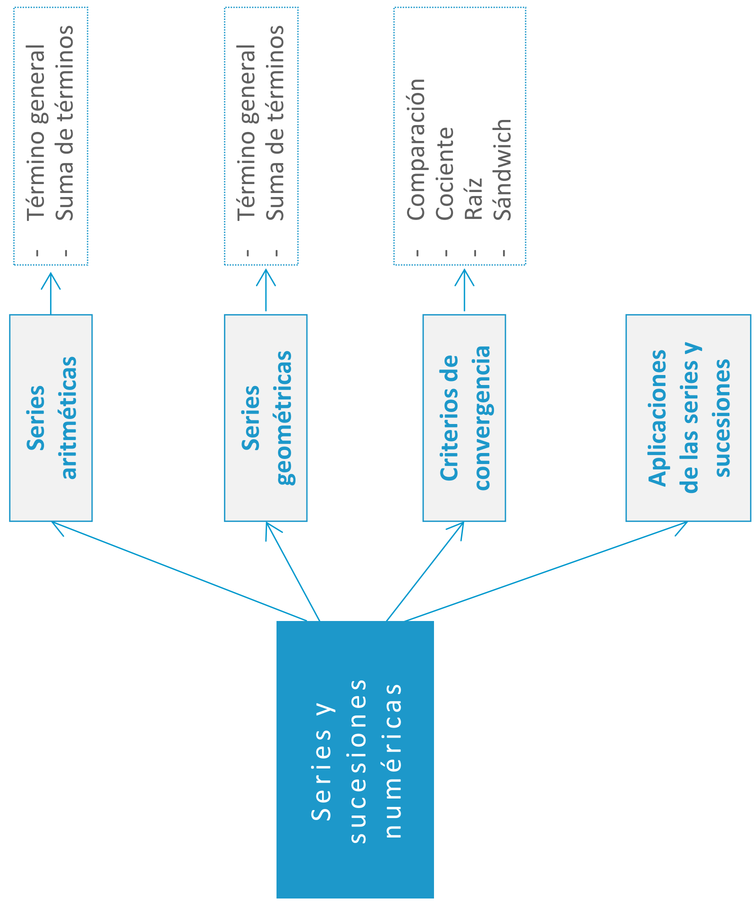
Cálculo

# Series y sucesiones

# Índice

# Esquema


Series y sucesiones numéricas
Series aritméticas
- Término general
- Suma de términos
Series geométricas
- Término general
- Suma de términos
Criterios de convergencia
- Comparación
- Cociente
- Raíz
- Sándwich
Aplicaciones de las series y sucesiones

# Ideas clave

## 9.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que te presentamos a continuación.

Acto seguido, lee las páginas 517-544 del siguiente libro, disponible en la biblioteca virtual de UNIR:

Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (2 ed., Vol. I). Barcelona: Reverté.

Además, tendrás que leer las páginas 561-632, correspondientes al capítulo 9 del siguiente libro, disponible en la biblioteca virtual de UNIR:

Robert, A. (2009). *Cálculo* (Portillo, I.) (6 ed.). Madrid: Addison Wesley.

En este primer tema se verán cuáles son los **conceptos fundamentales de series sucesiones numéricas**. Además, veremos los dos tipos de series más comunes y utilizadas, que son las siguientes: series aritméticas y series geométricas. Se manejarán tanto las fórmulas de generación de series como las de la suma de un cierto número de elementos de las series.

Por otro lado, se hará una **descripción de los criterios de convergencia** de cada uno de los dos tipos de series y sucesiones que vamos a ver, así como algunos criterios para series generales.

Se hará especial hincapié en **las aplicaciones que tienen las series y las sucesiones en el mundo real**, dada la posible utilidad que tienen, ya que un ingeniero, por ejemplo, puede encontrarse con ambas.

## 9.2. Sucesiones

Si a cada entero positivo $n$ le asociamos un número $a_n$, entonces al conjunto ordenado $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ le llamamos **sucesión infinita**. Al estar ordenado, podemos distinguir el **primer término** $a_1$, el **segundo término** $a_2$ y, en general, el **término n-ésimo** $a_n$. Normalmente las sucesiones se construyen a partir de una **regla o término general** que describa a todos los elementos de la sucesión.

**Ejemplo 1**

El término general $a_n = \frac{1}{n}$ define la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

El término general $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 2n^2$ define la sucesión $1,2,1,8,1,18,1, \ldots$

La regla de recurrencia $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para $n \geq 2$, también conocida como la sucesión de Fibonacci produce los primeros términos $1,1,2,3,5,8,13,21,34, \ldots$

**Definimos** de manera precisa una sucesión $\{f(n)\}$ como una función $f(n)$ definida sobre el conjunto de números enteros positivos de manera que $f$ asigna a cada entero $n$ el $n$-ésimo término de la sucesión $f(1), f(2), f(3), \ldots$

Una de las preguntas que se quieren resolver en la práctica es si dada una sucesión, los términos $f(n)$ tienden (o no) a algún valor cuando $n$ crece indefinidamente. Para ello extendemos el concepto de límite a las sucesiones de la siguiente manera:

**Definición 1. Límite de una sucesión**

Decimos que una sucesión $\{f(n)\}$ tiene límite $L$ si para cada entero $\varepsilon > 0$ existe otro número entero $N > 0$ (que, en general depende de $\varepsilon$) tal que:

$$|f(n) - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } \; n \geq N$$

En ese caso decimos que la **sucesión converge** hacia $L$, y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$.

En caso contrario, la sucesión **diverge** y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$ *(o* $-\infty$*).*

Las reglas usuales de los límites que vimos en el tema 1 se aplican a los límites de sucesiones. Veamos unos ejemplos comunes.

**Ejemplo 2**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0 \text{ si } \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \text{ si } |x| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0 \text{ para todo } a > 0, b > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \text{ para todo real } a$$

**Definición 2**

Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice que:

- Es creciente si $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \geq 1$.
- Es decreciente si $f(n) \geq f(n+1)$ para todo $n \geq 1$.
- Es monótona si es creciente o decreciente.

Está acotada si existe un número $M > 0$ tal que $|f(n)| \leq M$ para todo $n$.

Un sencillo criterio para saber si una sucesión monótona es convergente es el siguiente:

**Teorema 1**

Una sucesión monótona converge si y solo si está acotada.

Por ejemplo, la figura 1 representa como una sucesión creciente acotada converge hacia su extremo superior.

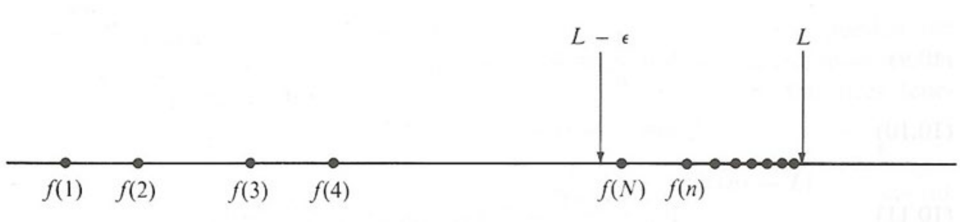



Figura 1. Una sucesión creciente acotada converge hacia su extremo superior. Fuente: Apostol, T., 1999, p. 466

**Ejemplo 3**

La sucesión definida por $f(n)=\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}$ converge a $-1$. Efectivamente, desarrollamos la función y tenemos que $f(n)=\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}=-1-\frac{1}{n+1}<-1$.

Vemos por tanto que está acotada y que $f(n)\leq f(n+1)$, por lo que la función es creciente. Por el teorema anterior, $\{f(n)\}$ es convergente. Para calcular el límite vemos por ejemplo que el término $\frac{1}{n+1}\rightarrow 0$ cuando $n\rightarrow 0$, por lo que el límite es $-1$.

## 9.3. Series

Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ podemos formar otra que consiste en ir sumando los términos sucesivamente. Esta sucesión se llama sucesión de **sumas parciales** y tiene los tres primeros términos: $s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ s_3=a_1+a_2+a_3$ .

Es decir, en general:

$$s_n=a_1+..+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

**Definición 2**

Llamamos serie infinita o simplemente serie a la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, denotada por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, en la que el término $n$ viene dado por:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Si existe un número $S$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ entonces decimos que $\{s_n\}$ es **convergente** y tiene **suma** $S$. En caso contrario decimos que $\{s_n\}$ **diverge** y no tiene suma.

Debe tenerse en cuenta que la palabra «suma» en este contexto no es la suma ordinaria, sino que quiere decir **límite de una sucesión de sumas parciales**. De la misma forma, la notación $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se refiere a una sucesión, no a la suma de todos los términos $a_n$.

A continuación, presentamos una propiedad que permite tratar a las sumas infinitas como si fueran sumas finitas cuando aparezcan adiciones y multiplicaciones por un escalar. En este sentido, las sumas infinitas se comportan como funciones lineales.

**Proposición 1**

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series infinitas convergentes. Entonces para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

En este tema vamos a centrarnos en dos tipos de series dependiendo de la relación existente entre sus miembros. Posteriormente veremos las características generales para las series. En el siguiente cuadro podemos ver los dos tipos de series que vamos a estudiar en este tema:

| Tipo de series | Relación entre sus miembros | Ejemplos |
|---|---|---|
| **Aritmética** | Cada miembro puede obtenerse desde cualquier otro miembro sumando o restando una cantidad que se denominará diferencia y se denotará con una d. | ▸ Los números naturales.<br>▸ Los números pares o impares. |
| **Geométrica** | Cada miembro puede obtenerse desde cualquier otro miembro multiplicando o dividiendo por una cantidad que se denominará y que se denotará con una r. | ▸ Las potencias del número.<br>▸ El valor que ocupa la posición un 1 en un número binario. |

Tabla 1. Tipos de series. Fuente: elaboración propia

# 9.4. Tipos de sucesiones y series

## La sucesión aritmética

Como se observa en el cuadro, podemos encontrar cualquiera de los miembros de la familia que se relacionan entre sí mediante la suma o resta de una cierta cantidad $d$ que llamaremos diferencia. Así cada elemento de la familia puede escribirse como:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

Siendo $a_1$ el primer elemento de la familia y $n$ el número del elemento que queremos conseguir.

**Ejemplo 4**

Calcular el elemento 1489 de la sucesión de los números pares sin contar el 0.
Aplicando la fórmula obtenemos que dicho número es:

$$a_{1489} = 2 + 1488d = 2978$$

Otra de las características que es necesario que conozcamos relacionadas con las series es la suma de los $m$ primeros elementos de una sucesión aritmética y se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} a_i = m\frac{(a_1 + a_m)}{2}$$

**Ejemplo 5**

Calcular la suma de los 1489 primeros números pares sin contar el 0.
Aplicando la fórmula y, como ya hemos calculado el término $a_{1489}$ en el ejercicio anterior, obtenemos que la suma es:

$$S_{1489} = 1489\frac{(2 + 2978)}{2} = 2218610$$

## La serie armónica

Llamamos serie armónica a la suma de los inversos de los enteros positivos:

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$$

La serie armónica es divergente. Si nos fijamos en la figura 2, donde está dibujada la gráfica de la función $y = 1/x$, vemos que el $n$-ésimo término $s_n$ representa precisamente el área de los $n$ rectángulos definidos en el intervalo $[1, n+1]$, mientras que el área que encierra la gráfica es $\int_1^{n+1} 1/x\,dx = log(n+1)$. Llegamos, por tanto, a la desigualdad:

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq log(n+1)$$

Y como $log(n+1) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, la serie $s_n$ diverge.

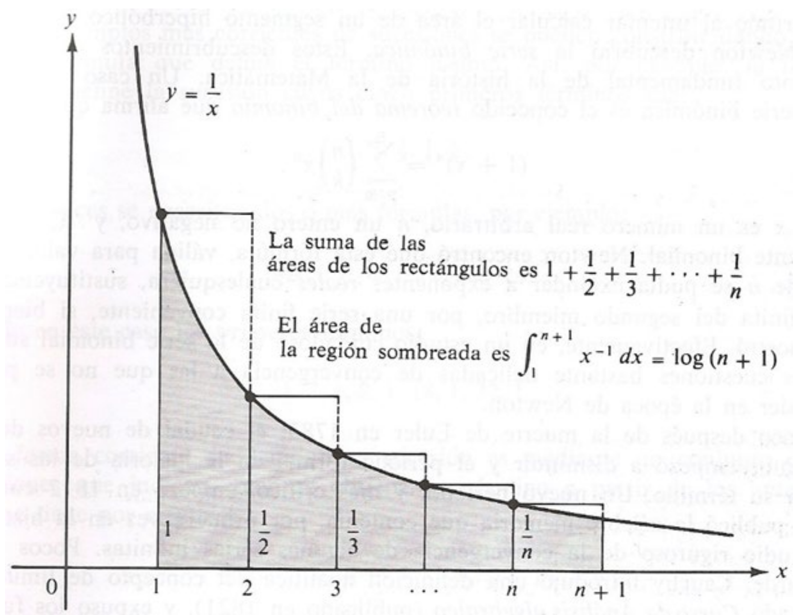



Figura 2. Significado geométrico de la desigualdad $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1)$. Fuente: Apostol, T., 1999, p. 461

## Sucesiones y series geométricas

Una sucesión geométrica es aquella en la que se puede encontrar el siguiente elemento de la serie multiplicando o dividiendo por un valor $r$ que llamaremos razón de la serie.

Así, cada elemento de la familia puede escribirse como:

$$a_n = a_{n-1}r = a_1 r^{n-1}$$

Siendo $a_1$ el primer elemento de la familia y $n$ el número del elemento que queremos conseguir.

**Ejemplo 6**

Calcular el elemento 10 de la sucesión de las potencias del número 2.
Aplicando la fórmula obtenemos que dicho número es:

$$a_{10} = a_1 d^{10-1} = 2\,2^9 = 2^{10} = 1024$$

Al igual que en las sucesiones aritméticas, es posible que tengamos que conocer la suma de los $m$ primeros elementos de una sucesión geométrica.
En este caso se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 \frac{1-r^m}{1-r}$$

**Ejemplo 7**

Calcular la suma de las 10 primeras potencias del número 2.
Aplicando la fórmula y, como ya hemos calculado el término $a_{10}$ en el ejercicio anterior, obtenemos que la suma es:

$$S_{10} = 2\frac{1-2^{10}}{1-2} = 2026$$

Decimos que una serie es geométrica si es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Se tiene que para este tipo de serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge si y solamente si $|x| < 1$, y en tal caso podemos calcular la suma: $1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$.

Si $x \geq 1$ la serie diverge. Esto podemos comprobarlo usando la fórmula anterior y calculando el límite.

Es uno de los pocos ejemplos en los que se puede calcular la suma mediante una fórmula sencilla. De hecho, la verdadera importancia de esta serie es que sirve como punto de partida para calcular la suma de otras muchas series. Por ejemplo, si suponemos que $|x| < 1$ entonces $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$.

Y para los exponentes impares:

$$x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} + \ldots = \frac{x}{1-x^2}$$

Podemos también sustituir $x$ por $-x$ en la fórmula de la definición para obtener:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{1}{1+x}$$

O si sustituimos esta última ecuación $x$ por $x^2$:

$$1 - x^2 + x^4 - x^5 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1+x^2}$$

De esta manera podremos construir de forma análoga numerosos ejemplos.

Este tipo de series es un caso particular de las llamadas **series de potencias** con las que la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ tiene muchas aplicaciones en diversas partes del análisis matemático. Por ejemplo, podemos considerar la derivación o integración en ambos miembros de la igualdad para construir las fórmulas:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = log(1+x)$$

Así como desarrollos en series de potencias de las funciones trigonométricas como el seno, coseno o exponencial.

## 9.5. Otras series y sucesiones importantes

### Series telescópicas

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es una serie telescópica cuando su término general puede escribirse de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ en donde $b_n$ es una sucesión en la que podemos calcular su límite. De esta manera, obsérvese que $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \ldots + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$.

Tenemos que $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = b_1 - b_{n+1}$, por lo que si $n \to \infty$ entonces $s_n \to b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$. Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

De esta manera podemos ver que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1$$

### Series alternadas

En el caso en el que los términos de la serie tengan sus signos alternativamente positivos y negativos, decimos que la serie es alternada.

Son de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

Donde cada $a_n > 0$.

Como ejemplo de este tipo de serie tenemos la serie logarítmica:

$$log\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

## 9.6. Criterios de convergencia de series

En algunos casos particulares es posible simplificar las sumas parciales $s_n$ de manera que el valor exacto de la suma cuando $n \to \infty$ puede ser calculado. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones no existe esa forma simplificada para $s_n$, o difícilmente se puede establecer la convergencia o divergencia.

En esta sección vamos a presentar algunos de los criterios más sencillos y útiles para decidir si una sucesión converge o diverge. El primero de ellos es muy sencillo y proporciona una condición necesaria.

**Teorema 2. Condición necesaria para la convergencia de series**

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

## Criterios de comparación para series de términos no negativos

Si tenemos una serie de la forma $\sum a_n$ en la que $a_n \geq 0$ para todo $n$, entonces la serie de sumas parciales es monótona creciente, por lo que el uso del teorema 2 da lugar a los siguientes dos criterios:

**Proposición 2. Criterio de comparación**

Supongamos $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Si existe una constante $c > 0$ tal que $a_n \leq cb_n$ para todos $n$.

Entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Proposición 3. Criterio de comparación por paso al límite**

Supongamos $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$ y se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y solamente si, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Para usar los criterios de comparación es necesario disponer de ejemplos de series en los que conocemos su convergencia o divergencia.

**Ejemplo 8**

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ es convergente.

Vamos a aplicar el criterio de comparación por paso al límite. Para ello vamos a llamar $a_n$ a los términos de la serie que queremos calcular. Por otro lado, tomamos como $b_n$ los términos de la serie:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Ahora tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1$$

La serie $B$ sabemos que es convergente, puesto que se trata de una serie armónica con razón $\frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto, la serie del enunciado también es convergente.

**Proposición 4. Criterio integral**

Sea $f$ una función positiva decreciente, definida para $x \geq 1$.

Para cada $n \geq 1$ sean:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad y \qquad t_n = \int_1^n f(x)dx$$

Entonces o ambas sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen, o ambas divergen.

**Proposición 5. Criterio de la raíz**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tales que $a_n^{1/n} \to R \text{ cuando } n \to \infty$

Entonces:

- Si $R < 1$ la serie converge.
- Si $R > 1$ la serie diverge.
- Si $R = 1$ el criterio no decide.

**Ejemplo 9**

Verificar la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n$$

Vamos a aplicar el criterio de la raíz en los dos casos.

En el primer caso tenemos $a_n = \frac{1}{n^n}$. Así pues, debemos calcular el límite de $a_n^{\frac{1}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

En el segundo caso tenemos $a_n = \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n$. Miramos el límite de la raíz de los términos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3 > 1$$

Por lo tanto la serie es divergente.

**Proposición 6. Criterio del cociente**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tales que: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ cuando $n \to \infty$.

Entonces:

- Si $L < 1$ la serie converge.
- Si $L > 1$ la serie diverge.
- Si $L = 1$ el criterio no decide.

**Ejemplo 10**

Verificar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

Vamos a aplicar el criterio del cociente:

El término general de la serie es $a_n = \frac{n!}{2^n}$. Buscamos el límite del cociente de dos elementos consecutivos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty > 1$$

Por lo tanto, la serie es divergente.

**Proposición 7. Criterio de Leibniz para series alternadas**

Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite $0$, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge.

Además, si designamos con $S$ a su suma y con $s_n$ su suma parcial $n$-ésima, se tienen las desigualdades: $0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}$ para cada $n \geq 1$.

**Ejemplo 11**

Verificar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Consideramos la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. Claramente, $a_n$ es decreciente (puesto que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$). Además, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Por lo tanto, aplicando el criterio de Leibniz, la serie es convergente.

# 9.7. Aplicaciones de sucesiones y series

El estudio de las series y sucesiones ha sido de gran utilidad porque aparecen en multitud de áreas como, por ejemplo, la economía, la ingería, en el mundo académico, etc.

## Series en la economía (préstamos e intereses)

Las series nos pueden servir para calcular cuánto dinero nos va a generar un préstamo en un cierto período de tiempo. Por ejemplo, si al depositar una cantidad de 1000 € en un Banco nos dicen que nos ofrecen un interés del 10 % simple anual, y queremos saber cuánto dinero tendremos en cinco años, la fórmula es simple, ya que se corresponde con una serie aritmética:

$$D_5 = D_0(1 + 5i) = 1000(1 + 0.5) = 1500$$

En el caso de que el interés sea compuesto, optaremos por una serie geométrica:

$$D_5 = D_0(1 + i)^5 = 1000(1 + 0.1)^5 = 1610.51$$

## Series de potencias

Cuando tenemos una función $f(x)$ a veces resulta interesante expresar dicha función como una serie que depende de una variable $x$. De esta forma se introducen las series de potencias. Algunas series que son interesantes de conocer y resultan de gran utilidad son las siguientes:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{(2n)}$$

Observemos que todas estas series se caracterizan por tener la variable independiente de la función como potencias, este hecho motiva el nombre de series de potencias. En temas posteriores veremos cómo calcular varias de estas series y ampliaremos la teoría de las mismas.

## Series en la teoría de señales

Finalmente, un último tipo de serie que se aplica usualmente en ingeniería es la serie de Fourier. Como en el caso anterior se trata de una serie que depende de una variable independiente y nos permite definir una función a lo largo del tiempo. Así pues, únicamente comunicando los términos de la serie podemos conocer una aproximación de todos los valores de la función en un intervalo.

Las series de Fourier están especialmente diseñadas para representar funciones periódicas. La serie se define como:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t$$

Donde $T$ es el período de la función.

Observemos que tanto $\cos\frac{2n\pi}{T}t$ como $\sin\frac{2n\pi}{T}t$ son dos funciones que tomarán valores al dar un valor a $t$. Así pues, para cada valor de $t$ tenemos una nueva serie.

Estas series son de vital importancia para el estudio de señales electrónicas, así como para la compresión de información. En posteriores temas revisitaremos el problema para ver más de sus propiedades.

## 9.8. Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1999). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable*. (Vol. I). Barcelona: Reverté.