Esame 21/6/23

PARTE 1

Esercizio 1 (punti: ....../4)
Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6x + 6xy^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

e indicare il più ampio **intervallo** su cui tale soluzione è definita.

$$y' = 6x(1+y^2)$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 6x$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = 6 \int x \, dx$$

$$\arctan(y) = 3x^2 + c$$

$$y(2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\arctan(0) = 3 \cdot 2^2 + c$$

$$c + 12 = 0$$

$$c = -12$$

$$\arctan(y) = 3x^2 - 12$$

$$y = \tan(3x^2 - 12)$$

$$y(2) = \tan(12 - 12)$$

$$= \tan(0)$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

$$-\frac{\pi}{2} < 3x^2 - 12 < \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 12 > -\frac{\pi}{2} \\ 3x^2 - 12 < \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 > -\frac{\pi}{6} + 4 \\ x^2 < \frac{\pi}{6} + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \sqrt{-\frac{\pi}{6} + 4} \lor \overbrace{x > \sqrt{\frac{\pi}{6} - 4}}^{\text{Imp.}} \\ \underbrace{\sqrt{-\frac{\pi}{6} - 4} <}_{\text{Imp}} x < \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{-\frac{\pi}{6}+4} < x < \sqrt{-\frac{\pi}{6}+4}$$

L'intervallo più grande é $\left(\sqrt{-\frac{\pi}{6}+4}, \sqrt{\frac{\pi}{6}+4}\right)$

Esercizio 2 (punti: . . . . . . /4)
Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = 2\sin t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata

$s^2+s=0$

$s(s+1)=0$

$s_1=-1$

$s_2=0$

$z=C_1e^{-t}+C_2$

Con il metodo di somiglianza scelgo una ansatz

$\bar{y}=a\cos t+b\sin t$

$\bar{y}'=-a\sin t+b\cos t$

$\bar{y}''=-a\cos t-b\sin t$

Sostituisco nell'eq. originale

$-a\cos t-b\sin t-a\sin t+b\cos t=2\sin t$

$\sin t(-b-a)+\cos t(-a+b)=2\sin t$

$$\begin{cases} -b-a=2 \\ -a+b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a=2 \\ b=a \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$\bar{y}=-\cos t-\sin t$

$y(t)=z+\bar{y}=C_1e^{-t}+C_2-\cos t-\sin t$

$y'(t) = -C_1 e^{-t} + \sin t - \cos t$

Impongo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+C_2=1 \\ C_1=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2=-1 \\ C_1=2 \end{cases}$$

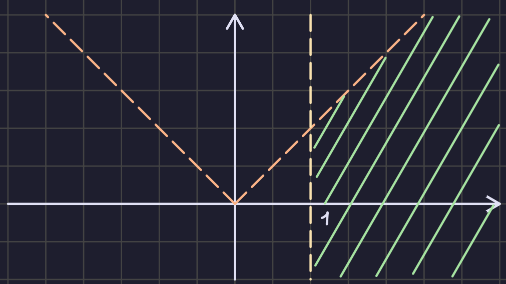
$y(t) = 2e^{-t} - 1 - \cos t - \sin t$

Esercizio 3 (punti: ....../4)
Data la funzione

$$f(x,y) = (x+y^2)\ln(|x|-y) + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a) (2 punti) determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!)

$$D = \begin{cases} |x|-y>0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} y<|x| \\ x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} y<|x| \\ x>1 \end{cases}$$



L'insieme è:
Illimitato perchè non esiste nessun circuito chiuso che contiene l'insieme
Aperto perchè x = 1 e y = |x| non sono compresi nel dominio
Connesso perchè tutti i punti del segmento che collega qualsiasi coppia di punti nell'insieme si trovano nell'insieme

b) (2 punti) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto $(2, 1, f(2,1))$

$$F(x,y) = (x+y^2)\ln(|x|-y) + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(|x|-y) + (x+y^2)\dfrac{x}{(|x|-y)|x|} - \dfrac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} \\ 2y\ln(|x|-y) - \dfrac{x+y^2}{|x|-y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(2,1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(2,1) = 1$$

$$T(x,y) = F(2,1) + \nabla F(2,1) \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{5}{2}(x-2) - 3(y-1)$$

$$= \frac{5}{2}x - 3y - 1$$

Esercizio 4 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Suggerimento: prendere in considerazione la restrizione di f alla parabola di equazione $y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$$

Lungo $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2}\sqrt{x^2+x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \, x\sqrt{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1}$$

Lungo $x = 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{y}\sqrt{y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 \cdot y = 0$$

I limiti lungo due curve diverse non sono uguali, quindi il limite non esiste in $(0,0)$

b) (2 punti) Scrivere le equazioni parametriche della retta r tangente all'arco di curva

$$\gamma(t) = (t^3, t^2),\ t \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

nel suo punto $T(\frac{1}{27}, \frac{1}{9})$.
Qual è l'equazione cartesiana di r?

$\gamma(t) = (t^3, t^2) \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$

$\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$

$$T = \gamma(t) \rightarrow \begin{cases} t^3 = \frac{1}{27} \\ t^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$\gamma(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right) \qquad \gamma'(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$r(s) = \gamma(\frac{1}{3}) + s\, \gamma'(\frac{1}{3})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{27} + s, \frac{1}{9} + 2s\right)$$

L'equazione cartesiana é

$$\begin{cases} x = \frac{1}{27} + s \\ y = \frac{1}{9} + 2s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = x - \frac{1}{27} \\ y = \frac{1}{9} + 2\left(x - \frac{1}{27}\right) \end{cases} \rightarrow y = 2x + \frac{1}{27}$$

Esercizio 5 (punti: ....../4)

a) (2 punti) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \alpha x^2 - \beta y^2 - 4x + \alpha y$$

con α, β parametri reali.
Determinare i valori di α, β in modo tale che $(1, -\frac{1}{3})$ sia un punto stazionario per f. Classificare poi tale punto.

$F(x, y) = \alpha x^2 - \beta y^2 - 4x + \alpha y$

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 2\alpha x - 4 \\ -2\beta y + \alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha x - 4 = 0 \\ -2\beta y + \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\alpha} & \alpha \neq 0 \\ y = \frac{\alpha}{2\beta} & \beta \neq 0 \end{cases}$$

Punto critico $A = \left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\alpha}{2\beta} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{cases} \frac{2}{\alpha} = 1 \\ \frac{\alpha}{2\beta} = -\frac{1}{3} \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Punto critico $A = \left(1, -\frac{1}{3} \right)$

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & -2\beta \end{pmatrix} \to \text{Matrice diagonale}$$

$\downarrow$

$\lambda_1 = 2\alpha = 4$

$\lambda_2 = -2\beta = 6$

Hessiana definita positiva $\Rightarrow$ A punto di minimo locale

b) (2 punti) Posto $\alpha = 3, \beta = 0$, calcolare massimo e minimo assoluto, se esistono, della funzione f su

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$$

$F(x,y) = 3x^2 - 4x + 3y$

$\downarrow y = x$

$F(x,x) = 3x^2 - 4x + 3x$

$= 3x^2 - x$

$= x(3x-1) \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

$F'(x,x) = 6x - 1 = 0$

$\downarrow$

$6x = 1$

$x = \frac{1}{6}$

In $x = \frac{1}{6}$ c'é un punto stazionario

$F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6}$

$= -\frac{1}{12}$ Punto di minimo assoluto

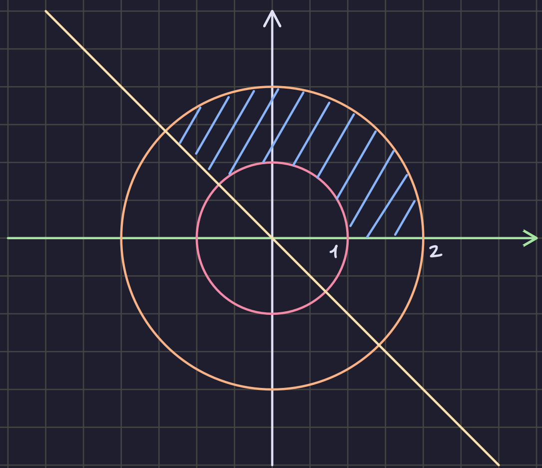
Esercizio 6 (punti: ....../4)
Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, x+y \ge 0, y \ge 0\}$$

e calcolare:

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \\ x+y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge -x \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Trasformo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \in [1,2] \\ \theta \in [0, \frac{3}{4}\pi] \end{matrix}$$

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

Determinante della matrice Jacobiana

$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2} \cdot \rho \, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \cos\theta + \sin\theta \, d\theta \, d\rho$$

$$= \int_1^2 \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} - \left[\cos\theta\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} d\rho$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \, d\rho$$

$$= \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \, d\rho$$

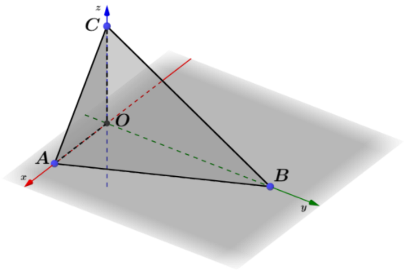
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right)(2-1)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 - 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

$$= \sqrt{2} + 1$$

Esercizio 7 (punti: ....../4)
Si consideri il tetraedro Ω di vertici O, A, B, C (vedi figura):



Calcolare

$$\iiint_{\Omega} 4\,dx\,dy\,dz$$

sapendo che il piano passante per A, B e C ha equazione cartesiana $6x + 3y + 4z - 12 = 0$.

$6x + 3y + 4z - 12 = 0$

$y = 0 \quad z = 0$

$6x - 12 = 0$

$x = 2 \rightarrow A = (2, 0, 0)$

$6x + 3y + 4z - 12 = 0$

$x = 0 \quad z = 0$

$3y = 12$

$y = 4 \rightarrow B = (0, 4, 0)$

$AB = \frac{4}{2}x + 4$

$= -2x + 4$

$4z = -6x - 3y + 12$

$6x + 3y + 4z - 12 = 0 \rightarrow z = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y + 3$

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -2x + 4,\ 0 \le z \le -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y + 3 \right\}$$

$$\iiint_{\Omega} 4 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= 4 \int_0^2 \int_0^{-2x+4} \int_0^{-\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y + 3} dz\,dy\,dx$$

$$= 4\int_0^2 \int_0^{-2x+4} -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y + 3 \quad dy\,dx$$

$$= 4\int_0^2 \left[-\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}y^2 + 3 \right]_0^{-2x+4} dx$$

$$= 4\int_0^2 -\cancel{\frac{3}{2}x} - \frac{3}{8}(-2x+4)^2 \cancel{+3} + \cancel{\frac{3}{2}x} \cancel{-3} \; dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^2 (-2x+4)^2\, dx$$

$$= \frac{3}{12}\left[(-2x+4)^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{3}{12}\left(0 - 4^3 \right)$$

$$= \frac{3 \cdot 4^3}{4 \cdot 3}$$

$$= \frac{4^3}{4}$$

$$= 4^2$$

$$= 16$$

Esercizio 8 (punti: ....../4)

Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = (x^2y + y^2 + 1, \tfrac{1}{3}x^3 + 2xy)$$

e sia $\gamma(t) = (3t, t^2 - 1)$, con $t \in [1,2]$ un cammino orientato in $\mathbb{R}^2$.

a) (2 punti) Dimostrare che il campo è conservativo e determinarne il potenziale che in $(3,0)$ vale 0.

$$\vec{F}(x^2y + y^2 + 1, \tfrac{1}{3}x^3 + 2xy)$$

Per dimostrare che un campo è conservativo bisogna verificare la seguente condizione sufficiente e necessaria

Dominio semplicemenre connesso ✓

Derivare in croce ✓

$$\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y} = x^2 + 2y = \frac{\partial \vec{F}_y}{dx}$$

La condizione è verificata, quindi il campo è conservativo

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2y+y^2+1 \rightarrow U = \int x^2y+y^2+1 \, dx = \frac{y}{3}x^3 + y^2x + x + C_1(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 + 2xy \rightarrow U = \int \frac{1}{3}x^3 + 2xy \, dy = \frac{y}{3}x^3 + xy^2 + C_2(x)$$

$$C_1(y) = 0 \qquad C_2(x) = x$$

$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + y^2x + x + K$$

$$U(3,0) = 0 \rightarrow 3 + K = 0 \rightarrow K = -3$$

$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + y^2x + x - 3$$

b) (2 punti) calcolare in due modi diversi il lavoro del campo necessario per spostare un punto lungo γ.

$$\gamma(t) = (3t, t^2-1) \quad t \in [1,2]$$

Siccome il campo è conservativo il lavoro si può calcolare come differenza di potenziale

$$L_\gamma = U(\gamma(2)) - U(\gamma(1))$$

$$= U(6,3) - U(3,0)$$

$$= \frac{1}{3}6^3 3 + 3^2 6 + 6 - 3 - 0$$

$$= 6^3 + 6 \cdot 3^2 + 3$$

$$= 273$$

Oppure si può calcolare con l'integrale

$$\gamma'(t) = (3, 2t)$$

$$L_\gamma = \int_1^2 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

$$= \int_1^2 \vec{F}(3t, t^2-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^2 \left((3t)^2(t^2-1) + (t^2-1)^2 + 1, \frac{1}{3}(3t)^3 + 2(3t)(t^2-1) \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^2 \left(9t^4 - 9t^2 + t^4 + 1 - 2t^2 + 1, 9t^3 + 6t^3 - 6t \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^2 \left(10t^4 - 11t^2 + 2,\ 15t^3 - 6t\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^2 30t^4 - 33t^2 + 6 + 30t^4 - 12t^2 \, dt$$

$$= \int_1^2 60t^4 - 45t^2 + 6 \, dt$$

$$= \left[\frac{60}{5} t^5 - \frac{45}{3} t^3 + 6t \right]_1^2$$

$$= \left[12t^5 - 15t^3 + 6t \right]_1^2$$

$$= 12 \cdot 2^5 - 15 \cdot 2^3 + 9$$

$$= 273$$