Indice

1 Equazioni differenziali

1.1 Risoluzione delle equazioni differenziali del primo ordine (Problema di Cauchy)

1. Spostare tutte le y da una parte dell'equazione:

Esempio 1.1. Ad esempio:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{y^2+4}t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

si può riscrivere come:

$$\frac{y^2+4}{y^2}y' = t$$

2. Integrare da entrambe le parti per rimuovere la derivata:

Esempio 1.2. Ad esempio:

$$\int \frac{y^2+4}{y^2}y'\,dy = \int t\,dt$$

Sostituiamo:

$$u = y$$
$$du = y'\,dy$$

quindi sostituendo $y'\,dy$ con du si ha:

$$\int \frac{u^2+4}{u^2}\,du = \int t\,dt$$

risostituisco y al posto di u per non avere variabili diverse:

$$\int \frac{y^2+4}{y^2}\,dy = \int t\,dt$$

3. Risolvere l'integrale

Esempio 1.3. Riprendendo l'esempio precedente:

$$\int \frac{y^2+4}{y^2}\,dy = \int t\,dt$$
$$\int 1\,dy + 4\int y^{-2}\,dy = \frac{t^2}{2} + c$$
$$y - \frac{4}{y} = \frac{t^2}{2} + c$$
$$\frac{y^2-4}{y} = \frac{t^2}{2} + c$$

4. Imporre le condizioni iniziali per trovare la costante c:

Esempio 1.4. Riprendendo l'esempio precedente:

$$y(0) = 2$$
$$\downarrow$$
$$\frac{2^2-4}{2} = \frac{0}{2} + c$$
$$0 = 0 + c$$
$$c = 0$$

5. Sostituire la costante trovata nella soluzione dell'integrale:

Esempio 1.5. Riprendendo l'esempio precedente:

$$\frac{y^2-4}{y} = \frac{t^2}{2} + 0$$
$$y^2 - 4 = \frac{t^2}{2}y$$
$$y^2 - \frac{t^2}{2}y - 4 = 0$$

6. Risolvere l'equazione trovata nei punti definiti nelle condizioni iniziali per trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

Esempio 1.6. Riprendendo l'esempio precedente:

$$y^2 - \frac{t^2}{2}y - 4 = 0$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\frac{t^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + 16}}{2} \\
&= \frac{t^2 \pm \sqrt{t^4+64}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
y(0) = 2 \\
\downarrow
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
y(0) &= \frac{0 \pm \sqrt{0+64}}{4} \\
2 &= \frac{\pm 8}{4} \\
2 &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Solo la soluzione $y = 2$ è accettabile, e quindi la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$
y(t) = \frac{t^2 + \sqrt{t^4+64}}{4}
$$

1.2 Risoluzione delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (Problema di Cauchy)

1. Risolvere l'equazione omogenea associata all'equazione differenziale.

   Se le soluzioni sono complesse coniugate si possono riscrivere come:

   $$
   \begin{aligned}
   r_1 &= \alpha + i\beta = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\
   r_2 &= \alpha - i\beta = e^{\alpha x}\sin(\beta x)
   \end{aligned}
   $$

   con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $z(x)$ è:

   $$
   z(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)
   $$

Esempio 1.7. Ad esempio:

$$
y'' - 6y' + 9y = 3t + 2 \quad \rightarrow \quad r^2 - 6r + 9 = 0
$$

Per la regola del trinomio speciale si ha:

$$
(r-3)^2
$$

e le soluzioni sono:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 3 \\
r_2 &= 3
\end{aligned}
$$

2. Trovare la soluzione generale (equivale alla risposta libera in Sistemi) con la seguente formula:
$$z(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i x} \cdot \frac{x^l}{l!}$$
dove:
$$r \text{ è il numero di radici distinte}$$
$$\mu_i \text{ è la molteplicità della radice } \lambda_i$$
$$c_{i,l} \text{ sono costanti da determinare}$$

Esempio 1.8. Calcoliamo la soluzione generale dell'equazione differenziale:
$$z(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$$

3. Trovare una soluzione particolare (equivale alla risposta forzata in Sistemi) dell'equazione differenziale. La soluzione dipende dalla funzione $f(x)$ dove:
$$y'' + ay' + by = f(x)$$
   (a) Se $f(x) = p_r(x)$ è un polinomio di grado r allora la soluzione particolare è un polinomio di grado r con coefficienti indeterminati:

$\bar{y}(x) = q_r(x)$	se $b \neq 0$
$\bar{y}(x) = xq_r(x)$	se $b = 0$ e $a \neq 0$
$\bar{y}(x) = x^2 q_r(x)$	se $b = 0$ e $a = 0$

Esempio 1.9. Ad esempio:
- Se consideriamo $y'' - 6y' + 9y = 3t + 2$ Abbiamo che
$$f(x) = p_1(t) = 3t + 2$$
con $a = -6$ e $b = 9$ quindi siamo nel primo caso:
$$\bar{y}(t) = q_0 + q_1 t$$
- Se consideriamo $y'' - 6y' = t^2 + 2$ abbiamo che
$$f(x) = p_2(t) = t^2 + 2$$
con $a = -6$ e $b = 0$ quindi siamo nel secondo caso:
$$\bar{y}(t) = q_0 t + q_1 t^2 + q_2 t^3$$

- Se consideriamo $y'' = t - 1$ abbiamo che

$$f(x) = p_1(t) = t - 1$$

con $a = 0$ e $b = 0$ quindi siamo nel terzo caso:

$$\bar{y}(t) = q_0 t^2 + q_1 t^3$$

(b) Se $f(x) = Ae^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ allora la soluzione particolare è del tipo:

$$\bar{y}(x) = e^{\lambda x}\gamma(x)$$

Per trovare $\gamma(x)$ bisogna risolvere la seguente equazione:

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A$$

quindi si distinguono i seguenti casi:

se $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$	$\gamma(x) = \frac{A}{\lambda^2+a\lambda+b}$	$\bar{y}(x) = \frac{Ae^{\lambda x}}{\lambda^2+a\lambda+b}$
se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a \neq 0$	$\gamma(x) = \frac{Ax}{2\lambda+a}$	$\bar{y}(x) = \frac{Axe^{\lambda x}}{2\lambda+a}$
se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$	$\gamma(x) = \frac{A}{2}x^2$	$\bar{y}(x) = \frac{A}{2}x^2e^{\lambda x}$

In questa classe particolare di termini noti del tipo $Ae^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ rientrano anche i casi:

$$cos\omega x,\ sin\omega x,\ e^{\mu x}cos\omega x,\ e^{\mu x}sin\omega x$$

con $\mu \in \mathbb{R}$

Esempio 1.10. Prendiamo ad esempio la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 4y' + 8y = e^{-2t}$$

Una soluzione particolare sarà del tipo:

$$\bar{y}(t) = e^{-2t}\gamma(t)$$

con $A = 1$ e $\lambda = -2$ quindi:

$$\gamma'' + \gamma'(2 \cdot -2 - 4) + \gamma(-2^2 - 4 \cdot -2 + 8) = 1$$
$$\gamma'' - 8\gamma' + 20\gamma = 1$$

Siamo nel primo caso quindi:

$$\gamma(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} = \frac{1}{4 + 8 + 8} = \frac{1}{20}$$

quindi la soluzione particolare è:

$$\bar{y}(t) = \frac{e^{-2t}}{20}$$

(c) Se $f(x) = Ae^{\mu x}cos(\omega x)$, ricordando che:

$$Ae^{(\mu+i\omega)x} = Ae^{\mu x}\left(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\right)$$

si può risolvere l'equazione con termine noto $f(x) = Ae^{(\mu+i\omega)x}$ e poi prendere solo la parte reale della soluzione complessa. Analogamente se $f(x) = Ae^{\mu x}sin(\omega x)$ si procede andando a prendere la parte immaginaria.

Alternativamente si può calcolare una soluzione particolare senza numeri complessi e tale soluzione è del tipo:

$$\bar{y}(x) = e^{x}\left(c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)\right)$$

In ogni caso se il termine noto contiene solo seno oppure coseno, quando si cerca una soluzione particolare si deve sempre cercare come combinazione lineare di entrambi seno e coseno.

(d) Se $f(x)$ è una combinazione lineare dei termini precedenti (ad esempio un polinomio più un esponenziale) allora per linearità si trova la soluzione dell'equazione che ha come termine noto il primo termine, poi si trova la soluzione dell'equazione che ha come termine noto il secondo termine e si sommano le due soluzioni per trovare la soluzione particolare dell'equazione differenziale di partenza.

4. Trovare la soluzione finale dell'equazione differenziale sommando la soluzione generale con la soluzione particolare (equivale alla risposta totale in Sistemi):

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

5. Trovare le costanti $c_1, c_2, \ldots$ imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \\ \vdots \end{cases}$$

6. Sostituire le costanti trovate nella soluzione:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

per trovare la soluzione finale dell'equazione differenziale.