Cálculo

Números complejos

Índice

Esquema

Números complejos

- **Representaciones de los números complejos**
  - Forma binómica
  - Forma polar
  - Forma trigonométrica
- **Elementos de los números complejos**
  - Parte real
  - Parte imaginaria
  - Módulo
  - Argumento
- **Operaciones con los números complejos**
  - Suma
  - Resta
  - Producto
  - Cociente
  - Potencias
  - Raíces
- **Aplicaciones de los números complejos**

Ideas clave

4.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que te presentamos a continuación.

Además tienes que leer las **páginas 14-36** del siguiente libro, disponible en la Biblioteca Virtual de UNIR:

Suárez, V. (1998). *Introducción a variable compleja*. Instituto Politécnico Nacional.

En este tema se verán cuáles son los **conceptos fundamentales de los números complejos**.

Por otro lado se hará una **breve descripción de las operaciones que pueden realizarse con ellos**.

Por último, se hará especial hincapié en **las aplicaciones que tienen los números complejos en el mundo real y más concretamente en el mundo de la Ingeniería**, dada la utilidad que para un ingeniero puede tener ya que pueden encontrarse con ellos.

4.2. El concepto de número complejo

La manera más **intuitiva** de introducir los números complejos a partir de la resolución de la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

En un principio con las técnicas usuales no sabemos resolverla ya que nos encontramos con que x^2=-1 y como es conocido no existe ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo.

Para resolver este tipo de ecuaciones que se nos presentan muy a menudo se construyeron los números complejos llamando i a la unidad imaginaria y que no es otra cosa que la raíz de -1, $i = \sqrt{-1}$.

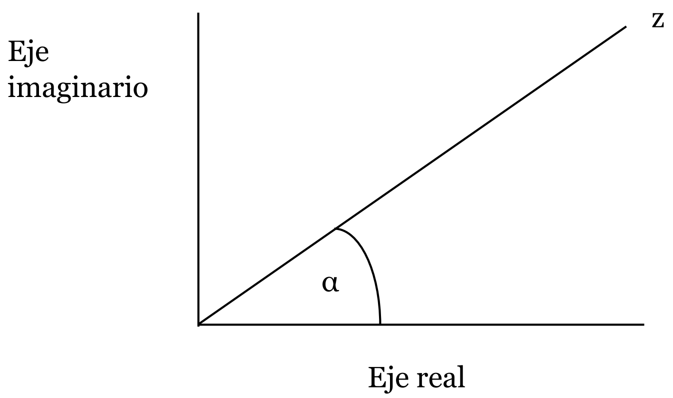
Definición. Decimos que un *número es complejo* si es de la forma z=a+b*i*, donde a y b son números reales. Llamaremos a como la *parte real* de z y b como la *parte imaginaria* de z. En términos matemáticos se define el conjunto de los números complejos como:

$$C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$$

Notemos que cuando b es igual a *0* obtenemos el conjunto de los números reales y cuando a es igual a *0* obtenemos lo que se conoce como un número imaginario puro.

Mediante esta extensión, a priori simplemente simbólica, cualquier polinomio con coeficientes reales de orden n siempre tendrá n raíces contadas con multiplicidades (también conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra**). Esto produce numerosas aplicaciones no solo en la resolución de ecuaciones algebraicas sino en el cálculo diferencial e integral.

Los números complejos se pueden representar en un plano de coordenadas en el que el eje de abscisas representa la parte real y el eje de ordenadas la parte compleja. Así en el eje de abscisas aparecen los números reales mientras que en el de ordenadas aparecen los imaginarios puros.



Un número complejo de la forma $z = a + bi$ se dice que está en forma binómica pero también se pueden representar en forma polar introduciendo los siguientes conceptos.

Definición. Llamamos *módulo* de un número complejo z y lo denotamos como |z| o r a la siguiente cantidad:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En términos geométricos, esta cantidad se corresponde con la distancia que hay desde el punto complejo *z* al origen (0,0). Por este motivo también se le conoce como valor absoluto. Se puede comprobar que verifica las propiedades usuales de valor absoluto, por ejemplo:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z| > 0 \quad \text{si } z \neq 0$$

Definición. Llamamos *argumento* de un número complejo *z* y lo denotamos como arg(z) o α al ángulo que forma el segmento que une el origen con el número complejo *z* con el eje OX.

$$tg(\alpha) = \frac{b}{a}$$

De esta forma un número complejo puede quedar determinado por su módulo y su argumento y es lo que se conoce como la forma polar de z y se denota de la siguiente manera:

$$z = r_\alpha$$

En cuanto al argumento de z es importante observar que dado un punto cualquiera (x, y) el ángulo θ no es único ya que: $z = r(cos\ \theta + isen\ \theta) = r(\cos\theta' + i\text{sen}\ \theta')$ en donde $\theta' = \theta + 2\pi k$ para $k \in \mathbb{N}$. Para evitar esta falta de unicidad se suele especificar el rango en el que se encuentra θ, por ejemplo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Relación entre la forma polar y la forma binómica

Ambas formas, polar y binómica están relacionadas entre sí ya que:

$$z = a + bi = r\big(\cos(\alpha) + i\ sen(\alpha)\big)$$

Es decir, que podemos identificar:

$$a = rcos(\alpha) \quad y \quad b = rsen(\alpha)$$

De esta manera llegamos también al tercer *a* de las formas en las que se puede representar un número complejo, la forma trigonométrica:

$$z = r(\cos(\alpha) + i\ sen\ (\alpha))$$

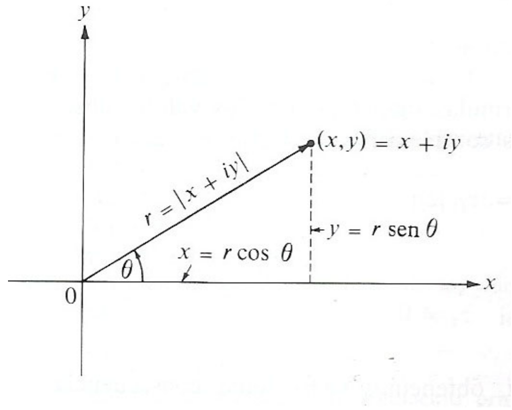


Figura 1. Representación geométrica del número x+iy. Fuente: Apóstol, 1999, vol .2 p. 443.

La figura 1 nos muestra la representación de un número complejo en su forma binomial y trigonométrica.

Ejemplo 1: Pasar a forma polar y trigonométrica el número complejo:

$$z = -1 - \sqrt{3}i$$

Lo primero que necesitamos conocer son el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{1} \rightarrow \alpha = arctg(\sqrt{3}) =$$

$$240° = \frac{4\pi}{3} rad$$

Así *z* en forma polar es:

$$z = 2_{240°} = 2_{\frac{4\pi}{3}}$$

Y en forma trigonométrica:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

De igual manera se puede obtener la forma binómica a partir de cualquiera de las otras dos formas.

4.3. Operaciones con números complejos

En este apartado vamos a encontrar las operaciones que se pueden realizar con números complejos.

Igualdad

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ decimos que z_1=z_2 si, y solo si, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales, es decir:

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = b_2$$

Suma

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ se define la suma de ambos como:

$$z_3 = z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Es decir, se suma la parte real de cada uno de los complejos por un lado y la parte imaginaria por otro. La Figura 2 nos muestra un ejemplo gráfico de la suma de dos números complejos.

Ejemplo 2: Suma z_1=1+2i y z_2=3-i

$$z_3 = z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 - i) = 4 + i$$

Resta

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ se define la resta de ambos como:

$$z_3 = z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Es decir, se suma la parte real de cada uno de los complejos por un lado y la parte imaginaria por otro. La Figura 2 nos muestra un ejemplo gráfico de la resta de dos números complejos.

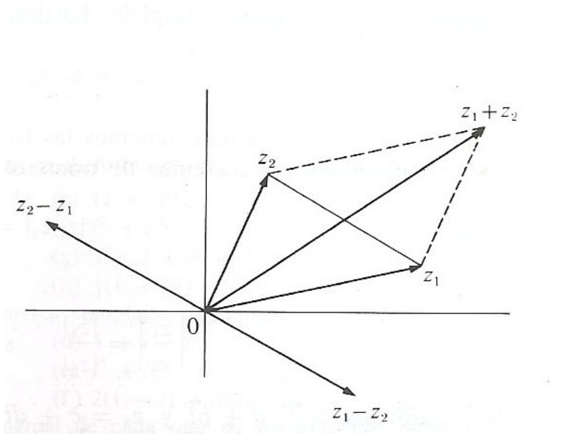


Figura 2. Suma y resta de números complejos de manera geométrica. Fuente: Apóstol, 1999, vol. 2 p. 443.

Ejemplo 3: Resta z_1=1+2i y z_2=3-i

$$z_3 = z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 - i) = -2 + 3i$$

Producto

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ se define el producto de ambos como:

$$z_3 = z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

En la parte real se tiene un término restando, este término negativo proviene de que dicho término esta multiplicado por i^2, y como ya se ha comentado antes i^2=-1.

Ejemplo 4: *Multiplica z_1=1+2i y z_2=3-i*

$$z_3 = z_1 z_2 = (1 + 2i)(3 - i) = 5 + 5i$$

Cociente

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ se define el cociente de ambos como:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Es decir, hay que multiplicar tanto en el numerador como en el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 5: *Divide z_1=1+2i por z_2=3-i*

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{1} + \frac{7}{10} i$$

Producto en forma polar

Dados dos números complejos $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$ se define el producto de ambos como

$$z_3 = r_\alpha s_\beta = (rs)_{\alpha+\beta}$$

Es decir, se multiplican los módulos y se suman los argumentos de ambos números complejos, dando lugar a un nuevo módulo y argumento.

Ejemplo 6: *Multiplica $z_1=6_{130º}$ y $z_2=2_{40º}$*

$$z_3 = 6_{130°}2_{40°} = 12_{170°}$$

Cociente en forma polar

Dados dos números complejos $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$ se define el cociente de ambos como:

$$z_3 = \frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

Es decir, se dividen los módulos y se restan los argumentos de ambos números complejos, dando lugar a un nuevo módulo y argumento.

Ejemplo 7: *Divide $z_1=6_{130º}$ por $z_2=2_{40º}$*

$$z_3 = \frac{6_{130°}}{2_{40°}} = \left(\frac{6}{3}\right)_{130°-4°} = 2_{90°}$$

Potencia de un número complejo en forma polar

Dados un número complejo $z = r_\alpha$ se define la potencia *n*-ésima de *z* como:

$$z^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

Es decir, se eleva el módulo a *n* y se multiplica el argumento también por *n* dando lugar a un nuevo módulo y argumento.

Por otro lado, utilizando la Fórmula de Moivre la potencia *n*-ésima de un número complejo puede expresarse en forma trigonométrica como:

$$z^n = (r_\alpha)^n = r^n\big(\cos(n\alpha) + i\ sen(n\alpha)\big)$$

Ejemplo 8: *Calcula la potencia quinta de z=2*$_{120º}$

$$z^5 = (2_{120°})^5 = 2^5_{600°} = 32_{240°}$$

$$z^5 = 32(cos(240°) + i\ sen(240°))$$

Raíz *n*-ésima en forma polar

Dado un número complejo $z = r_\alpha$ se define la raíz *n*-ésima de *z* como:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha}{n}}$$

Es decir, se hace la raíz *n*-ésima del módulo y se divide el argumento también por *n* dando lugar a un nuevo módulo y argumento.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+360°k}{n}}$$

Donde k=0, 1,…,n-1. Observemos que un número complejo tendrá *n* raíces *n*-ésimas.

Ejemplo 9: *Calcula la raíz cúbica de z=8*$_{90º}$

$$\sqrt[3]{8_{90°} = 2_{\frac{(90°+360°k)}{3}} = 2_{30°+120°k}} =$$

$$\begin{cases} 2_{30°} \\ 2_{150°} \\ 2_{270°} \end{cases}$$

Por lo que obtenemos las tres raíces cúbicas.

Complejo conjugado y complejo opuesto

Otros conceptos de gran utilidad en el estudio de los números complejos son el de *opuesto*:

$$-z = -a - bi$$

Y *conjugado*:

$$\bar{z} = a - bi$$

Geométricamente $\overline{z}$ representa el número complejo simétrico a z con respecto al eje real. Es posible comprobar que el complejo conjugado de un número complejo verifica las propiedades:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$$

Y:

$$z\,\overline{z} = |z|^2$$

Exponenciales complejas

Finalmente vamos a tratar el cálculo de la función exponencial. La intención es definirla de tal manera que se verifiquen las propiedades usuales de la función exponencial que ya conocemos de las funciones reales, en particular la relación $e^a e^b = e^{a+b}$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.

Para ello empezamos la sección con la importante definición de función exponencial de un número complejo puro, es decir, un número $z = iy$ sin parte real. La expresión de esta exponencial viene dada por:

$$\boldsymbol{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y}$$

Mediante esta identidad podemos definir la función exponencial para cualquier $z \in \mathbb{C}$ como sigue:

La función exponencial $\boldsymbol{e^z}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{e^z = e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y)}$$

Vemos que si z no tiene parte imaginaria, es decir $y = 0$, entonces $e^z = e^x$ por lo que la función coincide con la exponencial real.

Además, si tenemos dos números complejos a y b entonces la exponencial compleja verifica que $\mathbf{e^a e^b = e^{a+b}}$

Efectivamente, tenemos que usar fórmulas trigonométricas:

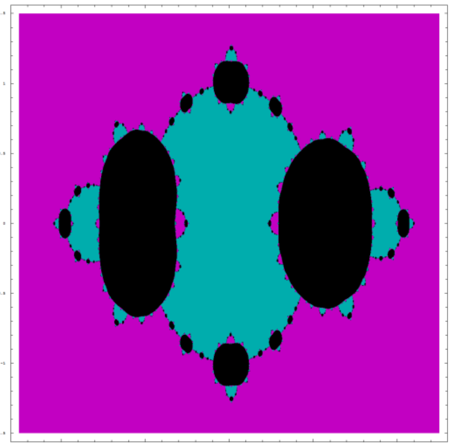
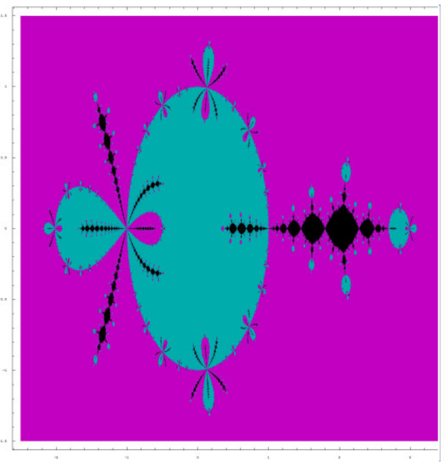
$$\begin{aligned} e^a e^b &= e^x e^u\big(\cos y \cos v - \mathrm{sen}\, y \,\mathrm{sen}\, v + i(\cos y \,\mathrm{sen}\, v + \mathrm{sen}\, y \cos v)\big) \\ &= e^x e^u\big(\cos(y+v) + i \,\mathrm{sen}(y+u)\big) \\ &= e^{a+b} \end{aligned}$$

Podemos observar que, dada la representación polar de un número complejo $z = r_\alpha$ se verifica que $z = r\, e^{i\alpha}$.

4.4. Aplicaciones de los números complejos

Los números complejos se van a presentar en numerosas ocasiones en la vida real:

- En ingeniería mecánica se usan para representar el comportamiento de los fluidos.
- Para el análisis dinámico de estructuras y para el control numérico de acciones de una máquina herramienta por medio de números.
- En los fractales que son diseños artísticos de infinita complejidad. En su versión original se los define a través de cálculos con números complejos en el plano.

- En el análisis de corriente eléctrica y de señales electrónicas.
- Etc.