$e^{j(\omega_o t + \Theta)} = \cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta)$$

$$x(t) = |c| e^{rt} \cdot (\cos(\omega_o t + \Theta) + j \sin(\omega_o t + \Theta))$$

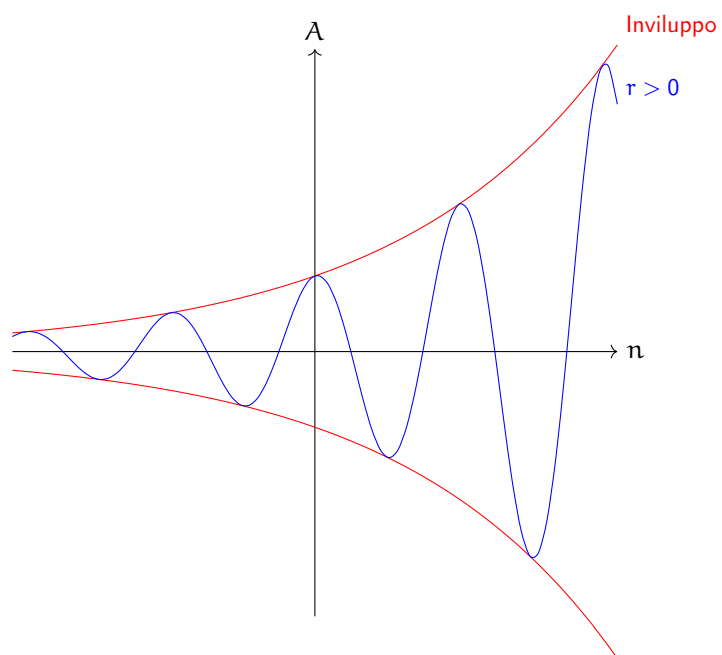


Figura 22: Esponenziale sinusoidale continuo con  $r > 0$

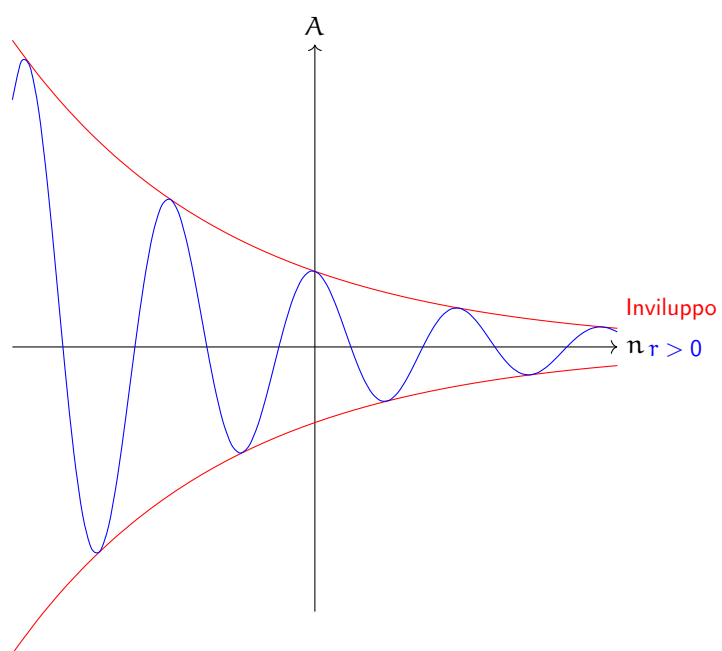


Figura 23: Esponenziale sinusoidale continuo con  $r < 0$

## 6.2 Segnali discreti

$$k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

### 6.2.1 Sinusoidale

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Dove:

- $A$  è l'ampiezza
- $\Omega_0$  è la frequenza  $f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$
- $\phi$  è la fase

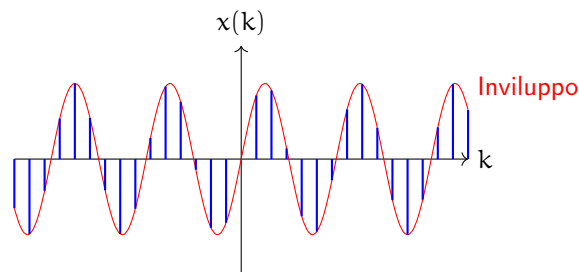


Figura 24: Esempio di segnale sinusoidale discreto

- **Shift temporale** equivale ad un cambio di fase

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] = A \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\Delta \phi})$$

- Se  $\phi = 0$  Il segnale rimane coseno ed è pari

$$x[n] = x[-n]$$

Se  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  Il segnale diventa un seno ed è dispari:

$$x[n] = -x[-n]$$

- Il cambio di fase equivale allo shift temporale?

$$A \cos[\Omega_0(n + n_0)] \stackrel{?}{=} A \cos[\Omega_0 n + \Omega_0 \omega_0 \phi]$$

dove  $\phi$  è il rapporto tra  $\phi$  e  $\Omega_0$  è un numero intero:

$$\phi = \Omega_0 \omega_0$$

$$\frac{\phi}{\Omega_0} = n_0$$

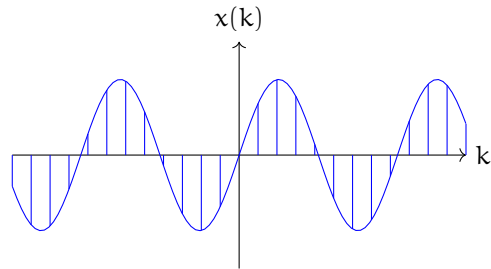


Figura 25: Calcolo del cambio di fase

**Esempio 6.1.**

$$\phi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\Omega_0 = ?$$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{12} = 12 = \Omega_0 \quad (m = 1)$$

### 6.2.2 Esponenziali Reali

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n \quad \alpha = e^\beta; \quad C, \alpha \in \mathbb{R}$$

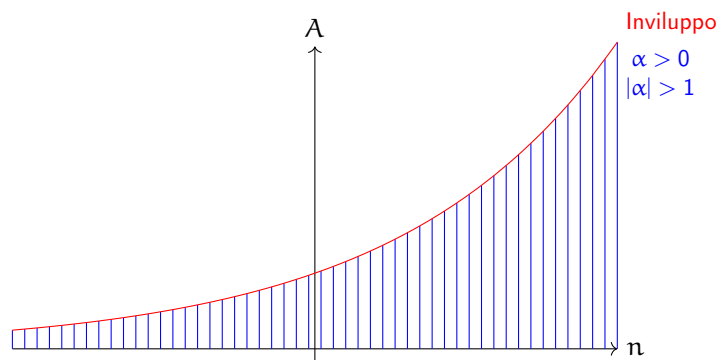


Figura 26: Esponenziale reale con  $\alpha > 0$   $|\alpha| > 1$

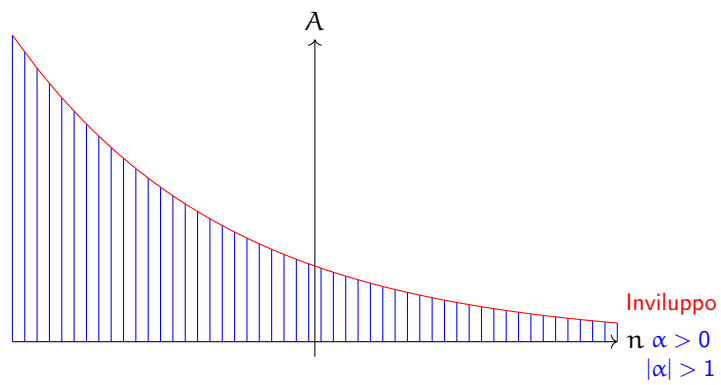


Figura 27: Esponenziale reale con  $\alpha > 0$   $|\alpha| < 1$

### 6.2.3 Esponenziali Complessi

$$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

dove

$$C = |C|e^{j\Theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = |C|e^{j\Theta} \cdot (|\alpha|e^{j\omega_0})^n =$$

$$|C| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \Theta)}$$

Usando la formula di Eulero:

$$x[n] = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot (\cos(\omega_0 n + \Theta) + j\sin(\omega_0 n + \Theta))$$



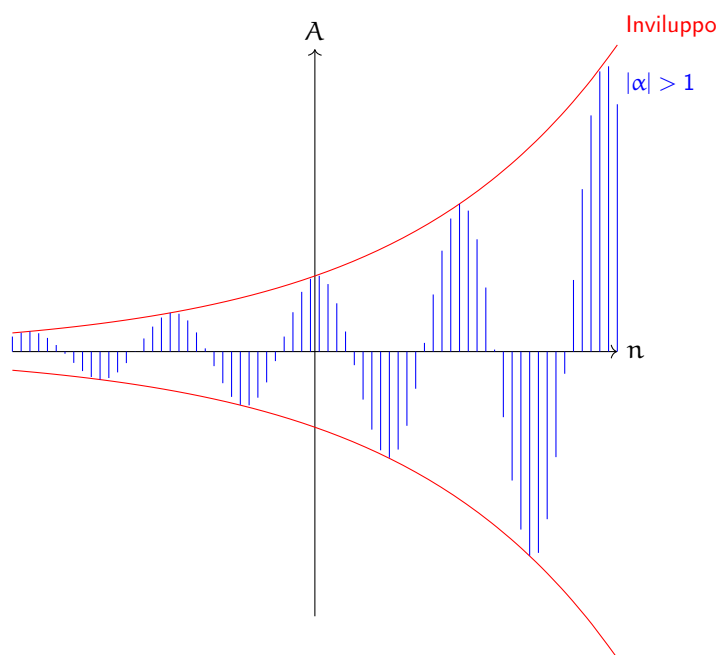


Figura 28: Esponenziale sinusoidale con  $|\alpha| > 1$

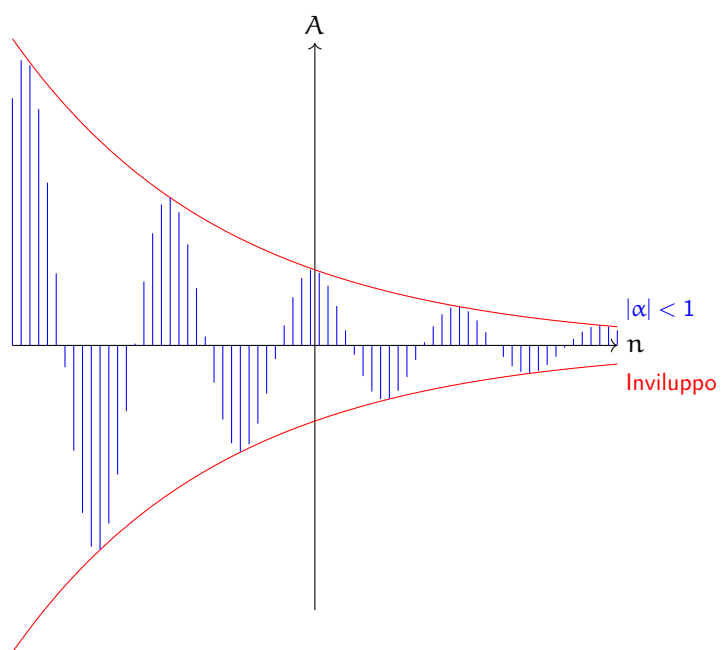


Figura 29: Esponenziale sinusoidale con  $|\alpha| < 1$

### 6.3 Rappresentazione

I segnali che appartengono all'insieme dei complessi sono tridimensionali e sono rappresentati in 2 assi cartesiani diversi, che mostrano lo stesso segnale, ma da 2 punti di vista differenti. Il segnale viene generato da un punto che continua a girare periodicamente su una circonferenza proiettando su entrambi gli assi il suo valore.

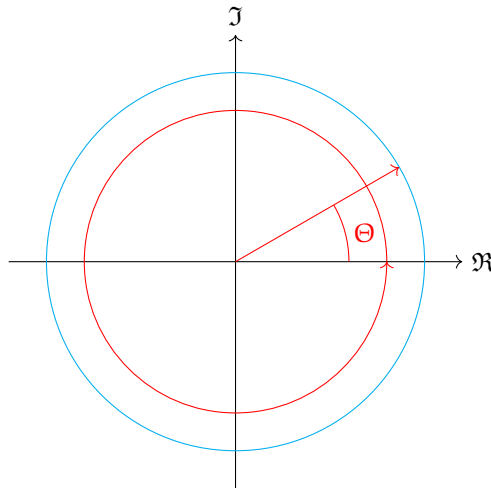


Figura 30: Circonferenza di proiezione

La proiezione sull'asse dei reali è la parte reale del segnale:

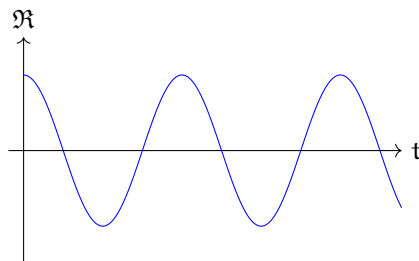


Figura 31: Proiezione su asse reale

La proiezione sull'asse degli immaginari è la parte immaginaria del segnale ed è traslata di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alla parte reale:

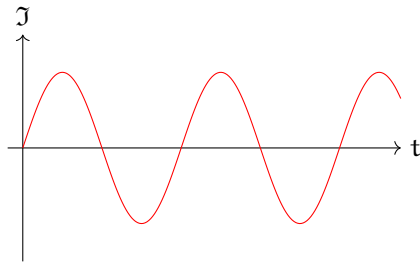


Figura 32: Proiezione su asse immaginario

In 3 dimensioni diventa:

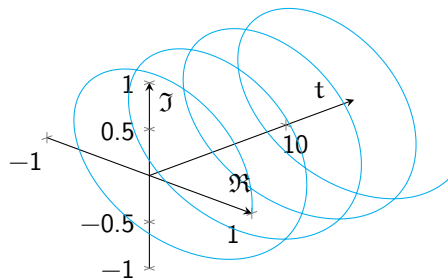


Figura 33: Circonferenza di proiezione in 3D

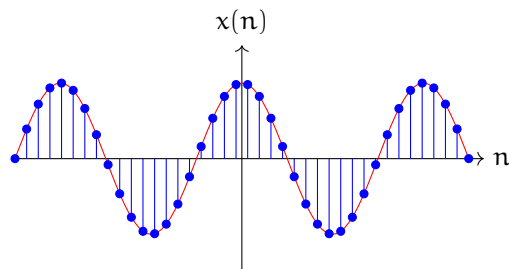
## 6.4 Problema della periodicità

Il problema della periodicità consiste nel fatto che alcuni segnali possono sembrare periodici anche se non lo sono. Ad esempio:

**Esempio 6.2.**

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}} m = 12m$$

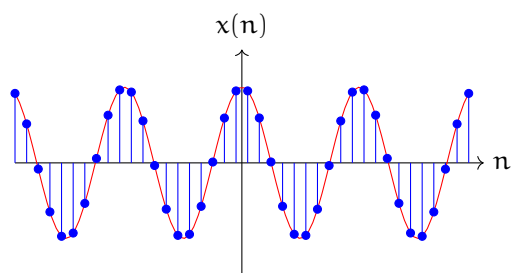
Con  $m = 1$ :

$$T_0 = 12 \cdot 1 = 12 \in \mathbb{Z}$$

Quindi il segnale è periodico.

**Esempio 6.3.**

$$\Omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$
$$\phi = 0$$



Il periodo è:

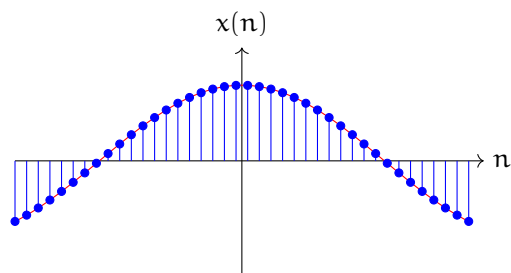
$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} m = \frac{31}{4} m$$

Con  $m = 4$ :

$$T_0 = \frac{31}{4} \cdot 4 = 31 \in \mathbb{Z}$$

**Esempio 6.4.**

$$\Omega_0 = \frac{1}{6}$$
$$\phi = 0$$



Il periodo è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} m$$

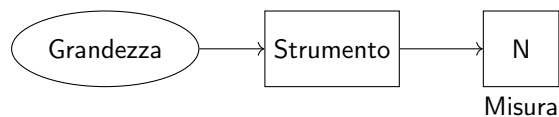
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} m = 2\pi \cdot 6m$$

Non esiste  $m \in \mathbb{Z}$  che mi tolga  $\pi$  dalla formula del periodo, quindi il segnale non è periodico anche se lo sembra

## 7 Segnali generalizzati

Ci sono alcune grandezze che non si possono facilmente calcolare con i segnali tradizionali, quindi analiticamente, ma solo con strumenti appositi.

**Esempio 7.1.** La tensione della corrente elettrica



Per misurare la tensione si usa il multimetro. Queste sono grandezze definite all'interno di un'operazione integrale.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sigma(t)}_{\text{Grandezza}} \cdot \underbrace{\phi(t)}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{N}_{\text{Misura}}$$

### 7.1 Segnali di impulso

- **Impulso di Dirac** È una funzione con supporto **infinitesimo**, altezza **infinita** e area = 1

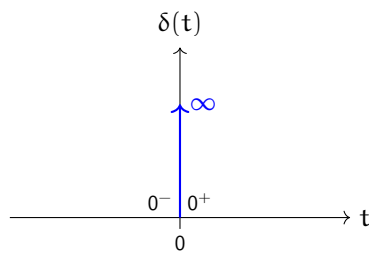


Figura 34: Impulso di Dirac

È definita in  $[0^-, 0^+]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{\text{Impulso}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Strumento}} dt = \underbrace{1}_{\text{Valore}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Impulso unitario**

Matematicamente non si usa l'impulso di Dirac, ma l'**impulso unitario**.

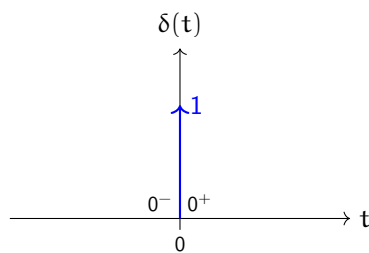


Figura 35: Impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In natura, il segnale che si avvicina di più al segnale di impulso è il seguente:

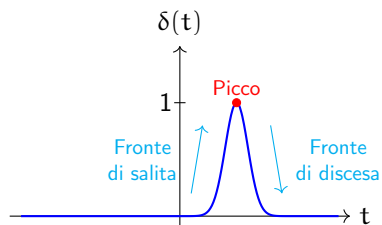


Figura 36: Segnale che si avvicina all'impulso

In ogni caso, non si avvicina mai all'impulso di Dirac, perchè ha sempre un fronte di salita e discesa, quindi non è istantaneo.

### 7.1.1 Finestra rettangolare unitaria

È una funzione che definisce un rettangolo di altezza  $A = 1$  e larghezza  $T$ .

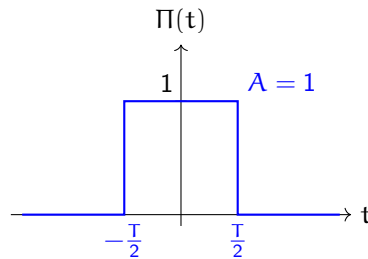


Figura 37: Finestra rettangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se questo segnale è ripetuto nel tempo si chiama **onda quadra**.

Alcune applicazioni possono essere:

- Gestione di motori elettrici
- Equalizzazione di audio

### 7.1.2 Finestra triangolare unitaria o Impulso triangolare unitario

È una funzione che definisce un triangolo di altezza  $A = 1$  e larghezza  $T$ .

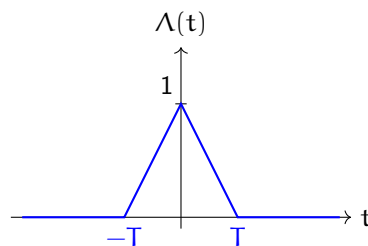


Figura 38: Finestra triangolare unitaria

È definita nel seguente modo:

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{se } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le applicazioni sono le stesse del rettangolo, ma con una forma più armonica (smooth). Si possono anche generare segnali sinusoidali.

## 7.2 Come si realizza un impulso

- Rettangolo:

L'impulso si definisce come una successione di funzioni per cui vengono cambiati dei valori:

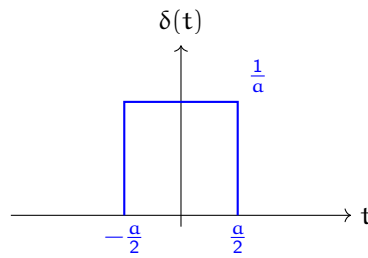


Figura 39: Impulso rettangolare

L'obiettivo è raddoppiare l'altezza e dimezzare la larghezza, mantenendo l'area uguale.

Calcoliamo l'area di questa funzione:

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

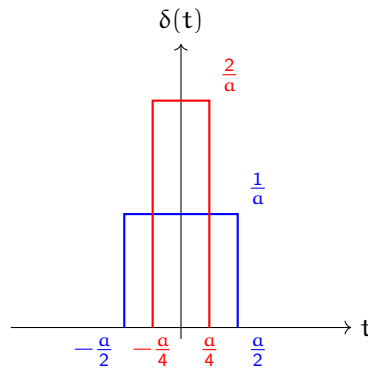


Figura 40: Impulsi rettangolari

E calcoliamo di nuovo l'area

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} = \frac{2a}{4} \cdot \frac{2}{a} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$



- Triangolo:

Facciamo la stessa cosa con il triangolo:

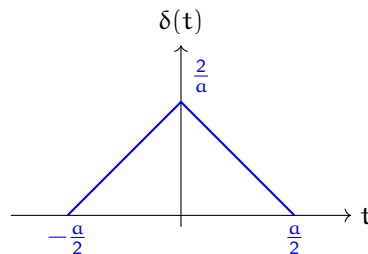


Figura 41: Impulso triangolare

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ora cambiamo la funzione:

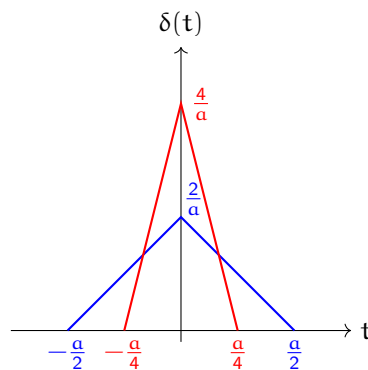


Figura 42: Impulsi triangolari

$$\text{Area} = \left( \frac{a}{4} + \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$$

### 7.3 Derivata dell'impulso

Considerando l'impulso come successione di triangoli abbiamo che all'infinito ci sarà un fronte di salita e discesa, quindi la derivata saranno degli impulsi positivi e negativi.

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \dot{\delta}(t) = \delta'(t)$$

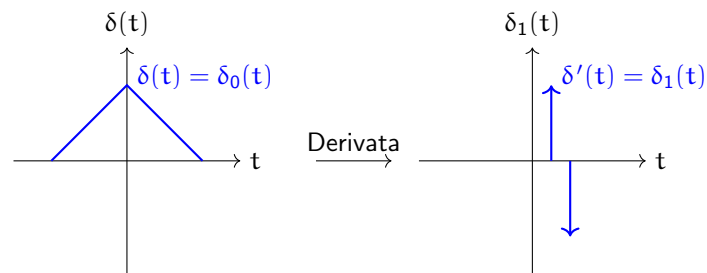


Figura 43: Derivata del segnale triangolare

## 7.4 Integrale dell'impulso

I segnali polinomiali (o segnali canonici) sono definiti come l'integrale di un impulso. È definito come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int \delta_0(t) dt = \delta_{-1}(t)$$

### 7.4.1 Funzione gradino

Si ottiene integrando una volta:

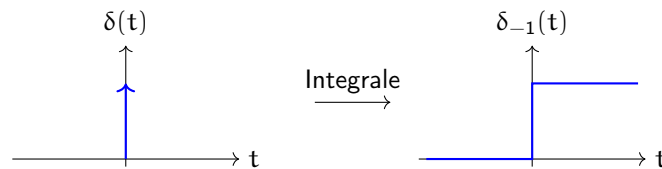


Figura 44: Funzione gradino

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Moltiplicare un segnale per il gradino unitario permette di ottenere la parte positiva del segnale:

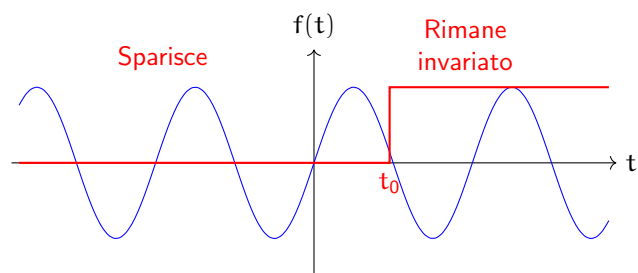


Figura 45: Moltiplicazione per gradino unitario

Si ottiene:

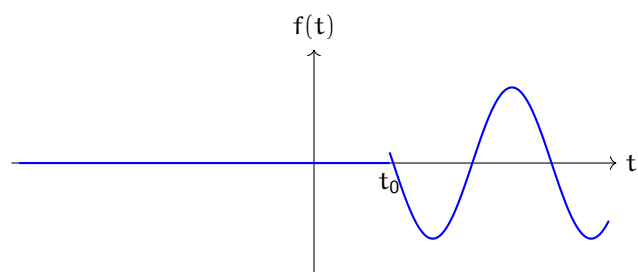


Figura 46: Risultato della moltiplicazione

$$f(t) \cdot \delta_{-1}(t) = f_1(t) \text{ (che è causale)}$$

La funzione del gradino è anche nota come **funzione di Heaviside**.

#### 7.4.2 Funzione rampa

Si ottiene integrando due volte:

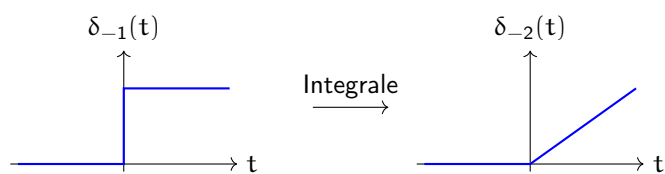


Figura 47: Funzione rampa

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 7.4.3 Funzione parabolica

Si ottiene integrando tre volte:

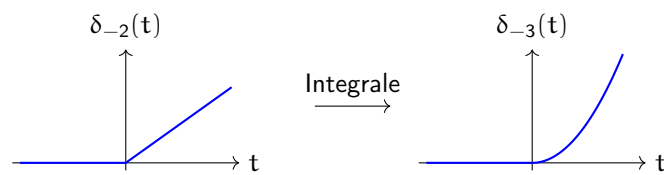


Figura 48: Funzione rampa

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 7.4.4 A cosa servono i segnali canonici

Non si sa cosa contengono i sistemi LTI che si analizzano, perchè si gestiscono solo gli input e gli output.

Di solito si cerca di dare il segnale gradino al sistema e si guarda qual'è la risposta del sistema a questo segnale. Ad esempio:

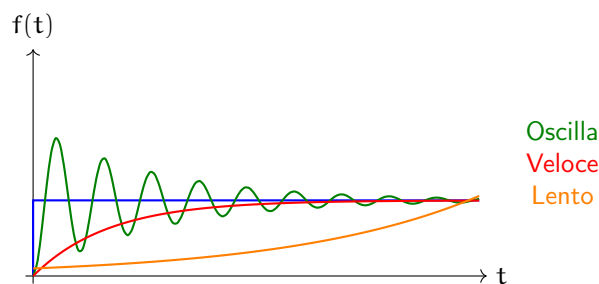


Figura 49: Esempi di risposta di un sistema

**Esempio 7.2.** Il sistema rosso cresce lentamente, ma ad un certo punto arriva a 1, mentre quello arancione è un sistema più lento.

Quello verde è più veloce, ma non arriva mai a regime perchè continua a oscillare e quindi non è asintoticamente stabile, ma potrebbe essere BIBO stabile.

- Per una luce il sistema verde potrebbe andare bene se l'oscillazione non è troppa
- Per un sistema frenante il sistema arancione potrebbe essere troppo lento

## 7.5 Proprietà degli impulsi

È un segnale ideale (canonico) centrato in 0 e definito in  $[0^-, 0^1]$  con altezza 1.

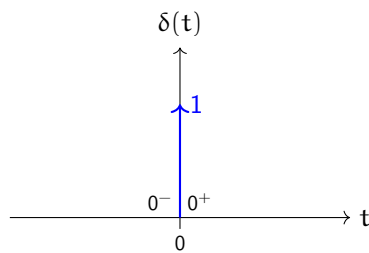


Figura 50: Impulso unitario

- **Pari:**

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Area unitaria**

Se

$$0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Allora

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1$$

Altrimenti

$$\int_a^b \delta(t) dt = 0$$

Cioè se l'intervallo contiene lo 0, l'area è 1, altrimenti è 0.

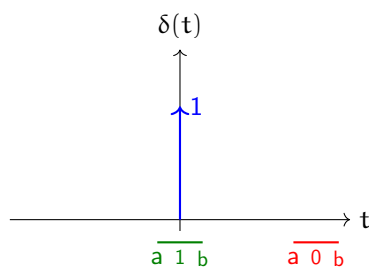


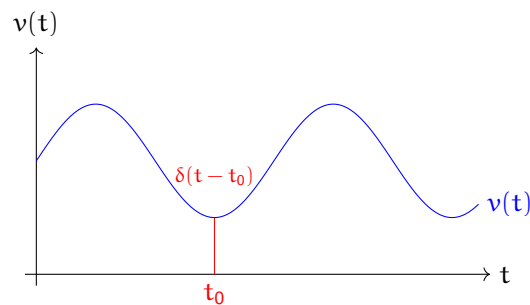
Figura 51: Area dell'impulso

- **Proprietà del campionamento o riproducibilità**

Se  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua in  $t_0 \in \mathbb{R}$ , allora:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Se prendo un impulso traslato in  $t_0$  e lo moltiplico per una funzione ottengo il valore della funzione in quel punto.



Per riuscire a passare dal continuo al discreto si continua a moltiplicare la funzione per un impulso traslato in  $t_0$  e si ottiene il valore della funzione in quel punto.

Questa formula può essere riscritta come:

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau$$

Il valore di una funzione in  $t_0$  l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in  $t_0$ .

## 8 Sistemi

Un sistema è un modello matematico o una formulizzazione di un processo o di un fenomeno fisico che permette di trasformare un input in un output. Ci sono più tipi di sistemi:

- **Sistemi SISO** (Single Input Single Output): Sono sistemi che hanno un solo input e un solo output.
- **Sistemi dinamici**: Sono sistemi che "ricordano" l'input precedente, quindi l'output dipende dall'input attuale e da quello precedente.

**Esempio 8.1.** Un esempio di sistema fisico stabile è il pendolo:

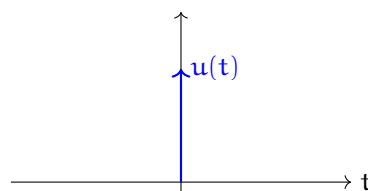


Figura 52: Input

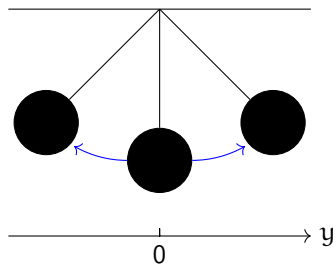


Figura 53: Sistema

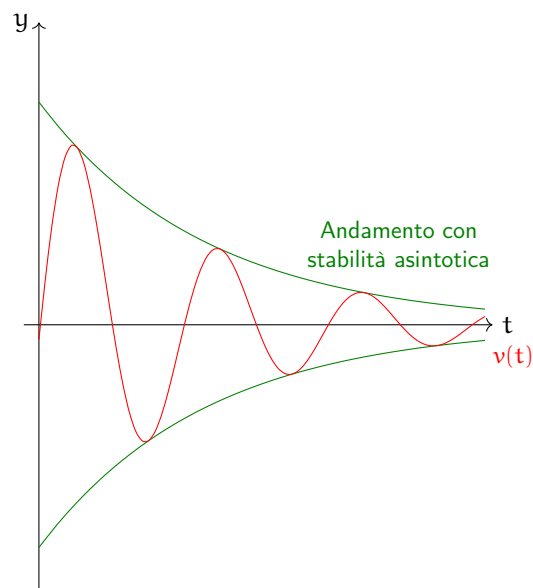


Figura 54: Output

**Esempio 8.2.** Un esempio di sistema fisico instabile è il seguente:

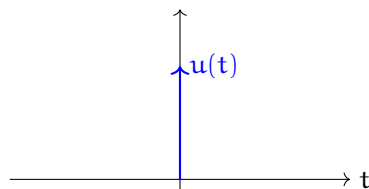


Figura 55: Input

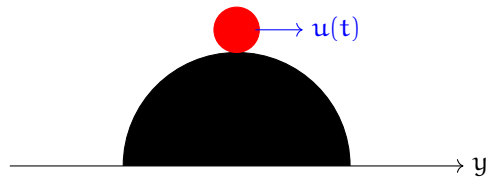


Figura 56: Sistema

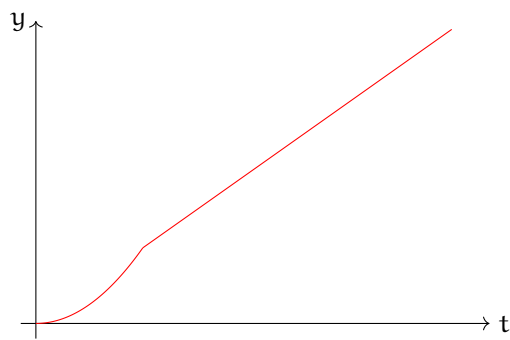


Figura 57: Output

## 8.1 Proprietà dei sistemi LTI

**Definizione 8.1** (Sistema LTI). Un sistema a tempo continuo per cui valgono le proprietà di:

- Linearità
- Tempo invarianza
- Causalità

si definisce **Sistema Lineare Tempo Invariante (LTI)**.

### 8.1.1 Linearità

Se ho un sistema con un primo input  $u_1(t)$  e un secondo input  $u_2(t)$  che insieme fanno un terzo input allora l'output del sistema sarà la combinazione lineare degli output dei due input.

$$\underbrace{\underbrace{a u_1(t)}_{\text{Input 1}} + \underbrace{b u_2(t)}_{\text{Input 2}}}_{\text{Input 3}} \rightarrow \text{Sistema} \rightarrow \underbrace{\underbrace{a \cdot y_1(t)}_{\text{Output 1}} + \underbrace{b \cdot y_2(t)}_{\text{Output 2}}}_{\text{Output 3}}$$



### 8.1.2 Tempo invarianza

Un sistema a tempo continuo è tempo invariante se e solo se:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

### 8.1.3 Causalità

Un sistema si dice causale se e solo se l'uscita all'istante  $\tau$  dipende soltanto dall'ingresso per  $t \leq \tau$  ( $v(\tau)$  dipende solo da  $u(t)$   $t \leq \tau$  e non dipende dai valori successivi). La causa non precede mai l'effetto.

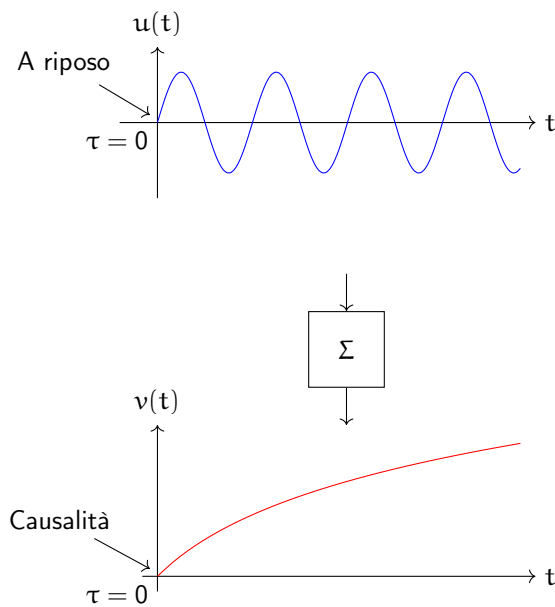


Figura 58: Sistema a riposo

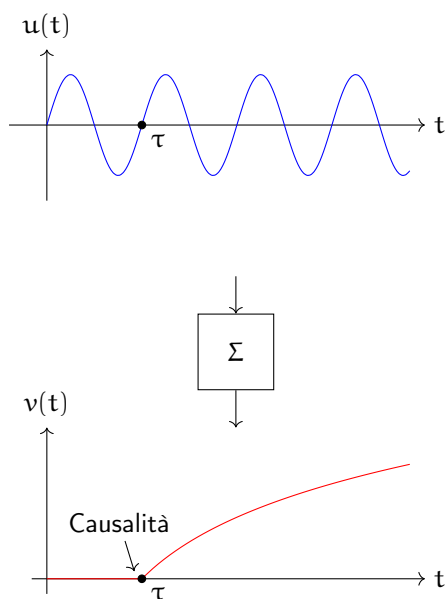


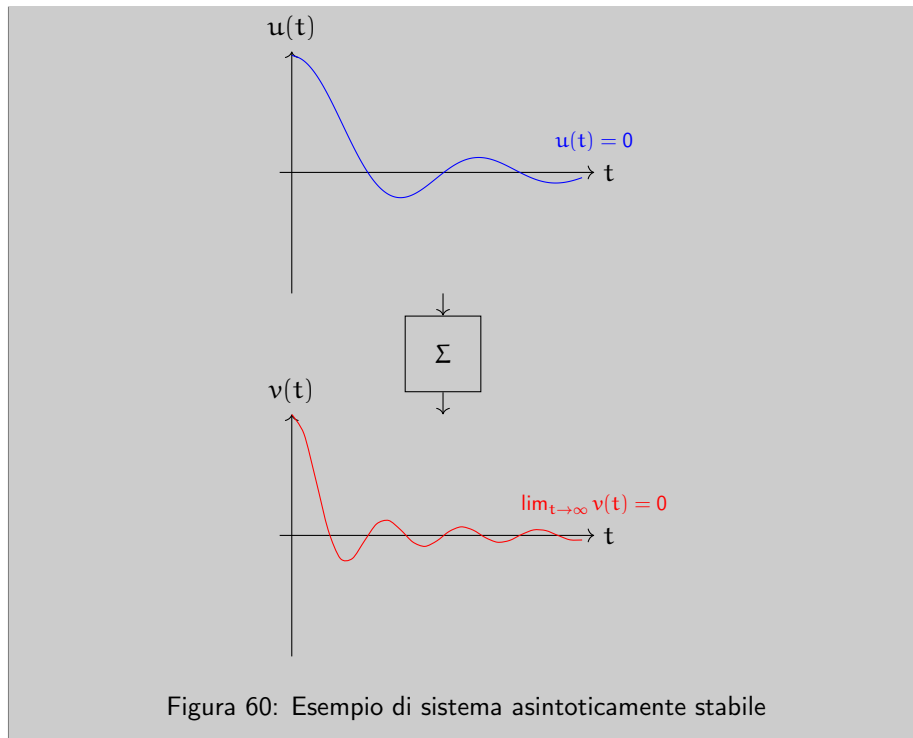
Figura 59: Sistema non a riposo

Per comodità si considerano solo i sistemi a riposo ( $\tau = 0$ ).

#### 8.1.4 Proprietà di stabilità asintotica

**Definizione 8.2.** Un sistema si dice **asintoticamente stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ t.c } u(\tau) = 0, \quad \forall t \leq \tau \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$



Per capire se un sistema è asintoticamente stabile bisogna verificare se ogni soluzione del sistema è minore di 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) < 0$$

### 8.1.5 Proprietà di BIBO stabilità

**Definizione 8.3.** Un sistema si dice **BIBO stabile** se:

$$\exists \tau \in \mathbb{R}, \text{ e } U_u \in \mathbb{R} \text{ t.c se } |u(t)| \leq U_u, \forall t \leq \tau$$

$$\Downarrow$$

$$\exists U_v > 0 \text{ t.c } |v(t)| \leq U_v, \forall t \geq \tau$$

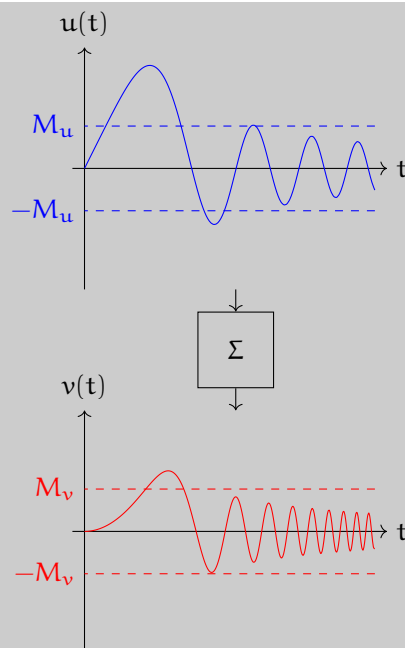


Figura 61: Esempio di sistema stabile BIBO

Ogni sistema asintoticamente stabile è anche BIBO stabile, ma non il contrario.

Per capire se un sistema è BIBO stabile si deve verificare che  $h(t)$  (risposta all'impulso) sia assolutamente integrabile e che abbia un valore finito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

## 8.2 Sistemi descritti da equazioni differenziali

I sistemi che si analizzano in questo corso sono solo un sottoinsieme:

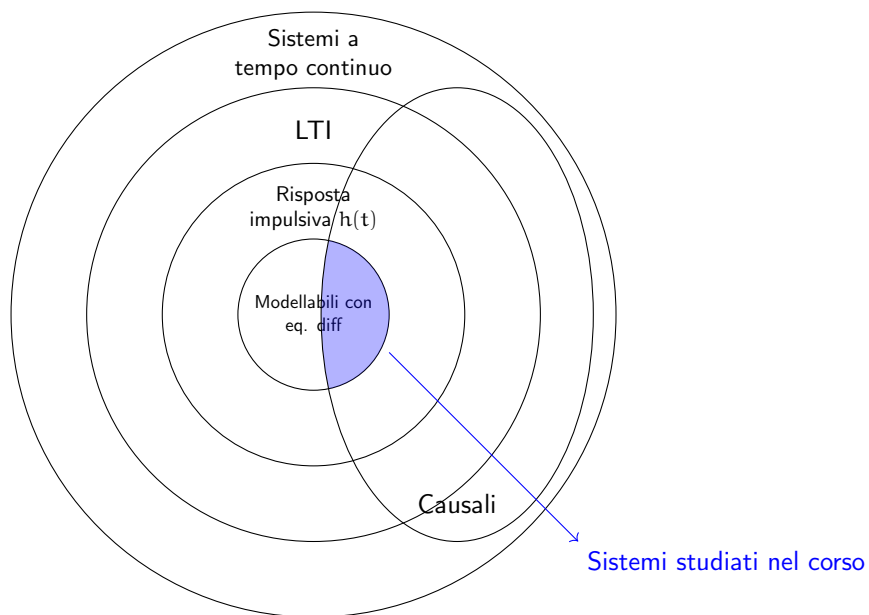


Figura 62: Sistemi LTI

**Esempio 8.3.** Prendiamo come esempio un sistema massa molla smorzatore:

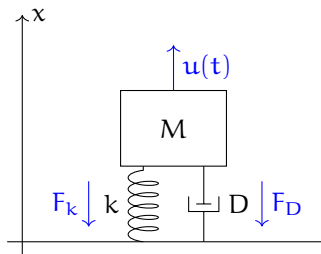


Figura 63: Sistema massa molla smorzatore

Andiamo a vedere le forze in gioco:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$x(t)$  è lo spostamento nel tempo

$$M \cdot a(t) = u(t) - F_k - F_D$$

che equivale a

$$M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = u(t) - k \cdot x(t) - D \cdot \frac{\partial x}{\partial t} *$$

$$\underbrace{M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + D \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + k \cdot x(t)}_{\text{Segnale di uscita}} = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale di ingresso}}$$

\*Il simbolo  $\partial$  indica la derivata parziale. Una derivata parziale è una derivata rispetto ad una funzione a più variabili.

**Esempio 8.4.** Un altro esempio è il sistema RL (Resistenza Induttanza):

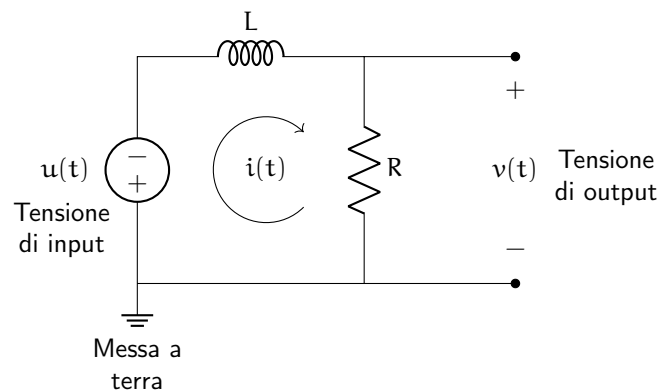


Figura 64: Sistema RL

Possiamo descrivere l'input del sistema come:

$$u(t) = L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + \underbrace{R \cdot i(t)}_{v(t)}$$

Possiamo descrivere l'output come:

$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\text{Legge di Ohm}} i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

Usando la legge di Ohm ( $V = Ri$ ) possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{L}{R} \cdot \frac{\partial v(t)}{\partial t}}_{\text{Segnale d'uscita}} + v(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{Segnale d'ingresso}}$$

Quindi in generale possiamo scrivere un sistema LTI come:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t} + a_{n-1} \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} + \dots + a_1 \frac{\partial v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t} + b_{m-1} \frac{\partial^{(m-1)} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Dove:

- $u(t)$  è il segnale di ingresso
- $v(t)$  è il segnale di uscita
- $a_n, b_m \neq 0 \in \mathbb{R}$

Tutto ciò si può riscrivere come:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t} \quad (1)$$

$n$  e  $m$  sono gli ordini delle equazioni differenziali con  $n \geq m$ .

- Se  $n > m$  il sistema è detto **strettamente proprio**
- Se  $n \geq m$  il sistema è detto **proprio**

Ora possiamo inserire all'interno dei sistemi l'equazione differenziale:

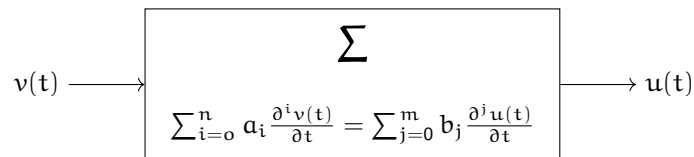


Figura 65: Contenuto del sistema

**Esempio 8.5.** Un esempio di sistema descritto da un'equazione differenziale è il seguente e riprende il sistema massa molla smorzatore dell'esempio 8.3:

$$\underbrace{M}_{\alpha_2} x''(t) + \underbrace{D}_{\alpha_1} x'(t) + \underbrace{K}_{\alpha_0} x(t) = \underbrace{1}_{b_0} u(t)$$

### 8.2.1 Risoluzione

Un sistema descritto da un'equazione differenziale non ha una sola soluzione, a meno che non vengano imposte  $n$  **condizioni iniziali**.

$$\left. v(t) \right|_{t=0^-} \quad \left. \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial^{(n-1)} v(t)}{\partial t} \right|_{t=0^-}$$

Figura 66: Derivata di ordine  $n - 1$  di  $v(t)$  calcolata al tempo  $t = 0^-$

La soluzione è l'uscita  $v$  del sistema (reale o complessa) che può essere scomposta in:

$$\underbrace{v_t}_{\text{risposta totale}} = \underbrace{v_l}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{v_f}_{\text{Risposta forzata}}$$

- **Risposta libera:** Dipende soltanto dalle condizioni iniziali, quindi è il comportamento del sistema in assenza di input.

$$\text{C.I.} \neq 0$$

$$u(t) = 0$$

- **Risposta forzata:** Dipende solo dall'input del sistema e la maggior parte delle volte è diversa dalla risposta libera.

$$\text{C.I.} = 0$$

$$u(t) \neq 0$$

### 8.2.2 Risposta libera (o evoluzione libera)

Per calcolare la risposta libera del sistema definito in 1 bisogna risolvere l'equazione omogenea ( $= 0$ ) associata, quindi si prende la parte sinistra dell'equazione differenziale e si pone uguale a 0 la parte destra.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Per farlo bisogna definire il **polinomio caratteristico**:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

**Esempio 8.6.** Ad esempio:

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$$

Come prima cosa si toglie la parte destra

$$3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Successivamente si scrive il polinomio caratteristico sostituendo a  $y(t)$  la variabile  $s$  e mettendo come potenza di  $s$  l'ordine della derivata:

$$3s^2 + 2s + 1 = 0$$

Ricordando il teorema fondamentale dell'algebra, cioè che la somma delle molteplicità delle radici è uguale all'ordine del polinomio, si può dire che:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$$



sono le soluzioni del polinomio caratteristico  $P(s)$  con relative molteplicità

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$$

vale che

$$\sum_{i=1}^r \mu_i = r$$

. Si ha quindi:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \underbrace{c_{i,l}}_{\in \mathbb{R}, \mathbb{C}} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}}$$

I valori  $c_{i,l}$  vengono calcolati usando le condizioni iniziali.

**Esempio 8.7.** Prendendo come esempio il sistema definito in 8.3 abbiamo l'equazione:

$$Mx''(t) + Dx'(t) + Kx(t) = 0$$

Poniamo:

$$M = 1, \quad D = 2, \quad K = 1$$

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 + 2s + 1 = \\ &= (s + 1)^2 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

con molteplicità algebrica è  $\mu_1 = 2$ . Quindi si hanno 2 soluzioni coincidenti e una sola radice distinta:  $r = 1$  La risposta libera quindi sarà:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= \sum_{i=1}^1 \sum_{l=0}^1 c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &= c_{1,0} e^{-1t} \cdot \frac{t^0}{0!} + c_{1,1} \cdot e^{-1t} \cdot \frac{t^1}{1!} \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} \cdot 1 + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t \end{aligned}$$

**Esempio 8.8.** Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'''(t) + 3v''(t) + 3v'(t) + 1 = 0$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}P(s) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \\ &= (s + 1)^3\end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Il numero di soluzioni è  $r = 1$  con molteplicità  $\mu = 3$ .

La risposta libera è:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \\ &\vdots \\ &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

Ora troviamo i coefficienti  $c_{i,l}$  per trovare la risposta libera specifica al nostro caso, considerando i seguenti valori iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \\ v''(0) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo  $t$  con 0 troviamo il valore di  $c_{1,0}$ :

$$\begin{aligned}v_l(0) &= c_{1,0} \cdot e^0 + c_{1,1} \cdot e^0 \cdot 0 + c_{1,2} \cdot e^0 \cdot \frac{0}{2} \\ &= c_{1,0} = 0\end{aligned}$$

Troviamo il valore di  $c_{1,1}$  derivando la risposta libera:

$$v'_l(t) = -1c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t - c_{1,1} \cdot e^{-t} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t$$

una volta calcolata la derivata, poniamo  $t = 0$

$$\begin{aligned}v'_l(0) &= -c_{1,0} + c_{1,1} - c_{1,1} + c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} \cdot 0 \\ &= -c_{1,0} + c_{1,1} \\ &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

Troviamo il valore di  $c_{1,2}$  facendo la derivata seconda:

$$v''_l(t) = 0 + 1 \cdot e^{-t} \cdot t - e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} - c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t}$$

poniamo  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}v_l''(0) &= 0 + 1 \cdot 0 - 0 + c_{1,2} \cdot 0 - c_{1,2} \cdot 0 + c_{1,2} = 0 \\&= c_{1,2} = 0\end{aligned}$$

Quindi alla fine la risposta libera specifica risulta:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^{-t} + c_{1,1} \cdot e^{-t} \cdot t + c_{1,2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2} \\&= e^{-t} \cdot t\end{aligned}$$

**Esempio 8.9.** Prendiamo ad esempio un sistema descritto nel seguente modo:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

Vogliamo calcolare la risposta libera del sistema. Per farlo bisogna imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Il primo passo è calcolare il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea:

$$\begin{aligned}P(s) &= s^2 + 3s - 4 = 0 \\&= (s - 1)(s + 4)\end{aligned}$$

Il secondo passo è trovare le radici e le molteplicità:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, & \mu_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -4, & \mu_2 &= 1\end{aligned}$$

La risposta libera generica si calcola come:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

e nel nostro caso è:

$$\begin{aligned}v_l(t) &= c_{1,0} \cdot e^t + c_{2,0} \cdot e^{-4t} \\&= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t}\end{aligned}$$

Per trovare la risposta libera specifica bisogna calcolare i coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  derivando e valutando nelle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}v(t) &= c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-4t} \\v'(t) &= c_1 \cdot e^t - 4c_2 \cdot e^{-4t}\end{aligned}$$

Mettiamo a sistema, valutando in  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \\ v'(0) = c_1 \cdot e^0 - 4c_2 \cdot e^0 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 - 4c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -5c_2 = 1 \end{cases} &= \\ \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = -\frac{1}{5} \end{cases} & \end{aligned}$$

La risposta libera specifica è quindi:

$$v_l(t) = \frac{1}{5} \cdot e^t - \frac{1}{5} \cdot e^{-4t}$$

**Definizione 8.4.** Le formule più importanti sono:

- **Modello di un sistema:**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

- **Risposta libera:**

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \underbrace{e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}}_{\text{Modo elementare}}$$

Dove:

$r$  = numero di radici distinte  
 $\mu_i$  = molteplicità della radice  $\lambda_i$   
 $c_{i,l}$  = coefficienti da calcolare

### 8.2.3 Convergenza dei modi elementari

È una funzione che si comporta come un esponenziale, quindi la convergenza dipende dal valore di  $\lambda$ .

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

Vale che:

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = 0$  se e solo se  $\Re(\lambda) < 0$ . **Stabilità asintotica**
2.  $m(t)$  è limitato, cioè può prendere solo valori limitati, su  $[0, \infty)$  se e solo se  $\Re(\lambda) \leq 0$ . Se  $\Re(\lambda) = 0$ , allora perché questo valga  $l$  deve essere uguale a 0 **Stabilità semplice**.
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$  in tutti gli altri casi. Quindi:

$$\Re(\lambda) > 0$$

oppure

$$\Re(\lambda) = 0, l \neq 0$$

**Instabilità.**

#### 8.2.4 Dimostrazioni

1.  $\Re(\lambda) < 0$ :

Riscriviamo  $\lambda$  come:

$$\lambda = a + bi = \sigma + j\omega$$

e riscriviamo  $m(t)$  come:

$$m = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!} = (e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}) \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{Polinomiale}} \cdot \underbrace{e^{\sigma t}}_{\text{Esponenziale}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Esponenziale}}$$

con  $a = -\sigma$  diventa:

$$m = \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{at}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \underbrace{\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}}_{=0} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Limitato}}$$

Il blocco  $e^{j\omega t}$  è un punto che gira su un cerchio di raggio 1, quindi è limitato.

Il blocco  $\frac{t^l}{l!} \cdot \frac{1}{e^{-\sigma t}}$  è limitato per  $t = 0$  e quindi  $m(t)$  tende a 0.

2.  $\Re(\lambda) = 0, l = 0$ :

$$m(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

$$= \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \frac{t^0}{0!} \cdot e^0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$= e^{j\omega t}$$

che è per definizione limitato in modulo.

$$3. \Re(\lambda) > 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Re(\lambda) = 0 \quad l \neq 0$$

$$m(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\frac{1}{\sigma} t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{Siccome } \sigma = \Re(\lambda) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$$

**Definizione 8.5.** Un sistema LTI descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

è detto **asintoticamente stabile** (la risposta è asintoticamente stabile) se e solo se ogni suo modo elementare converge a 0, cioè:

$$\forall i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) = 0 \quad m_i = e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

#### Osservazione

È detto **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico,  $P(s)$ , hanno parte reale negativa.

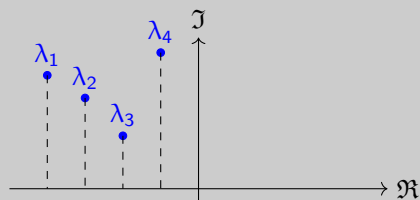


Figura 67: Asintoticamente stabile

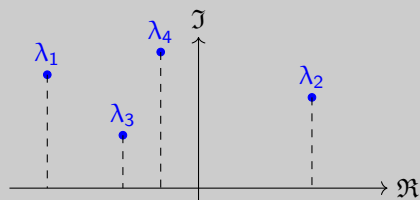
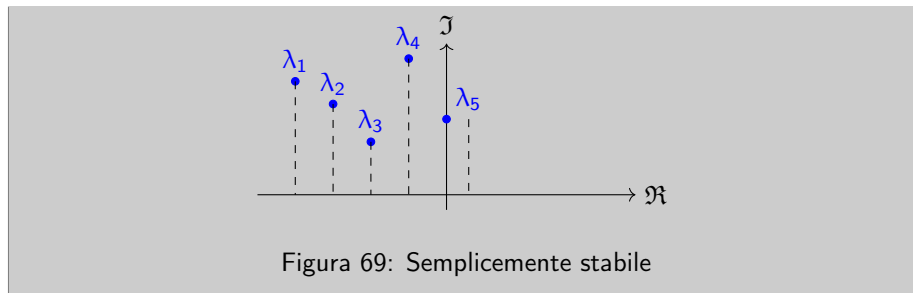


Figura 68: Non asintoticamente stabile



### 8.2.5 Prodotto di convoluzione

Il concetto di correlazione indica quanto due segnali siano simili tra loro e si calcola con il prodotto di convoluzione.

Il concetto di convoluzione è un'operazione tra due segnali che restituisce un terzo segnale.

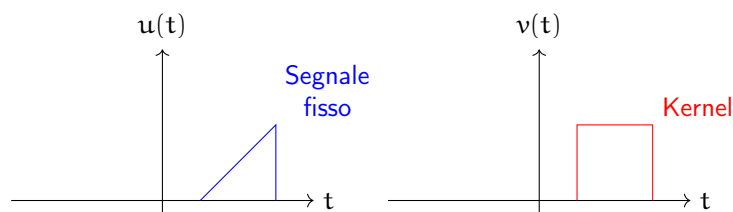


Figura 70: Segnale fisso e kernel

Il **kernel** è un segnale che viene riflesso rispetto all'asse  $y$  e traslato nel tempo  $t$  e moltiplicato per il segnale fisso. Il risultato è un segnale che rappresenta l'area sottesa dal prodotto dei due segnali.

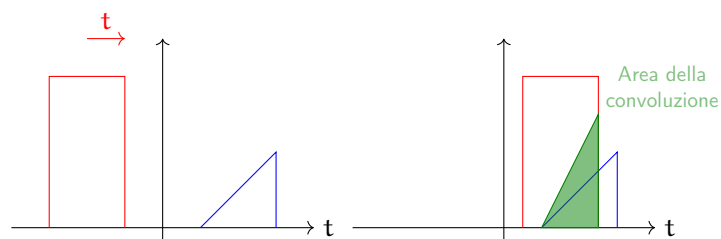


Figura 71: Convoluzione

Il grafico della convoluzione risultante è un segnale che rappresenta il cambiamento nel tempo del prodotto dei due segnali.

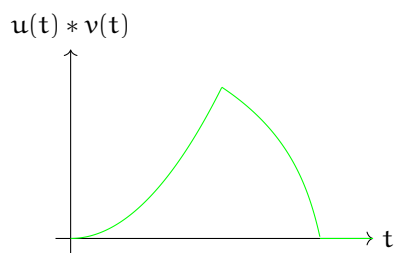


Figura 72: Grafico della convoluzione

**Definizione 8.6.** L'operatore di convoluzione tra due segnali  $u(t)$  e  $v(t)$  è definito come:

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau =$$

$$(v * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \cdot u(\underbrace{t}_{\text{Varia nel tempo}} \underbrace{-\tau}_{\text{Riflessione su y}}) d\tau$$

Il segnale riflesso viene moltiplicato per il segnale  $u(t)$ .

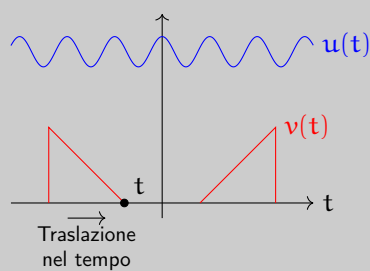


Figura 73: Convoluzione

Se la convoluzione viene effettuata con un impulso, il segnale viene campionato.

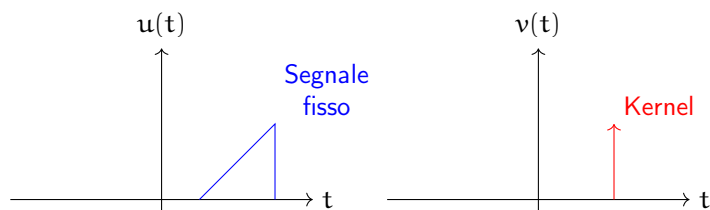


Figura 74: Segnale fisso e kernel



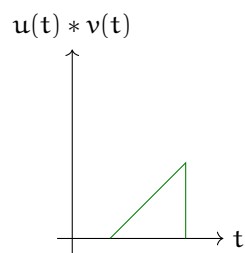
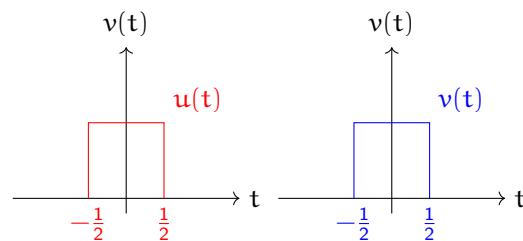


Figura 75: Grafico della convoluzione

**Esempio 8.10.** Ad esempio il segnale triangolo è formato dalla convoluzione di due segnali rettangolari.

$$u(t) = v(t) = \Pi(t)$$

( $\Pi(t)$  è la funzione rettangolo)



1. Scegliere il segnale più semplice
2. Specchiare l'altro segnale rispetto a y ( $f(t) \mapsto f(-t)$ )
3. Traslare il segnale mobile (quello specchiato) nel tempo
4. Spostare  $\forall t$  e calcolare l'integrale (aree sottese)

Il risultato della convoluzione sarà:

$$u(-2) * v(-2) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(-1) * v(-1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$u(0) * v(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$\vdots$

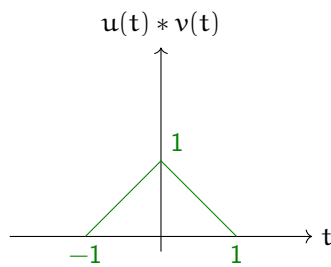


Figura 76: Grafico della convoluzione

### 8.2.6 Risposta impulsiva

**Definizione 8.7.** Dato un sistema a tempo continuo inizialmente a riposo (causale) definiamo la **risposta impulsiva** come l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso uguale all'impulso unitario

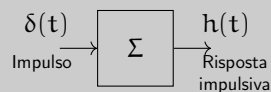


Figura 77: Risposta impulsiva

**Teorema 8.1.** L'uscita  $v(t)$  di un sistema LTI, inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso  $u(t)$  è dato dal seguente prodotto di convoluzione:

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

**Proprietà dell'integrale di convoluzione:**

- **Commutativa:**  $(u * v)(t) = (v * u)(t)$
- **Associativa:**  $(u * v)(t) * w(t) = u(t) * (v * w)(t)$
- **Distributiva** (rispetto alla somma):  $u(t) * (v(t) + w(t)) = (u * v)(t) + (u * w)(t)$

**Osservazione:** Un sistema LTI causale inizialmente a riposo, siccome  $h(t) = 0, t < 0$  (perchè  $\delta(t) = 0, t < 0$ ):

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Per calcolare la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right] \cdot \delta_{-1}(t)$$

dove:

- $d_0$  è il termine costante:  
–  $d_0 \neq 0$  se e solo se il sistema è proprio ( $n = m$ )
- $\delta(t)$  è l'impulso unitario
- $d_{i,l}$  sono i coefficienti della risposta impulsiva (diversi da  $c_{i,l}$  della risposta libera)
- $\frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$  sono i modi elementari e sono gli stessi della risposta libera
- $\delta_{-1}(t)$  è il gradino e serve a moltiplicare per 0 la parte non causale della risposta impulsiva e serve quindi per la causalità

**Esempio 8.11.** Prendiamo ad esempio il sistema:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

Questo sistema ha  $n = m$  perchè è un sistema proprio, quindi:  $d_0 \neq 0$

1. Il primo passo è quello di trovare l'equazione omogenea:

$$v'(t) + 2v(t) = 0$$

2. Poi bisogna calcolare il polinomio caratteristico:

$$P(s) = s + 2 = 0$$

3. Bisogna poi trovare le radici e i modi elementari:

$$\lambda_1 = -2 \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

( $l = 0 \dots \mu_i - 1$ ) i modi elementari sono:

$$m(t) = e^{-2t}$$

4. Scriviamo la risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

5. Riscrivo l'equazione iniziale ponendo:

$$v(t) = h(t) \quad u(t) = \delta(t)$$

L'equazione diventa:

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

$\Downarrow$

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

• Calcolo tutte le derivate di  $h(t)$ :

$$h'(t) = \delta_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t)$$

6. Sostituisco  $v(t) \mapsto h(t)$  e  $u(t) \mapsto \delta(t)$

$$v'(t) + 2v(t) = u'(t) + u(t)$$

$\Downarrow$

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\begin{aligned} & d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) \\ & + 2(d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t)) \\ & = \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$d_0 \cdot \delta'(t) - 2d_0 \cdot \delta(t) + d_{1,0} \cdot e^{-2t} \cdot \delta(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

Valutiamo le funzioni in  $t = 0$

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot e^{-2 \cdot 0} \cdot \delta(0) = \delta'(0) + \delta(0)$$

Sposto tutto a sinistra:

$$d_0 \cdot \delta'(0) - 2d_0 \cdot \delta(0) + d_{1,0} \cdot \delta(0) - \delta'(0) - \delta(0) = 0$$

Raccolgo per  $\delta(0), \delta'(0) \dots \delta^n(t)$  che sono linearmente indipendenti:

$$(d_0 - 1) \cdot \delta'(0) + (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0$$

7. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} (d_0 - 1) \cdot \delta'(0) = 0 \\ (d_{1,0} - 2d_0 - 1) \cdot \delta(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \end{cases}$$

8. Sostituisco i coefficienti appena trovati

$$\begin{aligned} h(t) &= \underbrace{d_0}_1 \cdot \delta(t) + \underbrace{d_{1,0}}_{-1} \cdot e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

E questa è la risposta impulsiva del sistema

9. Bisogna calcolare la risposta forzata...

**Esercizio 8.1.** Si vuole calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$2v'(t) - v(t) = u'(t) + 3u(t)$$

Siccome abbiamo la derivata prima sia a sinistra a destra il sistema è proprio ( $n = m$ )  $\rightarrow d_0 \neq 0$ .

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

1. Calcolo le radici usando l'equazione omogenea del polinomio caratteristico:

$$2s - 1 = 0$$

$$2s = 1$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad r = 1 \quad \mu = 1$$

2. Calcolo la risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

3. Riscrivo l'equazione iniziale con  $v(t) = h(t)$ ,  $u(t) = \delta_0(t)$ :

$$2h'(t) - h(t) = \delta_0'(t) + 3\delta_0(t)$$

4. Calcolo le derivate di  $h(t)$ :

$$h'(t) = d_0 \cdot \delta_0'(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t)$$

5. Sostituisco:

$$2 \left[ d_0 \delta'_0(t) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) \right] - \left[ d_0 \cdot \delta_0(t) + d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] = \delta'_0(t) + 3\delta_0(t)$$

Togliere tutti i termini  $\delta_{-1}(0^-) = 0$

6. Raccolgo le funzioni indipendenti  $\delta_0(t), \delta'_0(t), \delta''_0(t)$ :

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \delta'_0(t) = \delta'_0(t) \\ 2d_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_0(t) = 3\delta_0(t) \end{cases}$$

Imponiamo  $t = 0^-$

$$\begin{cases} 2d_0 \cdot \cancel{\delta'_0(0)} = \cancel{\delta'_0(0)} \\ \left( 2d_1 \cdot \underset{=1}{e^{\frac{1}{2} \cdot 0}} \right) \cdot \delta_0(0) = 3\delta_0(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_0 = 1 \\ 2d_1 - d_0 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_0 = \frac{1}{2} \\ d_1 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

7. Scrivo la risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta_0(t) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

8. Calcolo la risposta forzata nell'esercizio 8.2

### 8.2.7 Risposta forzata

**Definizione 8.8.** La risposta forzata vuol dire che l'uscita del sistema dipende solo dall'input di un sistema LTI, causale per un ingresso  $u(t)$  ( $u(t) = 0, t < 0$ ) e si definisce come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

dove:

$u$  = Input

$h$  = Risposta impulsiva

**Esempio 8.12.** Riprendendo l'ultimo punto dell'esempio 8.11, la risposta forzata è:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t^-}^0 u(t) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

**Esercizio 8.2.** Data la risposta impulsiva dell'esercizio 8.1 calcoliamo la risposta forzata con un input  $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$  (gradino alto 3):

$$\begin{aligned} v_f &= (h * u)(t) \\ &= (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta_0(\tau) + \frac{7}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \right] \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \delta_0(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot 3\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta_0(\tau)}_{[0, 0^+]} \cdot \underbrace{\delta_{-1}(t - \tau)}_{[-\infty, t]} d\tau + \frac{21}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\tau} \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{21}{4} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\tau} d\tau \\ &\rightarrow \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^t \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{21}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= v_f(t) \end{aligned}$$

Teniamo fissa la risposta impulsiva  $h(t)$  e trasliamo il gradino  $u(t)$

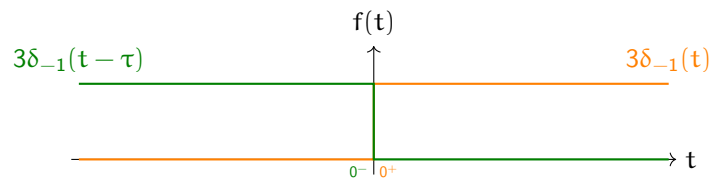


Figura 78:  $3\delta_{-1}(t - \tau)$  viene traslato

$+\infty$  e  $-\infty$  diventano 0 e  $t$  perchè:

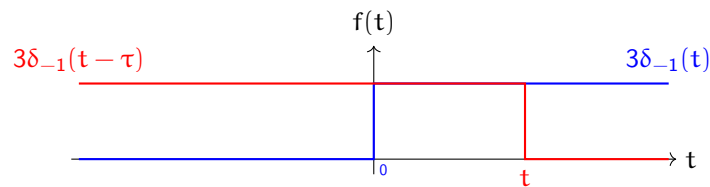


Figura 79:  $3\delta_{-1}(t - \tau)$  viene traslato

### 8.2.8 Risposta totale

Data un'equazione che descrive un sistema LTI:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

la risposta totale si calcola come la somma della risposta libera e forzata:

$$v_t(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

La risposta libera è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t}$$

La risposta forzata è data da:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (\underbrace{u}_{\text{Input}} * \underbrace{h}_{\text{Risposta impulsiva}})(t) \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

e la risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

### 8.3 Stabilità in base alle radici

Considerando 3 radici si ha:

- **Stabilità asintotica:** Tutte le radici devono avere parte reale minore di 0:

$$\forall i \quad \Re(\lambda_i) < 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{-1}_{\Re(\lambda_1) < 0} + i \quad \underbrace{-2}_{\Re(\lambda_2) < 0} - i \quad \underbrace{-3}_{\Re(\lambda_3) < 0}$$



- **Semplicemente stabile:** Solo una radice ha parte reale uguale a 0:

$$\exists i \ \Re(\lambda_i) = 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\Re(\lambda_1)=0} + i \quad -2 > 0 - i \quad -3 > 0$$

- **Asintoticamente instabile:** Tutte le radici hanno parte reale minore di 0  
tranne un sottoinsieme che hanno parte reale uguale a 0:

$$\forall i \ \Re(\lambda_i) \leq 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{0}_{\Re(\lambda_i=0)} + i \quad \underbrace{0}_{\Re(\lambda_i=0)} - i \quad -3 + i$$

- **Totalmente instabile:** Almeno una radice ha la parte reale maggiore di 0:

$$\exists i \ \Re(\lambda_i) > 0$$

ad esempio:

$$\underbrace{1}_{\Re(\lambda_1)>0} + i \quad 0 - i \quad -3 + i$$

## 8.4 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza è la risposta di un sistema LTI a un segnale sinusoidale. Abbiamo visto che gli esponenziali complessi si rappresentano come:

$$Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Questi esponenziali si chiamano **Fasori** perchè vengono rappresentati come vettori rotanti in un piano complesso, come mostrato in figura 30.

$$u(t) = Ae^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 t} \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow v(t)$$

Figura 80: Fasore

La risposta in frequenza si calcola come la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva  $h(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot Ae^{j(\omega_0(t-\tau) + \phi)} d\tau \\ &= \underbrace{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}}_{\text{Costante}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau}_{|f| < \infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau \right| &< \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |e^{-j\omega_0\tau}| d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot 1 d\tau < \infty
\end{aligned}$$

La risposta in frequenza è quindi:

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0\tau} d\tau$$

Da questa formula si ha che l'uscita  $v(t)$  è uguale a:

$$v(t) = H(j\omega_0) \cdot A e^{j(\omega_0 t + \phi)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva del sistema e anche la trasformata di Laplace della risposta impulsiva ristretta al solo asse immaginario:

#### Teorema 8.2.

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s), \quad s = j\omega$$

Dove:

$\mathcal{F}$  = Trasformata di Fourier

$\mathcal{L}$  = Trasformata di Laplace

**Esempio 8.13.** Se prendiamo in considerazione un sistema dinamico, come ad esempio il sistema massa-molla-smorzatore dell'esempio 8.3, descritto dall'equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

Per calcolare la soluzione nel dominio del tempo si può fare il passaggio solito fatto fin'ora, oppure si può prendere una scorciatoia e calcolare la trasformata di Laplace delle equazioni algebriche per trovare poi la soluzione in  $\mathbb{C}$  rendendo più semplice il calcolo.

## 9 Trasformata unilatera di Laplace (TDL)

**Definizione 9.1** (Trasformata unilatera di Laplace). Sia  $v(t)$  una funzione generica (non l'uscita di un sistema) con  $t \in \mathbb{R}$  ottenuta da somme di funzioni a variabili reali con valori reali o complessi (ad esempio somma di fasori).

- Localmente sommabile in  $[0, \infty)$  :

$$\int_a^b |v(t)| dt < \infty, \quad \forall a, b \in [0, \infty)$$

- Formata da un insieme finito di segnali polinomiali

Definiamo la trasformata unilatera di Laplace come:

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}[v(t)](s)$$

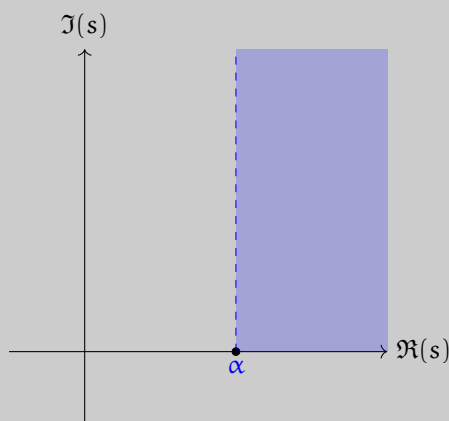
**N.B.:** Data  $v(t)$  localmente sommabile, non significa che  $V(s)$  sia localmente sommabile

Bisogna ora definire la **Regione di convergenza**:

**Definizione 9.2.** La regione di convergenza è un semipiano positivo definito come:

$$\text{RDC} = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > \alpha\}$$

Dove  $\alpha$  è l'ascissa di convergenza:



**Dimostrazione:** Sia  $v(t)$  una combinazione lineare di esponenziali:

$$v(t) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$$

Vogliamo dimostrare che la regione di convergenza della trasformata di Laplace è un semipiano a destra di  $\alpha$ :

$$\text{RDC} \mathcal{L}[v(t)](s) = \{s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > \alpha\}$$

Dimostro:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt\end{aligned}$$

Prendiamo un preciso  $i \rightarrow \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$   $s = \sigma + j\omega$

$$\begin{aligned}\int_{0-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{0-}^{+\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} \cdot e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) = \frac{1}{\sigma - \sigma_i + j\omega_i - j\omega}\end{aligned}$$

L'integrale converge se  $\sigma_i - \sigma < 0 \rightarrow \sigma > \sigma_i$  e quindi:

$$\begin{aligned}\sigma &= \Re(s) \quad \sigma_i = \Re(\lambda_i) \\ \forall s \in \mathbb{C} \quad \Re(s) &> \Re(\lambda_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \alpha &\geq \max(\Re(\lambda_i))\end{aligned}$$

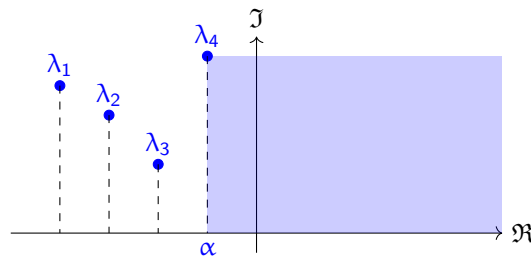


Figura 81: Asintoticamente stabile

Per un sistema LTI stabile RDC contiene sempre l'asse immaginario

## 9.1 Proprietà della trasformata di Laplace

### 9.1.1 Linearità

Siano  $v_1$  e  $v_2$  funzioni che ammettono la trasformata di Laplace e rispettivamente  $V_1$  e  $V_2$  le loro trasformate di Laplace:

$$\begin{aligned}v_1 &\rightarrow V_1(s) \\ v_2 &\rightarrow V_2(s)\end{aligned}$$

allora:  $\alpha v_1(t) + b v_2(t)$  ammette la trasformata di Laplace ed è definita come:

$$\mathcal{L}[\alpha v_1(t) + b v_2(t)](s) = \alpha V_1(s) + b V_2(s)$$

Ha come ascissa di convergenza:

$$\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

### 9.1.2 Traslazione nel tempo (ritardo temporale)

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $v(t - \tau)$ , con  $\tau > 0$  è:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

L'ascissa di convergenza rimane immutata

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{\tau-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau \\ x &= t - \tau \\ t &= x + \tau \\ dt &= dx \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \\ &= e^{-s\tau} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\ &= e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)\end{aligned}$$

### 9.1.3 Traslazione nel dominio dei complessi (spostamento in frequenza)

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $e^{\lambda t} \cdot v(t)$  è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) = V(s - \lambda)$$

L'ascissa di convergenza rimane spostata:

$$\alpha = \alpha_0 + \Re(\lambda)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot v(t)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} e^{\lambda t} \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{(\lambda-s)t} dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-\overbrace{(s-\lambda)}^r} t dt \\ &= \mathcal{L}[v(t)](r) \\ &= \mathcal{L}[v(t)](s - \lambda)\end{aligned}$$

### 9.1.4 Cambio di scala

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $v(rt)$  è:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} \cdot V\left(\frac{s}{r}\right)$$

L'ascissa di convergenza viene scalata:

$$\alpha = r \cdot \alpha_0$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(rt)](s) &= \int_{0-}^{+\infty} v(rt) \cdot e^{-st} dt \\ x &= rt \\ t &= \frac{x}{r} \\ dt &= \frac{dx}{r} \\ &= \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s \frac{x}{r}} dx \\ &= \frac{1}{r} \int_{0-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-\frac{s}{r} x} dx \\ &= \frac{\mathcal{L}[v(t)]\left(\frac{s}{r}\right)}{r} \end{aligned}$$

### 9.1.5 Proprietà della derivata

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$  ed esiste ed è finito il limite:  $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ , allora anche la sua derivata  $i$ -esima ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = s^i \cdot V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{i-k-1}$$

L'ascissa di convergenza è minore dell'ascissa di convergenza originale

$$\alpha \leq \alpha_0$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) &= \int_{0-}^{+\infty} \overbrace{\frac{dv(t)}{dt}}^{f'(t)} \cdot \overbrace{e^{-st}}^{g(t)} dt \\ &= v(t) \cdot e^{-st} \Big|_{0-}^{+\infty} - \underbrace{\left(-s \int_{0-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt\right)}_{\text{TdL}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \overbrace{v(\varepsilon)}^0 \cdot e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon) \cdot e^{-s\varepsilon} + s \cdot V(s) \\ &= s \cdot V(s) - v(0^-) \end{aligned}$$

**Dimostrazione per la derivata seconda:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)\right](s) \\
 &= s \cdot \mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](s) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-} \\
 &= s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-} \\
 &= s^2 \cdot V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(t)}{dt}\Big|_{0^-}
 \end{aligned}$$

### 9.1.6 Moltiplicazione per una funzione polinomiale

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $t^i \cdot v(t)$  è:

$$\mathcal{L}[t^i \cdot v(t)](s) = (-1)^i \cdot \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

**Dimostrazione** ( $i = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t \cdot v(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t \cdot v(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot (-t \cdot e^{-st}) dt \\
 &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt}_{\text{TdL } v(t)} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

### 9.1.7 Integrazione nel tempo

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , allora la trasformata di Laplace di  $\psi(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau$  è:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

E l'ascissa di convergenza è:

$$\alpha = \max(\alpha_0, 0)$$

**Dimostrazione:**

$$v_i(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau \rightarrow v'_i(t) = v(t) \text{ e } v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(\tau) d\tau = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)](s) &\stackrel{9.1.5}{=} \mathcal{L}[v_1'(t)](s) \\ &= s \cdot \mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= s \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right](s) = \frac{V(s)}{s}$$

### 9.1.8 Integrale nel dominio dei complessi

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , se esiste il  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$ , allora la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](s) ds$$

### 9.1.9 Teorema del valore iniziale

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , ed esiste ed è finito il limite  $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

### 9.1.10 Teorema del valore finale

Sia  $v(t)$  una funzione che ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , ed esiste ed è finito il limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

### 9.1.11 Convoluzione nel dominio del tempo

Siano  $u(t)$  e  $v(t)$  due funzioni causali (nulle per  $t < 0$ ) che ammettono la trasformata di Laplace  $U(s)$  e  $V(s)$ , allora  $(u * v)(t)$  ammette la trasformata di Laplace e vale:

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$



**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-st} dt \\
 \{u(t) = 0, \quad t < 0\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot v(t - \tau) \cdot e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left( \int_{0^-}^{+\infty} v(t - \tau) \cdot e^{-st} dt \right) d\tau \\
 \text{Sostituisco: } x &= t - \tau, \quad t = x + \tau, \quad dt = dx \\
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot \left( \int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_{0^-}^{+\infty} v(x) \cdot e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

## 9.2 Trasformate notevoli

### 9.2.1 Impulso

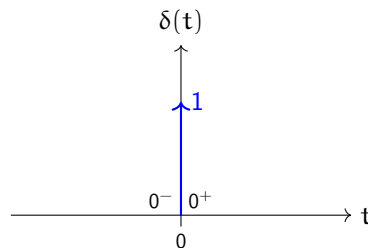


Figura 82: Impulso

- La trasformata di Laplace dell'impulso  $\delta_0(t)$  è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \overset{\text{Proprietà impulso}}{\delta_0(t)} \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-st} \Big|_{t=0} = 1
 \end{aligned}$$

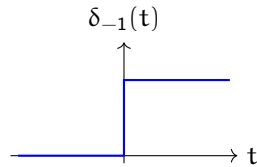
- La trasformata di Laplace di un impulso di altezza  $A$  è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A \cdot \delta_0(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) \\
 &= A
 \end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'impulso ritardato è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{t-\tau}(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= e^{-s\tau}
 \end{aligned}$$

### 9.2.2 Gradino



- La trasformata di Laplace del gradino  $\delta_{-1}(t)$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty; \mu \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_{t=\mu}^{\varepsilon} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-s\varepsilon}}{s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace del gradino di altezza  $A$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace del gradino ritardato è:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \cdot \frac{1}{s}$$

### 9.2.3 Esponenziale complesso causale

- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso causale  $v(t) = e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$  è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$

- La trasformata di Laplace dell'esponenziale con una costante  $A$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) &= A \cdot \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{A}{s - \lambda}\end{aligned}$$

- La trasformata di Laplace dell'esponenziale complesso ritardato è:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \delta_{-1}(t)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

### 9.2.4 Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale

La trasformata di Laplace di  $v(t) = \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)$  è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) &= \frac{1}{l!} \cdot \mathcal{L} [t^l \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L} [e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{d^l}{ds^l} \left( \frac{1}{s - \lambda} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{l!(-1)^e}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}} \end{aligned}$$

**Esempio 9.1.** Ad esempio se:

- $l = 1$ , la trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L} [t \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

- $l = 2$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t^2}{2} \cdot e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

**Esempio 9.2.** Alcuni casi speciali sono:

•

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t}{l!} \cdot \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{s^{l+1}}$$

•

$$\mathcal{L} [t \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{l!}{s^{l+1}}$$

•

$$\mathcal{L} [e^{-\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{1}{s + \lambda}$$

### 9.2.5 Funzione coseno

La trasformata di Laplace di  $\cos(\omega t)$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right](s) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}](s) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

### 9.2.6 Funzione seno

La trasformata di Laplace di  $\sin(\omega t)$  è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right](s) \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}](s) \\ &= \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

## 9.3 Risoluzione di sistemi LTI causali

Per un sistema LTI causale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Se  $n \geq m$  e  $u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)$ , (cioè  $u(t) = 0$ ,  $t < 0$ ) e consideriamo le  $n - 1$  condizioni iniziali:

$$v(0^-); \frac{dv(0^-)}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}v(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Se  $u(t)$  ammette la trasformata di Laplace  $U(s)$  e  $v(t)$  ammette la trasformata di Laplace  $V(s)$ , con  $t \geq 0$  allora si ha che:

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[ \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

Applicando  $n + m$  vale la regola della derivata:

$$a_n \left[ s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-1} \right] +$$

$$a_{n-1} \left[ s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \cdot s^{n-k-2} \right] + \dots + a_0 V(s)$$

Imponiamo le condizioni iniziali  $u(t) \Big|_{t=0^-} = 0$ , quindi si ha che le derivate in 0 sono nulle:

$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

Espandendo le sommatorie e raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}_{d(s)} V(s)$$

$$- \overbrace{a_n \cdot v(0^-) \cdot s^{n-1} - \left( a_{n-1} \cdot v(0^-) + a_n \cdot \frac{dv(0^-)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) s^{n-2} - \dots}_{p(s)}$$

$$- \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \cdot \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right) =$$

$$= \underbrace{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}_{n(s)} U(s)$$

Sostituendo diventa:

$$d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$  è un polinomio di grado  $m$  che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. È il **polinomio caratteristico** di  $u(t)$
- $d(s)$  è un polinomio di grado  $n$  che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'uscita. È il **polinomio caratteristico** di  $v(t)$

- $p(s)$  è un polinomio di grado  $n - 1$  che dipende dalle condizioni iniziali

$$p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left( \sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \cdot \frac{d^{n-j}v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

- $\frac{p(s)}{d(s)}$  è una funzione razionale che dipende solo dalle condizioni iniziali del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita  $v(t)$ . È la **trasformata di Laplace della risposta libera**:

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$  è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'ingresso  $u(t)$  e dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'uscita  $v(t)$  moltiplicati per la trasformata di Laplace di  $u(t)$ . È la **trasformata di Laplace della risposta forzata** siccome una convoluzione diventa un prodotto di trasformate:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s)$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$  si chiama **Funzione di trasferimento**  $H(s)$  ed è definita come:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

è il rapporto tra i polinomi caratteristici dell'ingresso  $u(t)$  e dell'uscita  $v(t)$ .  $H(s)$  è definita come la **trasformata di Laplace della risposta impulsiva**  $h(t)$

$$h(t) = d_0 \cdot \delta_0(t) + \left( \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$= d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}}$$

**Esempio 9.3.** Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

Si può trasformare usando la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^3v(t)}{dt^3} \right] (s) + \mathcal{L} \left[ \frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] (s) = \mathcal{L} \left[ \frac{du(t)}{dt} \right] (s)$$

Applicando la regola della derivata:

$$s^3 V(s) - s^2 v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s - \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} \cdot s^0 + \\ + s^2 V(s) - s \cdot v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} \cdot s^0 = s \cdot U(s)$$

Raccogliendo si ha:

$$\underbrace{(s^3 + s^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[ s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} \right]}_{p(s)} = \underbrace{s}_{n(s)} \cdot U(s)$$

Quindi:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \\ = \frac{s}{(s^3 + s^2)} \cdot U(s) + \frac{s^2 v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} s + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt}}{s^3 + s}$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 0; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} \cdot U(s)$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali

$$v(0^-) = 1; \quad \frac{dv(0^-)}{dt} = \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} = 0$$

allora si ha:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s} \cdot U(s) + \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2}$$