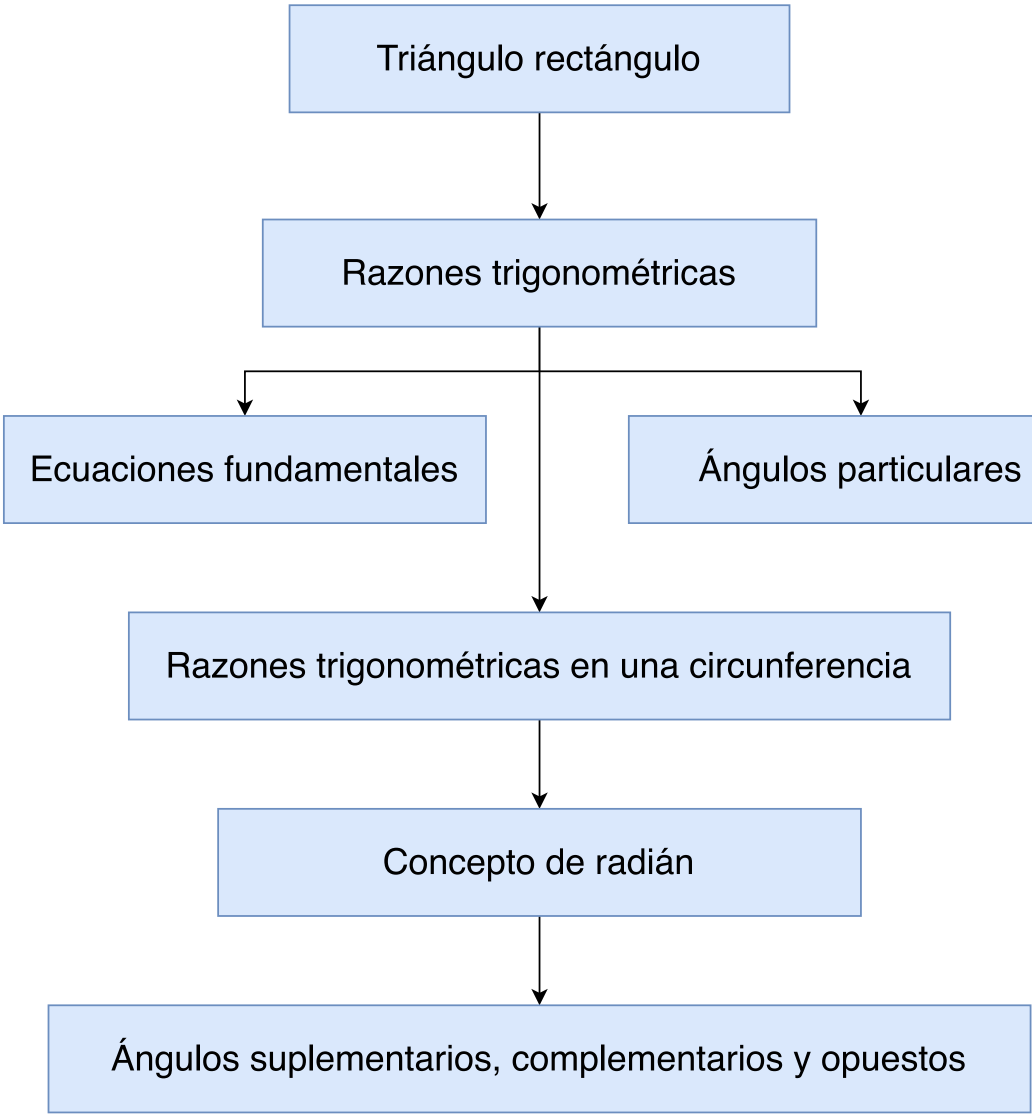
Cálculo

Trigonometría I

Índice

Esquema


Triángulo rectángulo
Razones trigonométricas
Ecuaciones fundamentales
Ángulos particulares
Razones trigonométricas en una circunferencia
Concepto de radián
Ángulos suplementarios, complementarios y opuestos

Ideas clave

2.1 Introducción y objetivos

En este capítulo definiremos las razones trigonométricas y expondremos las ecuaciones fundamentales que relacionan unas con otras. Definiremos el radián y daremos el factor de conversión entre grados sexagesimales y radianes. Por último, veremos la relación entre las razones trigonométricas de ángulos relacionados.

Los objetivos son:

- Comprender la definición de las **razones trigonométricas** a partir de un triángulo rectángulo.
- Conocer las **ecuaciones fundamentales** que relacionan las razones trigonométricas.
- Saber deducir las razones trigonométricas de ciertos ángulos a partir de casos particulares de **triángulos rectángulos**.
- Entender el signo de las razones trigonométricas en una **circunferencia** según el **cuadrante** de que se trate.
- Comprender el concepto de **radián** y saber hacer la conversión entre radiantes y **grados sexagesimales**.
- Saber lo que son los ángulos **complementarios**, **suplementarios**, que difieren en π radiantes y ángulos opuestos y conocer las relaciones entre las razones trigonométricas de ellos.

2.2 Razones en triángulos rectángulos

A partir de un triángulo rectángulo (como el de la Figura 1 y que es aquel que tiene un ángulo recto, es decir de 90°), se definen para un ángulo α, las siguientes razones trigonométricas:

Definición 1: Seno

Se define el seno de un ángulo y se representa por $\sin\alpha$, a la *razón*, es decir al cociente, entre el *cateto opuesto* y y la *hipotenusa* h.

$$\sin\alpha = \frac{y}{h}. \tag{1}$$

Si en lugar de considerar el cateto opuesto consideramos el *cateto contiguo* se define:

Definición 2: Coseno

Se define el coseno de un ángulo y se representa por $\cos\alpha$ a la razón entre el *cateto contiguo* x y la hipotenusa h:

$$\cos\alpha = \frac{x}{h}. \tag{2}$$

Si se consideran ahora los catetos se define:

Definición 3: Tangente

Se define la tangente de un ángulo y se representa por $\tan\alpha$ la razón entre el cateto opuesto y y el cateto contiguo x:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

De la Ecuación (3) y de la Ecuación (1) y la Ecuación (2), se deduce inmediatamente la siguiente fórmula:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \,. \tag{4}$$

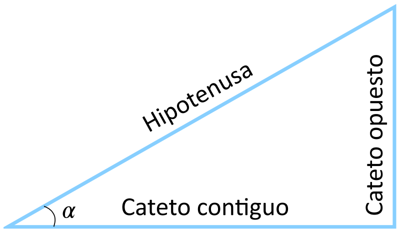


Figura 1: Triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras sabemos que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa h es igual a la suma de los cuadrados de los catetos x e y, esto es:

$$h^2 = x^2 + y^2 \,. \tag{5}$$

Dividiendo ambos miembros de la Ecuación (5), por el cuadrado de la hipotenusa (h^2), resulta:

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2 = 1 \,. \tag{6}$$

Y recordando la Ecuación (1) y la Ecuación (2), resulta una fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \,. \tag{7}$$

Si dividimos la ecuación anterior por $\cos^2 \alpha$, resulta otra de las fórmulas fundamentales:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \,, \tag{8}$$

y recordando la Ecuación (4), obtenemos:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \,. \tag{9}$$

Si se conoce una razón trigonométrica de un ángulo la Ecuación (4), la Ecuación (7) y la Ecuación (9) nos permiten hallar las otras dos.

Ejemplo 1. Razones trigonométricas de un triángulo pitagórico

Se llama triángulo pitagórico (Figura 2) a aquel cuyos lados son números naturales, que por supuesto satisfacen el teorema de Pitágoras, como $5^2 = 4^2 + 3^2$. Las razones trigonométricas son:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \,, \tag{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}\,, \tag{11}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{5}\,. \tag{12}$$

Definimos ahora las *funciones inversas* de las razones trigonométricas:

Definición 4: Secante

Se llama secante del ángulo de un triángulo rectángulo, y se representa por $\sec \alpha$, al cociente entre la hipotenusa h y el cateto contiguo x. Es, por supuesto, la inversa del coseno:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}\,. \tag{13}$$

Definimos ahora la inversa del seno:

Definición 5: Cosecante

Se llama cosecante de un ángulo de un triángulo rectángulo, y se representa por $\csc \alpha$, al cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Es la inversa del seno:

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}\,. \tag{14}$$

Definimos ahora la inversa de la tangente:

Definición 6: Cotangente

Se llama cotangente del ángulo de un triángulo rectángulo, y se representa por $\cot \alpha$, al cociente entre el cateto contiguo y el cateto opuesto. Es la inversa de la tangente:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}\,. \tag{15}$$

Con estas definiciones podemos expresar la Ecuación (9) como:

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha\,. \tag{16}$$

Si dividimos ahora la Ecuación (7) por $\sin^2 \alpha$, tenemos:

$$\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha\,. \tag{17}$$

Para una exposición exhaustiva de las identidades trigonométricas puede consultarse (Vázquez-Bautista et al., 2020). Además te recomendamos que veas la siguiente videopíldora.

Accede al vídeo: Razones trigonométricas y fórmulas fundamentales

2.3 Razones trigonométricas deducibles

Se pueden deducir fácilmente las razones trigonométricas de algunos ángulos. Consideremos primero un triángulo equilátero. Puesto que en un triángulo equilátero todos los lados son iguales también son iguales los ángulos y, recordando que la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180°, cada ángulo medirá 60°. La altura parte en dos el triángulo equilátero, por lo que el ángulo de arriba, determinado por un lado y la altura, que parte en dos el lado inferior, medirá 30°. Se deducen las siguientes razones trigonométricas para el ángulo de 60° y para el ángulo de 30°:

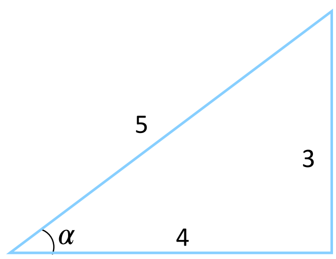


Figura 2: Triángulo pitagórico.

$$\cos 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ\,. \tag{18}$$

Ahora, por el teorema de Pitágoras deducimos que el valor del cateto opuesto al ángulo de 60° es:

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}\,, \tag{19}$$

por lo que el seno de 60^0 y por tanto el coseno de 30° valdrán:

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ\,. \tag{20}$$

Por último, la tangente de 60° valdrá:

$$\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}\,. \tag{21}$$

y la tangente de 30° valdrá:

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{22}$$

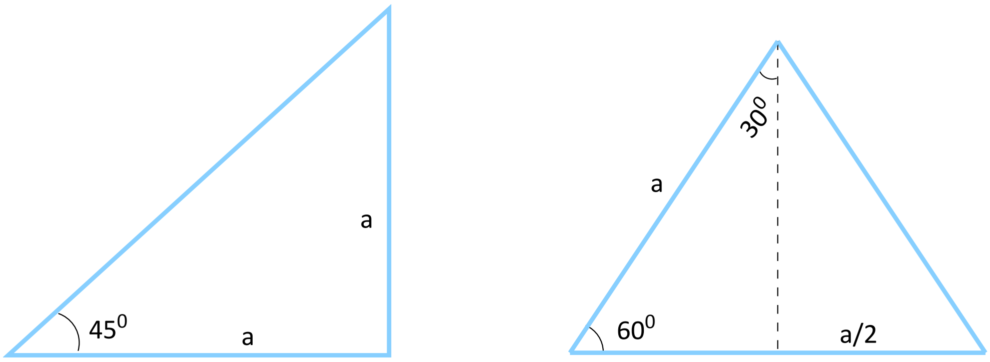


Figura 3: Triángulo rectángulo isósceles y triángulo equilátero.

Consideremos ahora un triángulo rectángulo *isósceles*, esto es un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales. Puesto que un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90°, los otros dos ángulos sumarán 90° y puesto que son iguales, cada uno de ellos valdrá 45°. La hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de lado a vale, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$, por lo que las razones trigonométricas de 45° serán:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ\,. \tag{23}$$

En efecto, el seno y el coseno de 45° tienen el mismo valor. La tangente es:

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1\,. \tag{24}$$

Te recomendamos que visualices la siguiente video-píldora sobre razones trigonométricas de ángulos particulares.

Accede al vídeo: Razones trigonométricas de ángulos particulares

2.4 Trigonometría y circunferencias

Vamos a considerar ahora las razones trigonométricas para los ángulos en una circunferencia.

El seno es el cociente entre la ordenada y el radio de la circunferencia. Igualmente, el coseno es el cociente entre la abscisa y el radio de la circunferencia y la tangente el cociente entre la ordenada y la abscisa. Las razones trigonométricas son, por tanto, independientes del radio de la circunferencia. Por tal razón, consideraremos una circunferencia de radio unidad. En tal caso el seno, coincide con la ordenada y el coseno, con la abscisa.

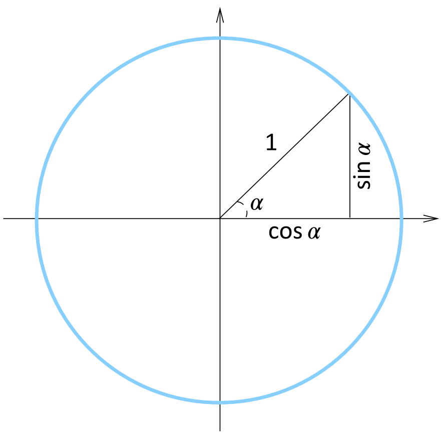


Figura 4: Ángulo en circunferencia.

Se considera positivo un ángulo si está orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj (sentido antihorario) y negativo si está orientado en el sentido horario.

- Por ser igual a la ordenada (en el círculo unidad), el seno es positivo en el primer y segundo cuadrantes y negativo en el tercer y cuarto cuadrantes.
- Por ser igual a la abscisa (en el círculo unidad), el coseno es positivo en el primer

y cuarto cuadrante y negativo en el segundo y tercer cuadrante.

- La tangente, por ser el cociente entre el seno y el coseno, es positiva en el primer y tercer cuadrantes y negativa en el segundo y cuarto cuadrantes.

2.5 El radián

El *radián* es una medida de los ángulos y se define como:

Definición 7: Radián

Un radián es el ángulo tal que el arco de circunferencia es igual al radio de esta. Puesto que la longitud de una circunferencia es igual a $2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia, el ángulo de 360°, es decir, una vuelta completa, equivale a 2π radianes.

Para convertir un ángulo de grados a radianes, se multiplica por $\pi/180$ y se multiplica por $180/\pi$ para convertir de radianes a grados.

- Un ángulo de 180° corresponde a π radianes.
- Un ángulo de 90° corresponde a $\pi/2$ radianes.
- Un ángulo de 60° corresponde a $\pi/3$, mientras que un ángulo de 120° corresponde a $2\pi/3$.
- Un ángulo de 30° corresponde a $\pi/6$.
- Un ángulo de 45° corresponde a $\pi/4$.

De la Figura 4, se desprende que $\cos 0 = 1$ (escribimos ahora los ángulos en radianes), que $\sin 0 = 0$. En cambio $\cos \pi/2 = 0$ y $\sin \pi/2 = 1$, mientras que $\cos \pi = -1$ y $\sin \pi = 0$. Las razones trigonométricas son funciones periódicas. En efecto, cuando se completa una vuelta de 360° o de 2π radianes (o un múltiplo entero de estas cantidades), sus valores se repiten.

Ejemplo 2. Conversión de grados sexagesimales a radiantes

Sea el ángulo 20° en grados sexagesimales. Para convertirlo a radianes multiplicamos por π y dividimos por 180°, puesto que π es el ángulo en radiantes que corresponde a 180°. De ese modo nos queda:

$$20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \,. \qquad (25)$$

2.6 Algunas razones trigonométricas

Veamos la relación entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos.

Ángulos suplementarios

Los ángulos suplementarios son aquellos que suman 180° ó π radianes. Por ejemplo 60° y 120° son ángulos suplementarios. También son ángulos suplementarios 30° y 150°. Las relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo α y su suplementario $\pi - \alpha$ son:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \,, \qquad (26)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \,. \qquad (27)$$

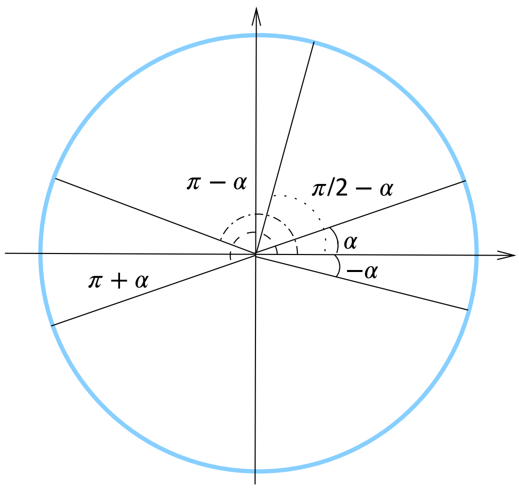


Figura 5: Angulo α, su suplementario $(\pi - \alpha)$, complementario $(\pi/2 - \alpha)$, el que difiere en π radianes $(\pi + \alpha)$, y opuesto $(-\alpha)$.

Es decir, que el seno es igual y no cambia de signo, puesto que los ángulos suplementarios tienen la misma ordenada, mientras que el coseno sí que cambia de signo, puesto que las abscisas son opuestas. Como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno también cambia de signo:

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha\,. \tag{28}$$

Ejemplo 3. Ángulo suplementarios

El ángulo suplementario de 60° es 120°, puesto que ambos suman 180°. O en radianes $\pi/3$ es el suplementario de $2\pi/3$, puesto que ambos, equivalente a los anteriores ángulos expresados en grados sexagesimales, suman $\pi/3 + 2\pi/3 = 3\pi/3 = \pi$.

Ángulos que difieren en π radiantes: α y $\alpha + \pi$

Para los ángulos que difieren en π radiantes (ó 180°), cambia de signo tanto la ordenada como la abscisa, por tanto la relación entre las razones trigonométricas será:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha\,, \tag{29}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha\,, \tag{30}$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha\,. \tag{31}$$

La tangente no cambia de signo puesto que tanto el seno como el coseno cambian de signo.

Ángulos complementarios

Los ángulos complementarios son aquellos que suman $\pi/2$ radianes (o 90°). Como se puede apreciar en la Figura 5, el seno de uno coincide con el coseno del complementario y viceversa, por lo que las tangentes serán inversas:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/2-\alpha) &= \cos\alpha\,,\\
\cos(\pi/2-\alpha) &= \sin\alpha\,,\\
\tan(\pi/2-\alpha) &= \tfrac{1}{\tan\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{32}$$

Ejemplo 4. Ángulos complementarios

Son ángulos complementarios 30° y 60°, puesto que ambos suman 90°, o expresado en radiantes, $\pi/6$ y $\pi/3$ son complementarios, puesto que:

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi+2\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\,. \tag{33}$$

Ángulos opuestos

El ángulo opuesto de un ángulo dado α se representa por $-\alpha$ y es aquel que se recorre en el sentido negativo, esto es en el sentido horario. Las ordenadas son opuestas, por los que los senos serán iguales, pero de signo contrario, mientras que las abscisas coinciden, por lo que los cosenos serán iguales con el mismo signo. Las tangentes también serán iguales, pero de signo opuesto:

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\,,\\
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\,,\\
\tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

2.7 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios relacionados con lo visto en este tema.

Ejercicio 1. Convierte a grados sexagesimales el ángulo en radianes de $\frac{2\pi}{5}$. *Solución*: 72°.

Ejercicio 2. Convierte el ángulo expresado en grados sexagesimales de 10° a radianes. *Solución*: $\frac{\pi}{18}$.

Ejercicio 3. Dado el triángulo rectángulo ABC, rectángulo en el ángulo A, se conoce que $a = 5$ cm y $B = 41.7°$. Encuentra los otros ángulos y lados. *Solución*: $C = 48.3°$, $b = 3.3261$ cm, $c = 3.7332$ cm.

2.8 Referencias bibliográficas

Vázquez-Bautista, O. et al. (2020). Identidades trigonométricas. *Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3*, 7(14), 33–34.