

# Conceptos importantes de dinámica

# Índice

Esquema	3
Ideas clave	4
5.1. Introducción y objetivos	4
5.2. Campo gravitatorio	5
5.3. Fuerzas de inercia	8
5.4. Fuerzas de rozamiento	17
5.5. Fuerzas de ligadura	25

## CONCEPTOS IMPORTANTES DE DINÁMICA

### Campo gravitatorio

**Ley de la gravitación universal:** toda partícula material atrae a las otras con una fuerza directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_{12}$$

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

La fuerza gravitatoria ejercida por un objeto en un punto externo equivale a la ejercida por una masa puntual situada en su centro

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{j}$$

3. Término normal del arrastre de rotación: **fuerza centrífuga**. Fuerza que parece hacer que un pasajero salga despedido hacia el exterior de una curva cuando un vehículo la toma. Tiene cierta relación y similitud con la **fuerza centrípeta**. Expresión de su módulo:

$$F_c = m \frac{v^2}{r}$$

### Fuerzas inerciales

Fuerzas ficticias que aparecen solo en sistemas de referencia no inerciales

Se pueden clasificar según los términos adicionales que aparecen al relacionar la aceleración en un sistema de referencia inercial frente a otro no inercial que acelera linealmente y gira respecto del inercial

1. Arrastre de traslación: caso de un autobús que acelera. El pasajero siente fuerza en sentido contrario de la marcha. Esa fuerza es ficticia y se debe a la inercia del pasajero

2. Término tangencial del arrastre de rotación

4. Fuerza de Coriolis: fuerza que parece desplazar a los objetos en movimiento hacia un sentido contrario al de giro. Aparece en sistemas no inerciales que rotan respecto a los inerciales. Un sistema fijo en la superficie terrestre experimenta fuerza de Coriolis, pero solo se nota en grandes distancias (misiles, vuelo de aviones) y en fenómenos atmosféricos (sentido de giro de borrascas)

### Fuerzas de rozamiento

Características fuerzas rozamiento entre superficies:

- Se oponen siempre al movimiento
- Paralelas a la superficie de roce
- No depende del tamaño de la superficie, solo de la naturaleza de las superficies
- No depende de la velocidad entre superficies
- Existe un rozamiento estático y otro dinámico

Ecuaciones para el rozamiento:

$$F_e = \mu_e N$$

$$F_d = \mu_d N$$

**Resistencia en el seno de líquidos.**

Características:

- Fuerza proporcional a  $v^n$
- Depende de la forma del objeto que se mueve en el fluido
- Depende del líquido y de su temperatura

**Observación:** el sentido de la fuerza de Coriolis es opuesto en cada hemisferio de la Tierra

### Fuerzas de ligadura

Un objeto está **ligado** cuando sus movimientos están limitados por un conjunto de restricciones (paredes, superficies). Esas restricciones se llaman **ligaduras**

**Principio de liberación de Lagrange:**

Todo sistema sometido a ligaduras puede tratarse como uno libre si se añaden a las fuerzas reales otras fuerzas que producen el mismo efecto que las ligaduras. Esas fuerzas son **fuerzas de ligadura**

Características fuerzas ligadura:

- No producen movimiento
- Su magnitud es ilimitada (son todo lo intensas que haga falta)
- Son normales a las superficies o paredes que representan

Ejemplo: resistencia de una esfera en régimen laminar

$$\vec{F} = -6 \pi R \eta \vec{v}$$

## Esquema

## 5.1. Introducción y objetivos

En el tema anterior introdujimos los conceptos fundamentales en torno a los cuales se construye la visión del movimiento y sus causas que brinda la mecánica clásica newtoniana. Ya conoces cómo define la física las fuerzas y las leyes naturales que obedecen estas. Por ello, en este tema abordaremos el estudio de diferentes fuerzas que existen en la naturaleza y que tienen gran importancia e influencia en la vida diaria. En este tema se tratan fuerzas concretas, de manera que estableceremos ecuaciones para describir diferentes fenómenos en el seno de la mecánica clásica.

En la lección anterior se habló todo el rato de las fuerzas, de su definición cualitativa y cuantitativa, pero siempre de una manera muy abstracta. La única referencia a una interacción de la naturaleza fue cuando definimos el peso como:

$$\vec{P} = m \vec{g}.$$

Sin embargo, no dijimos mucho más. Ni siquiera se explicó con profundidad el significado del vector  $\vec{g}$ . En este tema se trata estos asuntos con más detalle.

Después de haber asimilado los contenidos de esta lección, serás capaz de:

- ▶ Conocer una serie de conceptos importantes en dinámica que no son parte de los fundamentos de la teoría.
- ▶ Saber que existen cuatro interacciones fundamentales y sus características esenciales.
- ▶ Conocer la ley de gravitación y sus consecuencias a la hora de abordar problemas.
- ▶ Saber qué son y qué importancia tienen las fuerzas inerciales.

- ▶ Entender cómo trata la dinámica situaciones donde un punto material forma parte de una estructura mayor o está atado a otros.

## 5.2. Campo gravitatorio

En principio, toda fuerza que experimentamos en la naturaleza tiene su origen en una o varias de las cuatro interacciones fundamentales, que son las siguientes:

- ▶ Interacción gravitatoria.
- ▶ Interacción electromagnética.
- ▶ Interacción nuclear débil.
- ▶ Interacción nuclear fuerte.

Mientras que las dos primeras son evidentes a menudo en la vida cotidiana, la tercera y la cuarta solo influyen de manera indirecta, ya que su rango de interacción es muy pequeño: solo actúan con cierta intensidad en distancias microscópicas. En cambio, las dos primeras actúan a larga distancia. Las fuerzas nucleares son las responsables de que los objetos mantengan su forma: explican que los átomos estén unidos en moléculas y estas en objetos físicos y, en el caso de la nuclear fuerte, son las que permiten que existan los núcleos y los nucleones.

En este curso, solo se tratan las interacciones gravitatoria y electromagnética, ya que las otras requieren un nivel muy profundo de conocimiento de la física. Asimismo, dado que hay temas específicos en los que trataremos el electromagnetismo, en esta lección solo se introduce la interacción gravitatoria.

La interacción gravitatoria queda descrita por la bien conocida **ley de gravitación universal**, enunciada por Newton, y que se expresa tradicionalmente así:

Toda partícula material atrae a cualquier otra con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas de ambas partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

La expresión matemática de esta ley de gravitación, que da la fuerza que la masa 1 ejerce sobre la masa 2 es:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \widehat{u_{12}}$$

Donde  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$  es la constante de gravitación universal, y es una de las constantes fundamentales de la física. El vector  $\widehat{u_{12}}$  es el vector unitario en la dirección del vector que une  $m_1$  y  $m_2$  y va dirigido desde la masa 1 a la masa 2. Como la fuerza de gravedad es siempre atractiva, la expresión tiene un signo menos, que indica que la fuerza va dirigida de la masa 2 a la masa 1.

Quedan dos comentarios relevantes. El primero es que la fuerza que la masa 2 ejerce sobre la 1 sería:

$$\overrightarrow{F_{21}} = -G \frac{m_2 m_1}{r^2} \widehat{u_{21}},$$

Y como  $\widehat{u_{21}}$  tiene un sentido opuesto a  $\widehat{u_{12}}$  esta fuerza tendría misma dirección y sentido contrario a la que ejerció la masa 1 sobre la 2. A la vista de las dos ecuaciones, los módulos de ambas fuerzas valen lo mismo. Todo ello implica que la interacción gravitatoria cumple con el principio de acción y reacción.

El segundo comentario son las unidades de la constante G. Si se sustituye en la expresión de la gravitación universal cada magnitud por sus unidades, se tiene:

$$[F] = [G] \frac{[M]^2}{[L]^2} \Rightarrow [G] = \frac{[F][L]^2}{[M]^2} \Rightarrow [G] = \text{N m}^2/\text{kg}^2$$

La expresión de la fuerza gravitatoria que acabamos de ver, en principio, solo es válida si las masas son puntuales. Para conocer la fuerza gravitatoria que ejerce una esfera sólida sobre otra, por ejemplo, necesitaríamos, en teoría, calcular la interacción que cada uno de los átomos de un cuerpo ejercería sobre cada uno de los átomos del otro cuerpo. Usando el cálculo diferencial, es posible realizar esos cálculos, pero el método es muy complejo y excede los objetivos de este tema. Basta, por el momento, usar un resultado de utilidad:

La fuerza gravitatoria que un objeto no puntual genera equivale, para puntos externos al objeto, a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa puntual situada en el centro del objeto no puntual.

Utilizaremos este resultado para un último cálculo relacionado con el peso. El peso, en la superficie de la Tierra, se define como la fuerza con la cual la Tierra atrae a cualquier cuerpo que esté en su superficie, y su ecuación es:

$$\vec{P} = m \vec{g}.$$

Pero por definición, y usando el resultado que permite sustituir objetos de gran tamaño por masas puntuales, el peso también podría calcularse empleando la ecuación de la ley de gravitación universal, usando como datos la masa de la tierra ( $M_T$ ) y el radio de la Tierra ( $R_T$ ). Así, el peso de un cuerpo de masa  $m$  estaría dado por:

$$\vec{P} = -G \frac{m M_T}{R_T^2} \hat{j}$$

Si se compara esta expresión con la otra que teníamos para el peso, vemos que ambas serán iguales si se cumple:

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{j}$$

Lo que nos da la definición de la aceleración de la gravedad. Fíjate que el vector  $\hat{j}$  va orientado desde el centro de la Tierra hasta el objeto de masa  $m$ , con lo que la fuerza de la gravedad irá orientada hacia el centro del planeta, como debe ser. Introducir en la expresión anterior los datos como el radio y la masa de la Tierra dará un resultado que ronda los  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

Un último comentario sobre la interacción gravitatoria es que debido al valor de la constante  $G$  su intensidad es pequeña y solo se hace evidente cuando las masas involucradas son muy grandes. El módulo de la interacción gravitatoria entre dos masas de 1 kg situadas a 1 m sería:

$$F = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{1}{1^2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N},$$

Tan pequeña que es casi indetectable.

## 5.3. Fuerzas de inercia

En esta parte del tema trataremos las fuerzas ficticias. La explicación a este hecho es que las fuerzas inerciales son aquellas que solo experimenta o ve un observador que tenga, como sistema de referencia, uno no inercial.

Aceptar que este tipo de fuerzas, en realidad, no existen, resulta difícil de creer, ya que se experimentan a diario. Por ejemplo, cuando una persona está en un autobús que arranca, sentirá la acción de una fuerza que tira de él hacia el sentido contrario al movimiento, una fuerza que lo aprieta contra el asiento. Esta fuerza no es real, se debe a que el pasajero está en un sistema de referencia no inercial (el autobús que está acelerando). No es que nada esté apretando al pasajero contra el asiento, sino que el pasajero, a causa de la ley de la inercia, tiende a mantenerse en reposo aunque el autobús arranque. La fuerza que siente es la del asiento tirando de él para ponerlo



en marcha junto al autobús. Esta última observación es la que haría un observador quieto, por ejemplo, en la parada del autobús.

En esta parte del tema, estudiaremos estas fuerzas en mecánica newtoniana y, en diferentes subapartados, trataremos varias de ellas por separado.

## Estudio general de las fuerzas de inercia

Sea A un sistema de referencia inercial de origen O y ejes  $x, y, z$ . Sea B un sistema de referencia no inercial, de origen O' y ejes  $x', y', z'$  que acelera con respecto a A con una aceleración  $\vec{a}_O$ , y cuyos ejes giran con respecto a los de A con una velocidad angular  $\vec{\omega}$  que no tiene que ser uniforme. Este sería el caso más general de movimiento de un sistema de referencia respecto de otro. Si  $\vec{a}_A$  es la aceleración experimentada por un cuerpo, medida desde el sistema de referencia A, y  $\vec{a}_B$  la aceleración de este mismo cuerpo, medida desde B, la relación entre ambas aceleraciones vale:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_B$$

Donde  $\vec{v}_B$  es la velocidad del cuerpo concreto medida desde el sistema de referencia B.

Cada uno de los cuatro términos adicionales de esta ecuación será el origen de otras tantas fuerzas de inercia. Son fuerzas ficticias, ya que se originan porque el sistema de referencia B es no inercial, a diferencia del A. Cada uno de estos términos se interpreta como sigue:

- $\vec{a}_{O'}$  es la aceleración que se siente en casos como el pasajero que va en el autobús. Es la única presente en los casos más sencillos de sistema de referencia no inercial. A la fuerza asociada se la puede denominar **arrastre de traslación**.

- ▶  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$  es el término tangencial del arrastre de rotación, esto es, de la fuerza que aparece debido a que el sistema no inercial rota con respecto al inercial. Está asociado a aceleraciones angulares de los ejes del sistema no inercial.
- ▶  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  es el término normal del arrastre de rotación y recibe el nombre de **fuerza centrífuga**, que es de gran interés en problemas de dinámica.
- ▶  $2 \vec{\omega} \times \vec{v}_B$  se denomina **aceleración de Coriolis**. En la superficie de la Tierra, esta aceleración es muy pequeña, de ahí que todo sistema de referencia situado en la superficie del planeta pueda considerarse, en la práctica, inercial, solo se advierte su efecto en desplazamientos largos sobre la superficie de la Tierra como, por ejemplo, lanzamientos de misiles y en cuestiones como el sentido de giro de las borrascas.

Debido a su importancia práctica, ampliaremos información de algunos de estos términos.

## Arrastre de traslación

Las fuerzas derivadas de este término son aquellas que actúan en casos en los que un sistema no inercial experimenta, únicamente, una aceleración cuya dirección no cambia a lo largo del tiempo. Es el caso típico de un autobús que empieza a acelerar o un ascensor que sube o baja con determinada aceleración. Para un observador que contempla la escena desde un sistema de referencia inercial, las fuerzas de inercia no son más que el efecto de que es el autobús o el ascensor el que se ha puesto a acelerar. Tal observador no ve ninguna fuerza ficticia, sino la fuerza que el autobús o el ascensor ejerce sobre el observador del sistema no inercial debido a que lo empuja o a que aparece algún rozamiento con el suelo.

En cambio, el observador que toma como referencia el autobús, siente una fuerza opuesta al sentido en que este acelera. En el caso del ascensor, se producen

fenómenos curiosos. Si se pone una báscula dentro de un ascensor, y una persona se pone encima, verá que si el ascensor se eleva con cierta aceleración, la báscula marcará un peso mayor que el real. Si empieza a acelerar hacia abajo, entonces el peso marcado disminuirá. Para el observador que está en un ascensor cerrado, parecerán estar apareciendo fuerzas que afectan a su peso, a pesar de que son efectos derivados de la inercia que la persona que está dentro del ascensor experimenta.

## Fuerza centrífuga

Esta es una fuerza de inercia bastante conocida. La experimenta cualquier persona que viaje en un vehículo a motor que toma una curva. Es la fuerza que parece querer desplazar hacia el exterior de la curva a los ocupantes del vehículo, y aquella que hace que los automóviles con el centro de gravedad alto se vuelquen.

En realidad, esta fuerza aparente es consecuencia del hecho de que es el automóvil el que está tomando la curva y los pasajeros tienden a seguir circulando en línea recta. El hecho de que el vehículo se doble tiene que ver con que el chasis también tiende a seguir circulando en línea recta, y son las ruedas las que transmiten la fuerza que provoca el giro.

La **fuerza centrífuga** tiene una expresión bastante sencilla. Su módulo vale:

$$F_c = m \frac{v^2}{r}$$

Donde  $r$  es el radio de giro y  $v$  la velocidad lineal del objeto. Está dirigida en la dirección formada por la línea que pasa por el centro de giro y el centro del objeto, y su sentido es el de alejarse del centro de giro, de ahí que se denomine «centrífuga».

Aunque en los textos modernos de física se opta por no utilizar esta fuerza, su empleo, **aunque no es recomendable**, puede facilitar la resolución de cierto tipo de problemas.

Lo ilustraremos con un ejemplo. Sea un camión dentro del cual hay un bloque en su suelo. Este bloque, al moverse, experimenta una fuerza de rozamiento de módulo  $F_R$ . Si el camión toma una curva de radio  $r$ , a velocidad  $v$ , y la masa del cuerpo es  $m$ , la fuerza centrífuga se dirá que vale  $F_C$ . ¿Qué aceleración adquiere el bloque a causa del giro?

Resolver este problema desde un sistema de referencia fijo en la carretera tiene bastantes complicaciones conceptuales. Sin embargo, si se resuelve desde un sistema de referencia no inercial fijo en el camión, y se acepta la existencia de la fuerza centrífuga, la ecuación fundamental de la dinámica planteada para este sistema, lleva a:

$$F_C - F_R = m a,$$

Ya que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento que la fuerza centrífuga imprimiría al objeto. Con ello, se tendría de forma sencilla el valor de  $a$  y sería posible responder a preguntas, como qué velocidad hacia el exterior de la curva adquiriría el objeto, sin complicaciones. Sin embargo, debe insistirse en que el uso de la fuerza centrífuga no es aconsejable.

Una comprobación de que la **fuerza centrífuga** es ficticia es el caso de un móvil que gira atado a una cuerda. Desde el punto de vista (teórico) de un observador que está en un sistema de referencia fijo en el móvil, la piedra experimentaría una fuerza centrífuga que está anulada por la tensión de la cuerda. Si se rompiera la cuerda, según este sistema de referencia, el móvil debería salir disparado en dirección perpendicular a la trayectoria circular, cosa que no sucede: el móvil sale en una dirección tangente a la trayectoria circular.

Un concepto relacionado es el de fuerza centrípeta, que también es una fuerza ficticia pero de naturaleza distinta. Dado el problema del camión que toma una curva, un observador desde un sistema de referencia fijo en la carretera concluirá que el camión gira porque una fuerza, dirigida hacia el centro de giro, desvía al vehículo y le hace tomar una trayectoria circular. Al descomponer la aceleración en tangencial y normal, establecimos que la aceleración normal es la que se debe aplicar para que la velocidad cambie de dirección. La fuerza centrípeta tiene como módulo:

$$F_c = m \frac{v^2}{r}$$

Idéntico al de la fuerza centrífuga, con la salvedad de que la fuerza centrípeta está orientada en sentido contrario a la centrífuga. En realidad, la fuerza centrípeta es el producto de la masa del cuerpo por la aceleración normal necesaria para hacer que un cuerpo describa una trayectoria curvilínea. O sea:

La fuerza centrípeta puede interpretarse como la fuerza que es necesario ejercer sobre un cuerpo para conseguir que su trayectoria sea curvilínea.

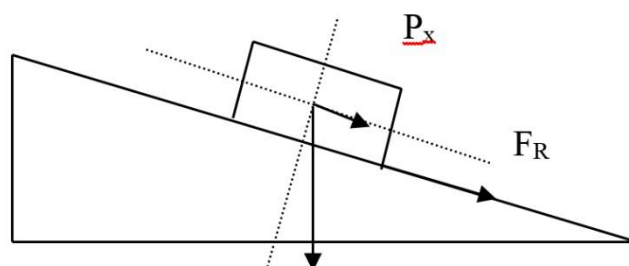
Este resultado es de gran importancia. Si pretendemos hacer girar un cuerpo de 1000 kg en una trayectoria de 500 m de radio a una velocidad de 20 m/s, habrá que aplicarle una fuerza normal dada por:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = 1000 \cdot \frac{25^2}{500} = 1\,250\, N$$

Ello implica que **uno o varios agentes deberán producir esa fuerza neta en la dirección normal a la trayectoria y dirigida hacia el centro de giro**. La fuerza centrípeta es la fuerza que se tiene que efectuar, pero no es una fuerza real: han de existir fuerzas reales que, sumadas, igualen su módulo y dirección.

En el caso de un móvil que gira atado a una cuerda, la fuerza centrípeta será la tensión que la cuerda ejerce sobre el móvil. Por ello, en vez de una fuerza centrípeta que

anula a la tensión, como se obtenía cuando se trataba el problema desde el sistema de referencia no inercial, ahora se tiene una cuerda que ejerce una fuerza que hace que la trayectoria del móvil sea circular.



Para el caso de un automóvil que toma una curva, solo hay dos fuerzas capaces de proporcionar la fuerza centrípeta necesaria, como se observa en la figura: la componente del peso en la dirección de la curva (que, habitualmente, tendrá una inclinación hacia el centro de giro, ya que las curvas se construyen peraltadas, esto es, con cierto ángulo) y el rozamiento del vehículo con el suelo.

Por esta razón, resulta peligroso tomar una curva a velocidad excesiva: la fuerza necesaria para curvar la trayectoria es proporcional a la velocidad al cuadrado, de manera que si la fuerza centrípeta es mayor que la suma de la componente horizontal del peso y del rozamiento, el vehículo no podrá tomar la curva y se saldrá de la misma. Asimismo, un peralte demasiado pequeño reduce la componente horizontal del peso y reduce la velocidad crítica a partir de la cual es imposible tomar la curva. Algo similar sucede cuando el pavimento está mojado: se reduce la fuerza de rozamiento y la velocidad crítica decrece.

En el próximo tema usaremos este tipo de razonamientos en los problemas.

## Fuerza de Coriolis

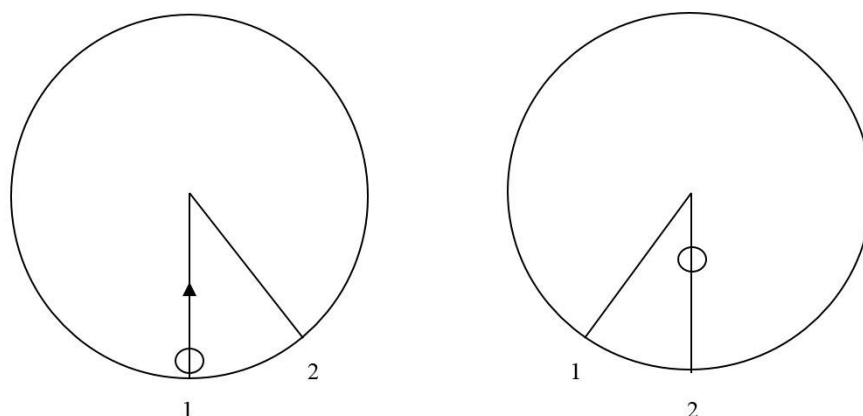
La fuerza de Coriolis es una fuerza inercial que aparece cuando se describe el movimiento desde un sistema de referencia no inercial que se halla en rotación. Esta

fuerza desplaza los objetos en el sentido contrario al del giro, desde el punto de vista de un observador que permanece quieto con respecto al sistema de referencia no inercial.

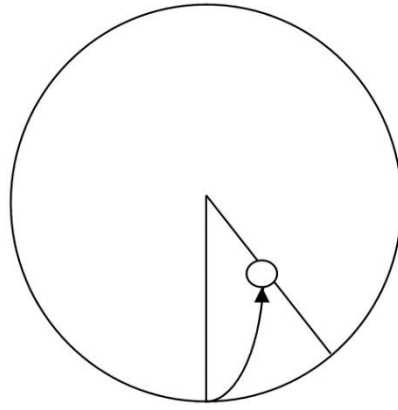
Para ilustrar intuitivamente la acción de la fuerza de Coriolis, es práctico considerar un disco que rota con determinada velocidad angular  $\omega$  con respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al disco.

Si el disco estuviera parado y se lanza un balón (esto es, un objeto al que no le afecte la fuerza de rozamiento) hacia el centro, es evidente que el balón acabaría pasando por ese punto central.

Si el disco está girando, cuando el balón avanza, por ejemplo, un metro, desde un sistema de referencia fijo se verá que el balón sigue una trayectoria rectilínea, pero como el disco está girando, el balón, después de recorrer ese metro, se halla en un punto del disco perteneciente a otro radio del disco. La siguiente figura, en la que el disco gira en sentido horario, lo aclara:



Si un observador gira con el disco, lo que verá es que el balón se desplaza en sentido contrario al del giro, como en la siguiente figura:



Este efecto, que desde el sistema de referencia no inercial solo puede achacarse a la existencia de una fuerza que desvía el balón en sentido contrario al del giro, es la denominada **fuerza de Coriolis**.

Esta fuerza tiene bastante importancia porque todo sistema de referencia fijo en la superficie de la Tierra, en realidad, es un sistema análogo al disco giratorio de los ejemplos. Esto se debe al movimiento de rotación de la Tierra. La velocidad angular de giro de la Tierra es muy pequeña, ya que necesita 23 horas y 56 minutos aproximadamente para dar una vuelta; por ello, estos efectos solo se notan en desplazamientos largos y en fenómenos atmosféricos.

En un tiro parabólico que recorre 100 m, es despreciable el efecto de las fuerzas de Coriolis, pero en lanzamientos de varios kilómetros se producen desviaciones apreciables. Así, en los lanzamientos de misiles hay que tener en cuenta, y corregir, el efecto de esta fuerza inercial; de lo contrario, no se alcanza el objetivo.

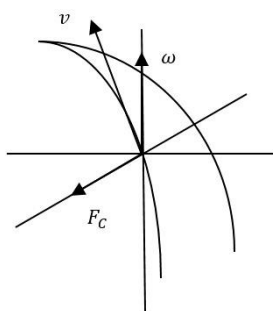
Una característica importante de las fuerzas de Coriolis al considerar sistemas de referencia fijos en la superficie de la Tierra es que el sentido de la fuerza es opuesto en el hemisferio norte y en el hemisferio sur.

Esto resulta evidente si se toma un objeto cuya velocidad se dirija hacia el norte y esté dirigido a lo largo de un meridiano, y se plantea el valor de la fuerza de Coriolis en ambos hemisferios. Se supone, en cada uno de los puntos donde se dibujan los

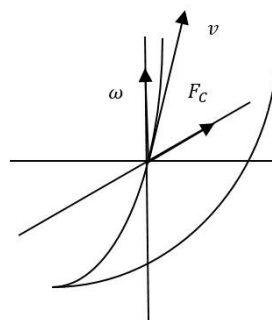


ejes de coordenadas, que  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$  están en los ejes x e y. Por tanto, su producto vectorial, por las propiedades de esta operación, estará en el eje z. Si el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$  es menor que  $90^\circ$ , su producto vectorial irá dirigido «hacia fuera» en los gráficos de abajo, y si es mayor que  $90^\circ$ , «hacia dentro»:

#### Hemisferio Sur



#### Hemisferio Norte



Esto tiene como consecuencia que, por ejemplo, las borrascas en el hemisferio norte giran en sentido antihorario y en el hemisferio sur, lo hacen en sentido horario.

## 5.4. Fuerzas de rozamiento

Este apartado inicia el estudio de las fuerzas de rozamiento, que, en la superficie de la Tierra, son fuerzas que están presentes en todo momento, hasta tal punto que fueron las responsables de que, antes de Newton y Galileo, se pensara que los objetos no se movían hasta que no recibían determinado impulso que se iba consumiendo. Como ya se sabe de la lección anterior, esto no es cierto, pero el efecto de que siempre existan fuerzas como las de rozamiento, que se oponen al movimiento de todos los objetos, crea esa ilusión.

Se dividirá esta parte del tema en dos apartados: un análisis, basado en la experimentación, de la naturaleza de las fuerzas de rozamiento que aparecen al deslizar un móvil sobre una superficie lisa, que permiten establecer las ecuaciones con las que se puede calcular el rozamiento y que son las que se emplearán en los

problemas. En el segundo apartado, se hablará brevemente de otro tipo de fuerzas de rozamiento.

## Análisis experimental del rozamiento. Expresiones para las fuerzas de rozamiento

La primera noticia que se tiene de un estudio acerca de las fuerzas de rozamiento se remonta al siglo XV, cuando Leonardo da Vinci las estudió. Sin embargo, hay que esperar hasta el siglo XVIII para tener un conjunto de experimentos y su interpretación que fueran capaces de reproducir las características esenciales que rigen estas fuerzas. En lo que sigue, cuando se hable de fuerza de rozamiento, entenderemos la fuerza de rozamiento que aparece cuando se intenta mover en horizontal un objeto que reposa sobre una superficie plana. Las características fundamentales de estas fuerzas son las siguientes:

La fuerza de rozamiento que aparece entre dos superficies que se deslizan está dirigida siempre en contra del movimiento y en la dirección del mismo, esto es, una dirección paralela a la superficie de contacto.

Este primer hecho es bastante obvio. Como el rozamiento se opone al movimiento, el vector fuerza de rozamiento debe estar en la dirección del movimiento, que al tratarse de un deslizamiento sobre una superficie lisa, es una dirección paralela a la superficie. Su sentido será opuesto al del movimiento, de manera que le imprimirá al cuerpo una aceleración en la dirección contraria a la de su velocidad.

La fuerza de rozamiento entre dos objetos es, en la práctica, independiente del tamaño de la superficie de contacto entre ambos cuerpos. En cambio, depende fuertemente de la naturaleza y composición de ambas superficies.

Este primer resultado es un tanto sorprendente, ya que se esperaría que mientras mayor sea la superficie de contacto, más fricción debería existir, lo que implicaría

mayor fuerza de rozamiento. Sin embargo, el factor determinante es la naturaleza de las superficies. Hay materiales que producen mucha fricción y otro sobre los que es muy fácil deslizar.

La fuerza a aplicar a un cuerpo para que empiece a deslizar es, normalmente, mayor que la necesaria para mantener el cuerpo en movimiento a velocidad constante. Ello implica la existencia de una fuerza de rozamiento estática, que actúa mientras el cuerpo no se mueve, y de una fuerza de rozamiento dinámica, que es la que existe cuando el cuerpo se está deslizando.

Este resultado lleva a definir dos tipos de fuerza de rozamiento: **la fuerza de rozamiento estática** y **la fuerza de rozamiento dinámica**. E indica que el rozamiento estático suele ser mayor que el dinámico.

Para el rozamiento dinámico se cumple, asimismo, lo siguiente:

Dentro de ciertos límites, la fuerza de rozamiento dinámico no depende de la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie sobre la que se desplaza.

Este hecho tampoco es intuitivo y es propio de las fuerzas de rozamiento debidas a la fricción, ya que otras fuerzas de rozamiento, como la resistencia del aire, sí dependen de la velocidad.

Finalmente, ambas fuerzas de rozamiento verifican:

La fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la fuerza perpendicular o normal que un cuerpo ejerce sobre otro.

Esta propiedad es muy importante, puesto que es la que permite dar una ecuación para las fuerzas de rozamiento. En un principio (aunque no siempre), la fuerza normal sería la fuerza que la superficie sobre la que se encuentra el móvil ejerce sobre el cuerpo en aplicación de la tercera ley de Newton. Si un cuerpo reposa en el suelo, la

fuerza normal que el suelo ejerce sobre él será igual en módulo a su peso, pero irá dirigida hacia arriba. Si se tira del cuerpo hacia arriba con una fuerza inferior a su peso, la normal será la diferencia entre el peso y la fuerza con que se tira hacia arriba, esto es, será la fuerza que el suelo ejerce sobre el bloque de manera que las fuerzas en la dirección vertical se anulan.

Para el caso de mover bloques sobre una superficie lisa y horizontal, este hecho se traduce en que mientras más pesado es un cuerpo, mayor rozamiento existe.

La combinación de este último hecho experimental con algunos de los anteriores permite escribir una ecuación para la fuerza de rozamiento. Esta expresión general, para el módulo de la fuerza de rozamiento, es:

$$F = \mu N$$

Donde  $\mu$  es el denominado **coeficiente de rozamiento** que depende básicamente de las características de las dos superficies consideradas. Debe destacarse que, para las mismas superficies, siempre existirá un **coeficiente de rozamiento estático**, que es el que existe cuando no hay movimiento entre ambas superficies, y un **coeficiente de rozamiento dinámico**, propio de las mismas superficies cuando hay movimiento de la una respecto de la otra. Por ello, en realidad, siempre existirán dos ecuaciones para describir el rozamiento:

$$F_e = \mu_e N$$

$$F_d = \mu_d N$$

La primera denota el rozamiento estático y la segunda el dinámico. Ambos coeficientes son **adimensionales**, lo que es evidente, ya que en ambos miembros de la ecuación hay una fuerza.

Por dar alguna idea de la magnitud de las fuerzas de rozamiento y de estos coeficientes de rozamiento, algunos valores de coeficientes de rozamiento son:

Superficies en contacto	$\mu_e$	$\mu_d$
Madera-Madera	0,25-0,50	0,20-0,50
Hierro-Hierro	1,2	0,15
Teflón-Teflón	0,04	0,04

En el caso madera-madera, el intervalo se debe a que existen muchos tipos de madera, y entre cada combinación existen coeficientes distintos, pero la mayoría está entre ese intervalo. A modo de ejemplo, un bloque de hierro de 10 kg que se intenta mover sobre una superficie del mismo material siente los siguientes rozamientos estático y dinámico:

$$F_e = 1,2 \cdot 98 = 117,6N$$

$$F_d = 0,15 \cdot 98 = 14,7N$$

No obstante, debe destacarse que el rozamiento entre dos superficies también depende de otros factores. Uno importante es la presencia de ciertos líquidos. Hay superficies que presentan un rozamiento elevado que, si por ejemplo, se cubren de aceite, jabón o agua, sucede que el rozamiento disminuye notablemente.

Esta es la explicación al conocido letrero de «Peligro. Suelo mojado» que se puede ver en algunos establecimientos públicos. Determinados materiales que presentan un rozamiento elevado cuando están secos, lo tienen muy reducido si están mojados. Esta reducción del rozamiento es la que provoca resbalones, ya que cuando se camina, la fuerza que permite a una persona avanzar es el rozamiento entre la suela del zapato y el suelo. Si el rozamiento del suelo es insuficiente para vencer la fuerza que se hace en horizontal contra el suelo, el pie desliza y es imposible andar.

La causa de que exista rozamiento entre dos superficies de dos sólidos es muy complicada de explicar, ya que tiene su origen en fenómenos microscópicos, con lo que solo se darán aquí algunas nociones.

A nivel microscópico, las superficies no son realmente lisas, sino que están llenas de rugosidades. Por ello, el contacto entre dos cuerpos se produce, en realidad, en una fracción de su superficie de contacto: solo tiene lugar entre las crestas de esas rugosidades. Ello implica que la presión sobre esas rugosidades es enorme, hasta tal punto que es capaz de aplastar esas crestas y acercar tanto a las moléculas entre sí que cobran importancia las fuerzas moleculares y se produce un fenómeno de adherencia. Esto es, ambas superficies quedan pegadas entre sí y es necesario ejercer fuerza para separarlas.

Esta adherencia, cuya intensidad depende de las características de los materiales involucrados, es la que explica la mayor parte de los fenómenos relacionados con el rozamiento. Así, el rozamiento estático es mayor que el dinámico porque mientras más tiempo estén dos superficies en contacto, más fácil será que la adherencia llegue a su valor máximo. Por ello, es más difícil hacer que el cuerpo empiece a moverse: hay que romper mayor número de puntos de adherencia. En cambio, si las superficies están movimiento, hay menos tiempo para que se consoliden esos puntos de adherencia, de manera que se forman menos y es preciso romper un número inferior para provocar el movimiento.

## Fuerzas de rozamiento en el seno de líquidos y gases

Los orígenes de este fenómeno son similares al rozamiento entre superficies, pero su explicación microscópica y su naturaleza son muy diferentes. Por ello, las ecuaciones que los describen y los hechos experimentales que las definen son distintos. El caso que vamos a estudiar en este apartado es el de un objeto sólido que se mueve en el seno de un fluido (un líquido o un gas)

Cuando un sólido se mueve en el seno de un fluido, experimenta una fuerza que trata de oponerse a su movimiento. El origen de esta fuerza está en las interacciones entre las moléculas del fluido y la superficie del sólido y, también, en las interacciones entre las propias moléculas del fluido originadas por las perturbaciones que introduce el objeto que se mueve en su seno.

Experimentalmente, pueden destacarse los siguientes hechos:

En general, la fuerza de rozamiento en el seno de un fluido es proporcional a alguna potencia del módulo de la velocidad.

Este hecho es una diferencia fundamental con respecto al caso del rozamiento entre dos superficies, que no suelen depender de la velocidad. La potencia concreta a la que se eleva la velocidad depende de las características del fluido, de cómo se desplaza e, incluso, de su caudal.

En general, la fuerza de rozamiento experimentada en el seno del fluido es proporcional al módulo de la velocidad (esto es, el exponente es 1) cuando el líquido está en **régimen laminar** y a la velocidad al cuadrado en el caso de **regímenes turbulentos**.

No se dará una definición rigurosa de los regímenes de movimiento en los fluidos, solo definiremos algunos.

Se dice que un fluido está en régimen laminar cuando las partículas del fluido se mueven en capas o láminas, de manera suave, sin que las trayectorias de las partículas lleven a la mezcla de líquido entre capas o sean complejas (con tirabuzones, velocidades muy diferentes en puntos próximos del fluido, etc.).

Un líquido que no esté en régimen laminar se hallará, normalmente, en régimen turbulento, donde las trayectorias de las partículas del líquido pueden llegar a ser

imprevisibles. El régimen laminar es válido mientras no se superen determinados límites de distintos parámetros, como velocidad del fluido, viscosidad y otros.

La fuerza de rozamiento en el seno de un fluido depende de la forma del objeto que se mueve en su interior.

Un objeto esférico presentará una resistencia distinta que uno en forma de cubo o de otro en forma de huso. El cálculo de esta dependencia suele ser muy complicado y debe particularizarse para cada objeto.

La fuerza de rozamiento en el seno de un fluido varía en función de la naturaleza del fluido y de su temperatura.

No ofrece la misma resistencia el aceite que el agua y, además, en función de la temperatura a la que se encuentre el fluido, la resistencia variará.

**Si el líquido puede considerarse en régimen laminar** (en general, si la velocidad de movimiento no es muy grande), la resistencia a un objeto que se mueve en su seno se podrá escribir de la siguiente manera:

$$\vec{F} = -k \eta \vec{v}$$

Dado que el rozamiento sobre el cuerpo que se mueve obedece a la «**ley de Stokes**». En esta expresión, la fuerza es proporcional al módulo de la velocidad y está dirigida en sentido contrario al del movimiento. La constante de proporcionalidad entre fuerza y velocidad se ha dividido en **dos factores**:

- El factor  $k$  contiene la dependencia de la fuerza de rozamiento con la forma del objeto y, en general, es una función compleja de las dimensiones del mismo, que debe calcularse para cada forma concreta.



- El factor  $\eta$  se denomina **coeficiente de viscosidad** y está asociado a la viscosidad del fluido, que es la fuerza de rozamiento entre las distintas láminas que se mueven con diferente velocidad dentro del fluido (de ahí que se defina, principalmente, para fluidos en régimen laminar). Cada líquido presenta un coeficiente de viscosidad distinto para cada temperatura.

A modo de ejemplo, la resistencia que experimenta una partícula esférica de radio  $R$  en agua es:

$$\vec{F} = -6 \pi R \eta_{agua} \vec{v}$$

## 5.5. Fuerzas de ligadura

Este último apartado del tema es bastante abstracto, pero reviste especial importancia a la hora de resolver problemas. En la práctica, es posible no utilizar, directamente, los conceptos que describiremos a continuación; sin embargo, conocerlos justifica procedimientos que se aplican habitualmente como, por ejemplo, sustituir el efecto de contrarrestar el peso que efectúa una superficie por una fuerza normal que ejerce esta sobre el objeto considerado.

La consideración de las fuerzas de ligadura es lo que permite darle aplicaciones reales a la mecánica de Newton. En la mayoría de situaciones prácticas, existen restricciones a los movimientos de los objetos. Un objeto no puede atravesar una pared, o seguir cayendo una vez ha alcanzado el suelo. El concepto de fuerzas de ligadura es el que permite tener en cuenta esas restricciones en las ecuaciones de la dinámica.

En primer lugar, ha de definirse el término «ligadura»:

Se dice que un objeto está ligado o vinculado cuando sus movimientos están limitados por un conjunto de restricciones físicas (paredes, carriles, etc.). Tales limitaciones a su movimiento o comportamiento se denominan ligaduras.

Por ejemplo, una bola de billar en una mesa de billar de carambola (que no tiene agujeros), que se golpea con el taco sin levantarla, está constreñida a moverse dentro de los límites de la mesa. Esa bola sería un objeto ligado y las paredes (y el suelo) de la mesa de billar serían sus ligaduras. En general, a la línea o la superficie en la que es posible el movimiento de un objeto ligado se la denomina **guía**. En este ejemplo de la mesa de billar, la guía sería la superficie de la mesa y los bordes de la mesa, en los que la bola rebotará si las alcanza.

Las ligaduras pueden ser de muchos tipos, y admiten diferentes clasificaciones. Sin embargo, no las detallaremos aquí. Para los objetivos de esta lección, es más interesante saber cómo introducir estas restricciones en problemas prácticos. Esto se hace en virtud del **principio de liberación de Lagrange**, que se puede enunciar así:

Todo sistema dinámico sometido a ligaduras puede tratarse como si estuviera libre de ellas si añadimos a las fuerzas «reales» o activas unas fuerzas llamadas fuerzas de ligadura que producen los mismos efectos sobre el objeto ligado que las ligaduras a las que sustituyen.

Dicho de otro modo, se puede sustituir, en un problema físico, la existencia de una pared a un metro en el eje  $x$  de coordenadas por una fuerza que empuja a la partícula hacia el origen de coordenadas cuando la partícula está en la posición de la pared.

Un caso muy típico sería la fuerza normal que experimenta cualquier bloque en contacto con el suelo. Esta fuerza normal sería una fuerza de ligadura, ya que restringe el movimiento del bloque: le impide moverse por debajo de la superficie del suelo. La existencia de esa ligadura se ha sustituido por una fuerza que emula el efecto de tener una superficie impenetrable.

Las fuerzas de ligadura presentan **tres características** importantes:

- ▶ Las fuerzas de ligadura no producen movimiento. Se limitan a impedir movimientos producidos por las fuerzas reales que están prohibidos por las ligaduras.
- ▶ La magnitud de las fuerzas de ligadura es ilimitada. Esto es, la fuerza que ejerce una pared a un objeto que presiona contra ella, en este contexto, se considera que puede ser todo lo grande que haga falta para evitar que el objeto la atraviese. Además, si las fuerzas activas son nulas, las de ligadura se anulan también (esto es, si un objeto no ejerce fuerza contra una pared, esa pared no ejerce ninguna fuerza sobre el objeto).
- ▶ La dirección de toda fuerza de ligadura es normal a la guía. Esto es, la fuerza ejercida por una pared a todo objeto que la alcanza será siempre normal a la propia pared.

En realidad, estas tres propiedades son lógicas en el ámbito de la modelación de un sistema físico. Retomando el ejemplo de la mesa de billar, en las condiciones normales de una partida de billar de carambola, las bolas serán incapaces de salirse de los bordes, o de atravesar el tapiz de la mesa. Aunque sería posible hacerlo si se superara la resistencia de los materiales, ello sería muy complicado (por no decir imposible) utilizando un taco de billar por parte de un jugador (a menos que el jugador se empeñe en hacer que la bola salte de la mesa, pero eso carece de sentido si el objetivo del juego es golpear las otras bolas). Se supondrá, a lo largo de la modelación de una partida, que da igual la fuerza con la que se haga un lanzamiento: los bordes de la mesa serán capaces de soportarla y devolver una fuerza equivalente, lo que es una suposición razonable.

Como último comentario, a veces las fuerzas de ligadura tendrán su origen en las leyes de la dinámica y otras no, si bien, habitualmente serán razonables. Por ejemplo, en el caso de un bloque que reposa inmóvil sobre una mesa, la reacción al peso que

ejerce la mesa sobre el bloque, derivada de la tercera ley de Newton, sería asimismo una fuerza de ligadura. Sin embargo, si el peso reposa sobre la mesa, pero se está tirando de él con determinada fuerza arriba inferior a su peso, la normal será la fuerza que, de no incluirse, haría que la aceleración vertical del bloque fuese distinta de cero. Esa fuerza normal ya no sería parte de una pareja acción-reacción junto con el peso.