Física I

# Estudio de los movimientos elementales

# Índice

# Esquema

## ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS ELEMENTALES

**Ejemplos de cinemática**: ilustración de cálculos en cinemática y de métodos generales aplicables a todo problema de física

### Movimientos rectilíneos

- MRU
- MRUA

**Ej. 1. Buena práctica**
Convertir datos al SI

**Ej. 2. Caída libre**

**Ej. 3. Lanzamiento vertical**

### Composición de movimientos

**Composición de movimientos:** estudio de movimientos generales descomponiéndose en uno para cada eje de coordenadas. Se imponen condiciones en cada movimiento para calcular los datos necesarios

**Ej. 4. Tiro horizontal**

**Características:** se compone un MRU horizontal y un MRUA vertical

**Ej. 5. Tiro parabólico**

**Características:** se compone un MRU horizontal y un MRUA vertical. La velocidad inicial al ser oblicua se descompone usando trigonometría

### Movimientos circulares

**Movimientos circulares:** los de trayectoria circular

**Ej. 6. Movimiento circular uniforme**
Análogo al MRU sin aceleración

**Ej. 7. Movimiento circular uniforme acelerado**
Análogo al MRUA.

### Movimiento armónico simple

**Movimiento armónico simple:** movimiento de tipo general, consistente en una oscilación regular en torno a un punto, descrito por una ecuación compleja

**Ej. 8. Movimiento simple armónico simple**
Uso de las ecuaciones de abajo

$x=A\ sen\ (\omega t+\varphi)$
A = amplitud
$\omega t$= fase inicial
$\omega$ = frecuencia angular
T = período
∫1▒ 〖= 〗 T^(−1)= frecuencia
Ecuación: $\omega=2\pi f$

# Ideas clave

## 3.1. Introducción y objetivos

En este tema se estudiarán, con detalle y de manera muy práctica, una serie de movimientos básicos que trata la cinemática y que revisten mucho interés debido al gran número de aplicaciones que tienen a la hora de estudiar problemas del mundo real y problemas de relativa complejidad.

En la lección anterior se expuso la parte teórica y las definiciones. Este tema se centra en su aplicación práctica con numerosos ejemplos. Estos ejemplos cumplen varios objetivos: enseñar la aplicación de las ecuaciones cinemáticas y tratar cuestiones de estilo y dar recomendaciones a la hora de resolver problemas y exponer los resultados. Así, en los ejemplos se tratan temas como datos superfluos o la manera en la que debemos exponer las suposiciones consideradas. También se enseñarán a identificar si las soluciones a los problemas obtenidas son coherentes o no.

En definitiva, este tema, aparte de ilustrar y enseñar cómo se resuelven problemas físicos tipo, pretende exponer acerca de conceptos «transversales» relativos al uso de las ecuaciones cinemáticas y al desarrollo de actitudes ante los cálculos en física, que se aplicarán en temas posteriores.

Al terminar el tema serás capaz de:

- Resolver problemas que involucren movimientos rectilíneos con y sin aceleración constante: movimientos rectilíneos uniformes, caídas libres, lanzamientos verticales, etc.
- Resolver problemas que necesiten la composición de diferentes movimientos rectilíneos: tiros horizontales, tiros parabólicos, etc.

- Saber resolver problemas de movimientos circulares, sin y con aceleración angular constante.
- Saber resolver problemas sencillos que involucren Movimientos Armónicos Simples.
- Aprender a expresar por escrito las suposiciones efectuadas en la resolución y a convertir al Sistema Internacional de Unidades todas las magnitudes dadas como dato del problema.
- Ser consciente de la importancia de usar criterios de signos coherentes en movimientos rectilíneos y circulares.
- Saber que los enunciados pueden contener datos superfluos y que no es imprescindible resolver los apartados en el orden del enunciado, sino en el que más interese.
- Saber que las soluciones dadas a las ecuaciones deben revisarse para evitar resultados absurdos y que si las ecuaciones dan varias soluciones, tendrás que rechazar las que carezcan de sentido físico.
- Conocer la importancia de fijar, desde el principio, el origen de coordenadas, los ejes y sus sentidos, y de definir un sentido de giro como positivo en movimientos circulares.

## 3.2. Movimiento rectilíneo

El tipo más elemental de movimiento es aquel que sucede en una línea recta. La razón de que pueda tratarse de una manera muy sencilla es que siempre se podrá elegir un sistema de referencia en el que uno de sus ejes coincida con la recta que forma la trayectoria. De esa manera, es posible olvidar el carácter vectorial de las magnitudes cinemáticas y resolver los problemas con ecuaciones algebraicas sencillas.

El interés de los movimientos rectilíneos tiene, asimismo, otro origen. Es posible descomponer movimientos complejos en una serie de rectilíneos que, combinados, permiten analizar trayectorias más complejas.

Todo movimiento rectilíneo **cuya aceleración**, si existe, **sea constante** puede tratarse con estas dos expresiones:

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$
$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Solamente es necesario introducir en las mismas los valores adecuados.

Tradicionalmente, el estudio de los movimientos rectilíneos se aborda dividiéndolos en **dos tipos principales**, que se exponen a continuación.

## Movimiento Rectilíneo Uniforme

Se denomina Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) a aquel movimiento cuya trayectoria es una línea recta y la aceleración experimentada es nula, lo que implica que se realiza a velocidad constante.

Dadas las ecuaciones generales de la cinemática ya mencionadas, basta sustituir en ellas a=0, lo que lleva a:

$$v = v_0$$
$$e = e_0 + v(t - t_0)$$

La ecuación que involucra la velocidad es cierta, pero no sirve de mucho a la hora de resolver problemas. Dice, simplemente, que la velocidad del móvil en cualquier momento es idéntica a la inicial. Por ello, todos los problemas que involucren movimientos de este tipo consistirán en trabajar con la segunda expresión.

A continuación, un problema típico que involucra este tipo de movimiento.

**Ejemplo 1**

Un móvil se desplaza a una velocidad constante de 90 km/h a lo largo del eje x del sistema de referencia elegido. Si en el instante t=0s se hallaba a 1,5 km del origen de coordenadas, en la parte negativa del eje: ¿en qué posición estará tras una hora y cuarto de recorrido? ¿En qué momento cruza el móvil el origen de coordenadas?

El **primer paso** es convertir al Sistema Internacional todas las magnitudes del problema y ponerles un nombre. Así:

Velocidad = v= $90\frac{km}{h} = \frac{90\,000m}{3\,600s} = \frac{25m}{s} = 25m/s.$

Posición inicial = $e_0$=-1,5km =-1 500m.

Tiempo de recorrido = $t_{rec}$=1h y 15 min = 3 600 + 15·60 = 3.600+ 900 = 4 500s.

Responder a la primera cuestión supone utilizar la fórmula que da el espacio en función de la velocidad y el tiempo y saber que $t_0$=$0_s$ (será lo habitual, salvo que se diga lo contrario o que los datos del problema indiquen otra cosa). Así:

$$e = e_0 + v(t - t_0)$$
$$\boldsymbol{e} = -1\,500 + 25 \;\cdot 4\,500 = \mathbf{111\,000}\boldsymbol{m}$$

Como se han convertido, al principio, todas las magnitudes al Sistema Internacional, no es necesario escribir las unidades en cada sustitución de las cantidades en la fórmula. Dado que unidades del Sistema Internacional solo pueden dar como resultado unidades de este sistema, bastará ponerlas en los resultados finales.

Dar respuesta a la **segunda cuestión**, calcular el tiempo, implica despejarlo de la ecuación. Es una buena práctica trabajar con las fórmulas antes de introducir los valores en las mismas, si bien, no siempre será el método más rápido. La ventaja de despejar antes de introducir los datos es poder reutilizar la expresión despejada para resolver otras cuestiones parecidas. Despejar el tiempo lleva a:

$$e = e_0 + v(t - t_0) \Rightarrow \; e - e_0 = vt - vt_0 \; \Rightarrow t = \frac{e - e_0 + vt_0}{v}$$

Así, una vez despejado el tiempo, no queda más que sustituir cada variable por su valor:

$$\boldsymbol{t} = \frac{e - e_0 + vt_0}{v} = \frac{0 - (-1\,500) + 0}{25} = \frac{1\,500}{25} = \boldsymbol{60s}$$

Nótese que había que calcular el instante en el cual el móvil pasaba por el origen de coordenadas, esto es, cuando e=0m, de ahí que se haya introducido tal valor.

## Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

Se denomina **Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado** (MRUA) a aquel movimiento cuya trayectoria es una línea recta y la aceleración experimentada es constante.

Este movimiento es el más utilizado en situaciones reales. Por ejemplo, todo movimiento en el que esté implicada la gravedad (caída libre, tiro horizontal, etc.) será un MRUA, ya que en condiciones normales (sin desplazamientos en altura de decenas de kilómetros, por ejemplo) la aceleración que imprime la gravedad terrestre a los objetos es constante.

Las ecuaciones que lo rigen son:

$$v = \; v_0 + a(t - t_0)$$

$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Para el caso, muy habitual, en el que el tiempo inicial es nulo, estas ecuaciones se expresan de la siguiente manera:

$$v = v_0 + a\,t$$
$$e = e_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$$

Para estos movimientos plantearemos dos ejemplos de utilidad práctica: la caída libre y el lanzamiento vertical hacia arriba.

**Ejemplo 2. Caída libre**

Un objeto de 6 kg de masa se deja caer desde lo más alto de un acantilado vertical de 600 m de altura. Suponiendo que el rozamiento del aire es despreciable: ¿cuánto tiempo tardará el objeto en caer 300 m y qué velocidad llevará? ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar al fondo del precipicio y con qué velocidad?

**En primer lugar**, hay que considerar dos cuestiones. La primera es que el dato de los 6 kg es del todo inútil. En problemas y, a veces, en situaciones reales, dispondremos de información que no es relevante y es competencia del físico saber qué sirve para los cálculos y qué no sirve. En el presente caso es obvio que la masa carece de utilidad porque en las ecuaciones cinemáticas el dato no aparece.

**La segunda cuestión** es fundamental y se resume en la frase: «Suponiendo que el rozamiento del aire es despreciable». Considerar el rozamiento es un asunto relacionado con temas posteriores, ya que involucra fuerzas, cosa que la cinemática no trata, pero que el enunciado del problema incluya tal afirmación nos permite hacer las siguientes suposiciones de gran importancia:

- Que lo único que va a provocar el movimiento del cuerpo va a ser la gravedad.
- Como la gravedad terrestre puede considerarse constante a lo largo de todo el recorrido, el movimiento es un MRUA. y se podrán usar las ecuaciones que lo describen (**esta suposición es vital**).

- Que la aceleración de la gravedad va a ser la total del móvil y se podrá tomar como: $9{,}8\ m/s^2$.

Todos los comentarios escritos hasta ahora, que son válidos en cualquier problema de física, deben tenerse en cuenta a lo largo del curso. También sucede con los párrafos siguientes.

A la hora de abordar problemas de física, si se ha tenido que realizar alguna suposición, siempre habrá que explicarla y justificarla al comienzo del problema. Si el enunciado no hubiera mencionado que la resistencia del aire es despreciable, serás tú quien tendrás que dedicar una frase a explicar que en la resolución del problema vas a considerar que la resistencia del aire tiene un efecto lo bastante pequeño como para que no se deba tener en cuenta.

Así, en una caída libre en que la distancia recorrida sea muy pequeña (100 m, por ejemplo) y en la que el cuerpo que cae, se puede suponer lo bastante denso y de una forma tal que no le afecta demasiado el rozamiento del aire, hacer esta suposición estará justificado. Como es obvio, si el enunciado establece explícitamente que la resistencia del aire tiene que considerarse, habrá que hacerlo.

Asimismo, siempre que esté involucrada la aceleración de la gravedad, es aconsejable dedicar una frase a explicar qué valor se toma. En el ejemplo, se ha considerado que vale $9{,}8 m/s^2$, pero es preciso saber que el valor exacto está medido hasta una buena cantidad de decimales. Por ejemplo, a nivel del mar, en el Ecuador terrestre, vale $9{,}7805 m/s^2$. De ahí que sea una buena práctica detallar qué valor se tomará en el problema.

A continuación, resolveremos el problema. Tomaremos para la aceleración de la gravedad, como ya hemos mencionado, el valor $g = 9{,}8 m/s^2$, y usaremos las ecuaciones del MRUA porque la aceleración de la gravedad puede considerarse constante y no hay efectos debidos al rozamiento del aire. Con estas premisas, el problema se resuelve con el empleo de las siguientes expresiones:

$$v = v_0 + g\,t$$
$$e = v_0\,t + \frac{1}{2} g\,t^2$$

Aquí se ha hecho una suposición muy importante: el **sistema de referencia tiene el origen en el punto de lanzamiento** (de donde $e_0 = 0m$) y el eje y (aquel en el que tiene lugar el movimiento) **tiene su dirección positiva en el sentido de alejarse de la superficie, esto es «hacia arriba»**, de donde $g = -9{,}8m/s^2$. Nota que la gravedad siempre irá dirigida «hacia abajo».

Esta elección es la más intuitiva, aunque se podría haber elegido otro sistema de referencia cuyo eje *y* tuviera la dirección positiva «hacia abajo» y *g* fuera positiva. La elección del sistema de referencia en la presente resolución implicará que las distancias serán negativas y que las velocidades obtenidas lo serán también, lo que indicará que esas distancias están por debajo del origen de coordenadas y que las velocidades van dirigidas hacia abajo.

Es vital no olvidar nunca que los signos de las variables que introduzcamos en las ecuaciones cinemáticas **tienen que ser coherentes**, si no los resultados serán incorrectos. Si un punto se halla a 100 m por debajo del origen de coordenadas, en las ecuaciones tendremos que introducirlas como -100 m en el sistema de referencia considerado.

Aún hay que imponer una condición adicional a las ecuaciones: que la velocidad inicial sea nula (**el cuerpo se deja caer**). Con ello, las ecuaciones del problema son:

$$v = g\,t$$
$$e = \frac{1}{2} g\,t^2$$

Una vez particularizadas las ecuaciones cinemáticas a las condiciones del problema, podemos empezar a resolverlo.

A continuación, calculamos el tiempo para que el cuerpo caiga 300 m y su velocidad en ese punto. Al tener el espacio como dato, hay que usar la expresión de e para hacer los cálculos. Cuando esta elección no sea tan simple, podemos usar un procedimiento para saber qué ecuaciones escoger: marcamos de alguna manera las variables desconocidas (en negrita en este caso). Si se hace esto para la primera pregunta, resulta:

$$\boldsymbol{v} = g\,\boldsymbol{t}$$
$$e = \frac{1}{2} g\,\boldsymbol{t}^2$$

Se ve de inmediato que en la ecuación del espacio solo es desconocido el tiempo; por tanto, esa será la utilizada. Despejando el tiempo en la segunda, se obtiene:

$$\boldsymbol{t} = \sqrt{\frac{2\,e}{g}} = \sqrt{\frac{2\,(-300)}{-9{,}8}} = \boldsymbol{7{,}825s}$$

Este cálculo demuestra lo importante que es la coherencia en los signos de las magnitudes cinemáticas. Si lo hubiésemos sustituido por el espacio, por ejemplo, 300 m, el argumento de la raíz cuadrada habría sido negativo y el problema no tendría solución. Poner un espacio de 300 m positivos, según la elección de sistema de referencia considerado, implicaría intentar calcular cuánto tiempo tarda un móvil que se deja caer en subir 300 m desde su posición inicial. Eso es imposible: un cuerpo que se deja caer nunca ascenderá, por eso, las ecuaciones cinemáticas llevan a un resultado imposible.

Una vez calculado el tiempo, obtener la velocidad del móvil es trivial:

$$\boldsymbol{v} = g\,t = -9{,}8 \cdot 7{,}825 = \boldsymbol{-76{,}685 m/s}$$

Su signo nos indica que es una velocidad que va «hacia abajo».

Con respecto a la **segunda pregunta**, el método es idéntico. La diferencia es que no se dice, explícitamente, a qué distancia tenemos que calcular velocidad y tiempo, pero sí tenemos los datos necesarios para calcularlo. En este ejemplo es simple: el objeto llega al suelo cuando ha descendido toda la altura del acantilado: 600 m. Por ello, basta utilizar la ecuación con la que calculamos el tiempo de la pregunta anterior, sustituyendo las nuevas cantidades (de ahí que sea aconsejable despejar antes de sustituir: podemos reutilizar las fórmulas):

$$\boldsymbol{t} = \sqrt{\frac{2\,e}{g}} = \sqrt{\frac{2\,(-600)}{-9{,}8}} = \mathbf{11{,}066}\boldsymbol{s}$$

Y la velocidad:

$$\boldsymbol{v} = g\,t = -9{,}8\,\cdot 11{,}066 = \mathbf{-108{,}447}\boldsymbol{m/s}$$

**Ejemplo 3: Lanzamiento vertical hacia arriba.**

Una chica lanza hacia arriba, en vertical, una pelota a una velocidad de 9 m/s desde una altura de 1,5 m del suelo.
¿Qué tipo de movimiento experimenta? Describe cualitativamente la trayectoria del móvil.
¿En qué momento alcanza la pelota su máxima altura? ¿Cuál es esta altura máxima?
¿Cuánto tiempo tarda la pelota el caer al suelo?
¿Qué velocidad tiene cuando llega a suelo?

Resolveremos apartado por apartado:

- El movimiento de la pelota está sometido, únicamente, a la gravedad, cuya aceleración puede considerarse constante. Por ello, el movimiento es un MRUA.

  Como la pelota se lanza en vertical, la trayectoria será rectilínea. El móvil irá ascendiendo cada vez más despacio hasta que la gravedad llegue a detenerlo. Una vez alcanzado el punto más alto, la pelota caerá de vuelta al suelo. Se trata de un movimiento bastante cotidiano.

- Al ser un MRUA las ecuaciones son, de nuevo:

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$
$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Antes de empezar, es imprescindible fijar el sistema de referencia. La elección es arbitraria, con lo que es una buena práctica escoger el sistema más cómodo para hacer los cálculos. En este caso, lo más cómodo es elegir un sistema de coordenadas cuyo eje y esté encima de la trayectoria vertical. El origen del sistema de coordenadas lo puedes fijar en cualquier sitio, pero hay dos opciones muy cómodas:

- Fijarlo en el suelo, a los pies de la chica.
- Fijarlo en el punto desde donde se lanza la pelota, a 1,5 m del suelo.

En ambos casos, la resolución del problema tiene la misma dificultad. En este ejemplo, escogeremos la primera opción, aunque sería lo mismo elegir la segunda: Suponiendo que el instante inicial es 0s, queda:

$$v = v_0 + gt$$
$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Donde $e_0 = 1{,}5m$, $v_0 = 9m/s$ y $g = -9{,}8m/s^2$

Para resolver la segunda cuestión debemos reflexionar acerca de lo que pide el enunciado. Hay que calcular en qué instante llega la pelota a su punto más alto y qué altura alcanza. Esto es fácil si comprendemos **que la pelota llega a su máxima altura cuando su velocidad se hace nula**. En el momento exacto en el que la velocidad de la pelota se anula es cuando ha alcanzado la máxima altura, ya que se ha detenido y va a empezar a bajar. Si se impone en la ecuación de la velocidad que $v = 0$, se llega a:

$$0 = v_0 + gt$$

De donde, despejando el tiempo:

$$t = \frac{-v_0}{g}$$

Este será el instante en el que la velocidad se anula, esto es, el momento en el cual alcanza su máxima altura. Sustituyendo:

$$\boldsymbol{t} = \frac{-9}{-9{,}8} = \mathbf{0{,}918}\ \boldsymbol{s}$$

Para saber la altura máxima alcanzada, se sustituye el tiempo recién calculado en la fórmula del espacio. Sustituyendo la expresión obtenida para el tiempo, se obtiene:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = e_0 + v_0 \frac{-v_0}{g} + \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = e_0 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Lo que lleva a:

$$\boldsymbol{e} = e_0 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = 1{,}5 - \frac{1}{2} \frac{9^2}{(-9{,}8)} = \mathbf{5{,}633}\ \boldsymbol{m}$$

- Calcular cuánto tiempo está la pelota en el aire es fácil de plantear. Como la pelota parte del instante en que el tiempo es cero, el intervalo que pasa en el aire será igual al instante en el que e=0m en el sistema de referencia escogido. Imponiéndolo en la ecuación del espacio queda:

$$0 = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Se trata de una ecuación de segundo grado para el tiempo, que se resolverá usando la fórmula habitual. Sustituyendo los valores nos queda:

$$-4{,}9t^2 + 9t + 1{,}5 = 0$$

Las soluciones son $t = 1{,}99\, s$ y $t = -0{,}154\, s$. Estos dos resultados ilustran una cuestión importante sobre las ecuaciones físicas en general. Es evidente que solo uno de estos resultados será correcto. Es fácil comprobar que el resultado correcto es el positivo, ya que la pelota deberá llegar al suelo después de haber partido, no antes.

El resultado negativo, sin embargo, no es del todo absurdo. Sería el instante en el que la pelota habría cruzado por el origen de coordenadas si, en vez de haber partido del punto considerado, hubiera partido del suelo con una velocidad inicial superior. Sin embargo, en el movimiento que estamos describiendo, tal situación es imposible.

Esto ilustra algo esencial: **en física, las matemáticas son una herramienta que nos permite describir el mundo real, lo que obliga a reflexionar acerca de si los resultados de los cálculos tienen sentido o no**. Así, antes de aportar la solución a un problema, tienes que plantearte si los números obtenidos tienen sentido. Por ejemplo, en el caso de este ejemplo, si el punto más alto de la trayectoria obtenido hubiese sido de -153 m, esto es, a 153 m bajo el suelo, tal resultado es obviamente incorrecto. Aunque parezca una advertencia evidente, en problemas más complicados puede ser más difícil darse cuenta de este tipo de resultados incorrectos.

El tiempo total que la pelota está en el aire es, por tanto:

$$\boldsymbol{t = 1{,}99\, s}$$

La velocidad con la que la pelota llega al suelo es sencilla de calcular una vez que se sabe el tiempo. Basta usar:

$$v = v_0 + gt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v = 9 - 9,8 \cdot 1,99 = -10,502\ m/s}$$

Donde el signo negativo implica que la velocidad está dirigida hacia el suelo.

## 3.3. Movimientos compuestos

Como se indicó en el tema 2, es posible estudiar movimientos generales componiendo movimientos rectilíneos, esto es, estudiando la trayectoria de un cuerpo analizando cómo se desplaza en cada dirección del espacio. Este es un procedimiento habitual en problemas como los lanzamientos de objetos en la superficie de la Tierra. En estos casos, sobre todo si se desprecian los efectos de la rotación del planeta porque los lanzamientos no supongan desplazamientos largos, es posible estudiar estos movimientos componiendo el movimiento en horizontal y en vertical.

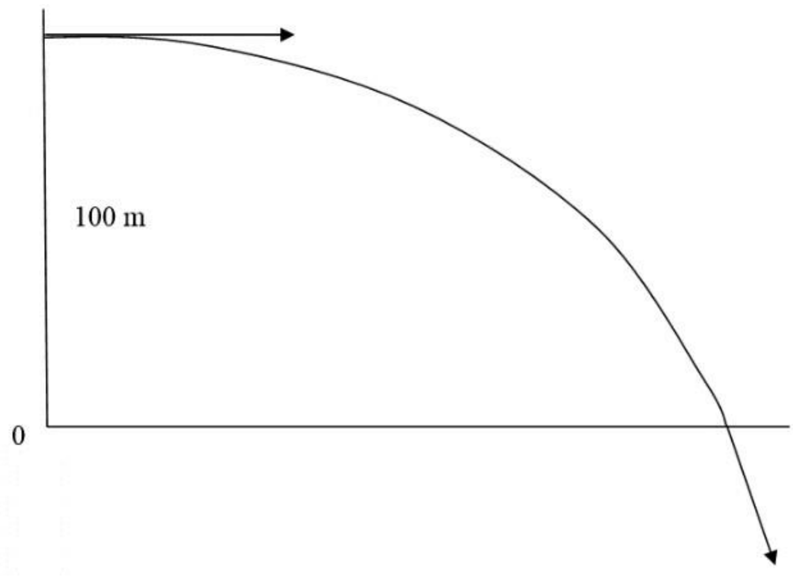
En esta parte del tema se analizan dos ejemplos muy típicos que ilustran a la perfección este método en dos dimensiones.

### Tiro horizontal

**Ejemplo 4: Tiro horizontal**

Desde la azotea de un edificio de 100 m de altura, se lanza un objeto con una velocidad horizontal de 50 m/s. Calcular:
El tiempo que tarda en llegar al suelo.
La velocidad que lleva justo en el momento del impacto.
La distancia en horizontal que recorre.

Como paso previo a la resolución del problema, es necesario que plantearse una serie de cuestiones que definirán el método de resolución a adoptar.




En primer lugar, es importante hacernos una idea cualitativa de la trayectoria que, se estima, recorrerá el móvil. A menudo, esta tarea es más fácil con un dibujo de la misma. Dadas las condiciones del problema, el movimiento será, aproximadamente, así:

El móvil, al sentir la fuerza de la gravedad durante el recorrido, seguirá desplazándose hacia la dirección de lanzamiento, pero irá acelerando hacia el suelo hasta que llegue un momento en que chocará. La trayectoria será una curva descendente como en la figura. Hay varias observaciones que hacer:

- El móvil avanzará en el aire determinada distancia antes de chocar con el suelo, punto en el consideramos que termina el movimiento.
- El punto más alto de la trayectoria es el de partida. Desde el primer momento, la gravedad tirará hacia abajo del móvil y como no hay velocidad ascendente, el móvil no subirá.
- La velocidad final no irá dirigida hacia abajo, sino que, en el momento inmediatamente anterior al impacto, su dirección será diagonal.
- La aceleración es constante y está dirigida hacia abajo en todo momento.

Es fácil reparar en que este movimiento se puede tratar como la composición de otros dos: una caída libre, originada por la aceleración imprimida por la gravedad, y un movimiento horizontal a velocidad constante. Como la aceleración de la gravedad actúa en vertical, no afecta a la velocidad horizontal, con lo cual, la velocidad horizontal seguirá siendo la misma en todo el recorrido.

Antes de plantear las ecuaciones, hay que fijar el origen del sistema de referencia. Nuevamente, existen muchas alternativas, pero una de las mejores es fijarlo en el punto que, en el diagrama, se ha denotado por 0, esto es, la base del edificio, el punto del suelo situado en la vertical del sitio donde se lanza el móvil. Tras esta elección, hay que plantear las ecuaciones de cada uno de los dos movimientos. Para el **horizontal**, cuya velocidad es constante, solo es una:

$$e = v_0 t$$

El espacio inicial horizontal es nulo por la elección del sistema de referencia. Para el movimiento vertical, las ecuaciones son dos:

$$e = e_0 + \frac{1}{2} g t^2$$
$$v = g t$$

Dado que la velocidad inicial vertical es nula.

Otra forma de obtener estas ecuaciones consiste en plantear las ecuaciones vectoriales. El vector de posición inicial, el vector velocidad inicial y la aceleración están dados por:

$$\overrightarrow{r_0} = e_0 \vec{j}$$
$$\overrightarrow{v_0} = v_0 \vec{i}$$
$$\vec{a} = g \vec{j}$$

Donde $g = -\frac{9{,}8m}{s^2}$ (**con signo negativo porque está dirigida hacia abajo**). Sustituyendo estos valores en las ecuaciones vectoriales de la cinemática, ya conocidas del tema anterior, y usando que el movimiento sucede en el plano de los ejes *x* e *y*, se tiene:

$$\vec{r} = e_0\vec{j} + v_0t\vec{i} + \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$
$$\vec{v} = v_0\vec{i} + gt\vec{j}$$

Si se reordenan los términos y se reúnen aquellos que llevan cada uno de los vectores unitarios de la base, queda:

$$\vec{r} = v_0t\vec{i} + \left(e_0 + \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$
$$\vec{v} = v_0\vec{i} + gt\vec{j}$$

Recordando que es posible escribir:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$$
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Las ecuaciones del movimiento horizontal serán aquellas que hagan que se cumplan las igualdades vectoriales para la componente $\vec{i}$ y las del movimiento vertical, las que logran lo propio para la componente $\vec{j}$. Así:

- Movimiento horizontal:

$$r_x = v_0t$$
$$v_x = v_0 \quad \text{(sin utilidad práctica)}$$

- Movimiento vertical:

$$r_y = e_0 + \frac{1}{2}gt^2$$
$$v = gt$$

Idénticas a las anteriores salvo pequeños cambios en la notación.

Fijado el sistema de referencia y descritas las ecuaciones, ya se puede pasar a la resolución del problema.

Resolver el apartado 1, averiguar el tiempo que tarda el móvil en llegar a suelo, implica plantearse cómo imponer en las ecuaciones la condición «el móvil llega al suelo». Es fácil ver que el móvil llega al suelo cuando el espacio en el movimiento vertical sea igual a cero. Las ecuaciones del movimiento vertical quedan, por tanto:

$$0 = e_0 + \frac{1}{2}gt^2$$
$$v = gt$$

Dado que se conocen $g$ y $e_0$, basta la ecuación del espacio para calcular el tiempo que tarda el móvil en caer al suelo. Despejando t y sustituyendo:

$$t = \sqrt{\frac{-2e_0}{g}} = \sqrt{\frac{-2\ \cdot 100}{-9{,}8}} = 4{,}518s$$

Este dato es fundamental, ya que nos permite calcular fácilmente los apartados 1 y 2. Hay algo importante a destacar a la hora de resolver cualquier problema de física:

No es imprescindible resolver los apartados en el mismo orden en el que los plantea el enunciado

A veces, como dificultad adicional, los enunciados piden las cosas en un orden en el cual no es posible resolver el problema. En el caso de este ejemplo, si el orden de los apartados hubiera sido, por ejemplo, 2, 3 y 1, sería imposible resolverlos en este orden. Mientras los resultados se presenten en el orden previsto por el problema, el orden de resolución puede ser el más aconsejable para la resolución del mismo.

Una vez obtenido el tiempo que tarda el móvil en llegar al suelo, se puede responder al segundo apartado y calcular su velocidad en el momento del impacto. Calcular la velocidad total del cuerpo implicará realizar la suma de la velocidad horizontal y la vertical. Una observación importante es que, normalmente, si nos piden la velocidad de un móvil, habrá que expresarla como un vector (lo recomendado) o, al menos, describir su dirección y dar su módulo. Decir que la velocidad es de, por ejemplo, 10 m/s, sin más especificaciones, es una respuesta incompleta salvo que el problema pida, expresamente, el **módulo** de la velocidad.

En el momento del impacto, o sea, si $t = t_{imp}$ la velocidad horizontal y la vertical son:

$$v_{hor} = v_0 = 50\, m/s$$
$$v_{ver} = gt_{imp} = -9{,}8 \cdot 4{,}518 = -44{,}276\, m/s$$

Como es usual, el signo negativo implica que la velocidad vertical está dirigida hacia abajo. La solución al apartado 2 es el vector velocidad:

$$\vec{v} = v_{hor}\vec{\imath} + v_{ver}\vec{\jmath} = \boldsymbol{(50\vec{\imath} - 44{,}276\vec{\jmath})m/s}$$

Cuyo módulo vale: $v = 66{,}786\, m/s$.

Para el tercer apartado hay que elegir las ecuaciones del movimiento horizontal, dado que se precisa conocer una distancia en horizontal. La distancia en horizontal recorrida será igual a la posición del cuerpo cuando ha alcanzado el suelo. Ello sucede cuando $t = t_{imp}$. Usando la ecuación del espacio del movimiento horizontal:

$$\boldsymbol{r_x} = v_0 t_{imp} = 50 \cdot 4{,}518 = \boldsymbol{225{,}9m}$$

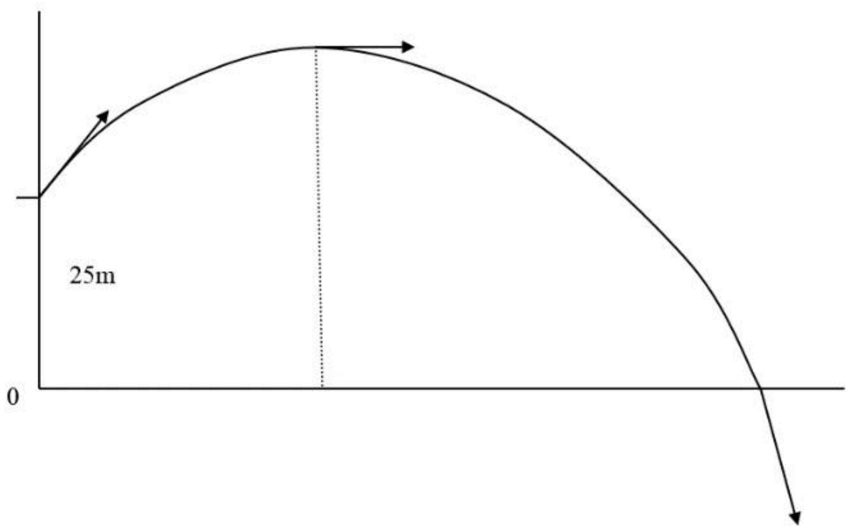
Con lo que el problema queda resuelto.

## Tiro parabólico

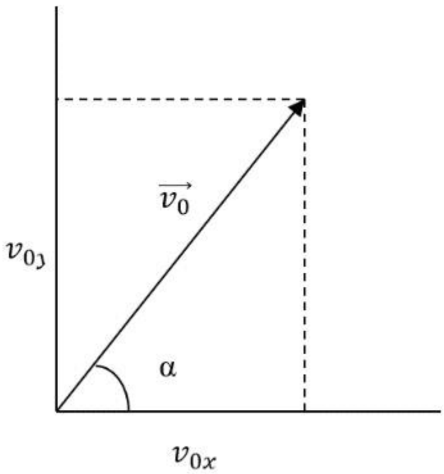
El tiro parabólico es un problema tipo que se estudia en cualquier curso introductorio de física. En el próximo ejemplo, resolvemos una versión, con una ligera modificación, que ilustrará mejor el empleo de las ecuaciones cinemáticas en este tipo de problemas.

> **Ejemplo 5: Tiro parabólico**
>
> Un mortero situado en una ladera lanza un proyectil para alcanzar una diana de 10 m de diámetro situada en una llanura, 25 m por debajo de la posición del mortero. El centro de la diana está situado a 250 m del mortero, medidos en horizontal. La velocidad de salida de la bomba es de 50 m/s y se lanza formando un ángulo de 50 grados con respecto a la horizontal. Calcular:
> Máxima altura del proyectil.
> Tiempo que tarda el proyectil en impactar contra la superficie de la ladera.
> Distancia del mortero a la que impacta la bala y velocidad de la misma en el momento del impacto.
> ¿Acierta el proyectil en la diana?

Como en el caso anterior, se plantea cómo va a ser, de manera cualitativa, la trayectoria de la bala. En este caso, tendrá este aspecto:



La trayectoria de este tipo de lanzamientos tiene forma de parábola, de ahí el nombre que recibe este movimiento. El procedimiento de resolución es similar al del ejemplo precedente: se descompone el movimiento del móvil en dos: uno horizontal y otro vertical. La única dificultad adicional es que la velocidad inicial no es paralela a ninguno de los ejes, sino que forma un ángulo con respecto a ellos. Sin embargo, bastan conocimientos elementales de trigonometría para realizar la descomposición. A la vista de la siguiente figura:




Y conociendo las definiciones del seno y del coseno, es posible escribir:

$$v_{0x} = |\overrightarrow{v_0}| \cos \alpha$$
$$v_{0y} = |\overrightarrow{v_0}| \, sen \, \alpha$$

Como el ángulo solo se va a usar como argumento, no se va a convertir a radianes. De esta manera, las ecuaciones de los movimientos que se componen en el tiro parabólico son:

- **Movimiento horizontal**:

$$r_x = v_{0x} t$$
$$v_x = v_{0x}$$

- **Movimiento vertical**:

$$r_y = r_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_y = v_{0y} + gt$$

Una vez establecidas las ecuaciones, podemos pasar a la resolución del problema.

- Para calcular la altura máxima que alcanza el proyectil hay que fijar una condición, en las ecuaciones, que caracterice ese momento. Dado que cuando el proyectil alcanza su altura máxima su velocidad vertical es nula y, a partir de entonces, empieza a bajar, si se impone velocidad vertical nula en las ecuaciones del movimiento vertical se tiene:

$$0 = v_{0y} + gt_{ALTM}$$

Donde $t_{ALTM}$ es el instante en el cual se alcanza la altura máxima. Este instante vale:

$$t_{ALTM} = \frac{-v_{0y}}{g} = \frac{-50\ sen\ 50°}{-9{,}8} = \frac{-50 \cdot 0{,}766}{-9{,}8} = 3{,}91s$$

Por tanto, basta sustituir este tiempo en la expresión del espacio del movimiento vertical:

$$\boldsymbol{h_{MAX}} = 25 + 50\ sen\ (50°)\ 3{,}91 + \frac{1}{2}(-9{,}8)\ 3{,}91^2 = \mathbf{99{,}841}\boldsymbol{m}$$

- El tiempo que tarda el móvil en llegar al suelo se puede calcular si se repara en que llegar al suelo, según el sistema de referencia elegido, significa que la distancia en vertical es nula. Imponiendo esta condición en la ecuación del espacio del movimiento vertical, se obtiene:

$$0 = r_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = 25 + 38{,}3t - 4{,}9t^2$$

Se resuelve esta ecuación algebraica de segundo grado y se obtienen dos soluciones:

$$t_1 = -0{,}606s$$
$$\boldsymbol{t_2 = 8{,}422s}$$

Hay que descartar la negativa, ya que el proyectil impactará después de haber sido lanzado, y no antes.

- La distancia en horizontal a la que impacta el proyectil, medida desde el mortero, se puede calcular con la ecuación del movimiento horizontal, ya que se sabe en qué momento impacta con el suelo. Con ello:

$$\boldsymbol{d_{HOR}} = v_{0x}t = 50\cos(50°)\ 8{,}422 = \boldsymbol{270{,}683m}$$

- Responder a este última pregunta, contando con el dato anterior, es trivial. Dado que la diana estaba a 250 m y su diámetro era de 10 m, para acertar en ella la distancia horizontal de impacto tendría que haber estado comprendida entre los 245 m y los 255 m. Como no es así, la respuesta es que **no impacta en la diana**.

## 3.4. Movimiento circular

Aunque sea posible utilizar los métodos anteriores para resolver estos problemas, el objetivo de esta sección es usar las ecuaciones relacionadas con magnitudes angulares, mucho más sencillas de emplear. Ilustraremos su uso con dos ejemplos.

## Movimiento circular uniforme

> **Ejemplo 6: Movimiento circular uniforme**
>
> Un objeto atado a una cuerda de 2 m de largo cuyo otro extremo está sujeto a una varilla en rotación, gira a una velocidad angular constante de 60 rpm. La circunferencia de giro es horizontal al suelo.
> ¿Cuánto tiempo necesita para dar 25 vueltas y media?
> Si la cuerda se rompe, ¿a qué velocidad lineal saldrá el objeto y en qué dirección irá?

El primer paso es convertir al Sistema Internacional toda unidad que lo precise. En este caso, hay que convertir la velocidad angular:

$$\omega = \frac{60\, vueltas}{1\, min} = \frac{2\pi\, 60\, rad}{60 s} = 2\pi\, rad/s$$

También hay que convertir las 25,5 vueltas, pero se hará al resolver el primer apartado.

- La ecuación relevante de un movimiento circular a velocidad constante es la que da el ángulo en función de la velocidad angular y el tiempo:

$$\theta = \omega t$$

Calcular el tiempo que tarda en dar las 25,5 vueltas implica despejar el tiempo. Sabiendo que 25,5 vueltas son $2\pi \cdot 25{,}5\, rad = 160{,}22\, rad$, la solución es:

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi\, 25{,}5}{2\pi} = 25{,}5 s$$

Un truco que se ha usado es dejar el valor de π de manera explícita, sin sustituirlo. Ello simplifica los cálculos y reduce los errores de redondeo. Como vemos, en el cálculo de t, $\pi$ se ha cancelado al estar tanto en el numerador como en el denominador.

- Dado que no se indica ningún momento exacto en el que se rompe la cuerda, la solución que se pide en el enunciado es general. El módulo de la velocidad lineal se calcula con la fórmula, ya estudiada:

$$\boldsymbol{v} = \omega r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi = \mathbf{12,566}\ \boldsymbol{m/s}$$

Y la dirección será tangente a la trayectoria. En el punto en el que se rompa la cuerda será perpendicular a la misma en ese punto.

## Movimiento circular uniformemente acelerado

**Ejemplo 7: Disco con aceleración angular constante**

Un disco gira con una velocidad angular de 90 rad/s. Al cabo de 10 s desde el instante en que se empieza a medir, comienza a actuar una aceleración angular en contra del sentido de giro del disco de 0,8 rad/s$^2$. Con estos datos, calcular:
Ángulo recorrido durante los 10s iniciales.
¿En qué momento se detiene el disco?
Tras 20 s de recorrido después de haberse detenido el disco, ¿qué espacio ha recorrido y qué velocidad angular tiene?

La resolución se centra en aplicar, a cada caso concreto, las ecuaciones:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

- Durante los 10 s iniciales, la aceleración es nula. El ángulo recorrido lo calculamos, por tanto, con la segunda ecuación haciendo nula la aceleración angular. Así:

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) = 0 + 90 \cdot 10 = \mathbf{900}\ \boldsymbol{rad}$$

- Antes de resolver este apartado, tenemos que reparar en algunas cuestiones. Las ecuaciones cinemáticas para aceleración constante se pueden aplicar «por trozos». Esto es, si un movimiento se divide en dos partes, una con una aceleración a1 y la otra con la aceleración a2, hay que plantear dos conjuntos diferentes de ecuaciones cinemáticas, una para cada intervalo de tiempo en la que actúa cada aceleración. El nexo entre ambos sistemas de ecuaciones es que las condiciones finales del primer movimiento (espacio, velocidad y tiempo) han de ser iguales a las condiciones iniciales del segundo. En este apartado se ilustra el concepto.

El movimiento del disco puede dividirse en dos partes: una primera de 10 s de duración en la que la aceleración angular es nula y una segunda en la cual la aceleración angular vale 0,8 rad/$s^2$. Las condiciones finales del movimiento sin aceleración son las iniciales del segundo movimiento. Así, las ecuaciones del segundo movimiento son aquellas con las que iniciamos la resolución de este problema donde:

$$t_0 = 10\, s$$
$$\omega_0 = 90\, rad/s$$
$$\theta_0 = 900\, rad$$

Así, calcular cuándo se detiene el disco supone imponer que la velocidad angular es nula en las ecuaciones del segundo tramo, concretamente, en la que da la velocidad angular:

$$0 = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

De donde se despeja el tiempo y sale:

$$\boldsymbol{t} = \frac{-\omega_0}{\alpha} + t_0 = \frac{-90}{-0{,}8} + 10 = \mathbf{122{,}5}\ \boldsymbol{s}$$

Es muy importante destacar que la aceleración angular **se ha considerado negativa porque actúa en sentido contrario a la velocidad angular**. El criterio de signos tiene que ser coherente a lo largo de todo el problema y es vital, o los resultados serán erróneos. Es una buena práctica establecer, al principio, cuál va a ser el sentido de giro positivo. En este caso se ha supuesto que el sentido de giro positivo es aquel en el que gira inicialmente el disco, por eso, la velocidad angular inicial es positiva y la aceleración negativa.

Un último comentario es que los 122,5 s que ha dado como resultado el problema **están contados desde el inicio de la medida del movimiento**, ya que hemos incluido los 10 s iniciales en los que no hay aceleración angular. El enunciado no especifica más, así que es obligatorio indicar que esos 122,5 s son los transcurridos desde que se empezó a medir. En este caso, sería válido haber respondido: el disco se detiene 112,5 s después de que la aceleración angular empiece a actuar.

- En este apartado, vamos a utilizar una alternativa distinta a la usada en el precedente. Consiste en utilizar las ecuaciones del tercer tramo del movimiento de manera independiente, sin que influya el hecho de que el disco ya se estaba moviendo. Así, se considera que existe un movimiento circular uniformemente acelerado con los datos siguientes:

$$t_0 = 0\, s$$
$$\omega_0 = 0\, rad/s$$
$$\theta_0 = 0\, rad$$
$$\alpha = 0{,}8\, rad/s^2$$

Puede hacerse porque no tiene interés, para resolver el apartado, el movimiento previo. Buscamos saber el espacio angular recorrido y la velocidad angular 20 s después de haberse detenido el disco y empezado a girar en el sentido marcado por la aceleración, con lo cual, no hay ninguna influencia de los movimientos anteriores. Las ecuaciones a aplicar son, por ello:

$$\omega = \alpha t$$
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

La ventaja de esta forma de proceder es que simplifica las ecuaciones y el problema. Basta sustituir los 20 s en el tiempo en cada ecuación para obtener las soluciones:

$$\boldsymbol{\omega} = 0{,}8 \cdot 20 = \mathbf{16\,rad/s}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 20^2 = \mathbf{160\,rad}$$

## 3.5. Movimiento armónico simple

Concluimos este tema con un ejemplo sencillo de un movimiento armónico simple. Este tipo de movimiento es un poco más complejo que los estudiados hasta ahora, de forma que se hará una breve introducción teórica y el problema resuelto será sencillo.

El movimiento armónico simple es un ejemplo de movimiento descrito por una ecuación cuya forma es completamente general, así que es una buena introducción para el estudio de movimientos avanzados.

### Definición de movimiento armónico simple en una dimensión y parámetros principales

Un **movimiento armónico simple** en una dimensión es aquel que se produce a lo largo de una línea recta. Supone una oscilación regular en torno a un punto O de la línea y su movimiento queda descrito por la siguiente ecuación:

$$x = A\,sen(\omega t + \varphi)$$

O, bien, por una idéntica en la que consta el coseno en vez del seno. En esta ecuación x es la distancia a la que se halla el móvil de ese punto O en torno al cual oscila. Cada constante de la ecuación recibe un nombre:

- A es la **amplitud**, y corresponde al máximo alejamiento del cuerpo del punto O.
- $\omega t + \varphi$ se denomina fase.
- $\varphi$ es la **fase inicial**, ya que es la fase cuando $t = 0s$

- $\omega$ es la frecuencia angular. Se mide en rad/s.

Otras magnitudes importantes de los movimientos armónicos simples son:

- T es el **período**, esto es, el tiempo que tarda el cuerpo en realizar una oscilación completa. Debido a que $sen(\alpha + 2\pi) = sen\ \alpha$ el período es el tiempo que tarda la fase en aumentar en $2\pi$. Usando esto, se puede calcular como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- $f$ es la **frecuencia**, se mide en hercios (Hz) y se define como el inverso del período: $f = T^{-1}$. La frecuencia puede relacionarse con la frecuencia angular sin más que despejar de la fórmula anterior:

$$\omega = 2\pi f$$

El estudio de los movimientos armónicos simples es más completo, ya que puede calcularse la velocidad y la aceleración de los mismos en cada momento, pero excede los objetivos del presente tema, que finalizaremos con un ejemplo de estos movimientos.

**Ejemplo 8: Movimiento armónico simple**

Un cuerpo oscila en torno al origen de coordenadas de manera regular a lo largo del eje x. Se sabe que su alejamiento máximo del origen es de 2 m y que tarda 5 s en finalizar cada ciclo. Al iniciar el movimiento armónico simple, el objeto se hallaba a 1 m del origen, en el sentido positivo del eje. Calcular:
Escribir su ecuación del movimiento.
¿A qué distancia está del eje, transcurridos 32 s desde el inicio del movimiento?

Para resolver el primer apartado hay que dar valores a todos los parámetros que aparecen en la ecuación:

$$x = A\ sen(\omega t + \varphi)$$

El enunciado da información para calcular muchos datos de forma inmediata. Dado que el alejamiento máximo es *2 m*, $= 2\ m$. Si cada ciclo dura *5 s*, ese es el período y, por tanto, $T = 5\ s$. Con el período, es fácil calcular la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 0{,}4\pi\ rad/s$$

La fase inicial requiere sustituir todos los parámetros que se han ido calculando en la expresión del movimiento, hacer el tiempo nulo y despejar la fase inicial. De esta manera:

$$1 = 2\ sen(\varphi)$$

Para despejar la fase inicial tenemos que saber que el inverso del seno es el arcoseno, de forma que:

$$\varphi = arcsen\ 0{,}5 = 0{,}5236$$

Por tanto, la ecuación del movimiento es:

$$\boldsymbol{x = 2\ sen(0,4\pi\ t + 0,5236)}$$

Para la segunda cuestión hay que sustituir el tiempo, 32 s en la ecuación recién calculada. Así:

$$\boldsymbol{x} = 2\ sen(0{,}4\pi\ 32 + 0{,}5236) = 2\ sen(40{,}7359) = \boldsymbol{0,2091\ m}$$