Física I

Trabajo y energía

Índice

Esquema 3

Ideas clave 4

7.1. Introducción y objetivos 4

7.2. Definición de trabajo y potencia 5

7.3. Definición de energía y sus tipos 10

7.4. Principio de conversación de la energía 24

Esquema

TRABAJO Y ENERGÍA

Potencia

Medida de la rapidez con que se suministra trabajo. Se mide en watios.

$1w = 1J/s = kg\,m^2/s^3$

Caballo de Vapor: unidad tradicional 1CV = 736 w

Potencia media:

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Potencia instantánea:

$$P = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \equiv \frac{dW}{dt}$$

Trabajo

Trabajo: si sobre un cuerpo actúa una fuerza que provoca un desplazamiento de A hasta B, el trabajo efectuado por la fuerza se define como:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Unidades: Julios. 1J=1N m

Campos de fuerzas

Un **campo de fuerza** es un región del espacio donde un partícula sensible al mismo sufre una fuerza determinada.

Un campo de fuerzas es **conservativo** si el trabajo no depende de la ruta seguida por el cuerpo.

Una fuerza es central si siempre va dirigida hacia un centro de fuerzas. Un campo puede estar formado por fuerzas centrales.

Un campo de fuerzas centrales es conservativo y la energía potencial solo depende de la distancia al centro.

Energía

Energía: capacidad o posibilidad de un cuerpo para efectuar trabajo

Tipos de energía

Energía cinética: la que tiene un cuerpo por estar en movimiento:

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Teorema de las fuerzas vivas: el incremento de energía cinética es igual al trabajo total efectuado.

Energía potencial: función escalar de la posición definida de forma que el trabajo realizado por el cambio de posición en el seno de un **campo conservativo** es igual ala diferencia de esa energía entre ambos puntos.

Ejemplos: energía potencial gravitatoria y energía potencial elástica:

$$E_{P\,graw} = mgh$$

$$E_{P\,elást.} = \frac{1}{2} k\, x^2$$

Principio de la conservación de la energía

Solo para fuerzas conservativas:

$$\Delta E_C + \Delta E_P = 0$$

De la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2} m v_F^2 + mgh_F$$

De la energía general:

$$\Delta E_C + \Delta E_P = W_{NC}$$

De la energía general solo considerando rozamiento:

$$E_{CF} + E_{PF} = E_{C0} + E_{P0} + W_R$$

De la energía general para sistemas de partículas con fuerzas internas solo conservativas:

$$\Delta E_C + \Delta E_{Pint} = W_{Fext}$$

$$E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

7.1. Introducción y objetivos

En este tema se introducen los conceptos de trabajo y de energía en el ámbito de la física clásica. El trabajo es una magnitud física relacionada con un segundo efecto de las fuerzas. Las fuerzas, además de provocar aceleraciones, causan desplazamientos y el trabajo mide la eficiencia de las fuerzas a la hora de provocarlos. Añadir el concepto de energía, definida como capacidad de un cuerpo para efectuar un trabajo, crea una visión complementaria de la dinámica de Newton. Aunque hay más tipos de energía, en esta lección se estudiarán solo la cinética, la potencial gravitatoria y la potencial elástica. El objetivo es establecer los principios físicos básicos que permitirán la resolución de problemas prácticos de manera alternativa a como se hizo en el tema anterior.

Teóricamente, la ecuación fundamental de la dinámica permitiría resolver cualquier problema de dinámica; sin embargo, no siempre es fácil o posible hacerlo. Resolver un problema de dinámica implica, en definitiva, obtener la expresión de la aceleración como función exclusiva del tiempo. Con ello, será posible conocer la ecuación del movimiento del móvil involucrado por medio de los métodos cinemáticos.

Para que esto sea sencillo, la fuerza debe ser una constante, o bien, una función exclusiva del tiempo. Y ambos casos son poco usuales en la práctica. En general, las fuerzas suelen depender de la posición, como comprobamos en tema 5. Cuando sucede esto, la complejidad matemática del problema aumenta enormemente, hasta llegar al punto de que muchos problemas carecen de solución analítica, esto es, requieren el empleo de cálculo numérico.

El uso de conceptos como el trabajo o la energía permite reformular los métodos de cálculo de las ecuaciones de la dinámica y facilita la resolución de multitud de problemas de física muy complejos con los métodos convencionales.

La asimilación de las ideas clave que conforman el tema te dotará de la posibilidad de:

- Comprender los conceptos de trabajo y potencia en física y su importancia.
- Comprender el concepto de energía y conocer las fórmulas y los tipos de energías más comunes en problemas físicos.
- Dominar el concepto de campo de fuerzas, de campo de fuerzas conservativo y su importancia en física.
- Entender la importancia del principio de conservación de la energía.

7.2. Definición de trabajo y potencia

Los conceptos de trabajo y de potencia son propios del lenguaje coloquial, sin embargo, sus definiciones en física no tienen mucho que ver con sus expresiones cotidianas. Ambos están relacionados de manera muy estrecha.

En esta parte del tema se definirá de manera rigurosa el trabajo y la potencia, tal y como son utilizados en dinámica clásica. El concepto más importante es el de trabajo, ya que a partir de este se definen el de potencia y el de energía.

Definición de trabajo

Al introducir la dinámica newtoniana, establecimos que el efecto de una fuerza era proporcionar una aceleración. Una manera complementaria de considerarlo es que una fuerza provoca el desplazamiento de algún objeto.

El caso más simple es el de una fuerza cuya dirección y sentido coinciden con el desplazamiento inducido, como lo que sucede cuando se tira de un objeto sobre un suelo liso con una fuerza paralela al suelo. En ese caso, toda la fuerza se aplica en provocar tal desplazamiento. Si se tira con una fuerza que forma determinado ángulo con el suelo, solo parte de esa fuerza produce el desplazamiento horizontal: la componente en esa dirección. Por todo esto, la definición de trabajo en física es:

Sea un objeto sobre el que está actuando una fuerza $\vec{F}$ y que experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{r}$. Definimos el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto como el producto escalar entre el vector fuerza y el vector desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

De esta definición deducimos que el trabajo es una magnitud escalar y que en función del ángulo que haya entre la fuerza y el desplazamiento, podrá ser positivo o negativo. En general, el trabajo será positivo cuando la fuerza favorezca el movimiento (cuando el sentido de la fuerza y el desplazamiento son el mismo) y negativo cuando va en contra.

El trabajo se mide en julios, cuya expresión en unidades fundamentales se obtiene a partir de la expresión del trabajo:

$$1\,J = 1kg \cdot m^2/s^2$$

La definición descrita de trabajo es la más elemental, y solo es válida con exactitud, en principio, si la trayectoria del objeto es rectilínea. En el caso general, de una trayectoria genérica y una fuerza que, normalmente, dependerá de la posición, el trabajo estará dado por:

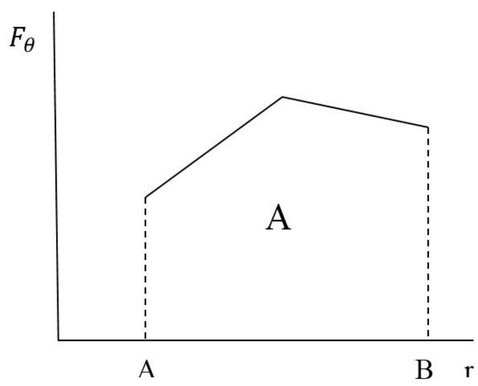
$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

El cálculo debe hacerse a lo largo de la trayectoria en la que se aplica la fuerza, de manera que esta es una integral curvilínea. En la mayoría de casos, tales cálculos serán complicados, y su complejidad dependerá de la expresión de la fuerza y de la trayectoria concreta.

Bajo ciertas condiciones, este problema se puede abordar de manera gráfica. Para ello, tendremos que construir un gráfico en cuya abscisa esté el desplazamiento realizado y en el eje de ordenadas la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento (esto es, la componente de la fuerza tangente a la trayectoria). Si θ es el ángulo entre la fuerza y la tangente a la trayectoria, la componente de la fuerza que se ha de representar es:

$$F\cos\theta$$

Donde el ángulo variará a lo largo de la trayectoria. Un ejemplo de gráfico es el de la figura:



De esta manera, el trabajo realizado entre los puntos A y B es igual al área «A» que hay bajo la curva $F_\theta - r$. Si es posible dibujar, de manera sencilla, este diagrama, y calcular las áreas sin complicaciones, este método sustituye al cálculo integral con eficacia.

Un último comentario es que el concepto físico de trabajo no tiene mucho que ver con el concepto coloquial de «trabajo» o «esfuerzo». Es posible que una fuerza produzca un trabajo nulo en muchas circunstancias. La menos intuitiva es cuando el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es de 90º.

Así, por ejemplo, según la física, transportar a velocidad constante una maleta de 50 kg durante un kilómetro no supone realizar trabajo. La fuerza a realizar para llevar la maleta está en la dirección vertical, ya que la fuerza que debe efectuar la persona que la transporta es aquella que anule el peso de la maleta. Sin embargo, el desplazamiento de la maleta se produce en la dirección horizontal. De este modo, por mucho esfuerzo o «trabajo» que le cueste a una persona transportar una carga en largas distancias, el trabajo efectuado por quien lleva la maleta es nulo según la física.

Definición de potencia

Especialmente en ingeniería, resulta muy importante saber el tiempo que tarda una fuerza en efectuar un trabajo. La definición básica de trabajo no considera el tiempo que se tarda en realizarlo, de ahí que sea imprescindible la definición de una magnitud nueva. Tal magnitud es la **potencia**. Como sucedía con la velocidad, la potencia admite dos definiciones relacionadas, una más fina y exacta que la otra.

Primera definición (la más elemental)

Se define la potencia media como el cociente entre el trabajo efectuado por una fuerza y el tiempo que necesita esa fuerza para realizarlo. Se expresa:

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

La potencia se mide en watios, que se abrevian como w. Habida cuenta de la definición de potencia, el watio se define como:

$$[P] = \frac{[W]}{[T]} = \frac{[F][L]}{[T]} = \frac{[M][L]^2}{[T]^3}$$

Esto es:

$$1\,w = 1kg\ \cdot m^2/s^3$$

Existe otra unidad para la potencia bastante antigua y que no pertenece al Sistema Internacional, pero cuyo uso está tan extendido que lo mencionaremos aquí. Se trata del **caballo de vapor**, abreviado como CV y que vale:

$$1\,CV = 736\,w.$$

La potencia media es una buena medida de la potencia real realizada cuando el trabajo no varía con el tiempo, cosa que solo ocurrirá si la fuerza es constante a lo largo del intervalo en el que se calcula la potencia media. Asimismo, si los cambios en la fuerza son lentos a lo largo del tiempo, también sería una medida razonable de la potencia real. Sin embargo, hay casos en los que esta potencia media es muy inexacta. Como pasó con la velocidad, mientras menor sea el intervalo temporal, mayor precisión tiene el cálculo de la potencia. Ello nos lleva a la siguiente definición:

Segunda definición

Se define la potencia instantánea como el límite de la potencia media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Se calcula:

$$\boldsymbol{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}}$$

Esta última expresión es muy importante, ya que nos da una expresión de la potencia en función del tiempo. En el caso de obtener esta ecuación, será posible calcular el trabajo de forma exacta en cualquier intervalo de tiempo con solo integrarlo.

7.3. Definición de energía y sus tipos

El concepto de trabajo es el que permite definir el de energía; no obstante, es esta última magnitud la que parece más cercana en el lenguaje coloquial, sobre todo porque la obtención de cualquiera de los tipos de energía que se usan en todas las sociedades modernas (eléctrica, proveniente del petróleo, nuclear) es una parte esencial de la actividad económica.

En este tema, se introduce el concepto de energía, tal y como se emplea en mecánica clásica y se describen los tipos principales utilizados en esta parte de la física. Existen más tipos, que no comentaremos en este apartado.

Concepto de energía

Históricamente, el concepto de energía se formuló y desarrolló con anterioridad al de trabajo. Sin embargo, la física actual define la energía en función del trabajo; por ello, este tema, y la mayoría de textos sobre dinámica clásica, comienzan hablando primero del trabajo. En dinámica, se define la energía de la siguiente manera:

La energía de un sistema físico es una magnitud que mide la capacidad o posibilidad del cuerpo para efectuar un trabajo. Es una magnitud escalar cuyas unidades son las mismas que las del trabajo.

Esta definición resulta clara y precisa si ya se conoce bien qué es el trabajo. En cierto modo, en lo que respecta a la dinámica clásica, la energía es algo muy similar a trabajo acumulado. El hecho de que las unidades de trabajo y de energía sean las mismas es lo que refuerza la noción de la energía como trabajo acumulado. Otra interpretación de este hecho es que el trabajo es «energía en tránsito», esto es, el trabajo es la manera que tienen los cuerpos, en dinámica clásica, de transferirse energía unos a otros.

Normalmente, un cuerpo adquiere energía cuando se efectúa trabajo sobre él, esto es, cuando se le aplica una fuerza que provoca desplazamiento. Un cuerpo sobre el que se ejerce trabajo sufre una variación, en su estado, que lo capacita para producir trabajo en otros cuerpos. Esta variación dependerá del trabajo al que se haya sometido previamente al cuerpo. Según el origen de esa capacidad se habla de:

- **Energía cinética**: cuando la capacidad de realizar trabajo sobre otros cuerpos depende de la velocidad adquirida.
- **Energía potencial**: cuando la capacidad de efectuar trabajo depende de la posición del cuerpo. En este caso, es algún tipo de campo el que provoca que, al moverse un objeto en su seno, este adquiera o suministre energía.

Estos no son los únicos tipos de energía que define la física, ya que otras ramas de esta disciplina admiten otros que no son, estrictamente, de ninguna de estas dos clases. En los siguientes apartados de este tema definiremos los tipos de energía más comunes en el ámbito de la dinámica y algunos conceptos relacionados para utilizarlas y comprenderlas.

Energía cinética

Si un cuerpo se halla en reposo, para que empiece a moverse hay que efectuar cierto trabajo sobre él. De ahí se deduce que un cuerpo que se mueve a determinada velocidad ha «acumulado» trabajo o, dicho de otro modo, dispone de cierta energía. Por tanto:

La energía que posee un cuerpo debido a que se encuentra en movimiento se denomina energía cinética.

A continuación, obtendremos una expresión para la energía cinética. Aunque reviste cierta complejidad, dado que implica cálculo integral, se trata de una deducción importante y comprensible si se aceptan como ciertas algunas de las operaciones que se expondrán.

Sea un cuerpo de masa m que está sometido a una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de una curva determinada. En la posición A, lleva una velocidad $\overrightarrow{v_A}$, y en la posición B, otra dada por $\overrightarrow{v_B}$. Este cambio de la velocidad estará originado por la acción de la fuerza, que imprime una aceleración al objeto.

Para calcular el trabajo efectuado por la fuerza sobre el objeto, se parte de la definición general de trabajo:

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dado que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de ambos vectores multiplicados por el coseno del ángulo que forman, y que el módulo por el coseno del ángulo, formado entre fuerza y desplazamiento, será la componente tangencial de la fuerza a la trayectoria seguida por el móvil se puede escribir, de manera equivalente:

$$W_{A \to B} = \int_A^B F_t \, dr$$

Si consideramos constante la masa, recordando la expresión alternativa de la segunda ley de Newton en función de la cantidad de movimiento, es posible escribir:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Que para la componente tangencial de la fuerza puede sustituirse por los módulos:

$$F_t = m\ \frac{dv}{dt}$$

Donde se cumple que:

$$v = \frac{dr}{dt}$$

Si se sustituye la expresión de la componente tangencial de la fuerza, usamos el hecho de que la masa es constante (y sale de la integral) y la expresión de v precedente:

$$W_{A \to B} = \int_A^B m\ \frac{dv}{dt} dr = m\ \int_A^B dv\ \ \frac{dr}{dt} = \int_A^B v\ dv$$

Aceptando el siguiente resultado:

$$\int x\ dx = \frac{1}{2} x^2$$

La expresión del trabajo queda:

$$W_{A \to B} = \frac{1}{2}\ m\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ m\ v_A^2$$

Como el cambio en la energía del cuerpo debida a su velocidad debería ser igual (o al menos proporcional) al trabajo que le han suministrado las fuerzas exteriores, es muy razonable definir la energía cinética como aquella de expresión:

$$E_C = \frac{1}{2} m\ v^2$$

De manera que la última expresión del trabajo entre los puntos A y B queda:

$$W_{A\rightarrow B} = E_{CB} - E_{CA} = \Delta E_C$$

A esta expresión se la llama **teorema de las fuerzas vivas o teorema del trabajo y la energía cinética**, que se enuncia así:

El trabajo total efectuado sobre un cuerpo es igual a la variación de energía cinética que experimenta.

La **ecuación del teorema de las fuerzas vivas** se puede interpretar de la siguiente manera: el trabajo efectuado sobre un cuerpo se invierte en aumentar su energía cinética en una cantidad igual al trabajo realizado. Por otro lado, la expresión es del todo general, y es válida para cualquier tipo de fuerza capaz de proporcionar trabajo.

Por último, debemos destacar que tanto el trabajo como la energía cinética, al depender el primero de la trayectoria seguida por el cuerpo y la segunda de la velocidad, variará al cambiar de sistema de referencia. No obstante, el teorema de las fuerzas vivas seguirá siendo válido si los sistemas involucrados son inerciales y están ligados por una transformación de Galileo.

Campos de fuerza conservativos. Energía potencial gravitatoria

A nivel experimental, hay una serie de hechos que nos hace suponer que un objeto material adquiere energía, simplemente, por hallarse sometido a la influencia, por ejemplo, gravitatoria de otros objetos. En particular, si en la Tierra se levanta un objeto a cierta altura del suelo y se suelta, sucederá que el objeto empieza a caer y va adquiriendo velocidad solo por haberlo dejado caer. Este efecto es similar al que sucedería si se le suministrara trabajo al objeto y, en realidad, es lo que acontece en la práctica.

Todos estos hechos permiten la definición de un tipo nuevo de energía que mide cuánto trabajo puede devolver un objeto debido a la acción de campos de fuerza cuya intensidad depende de la posición. Para entender la definición debemos, es preciso conocer el concepto de campo de fuerzas. La definición de campo de fuerzas es la siguiente:

Un campo de fuerzas es una región del espacio en la que una partícula situada en su interior experimenta una fuerza cuyo valor está definido en módulo, dirección y sentido, de manera exacta, en función de la posición de la partícula y, en el caso general, del tiempo. Matemáticamente, se suele expresar así:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Si el valor de la fuerza inducida por el campo no depende explícitamente del tiempo, se dirá que el campo es **estacionario**. En adelante, se trabajará solo con campos estacionarios.

El concepto de campo es el que modela en física la acción de la gravedad y de otras interacciones como las electromagnéticas. Es fácil comprender que la acción de la gravedad sobre cualquier cuerpo situado en la superficie de la Tierra es producir una fuerza que dependerá, generalmente, de la posición: mientras más lejos se esté de la superficie, menor es la fuerza.

La acción de todo campo depende, también, de las características del objeto que se sumerge en él. Así, dado un campo magnético, objetos hechos de plástico no experimentarán ningún efecto derivado del mismo. En general, habrá alguna magnitud del objeto que modulará la influencia del campo sobre el mismo. Para el caso más importante (y el que estudiaremos sobre todo en esta parte del tema), el del campo gravitatorio, esta magnitud es la masa: la fuerza gravitatoria es directamente proporcional a la masa del objeto considerado.

En realidad, la expresión de la **ley de gravitación universal**, define, en sí, un campo de fuerzas. Para el caso particular de la Tierra, una masa m adquiere una fuerza que depende de la distancia al centro de la Tierra de la siguiente manera:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\,\frac{mM_T}{r^2}\,\hat{u}$$

Se puede separar lo que es la contribución del campo de las características del objeto mediante el concepto de **intensidad del campo**. En el caso del campo gravitatorio, el vector intensidad del campo es, simplemente:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\,\frac{M_T}{r^2}\,\hat{u}$$

Con lo que la fuerza que sufre una partícula de masa m en el seno del campo gravitatorio terrestre es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\,\vec{g}(\vec{r})$$

El vector intensidad de campo puede definirse, así, como el vector que da la fuerza debida al campo si se le multiplica por la masa de la partícula que sufre la acción del campo. Como un campo de fuerzas se manifiesta ejerciendo fuerzas sobre los objetos sensibles a su acción, es evidente que también efectuará un trabajo sobre tales objetos dado por:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Su valor dependerá, en general, de la trayectoria concreta que se considere.

Sin embargo, existen ciertos campos en los que el trabajo que este realiza entre dos puntos cualesquiera, A y B, es independiente del camino. Estos campos son de extraordinaria importancia, tal que llevan a la siguiente definición:

Se dice que un campo de fuerzas es conservativo si el trabajo que efectúa sobre cualquier objeto entre los puntos A y B es independiente del camino seguido para llegar desde A hasta B. Las fuerzas definidas por un campo de esta clase se denominan fuerzas conservativas.

La importancia de este tipo de campos es que permiten definir una «energía potencial» relacionada con el trabajo realizado o devuelto al campo por las partículas que se desplazan en su seno.

Una consecuencia de la definición es que el trabajo a lo largo de cualquier curva cerrada, en el seno de un campo de fuerzas conservativo, es nulo. Para ello, basta darse cuenta de que en cualquier curva cerrada se pueden definir dos puntos, A y B, de manera que el recorrido de la curva cerrada equivalga a ir de A hasta a B y, luego, regresar de B hasta A. Como el campo es conservativo el trabajo producido al ir de A hasta B será igual y de signo contrario al de regresar de B hasta A, sean cuales sean los caminos elegidos, por lo que el trabajo total será nulo si la curva es cerrada y el campo conservativo.

El concepto de campo conservativo permite definir un nuevo tipo de energía, denominado **energía potencial**. Esta definición puede expresarse así:

La energía potencial de una partícula en un campo conservativo, con el que puede interactuar, es una función escalar de la posición del cuerpo definida de manera que el trabajo realizado por cambiar la posición del objeto en el seno del campo es igual a la diferencia de los valores de la energía potencial en las posiciones inicial y final.

Es fundamental recordar que la energía potencial se puede definir porque el campo es conservativo.

A partir de la definición anterior, se puede escribir la siguiente expresión para el cálculo de la energía potencial:

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right]$$

Donde el signo negativo que se pone antes de la diferencia, entre energías potenciales, indica que el trabajo efectuado por el campo representa una disminución de la energía potencial de este. Si de esta fórmula despejamos $E_p(B)$, obtenemos:

$$E_p(B) = E_p(A) - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Tal expresión tiene una consecuencia muy importante: el valor de la energía potencial. El valor de la energía potencial en B no queda determinado a menos que se conozca el valor de tal energía en A. En realidad, solo es posible conocer diferencias de energía potencial, no de valor absoluto.

Por ello, un procedimiento habitual (y muy recomendable cuando se resuelven problemas de dinámica en el seno de un campo gravitatorio terrestre) es fijar un valor arbitrario para $E_p(A)$, habitualmente el cero. Además, hay que determinar las coordenadas de A, el punto en el que la energía potencial tendrá ese valor arbitrario. Si se desea que ese valor arbitrario sea nulo para campos como el eléctrico o el gravitatorio, que dependen inversamente de la distancia, el punto en el que la energía potencial podría considerarse nula sería a una distancia infinita. De esta manera:

$$E_p(B) = -\int_\infty^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_B^\infty \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Expresión en la que tenemos que aceptar que si se invierten los límites de integración, el resultado de la integral tiene signo opuesto.

Dentro de los campos conservativos, existe **una categoría de gran interés**: los campos de fuerza cuyas fuerzas son centrales. Por definición:

Una fuerza, o un campo de fuerzas, se dice que es central cuando todas las fuerzas van dirigidas a un mismo punto, o centro.

Es evidente que las fuerzas gravitatorias provocadas por una masa puntual son centrales, puesto que siempre van dirigidas hacia la propia partícula. También lo serían las fuerzas provocadas por un muelle fijo por un extremo cuando se estira, ya que su dirección va siempre dirigida hacia ese punto en el que está fijo.

La propiedad más importante de un sistema de fuerzas centrales, que son siempre conservativos, es que su energía potencial depende, solamente, de la distancia de la partícula al centro de fuerzas, y viceversa. Dicho de una manera más formal:

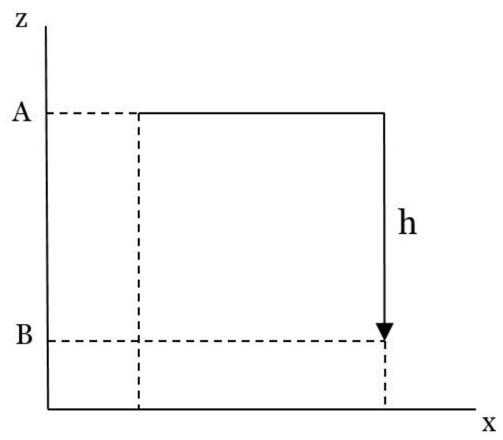
La energía potencial asociada a un campo de fuerzas centrales depende, tan solo, de la distancia a la que se halla la partícula del centro de las fuerzas centrales. Recíprocamente, si la energía potencial asociada a un campo de fuerzas depende solamente de la distancia a determinado punto, el campo de fuerzas es central y ese punto es el centro de las fuerzas centrales.

Dado que ya se dispone de toda la información teórica imprescindible, terminaremos este apartado obteniendo dos expresiones para la energía potencial gravitatoria creada por el campo gravitatorio de la Tierra. Estas expresiones, sobre todo una de ellas, las usaremos en la mayoría de problemas relativos al uso del concepto de energía en dinámica.

La primera expresión se estudia ampliamente en la física de bachillerato. Si se supone un área pequeña en la superficie de la Tierra, lo bastante pequeña como para que se pueda considerar plana la superficie, el peso podrá escribirse como:

$$\vec{P} = -\,mg\,\vec{k}$$

El objetivo es calcular el trabajo realizado por esta fuerza sobre un objeto que pasa desde el punto A al punto B, como vemos en la figura. Dado que el campo gravitatorio es conservativo, da igual la ruta que se tome para calcular el trabajo, por lo tanto, se escoge la pintada en la figura:



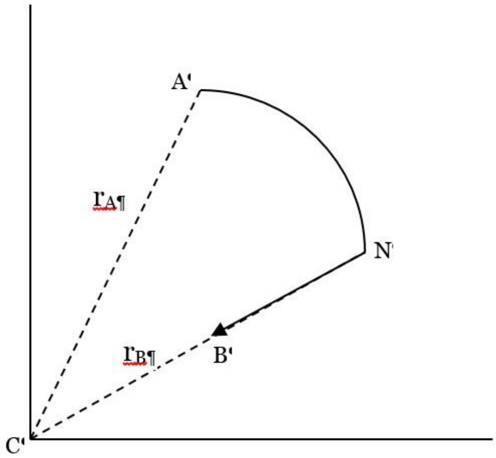
En el tramo horizontal, el ángulo entre el desplazamiento y la fuerza es de 90º, con lo que el trabajo es nulo. En el tramo vertical, basta utilizar la definición elemental de trabajo:

$$W_{A\to B} = \vec{F}\ \cdot \vec{r} = \left(-mg\vec{k}\right) \cdot (z_B - z_A)\vec{k} = mg(z_A - z_B) = mgh$$

La expresión anterior no es válida si no es posible suponer que el área es muy pequeña debido a que las distancias consideradas son muy grandes. En ese caso, la fuerza ejercida por la Tierra tiene que escribirse como:

$$\vec{F} = -G\,\frac{mM_T}{r^2}\,\hat{u}$$

Donde $\hat{u}$ es un vector en la dirección radial dirigido hacia el exterior del planeta. Dado que el campo gravitatorio es conservativo, se elige para calcular el trabajo la trayectoria de la figura entre los puntos A y B:



En la figura, C representa el centro de la Tierra. Debemos destacar que el punto N está a la misma distancia del centro de la Tierra que el punto A. Como el ángulo entre la tangente a la parte de la trayectoria que va desde A hasta N y la fuerza de gravedad es de 90º el trabajo en ese tramo es nulo. En cuanto al tramo que va de N a B, en esta ocasión es preciso integrar:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\,\frac{mM_T}{r^2}\,dr = -GmM_T \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

Hay que aceptar el siguiente resultado de integración:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}$$

Tras este resultado, la expresión del trabajo queda:

$$W_{A\to B} = -GmM_T \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GmM_T \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Tomando como punto con energía potencial nula la posición $r_B = \infty$ la expresión de la energía potencial queda:

$$E_P(r) = -\frac{GmM_T}{r}$$

Como puede verse, no es la misma expresión que la elemental deducida antes. Sin embargo, es posible demostrar que la expresión de $E_p = mgh$ es un caso particular de esta última. Si calculamos la diferencia de energía potencial entre los puntos *r* y R_T, de manera que R_T sea casi igual a *r* (esto es, la distancia recorrida considerada es muy pequeña con respecto al tamaño de la Tierra), y *r* sea mayor a R_T:

E_P (r)- E_P (R_T)=- (GmM_T)/r+(GmM_T)/R_T =GmM_T ⌊1/R_T - 1/r⌋=GmM_T (r-R_T)/(R_T r)

Si se introduce en la expresión R_T tanto en numerador y denominador, lo que implica no modificar la ecuación, y reordenamos:

$$E_P(r) - E_P(R_T) = -\frac{GmM_T}{r} + \frac{GmM_T}{R_T} = GmM_T \left\lfloor \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} \right\rfloor = GmM_T \frac{r - R_T}{R_T r}$$

Como la fracción que contiene GM_T es igual a la aceleración de la gravedad, g, el cociente entre el radio de la Tierra y r es prácticamente 1, y $r - R_T = h$, queda:

$$E_P(r) - E_P(R_T) = mgh$$

La misma expresión que obtuvimos antes.

Energía potencial elástica

El último tipo de energía que estudiaremos en este tema es la energía que acumulan o liberan sistemas que se deforman por la acción de fuerzas. Son sistemas muy habituales en el estudio de la física elemental, y muy cotidianos. El ejemplo más típico lo constituyen los muelles.

La mayoría de los sistemas capaces de acumular energía potencial elástica cumplen la ley de Hooke, estudiada en el tema anterior y que da la fuerza que debe hacerse para comprimirlo o que devuelve al liberarse un sistema del estilo de un muelle. El módulo de tal fuerza vale:

$$F = -k(x - x_0)$$

Donde k es la constante recuperadora del muelle o resorte y x_0 es la longitud natural del mismo (la longitud del muelle si no está sometido a fuerzas). La dirección y sentido de la fuerza quedan definidos en función de la dirección del alargamiento, lo que, como se mencionó antes, hace de esta fuerza elástica una fuerza central.

Para calcular el trabajo que un muelle ejerce o devuelve cuando tiene una longitud x diferente a su longitud natural, es preciso integrar, ya que la fuerza depende de ese desplazamiento:

$$W_{x_0 \to x} = \int_{x_0}^{x} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \int_{x_0}^{x} -k(x - x_0)dx \ = \ -\frac{1}{2}k\ (x - x_0)^2$$

Donde el último paso implica aplicar leyes elementales de integración y de cálculos algebraicos que, por largos, no merece la pena reproducir. Este resultado permite definir la energía potencial elástica:

Se denomina energía potencial elástica a aquella que se adquiere o se libera por medio de un sistema deformable por la acción de fuerzas que cumple con la ley de Hooke. Si k es la constante recuperadora del sistema elástico y x es la diferencia entre la longitud natural y la longitud real del sistema elástico, esta energía vale:

$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Este tipo de energía nos será de utilidad a la hora de abordar determinados problemas de dinámica.

7.4. Principio de conversación de la energía

En este último apartado del tema se aborda una cuestión de importancia vital en física. De hecho, este principio es el que da sentido a los nuevos métodos de cálculo que son el origen de este tratamiento alternativo de la dinámica. El **principio de conservación de la energía** es el segundo de los tres principios de conservación fundamentales de la dinámica clásica. Los otros dos son el **principio de conservación de la cantidad de movimiento**, ya estudiado en el tema 5 y el **principio de conservación del momento angular**, que explicaremos en el tema 9.

Este apartado se divide en dos partes. En la primera se establece el principio de conservación de la energía cuando solo actúan fuerzas conservativas, mientras que en la segunda trataremos el caso de que existan fuerzas no conservativas. Esto se debe a que las fuerzas no conservativas no tienen energías potenciales asociadas, de manera que el tratamiento energético de las mismas debe estar diferenciado.

Principio de conservación cuando solo hay fuerzas conservativas. Principio de conservación de la energía mecánica

El principio de conservación de la energía mecánica es un caso particular de la conservación de la energía cuando solo actúan fuerzas conservativas. El primer paso es entender el concepto de energía mecánica.

Se define la **energía mecánica de una partícula**, o sistema de partículas, en las proximidades de la superficie de la Tierra, como la suma de su energía cinética y su energía potencial gravitatoria.

Para una partícula de masa *m* y velocidad *v*, que en determinado momento se encuentra a una altura h con respecto a una altura de referencia, su energía mecánica vale:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + mgh$$

Establecer la ecuación del principio de conservación de la energía mecánica es bastante sencillo. Sabemos, por el apartado anterior, que el incremento de la energía cinética de una partícula se debe al trabajo resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Suponiendo que esta resultante es producto de fuerzas conservativas, es posible escribir:

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dado que la fuerza resultante es conservativa, el trabajo de tal fuerza, cambiado de signo, expresa la diferencia de energía potencial:

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Basta sumar ambas expresiones y obtenemos:

$$\Delta E_C + \Delta E_p = 0$$

Este principio de conservación se puede expresar así:

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, la suma de la energía potencial y de la energía cinética de la misma permanece constante a lo largo del movimiento.

El principio de conservación de la energía mecánica es un caso particular de este principio en el que solo se considera la energía potencial gravitatoria. El principio de conservación de la energía mecánica se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}\,m\,v_F^2 + mgh_F$$

Esta expresión nos será de bastante utilidad en temas posteriores.

Principio de conservación de la energía general

El principio de conservación de la energía puede extenderse al caso en el cual las fuerzas que actúan sobre la partícula considerada pueden ser, también, **no conservativas**. El principio sigue siendo válido, pero hay que tener en cuenta algunas modificaciones.

La primera cuestión importante es que la energía mecánica no se conserva si existen fuerzas no conservativas. Un ejemplo muy claro es el rozamiento. La fuerza de rozamiento se opone siempre el movimiento, con lo que ejercerá un trabajo que ralentiza a la partícula. Ello implica que la energía mecánica de la partícula sometida a rozamiento será menor que en el caso sin rozamiento.

A pesar de estas dificultades, será posible generalizar con sencillez el principio de conservación de la energía mecánica. Supongamos que una partícula se desplaza a lo largo de una determinada trayectoria bajo la acción de una serie de fuerzas conservativas y otra serie de fuerzas no conservativas. Si se denomina W_C al trabajo efectuado por la resultante de las fuerzas conservativas y W_NC al trabajo debido a las fuerzas no conservativas, a partir del teorema de las fuerzas vivas se puede escribir:

$$W = W_C + W_{NC} = \Delta E_C$$

Como ya sabemos, el trabajo de las fuerzas conservativas puede escribirse como el opuesto del incremento de la energía potencial, pero con el trabajo de las fuerzas conservativas no hay demasiado que hacer. Si sustituimos el trabajo de las fuerzas conservativas por el incremento de la energía potencial, se llega a:

$$-\Delta E_P + W_{NC} = \Delta E_C \Rightarrow \Delta E_C + \Delta E_P = W_{NC}$$

Esta última expresión es la que permite enunciar el **principio de conservación de la energía en una forma más generalizada**:

La variación de la energía mecánica de un sistema físico es igual al trabajo que las fuerzas no conservativas efectúan o reciben del mismo.

En el caso importante en el que las fuerzas no conservativas son, únicamente, el rozamiento, este principio puede escribirse así:

$$E_{CF} + E_{PF} = E_{C0} + E_{P0} + W_R$$

Donde W_R es el trabajo efectuado por las fuerzas de rozamiento que, en principio, será negativo (disminuye la energía mecánica del sistema). Nunca se debe olvidar que en estas ecuaciones los trabajos deberán ir sustituidos con su signo.

Este principio puede generalizarse aún más, aunque eso excede los objetivos del presente curso. Solo debe quedar presente que el principio de conservación de la energía, propiamente dicho, generalizado para cualquier forma de energía, tiene este enunciado:

La energía total de un sistema físico siempre permanece constante. La energía puede ser transformada de una forma a otra, pero nunca ser creada o destruida.

Principio de conservación de la energía en sistemas de partículas

Dedicaremos algunos comentarios a este caso, debido a una diferencia que presentan con respecto a lo visto hasta ahora. Se ampliarán estos conceptos en el tema dedicado a sistemas de partículas.

Hasta ahora, se ha hablado de la energía de partículas aisladas. El concepto se puede ampliar a un sistema de partículas. Si tenemos un sistema compuesto por N partículas de masas m_i con velocidades v_i, la energía cinética total del sistema es la simple suma:

$$E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

El cálculo de la energía potencial del sistema de partículas es algo bastante más difícil, ya que no será la suma simple de las energías potenciales de cada una, sino que será preciso considerar la interacción que haya entre las partículas.

Al plantear el principio de conservación de la energía, para este tipo de sistemas, tenemos que evaluar, en primer lugar, cómo calcular el incremento de la energía cinética del sistema. Es fácil ver que esta energía cinética puede modificarse por el trabajo efectuado tanto por fuerzas externas al sistema como por fuerzas internas, creadas por la interacción de las partículas del sistema, esto es:

$$\Delta E_C = W_{Fint} + W_{Fext}$$

Si las fuerzas internas son conservativas, podremos definir una función de energía potencial interna, de manera que podremos escribir:

$$-\Delta E_{Pint} = W_{Fint}$$

Y el principio de conservación de la energía podrá escribirse:

$$\Delta E_C + \Delta E_{Pint} = W_{Fext}$$

Si el sistema está libre de fuerzas externas, dicho de otro modo, está aislado, y las fuerzas internas son únicamente conservativas, se podrá escribir:

$$\Delta E_C + \Delta E_{Pint} = 0$$