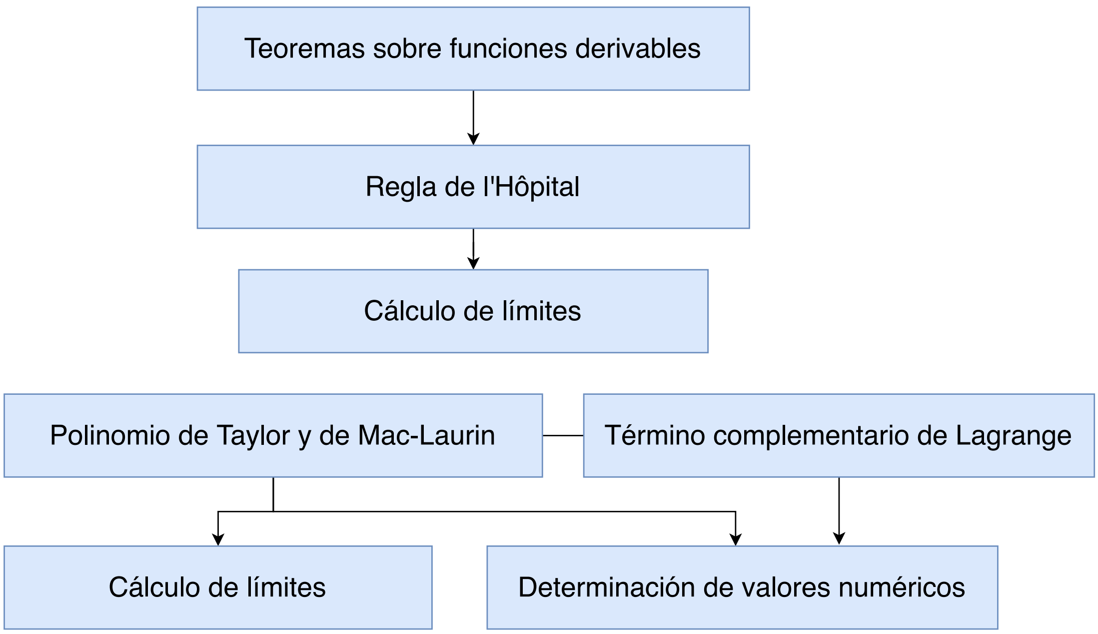
Cálculo

# Teorema y polinomios de Taylor

# Índice

# Esquema


Teoremas sobre funciones derivables
Regla de l'Hôpital
Cálculo de límites
Polinomio de Taylor y de Mac-Laurin
Término complementario de Lagrange
Cálculo de límites
Determinación de valores numéricos

# Ideas clave

## 10.1 Introducción y objetivos

Vamos a estudiar una serie de teoremas importantes sobre funciones derivables que nos conducirán a demostrar la regla de l'Hôpital para el cálculo de límites en indeterminaciones del tipo 0/0. Posteriormente estudiaremos el desarrollo en serie de Taylor de las funciones derivables, que permite expresarlas como polinomios hasta el grado requerido, con una estimación del error cometido en la aproximación.

Los objetivos son:

- Comprender los teoremas fundamentales de las **funciones derivables**.
- Entender las demostraciones de los teoremas.
- Saber aplicar la **regla de l'Hôpital** para el cálculo de límites con indeterminaciones del tipo 0/0.
- Entender cómo se puede aproximar una función derivable por un polinomio, el polinomio de **Taylor** o de **Mac-Laurin**.
- Saber estimar el **error** de la aproximación de una función derivable por un polinomio.
- Aplicar el desarrollo en **serie de Taylor** a los cálculos numéricos y al cálculo de límites.

## 10.2 Teoremas sobre funciones derivables

Vamos a estudiar ahora una serie de teoremas importantes sobre funciones derivables.

**Teorema 1: Teorema de Rolle**

Sea una función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a,b[$, si sucede que sus valores en los extremos son iguales $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un punto $x_0 \in ]a,b[$ en el que la derivada de la función se anula, es decir:

$$f'(x_0)=0\,. \tag{1}$$

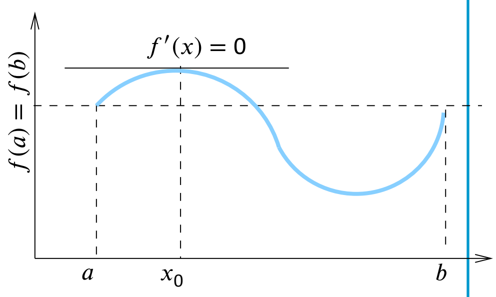



Figura 1: Teorema de Rolle.

La interpretación geométrica es que en el intervalo en el que la función es continua y derivable, al ser los valores en los extremos iguales, habrá al menos un punto en el que la tangente a la función sea una recta horizontal y por tanto en ese punto su derivada será cero, como puede apreciarse en la Figura 1. En el caso de esta figura hay dos puntos donde sucede esto. Para demostrarlo, tenemos en cuenta que al ser $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, alcanza en ese intervalo un máximo absoluto $M$ y un mínimo absoluto. Podemos distinguir ahora dos casos:

- Que el máximo y el mínimo coincidan $M=m$. En ese caso por ser $f(a)=f(b)$, la función será una función constante. Pero sabemos que la derivada de una función constante es cero, por lo que se cumple la tesis del teorema.

- Que el máximo y el mínimo sean diferentes $M\neq m$. Entonces $M$ o $m$ son distintos de $f(a)$. Supongamos que $f(a)\neq M$. En este caso hay un punto $x_0 \in ]a,b[$ en el que la función alcanza el máximo y por tanto la derivada es cero $f'(x_0)=0$, con lo que tenemos demostrada la tesis del teorema. En el caso en que sea $m\neq f(a)$ se razona de manera análoga.

Con ello queda demostrado el teorema. Sea ahora una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$. Existirá entonces, si las ordenadas de los puntos extremos son diferentes, un punto cuya tangente sea paralela a la recta que une $f(a)$ con $f(b)$. Puesto que la tangente de esa recta paralela es justo la derivada, se cumplirá (Figura 2):

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)\,. \tag{2}$$

De esa manera se cumple:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)\,. \tag{3}$$

Vamos a verlo ahora en forma de teorema.

**Teorema 2: Teorema del valor medio**

Sea una función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$ entonces existe al menos un punto $x_0 \in ]a, b[$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)\,. \tag{4}$$

Para demostrarlo, construimos la función:

$$F(x) = [f(b) - f(a)]x - (b - a)f(x)\,. \tag{5}$$

Esta función cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

- Es continua en el intervalo $[a, b]$ puesto que es diferencia de funciones continuas en dicho intervalo.
- Es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$ porque es diferencia de funciones derivables en dicho intervalo.
- Además se cumple que $F(a) = F(b)$ puesto que $F(a) = [f(b) - f(a)]a - (b - a)f(a) = af(b) - bf(a)$ y $F(b) = [f(b) - f(a)]b - (b - a)f(b) = -bf(a) + af(b)$.

Por tanto existe un punto $x_0 \in ]a, b[$ en el que la derivada de la función se anula

$F'(x_0) = 0$. Por tanto, volviendo a la Ecuación (5):

$$[f(b) - f(a)] - (b - a)f'(x_0) = 0\,. \tag{6}$$

Lo que demuestra el teorema. Para algunas reseñas históricas del teorema del valor medio, así como para una ampliación del mismo, puede consultarse (de la Rosa, 2008).

## 10.3 Teorema fundamental del cálculo integral

Antes de enunciar el teorema del cálculo integral, tenemos que proponer que:

**Proposición 1**

Si la derivada de una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ existe y es nula en el intervalo abierto $]a, b[$, entonces la función es constante en $[a, b]$.

Para demostrarla, tenemos en cuenta que la derivada es cero $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in [a, b]$ podemos aplicar el Teorema 2 al intervalo $[a, x]$, con $x \leq b$:

$$f(x) - f(a) = f'(x_0)(x - a)\,. \tag{7}$$

Y como $f'(x_0) = 0$, resulta:

$$f(x) - f(a) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(a), \forall x \in [a, b]\,. \tag{8}$$

Como queríamos demostrar. Estamos ahora en disposición de demostrar el *teorema fundamental del cálculo integral*.

**Teorema 3: Teorema fundamental del cálculo integral**

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sus derivadas son iguales en el intervalo abierto $]a, b[$ , entonces se diferencian en una constante.

Para demostrarlo, definimos la función $F(x) = f(x) - g(x)$, que es continua en el intervalo $[a, b]$ por ser la diferencia de dos funciones continuas en dicho intervalo. Además su derivada en el intervalo abierto es cero, ya que por hipótesis $f'(x) = g'(x)$, luego la derivada de $F(x)$ es cero:

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0\,. \tag{9}$$

Y por la Proposición 1, $F(x)$ es una constante, luego $f(x)$ y $g(x)$ se diferencian en una constante, como queríamos demostrar.

**Teorema 4: Teorema del valor medio generalizado de Cauchy**

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Si además sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto y se cumple que $g(a) \neq g(b)$, entonces existe un punto $x_0 \in ]a, b[$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,. \tag{10}$$

Para demostrarlo, supongamos la función $F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a))]f(x)$. Esta función cumple las hipótesis del teorema de Rolle. En efecto:

- Es continua en el intervalo cerrado por ser suma de funciones continuas.
- Es derivable en el intervalo abierto por ser suma de funciones derivables.
- Se cumple que $F(a) = F(b)$. En efecto: $F(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ y $F(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$.

Entonces existe un punto $x_0 \in ]a, b[$ en el que $F'(x_0) = 0$. Entonces se cumple:

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) - [g(b) - g(a))]f'(x_0) = 0\,. \tag{11}$$

Ahora, $g(b) - g(a) \neq 0$ por hipótesis. Por otra parte, si $g'(x_0) = 0$, entonces por la Ecuación (11), $f'(x_0) = 0$. Pero por hipótesis, ambas derivadas no se pueden anular simultáneamente, luego $g'(x_0) \neq 0$. De esa manera podemos pasar $g(b) - g(a)$ al denominador y también $g'(x_0)$, por ser distintas de cero, con lo que resulta:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{12}$$

Y así queda demostrado el teorema. Se ha estudiado en otro capítulo que al calcular los límites de un cociente de funciones $f(x)/g(x)$ puede surgir la indeterminación 0/0. Esa indeterminación puede resolverse simplificando el cociente de las funciones, en algunos casos. Pero el procedimiento puede ser muy complicado o puede que no se pueda aplicar. Existe, sin embargo, una técnica, conocida como regla de L'Hôpital que afirma, bajo ciertas condiciones (específicamente que ambas funciones cumplan las condiciones del teorema generalizado del valor medio o teorema de Cauchy), que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13}$$

Es decir, que el límite del cociente de funciones es igual al límite de las derivadas. Te recomendamos la siguiente video-píldora sobre el valor medio generalizado de Cauchy.

Accede al vídeo: Valor medio generalizado de Cauchy

**Teorema 5: Regla de l'Hôpital**

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo cerrado $[p, q]$ y derivables en el intervalo abierto y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en el intervalo abierto. Sea ahora un punto $a \in ]p, q[$ tal que en él $f(a) = g(a) = 0$. Si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{14}$$

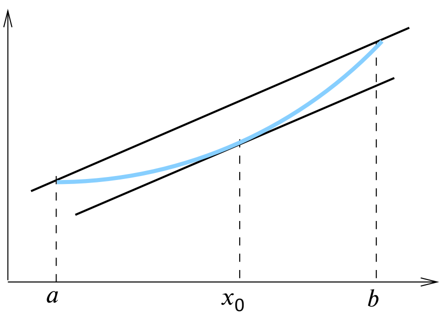



Figura 2: Teorema del valor medio.

entonces existe también el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \tag{15}$$

y son iguales.

Para demostrarlo, tomamos un entorno de $a$ $I\ =]a-h, a+h[\subset]p,q[$ tal que en él, puesto que se satisfacen las condiciones del Teorema 4, se cumplirá para un $x \in I$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,, \tag{16}$$

para algún $x_0 \in I$. Ahora, como $f(a) = g(a) = 0$, y tomando límites cuando $x$ tiende a $a$ en ambos miembros resulta:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \tag{17}$$

ya que al tender $x \to a$, $x_0$ también tiende a $a$ ($x_0 \to a$). Veamos un ejemplo de un límite ya conocido de otro tema.

**Ejemplo 1. Límite con regla de l'Hôpital**

Calcular el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\,. \tag{18}$$

Evidentemente se trata de una indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital, derivando el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1\,. \tag{19}$$

Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre la regla de l'Hôpital.

Accede al vídeo: La regla de l'Hôpital

Vamos a ver ahora un ejemplo en el que hay que aplicar la regla de L'Hôpital dos veces.

**Ejemplo 2. Límite con regla de L'Hôpital aplicado dos veces**

Sea el límite de la función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}\,. \tag{20}$$

Otra vez se trata de una indeterminación 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital derivando la función del numerador y la del denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{1 - \cos x} = \frac{-\tan^2 x}{1 - \cos x}\,. \tag{21}$$

El cociente de las derivadas vuelve a ser una indeterminación del tipo 0/0, por lo que podemos volver a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan x(1 + \tan^2 x)}{\sin x} = \tag{22}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2(1 + \tan^2 x)}{\cos x} = -2\,. \tag{23}$$

## 10.4 Funciones derivables como polinomios

El análisis las funciones más sencillas son las polinómicas, puesto que solo requieren de un número finito de operaciones aritméticas para su cálculo. Vamos a ver que una función puede ser aproximada por polinomios, de grado creciente.

**Teorema 6: Polinomio de Taylor**

Sea una función $f(x)$ con derivadas hasta el orden $n$ en un punto $x = a$, entonces existe un polinomio, y solo uno, de grado menor o igual que $n$ que satisface:

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ \ldots\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,. \tag{24}$$

Este polinomio resulta ser:

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,. \qquad (25)$$

Este polinomio se conoce como *polinomio de Taylor.*

Para demostrarlo, tenemos que tener en cuenta que el objetivo es encontrar un polinomio de grado menor o igual que $n$ que coincida con $f(x)$ y se pueda calcular a partir de sus $n$ primeras derivadas cuando $x = a$. Para ello consideremos el polinomio:

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n \,. \qquad (26)$$

Hacemos $x = a$ e igualamos a la función en ese punto, con lo que resulta:

$$P(a) = f(a) = c_0 \Rightarrow c_0 = f(a) \,. \qquad (27)$$

Ahora derivamos el polinomio:

$$P'(x) = 1c_1 + 2c_2(x-a) + ... + nc_n(x-a)^{n-1} \,. \qquad (28)$$

Hacemos $x = a$ e igualamos a la función, con lo que resulta:

$$P'(a) = f'(a) = 1c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{f'(a)}{1!} \,. \qquad (29)$$

Derivamos otra vez el polinomio de la Ecuación (28):

$$P''(x) = 2 \cdot 1c_2 + ... + n(n-1)(x-a)^{n-2} \,. \qquad (30)$$

Hacemos $x = a$ e igualamos a la función, resultando:

$$P''(a) = f''(a) = 2 \cdot 1c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \,. \qquad (31)$$

Y así sucesivamente hasta la derivada $n$-ésima:

$$P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) = n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \,. \qquad (32)$$

Finalmente obtenemos:

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,. \tag{33}$$

Como queríamos demostrar. Podemos escribir este polinomio de forma sintética, con un sumatorio, si hacemos $f^{(0)}(a) = f(a)$, del siguiente modo:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \,. \tag{34}$$

Si $a = 0$, obtenemos el polinomio conocido como polinomio de Mac-Laurin:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \,. \tag{35}$$

Evidentemente el polinomio de Taylor (o el polinomio de Mac-Laurin) de grado $n$ es una aproximación a la función de que se trate $f(x)$. La diferencia entre la función y el polinomio se conoce como *resto*, *error* o *término complementario*:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \,. \tag{36}$$

Vamos a encontrar una fórmula para el resto, que nos permitirá calcular el grado de aproximación de una función por el polinomio de Taylor de grado $n$. Si el resto o término complementario es pequeño entonces el polinomio de Taylor da una buena aproximación de la función.

**Teorema 7: Término complementario de Lagrange**

Sea una función $f(x)$ que es $n+1$ veces derivable en un intervalo que contiene a los puntos $a$ y $x$, entonces el resto de la fórmula de Taylor es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \,, \tag{37}$$

donde $a < x_0 < x$. El término complementario de Lagrange es fácil de recordar (y es el más usado, pues hay otros) porque es simplemente el siguiente término del desarrollo en serie de Taylor pero evaluado en el punto intermedio $x_0$.

Para demostrarlo, construimos la función:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \,. \tag{38}$$

Se verifica que $F(x) = f(x)$ y que:

$$F(a) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = P(x)\,, \tag{39}$$

es decir, $F(a)$ es igual al polinomio de Taylor de grado $n$. Entonces la diferencia entre $F(x)$ y $F(a)$ es precisamente el resto o término complementario:

$$R_n(x) = F(x) - F(a)\,. \tag{40}$$

Ahora aplicamos el Teorema 4 a la función $F(t)$, que es continua en $[a, x]$ y derivable en $]a, x[$, así como a la función $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Puesto que ambas funciones satisfacen las hipótesis del citado teorema, se cumple:

$$\frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{F'(x_0)}{g'(x_0)}\,, \tag{41}$$

para $a < x_0 < x$. Determinamos ahora $F'(x_0)$. Para ello derivamos la Ecuación (38):

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + (-1)k\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k-1} \right\}\,. \tag{42}$$

Es fácil ver que los términos se cancelan dos a dos y sobrevive el de mayor exponente:

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,. \tag{43}$$

Ahora tenemos que $g(x) = 0$, $g(a) = (x-a)^{n+1}$ y $g'(x_0) = -(n+1)(x-x_0)^n$. Ponemos ahora estos resultados en la Ecuación (41) y tenemos en cuenta la Ecuación (40):

$$R_n(x) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_o)^n}{-(n+1)(x-x_0)^n}\left[0 - (x-a)^{n+1}\right] = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \tag{44}$$

Que es lo que queríamos demostrar. Veamos un ejemplo de desarrollo en serie polinómica con la función exponencial.

**Ejemplo 3. Desarrollo de Mac-Laurin de la función exponencial**

Sea la función $f(x) = e^x$, calculamos las derivadas hasta el orden $n+1$ (para incluir el resto de Lagrange) y sustituimos $x = 0$:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1\,, \tag{45}$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1\,. \tag{46}$$

Obtenemos los mismos resultados para las derivadas sucesivas (hasta orden $n$):

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1. \tag{47}$$

Y con la derivada $(n+1)$-ésima evaluamos el términos complementario de Lagrange o resto:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = e^{x_0}\,, \tag{48}$$

con $0 < x_0 < x$. Con lo que la exponencial queda:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}x^{n+1}\,. \tag{49}$$

Ahora podemos entender que el número $e$ sea la suma de la serie:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,. \tag{50}$$

Para ello basta hacer, en la Ecuación (49), $x = 1$ y tomar el límite cuando $n$ tiende a $\infty$.

Veamos ahora un ejemplo de desarrollo en serie con la función $\sin(x)$.

**Ejemplo 4. Desarrollo de la función seno**

Sea $f(x) = \sin x$, calculamos las derivadas en $x = 0$:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0\,. \tag{51}$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 1\,. \tag{52}$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(0) = 0\,. \tag{53}$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = -1\,. \tag{54}$$

Y así sucesivamente, la derivada cuarta en $x = 0$ será 0, la derivada quinta volverá a ser 1, la derivada $n$-ésima es:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{55}$$

Y la derivada $(n+1)$-ésima para calcular el resto es:

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = \sin\left(x_0 + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{56}$$

Así el desarrollo en serie de Taylor para la función seno resulta ser:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(x_0 + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{57}$$

Y como $\left|\sin\left(x_0 + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1$ se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(x_0 + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \tag{58}$$

para todos los valores de $x$.

Veamos ahora el ejemplo del desarrollo en serie de Taylor de la función coseno.

**Ejemplo 5. Desarrollo de la función coseno**

Sea $f(x) = \cos x$. La desarrollamos con el polinomio de Mac-Laurin:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1\,. \tag{59}$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 0\,. \tag{60}$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(0) = -1\,. \tag{61}$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = 0\,. \tag{62}$$

$$f^{IV}(x) = \cos x = \cos\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{IV}(0) = 1\,. \tag{63}$$

Y así sucesivamente. La derivada quinta será 0, la derivada sexta será $-1$. Veamos ahora la derivada $n$-ésima:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{64}$$

Y la derivada $(n+1)$-ésima:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = \cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Así pues el desarrollo de Mac-Laurin será:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!+} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(x_0 + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

con $0 < x_0 < x$. Aquí también, por la misma razón que en el Ejemplo 4:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,. \tag{65}$$

## 10.5 Aplicaciones de la fórmula de Taylor

El desarrollo en serie de Taylor tiene múltiples aplicaciones. Entre ellas citamos:

- Determinación de valores numéricos.
- Cálculo de límites.

### Determinación de valores numéricos

A pesar de que actualmente existen dispositivos electrónicos, como las calculadoras o los computadores, que proporcionan, con gran precisión, los valores de cualquiera de las funciones elementales o combinaciones de ellas, es instructivo el aprender a realizar estimaciones de valores numéricos de funciones elementales, así como a acotar su grado de precisión o error. Veámoslo con un ejemplo.

**Ejemplo 6. Cálculo del seno de un ángulo**

Calculemos $\sin 20^\circ$. El ángulo en grados lo transformamos a radianes multiplicando por el factor de conversión $\pi/180$, de lo que resulta $\pi/9$. Ahora, en el desarrollo de Taylor, hacemos $n = 3$, es decir, que nos quedamos con los dos primeros términos del desarrollo:

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} \,. \tag{66}$$

Ahora introducimos el ángulo en radianes:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \simeq \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0.343 \,. \tag{67}$$

Ahora estimamos el error cometido en la operación mediante el término complementario de Lagrange:

$$|R_3| = |\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \sin\left(x_0 + 2\pi\right)| \leq \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 = 0.0006 < 0.001 \,. \tag{68}$$

De manera que hemos evaluado $\sin 20^\circ$ con un error inferior a una milésima.

### Cálculo de límites

El desarrollo en serie de Taylor también sirve para el cálculo de límites. Ejemplo:

**Ejemplo 7. Cálculo de un límite**

Calculemos el límite: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Desarrollamos el seno hasta primer orden $\sin x = x + O(x)$ donde $O(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $x$. Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{x + O(x)}{x} = 1\,. \tag{69}$$

## 10.6 Referencias bibliográficas

de la Rosa, F. M. (2008). Panorámica de los teoremas de valor medio. *Miscelánea matemática*, 47, 23–38.

## 10.7 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios relacionados con lo visto en este tema.

**Ejercicio 1.** Calcula el límite: $\lim_{x\to 0} \frac{2-2e^{4x}}{3x}$. *Solución*: $-8/3$.

**Ejercicio 2.** Calcula el límite: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-2\cos x}$. *Solución*: 0.

**Ejercicio 3.** Calcula mediante una aproximación cuadrática, esto es, mediante un polinomio de grado dos $e^{0.1}$. *Solución*: 1.105.