Física I

# Aplicaciones del principio de conservación de la energía y conceptos afines

# Índice

# Aplicaciones del trabajo y la energía

Los conceptos de trabajo y energía proporcionan métodos alternativos para resolver problemas de cinemática y dinámica con más facilidad. Se debe a que el método usual, resolver la ecuación fundamental de la dinámica, da toda la información necesaria, pero implica resolver ecuaciones complicadas. Con métodos elementales basados en la conservación de la energía es posible obtener información parcial de manera más sencilla, que puede bastar en muchos casos.

### Sistemas con muelles

- **Ejemplo 4:** movimiento bajo la acción de la ley de Hooke
- **Ejemplo 5:** plano inclinado sin rozamiento y con sistemas elásticos

### Caída libre y movimientos sin rozamiento

- **Ejemplo 1:** móvil al que se comunica trabajo y cae por un plano inclinado
- **Ejemplo 2:** caída libre
- **Ejemplo 3:** lanzamiento vertical hacia arriba

### Sistemas con rozamiento

- **Ejemplo 6:** móvil al que se le comunica trabajo y cae por un plano inclinado (revisión con rozamiento del ejemplo 1)
- **Ejemplo 7:** sistemas elásticos en un entorno con rozamiento
- **Ejemplo 8:** plano inclinado sin y con rozamiento

Al abordar cualquier problema usando trabajo y energía es necesario definir antes de empezar con claridad qué punto tendrá energía potencial gravitatoria igual a cero.

## 8.1. Introducción y objetivos

Buena parte de este tema es una revisión de algunos de los problemas resueltos en el tema 6, en cuya resolución utilizamos, ahora, los **métodos alternativos** que nos proporcionan los conceptos de energía, trabajo y el principio de conservación de la energía.

En un primer apartado introductorio, explicamos cómo se aplican los principios a la hora de resolver problemas de dinámica; en las siguientes, incluimos diferentes problemas tipo resueltos, que te permitirán comprender la resolución de bastantes problemas abordables por medio de estos procedimientos.

Tras asimilar los contenidos de este tema podrás:

- Comprender que el uso de conceptos relativos a energía y trabajo permite resolver de maneras alternativas problemas de dinámica.
- Comprender que, en ciertos casos, el uso de estos conceptos permite dar solución a problemas muy difíciles de solucionar con otros métodos.
- Saber utilizar el principio de conservación de la energía para resolver problemas de cuerpos que no estén sometidos a rozamiento.
- Saber aplicar el concepto de energía elástica y saber resolver problemas que involucren muelles y resortes.
- Comprender cómo se tratan sistemas con rozamiento usando el principio de conservación de la energía.

## 8.2. Introducción: métodos alternativos para resolver problemas

La ecuación fundamental de la dinámica, estudiada en el tema 4, nos da toda la información necesaria para conocer el movimiento de un cuerpo: la expresión de la posición de un cuerpo en función del tiempo, la denominada **ecuación del movimiento**.

Una vez conocida esta ecuación del movimiento, disponemos de toda la información necesaria para describir cómo se desplaza el móvil. Sin embargo, aunque en teoría el problema está resuelto, en la práctica las cosas son distintas.

A menudo, obtener la ecuación del movimiento implica resolver problemas matemáticos de notable complejidad. Un ejemplo simple sería obtener la ecuación del movimiento de un objeto de masa m que se mueve en el campo gravitatorio generado por otra masa M. La ecuación fundamental de la dinámica para la masa m es, sustituyendo la aceleración por la derivada segunda del vector de posición, que es una de sus definiciones:

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\,\frac{mM}{|\vec{r}|^2}\,\hat{u}$$

A pesar de su sencillez aparente esta es una ecuación diferencial de segundo grado no lineal y para obtener una solución son necesarios métodos matemáticos de cálculo bastante avanzados. En otras ocasiones, no se tiene una expresión completa de la fuerza, o bien esta expresión es de una gran complejidad, lo que vuelve en inabordables algunos problemas, salvo que se use cálculo numérico.

En resumen, plantear la ecuación fundamental de la dinámica, a veces, no sirve de mucho. Sin embargo, en multitud de ocasiones, no es necesario conocer la ecuación del movimiento al completo, solo cuestiones como velocidades en determinados puntos.

Los métodos basados en los conceptos de trabajo y energía, cuya forma de empleo más habitual es usando el principio de conservación de la energía, permiten averiguar determinados parámetros de un movimiento sin que sea necesario conocer la expresión completa de las ecuaciones del movimiento.

Volviendo al ejemplo anterior, si lo único que nos hace falta es saber qué velocidad lleva una partícula de masa m a una distancia R de la masa M que se deja caer desde una distancia mayor r es posible usar el principio de conservación de la energía, sabiendo que el gravitatorio es un campo conservativo y su energía potencial es:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

Entonces, aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{p0} + E_{c0} = E_{pR} + E_{cR}$$

Sabiendo que la energía cinética inicial es nula (se deja caer), se tiene:

$$-G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Basta con despejar la velocidad, y teniendo en cuenta que m se elimina porque es factor de todos los sumandos, tenemos:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

Que no es más que una ecuación algebraica en la que se sustituyen los valores numéricos y se obtiene el módulo de la velocidad en el punto deseado. Con ello tenemos la velocidad, aunque solo en el punto considerado, sin necesidad de conocer la ecuación del movimiento. Debemos destacar que como estos métodos permiten obtener magnitudes cinemáticas sin conocer la ecuación del movimiento, también dan alternativas al uso de las ecuaciones de la cinemática.

Esta es la ventaja principal, a este nivel, de los conceptos de energía y trabajo. En física avanzada es posible generalizar estos métodos y hacer una descripción alternativa de la mecánica clásica, más formal y sistemática.

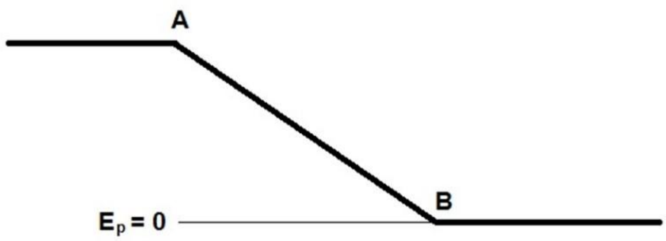
## 8.3. Caída libre y movimientos libres de rozamiento

Como introducción al uso de los conceptos de energía y trabajo a la hora de resolver problemas, en este apartado mostraremos unos problemas sencillos que te permitirán asimilar los conocimientos básicos para abordar otros problemas más difíciles.

El primero es un ejemplo sencillo de aplicación del principio de conservación de la energía, que nos permitirá explicar la forma de trabajar con estos métodos y, a continuación, repetiremos dos problemas del tema 3 usando estos métodos, para ilustrar sus posibilidades.

> **Ejemplo 1: Móvil al que se le comunica trabajo y cae por un plano inclinado**
>
> A una bola de 20 kg de masa en reposo se le aplica una fuerza en horizontal de 100 N sobre una superficie lisa y horizontal durante 4 m. Al recorrer esa distancia la bola cae por un plano inclinado de 20 m de longitud que forma 60º con la horizontal. Calcular la velocidad que lleva la bola en el momento que sale del plano inclinado.

Este problema tiene **dos partes**: aquella en la que la que el cuerpo recibe el trabajo efectuado por la fuerza en la superficie horizontal y la caída por el plano inclinado. Para aclarar una cuestión fundamental, incluimos el siguiente diagrama:




Es especialmente importante la indicación:

$$E_p = 0$$

Porque en todo problema resuelto con métodos derivados de la conservación de la energía, en los que haya diferencias en la altura de los cuerpos considerados, es obligatorio lo siguiente:

A la hora de aplicar, en la práctica, el principio de conservación de la energía es necesario definir con claridad en qué punto la energía potencial gravitatoria es cero.

En el problema actual el punto en el que la energía potencial es nula, por convenio, es el final del plano inclinado. Esto es fundamental porque la energía potencial gravitatoria no se puede calcular directamente: lo único que se puede calcular son las diferencias de energía potencial entre dos puntos. Por ello, al definir arbitrariamente una altura como cero, podemos conocer el valor de la energía potencial en otros puntos de más altura de interés.

Resolver este problema mediante conservación de la energía implica aplicar este principio entre los puntos llamados A y B en el esquema. Es obvio que la bola, por la acción de la fuerza, adquiere determinada energía cinética. De hecho, utilizando el teorema de las fuerzas vivas tenemos que el trabajo efectuado por la fuerza de 100 N es:

$$W_F = \Delta E_C = E_{CA} - E_{C0} = E_{CA}$$

Puesto que la bola parte del reposo. El trabajo que realiza la fuerza vale:

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{r} = 100 \cdot 4 = 400\,J$$

Resultado que se basa en que desplazamiento y fuerza están en la misma dirección y sentido. Por tanto, la energía cinética de la bola en el punto A es de 400 J.

Si aplicamos el principio de conservación de la energía entre los puntos A y B, tenemos:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

Como el cero en la energía potencial está fijado en B, esta expresión se reduce a:

$$mg\,h_A + E_{cA} = E_{cB}$$

Hay que calcular la altura en A. Basta usar trigonometría elemental para llegar a:

$$h_A = 20\,sen\,60° = 17{,}32\,m$$

En esta ocasión, dado que hemos calculado el valor numérico del trabajo realizado por la fuerza de 100 N, se sustituyen ya todos los valores numéricos conocidos. Así:

$$20 \cdot 9{,}8 \cdot 17{,}32 + 400 = \frac{1}{2}\,20\,v_B^2$$

Despejamos $v_B$ y resulta:

$$\boldsymbol{v_B = 19{,}48\,m/s}$$

**Ejemplo 2: Caída libre**

Un objeto de 6 kg de masa se deja caer desde lo más alto de un acantilado vertical de 600 m de altura. Suponiendo que el rozamiento del aire es despreciable: ¿cuánto tiempo tardará el objeto en caer 300 m y qué velocidad llevará? ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar al fondo del precipicio y con qué velocidad?

En este problema de cinemática, que vamos a resolver por medio de la conservación de la energía, hay que recordar que las ecuaciones derivadas del principio de conservación de la energía darán como resultado velocidades. Habrá que usar esos resultados para calcular tiempos.

El movimiento es tan sencillo que no se dibujará un diagrama, ya que el movimiento es muy sencillo. Como punto de energía potencial nula se considera el punto inferior del acantilado, 600 m por debajo del lugar desde el que se deja caer el objeto. Si se denomina A al punto de partida, B al punto situado a 300 m de altura y C al suelo bajo el acantilado, saber la velocidad que lleva el objeto a 300 m de altura supone plantear:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

Como el objeto se deja caer:

$$mg\, h_A = mg\, h_B + \frac{1}{2}\, m\, v_B^2$$

Al cancelarse la masa, que está en todos los factores, y despejar la velocidad en el punto B, nos queda:

$$v_B = \sqrt{2g\,(h_A - h_B)}$$

Cuyo valor numérico es:

$$\boldsymbol{v_B = 76,68\ m/s}$$

Calcular el tiempo implica usar la ecuación cinemática usual:

$$v = v_0 + a\,t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{76,68}{9,8} = 7,82\ s}$$

Para el caso de calcular la velocidad al llegar al fondo del acantilado, esto es, al llegar a C, usamos la misma ecuación obtenida para la velocidad en B, pero tras haber aplicado el principio de conservación de la energía entre los puntos A y C. Así:

$$v_C = \sqrt{2g\,(h_A - h_C)}$$

Y tras sustituir los valores:

$$\boldsymbol{v_C = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 600} = 108,44\ m/s}$$

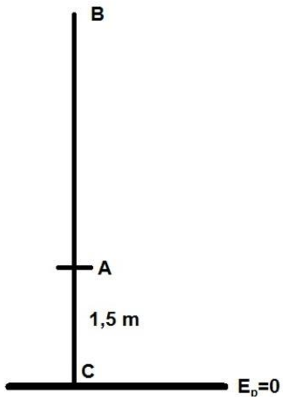
Solo falta usar, de nuevo, la ecuación cinemática para la velocidad. Así, el tiempo total es:

$$v_C = v_0 + a\,t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = \frac{v_C - v_0}{a} = \frac{108,44}{9,8} = 11,07\ s}$$

**Ejemplo 3: Lanzamiento vertical hacia arriba**

Una chica lanza hacia arriba, en vertical, una pelota a una velocidad de 9 m/s desde una altura de 1,5 m del suelo.
¿Qué tipo de movimiento experimenta? Describir cualitativamente la trayectoria del móvil.
¿En qué momento alcanza la pelota su máxima altura? ¿Cuál es esta altura máxima?
¿Cuánto tiempo tarda la pelota el caer al suelo?
¿Qué velocidad tiene cuando llega a suelo?

El esquema del movimiento, la trayectoria de la partícula, es el siguiente:




Podemos ver que se ha tomado el suelo a los pies de la niña como el cero de energías potenciales. A representa el punto de lanzamiento hacia arriba, B el punto más alto de la trayectoria y C el suelo. Con este esquema, pasamos a resolver el problema apartado a apartado.

- **Apartado 1**. Describiremos el movimiento usando el vocabulario propio de la conservación de la energía.

  El móvil parte del punto A con una determinada velocidad, esto es, con una cantidad determinada de energía cinética. Esa energía cinética se va transformando en energía potencial gravitatoria, ya que la energía potencial aumenta con la altura. Como la energía cinética se va transformando en potencial, llega un momento en que el cuerpo ha perdido toda su energía cinética, que es en el punto B. En ese punto, el cuerpo se detiene y, debido a la acción de la gravedad, empieza a caer. Al ir disminuyendo su energía potencial, por estar cada vez a menor altura, su energía cinética aumenta de manera que su velocidad crece hasta que acaba llegando al suelo en el punto C.

- **Apartado 2**. Para conocer el punto de máxima altitud, hay que plantear el principio de conservación de la energía entre los puntos A y B. Así:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB} \quad \Rightarrow mg\, h_A + \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = mg\, h_B$$

De esta expresión se deduce que la masa no influye en los cálculos, ya que se cancela. Despejamos la altura en B y el resultado es:

$$\boldsymbol{h_B = \frac{1}{g}\left(g\, h_A + \frac{1}{2}\ v_A^2\right) = \frac{14,7 + 40,5}{9,8} = 5,633\, m}$$

El cálculo del tiempo se efectúa con la ecuación cinemática que da la velocidad en función de la aceleración y el tiempo:

$$v_B = v_A + a\, t \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{t = \frac{v_B - v_A}{a} = \frac{-9}{-9,8} = 0,918\, s}$$

Como no podía ser de otra manera, los resultados coinciden con los del ejemplo 3 del tema 3, ya que es el mismo ejercicio.

- **Apartado 3 y 4**. Resolvemos juntos estos apartados porque, con los métodos de conservación de la energía, conviene calcular primero la velocidad final y luego el tiempo. Calcular la velocidad con la que el objeto llega al suelo implica aplicar conservación de la energía entre B y C

$$E_{pB} + E_{cB} = E_{pC} + E_{cC} \quad \Rightarrow mg\, h_B \ = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 \quad \Rightarrow v_C = \sqrt{2\, g\, h_B} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5{,}633}$$

Que da:

$$\boldsymbol{v_C = 10,507\, m/s}$$

Por último, usamos la expresión cinemática para la velocidad:

$$v_C = v_B + a\, t \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{t = \frac{v_C - v_B}{a} = \frac{10,507}{9,8} = 1,072\, s}$$

En este caso, la aceleración de la gravedad se ha supuesto positiva porque va a favor del movimiento. Hay que destacar que este tiempo es el tiempo que tarda la pelota en caer desde el punto más alto. El tiempo total que la pelota pasa en el aire es este más el que hallamos en el apartado 2. Así, la solución a este apartado es:

$$\boldsymbol{t = 0,918 + 1,072 = 1,99\ s}$$

Debemos destacar que la pequeña diferencia entre la velocidad antes de llegar al suelo del ejemplo 3 del tema 3 y este ejercicio se debe a meros errores de redondeo.

## 8.4. Sistemas con muelles

Damos comienzo a este apartado del tema resolviendo, de nuevo, el ejemplo 4 del tema 6, pero esta vez, empleando la conservación de la energía. A continuación, hacemos lo propio con el ejemplo 7 del mismo tema. Como podrás comprobar, el procedimiento es mucho más sencillo y está al alcance de los conocimientos matemáticos habituales en una persona que se introduce en el estudio de la física.

**Ejemplo 4: Movimiento bajo la acción de la ley de Hooke**

Un móvil de 1 kg de masa rueda en una superficie horizontal hacia un muelle muy largo, que cumple la ley de Hooke, de constante recuperadora K=50 N/m con una velocidad de 30 m/s. En consecuencia, el móvil se comprimirá en una longitud determinada. Calcular:
¿Cuánto se comprime el muelle?
¿Qué fuerza ejerce el muelle sobre el móvil en el punto en que su compresión es máxima?
¿Con qué velocidad sale rebotado el móvil tras recuperar el muelle su longitud original?

Resolver este problema implica emplear el principio de conservación de la energía considerando la energía potencial elástica.

- **Apartado 1**. En el punto inicial, justo en el momento de llegar al borde del muelle, el móvil posee únicamente energía cinética. En el momento de máxima compresión, la energía cinética es nula, ya que el cuerpo acaba de detenerse y va a empezar a moverse en sentido contrario al que traía. Por ello, como la superficie es horizontal, el principio de conservación de la energía consiste, en este caso, en igualar la energía cinética inicial del móvil con la energía potencial elástica en el punto en que el móvil se ha detenido. Esto nos lleva a:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

Basta con que despejemos x y resulta:

$$m\, v_0^2 = k\, x^2 \quad \Rightarrow \quad x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 4{,}2426\, m$$

Que coincide con el valor calculado en el tema 6. Nota que no ha sido necesario conocer la ecuación del movimiento, que era la mayor complejidad de la resolución con las ecuaciones básicas de la dinámica.

- **Apartado 2**. En este caso no hay diferencia con la resolución del tema 6. Basta con que usar el resultado anterior:

$$F = -k\, x = -50 \cdot 4{,}2426 = -212{,}13N$$

- **Apartado 3**. Para este caso se procede igual que en el apartado 1. La energía inicial de la partícula cuando el muelle está comprimido al máximo y va a rebotar es, solamente, energía potencial elástica. Cuando el muelle se ha estirado del todo y el bloque va dejar de estar en contacto con el muelle, el móvil solo tiene energía cinética. Por ello, la ecuación derivada del principio de conservación de la energía es, ahora:

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_F^2$$

Que es idéntica a la del apartado 1, aunque con los miembros intercambiados. Basta con que despejemos la velocidad final y obtenemos como resultado 30 m/s, o sea, la velocidad inicial, al igual que en la resolución llevada a cabo en el tema 6.

> **Ejemplo 5: Plano inclinado sin rozamiento y sistemas elásticos**
>
> Un bloque de 10 kg caía por un plano inclinado 30º en cuyo final, y ya fuera del plano, hay un muelle de constante recuperadora k=20 N/m. El móvil se detuvo tras comprimir el muelle 78 centímetros. ¿De qué altura en el plano inclinado partió el bloque?

La resolución de este problema usando los conceptos de trabajo y energía implica aplicar tal principio entre dos puntos: el de partida del bloque y el punto en el que el muelle está comprimido. Llamando A al punto de partida y B a la situación cuando el muelle está comprimido, obtenemos:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB} + E_{Elást}$$

Como el bloque parte del reposo en A, y está en reposo en B, y se ha elegido como cero de energías potenciales gravitatorias la altura a la que está B, tenemos:

$$mgh = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Si despejamos h se obtiene, finalmente:

$$h = \frac{k\,x^2}{2\,mg} = \frac{20\,\cdot 0{,}78^2}{2\cdot 10\,\cdot 9{,}8} = \frac{12{,}168}{196} = 0{,}062\,m$$

El mismo resultado hallado en el tema 6, pero resuelto en un par de líneas y sin necesitar saber más que resolución de ecuaciones ordinarias sencillas.

Merece la pena destacar que el resultado no depende del ángulo, sin embargo, dada una altura, cada ángulo daría lugar a un tramo de plano inclinado de distinta longitud.

## 8.5. Introducción de trabajo de rozamiento en los problemas precedentes

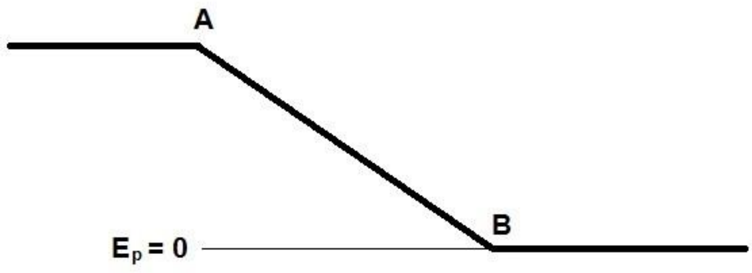
Como ya comentamos en los temas de dinámica, en los problemas de interés es preciso considerar los rozamientos, ya que estos están presentes en casi todos los casos realistas. Como este tipo de problemas son los más complicados del tema, se han dejado para este último apartado de este tema.

Iniciamos esta parte del tema con una repetición del problema 1, considerando ahora rozamiento, lo que introduce unas cuantas complicaciones en el cálculo. Como segundo problema con rozamiento resolveremos uno en el que se combina energía potencial elástica y rozamiento. Finalmente, veremos un problema que involucra planos inclinados que resolveremos primero sin rozamiento y luego con él, con el propósito de comparar ambas situaciones.

**Ejemplo 6: Móvil al que se le comunica trabajo y cae por un plano inclinado**

A un bloque de 20 kg de masa en reposo se le aplica una fuerza en horizontal de 100 N, sobre una superficie lisa y horizontal durante 4 m. Al recorrer esa distancia, el bloque cae por un plano inclinado de 20 m de longitud que forma 60º con la horizontal. En todo momento actúa sobre el cuerpo una fuerza de rozamiento debida a que el coeficiente de rozamiento entre la superficie y el bloque es de 0,1. Calcular la velocidad que lleva el bloque en el momento que sale del plano inclinado.

El esquema usado en el ejemplo 1 sigue siendo válido, lo reproducimos nuevamente:




Sin embargo, el considerar el rozamiento cambia bastante los cálculos. En primer lugar, todas las veces que usemos la conservación de la energía, la ecuación pasará a ser:

$$E_{CF} + E_{PF} = E_{C0} + E_{P0} + W_R$$

Donde $W_R$ es el trabajo efectuado por la fuerza disipativa de rozamiento. Como en el caso anterior pasaremos ahora a ir aplicando conservación de la energía.

En primer lugar, durante los 4 m en los que actúa la fuerza de 100 N, actuará también un rozamiento que vale:

$$F_R = \mu\, m\, g = 0{,}1 \cdot 20 \cdot 9{,}8 = 19{,}6\ N$$

Dado que la fuerza de rozamiento es el coeficiente por la normal y la normal en un plano horizontal es igual al peso, el trabajo de rozamiento efectuado por la fuerza de rozamiento sobre el cuerpo en esos 4 m es:

$$W_R = \overrightarrow{F_R} \cdot \vec{r} = -19{,}6 \cdot 4 = -78{,}4\ J$$

Donde el signo menos implica que se está disipando energía. Así, en el tramo horizontal hasta A, el principio de conservación de la energía cobra la forma:

$$\Delta E_C = W_F + W_R = 400 - 78{,}4 = 321{,}6\, J$$

Como el cuerpo partía del reposo, llegamos a que:

$$E_{CA} = 321{,}6\, J$$

Aplicar conservación de la energía al trayecto entre A y B nos lleva a:

$$E_{pB} + E_{cB} = E_{pA} + E_{cA} + W_{R\, A\to B}$$

Hay que calcular el trabajo del rozamiento, para lo cual es preciso calcular cuánto vale la fuerza de rozamiento en el tramo. De los problemas de dinámica sabemos que en un plano inclinado la normal es igual a la componente del peso en la dirección normal. Esta componente, por trigonometría, vale:

$$P_y = mg\cos\theta = 20\ 9{,}8\cos 60° = 98\, N$$

Con lo que el trabajo de rozamiento en el trayecto de A hasta B es:

$$W_R = \overrightarrow{F_R} \cdot \vec{r} = -98\ \cdot 20 = -1960\, J$$

Por trigonometría, sabemos que:

$$h_A = 20\ sen\ 60° = 17{,}32\, m$$

De manera que la expresión del principio de conservación de la energía queda:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_B^2 \ = m\, g\, h_A + E_{cA} + W_{R\, A\to B}$$

Sustituyendo los valores numéricos y despejando $v_B$:

$$\boldsymbol{v_B = \sqrt{\frac{2}{20}(20 \cdot\ 9{,}8 \cdot 17{,}32 +\ 321{,}6 - 1960)} = \sqrt{\frac{1756{,}32}{10}} = 13{,}25\ m/s}$$

Con lo que queda resuelto el problema.

**Ejemplo 7: Sistemas elásticos en un entorno con rozamiento**

Un bloque de 10 kg impacta contra un muelle de constante recuperadora igual a 300 N/m a una velocidad de 4 m/s. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,2. Calcular:
La compresión del muelle.
La distancia que recorre el bloque tras salir rebotado en sentido contrario debido al muelle.

Hay que dividir el movimiento del bloque en tres partes:

- Desde el momento en que choca con el muelle hasta que se detiene al comprimirlo al máximo (tramo 1).
- Desde que el muelle empieza a empujarlo hasta que pierde contacto con el muelle (tramo 2).
- Desde que deja de tocar al muelle hasta que se detiene debido a la fuerza de rozamiento (tramo 3).

En todo momento, la fuerza de rozamiento estará dada por:

$$F_R = \mu\, N = \mu\, m\, g$$

Y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, si r es la distancia que recorre el bloque sobre la superficie horizontal es:

$$W_R = -\mu\, m\, g\, r$$

Dado que la fuerza va siempre en sentido contrario al del rozamiento.

Sabiendo esto, ya es posible aplicar conservación de la energía tramo a tramo, teniendo en cuenta que, al moverse el bloque siempre en una dirección horizontal, no es preciso tener en cuenta la energía potencial gravitatoria.

- **Tramo 1**: como al ir comprimiendo el muelle, el bloque sufre rozamiento, el principio de conservación de la energía queda:

$$E_{c0} + W_R = \frac{1}{2} k\, x^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 - \mu\, m\, g\, x = \frac{1}{2} k\, x^2$$

Sustituyendo los valores numéricos queda:

$$150\, x^2 + 19{,}6\, x - 80 = 0$$

Se resuelve esta ecuación algebraica de segundo grado y nos salen dos soluciones:

$$x_1 = 0{,}668\, m \qquad\qquad x_2 = -0{,}798\, m$$

Hay que rechazar la solución negativa dado que hemos supuesto el desplazamiento del bloque como positivo, con lo que la compresión del muelle, primer apartado del problema, vale:

$$\boldsymbol{x = 0{,}668\, m}$$

Para averiguar cuándo se para el bloque, tenemos que resolver el problema en los tramos 2 y 3.

- **Tramo 2**: el principio de conservación de la energía nos lleva a:

$$E_{c0} + \frac{1}{2}\,k\,x^2 + W_R = E_{cF}$$

Sustituyendo cada variable por su valor y recordando que la energía cinética inicial es nula porque el bloque acaba de ser detenido por la fuerza ejercida por el muelle y va a empezar a desplazarse en sentido contrario, tenemos:

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 - \mu\,m\,g\,x = E_{cF}$$

Por comodidad, sustituiremos los números en esta expresión para calcular el valor de la energía cinética final del tramo 2. Así:

$$E_{cF} = \frac{1}{2}\,300\;0{,}668^2 - 0{,}2\;10\;9{,}8\;0{,}668 = 53{,}8408\,J$$

Si recordamos que la energía cinética original era de 80 J, podemos ver cómo se ha disipado una parte importante de la misma. Para resolver el problema basta con estudiar el tercer y último tramo considerado.

- **Tramo 3**: al igual que en los demás tramos, aplicamos el principio de conservación de la energía, y como el tramo 3 termina con el bloque inmóvil, queda:

$$E_{c0} + W_R = E_{cF} \quad\Rightarrow\quad E_{c0} - \mu\,m\,g\,x = 0$$

Despejando x y sustituyendo las variables por los valores numéricos, llegamos a:

$$\boldsymbol{x = \frac{53,8408}{19,6} = 2,747\;m}$$

Solución del apartado 2 del problema.

**Ejemplo 8: Plano inclinado sin y con rozamiento**

Un bloque de 50 kg llega al inicio de un plano inclinado ascendente, que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 15 m/s. Suponemos el plano lo bastante largo como para que el bloque llegue a detenerse. Calcular:
La altura a la que llega el bloque si no hay rozamiento.
La altura a la que llega el bloque si el coeficiente de rozamiento es del 0,4.

Para resolver el **primer aparatado** basta con aplicar el principio de conservación de la energía en su forma más sencilla. Si definimos como punto de energía potencial nula el punto más bajo del plano, este principio puede escribirse:

$$E_{c0} + E_{p0} = E_{cF} + E_{pF}$$

Y añadiendo que la energía cinética final es nula, ya que el problema pide la altura a la que se para el bloque, queda:

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 = m\, g\, h$$

Las masas se cancelan a ambos lados de la igualdad y el resultado de este primer apartado es:

$$\boldsymbol{h = \frac{v_0^2}{2\, g} = \frac{15^2}{2 \cdot 9{,}8} = 11{,}48\, m}$$

Para resolver el **segundo apartado** tenemos que calcular, antes, la fuerza de rozamiento. Esta no cambiará a lo largo de todo el plano inclinado y, como ya hemos visto muchas veces, será igual al producto del coeficiente de rozamiento por la normal. La normal será igual en módulo a la componente del peso en la dirección perpendicular a la del movimiento. Por trigonometría es bien sabido que:

$$P_y = m\, g \cos\theta \; = N$$

Por otro lado, para calcular el trabajo disipativo correspondiente al rozamiento, será necesario conocer el recorrido que hace el bloque sobre el plano, no simplemente la altura. Nuevamente, bastan conocimientos elementales de trigonometría para escribir que:

$$r = \frac{h}{sen\,\theta}$$

Con toda esta información ya se puede escribir la expresión de la conservación de la energía:

$$E_{CF} + E_{pF} = E_{C0} + E_{p0} + W_R$$

Como la energía cinética final es nula y la energía potencial inicial también lo es, ya que hemos elegido, como en el apartado anterior, el punto de energía potencial nula en el extremo más bajo del plano, podemos escribir:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - \mu\,m\,g\cos\theta\,\frac{h}{sen\,\theta}$$

La masa se cancela al estar presente en todos los factores. Despejamos h:

$$h = \frac{1}{2g}\,v_0^2\left(1 + \mu\,\frac{\cos\theta}{sen\,\theta}\right)^{-1}$$

Solo nos queda sustituir cada variable por su valor:

$$\boldsymbol{h = \frac{1}{2\cdot 9,8}\,15^2\left(1 + 0,4\,\frac{\cos 30^\circ}{sen\,30^\circ}\right)^{-1} = 6,78\,m}$$

Aunque es cierto que el coeficiente de rozamiento escogido era alto, podemos comprobar que ambas difieren en casi 5 metros, lo que ilustra la importancia de considerar el rozamiento en los problemas de física.