

Esercizi linguaggi non regolari

ESERCIZIO 2.1. Si dimostri che non è regolare il linguaggio

$$L = \{ 0^n 1^m 0^{m+n} \mid m, n \geq 0 \}$$

Condizioni di appartenenza

$$0^a 1^b 0^c \in L \iff c = a + b$$

Dimostra che il pumping lemma non vale:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists z \in L. |z| \geq k . \begin{cases} |uv| \leq k \\ |v| > 0 \\ \exists i \in \mathbb{N} uv^i w \notin L \end{cases} \iff L \notin \text{Reg}$$

Prendo $k \in \mathbb{N}$ e $n=m=k$. Considero una stringa nel linguaggio:

$$z = 0^k 1^k 0^{2k}$$

Ripeto la stringa i volte

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^k 0^{2k}$$

Cerco un indice che la faccia uscire dal linguaggio

$$\bullet z_2 = 0^{k+|v|} 1^k 0^{2k}$$

$$z_2 \in L \iff 2k = k + |v| + k$$

$$\iff 2k = 2k + |v|$$

$$\iff |v| = 0 \quad \text{Viola le condizioni del pumping lemma} \Rightarrow z_2 \notin L$$

Quindi L non è regolare

ESERCIZIO 2.2. Dimostrare che non è regolare il linguaggio

$$L = \{ 0^n 0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$L = \{ 0^n 0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 0^{n+2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Condizioni d'appartenenza

$$0^{a+b} \in L \iff b = 2^a$$

Considero $k \in \mathbb{N}$ e $n=k$. Prendo una stringa nel linguaggio più lunga di k

$$z = 0^{k+2^k}$$

L'unica suddivisione possibile è $uv \in 0^k$ perché $|uv| \leq k$

Ripeto v i volte

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v| + 2^k}$$

Cerco un indice che faccia uscire la stringa dal linguaggio

$$\exists z = 0^{\overbrace{K+|v|}^{\alpha}} \underbrace{1^k}_b \quad (b = 2^{\alpha})$$

$$\exists z \in L \iff 2^K = 2^{K+|v|}$$

$$\iff K = K + |v|$$

$$\iff |v|=0 \quad \text{Viola i vincoli del pumping lemma}$$

$\exists z \notin L$, quindi L non è regolare

ESERCIZIO 2.3. Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio non è regolare.

$$L = \left\{ x \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{il numero di occorrenze di 0 in } x \text{ è} \\ \text{uguale al numero di occorrenze di 1 meno uno} \end{array} \right\}$$

Condizioni di appartenenza

$$x \in L \iff |0|_x = |1|_x - 1$$

Considero $k \in \mathbb{N}$ e prendo una stringa nel linguaggio più grande di k

$$z = 0^K 1^{K+1}$$

L'unica suddivisione possibile è $uv \in 0^K$ perché $|uv| \leq k$. Ripeto v i volte

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^{k+1}$$

Cerco un indice che faccia uscire la stringa dal linguaggio

$$z_2 = 0^{k+|v|} 1^{k+1}$$

$$z_2 \in L \iff |0|_{z_2} = |1|_{z_2} - 1$$

$$\iff k + |v| = k + 1 - 1$$

$$\iff |v|=0 \quad \text{Viola i vincoli del pumping lemma.}$$

Quindi $z_2 \notin L$, di conseguenza L non è regolare.

ESERCIZIO 2.4. Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio non è regolare.

$$L = \{ 0^m 1^n 1^n 0^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n > 0 \}$$

$$L = \{ 0^m 1^n 1^n 0^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n > 0 \}$$

$$= \{ 0^m 1^{2n} 0^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n > 0 \}$$

Condizioni di appartenenza

$$0^a 1^b 0^c \in L \Leftrightarrow a=c \wedge a+b > 0 \wedge b \in 2\mathbb{N}$$

Considero $k \in \mathbb{N}$ e $a=c=k$, $b=k+1$ per non imporre nessun vincolo su k . Prendo una stringa nel linguaggio più lunga di k

$$z = 0^k 1^{2k+2} 0^k$$

L'unica suddivisione possibile è quella in cui uv appartiene al primo gruppo di 0 perché $|uv| \leq k$. Ripeto v i volte

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^{2k+2} 0^k$$

Cerco un indice che faccia uscire la stringa dal linguaggio

$$z_0 = 0^{k-|v|} 1^{2k+2} 0^k$$

$$z_0 \in L \Leftrightarrow k - |v| = k \quad \text{X} \quad \wedge \quad 2k+2 \in 2\mathbb{N} \quad \checkmark \quad \wedge \quad k + k+1 > 0 \quad \checkmark$$

$\Leftrightarrow |v|=0$ Viola i vincoli del pumping lemma

$z_0 \notin L$ quindi il linguaggio non è regolare.

ESERCIZIO 2.5. Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio non è regolare.

$$L = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ è palindrome} \}$$

$$\begin{aligned} L &= \{ x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ è palindrome} \} \\ &= \{ x = a a^R \mid a \in \{0,1\}^* \} \end{aligned}$$

Condizioni di appartenenza

$$x = ab \in L \Leftrightarrow b = a^R$$