

---

# Inducción magnética

# Índice

Esquema	3
Ideas clave	4
12.1. Introducción y objetivos	4
12.2. Concepto de inducción magnética	5
12.3. Flujo magnético	8
12.4. Ley de Faraday-Henry. Fuerza electromotriz inducida	9
12.5. Aplicaciones de la inducción magnética	17
12.6. Introducción a las ecuaciones de Maxwell	19

# INDUCCIÓN MAGNÉTICA

## Concepto

Creación de corrientes y de fuerza electromotriz inducida (fem) en circuitos cuando el flujo magnético en la proximidades cambia.

Proviene de hechos experimentales hallados primero por Faraday y Henry.

Si un imán se mueve cerca de una bobina, induce corriente en ella.

Si una bobina se mueve cerca de un imán se induce corriente en ella.

Una bobina con I constante solo induce corriente si se mueve. Si I varía, induce sin moverse.

Al encender o apagar la corriente de un circuito, se induce corriente en otro cercano.

**Flujo magnético** a lo largo de una superficie:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} \text{ (sup. plana)}$$

Se mide en weber.  $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$

Mientras más rápidos sean los movimientos y cambios, mayor corriente se induce. Esto parece indicar que la corriente depende del flujo magnético.

## Fem inducida

**Fuerza electromotriz:** trabajo necesario a realizar sobre un circuito por unidad de carga para mantener la corriente circulando:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

Se necesita suministrar energía a los circuitos debido a la existencia de resistencia eléctrica.

Se mide en voltios.

**Ley de Faraday-Henry:** la fem inducida en una espira es menos el cambio del flujo magnético a través de la superficie de la espira.

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

**Ley de Lenz:** el sentido de la fem inducida es tal que se opone a la causa que la provoca.

**Ej. 1:** cálculo fem inducida en una espira.

## Ecuaciones de Maxwell

**Corriente de desplazamiento:** corriente que aparece cuando el flujo eléctrico es variable:  
Se define:

$$I_d = \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Ampère generalizada para incluirla:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_c + \mu \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Definida para impedir ambigüedades en la ley de Ampère, existe realmente y es medible.

**Ecuaciones de Maxwell:**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Muy simétricas. Permiten analizar todos los fenómenos electromagnéticos.

Se generalizan para materiales anisótropos y relatividad.

## Esquema

## 12.1. Introducción y objetivos

En este tema damos por finalizado el estudio de la interacción electromagnética. Se centra en fenómenos de **inducción magnética**, esto es, de aquellos relacionados con inducción de corrientes eléctricas causadas por campos magnéticos o, más concretamente, por su variación.

Los fenómenos que estudiaremos en este tema son de particular importancia en lo que se refiere al uso cotidiano de la energía eléctrica. Así, por ejemplo, una dinamo genera electricidad gracias a los principios y hechos experimentales que tratamos en esta lección.

Finalizamos este tema y, por tanto, el estudio del electromagnetismo, con una exposición de las **ecuaciones de Maxwell**, que hemos ido escribiendo a lo largo de estos tres temas dedicados al electromagnetismo. En esta última sección del tema, limitaremos la exposición a generalizar las ecuaciones que hagan falta, introduciendo la contribución original de Maxwell, el **concepto de corriente de desplazamiento**, y a escribir las ecuaciones de Maxwell.

Al finalizar el tema, habrás adquirido conocimientos como:

- ▶ Conocer los elementos fundamentales de los fenómenos de inducción magnética.
- ▶ Saber los fundamentos físicos de la fuerza electromotriz inducida y la forma en que puede usarse para proporcionar trabajo o suministrar energía eléctrica.
- ▶ Saber qué son las ecuaciones de Maxwell, qué importancia tienen y comprender de qué manera describen todos los fenómenos electromagnéticos.

## 12.2. Concepto de inducción magnética

En el tema precedente tratamos los fenómenos asociados a la creación de campos magnéticos. Los campos magnéticos se producen cuando una carga se mueve a cierta velocidad y la interacción magnética, esto es, la aparición de fuerzas magnéticas, acontecen cuando dos cargas en movimiento se hallaban relativamente cerca. En consecuencia, el campo magnético necesita una carga en movimiento que lo cree y este campo solo afecta a cargas en movimiento.

En este tema, nos centraremos en otro fenómeno que podemos considerar opuesto. Cuando un campo magnético varía de alguna manera en las proximidades de un conductor eléctrico induce en este una corriente eléctrica, esto es, moviliza las cargas. De hecho, podemos establecer la siguiente definición:

La inducción magnética es el fenómeno que consiste en la creación de corrientes (y de fuerza electromotriz) en circuitos eléctricos cuando el flujo magnético en las cercanías del mismo cambia.

La importancia de este fenómeno es vital, ya que la energía eléctrica que se consume en nuestras sociedades tecnológicas se produce gracias a este concepto. En las centrales eléctricas, la energía (química, nuclear, etc.) consumida se gasta en conseguir que los flujos magnéticos varíen y, de esta manera, induzcan corrientes en los conductores.

Antes de empezar a definir los conceptos que nos permitirán la realización de cálculos, se hará un resumen de los hechos experimentales que llevaron a descubrir la inducción magnética.

## Experimentos sobre inducción magnética

Como apuntamos en el tema anterior, los primeros experimentos que pusieron de relieve la existencia de la inducción magnética se realizaron durante el siglo XIX y se deben, principalmente, a Faraday y a Henry, que la llevaron a cabo de manera independiente.

Aunque no se van a describir aquí las experiencias exactas que hicieron ambos investigadores, expondremos los hechos experimentales que llevan a la formulación de diferentes leyes experimentales que permiten cuantificar el fenómeno.

El elemento experimental básico es **un circuito**, en el que hay conectado un instrumento que mida intensidades (un galvanómetro) y en el cual hay una espira, o bien una bobina. El uso de una bobina permite mayor facilidad para medir, pero tan válido es el uso de una espira como de una bobina. Los experimentos básicos y sus resultados son:

- ▶ Si se deja un imán permanente quieto en las proximidades de un circuito, no se produce ningún tipo de corriente. Solo si ese imán se mueve, acercándolo o alejándolo de la espira o la bobina, se induce una corriente eléctrica.
- ▶ Si el imán no se mueve, pero la bobina o la espira cambia de dirección constantemente (por ejemplo, rota a velocidad constante) también se induce corriente eléctrica.
- ▶ Si se toman dos espiras o bobinas y se hace circular por una de ellas una corriente eléctrica, se sabe hoy en día que se generará un campo magnético. Si la intensidad de la corriente en la primera espira es constante, solo se induce una corriente en el segundo circuito si la bobina por la que circula intensidad se acerca o se aleja de la primera, de la misma manera en la que sucede cuando se trataba de un imán permanente.

- ▶ Si en la espira cargada se hace circular una corriente que cambia continuamente, no será necesario mover la espira cargada: el hecho de que la corriente no sea constante induce una corriente en la espira sin carga. Esto puede notarse de una forma, quizá, inesperada. Si el circuito por el que pasa corriente eléctrica está quieto con respecto al circuito al que se le desea inducir una corriente, no se produce el fenómeno.

Sin embargo, en el momento en el que se apaga la fuente de intensidad, se produce una corriente durante un tiempo muy breve. Todo esto apunta a que un cambio en las características de las corrientes que crean campo magnético modifica el valor de este.

Otro tipo de experimentos más sistemáticos, en los cuales se somete una bobina a la que se ha conectado un galvanómetro a un campo magnético  $\vec{B}$  variable y que se puede controlar, como el que crea un electroimán, arrojan los siguientes resultados:

- ▶ Si no hay campo magnético, no aparecen corrientes.
- ▶ Cuando se conecta el electroimán, para llevar la intensidad del campo magnético de cero a un valor cualquiera, aparece una corriente durante el tiempo en el que se pasa de cero a ese valor. Pero cuando se alcanza el valor prefijado del campo, la corriente desaparece. Da igual lo grande que sea el campo magnético: no se inducirá corriente si este no varía.
- ▶ Cualquier modificación física de la bobina o su posición, induce una corriente eléctrica solo durante el tiempo que dura la modificación. Si se hace girar, solo se induce corriente mientras se gira. Si se saca la bobina de la región donde hay campo, aparece una corriente durante el tiempo que tarda la bobina en cruzar el límite de la región. Si se comprime, solo hay corriente durante la compresión.
- ▶ Si se desconecta el electroimán, también se induce corriente durante la caída a cero del valor del campo, pero su sentido es el contrario.

- ▶ Como hecho bastante significativo, la intensidad de la corriente en cualquiera de los casos anteriores depende fuertemente de la rapidez con la cual se inducen esos cambios. Mientras más rápido se saque la bobina de la zona donde está el campo magnético actuando, mayor es la intensidad generada.

Todos estos hechos experimentales sugieren que la inducción magnética actúa solamente si se producen cambios en el flujo magnético que atraviesa el circuito. Por ello, en la siguiente sección, definiremos este concepto.

## 12.3. Flujo magnético

El concepto de flujo, en realidad, es general y puede definirse para muy diversos tipos de campos de fuerzas. En temas anteriores lo definimos para el campo eléctrico, y el concepto de flujo magnético, en el fondo, es el mismo, solo que utilizando el vector campo magnético en vez del vector campo eléctrico. Por ello, la definición es:

Se define el flujo de un campo magnético a través de una superficie general, divisible en elementos de área diferencial  $d\vec{S}$  como la siguiente integral extendida a lo largo de toda la superficie:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si la superficie es plana y el campo magnético es constante a lo largo de la misma, es válida la siguiente expresión del flujo magnético elemental:

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos \alpha$$

Siendo  $\alpha$  el ángulo existente entre la superficie y la dirección del campo magnético.



El flujo magnético tiene unidades: se mide en webers, que se abrevian Wb. Un weber equivale a un tesla por metro cuadrado. En unidades fundamentales:

$$1 \text{ Wb} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{C s}}$$

De hecho, esta unidad es tan importante que, a menudo, se usa para el campo magnético el  $\text{Wb/m}^2$  en vez del tesla.

Como en el caso de cualquier campo que sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, el flujo a través de una superficie representa, en cierto modo, el número de líneas de campo que atraviesan la misma. Esto es, da idea de la densidad de líneas de campo en cada región del espacio.

Del tema anterior, recordamos un resultado que equivaldría al teorema de Gauss. El flujo a través de cualquier superficie cerrada del campo magnético es siempre nulo:

$$\Phi_m = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

En el siguiente apartado, estableceremos la relación entre el flujo y la inducción magnética de manera cuantitativa.

## 12.4. Ley de Faraday-Henry. Fuerza electromotriz inducida

El análisis de los resultados de los experimentos realizados por Faraday y Henry mencionados anteriormente dio lugar a una ley que determina qué corrientes se inducen en circuitos debidas a cambios en el flujo. Lo que aquellos experimentos demostraron fue que la inducción magnética solo se produce si el flujo a través de la

superficie descrita por una espira o una bobina varía con el tiempo. En este apartado del tema, formalizaremos esta ley.

Dado que la ley de Faraday-Henry se establece para la fuerza electromotriz inducida, será necesario definir previamente qué significa «**fuerza electromotriz**».

### Concepto previo: fuerza electromotriz

En este curso no vamos a tratar la teoría de circuitos, que queda reservada para otras asignaturas del grado. No obstante, para una comprensión más adecuada del concepto de fuerza electromotriz inducida, es interesante definir el término. Como, normalmente, este concepto se introduce al hablar de circuitos de corriente eléctrica, hablaremos de esta cuestión haciendo referencia a estos.

Para que se mantenga una corriente en el interior de un conductor, además de la existencia en su seno de un campo eléctrico, es preciso que este sea cerrado. Por ejemplo, para que exista una corriente constante en el interior de un alambre, ambos extremos han de estar conectados, de lo contrario, no es posible mantener indefinidamente la corriente, aunque el campo eléctrico interno se mantenga.

La explicación es sencilla. La corriente eléctrica supone, en el caso más usual, la movilización de carga negativa. Si el circuito está abierto, la carga negativa viajará hasta llegar al extremo del conductor, donde se acumulará. En el extremo opuesto, aparece una carga positiva debido a que las cargas negativas se han movilizadas y no se han repuesto.

Esta diferencia de cargas, como vimos en temas anteriores, creará un campo en sentido opuesto al campo original. A medida que la acumulación de carga se incrementa, el campo eléctrico inducido crece hasta que llega el momento en el que es de la misma intensidad del original, con lo que la corriente se interrumpe. Impedir que la carga movilizadas pueda acumularse es lo que logra que la corriente continúe y, para ello, es preciso no cerrar el circuito.

Sin embargo, dado que el campo eléctrico es conservativo, si se mueve una carga eléctrica en un circuito, y el punto inicial es el mismo que el punto final, puesto que se moviliza en un circuito cerrado, la energía potencial eléctrica de esa carga no puede cambiar.

No obstante, una carga que se mueve en un conductor real, esto es, un conductor que presenta cierta resistencia a la corriente eléctrica, pierde energía, ya que los fenómenos de resistividad eléctrica consisten en eso: la disipación de energía debida a la interacción de las cargas con el material por el que circulan.

Esto implica que si se quiere mantener una corriente eléctrica, será necesario suministrar energía potencial eléctrica a las cargas movilizadas que compensen esas pérdidas por disipación. Así, una batería o una pila además de proporcionar una diferencia de potencial, suministrará esa energía a las cargas en movimiento, transformándola a partir de otros tipos (energía química, mecánica, etc.). Esto nos lleva a la definición de fuerza electromotriz:

Se define la fuerza electromotriz como el trabajo que es necesario realizar sobre un circuito, por unidad de carga, para que la corriente siga circulando de manera constante a lo largo del circuito. Equivale a la energía de otros tipos (química, mecánica, etc.) que es preciso convertir en energía eléctrica para que la corriente siga circulando. La ecuación que la rige es:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

Aunque se denomine «fuerza» se mide en voltios en el Sistema Internacional.

Por ello, puede decirse que una pila, o una batería, o un generador de corriente eléctrica son fuentes de fuerza electromotriz. Como curiosidad, denominarla fuerza es inadecuado, ya que no es tal, sino una **energía por unidad de carga**. Si fuese una

fuerza, debería medirse en newtons. El motivo de mantener esta denominación es histórico.

## Ley de Faraday-Henry

La ley de Faraday-Henry (o ley de Faraday en otros textos) se basa en los fenómenos descritos en la sección 12.2 y en el concepto de flujo. Su enunciado es el siguiente:

La ley de Faraday-Henry establece que la fuerza electromotriz inducida en una espira es igual al opuesto del cambio del flujo magnético con respecto al tiempo a través de la superficie definida por la espira:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

En realidad, la expresión de la ley de Faraday-Henry lleva una constante de proporcionalidad:

$$\varepsilon = -k \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Sin embargo, esa constante es igual a 1 en el Sistema Internacional.

El significado del signo menos en la ley de Faraday tiene que ver con un hecho que se formaliza, también, en forma de ley física.

## Ley de Lenz

Lenz fue un científico ruso que, de manera independiente, reprodujo muchos de los experimentos de Faraday y Henry. Aunque el propio Faraday no tenía dificultades para calcular el sentido de las fuerzas electromotrices inducidas, cosa que de hecho puede hacerse con los conocimientos sobre electromagnetismo disponibles, por

ejemplo, usando la regla de la mano derecha, Lenz enunció una ley que facilita mucho la tarea:

La ley de Lenz afirma que el sentido de la fuerza electromotriz inducida es tal que se opone a la causa que la produce.

Esto es lo que explica el signo negativo en la ley de Faraday-Henry. Como el motivo que crea la fuerza electromotriz inducida son los cambios en el flujo, la ley de Lenz lo que está afirmando es que la fuerza electromotriz cobra el sentido necesario para detener el aumento del flujo magnético o, si este flujo lo que está es reduciéndose, aumentar el flujo.

La acción que puede realizar una corriente eléctrica que circula en una espira es generar un campo magnético en el sentido necesario para aumentar o disminuir el flujo magnético a través de la superficie encerrada por la espira.

Téngase en cuenta que dada una espira orientada en horizontal, si la intensidad circula en sentido horario, se genera un campo magnético que está dirigido hacia abajo. Si la intensidad circula en sentido antihorario, entonces el campo creado va dirigido hacia arriba. Este campo magnético generado crea un flujo en el que, si se conviene que la dirección del vector de superficie de la espira está orientado hacia arriba, será positivo si la corriente circula en sentido antihorario y negativo en el caso contrario.

El **flujo magnético puede aumentar** por muchos motivos:

- ▶ El campo magnético va cambiando su orientación, sin cambiar de intensidad, y se alinea con la superficie.
- ▶ El campo magnético aumenta de intensidad.
- ▶ La parte de la superficie afectada por el campo magnético aumenta.

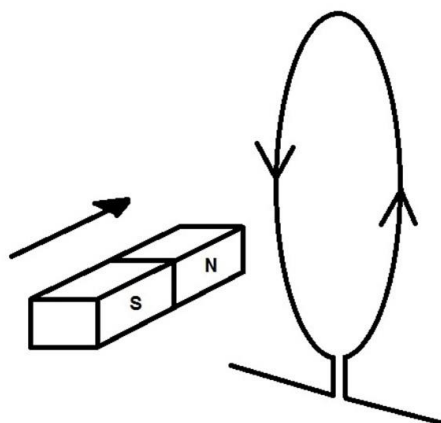
También puede disminuir por motivos opuestos, por ejemplo, si la intensidad de campo magnético se reduce, también lo hace el flujo.

Supongamos la misma espira orientada en horizontal. Si hay un campo magnético dirigido hacia arriba que empieza a aumentar su intensidad, generará una fuerza electromotriz inducida. Esa fuerza electromotriz irá orientada en sentido horario porque eso generará un campo magnético hacia abajo, que induciría un flujo negativo y tendería a oponerse al aumento de flujo.

Si el campo magnético dirigido hacia arriba disminuyera su intensidad, la fuerza electromotriz inducida generada iría en sentido antihorario, de manera que se creara un campo magnético hacia arriba que compensara la pérdida de flujo debida a la reducción del campo externo.

Los argumentos serían los mismos si el flujo aumenta o disminuye por otras causas, como aumentos en la superficie o cambios de orientación: el sentido de la corriente inducida sería el que, gracias al campo magnético generado, cambiara el flujo magnético en el sentido contrario al del cambio que está experimentando.

La ley de Lenz, en principio, es una consecuencia de la ley de Faraday-Henry, pero, como hemos visto, es una herramienta muy útil a la hora de averiguar el sentido de la fuerza electromotriz inducida. Además, esta ley es una forma alternativa de enunciar el principio de conservación de la energía. Esto es muy fácil de ver si nos planteamos el experimento de generar una fuerza electromotriz inducida en una espira acercándole un imán. Si se acerca un imán con el polo positivo orientado hacia la espira, aparecerá una fuerza electromotriz inducida en el sentido indicado en la figura:



Como las líneas de campo de un imán permanente van dirigidas desde el polo norte hacia el sur, vemos que la fuerza electromotriz inducida crea un campo magnético dirigido hacia el imán, esto es, actúa como un polo norte magnético. Ello implica que para mover el imán hacia la espira es preciso efectuar un trabajo, ya que la espira tiende a repelerla. Lo que está sucediendo, en esencia, es que el trabajo invertido en mover el imán hacia la espira se convierte en fuerza electromotriz inducida.

Si se violara la ley de Lenz y el sentido de la corriente inducida fuera el opuesto al indicado, el campo iría en el sentido contrario, lo que implicaría que la espira mostraría un polo sur y atraería al imán natural. La consecuencia sería que se estaría efectuando trabajo sobre el imán y, además, generando una fuerza electromotriz, lo que implica suministrarle un trabajo al circuito que haga que la carga circule. Dicho de otro modo, se estaría creando energía de la nada, lo que contradice el principio de conservación de la energía.

### Ejemplo de cálculo de la fuerza electromotriz inducida

Ilustraremos el cálculo de la fuerza electromotriz resolviendo el siguiente ejemplo:

### Ejemplo 1

Una espira circular de 0,5 m de radio está sumergida en el seno de un campo magnético perpendicular a la espira. Calcular la fuerza electromotriz que el flujo magnético induce en la espira en las siguientes situaciones:

Si el campo tiene una intensidad constante de 2T.

Si el campo magnético aumenta a razón de 0,01T/s.

Si la espira comienza a girar a una velocidad angular constante de 0,01 rad/s mientras el campo se mantiene constante en un valor de 2T.

Este problema se reduce a calcular la derivada con respecto del tiempo del flujo magnético que atraviesa la espira en cada uno de los tres casos, que será la fuerza electromotriz inducida cambiada de signo. Así:

- Si el campo magnético no cambia y la espira esta quieta, el flujo magnético es constante y su derivada es nula. Por tanto:

$$\epsilon = 0 \text{ V}$$

- Si el campo magnético aumenta la cantidad que se dice en el enunciado, se puede escribir la expresión en función del tiempo del módulo del campo magnético así:

$$B(t) = 2 + 0,01 t$$

Como la espira está orientada de manera perpendicular a este campo, el producto escalar  $\vec{B} \cdot \vec{S}$  siempre es igual al producto de los módulos. Como el valor de la superficie de la espira es  $\pi r^2 = 0,25 \pi \text{ m}^2$ , tenemos:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0,25 \pi (2 + 0,01 t)$$

Y, por lo tanto:

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \pi 0,25 = - 0,00785 \text{ V}$$



En este caso el flujo vale:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos (\omega t) = \pi \cos (0,01 t)$$

Dado que el ángulo que hay entre la espira y el campo varía con el tiempo y puede expresarse como:

$$\theta = \omega t$$

Si hacemos las elecciones adecuadas en el ángulo y el tiempo iniciales (suponiendo cero ambos, lo que es posible porque la espira partió de una situación en la que se orientaba perpendicularmente al campo), la fuerza electromotriz vale, sin más que derivar:

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} [\pi \cos (0,01 t)] = 0,01 \pi \operatorname{sen} (0,01 t) V$$

Ya que:

$$\frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\omega \operatorname{sen} \omega t$$

Fíjate que esta fuerza electromotriz varía con el tiempo. Esto implicaría que se está generando una corriente eléctrica alterna. De hecho, movilizar una espira en el seno de un campo magnético es como se suele generar la corriente eléctrica que se consume en fábricas y hogares.

## 12.5. Aplicaciones de la inducción magnética

Aunque esta parte de la física habla de fenómenos que parecen curiosidades extrañas, las aplicaciones de la inducción magnética son vitales para la tecnología

moderna. De hecho, casi toda la energía eléctrica que se consume está basada en fenómenos de inducción magnética.

Antes de que se utilizara la inducción magnética en la generación de electricidad, la única alternativa eran las pilas que producían corrientes continuas por medio de diversas reacciones electroquímicas. Ese tipo de pilas son de uso cotidiano, pero su empleo está restringido a pequeños aparatos de funcionamiento no crítico: juguetes, mandos a distancia y similares. Este tipo de pilas tiene como inconveniente que son muy caras en proporción a la energía producida.

La ventaja principal de la producción de electricidad por medio de la inducción magnética es que permite convertir energía mecánica directamente en energía eléctrica.

La consecuencia de usar este método es que se generan corrientes eléctricas alternas, en vez de continuas como las producidas por medios químicos. Y para transportar enormes cantidades de energía eléctrica, la corriente alterna es mucho más eficiente. Aunque el precio sea que la electricidad sea más peligrosa, al necesitar voltajes mucho mayores para su transporte, sería muy poco eficiente, o incluso imposible, transportar a lo largo de cientos de kilómetros electricidad como corriente continua.

Como última motivación importante para el uso de corrientes eléctricas alternas, se puede destacar que, si bien casi todos los aparatos necesitan corriente continua para funcionar, es posible convertir una corriente alterna en otra continua por medio de una fuente de alimentación, que son las que usan la gran mayoría de dispositivos electrónicos de uso frecuente (ordenadores, teléfonos móviles, electrodomésticos).

Una fuente de alimentación consta usualmente de un transformador (que se basa, de nuevo, en inducción magnética) y un rectificador, que es el que convierte la corriente alterna en continua después de que el transformador le haya cambiado el voltaje para que el rectificador pueda funcionar.

La producción de electricidad se basa en convertir energía mecánica en corrientes alternas, algo que suele lograrse, como se estudió en el ejemplo práctico del apartado anterior, haciendo girar bobinas conductoras en el seno de campos magnéticos estables. El giro de la bobina es el que modifica el flujo magnético que las atraviesa y el que, por medio de inducción magnética, hace que se produzca la electricidad. Las diferentes fuentes de electricidad modernas difieren en la manera en que hacen girar las bobinas.

Las centrales térmicas, que queman carbón o petróleo, y las nucleares se suelen basar en producir vapor, el cual moverá las turbinas que, a su vez, moverán las bobinas conductoras. El calor producido por los combustibles se invierte en calentar agua que se hace pasar por las turbinas. La energía eólica hace que el viento mueva las turbinas. La mareomotriz o la hidroeléctrica utilizan la fuerza de las olas o saltos de agua para hacer que el agua líquida mueva las turbinas.

La importancia de la inducción magnética es, por tanto, clara, y no disminuirá en el futuro, ya que la mayoría de las fuentes de energía eléctrica, renovables o no, la utilizan.

## 12.6. Introducción a las ecuaciones de Maxwell

Como último apartado dedicado en este curso a los fenómenos electromagnéticos, la introducción de las ecuaciones de Maxwell supone una síntesis muy interesante de todos los fenómenos estudiados. Estas ecuaciones permiten deducir buena parte del resto de expresiones estudiadas en el tema y, en principio, son todas las necesarias para la descripción de los fenómenos electromagnéticos.

A pesar de su nombre, Maxwell no las inventó todas; la contribución de Maxwell fue el **concepto de corriente de desplazamiento**, que será el primero que expondremos

aquí, y reunir diferentes ecuaciones desarrolladas de forma aislada en un conjunto de expresiones que modelan los fenómenos electromagnéticos.

Como este apartado es introductorio, se plantean las ecuaciones de Maxwell en las condiciones más sencillas: para **campos en el vacío**. No obstante, sus formas más generalizadas son, en esencia, muy similares a las planteadas en este tema.

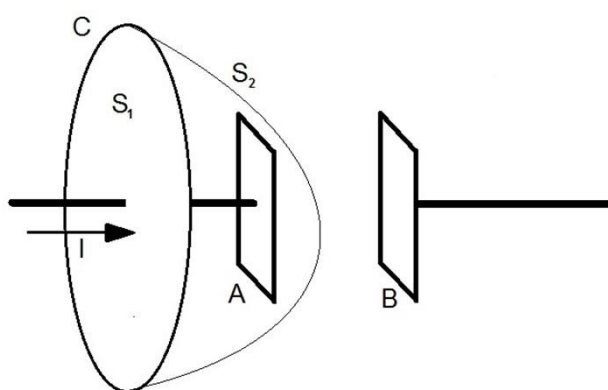
## Generalización de la ley de Ampère. Corriente de desplazamiento

En el tema 11, enunciamos la ley de Ampère, cuya ecuación básica era:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{ES}$$

Sin embargo, esta expresión contiene una ambigüedad de la que no comentamos nada en su momento. Dada una circunferencia a lo largo de la cual se va a calcular la integral de línea del campo magnético, dijimos que había que calcular la intensidad que cruzaba la superficie descrita por la curva. Sin embargo, dada una circunferencia, esta puede ser el límite de muchas superficies, no solo de aquella más reducida o más plana.

Para comprobarlo, veamos la siguiente figura:



Sea un condensador cuyas placas son A y B que está en proceso de carga, por lo cual, desde el cable que proviene de la izquierda está circulando una intensidad de carga constante  $I$ . Se desea calcular el campo magnético producido por la intensidad  $I$ , para lo cual, se va a emplear el teorema de Ampère aplicándolo a la curva C de la figura. Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies definidas por la curva C y, por tanto, ambas válidas para calcular la intensidad que la cruza.

El problema viene cuando se calcula la intensidad que cruza cada una de las dos superficies. Para  $S_1$ , la intensidad vale  $I$ , pero para  $S_2$  vale cero, ya que no hay corriente que circule de una armadura a la otra del condensador, de donde se deduce que la ley de Ampère está arrojando dos resultados diferentes para la misma curva en torno a la que se calcula el campo magnético. Esto indica la existencia de algún problema con el teorema de Ampère, que no puede dar dos resultados diferentes para la misma curva C.

En realidad, lo que sucede es que la ley de Ampère tal como la hemos enunciado es un caso particular. La expresión vista hasta ahora solo es válida si se considera únicamente la existencia de corrientes constantes, pero en el caso de la superficie  $S_2$ , en el espacio que hay entre ambas placas del condensador, están sucediendo cambios. La placa A está acumulando carga, lo que está incrementando el campo eléctrico entre las armaduras y modificando asimismo el flujo.

La solución que propuso Maxwell fue que debe existir una corriente, que él denominó corriente de desplazamiento, que si se consideraba corregía esta ambigüedad. Para las diferentes superficies que pueden definirse para una curva, existirá una **corriente de desplazamiento** tal que asegurará el cumplimiento de la ley de Ampère. La definición hecha por Maxwell de la corriente de desplazamiento fue, para medios isótropos:

Se define la corriente de desplazamiento como una corriente presente en zonas donde el flujo del campo eléctrico es variable y definida por:

$$I_d = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

De esta forma, la ley de Ampère generalizada queda:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_C + \mu \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Donde lo que antes se denominaba intensidad «a secas» ahora se denomina, para distinguirla de la otra, **corriente de conducción**, ya que corresponde a corrientes derivadas de la conducción real de carga.

Para entender el motivo de que la definición sea esta, podemos usar el ejemplo del condensador que ha servido para comprender el problema de la ley de Ampère sin generalizar. Para ello, hay que saber un par de cuestiones acerca de la naturaleza de los condensadores.

La carga que, en un momento dado, tiene una de las armaduras del condensador, en el caso de la figura, por ejemplo, la que hemos llamado A, vale:

$$Q = C V$$

Donde  $Q$  es la carga,  $V$  la diferencia de potencial entre ambas placas y  $C$  es lo que se denomina capacidad del condensador. Se puede hacer la suposición de que el campo eléctrico es uniforme entre las placas o armaduras del condensador y dirigido perpendicularmente a la superficie de estas. En estas circunstancias, puede demostrarse que la capacidad del condensador es:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Expresión en la que  $A$  es el área de las placas y  $d$  la distancia entre las mismas. En el tema anterior establecimos que, dada una región donde el campo eléctrico es constante, la diferencia de potencial puede calcularse como:

$$V = E d$$

Introducimos estas dos expresiones en la fórmula que da la carga y sale:

$$Q = C V = \frac{\epsilon A}{d} E d = \epsilon A E$$

Recordando la expresión del flujo del campo eléctrico, es fácil ver que el producto  $A E$  es, precisamente, el flujo eléctrico que atraviesa la región que hay entre ambas armaduras (campo por área y como la superficie es perpendicular al campo y plana, el ángulo entre el campo y el vector de superficie es cero), con lo que la carga puede escribirse así:

$$Q = \epsilon \Phi_E$$

Finalmente, como la intensidad eléctrica es la derivada de la carga que atraviesa una superficie en función del tiempo, la intensidad que circula por el conductor puede escribirse como:

$$I = \epsilon \frac{d \Phi_E}{dt}$$

La forma en que Maxwell corrigió el teorema de Ampère fue suponer que, además de la corriente de conducción, existe una corriente, teóricamente ficticia, que tiene la misma expresión que la corriente de conducción. Con ello, la ley de Ampère generalizada:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu (I_C + I_D)$$

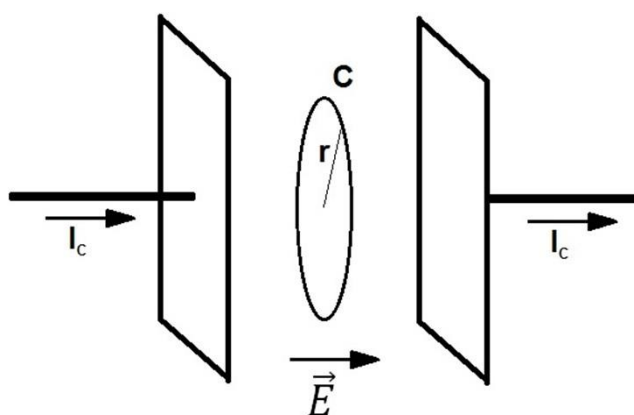
Se cumple para cualquier superficie que tenga como límite la curva cerrada en torno a la cual se hace el cálculo de la ley de Ampère. En el ejemplo considerado, a lo largo de la superficie  $S_1$  la corriente de conducción vale  $I$  y la corriente de desplazamiento es nula, pero a través de la superficie  $S_2$  no hay corriente de conducción y sí una de desplazamiento cuyo valor numérico también es  $I$ . Con ello, el teorema de Ampère pierde esa ambigüedad del principio, ya que da igual la superficie considerada.

### ¿Es real la corriente de desplazamiento?

La corriente de desplazamiento se ha introducido de una forma tan artificial que cabe plantearse si se trata de un artificio que cuadra las ecuaciones o si corresponde a algún fenómeno físico real.

Maxwell, aunque se basó para hacer su definición en diferentes experimentos, introdujo el concepto sin excesiva justificación teórica. Sin embargo, se trató de un caso de lo que podría llamarse intuición: se introdujo ese nuevo término para cuadrar las ecuaciones, suponiendo que correspondía a fenómenos aún desconocidos, pero reales. Y esa suposición de Maxwell fue muy acertada.

Para demostrarlo experimentalmente, es posible usar de nuevo el ejemplo del subapartado precedente: el condensador.





Sea el condensador de la figura. Al estar circulando una corriente hacia la armadura de la izquierda, en el espacio entre ambas placas existe un campo eléctrico que, si la distancia entre armaduras es mucho menor que la longitud de las mismas, puede considerarse constante y orientado perpendicularmente a las placas.

De ahí se deduce que el campo magnético será perpendicular al campo eléctrico, y paralelo a las placas. De hecho, a lo largo de todo el recorrido  $C$  marcado en la figura, el campo magnético y el elemento diferencial de la curva en todo punto de esta serán paralelos. Por ello, la integral de la ley de Ampère, sabiendo que el radio de  $C$  es  $r$ , vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B 2\pi r$$

En cuanto al otro miembro de la ecuación, como no hay corrientes de conducción, suponemos la existencia de una corriente de desplazamiento  $i_D$  cuyo valor será igual al de la corriente de conducción  $i_C$  que carga el condensador. Como se supone que la corriente de desplazamiento se distribuye de manera uniforme por el espacio entre ambas placas, la corriente de desplazamiento vale, si  $A$  es el área de las placas del condensador:

$$\frac{i_C}{A} \pi r^2$$

Por ello, el módulo del campo magnético entre las armaduras del condensador vale:

$$B 2\pi r = \mu \frac{i_C}{A} \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad B = \mu \frac{i_C}{2A} r$$

Si es verdad que las corrientes de desplazamiento existen, debería ser posible medir un campo entre las armaduras del condensador que fuera proporcional a esa distancia  $r$  desde el centro del condensador hasta el punto en el que se calcula el

campo. Y, en efecto, en el laboratorio se puede comprobar que este campo magnético existe y es proporcional a  $r$ .

En realidad, el concepto de corriente de desplazamiento hace del electromagnetismo una interacción con bastante simetría. La inducción magnética implica que el cambio en el flujo de un campo magnético crea una corriente. El concepto de corriente de desplazamiento introduce el fenómeno, del todo simétrico, de que un campo eléctrico cuyo flujo varía a lo largo del tiempo, induce un campo magnético.

## Expresión de las ecuaciones de Maxwell

Como hemos comentado en la introducción de este tema, las ecuaciones de Maxwell sirven para reunir, en un conjunto coherente de ecuaciones, la mayoría de las expresiones que se han ido deduciendo a lo largo del estudio de los fenómenos electromagnéticos. Dos de ellas tienen que ver con integrar el campo eléctrico y el magnético a través de superficies cerradas y otras dos con hacer integrales de línea a través de líneas cerradas.

La **primera ecuación de Maxwell** es, simplemente, la ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Donde  $Q_{int}$  es la carga interna a la superficie cerrada en torno a la que se integra y  $\epsilon_0$  la constante dieléctrica del vacío.

La **segunda** es la operación equivalente para el campo magnético:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Debemos recordar que la integración del campo magnético en torno a una superficie cerrada da siempre cero.

La **tercera ecuación de Maxwell** es la ley de Ampère generalizada para incluir las corrientes de desplazamiento:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

En esta expresión,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $I_C$  es la intensidad total debida a corrientes que atraviesan la superficie descrita por la curva cerrada en torno a la que se calcula la integral,  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío y  $\Phi_E$  es el flujo eléctrico.

La **cuarta** y última ecuación de Maxwell es la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

En la que  $\Phi_B$  es el flujo magnético.

Este conjunto de ecuaciones permite averiguar todo lo necesario acerca de la interacción electromagnética. Son un conjunto, en principio, completo y simétrico de ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos. Es destacable que tiene dos ecuaciones dedicadas al campo eléctrico y otras dos al campo magnético. También posee, para cada campo, una ecuación dedicada a la integral de línea del mismo y otro a una integral a lo largo de una superficie.

La simetría notable de estas expresiones puede ponerse más de manifiesto si se toman las dos últimas y se escriben los flujos de manera explícita:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I_C + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Como podemos ver, la variación temporal del vector campo eléctrico induce un campo magnético. A su vez la variación temporal del vector campo magnético genera campos eléctricos. Esta simetría es lo que lleva a explicar fenómenos físicos más complejos, como las ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de Maxwell admiten expresiones más generales, que añaden a estas, solo válidas para el vacío o medios isótropos, la capacidad de aplicarse a cualquier tipo de medios, o de aplicarse a condiciones relativistas. Ello, habitualmente, implica la definición de nuevos vectores que se añaden o sustituyen a los campos eléctrico y magnético en la forma mencionada en las expresiones anteriores.