Esercizi svolti in classe

ESERCIZIO 1.2. *Dimostrare che il seguente linguaggio è context-free*

$$L = \{ 0^{2n}10^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Osserviamo che $\varepsilon \notin L$

$n = 0 \rightarrow 0^0 1 0^0 = 1 \notin L$ (La stringa più piccola é di lunghezza 1)

Grammatica $G: S \rightarrow 1 \mid 00S0$

Dimostriamo: $L = L(G)$

- $L \subseteq L(G)$ per induzione su $|\sigma| = n$
  - Caso base: $\sigma = 1 \quad S \Rightarrow 1$ ✓
  - Passo induttivo: Ipotesi induttiva $\forall |\sigma| < n.\ \sigma \in L$ allora $\exists S \Rightarrow^* \sigma$

    Prendiamo $|\sigma| = n \quad \sigma \in L \quad \exists i. \sigma = 0^{2i} 1 0^i$

    $(n = 3i)$

    $\sigma' = 0^{2i-2} 1 0^{i-1} = 0^{2(i-1)} 1 0^{i-1}$

    $|\sigma'| = 3(i-1) < n \overset{i.i}{\Longrightarrow} S \Rightarrow^* \sigma' = 0^{2i-2} 1 0^{i-1}$

    $\underbrace{S \Rightarrow^* 0^{2i-2} S 0^{i-1}} \rightarrow 0^{2i-2} 1 0^{i-1} = \sigma'$

    $S \Rightarrow^* 0^{2i-2} S 0^{i-1} \rightarrow 0^{2i-2} 00S00^{i-1} \rightarrow 0^{2i} 1 0^i = \sigma$

- $L(G) \subseteq L$ per induzione su $\Rightarrow_k$
  - Caso base: $S \rightarrow 1 \in L$ ✓
  - Passo induttivo: Ipotesi induttiva $\forall k \leq n.\ S \Rightarrow^k \sigma$ allora $\sigma \in L$

    Prendiamo $S \Rightarrow^{n+1} \sigma$

    $S \rightarrow 00S0 \Rightarrow^n \underbrace{00\sigma'0}_{\sigma}$

    Significa che da S genero in n passi σ' e con una derivazione lunga n si puó applicare l'ipotesi induttiva

    Per i.i. $\sigma' \in L$ allora $\exists i. \sigma' = 0^{2i} 1 0^i$

    quindi $\sigma = 00 0^{2i} 1 0^i 0 = 0^{2i+2} 1 0^{i+1} \in L$

ESERCIZIO 1.19. $L = \{ 0^n 1^m \mid n \in m + 3\mathbb{N} \}$

$L = \{0^n 1^m \mid n = 3m + p,\ p \in 3\mathbb{N} = \{3i \mid i \in \mathbb{N}\}\}$

$= \{0^{3m+p} 1^m \mid m \in \mathbb{N},\ p \in 3\mathbb{N}\}$

$= \{0^{3m+3i} 1^m \mid m, i \in \mathbb{N}\}$

$= \{0^{3i} 0^{3m} 1^m \mid m, i \in \mathbb{N}\}$

$L = L_1 \cdot L_2$ $\quad L_1 = \{0^{3i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ Regolare $\Rightarrow$ CF

$\quad L_2 = \{0^{3m} 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ CF

$\Rightarrow$ L é CF per le proprietá di chiusura dei CF

La grammatica é:

$S \to 000S1 \mid \varepsilon$

Dimostriamo:

- $L \subseteq L(G)$
  - Caso base: $\varepsilon \in L$ e $S \to \varepsilon$ ✓
  - Passo induttivo: Ipotesi induttiva $\forall \sigma \in L .\ |\sigma| < n .\ S \Rightarrow^* \sigma$

    Prendiamo $|\sigma| = n$ dove $\sigma = 0^{3i} 1^i$ e $\sigma' = 0^{3(i-1)} 1^{i-1}$

    $|\sigma'| < |\sigma| = n \overset{ii}{\Rightarrow}$ esiste $S \Rightarrow^* \sigma'$

    $\underbrace{S \Rightarrow^* 0^{3(i-1)} S 1^{i-1}} \to 0^{3(i-1)} 1^{i-1}$

    $\downarrow$

    allora $S \Rightarrow^* 0^{3(i-1)} S 1^{i-1} \to 0^{3(i-1)} 000S11^{i-1} \to 0^{3i} 1^i = \sigma$

- $L(G) \subseteq L$
  - Caso base: $S \to \varepsilon$ ✓
  - Passo induttivo: Ipotesi induttiva: $\forall k \leq n .\ S \Rightarrow^* \sigma$ allora $\sigma \in L$

    Prendiamo $S \Rightarrow^{n+1} \sigma$

n passi

$$S \to 000\,S\,1 \Rightarrow^n \underbrace{000\,\sigma'\,1}_{\sigma}$$

$S \Rightarrow^n \sigma' \overset{\text{i.i.}}{\Longrightarrow} \sigma' \in L$ allora $\exists i.\ \sigma' = 0^{3i} 1^i$

quindi $\sigma = 000\sigma'1 = 0^3 0^{3i} 1^i 1 = 0^{3(i+1)} 1^{i+1} \in L$