Física I

Sistemas de partículas e introducción a los sólidos rígidos

Índice

Esquema

SISTEMA DE PARTÍCULAS

Definición de sistema de partículas

Sistema de partículas: conjunto de partículas perfectamente delimitado en el que se considera que su número no cambia a lo largo del tiempo.

Cantidad de movimiento de un sistema de partículas: la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula:

$$\vec{p_T} = \sum^N m_i \vec{v_i}$$

Discretos: cuando se sabe en todo momento velocidad y posición de cada partícula.

Continuos: si las partículas están muy ligadas y hay que dividirlos en partes infinitesimales.

Teorema de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas: la cantidad de movimiento total se un sistema de partículas es igual a la resultante de las fuerzas externas sobre sus partículas:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,ext}$$

Consecuencia: si la suma de fuerzas externas es cero, la cantidad de movimiento total se conserva.

Centro de masas de un sistema de partículas

Centro de masas de un sistema de partículas: el punto cuyo vector de posición es:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Propiedad importante: la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas equivale al producto de la masa total del sistema por la velocidad del centro de masas, porque la cantidad de movimiento interna se cancela.

$$\vec{p}_T = M_T\, \vec{v}_{CM}$$

Lo mismo puede decirse de la aceleración del centro de masas:

$$\vec{F}_{ext} = M_T\, \vec{a}_{CM}$$

Sólido rígido

Sistema de partículas cuyos miembros no varían sus posiciones mutuas.

Su movimiento puede dividirse en traslación y rotación puras.

Llevan a plantear la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\vec{M}_{ext} = I\, \vec{\alpha}$$

Cálculo del centro de masas de un sistema de partículas

Cálculo del centro de masas: se hace aplicando la fórmula.

Sistema centro de masas y aplicaciones

Aquel cuyo origen es el centro de masas de un sistema y sus ejes están fijos respecto de un sistema de referencia inercial. En él la cantidad de movimiento interna es nula.

Momento angular de un sistema

Momento de una fuerza respecto de un eje: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Momento angular o cinético: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Momento angular en una trayectoria circular: $\vec{L} = m\, r^2 \vec{\omega}$

Relación entre momento de una fuerza y momento angular: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Momento angular de un sistema de partículas es la suma de los momentos de cada partícula.

$$\vec{L}_T = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m_T \vec{v}_{CM}$$

Energía de un sistema de partículas

Energía cinética es la suma de las energías cinéticas de cada partícula. Puede escribirse:

$$E_{CT} = E'_{C\,CM} + \frac{1}{2}\, m_T\, v_{CM}^2$$

Energía potencial: se divide en interna y externa, pero solo puede definirse so las fuerzas internas y externas son conservativas.

Conservación de la energía si todas las fuerzas son conservativas: $\Delta E_C + \Delta E_p = 0$

Conservación de la energía si las fuerzas int. son conservativas y la externas no:

$$\Delta E_C + \Delta E_p^{interna} = W_{NC}$$

9.1. Introducción y objetivos

Este es el último tema del curso dedicado a la mecánica clásica. A diferencia de los temas anteriores este se centra en sistemas formados por múltiples partículas. Previamente, hemos tratado el tema de sistemas de varias partículas de forma puntual, con secciones sueltas o en problemas, pero no hemos abordado un estudio sistemático, que es el objetivo de este tema.

Otro objetivo fundamental de este tema es la introducción del concepto de momento angular, que permite definir el tercer principio de conservación esencial de la mecánica clásica: el principio de conservación del momento angular.

Por último, hacemos una introducción a los conceptos más elementales de los sólidos rígidos. En esta parte del tema nos limitamos a comentar algunas características de estos sistemas, ya que serán objeto de estudio en otras asignaturas del grado.

Tras asimilar los contenidos de este tema, serás capaz de:

- Comprender los conceptos esenciales sobre los sistemas de partículas y saber calcular sus centros de masas.
- Conocer el concepto de sistema de referencia centro de masas y su utilidad.
- Saber qué es el momento angular de un sistema de partículas y su conservación.
- Poder calcular la energía cinética y potencial de un sistema de partículas y aplicar la conservación de la energía.
- Conocer conceptos elementales de sólidos rígidos y su naturaleza como caso particular de sistema de partículas.

9.2. Definición de sistema de partículas

En los temas precedentes de dinámica, se ha tratado casi siempre con partículas solitarias. Esto es, hemos descrito las ecuaciones del movimiento, los métodos de cálculo y los teoremas de conservación para móviles solitarios: bloques, bolas, etc.

Alguna vez hemos tratado problemas con dos cuerpos que interactúan entre sí: por ejemplo, problemas referidos a satélites o, bien, planos inclinados donde hay dos bloques unidos por una cuerda. Estos podrían considerarse ejemplos muy básicos y elementales de sistemas de partículas, si bien, son ejemplos tan simples que no ilustran las características generales de estos sistemas. La única referencia real a los sistemas de partículas la hicimos en el tema 7 al hablar de su energía cinética.

El objetivo de este tema es tratar en profundidad estos casos.

Se define un sistema de partículas de la siguiente manera:

Un sistema de partículas es un conjunto de partículas perfectamente delimitado, en el que se considera que su número no cambia a lo largo del tiempo.

Se consideran dos tipos principales de sistemas de partículas:

- Los **discretos**, aquellos en los que se puede saber, en todo momento, la masa y la velocidad de cada una de las partículas que lo componen.
- Los **continuos**, donde las partículas están mucho más ligadas, y hay que tratarlos dividiéndolos en elementos infinitesimales.

Un ejemplo de sistema discreto podría ser el Sistema Solar, mientras que un líquido es un caso de sistema de partículas continuo. Estos últimos requieren, normalmente, teorías específicas (por ejemplo, la física de fluidos), de manera que, a lo largo del tema, salvo indicación en contrario, trabajaremos con sistemas de partículas discretos. No obstante, buena parte de los conceptos son válidos para ambos tipos.

Un sistema de partículas discreto queda caracterizado por los siguientes elementos:

- El número de partículas que contiene, denotado por *N*.
- La masa de cada una de las partículas, notada cada una por m_i, donde *i* va desde 1 hasta *N*.
- Respecto a un sistema de referencia determinado, las partículas del sistema están situadas en los puntos: $\vec{r_i}$.
- Cada partícula lleva una velocidad determinada: $\vec{v_i}$.

Una característica importante de los sistemas de partículas es que, en la mayoría de los casos, estas interactúan entre sí. A las fuerzas que se realizan entre sí las partículas de un sistema de partículas se las denomina **fuerzas internas**. Se suele notar la fuerza que la partícula i ejerce sobre la j como $\overrightarrow{F_{ij}}$. En aplicación de la tercera ley de Newton, se cumple, para todos los valores de *i* y *j*, que:

$$\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$$

Además de a las fuerzas internas las partículas pueden estar sometidas a fuerzas externas. Lo más normal es que las interacciones externas tengan una influencia diferente en cada partícula, de ahí que se denoten las fuerzas externas al sistema de partículas como:

$$\vec{F}_{i\,ext} \quad i = 1, \dots, N$$

Un ejemplo muy claro sería un conjunto de partículas sometidas a la acción de la gravedad. Cada partícula experimenta una fuerza diferente en función de su masa. Por ello, la ecuación fundamental de la dinámica para cada partícula de un sistema de partículas vale:

$$\vec{F}_{i\,ext} + \sum_{i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i\, a_i \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

Esto es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que, aunque teóricamente da toda la información necesaria, en la práctica no se puede abordar, salvo en casos muy simples.

Una característica importante de los sistemas de partículas está relacionada con el momento lineal de sus componentes. La definición de la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es bastante obvia:

La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es la suma de la cantidad de movimiento de cada una de ellas:

$$\overrightarrow{p_T} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \overrightarrow{v_i}$$

La importancia de esta definición tiene que ver con la posibilidad de establecer teoremas interesantes referentes a sistemas de partículas.

La ecuación fundamental de la dinámica para cada partícula admite una forma alternativa a la mencionada anteriormente:

$$\frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \vec{F}_{i\,ext} + \sum_{i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

Como nos interesa extraer consecuencias de la cantidad de movimiento total de un sistema, si sumamos todas estas ecuaciones se obtiene:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_{i\,ext} + \sum_{i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} \right)$$

Dadas las propiedades de las derivadas, y recordando la definición de cantidad de movimiento total del sistema de partículas, es posible escribir:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i} = \frac{d\vec{p}_T}{dt}$$

También es posible dividir la sumatoria que lleva el paréntesis en otras dos, una para cada sumando dentro del paréntesis. Es obvio que el primero es igual a la resultante de todas las fuerzas externas que sufren las partículas del sistema, que se denota por $\vec{F}_{ext}$.

Con respecto al segundo, se puede demostrar que debido a que se cumple la tercera ley de Newton y la mitad de las fuerzas son reacción de las demás, ese sumando se cancela y la ecuación (1) se reduce a:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Esto nos lleva al siguiente enunciado:

La tasa a la que cambia la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del mismo. Dicho de otro modo, solo las fuerzas externas pueden modificar la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas. A este resultado se le llama teorema de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas.

Si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema es nula, la consecuencia es que:

Si la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es nula, la cantidad de movimiento total del sistema se conserva.

9.3. Definición de centro de masas de un sistema y su importancia

Una de las definiciones más importantes en lo que respecta a sistemas de partículas es el de centro de masas. Ello se debe a que este centro de masas permite hacer analogías entre las ecuaciones dinámicas para las partículas y las ecuaciones que rigen la velocidad y la aceleración del centro de masas.

En este apartado, definiremos el concepto de centro de masas y estudiaremos su importancia. Se deja para otros apartados ejemplos de su cálculo y el estudio del sistema de referencia centro de masas y sus aplicaciones.

Definición de centro de masas

Dado un sistema de N partículas de masas m_i, situadas en las posiciones $\vec{r_i}$ con respecto a un sistema de referencia determinado, definimos el centro de masas así:

El centro de masas de un sistema de partículas se define como el punto cuyo vector de posición es:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

El cálculo del centro de masas no reviste excesiva dificultad.

Propiedades e importancia del concepto de centro de masas

El centro de masas de un sistema de partículas no es un concepto definido por capricho.

En la última parte de este apartado, se comentarán las propiedades más importantes.

Es obvio que si un sistema de partículas se desplaza, deberá cambiar la posición de su centro de masas. Si derivamos, con respecto al tiempo, la posición del centro de masas, lo que da la velocidad del mismo obtenemos, a partir de la definición y usando propiedades básicas de la derivación:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Si definimos la masa total del sistema de partículas como:

$$M_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

La expresión para la velocidad del centro de masas queda:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_T}{M_T} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}_T = M_T \, \vec{v}_{CM}$$

Esta ecuación resulta de gran importancia. Afirma que el momento total del sistema de partículas equivale al de una partícula solitaria, cuya masa es la masa total de sistema y su velocidad es la del centro de masas.

Esto es lo que le da validez a los procedimientos que se han realizado en temas anteriores. Así, normalmente, hemos tratado bloques extensos a los que se aplican fuerzas o se mueven a ciertas velocidades, considerando que las fuerzas se aplican en un punto o que son «partículas» puntuales. Lo que en realidad se ha hecho es usar este resultado y suponer que un sistema de partículas se mueve globalmente como una partícula puntual igual a la masa del sistema. Cuando decíamos que un bloque se movía a determinada velocidad, estábamos diciendo que su centro de masas se movía a esa velocidad.

Recordando que la expresión alternativa a la segunda ley de Newton incluye la derivada con respecto al tiempo de la cantidad del movimiento, derivamos con respecto al tiempo la cantidad de movimiento según la última expresión obtenida y llegamos a:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = M_T \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M_T \, \vec{a}_{CM}$$

En el apartado 9.2 establecimos que la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total del sistema equivale a la resultante de las fuerzas externas, lo que permite afirmar que:

$$\vec{F}_{ext} = M_T \, \vec{a}_{CM}$$

De nuevo el sistema de partículas en su conjunto actúa como si fuera una partícula de masa total igual a la masa del sistema de partículas concreto. En definitiva, podemos hacer la siguiente afirmación:

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como una partícula cuya masa es igual a la masa total del sistema, su velocidad es la del centro de masas y la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masas.

9.4. Cálculo del centro de masas

El cálculo del centro de masas de un sistema de partículas, conocidas masas y posiciones de sus componentes, está dado por la ecuación de definición:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Esta es una expresión vectorial. Descomponiendo todos los vectores en sus tres componentes, obtenemos tres expresiones escalares para el cálculo del centro de masas, que son:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Gracias a los resultados de la sección anterior, hay un método que puede ser de utilidad cuando consideramos sistemas continuos.

Supónganse dos bloques cúbicos situados a una distancia r el uno del otro. El centro de masas de cada cubo sería su centro. Entonces, es posible calcular el centro de masas de ambos cubos suponiendo que cada uno es una partícula puntual localizada en el centro de cada cubo, separadas una distancia r, y con la masa de cada cubo.

Este método es posible utilizarlo en general: si podemos dividir un objeto de forma complicada en varios de formas simétricas y sencillas (esferas, cubos, rectángulos, etc.), su centro de masas se calcularía sustituyendo cada forma simétrica por un punto que está en su centro y tiene la masa del trozo simétrico. Este método no siempre funciona, y hay ocasiones en las que es preciso usar métodos integrales que no trataremos en este tema.

Ilustraremos el cálculo de centros de masas con un par de ejemplos:

Ejemplo 1

Calcular el centro de masas de un sistema de partículas iguales, de 1 kg de masa, y situadas a lo largo de un plano que coincide con el descrito por los ejes x e y del sistema de referencia, y con las siguientes coordenadas:

x=2 m, y=3 m

x=1,57 m, y = -1,20 m

x=0 m, y = 9 m

x=-10 m, y =-1 m

x=2 m, y=-3 m

Para el cálculo del centro de masas implica, simplemente, aplica su definición. Es conveniente que empieces calculando la masa total del sistema:

$$M_T = \sum_{i=1}^{N} m_i \; = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5\, kg$$

Como las componentes en el eje z de todas las partículas son nulas, basta con que plantees solo dos de las ecuaciones escalares, lo que nos lleva a:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{2 \cdot 1 + 1{,}57 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-10) \cdot 1 + 2 \cdot 1}{5} = -0{,}886\, m$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{3 \cdot 1 + (-1{,}2) \cdot 1 + 9 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1}{5} = 1{,}36\, m$$

Que también podemos expresarlo como:

$$\boldsymbol{\vec{r}_{CM} = -0,886\, \hat{\imath} + 1,36\, \hat{\jmath}}$$

Ejemplo 2

Calcular el centro de masas de un sistema de partículas formado por las siguientes cuatro partículas:
Masa: 6,2 kg, $\vec{r} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 1{,}5\,\hat{k}$
Masa: 1,5 kg, $\vec{r} = \hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}$
Masa: 5 kg, $\vec{r} = 9\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}$
Masa: 2,7 kg, $\vec{r} = -5\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2{,}4\,\hat{k}$

Para ilustrar su uso, en esta ocasión, platearemos la ecuación vectorial. Sabiendo que la masa total es:

$$M_T = \sum_{i=1}^{N} m_i \; = 6{,}2 + 1{,}5 + 5 + 2{,}7 = 15{,}4\, kg$$

Tenemos:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$= \frac{6{,}2\,(3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 1{,}5\,\hat{k}) + 1{,}5\,(\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}) + 5\,(9\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}) + 2{,}7\,(-5\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2{,}4\,\hat{k})}{15{,}4}$$

$$= \frac{51{,}6\,\hat{\imath} + 33\,\hat{\jmath} - 2{,}32\,\hat{k}}{15{,}4} = 3{,}35\,\hat{\imath} + 2{,}14\,\hat{\jmath} - 0{,}15\,\hat{k}$$

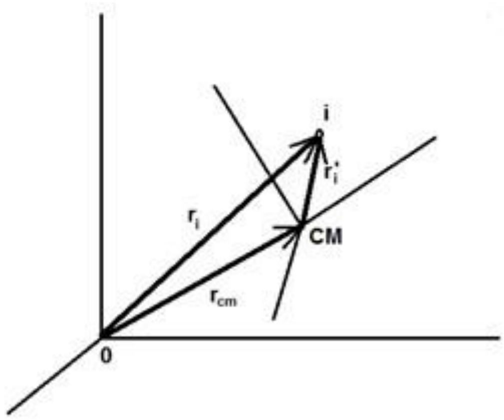
9.5. Sistema de referencia centro de masas y sus aplicaciones

La definición de sistema de referencia centro de masas es muy sencilla si se ha asimilado el concepto de centro de masas. De hecho, se define como:

El sistema de referencia centro de masas de un sistema de partículas es aquel cuyo origen está en el centro de masas del sistema y cuyos ejes están fijos con respecto a un sistema de referencia inercial dado.

Esta definición tiene como consecuencia que, en teoría, podemos definir infinitos sistemas de referencia centro de masas. Asimismo, si el centro de masas del sistema de partículas se mueve con respecto al inercial con velocidad constante, el sistema centro de masas será también inercial.

Para comprender la importancia de este sistema hay que hacer algunos cálculos. En la siguiente figura se esquematizan el sistema de referencia inercial, con centro en 0, y el sistema de referencia centro de masas. En diagrama, i es la partícula iésima del sistema de partículas:



Se define el vector de posición interno de la partícula iésima del sistema de partículas $\overrightarrow{r_i'}$, donde $\vec{r_i}$ y $\vec{r}_{CM}$ son los vectores de posición de la partícula iésima y del centro de masas, respectivamente, desde el sistema de referencia inercial, como:

$$\overrightarrow{r_i'} = \vec{r_i} - \vec{r}_{CM}$$

La definición resulta evidente a partir de la figura. Se derivan de la definición anterior la **velocidad interna** y la **cantidad de movimiento interna** de la partícula iésima:

$$\overrightarrow{v_i'} = \vec{v_i} - \vec{v}_{CM}$$
$$\overrightarrow{p_i'} = m_i\, \vec{v}_i'$$

Si dada la definición del vector de posición interno se hace la suma de los vectores de posición internos por sus respectivas masas nos queda:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_i'} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i} - \sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{r}_{CM}$$

Dado que la posición del centro de masas es la misma a lo largo del sumatorio y puede sacarse como factor común. Según la definición de centro de masas, el primer sumatorio y el segundo término del miembro derecho de la ecuación son iguales (el primer sumatorio es el numerador de la definición de vector de posición del centro de masas, mientras que el término que se le resta es el vector de posición del centro de masas multiplicado por la suma de masas), con lo que se llega a un resultado importante:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_i'} = 0$$

Si se deriva se llega al hecho que hace importante el sistema centro de masas:

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i'} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_i'} = 0$$

Esto es:

La cantidad de movimiento interna de un sistema de partículas es siempre nula.

De hecho, esta es la causa de que la definición de centro de masas sea la expuesta.

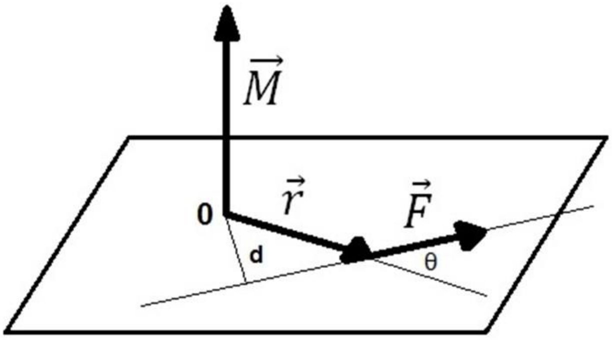
9.6. Momento angular de un sistema de partículas y teorema de conservación

En esta parte del tema se trata por primera en el curso vez un concepto fundamental. Aunque los conceptos de momento angular y sus teoremas de conservación para partículas se podrían haber introducido en los temas dedicados a dinámica, en la práctica, sus usos más importantes están referidos a sistemas de partículas y, sobre todo, se aplican a solidos rígidos. Por ello, hemos optado por introducirlos directamente aquí, donde se generalizarán.

A continuación, se definirán los conceptos para partículas aisladas y se generalizarán para sistemas de partículas.

Definición de momento de una fuerza

Sea $\vec{F}$ una fuerza que actúa sobre una partícula P situada a cierta distancia de un punto O fijo con respecto a un sistema de referencia inercial dado. A la vista de la figura:



Se define el momento de la fuerza así:

El momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto 0 es el siguiente producto vectorial:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Por las propiedades del producto vectorial, el módulo del momento vale:

$$M = r\, F\, sen\, \theta = F\, d$$

Donde *d*, que se llama **brazo de la fuerza** con respecto a 0, es la distancia mínima del punto 0 a la recta que define la dirección de la fuerza.

Definición de momento angular

Esta definición se basa en la anterior:

El momento angular o cinético, $\vec{L}$, con respecto a un punto 0, fijo en un sistema de referencia determinado, de una partícula es el momento del vector cantidad de movimiento de la partícula:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

El momento angular se mide, como se deduce a partir de su expresión, en $kg\, m^2/s$. Estas unidades no tienen un nombre específico.

La razón de definir y utilizar este concepto tiene cierta relación con las rotaciones. Podemos demostrar que si el movimiento de un cuerpo es rectilíneo es posible elegir un sistema de coordenadas en el que el momento angular sea nulo. Solo resulta imposible anular el momento angular si la trayectoria incluye giros o rotaciones completas.

Ello tiene interés porque, como demostraremos en la sección 9.7 de este mismo tema, es posible dividir el movimiento de un cuerpo o sistema de partículas en uno de traslación y otro de rotación. Por ello, obtendremos una expresión para el momento angular cuando la trayectoria es circular.

Si una partícula describe una trayectoria circular con determinada velocidad angular $\vec{\omega}$, utilizando que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ y, tras resolver el producto vectorial triple, que $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$ porque el vector velocidad angular y el vector $\vec{r}$ forman siempre un ángulo de 90º, queda:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\, r^2 \vec{\omega} - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} = m\, r^2 \vec{\omega}$$

O sea, cuando el movimiento posee una trayectoria circular, el momento angular solo depende del valor numérico del radio, de la masa y es un vector que está en la misma dirección que el vector velocidad angular:

$$\vec{L} = m\, r^2 \vec{\omega}$$

Relación entre momento de una fuerza y momento angular. Ley de conservación del momento angular para una partícula

Los dos conceptos que acabamos de definir están relacionados, y es algo bastante sencillo de demostrar. Con objeto de seguir analizando la naturaleza del momento angular, se calcula su derivada temporal. Así:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Para dividir el producto vectorial en dos sumandos hemos usado una propiedad elemental del producto vectorial. Como la derivada del vector de posición con respecto del tiempo es la velocidad el primer sumando se anula, ya que el vector cantidad de movimiento es paralelo a él. Como, por la segunda ley de Newton, la derivada temporal de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza, queda el siguiente resultado fundamental:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Este resultado solo es correcto cuando $\vec{L}$ y $\vec{M}$ se calculan con respecto al mismo punto. Si el momento de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nulo, el momento angular no cambia, lo que permite enunciar la ley de conservación del momento angular:

El momento angular de una partícula es constante si el momento dinámico que experimenta es nulo

El momento angular de una partícula que gira puede ser cero por **dos motivos**: si la fuerza que se le aplica es nula, o si la fuerza que se le aplica está sobre la recta que une la partícula y el centro de giro. Esto es consecuencia directa de las características del producto escalar, que es nulo si uno de los dos vectores lo es o si el ángulo entre ambos operandos es 0º o 180º.

Esto implica que únicamente las fuerzas que tengan una componente tangencial a la trayectoria de giro pueden modificar el momento angular, y que si una fuerza tiene componente tangencial y normal, solo la primera cambia el momento angular.

Esta ley de conservación es la tercera de las leyes fundamentales de conservación de la dinámica clásica, junto a la de conservación del momento lineal y la conservación de la energía. Sus aplicaciones son múltiples.

Una de sus aplicaciones es muy cotidiana y es posible verla en el patinaje artístico. Aunque para explicarlo con rigor tendríamos que considerar conceptos de sólidos rígidos, el concepto básico físico es el mismo, ya que la conservación del momento angular en sólidos rígidos es una generalización de la ley recién enunciada. Si un patinador empieza a girar con los brazos extendidos en horizontal, podrá verse que si los recoge, su velocidad de giro aumenta.

Aunque la explicación rigurosa es que al hacer eso su momento de inercia disminuye, lo que obliga a que la velocidad angular aumente para mantener el valor del momento angular, puede ilustrarse el motivo considerando una partícula que gira a una distancia *r* y a una velocidad angular ω_0 en torno a un punto determinado. El módulo del momento angular es:

$$L_0 = m\, r^2\, \omega_0$$

Si en ausencia de fuerzas tangenciales el radio de giro se reduce a la mitad, como el momento angular se conserva, se verifica que:

$$m\,r^2\,\omega_0 = m\,\frac{r^2}{4}\,\omega_F \quad \Rightarrow \quad \omega_F = 4\,\omega_0$$

Esto es, que su velocidad angular se ha multiplicado por cuatro.

Momento angular de un sistema de partículas y leyes de conservación

El concepto de momento angular se puede generalizar a los sistemas de partículas sin demasiadas dificultades. Dado un sistema de partículas formado por N partículas de masas m_i y velocidades $\vec{v_i}$, el momento angular total del mismo respecto de un punto A es, simplemente, la suma de los momentos angulares de cada una de las N partículas del sistema respecto de ese punto:

$$\vec{L_T} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{p_i}$$

El siguiente paso es calcular cuánto vale la derivada temporal del momento angular total. Por sencillez, vamos a calcular el momento angular respecto al origen del sistema de coordenadas utilizado. Hacerlo respecto de otro punto supondría, únicamente, que en vez de $\vec{r_i}$ aparecería una resta de vectores. Se supone que cada una de las partículas del sistema está sometida a una fuerza $\vec{F_i}$. Para los momentos angulares de cada partícula se cumple:

$$\frac{d\vec{L_i}}{dt} = \vec{r_i} \times \vec{F_{iT}}$$

Donde la fuerza escrita es la fuerza total que experimenta. Esa fuerza total equivale a:

$$\overrightarrow{F_{iT}} = \vec{F_i} + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Esto es, la fuerza externa más la suma de las fuerzas internas ejercidas por el resto de las partículas del sistema. Como el producto vectorial es lineal con respecto a la suma de vectores, es posible escribir:

$$\frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt} = \vec{r_i} \times \vec{F_i} + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{r_i} \times \vec{F}_{ij}$$

Si sumamos todas estas ecuaciones teniendo en cuenta que $\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$ y dejando solamente en las sumatorias aquellas fuerzas en las que $i < j$:

$$\frac{d\overrightarrow{L_T}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{F_i} + \sum_{j>i} (\vec{r_j} - \vec{r_i}) \times \vec{F}_{ji}$$

Como se hace la suposición, bastante realista, de que los términos $(\vec{r_j} - \vec{r_i}) \times \vec{F}_{ji}$ son nulos, ya que las fuerzas tienen la misma dirección que la que une las partículas entre sí, y el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo, queda al final que:

$$\frac{d\overrightarrow{L_T}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d\overrightarrow{L_T}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_i}$$

Esta expresión es generalización directa del principio de conservación del momento angular y se enuncia así:

La variación del momento angular total de un sistema de partículas depende, solamente, de la suma de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre cada partícula. Si el momento total de las fuerzas que actúan sobre las partículas es nulo, el momento angular total del sistema se conserva.

Queda una última operación: el cálculo del momento angular total de un sistema de partículas. Lo primero a destacar es que las posiciones y velocidades respecto del centro de masas son:

$$\overrightarrow{r_i'} = \vec{r_i} - \vec{r}_{CM}$$
$$\overrightarrow{v_i'} = \vec{v_i} - \vec{v}_{CM}$$

Esto permite escribir las siguientes expresiones para el momento angular total del sistema desde el origen del sistema de referencia usado y desde el centro de masas del sistema de partículas:

$$\vec{L}_T = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{p_i}$$
$$\vec{L}_{TCM} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r_i'} \times \overrightarrow{p_i'}$$

Si tomamos la primera de estas dos expresiones y sustituimos en ella los valores de posiciones y velocidades en función de las magnitudes del centro de masas y de las relativas a este, nos queda:

$$\vec{L}_T = \sum_{i=1}^{N} \left(\overrightarrow{r_i'} + \vec{r}_{CM}\right) \times m_i \left(\overrightarrow{v_i'} + \vec{v}_{CM}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\overrightarrow{r_i'} + \vec{r}_{CM}\right) \times \left(\overrightarrow{p_i'} + m_i\, \vec{v}_{CM}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i' + \vec{r}_{CM} \times \vec{p}_i' + \vec{r}_i' \times m_i\, \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m_i\, \vec{v}_{CM})$$

Si separamos los cuatro términos en otras tantas sumatorias, se puede demostrar que el segundo es nulo, ya que implicaría la suma de las cantidades de movimiento internas de todas las partículas del sistema, que es nula. El tercer sumatorio es nulo, lo que puede demostrarse si tenemos la precaución de cambiar la masa de sitio, cosa que es legítima al ser un escalar:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}\right) \times \vec{v}_{CM}$$

Al efectuar la suma del primer operando del producto vectorial y separarlo en dos sumatorias, quedaría:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Que da cero debido a la definición de posición del centro de masas. Con todo esto, tras algunas modificaciones menores, llegamos a:

$$\vec{L}_T = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i') + \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{CM}$$

Es decir:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m_T \vec{v}_{CM}$$

Lo que se interpreta de la siguiente manera:

El momento angular total de un sistema puede dividirse en dos sumandos: el momento angular de todas las partículas del sistema con respecto al centro de masas (momento angular interno) más el momento angular del centro de masas suponiendo que toda la masa del sistema de partículas está concentrada en él.

Este resultado es importante por dos motivos: en primer lugar, justifica que se trabaje con objetos materiales (que son sistemas de partículas por definición) como si fueran objetos puntuales. Puede hacerse, sobre todo, si no poseen momento angular interno, caso en el que el momento angular total equivaldría al de una partícula. En segundo lugar, permite diferenciar entre un momento angular «externo», que sería el que es función del centro de masas, y otro interno, que puede dar información acerca de la estructura interna del sistema. Este concepto de momento angular interno, modificado y generalizado, es el que ha permitido, en mecánica cuántica, averiguar que determinadas partículas elementales tienen estructura interna.

9.7. Energía cinética y potencial de un sistema de partículas y teoremas de conservación

En este apartado obtendremos el último resultado que asimila magnitudes mecánicas totales de los sistemas de partículas a las que presentan partículas puntuales que aglutinan toda la masa en el centro de masas del sistema.

Energía cinética total de un sistema de partículas

La energía total de un sistema de partículas es la simple suma de las energías cinéticas de cada una de sus partículas:

$$E_{CT} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2$$

Si sustituimos las velocidades de esta expresión, que están medidas desde el origen del sistema de referencia, por:

$$v_i = v_i' + v_{CM}$$

La expresión de la energía cinética total queda, por tanto:

$$E_{CT} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i (v_i' + v_{CM})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \left(v_i'^2 + \; v_{CM}^2 + 2\, v_{CM}\, v_i' \right)$$

El tercer sumando se anula al descomponer el sumatorio en tres, ya que la cantidad de movimiento total respecto del centro de masas es nula, y tal sumando implica sumar las masas por las velocidades desde el centro de masas. Así, se puede escribir:

$$E_{CT} = \; E'_{C\,CM} + \frac{1}{2}\, m_T\, v_{CM}^2$$

Que es la descomposición de la energía total en energía cinética interna del sistema de partículas más la energía cinética del sistema supuesto puntual con toda la masa del mismo concentrada en el centro de masas.

Energía potencial de un sistema de partículas

La generalización del concepto de energía cinética de un sistema de partículas fue bastante trivial. La de la energía potencial es mucho más complicada, dado que depende no solo de fuerzas externas, sino de las interacciones internas. Por ello, a continuación, expondremos algunas pautas generales.

Para establecer el concepto de energía potencial de una forma relativamente sencilla es necesario hacer dos suposiciones:

- Cada partícula sufre la acción de una fuerza externa que solo depende de su posición.
- Las fuerzas internas que las partículas del sistema ejercen las unas sobre las otras solo dependen de las distancias entre ellas.

Esto permite afirmar que cada partícula posee dos tipos de energía potencial:

$$E_{P\,ext\,i}(\vec{r}_i) \qquad y \qquad E_{p\,ij}\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Y que, por tanto, existen dos tipos de energías potenciales totales:

$$E_{p\,ext} = \sum_{i=1}^{N} E_{P\,ext\,i}(\vec{r}_i) \qquad y \qquad E_{p\,int} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} E_{p\,ij}\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

A la suma de ambas energías potenciales se la llama **energía potencial total del sistema de partículas**. Solo es válida para energías potenciales externas que admitan la definición de una energía potencial y para interacciones que también lo admitan, o lo que es lo mismo, cuando todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas.

Conservación de la energía de un sistema de partículas

La conservación de la energía en sistemas de partículas es una generalización casi directa del equivalente para partículas aisladas. Como para partículas es posible demostrar que el trabajo efectuado sobre el sistema de partículas, siempre que las fuerzas que lo originen sean conservativas, será igual al incremento de energía cinética o al opuesto del incremento de energía potencial. Por ello, ambos incrementos son iguales aunque de signo contrario, de donde se deduce que:

$$\Delta E_C = -\Delta E_p \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E_C + \Delta E_p = 0$$

Que es la expresión del principio de conservación de la energía para sistemas de partículas en los que todas las interacciones y fuerzas externas consideradas son conservativas.

Si las fuerzas internas son conservativas, pero no sucede lo mismo con las externas, el trabajo de las fuerzas externas modifica la energía cinética y la energía potencial interna (pero no la externa), de donde se puede escribir:

$$\Delta E_C + \Delta E_p^{interna} = W_{NC}\ \text{NC}$$

9.8. Introducción a los sólidos rígidos como caso particular de sistema de partículas

No es el objetivo de esta sección tratar en profundidad las características de los sólidos rígidos, cuestión que se deja para otras asignaturas. En este apartado nos limitamos a dar su definición, relacionarlos con los sistemas de partículas, de los que son un caso particular y enunciar algunas propiedades importantes. La idea es que conozcas la terminología y su relación con los sistemas de partículas.

El primer paso es saber qué es un sólido rígido.

Un sólido rígido es un sistema de partículas en el cual las posiciones relativas de unas partículas respecto de las demás no se modifica, sean cuales sean las fuerzas que actúan sobre ellas.

Aunque es solo un caso particular de sistema de partículas, el estudio de los sólidos rígidos es uno de los problemas más complicados de la mecánica clásica. Al ser un sistema de partículas con características particulares, buena parte de lo explicado en esta lección es aplicable a los sólidos rígidos, en particular, el hecho de que se puede dividir el movimiento, y muchas de las magnitudes, en aquellas referidas al centro de masas y otras relativas a movimientos internos del sólido.

El hecho de que las posiciones entre las partículas no varíen las unas con respecto a las otras implica un hecho fundamental:

El movimiento de un sólido rígido puede descomponerse en dos partes: una traslación del centro de masas del objeto y una rotación del sólido con respecto a un eje de rotación determinado.

La rotación de un sólido rígido es el problema más complicado: los conceptos de momento angular o momento de las fuerzas se introducen para poder abordarlo. Calcular el momento angular total de un sólido rígido nos lleva a un resultado fundamental.

Se puede demostrar que el módulo del momento angular de una partícula de un sólido rígido respecto de un punto determinado A del eje de giro puede escribirse como:

$$L_i = m_i \, R_i^2 \, \omega$$

Donde ω es la velocidad angular de rotación del sólido rígido y R_i es la distancia de la partícula iésima al eje de rotación. Al sumar todos estos momentos angulares se obtiene el momento angular total:

$$L_T = \sum_{i=1}^{N} m_i \, R_i^2 \cdot \omega$$

Al sumatorio que acompaña a la velocidad angular se le denomina **momento de inercia del cuerpo** respecto del eje considerado. Se representa por I y su unidad en el sistema internacional es el $kg\, m^2$.

La condición de sólido rígido permite llegar a un resultado esencial. Sabemos que, para un sistema de partículas:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}$$

Calculando ambos momentos desde un mismo punto del eje, cosa que es legítima, y sabiendo que I no varía con el tiempo, se llega a:

$$\vec{M}_{ext} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\,\vec{\alpha}$$

Esta ecuación es de tal importancia que se conoce como **ecuación fundamental de la dinámica de rotación**.

Los problemas relacionados con sólidos rígidos suelen implicar dos cosas: el cálculo de momentos de inercia, para lo cual es preciso aplicar una serie de métodos y teoremas, y aplicar la ecuación fundamental de la dinámica de rotación para hallar las aceleraciones angulares. En determinados problemas de dinámica, ya resueltos a lo largo del curso, es necesario incluir esta ecuación cuando la acción de ciertos elementos, como las poleas, no se puede despreciar.

El cálculo de momentos de inercia y la resolución de problemas que involucren esta expresión lo dejamos para cursos posteriores.