Camino óptimo
para búsqueda y rescate
de un objetivo "invisible"

Actividad de Cinemática Computacional

Física 1 – Grado de Física

Enunciado:

Supongamos que el centro de control de Salvamento Marítimo en un puerto recibe por radio el mensaje de socorro de una embarcación de recreo porque sus motores han fallado en un punto alejado de la costa que nos ha comunicado, y tras esa comunicación se ha perdido todo contacto posteriormente.

Necesitamos encontrar la embarcación, es de noche, y la visibilidad es prácticamente nula, por lo que podremos ver la embarcación cuando esté a escasos metros de distancia de una nave de rescate, de ahí que en el enunciado empleemos el término de objetivo "invisible".

Además de esa posición en un momento dado, que tomaremos por nuestro origen de coordenadas cartesianas ($x=0$, $y=0$) sabemos que la embarcación de recreo ha podido seguir aproximadamente un movimiento rectilíneo uniforme con una velocidad constante v_1 con dirección desconocida, producida por las corrientes marinas.

Nosotros podemos enviar un barco de rescate desde el momento que recibimos la llamada de emergencia ($t=0$). La nave de rescate llegará a ese punto reportado en un momento posterior ($t = t_c$) para el comienzo de la búsqueda. Nuestro barco de rescate mantendrá una velocidad constante $v_2 > v_1$.

La pregunta que debemos responder es la siguiente: una vez nuestro barco de rescate llega al origen de coordenadas, es decir, el último punto de posición conocido de la embarcación a rescatar, ¿cuál debe ser el rumbo a tomar con esa velocidad v_2 para asegurar que pueda llegar a tener contacto con el objetivo a rescatar?

Este tipo de problemas, también se presentan en la realidad en otro tipo de escenarios, como la optimización de trayectorias de un dron de búsqueda y reconocimiento, en búsqueda de una persona perdida, o un helicóptero antisubmarino.

Resolución teórica:

El objetivo ha podido moverse en cualquier dirección desde el instante t=0, tal y como se busca representar con algunas trayectorias posibles en la figura 1:

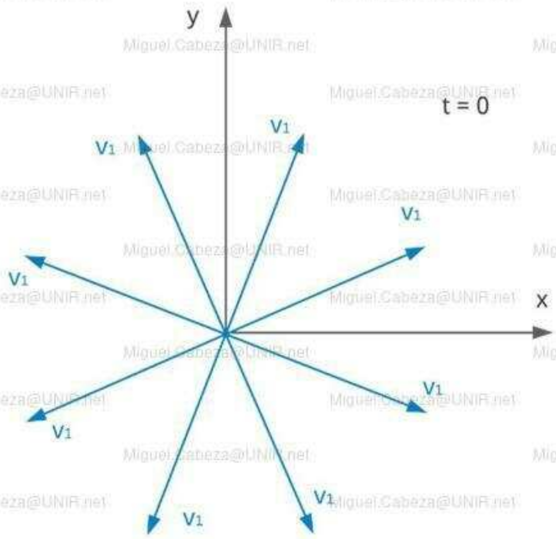


Figura 1. Algunas de las posibles trayectorias iniciales del objetivo.

Por lo tanto, vamos a tomar nuestro movimiento inicial desde el origen hacia los valores positivos del eje x, porque es equiprobable a cualquier otra dirección, y simplificaremos los cálculos. Sabemos entonces que la distancia al origen de nuestro objetivo, que denominaremos x_1, y nuestra distancia al origen, x_2, vendrán dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 \, t$$

$$\vec{x}_2 = \vec{v}_2(t - t_c) \quad \forall \; t > t_c$$

$$\vec{x}_2 = (0,0) \quad \forall \; t \leq t_c$$

También por simplificar, hemos supuesto que la llegada de la nave de rescate en un tiempo t_c equivale a $x_2 = 0$ cuando $t \leq t_c$, es decir, no tendremos en cuenta su movimiento previo antes de llegar al origen de coordenadas.

Gráficamente podemos representar el espacio recorrido frente al tiempo por los dos móviles según la figura 2, donde podemos ver que, si el objetivo hubiese seguido nuestro rumbo inicial, deberíamos alcanzarlo tras un tiempo de interceptación $t = t_i$ en el que habremos recorrido una distancia que denominaremos D.

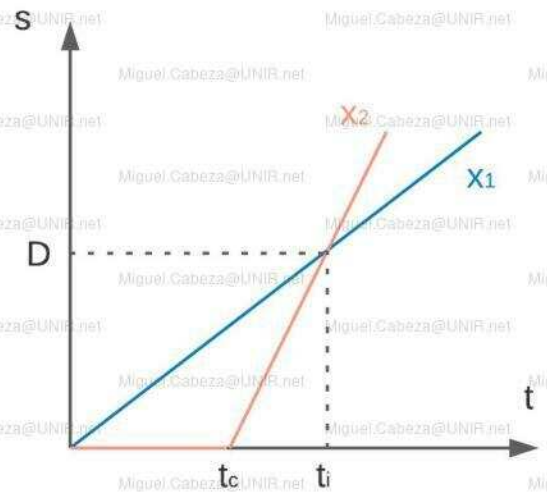


Figura 2. Hipótesis de distancias recorridas por ambos móviles inicialmente.

Cuando $x_1 = x_2$ habrán pasado un tiempo $t = t_i$, por lo que entonces tendremos:

$$v_1\, t_i = v_2(t_i - t_c) \;\; \therefore \;\; t_i = \frac{v_2\, t_c}{v_2 - v_1}$$

$$D = v_1\, t_i \;\; \therefore \;\; D = \frac{v_1 v_2 t_c}{v_2 - v_1} \quad (Ecuación\ 1)$$

En el hipotético caso en el que hubiésemos acertado con ese rumbo inicial, y hubiésemos interceptado el objetivo, habríamos cumplido nuestra misión, pero si no lo hubiésemos alcanzado, necesitaremos marcar un nuevo rumbo. Para este último caso, que es el más probable, supondremos que el objetivo tomó un rumbo adyacente al nuestro, que le ha dejado en la posición A, según se muestra en la figura 3, y le llevará tras un tiempo dt con su velocidad v_1 a una posición que podríamos alcanzar siempre que la dirección de nuestra velocidad v_2 apuntase a esa posición.

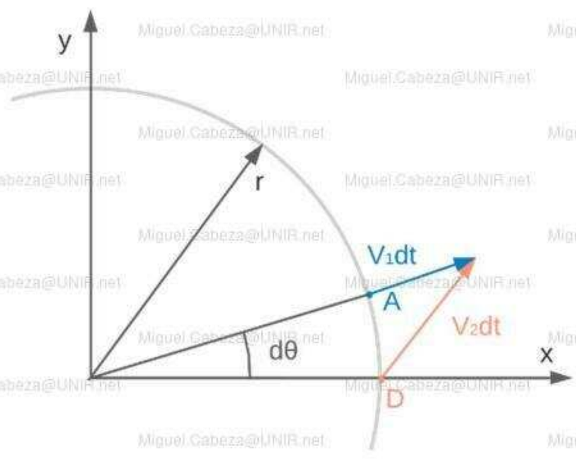


Figura 3. Cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

Para valores infinitesimales de tiempo, el segmento recto entre los puntos A y D se puede aproximar al arco de la circunferencia entre A y D, y además está relacionado con las dos velocidades por el teorema de Pitágoras, de forma que:

$$(v_2\,dt)^2 = (r\,d\theta)^2 + (v_1\,dt)^2 \quad \therefore \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{{v_2}^2 - {v_1}^2}}{r}$$

donde r es la coordenada radial en coordenadas polares, la distancia al origen, y θ la coordenada angular en coordenadas polares, el ángulo entre el eje de movimiento y el eje x.

Como vemos, al girar el vector de velocidad v_2 ha aparecido una velocidad angular ω, que varía de forma inversamente proporcional con la distancia al origen, es decir, según vamos ampliando el radio progresivamente, por no encontrar el objetivo, iremos reduciendo esta velocidad angular, que será máxima en el momento $t = t_i$ en el punto D, en el que r es mínimo y comenzamos a variar el rumbo en búsqueda del objetivo.

Además, de acuerdo con la figura 3, se deberá cumplir en el movimiento que la velocidad v_1 tiene que ser igual a la componente radial de nuestra velocidad de búsqueda en coordenadas polares:

$$\frac{dr}{dt} = v_1$$

Es decir, la estrategia de búsqueda consiste en descomponer nuestro vector velocidad v_2 en coordenadas polares, de forma que igualamos la componente de velocidad radial del objetivo, y podemos alcanzarlo gracias a una componente angular que nuestro objetivo no posee:

$$\vec{v}_2 = \frac{dr}{dt}\hat{r} + \frac{d(r\theta)}{dt}\hat{\theta} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

donde $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son los vectores unitarios ortogonales en coordenadas polares.

Vamos ahora a deducir una ecuación que describa las coordenadas polares en función del tiempo, así como una ecuación que exprese la coordenada radial en función de la coordenada angular. Ya sabemos que:

$$\frac{dr}{dt} = v_1 \quad \therefore \quad r = \int v_1 dt \qquad r = v_1 t + k_1$$

Y disponemos de la condición $r(t_i) = D$, por lo que $k_1 = -v_1\, t_i + D$ y podemos afirmar entonces que:

$$r(t) = v_1(t - t_i) + D \quad \forall\ t > t_i \quad (Ecuación\ 2)$$

$$r(t) = v_2 t \quad \forall\ t_c < t \leq t_i$$

$$r(t) = 0 \quad \forall\ t \leq t_c$$

Veamos ahora la componente angular de la posición en coordenadas polares:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{{v_2}^2 - {v_1}^2}}{r} \quad \therefore \quad \theta(t) = \int \frac{\sqrt{{v_2}^2 - {v_1}^2}}{r} dt = \int \frac{\sqrt{{v_2}^2 - {v_1}^2}}{v_1(t - t_i) + D}\, dt$$

$$\theta(t) = \sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}\, ln[v_1(t - t_i) + D] + k_2$$

Y para calcular la constante k_2 disponemos de la condición $\theta(t_i) = 0$, ya que el rumbo tiene un valor nulo en el momento del fin del tramo lineal, por lo que tendremos:

$$k_2 = -\sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}\, ln(D)$$

$$\theta(t) = \sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}\, ln[v_1(t - t_i) + D] - \sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}\, ln(D)$$

$$\theta(t) = \sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}\, ln\left(1 + \frac{v_1(t - t_i)}{D}\right) \quad \forall\ t > t_i \quad (Ecuación\ 3)$$

$$\theta(t) = 0 \quad \forall\ t \leq t_i$$

Con las ecuaciones 2 y 3 hemos obtenido la trayectoria a seguir en función del tiempo, pero si queremos además expresar la coordenada radial en función solo de la angular sin que intervenga el tiempo, es decir la ecuación polar del recorrido angular, entonces deberemos sustituir las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3.

ACTIVIDAD 1:

Realiza la sustitución de la ecuación 2 en la ecuación 3 para llegar a obtener una expresión de $\theta(r)$. Una vez conseguida la ecuación de $\theta(r)$, despeja r en función de θ, y emplea la ecuación 1, para obtener una expresión de $r(\theta)$ dependiente de las variables iniciales del problema v_1, v_2, t_c. Esta última ecuación (ecuación 4) será la que empleemos más adelante para dibujar gráficamente la parte no lineal del recorrido.

A continuación, y a modo de ejemplo, representamos en la figura 4 esa ecuación 4 para los valores: v_1=2 m/s (aproximadamente 4 nudos), v_2=10 m/s (aproximadamente 20 nudos), t_c=900 s (15 minutos). Podemos ver que, tras el tramo inicial, una línea recta de aproximadamente 2 km. en el eje X positivo, tendremos que realizar un recorrido angular describiendo una espiral para asegurar el encuentro con el objetivo. La gráfica mostrada se ha obtenido con la herramienta Mathworks MatLab, pero puede obtenerse con la herramienta Octave con un aspecto muy similar, como veremos a continuación en la parte práctica de esta actividad.

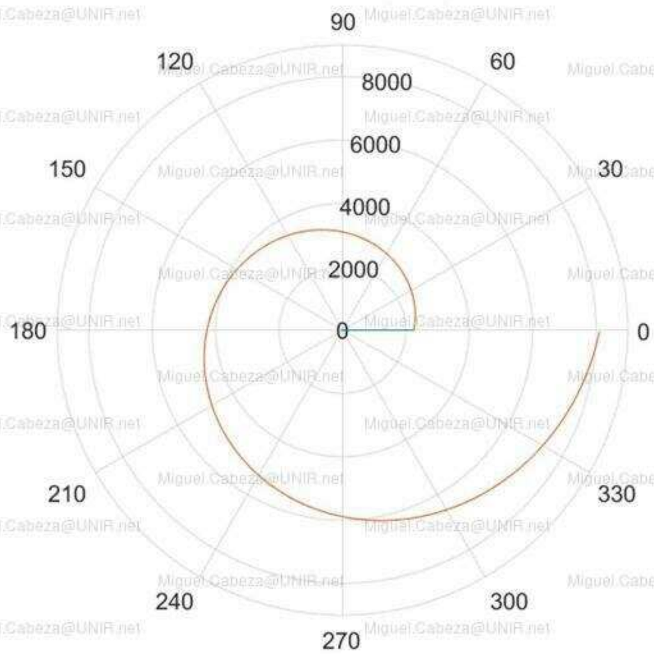


Figura 4. Recorrido lineal y angular en espiral para el ejemplo propuesto.

Miguel.Cabeza@UNIR.net

Miguel.Cabeza@UNIR.net

Ejercicio práctico de laboratorio a realizar:

El ejercicio práctico consta de diferentes actividades enumeradas a lo largo de dos partes:

I. Generación de la gráfica de recorrido lineal y angular (figura 4).

A los datos de velocidades y tiempos indicados en el párrafo anterior (v_1=2 m/s, v_2=10 m/s, t_c=900 s) nos añaden más información: el barco de búsqueda dispone de un foco que permite ver en su rumbo una distancia hacia delante igual a la distancia que recorre en 15 segundos. Este dato nos ayuda a discretizar el problema en intervalos temporales, δ=15 s.

Vamos a diseñar un programa para generar la figura 4 del recorrido lineal y angular. Esto lo realizaremos en el entorno de cálculo computacional Mathworks MatLab, (busca en Google: Matlab Unir) que puedes instalar gratuitamente por ser alumno de UNIR, o también puedes crear una cuenta para ejecutarlo en la nube de Mathworks, sin necesidad de instalación. Alternativamente, este laboratorio se puede desarrollar en Octave, que es un SW libre con un nivel de compatibilidad muy elevado con MatLab. Octave proporciona la ventaja de ser gratuito (aunque mientras seas alumno de UNIR, MatLab no tendrá ningún coste para ti). Además, Octave permite consumir menos recursos de disco; sin embargo, no dispone de todo el potencial original de MatLab.

El programa deberá llamarse "**figura4.m**". Es recomendable que visualices algún tutorial previamente (busca en Google Matlab tutorial)

Lee el siguiente código MatLab/Octave y realiza las actividades que a continuación se plantean:

```
% Solución Laboratorio de Física 1 - UNIR
% Prof. Dr. Miguel Cabeza

clear;
clf;

v1=2; % velocidad de nave a rescatar
v2=10; % velocidad de nave rescatadora
tc=900; % tiempo en comenzar la búsqueda desde la posición reportada
delta_t=15; % tiempo en cambiar rumbo
D=[illegible]; % distancia lineal máxima en eje x
ti=D/v1; % tiempo en el que comenzaría la maniobra angular
```

- Busca información para explicar qué funciones realizan las instrucciones iniciales clear y clf (ACTIVIDAD 2). Incluye cada explicación en cada línea de código.
- Tras definir las variables iniciales proporcionadas en el enunciado del problema, pasamos a definir aquellas variables intermedias necesarias para los cálculos;

para ello completa en el anterior código la definición de la variable D (ACTIVIDAD 3), la distancia lineal máxima en el eje x. Busca la ecuación en la resolución teórica y escríbela en MatLab/Octave. Verifica que el valor que obtienes de la variable D es 2250 m; para ello elimina temporalmente el punto y coma al final de la declaración de la variable, y al ejecutar el código verás que MatLab/Octave imprime el resultado.

- A continuación, generaremos la gráfica del recorrido lineal. Para simplificar las expresiones, se recomienda emplear la ecuación de la posición y velocidad de la nave a rescatar en ese tramo, con velocidad v_1, en vez de la nave de rescate, dado que sería el mismo en caso de llegar a encontrarse en el punto previo al inicio de la maniobra angular. Aunque sea un recorrido lineal, será necesario emplear la función "polarplot" en MatLab ("polar" en Octave), para posteriormente poder representar el recorrido angular en este tipo de salida gráfica.

  Lo primero que necesitamos es crear un vector que represente el tiempo que recorremos en la maniobra lineal. Busca información sobre cómo crear un vector en MatLab/Octave; deberá tener inicio en el valor 0, tener un paso entre valores de "delta_t", y un valor final de "ti" (ACTIVIDAD 4).

```
% generación de la gráfica del recorrido lineal
t=              ; % vector tiempo en maniobra lineal
r=v1*t; % r es un vector, ya que t lo es
% theta=0; no sería una expresión correcta
theta=0*t;  % es un vector de la misma dimensión que t y r,
            % para así poder generar la gráfica...
polarplot(theta,r); % en caso de Octave usar el comando "polar"
```

  Tras introducir estos comandos, si ejecutamos el código que hemos escrito hasta ahora, se nos mostrará una imagen con la parte lineal del trazado.

- Para añadir el gráfico del recorrido angular en espiral, indicaremos a MatLab/Octave que espere otra curva en el mismo gráfico (comando "hold on"). Lo primero, necesitamos crear un vector tiempo que termine en el tiempo máximo de búsqueda, que se produce cuando theta es máximo.

  ACTIVIDAD 5: ¿Cuál es el valor máximo de theta en radianes? Completa el código de la imagen inferior.

Miguel.Cabeza@UNIR.net

```
hold on; % mantenemos el gráfico para añadir el siguiente recorrido

% cálculo del tiempo máximo de búsqueda
theta=[illegible]; % ángulo máximo
r=[illegible]; % distancia máxima desde el origen
tmax=r/v1; % tiempo máximo de búsqueda
```

El tiempo máximo de búsqueda vendrá dado por la distancia máxima desde el origen y la velocidad del objetivo a buscar, ya que es el caso peor: encontramos el objetivo justo en el último momento de nuestra búsqueda. Con la ecuación obtenida en la ACTIVIDAD 1, completa en el código anterior la expresión para calcular la distancia máxima desde el origen. Recuerda emplear el ángulo máximo que antes hemos indicado, (ACTIVIDAD 6).

- Y llegamos a la parte final del código en MatLab/Octave. Para dibujar el recorrido angular, (ACTIVIDAD 7) crea una variable vector que represente el tiempo en la maniobra angular, que comience en t_i, termine en t_{max} y tenga por valor de incremento delta_t. Luego escribe la expresión de theta que obtuvimos en la Ecuación 3. Y finalmente, escribe la expresión de r que obtuviste como Ecuación 4 en la ACTIVIDAD 1.

  Por último, indicamos a MatLab/Octave que dibuje el recorrido angular, y añadimos un título. Al ejecutar el código deberá generar una gráfica como la mostrada en el ejemplo al final del desarrollo teórico.

```
% generación de la gráfica del recorrido angular
t=[illegible]; % vector tiempo en maniobra angular
theta=[illegible];
r=[illegible];
polarplot(theta,r);

title ("Recorrido lineal y angular");
```

II. Generación de coordenadas geográficas de la nave de rescate.

A los datos ya conocidos (v_1=2 m/s, v_2=10 m/s, t_c=900 s, δ=15 s) nos añaden información adicional al caso:

- La posición reportada por el barco perdido es 38°16'32.3" Norte 0°25'43.6" Oeste (38.275646, -0.428773 en formato decimal), cerca de la costa de Alicante.

Miguel.Cabeza@UNIR.net

- Tomamos el eje x de movimiento inicial alineado con el de la longitud cartográfica terrestre, con el este hacia el eje x positivo.
- El radio terrestre R=6.371009 x 10^6 m.

Con todos los datos, **diseña un programa (llamado "coordenadas.m")** en el entorno de cálculo computacional MatLab/Octave que realice las siguientes acciones secuencialmente:

- (ACTIVIDAD 8) Crea una matriz numérica de dos columnas y las filas necesarias para representar la latitud y longitud de las posiciones del recorrido completo.
- (ACTIVIDAD 9) Almacena la matriz anterior (mediante la función "writecsv") en un fichero llamado "coordenadas.csv" en el que se almacenarán las posiciones del barco de rescate en cada periodo temporal. Cada línea contendrá la latitud y longitud (en formato decimal) separadas por una coma; no es necesario y no se debe añadir la información temporal asociada a cada posición.

(ACTIVIDAD 10) Convierte el fichero csv anteriormente generado en un formato kml compatible con Google Earth mediante la herramienta gratuita https://www.convertcsv.com/csv-to-kml.htm , e importa el fichero kml en Google Earth. Visualiza las posiciones del recorrido. **Toma una captura de pantalla y grábala como "googleearth.png"**. En la imagen 1 se muestra un ejemplo de la captura de pantalla.

Imagen 1. Trayectoria de la nave de rescate importada en Google Earth.

Miguel.Cabeza@UNIR.net

Documentación para entregar:

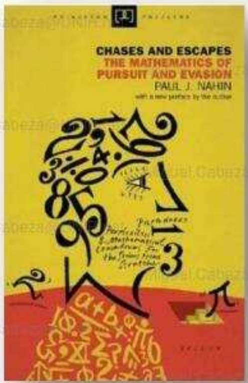
El alumnado debe entregar la actividad en el campus virtual, disponiendo de un campo de comentarios y de la posibilidad de adjuntar un fichero; en este caso, será un fichero comprimido en formato de extensión zip con el formato de nombre siguiente:

Apellido1_Apellido2_Nombre_ACT_CINEM_COMP_Física1.zip

Contenidos del fichero comprimido:

1. Un documento PDF o Word, en el que con un simple párrafo se documente la ACTIVIDAD 1.
2. El fichero de código figura4.m. ACTIVIDADES 2 a 7.
3. El fichero de código coordenadas.m de la ACTIVIDAD 8 y 9.
4. La captura de pantalla googleearth.png de la ACTIVIDAD 10.

Bibliografía:



En el libro *"Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion"*, de Paul J. Nahin, se muestra una solución a este problema en su página 85, aunque desafortunadamente con un desarrollo meramente matemático, y carente de cualquier consideración o explicación física-cinemática. Este libro no se encuentra disponible en la biblioteca de UNIR.

Miguel.Cabeza@UNIR.net