Física I

Magnitudes y unidades físicas

Índice

Esquema

MAGNITUDES Y UNIDADES FÍSICAS

Definición de magnitud: tipos fundamentales:
- Fundamental/derivada
- Intensiva/extensiva
- Escalar/vectorial/tensorial

Operaciones básicas con vectores:
- Definición
- Expresión de coordenadas. Concepto de base y vector unitario
- Suma y resta
- Producto de un vector por un escalar
- Producto escalar

Errores de medida:
Consciencia de su inevitabilidad. Tipos:
- Fundamental/derivada
- Intensiva/extensiva

Método de cálculo de errores:
- Tomar tres medidas
- Calcular % de dispersión (T)
- Según valor de T, hacer hasta 50 medidas y se calculan los errores.

Método de cálculo de errores:
- Tomar tres medidas
- Calcular % de dispersión (T)
- Según valor de T, hacer hasta 50 medidas y se calculan los errores.

Las unidades forman parte de sistemas de unidades que las clasifican en fundamentales y derivadas

Sistemas de unidades mecánicos (MKS, CGS, Técnico). Sistemas de unidades electromagnéticos
- MKSA (3 ud mecánicas + 1 eléctrica)
- Electrostático, electromagnético y simétrico) 3 ud mecánicas, basados en el CGS)

Sistema Internacional de Unidades:
MKSA ampliado. Magnitudes fundamentales: metro, kilogramo, segundo, amperio, grado kelvin, mol, candela + radián y estereorradián

Ecuaciones dimensionales: permiten conocer cómo dependen las variables derivadas de las fundamentales. Con magnitudes se opera igual que con números salvo ciertas reglas distintas.

Ley de homogeneidad: las ecuaciones físicas han de ser dimensionalmente homogéneas.

Aplicaciones: saber las unidades de las constantes físicas, saber si una ecuación es correcta o no.

Aplicaciones dimensional: derivado de estos conceptos, su base es el teorema pi de Vaschy-Buckingham. Herramienta poderosa que permite diseñar experimentos, simplificarlos y obtener ecuaciones experimentales.

1.1. Introducción y objetivos

Este tema tiene carácter introductorio. A lo largo de los cinco apartados siguientes se tratan cuestiones preliminares necesarias para comprender conceptos físicos más avanzados. Después de haber leído y asimilado estas ideas clave, serás capaz de:

- Conocer el concepto de magnitud en física y saber los tipos más importantes.
- Dominar el concepto de sistema de unidades físicas, conocer los tipos más relevantes y saber qué es el Sistema Internacional de Unidades y por qué debe utilizarse.
- Saber realizar cambios de unidades de todo tipo de magnitudes.
- Saber escribir las ecuaciones dimensionales de las magnitudes físicas.
- Conocer la ley de homogeneidad dimensional.
- Conocer los puntos esenciales del análisis dimensional: su teorema fundamental y sus aplicaciones más relevantes.
- Adquirir conciencia de la importancia de los errores de medida en la experimentación. Saber estimar su valor y conocer las convenciones existentes para expresar los resultados experimentales.
- Saber qué es un vector y poder realizar las operaciones básicas con los mismos, ya que debes emplearlos a lo largo de todo el curso.

1.2. Magnitudes en física: definición y tipos

En física, se denomina magnitud a toda característica de un cuerpo que se puede medir. En concreto:

> Una magnitud física es una cualidad de un objeto a la que puede asignársele un valor numérico (o vectorial, o tensorial) por comparación con esa misma cualidad que posee otro objeto patrón que define una unidad de esa magnitud. Esa comparación, en esencia, sería «medir».

Por ejemplo, la longitud de un bloque de madera sería una magnitud física, ya que es posible asignarle un valor numérico por comparación con una longitud patrón (un centímetro, un metro).

Para que una cualidad pueda considerarse **una magnitud física medible**, ha de ser posible realizar las siguientes operaciones experimentales:

- **Igualdad**: debe ser posible, experimentalmente, saber si dos objetos cualesquiera tienen el mismo valor de la magnitud.
- **Graduación**: ha de poderse medir en laboratorio si el valor de una magnitud para un objeto es mayor o menor que el valor de tal cualidad de otro.
- **Escalas**: debe poder crearse una escala, esto es, asignar un valor a la magnitud que posea un objeto (por ejemplo, 20), otro valor a un objeto cuya magnitud tenga un valor mayor (pongamos, 50) y deberá ser posible dividir este intervalo en partes iguales, cada uno de los cuales podría ser una **unidad de medida**.
- **Incrementos comparables**: finalmente, deben existir procedimientos que permitan saber si la diferencia de magnitudes entre los objetos 1 y 2 es la misma o distinta de la diferencia entre los objetos 3 y 4.

Estos puntos son triviales con una magnitud como **la longitud** —para cumplir los cuatro requisitos anteriores basta medir con una regla las longitudes de diferentes objetos—, pero no lo son tanto para otro tipo de magnitudes.

Las magnitudes se pueden clasificar de muchas maneras. En el presente curso se analizarán tres de estas clasificaciones:

- La **primera** resulta básica en los laboratorios. Según está clasificación las magnitudes pueden ser **fundamentales o derivadas**:

  Una magnitud fundamental es aquella que puede definirse sin recurrir a otra magnitud. Una magnitud derivada es aquella que debe calcularse midiendo los valores de varias magnitudes, relacionados entre sí por una ecuación.

  Por ejemplo, la longitud de un cuerpo es una magnitud fundamental y la velocidad numérica media una derivada que se calcula dividiendo el espacio recorrido por un cuerpo entre el tiempo que tarda en hacerlo.

  Es muy importante destacar que, según los procedimientos experimentales usados, se podrá definir una serie distinta de magnitudes fundamentales. Por ejemplo, si bien lo más habitual es que se consideren fundamentales el espacio, el tiempo y la masa, si se dispusiera de un dispositivo que diese directamente la velocidad de un cuerpo, se podrían considerar como fundamentales la velocidad y el tiempo, y calcular el desplazamiento como la velocidad multiplicada por el tiempo.

- **Otra clasificación** importante, en especial en termodinámica, es la que divide las magnitudes físicas en **intensivas y extensivas**:

  Una magnitud es intensiva si su valor no varía al considerar una parte del sistema termodinámico o su totalidad. En cambio, es extensiva si su valor depende de la parte del sistema considerada.

Por ejemplo, en un sistema en equilibrio termodinámico, la temperatura es intensiva y el volumen extensivo, ya que la temperatura es uniforme en todo el sistema mientras que el volumen depende del tamaño de la parte del sistema considerado.

- Una **tercera clasificación** fundamental, en especial en cinemática y dinámica, tiene que ver con qué elemento matemático queda determinado **el valor de una variable**:

Una magnitud es escalar si basta un número (un escalar) para determinarla. Si una variable requiere, además, la indicación de una dirección y un sentido y, por ello, se expresa como un vector se llama vectorial. Una magnitud para la que sea necesaria mayor información y, por tanto, debe describirse con un tensor se denomina tensorial.

Un ejemplo de magnitud **escalar** es la masa. Esta queda determinada si se dice, por ejemplo, que un objeto tiene 6 kg. Una magnitud vectorial típica es la velocidad. Si solo se dice que un cuerpo se mueve a 100 km/h, faltaría información importante. Por ejemplo, cambia mucho decir que un camión se aleja de un automóvil a 120 km/h a decir que se acerca al automóvil a 120 km/h.

En el presente curso no se efectuarán operaciones con tensores, de los que ahora mismo solo interesa saber que existen. Los tensores se usan en distintos campos de la ingeniería, en particular, en dinámica del sólido rígido o a la hora de tratar cuerpos sometidos a esfuerzos (fuerzas y tensiones internas). Normalmente, un tensor se utiliza cuando es necesario describir una magnitud que combina varios vectores.

Un ejemplo de magnitud tensorial es el **tensor de esfuerzos**. Dada una parte cúbica de un objeto estático sometido a diferentes fuerzas, sabiendo que la fuerza que sufren las caras opuestas es la misma, podremos determinar la tensión a la que está sometido indicando tres fuerzas. Como cada fuerza está descrita por un vector, que queda caracterizado por tres coordenadas, se puede determinar estas tres fuerzas implicará conocer nueve números, que suelen ordenarse en forma de matriz de tres filas y tres columnas. De ahí que deba usarse un tensor para saber a qué esfuerzos se halla sometido un cuerpo como, por ejemplo, un pilar de un puente.

1.3. Sistema Internacional de Unidades. Cambios de unidades

Como se deduce de la sección anterior, en física es fundamental el uso de unidades de medida, hasta tal punto que un valor sin su unidad carece de sentido. Decir que la velocidad de un móvil es de 25 es inútil: es preciso decir 25 m/s o 25 Km/h. Asimismo, conocer las equivalencias entre diferentes unidades y saber convertir de unas a otras es vital. Finalmente, es preciso conocer a fondo el **Sistema Internacional de Unidades**, que es el más usado y el más recomendable.

Sistemas de Unidades

Un Sistema de Unidades es un conjunto de unidades físicas de medida en el cual, unas pocas se consideran fundamentales y el resto se definen como combinaciones algebraicas de este grupo de unidades fundamentales.

La elección del conjunto de unidades fundamentales es, hasta cierto punto, arbitraria, en el sentido de que suele ser posible elegir varios conjuntos. En el siguiente apartado «1.4. Ecuaciones dimensionales. Ley de homogeneidad» se explicará que las combinaciones algebraicas de unidades fundamentales, que definen otras unidades derivadas, quedan definidas por las ecuaciones físicas involucradas. En principio, se usan en física varios sistemas de unidades.

Un **sistema mecánico de unidades** es aquel que define las unidades fundamentales útiles para la parte de la física denominada mecánica.

Los sistemas mecánicos de unidades se dividen en dos tipos principales: los que eligen como magnitudes fundamentales la longitud, el tiempo y la masa (MKS y CGS son los más usados) y un segundo tipo donde las magnitudes fundamentales son la longitud, el tiempo y la fuerza (sistema técnico).

El más utilizado, ya que es la base del **Sistema Internacional**, es el **MKS**, llamado así porque sus unidades fundamentales son el **metro, el kilogramo y el segundo** para la longitud, la masa y el tiempo, respectivamente. Por tanto, las unidades de otras magnitudes físicas de interés, como la fuerza, la potencia o la presión se definen como combinaciones de las tres mencionadas.

El sistema **CGS** es aquel basado en el **centímetro, el gramo y el segundo**. Aunque se ha usado tradicionalmente en física teórica, apenas se utilizará a lo largo del curso. Será suficiente conocer sus unidades más representativas y cómo convertirlas al Sistema Internacional. Los nombres de las unidades más representativas son:

- La **dina**, unidad de fuerza.
- El **ergio**, unidad de energía o trabajo.
- El **poise**, unidad de viscosidad.
- El **bar**, unidad de presión (usada bastante en meteorología).

El **sistema técnico** es aquel cuyas unidades fundamentales son el metro, el segundo y el kilopondio. Esta última es una unidad de fuerza. Se usa tradicionalmente en ingeniería y disciplinas afines.

Un **sistema electromagnético de unidades** es aquel que define las unidades que se necesitan para describir las magnitudes de utilidad en electromagnetismo. El más usado es el MKSA, cuyas unidades fundamentales son el metro, el kilogramo, el segundo y el amperio (unidad de intensidad eléctrica). Esto es, se trata de un sistema MKS al que se le ha añadido una unidad electromagnética. Este sistema tiene diversas ventajas, como, por ejemplo, que permite escribir las ecuaciones básicas del electromagnetismo sin que aparezcan constantes como la velocidad de la luz o π, de ahí que los otros apenas se utilicen.

Los sistemas electromagnéticos se dividen en **dos grandes tipos**: los que se basan en tres unidades mecánicas y una electromagnética, como el MKSA, y los que se basan solo en tres unidades mecánicas. Los más importantes de esta segunda clase son el **sistema electrostático, el sistema electromagnético y el sistema simétrico**, que engloba a los otros dos al tomar las eléctricas del primero y las magnéticas del segundo. Estos tres sistemas se basan en el sistema CGS.

Las unidades derivadas del sistema MKSA se definen y estudian en los temas correspondientes. A modo de ejemplo, son unidades de este sistema el ohmio (resistencia), el voltio (campo eléctrico) o el culombio (carga eléctrica).

El Sistema Internacional de Unidades

Existen multitud de sistemas de unidades, con sus diferentes ámbitos de aplicación. Sin embargo, a nivel internacional se recomienda una extensión del sistema MKSA para incluir unidades de utilidad en termodinámica y fotometría. Se denomina el **Sistema Internacional de Unidades**, y fue recomendado en 1960 por la Conferencia General de Pesos y Medidas.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) es aquel cuyas unidades básicas son: el metro, el kilogramo, el segundo, el amperio, el grado Kelvin, el mol y la candela.

El metro y el kilogramo nos permiten definir muchas otras magnitudes, como el volumen o la densidad. El grado Kelvin y el mol (unidad de cantidad de materia) se emplean en termodinámica, mientras que la candela es la unidad básica de intensidad luminosa.

Es buena práctica usar siempre el Sistema Internacional de Unidades en los ejercicios y trabajos de física. Por ello, es recomendable que, si los datos de un problema vienen expresados, por ejemplo, en centímetros o gramos, se pasen a las unidades básica del Sistema Internacional. De esta forma, si se pide calcular la fuerza en función de aceleraciones, masas y distancias, si desde el principio se usa el SI, el resultado estará expresado, automáticamente, en newtons.

El Sistema Internacional establece dos unidades más que pueden considerarse auxiliares. Son el **radián (rad)**, para la medida de ángulos y el **estereorradián (sr)**, para la medida de ángulos sólidos.

Cambios de unidades

Por la gran diversidad de sistemas de unidades existentes y por el hecho de que las unidades físicas tienen rangos de aplicación, es necesario conocer las equivalencias entre unas unidades y otras. Por ejemplo, aunque la unidad de longitud del SI es el metro, no es práctico medir el tamaño de una bacteria en metros, aunque sea recomendable usar esta unidad en las ecuaciones físicas. Como los cambios de unidades suelen estudiarse en la educación secundaria, esta sección se centra en recordarlos y en abordar las conversiones más complejas.

Existen una serie de **prefijos que modifican el valor de la unidad** a la que se antepone multiplicándola por una potencia de diez. Los más usuales son:

Giga	Mega	Kilo	Hecto	Deca	Deci	Centi	Mili
10^9	10^6	10^3	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

Así, un centigramo serían 0,01 g, mientras que un kilómetro son 1000 m.

Se pueden dividir los cambios de unidades en **dos tipos**.

- El **primer tipo de cambio de unidades** es el más básico: es saber convertir unidades con estos prefijos entre sí. La norma general es que si se pasa de una unidad pequeña a una mayor hay que dividir por 10 las veces que sea necesario, y habrá que multiplicar cuando se exprese una unidad grande en otra menor. Así, pasar de hectómetros a centímetros implicará multiplicar por 10.000 y pasar de milímetros a metros implica dividir por 1.000. Aunque sean conversiones muy elementales, es vital hacerlas bien para poder abordar con éxito otras más complejas.

- El **segundo tipo de conversiones de unidades** es la conversión de magnitudes derivadas. Por ejemplo, pasar de julios (unidades de energía del SI) a ergios (unidades de energía del sistema CGS). O algo muy frecuente: cambiar de Km/h a m/s. Debe destacarse que las conversiones solo pueden realizarse entre unidades que representen la misma magnitud. En principio, no se pueden convertir newtons (unidades de fuerza) en bares (unidades de presión). El procedimiento a seguir es el siguiente:

Para **convertir una unidad** de una magnitud derivada en otra hay que seguir los siguientes pasos:

- Conocer su expresión en función de unidades fundamentales.
- Ir convirtiendo, una a una, las unidades fundamentales de la magnitud de origen en las de la magnitud de destino de la conversión, con lo que irán apareciendo factores al cambiar una unidad por otra.
- Finalmente, se hacen las operaciones pertinentes entre los factores obtenidos en el paso anterior por la cantidad de unidades originales, para dejar un único factor numérico.

Como es natural, este procedimiento no es necesario cuando nos limitamos a anteponer un prefijo de los vistos anteriormente al nombre de una unidad, ya que en tal caso, se usa la regla elemental. Así, para convertir milipascales en pascales, por ejemplo, basta con dividir por mil, aunque, el pascal, sea una unidad de presión, derivada por tanto.

Para aclarar este método, se plantean **dos ejemplos** de conversión.

Ejemplo 1. Convertir 120km/h en m/s

Será un caso muy habitual, ya que la unidad de velocidad más utilizada en la vida cotidiana es el km/h, al ser la referencia en la legislación de Tráfico, pero la unidad de velocidad del SI es el m/s.

En este caso, el paso 1 ya está definido: la velocidad tiene unidades de espacio dividido entre el tiempo.

El paso 2 implica la conversión de Km a m y de horas a segundos y tener en cuenta que el espacio se divide por el tiempo; el paso 3 implica multiplicar 120 por los números que han aparecido con cada cambio. Una forma de expresarlo es la siguiente:

$$120\ km/h = \frac{120km}{1\ hora} = \frac{120\ \cdot 1000m}{3600s} = \frac{120000m}{3600s} = 33{,}333\ m/s$$

Ejemplo 2. Convertir 500 dinas en newtons

Dado que el newton es la unidad de fuerza del SI, lo más normal será convertir las dinas en newtons. El primer paso supone conocer las definiciones de ambas unidades en función de las fundamentales:

1 N = 1 kg m/s2
1 dyn = 1 g cm/s2

Los pasos dos y tres se esquematizan de la misma forma que en el ejemplo precedente:

$$500\ dyn = \frac{500\ g\ cm}{1\ s^2} = \frac{500 \cdot\ 10^{-3} kg \cdot\ 10^{-2} m}{1\ s^2} = \frac{500 \cdot\ 10^{-5} kg \cdot m}{1\ s^2} = 0{,}005\ N$$

1.4. Ecuaciones dimensionales. Ley de homogeneidad

El concepto de ecuación dimensional se ha apuntado en el apartado dedicado a la conversión de unidades, sin embargo, es mucho más útil e importante que permitir conversiones de unidades. De hecho, dada una ecuación física, debe cumplirse obligatoriamente que **las unidades a un lado del signo igual deben ser las mismas que las presentes en el otro lado**. En caso contrario, la ecuación estará mal. En esta parte del tema, se introducen estos conceptos fundamentales.

Ecuaciones dimensionales de las magnitudes físicas

Se denomina ecuación dimensional de una magnitud física derivada a la ecuación que expresa sus unidades en función de las unidades fundamentales de las cuales deriva.

Para denotar las magnitudes fundamentales se utilizan, por convenio, los siguientes símbolos:

Magnitud	Símbolo
Longitud	L
Masa	M
Tiempo	T
Temperatura	θ
Intensidad	I
Intensidad luminosa	J
Mol	N

De esta forma, por ejemplo, la ecuación dimensional de la velocidad, que se define como el espacio dividido por el tiempo, es:

$$[v] = L\,T^{-1}$$

Conociendo la ecuación que define una magnitud física, podremos calcular sus dimensiones sustituyendo, en la misma, cada magnitud con sus unidades, y operando con ellas como si fueran números, con las siguientes salvedades:

- Las unidades no se suman ni se restan. Esto es: L+L=L y no L+L=2L.
- Dos términos solo se pueden sumar o restar si tienen las mismas dimensiones. Esto es, L no puede sumarse con T.
- Las constantes no físicas se consideran adimensionales, esto es, se sustituyen por 1 en las ecuaciones dimensionales.
- Las funciones trigonométricas y los ángulos también se consideran adimensionales.
- Los exponentes, aunque contengan magnitudes físicas, han de ser adimensionales.
- En lo que respecta a la multiplicación y la división, las dimensiones se tratan como si fueran constantes, esto es:

$$[A\,B] = [A][B]$$

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]}$$

$$[A^n] = [A]^n$$

Las ecuaciones dimensionales, aparte de proporcionar expresiones de las unidades derivadas a partir de las fundamentales, permiten comprobar la corrección de las ecuaciones físicas y otras operaciones. El motivo deriva del principio de homogeneidad dimensional.

Principio de homogeneidad dimensional o principio de Fourier

Recibe este segundo nombre porque Fourier fue el primer físico que se ocupó de este asunto.

El principio de homogeneidad dimensional o ley de homogeneidad establece que toda ecuación física ha de ser homogénea desde el punto de vista de las unidades de las magnitudes que relaciona. Esto es, a ambos lados de la igualdad, las dimensiones han de ser las mismas y solo es posible sumar o restar términos con las mismas unidades.

Este principio proporciona **dos herramientas** de gran importancia:

- La primera es que permite saber si una ecuación física es correcta o no. Una ecuación como la siguiente:

  $$e = mt + vt,$$

  Es incorrecta porque el término mt tiene como dimensiones MT, mientras que vt tiene dimensiones de L, con lo que no se pueden sumar.

- La segunda es que permite calcular las unidades de las constantes físicas, que no suelen ser adimensionales. Como ejemplo, se calcularán las dimensiones de la constante de gravitación universal, G, presente en la ecuación:

  $$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

Despejando la G, queda:

$$G = \frac{F\,r^2}{mm'}$$

Y sustituyendo las dimensiones de cada magnitud:

$$[G] = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = L^3T^{-2}M^{-1}$$

Otras aplicaciones del análisis dimensional

Un uso más avanzado del análisis dimensional se centra en el diseño de experimentos y en la obtención de ecuaciones físicas experimentales. Estos empleos se basan en el teorema más importante del análisis dimensional: el **teorema π de Vaschy-Buckingham**, del que se incluirá solo una explicación cualitativa, debido a su complejidad:

El teorema π de Vaschy-Buckingham establece que dada una ecuación física que involucra un número m de magnitudes físicas, si estas variables se pueden expresar en términos de n magnitudes dimensionalmente independientes, la ecuación original se puede reescribir en forma de una expresión con m-n constantes adimensionales, formadas por combinaciones de las magnitudes originales, y por n magnitudes «básicas» que suele ser posible elegir libremente.

Por ejemplo, si se tiene que, experimentalmente, una magnitud depende de cinco magnitudes físicas, cada una de las cuales se deriva solo de longitud, masa y tiempo, será posible escribir una ecuación que contenga tres de las cinco, elegidas libremente, y dos constantes adimensionales creadas con las cinco magnitudes del problema. Esto resulta muy útil para simplificar los experimentos.

Otra aplicación de este teorema es que si se crea una fórmula en la que aparece una magnitud que no afecta a la que se está midiendo, a la hora de calcular la ecuación simplificada, tal magnitud asignada incorrectamente desaparecerá de los cálculos (quedará con un exponente igual a cero, esto es, no figurará en las ecuaciones).

No obstante, este teorema no podrá dar, en general, ecuaciones completas y perfectamente determinadas, cosa para la que habrá que recurrir a la física teórica, dado que no puede determinar si las constantes adimensionales tienen sentido físico.

1.5. Medición de magnitudes: definición del concepto de error

Aunque la física tiene un componente teórico muy sólido e importante, es una ciencia experimental. La experimentación implica medir, por diferentes procedimientos, magnitudes físicas o, dicho de otro modo, fenómenos naturales. Un concepto que siempre ha de estar presente es que toda medida conlleva la aparición de errores de medida.

Los experimentadores saben que diferentes aparatos de medida tienen sensibilidades diferentes y que dos mediciones en las mismas condiciones, generalmente, darán resultados distintos. En esta parte del tema se introducen los conceptos básicos y las formas de denotar los errores de medida, y servirán de punto de partida a la hora de realizar sesiones prácticas en el laboratorio.

Definiciones básicas sobre errores

Se denomina **error absoluto** de una medida a la diferencia entre el valor real y el medido. Se denota como:

$$\Delta x = x_m - x$$

Donde xm es el valor medido y x el real.

Aunque el concepto de error absoluto (que puede ser un número positivo o negativo) es el más intuitivo y esencial, no sirve para averiguar la calidad de una medida. Un error absoluto de 1 cm al medir un objeto de 5 cm no es lo mismo que uno de 1 cm al medir una distancia de varios kilómetros. Por ello, se introduce el siguiente concepto:

Se denomina **error relativo** de una medida al cociente entre el error absoluto y el valor medido:

$$e_{rel} = \frac{\Delta x}{x_m}$$

Hay que destacar que estas definiciones son teóricas, en el sentido de que, en realidad, no se sabe cuál es el valor real de una medida. En la práctica, como se explica posteriormente, se usa como valor real la media de un número de mediciones concreto.

La existencia de los errores de medida, supone que no es posible conocer nunca el valor real de una medida, de manera que lo único que se podrá afirmar es que el valor real está dentro de un intervalo de valores.

Se llama **intervalo de confianza** al intervalo dentro del que se puede hallar el valor verdadero de una magnitud. Si e_{min} es el máximo error por defecto y e_{max} el error máximo por exceso, el valor real de la magnitud medida, x, cumplirá:

$$x_m - e_{min} \leq x \ \leq x_m - e_{max}$$

Donde *xm* es el valor medido. Como, normalmente, $e_{min} = e_{max} = \ \Delta x$, las medidas se denotarán:

$$(x_m \pm \Delta x)\ ud$$

Siendo *ud* la unidad de medida (metros, newtons…).

Como se desprende de esta definición, una medida será más precisa mientras menor sea su intervalo de confianza.

Introducción a los tipos de errores experimentales

En lo que respecta a la física experimental, se distinguen **dos grandes categorías** de errores: los errores sistemáticos y los errores accidentales.

Los errores sistemáticos son aquellos originados por errores en el procedimiento de medida provocados por los instrumentos o el observador. Los errores accidentales de medida son aquellos que se deben a causas externas imprevistas y no a fallos del procedimiento experimental.

Los **errores sistemáticos** se pueden corregir y suelen estar provocados por métodos experimentales inadecuados (es común no tener en cuenta ciertos efectos que afectan a la medida), errores del instrumento (aunque un instrumento esté en perfecto estado, siempre tendrá cierto error, ya que el valor real de una medida es inaccesible), errores de calibración del instrumento (cuando este necesite calibración, esto es, necesite el ajuste de su escala haciendo una medición de un patrón) o por errores humanos (la persona que para el cronómetro tiende a apresurarse, por ejemplo).

En cambio, los **errores accidentales** se producen aunque el montaje experimental sea correcto y no es posible controlarlos o evaluarlos. Pueden tener causas muy diversas. Por ejemplo, un experimento de medición de sonidos muy tenues podría verse alterado si en el momento de las mediciones pasa cerca del laboratorio una moto cuyo tubo de escape suene con fuerza.

Es posible calcular de manera aproximada los errores sistemáticos, pero muy difícil hacer lo propio con los accidentales, aunque estos cumplen características derivadas de su carácter aleatorio, en particular que a medida que aumenta el número de mediciones los errores tienden a compensarse entre sí y su promedio disminuye.

Metodología para calcular los errores experimentales y convenciones para expresarlos

En este último apartado, se explican las convenciones que se toman en física para la expresión de las medidas experimentales y la manera en la que se calculan los intervalos de confianza.

Este método está basado en procedimientos estadísticos, ya que supone que los errores accidentales siguen una distribución normal de probabilidad. Es una convención, en el sentido de que podría definirse y expresarse de otra forma. En esencia, este método tiende a ser conservador y sobreestimar ligeramente los errores, para asegurar que nunca quede el valor real fuera del intervalo. Los **pasos a seguir** son los siguientes:

- **Paso 1: Realizar tres medidas**

  Este paso es fundamental. En todo experimento es imprescindible realizar al menos tres medidas de la magnitud deseada. Una única medida resulta inútil, con la excepción de la operación de contar, que se supone libre de error.

- **Paso 2: Calcular la dispersión y la media aritmética de las tres medidas**

  La dispersión es la diferencia entre el valor máximo y mínimo de las medidas recogidas y se puede denotar por D.

- **Paso 3: Comparar D con el error instrumental**

  Si D es menor que el error instrumental se termina el proceso, ya que se supone que las causas de los errores son sistemáticas. El error de la medida será este error instrumental o sensibilidad del aparato (esto es, la cantidad mínima de magnitud que el aparato puede medir). Tal parámetro vendrá indicado generalmente en las especificaciones del instrumento o será posible averiguarlo fácilmente. Por ejemplo, en una regla que mida hasta el milímetro, el error instrumental será 1 mm.

Si D es mayor que tal error instrumental, se calcula el porcentaje de dispersión (T) según la fórmula:

$$T = \frac{100 \cdot D}{\bar{x}}$$

Donde $\bar{x}$ es la media de las medidas realizadas. Según tal porcentaje:

T (porcentaje de dispersión)	Núm. de medidas necesarias	Error
T<2%	3	Error instrumental
2%<T<8%	6	El mayor de estos dos valores: D/4 o el error instrumental
8%<T<15%	15	σ_x
T>15%	50	$\sigma_x/\sqrt{N-1}$

El parámetro σ_x se denomina desviación típica o estándar o error cuadrático medio y vale:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}$$

Donde N es el número de medidas y x_i el valor de cada una de las medidas.

Existen normas precisas, fijadas por convenio, para expresar los resultados experimentales. El resultado de una medida, siendo ud las unidades de medida, se expresará siempre así:

$$(\bar{x} \pm \Delta x)\ ud,$$

Donde $\bar{x}$ es la media de los valores medidos (sea 3 o 50) y Δx el error determinado según la tabla anterior. El valor de Δx deberá cumplir:

- Ha de expresarse con una única cifra significativa. Por ejemplo: 0,02 o 20, nunca 0,037. En caso de que el error calculado tenga más cifras significativas, deberá redondearse, añadiendo una unidad si el segundo dígito es 5 o mayor, o truncándose si es menor de 5. Así, por ejemplo, 0,035 pasa a 0,04, pero 0,032 pasa a 0,03.
- La única excepción a la regla anterior es que si la primera cifra significativa es 1, no se hace redondeo a una sola cifra y se expresa el error con dos cifras, y si es 2 y la cifra siguiente es 4 o menor, tampoco se redondea y se expresa el error con dos cifras. Así, un error de 0,0166 se expresaría 0,017 y uno que valiese 0,2341 quedaría como 0,23.

En cuanto a $\bar{x}$, solo podrá tener los decimales suficientes como para que su último decimal o cifra significativa sea del mismo orden que la última cifra significativa del error. En caso de tener más, deberá redondearse de la manera comentada anteriormente. Los siguientes ejemplos aclaran la cuestión:

Valor original incorrecto	Expresión correcta
(3,45676 ± 0,028)	(3,46 ± 0,03)
(12.432 ± 570)	(12.400 ± 600)
(9,5 ± 0,0077)	(9,500 ± 0,008)

Hay que tener en cuenta que, debido a estas convenciones, no será lo mismo escribir un error de 0,02 que otro de 0,020. En el segundo caso, el valor medio deberá expresarse hasta la milésima, mientras que en el primero, se tendrá que escribir el valor de la medida hasta la centésima.

Se dará fin a este apartado con un ejemplo que aclarará este método de cálculo de los resultados de una medida.

Ejemplo

Se quiere determinar el tiempo que tarda en llegar al fondo de un barreño grande lleno de agua un objeto. Se hacen tres medidas y los resultados son:

Medida núm.	1	2	3
Resultado (s)	44	47	49

Se sabe, por tanto, que:

- Media: $\bar{x} = \frac{44+47+49}{3} = 46{,}6667$
- Dispersión: $D = 49 - 44 = 5$
- Porcentaje de dispersión: $T = \frac{100 \cdot 5}{46{,}6667} = 10{,}71429\%$

Como T está comprendido entre el 8% y el 15%, es preciso realizar 15 medidas en total. Se hacen 12 medidas más, cuyos resultados son:

Medida núm.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resultado (s)	45	44,3	48,1	46	44,5	46,8	45,9	44,6	46	44,2	46,1	43,8

Se recalculan los tres parámetros: media, dispersión y porcentaje de dispersión y nos da:

- Media: 45,68667
- Dispersión: 5,2
- Porcentaje de dispersión: 11,3819%

Como el porcentaje de dispersión sigue siendo inferior al 15%, con estas medidas basta. Se calcula a continuación la desviación estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(45{,}68667 - 44)^2 + (45{,}68667 - 47)^2 + \cdots + (45{,}68667 - 43{,}8)^2}{14}} = 2{,}412667$$

Finalmente, el resultado de la medida es:

Tiempo = (45,68667 ± 2,412667) s

Que se debe expresar:

Tiempo = (45,7 ± 2,4) s

1.6. Operaciones básicas con vectores

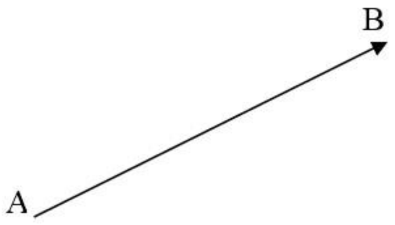
Debido al gran número de magnitudes físicas que se expresan por medio de vectores, es importante conocer sus características básicas y saber operar con ellos, del mismo modo que es fundamental saber realizar operaciones con números. Esta última sección del tema cubre las operaciones con vectores más relevantes en física y unos conceptos previos necesarios para describir y operar con vectores.

Definición de vector

Se denomina vector a un segmento rectilíneo en el cual se ha definido un sentido. Se suelen denotar con una letra mayúscula en negrita o con una letra con una flecha.

Por tanto, un vector constará de los siguientes elementos:

- Un origen o punto de aplicación (A).
- Un extremo (B).
- Una dirección, que será la recta que contiene al segmento.
- Un sentido, en el caso de la figura, de A a B.

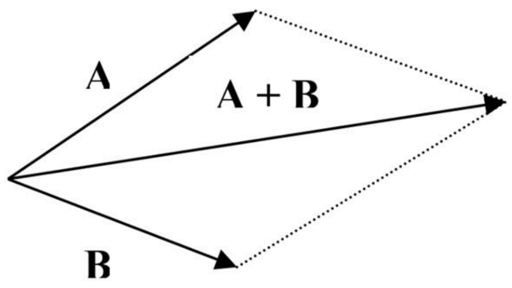


- Un módulo, que sería la longitud del mismo, o sea, la distancia entre A y B en la figura de ejemplo.

Con los vectores se pueden hacer multitud de operaciones, como con los números. Normalmente, se usarán para los cálculos las expresiones de los vectores con respecto a una base. Para introducir este concepto, hay que definir antes dos operaciones elementales: sumas y restas de vectores y productos de vectores por escalares.

Sumas y restas de vectores

Para sumar dos vectores de manera gráfica, hay dos maneras. La primera consiste en llevar a un mismo punto sus orígenes, completar el paralelogramo formado por ambos vectores y unir el punto origen común con el extremo opuesto del paralelogramo:



Equivalentemente, se pueden sumar vectores haciendo coincidir el extremo del primero con el origen del segundo y unir el origen del primero con el extremo del segundo. El resultado es el mismo.

Producto de un escalar por un vector. Vectores unitarios

Dado un vector **A**, el resultado de multiplicar **A** por un número real k consiste en un vector con la misma dirección y sentido y cuyo módulo o longitud es k veces el módulo del vector original.

Esta operación permite introducir y trabajar con el concepto de vector unitario.

Se denomina vector unitario a todo vector que tenga de módulo (longitud) uno. También son llamados versores. Se suelen notar con un acento circunflejo.

Dado un vector A, se puede obtener un vector unitario en la dirección y sentido del original dividiéndolo por su módulo:

$$\hat{a} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$$

Una vez definidos los conceptos de vector unitario, de suma y resta de vectores y de producto de un vector por un escalar, se puede introducir un concepto fundamental: el de **base**.

Concepto de base. Coordenadas cartesianas de un vector

Detrás del concepto de vector y de sus operaciones básicas existen unas construcciones matemáticas muy complejas. En realidad, un vector es un elemento de lo que se denominan **espacios vectoriales**, que son entes matemáticos con múltiples propiedades y aplicaciones. Como, en el presente curso, el interés se centra en saber operar con ellos, solo se incluirán las definiciones más elementales y se darán por ciertas propiedades y cuestiones que pueden demostrarse con rigor.

Se define espacio vectorial como un conjunto de vectores en el que hay definidas una serie de operaciones entre ellos. Uno de los conceptos fundamentales a la hora de trabajar con vectores es el de base.

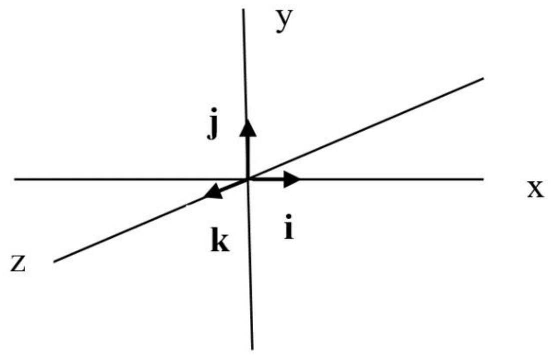
Se denomina **base de un espacio vectorial** a un número (normalmente reducido) de vectores tales que todo vector puede escribirse como combinación lineal de ese subconjunto de vectores que constituyen la base y a un punto del espacio, que sería el punto origen de la base.

Por combinación lineal se entiende, por ejemplo:

$$\vec{v} = 3\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}$$

Esto es, escribir un vector como suma de otros vectores multiplicados por números. Puede demostrarse que si el espacio vectorial tiene dimensión, por ejemplo, 3, el número mínimo de vectores de la base será también 3.

En física clásica se usarán siempre con vectores de tres dimensiones, dado que el mundo tiene tres dimensiones espaciales. Los tres vectores que forman la base se denotan: **i**, **j** y **k**. El primero está sobre el eje «x», el segundo sobre el eje «y» y el tercero sobre el eje «z» de un sistema de coordenadas cartesiano:



Un vector podrá escribirse, por ejemplo, así:

$$\vec{v} = 5\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}$$

Y los números: 5, 2 y -6 serán las **componentes cartesianas del vector**. En lo que sigue, se usarán siempre estas componentes para definir las operaciones y realizarlas de manera práctica.

Así, sabiendo las componentes de los vectores, todas las operaciones vistas hasta ahora se pueden realizar de forma numérica, sin tener que emplear gráficas. Sumar dos vectores implica sumar sus componentes:

$$\vec{v} + \vec{w} = (5\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}) + (3\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}) = 8\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - 4\,\boldsymbol{k}$$

Multiplicar un vector por un escalar es multiplicar cada componente por ese escalar:

$$3\,\vec{v} = 3\,(5\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}) = 15\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 18\,\mathbf{k}$$

Las componentes cartesianas permiten averiguar otros datos. Un buen ejemplo es el módulo del vector, que vale:

$$|(5\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k})| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2} = 8{,}06$$

Resulta importante destacar que, en los problemas prácticos, hay que indicar el origen de coordenadas de la base que se está utilizando, ya que las componentes cartesianas dependen del origen tomado.

Conocidos los conceptos de base y componentes cartesianas de vectores, podemos pasar a definir los dos últimos conceptos de este tema: el producto escalar y el producto vectorial.

Producto escalar

El producto escalar de dos vectores es una operación que dados dos vectores devuelve un número. Si a1, a2 y a3 son las componentes del primer vector y b1, b2 y b3 las del segundo, su producto escalar vale: A · B = a1 b1 + a2 b2 + a3 b3

El producto escalar cumple las siguientes propiedades:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$
$$\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{a}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{a}$$
$$(n\,\vec{v}) \cdot \vec{w} = n(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot (n\,\vec{w})$$
$$\vec{r} \cdot \vec{r} = 0 \text{ solo si } \vec{r} = 0$$

El producto escalar puede interpretarse como la operación que da la proyección de un vector sobre la dirección de otro. Por eso, existe una expresión alternativa para calcular el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cos \alpha$$

Donde α es el ángulo que forman ambos vectores. Esta expresión es de utilidad para calcular el ángulo entre dos vectores.

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores es una operación que dados dos vectores devuelve otro vector perpendicular, a la vez, a ambos operandos.

La expresión del producto vectorial en función de sus componentes es más complicada que para el caso del producto escalar. Dados dos vectores:

$$\vec{v} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$$
$$\vec{w} = a'\,\boldsymbol{i} + b'\,\boldsymbol{j} + c'\,\boldsymbol{k}$$

El producto vectorial de ambos, vale:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = (bc' - cb')\boldsymbol{i} + (ca' - ac')\boldsymbol{j} + (ab' - ba')\boldsymbol{k}$$

Se cumple la siguiente ecuación para el módulo del producto vectorial:

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| sen\ \alpha$$

Donde α es el ángulo que forman entre sí ambos vectores.

El producto vectorial cumple las siguientes propiedades:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$$
$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{a}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{a}$$
$$(n\,\vec{v}) \times \vec{w} = n(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (n\,\vec{w})$$

Aunque existen más conceptos sobre vectores y aplicaciones de los mismos, las operaciones y definiciones de esta parte del tema son las que más se utilizan en física clásica, y habrán de emplearse regularmente a lo largo del curso.