Física I

Aplicación de los fundamentos: problemas tipo

Índice

Esquema

APLICACIÓN DE LOS FUNDAMENTOS: PROBLEMAS TIPO DE DINÁMICA

Equilibrio dinámico

- **Estática:** cuerpos en equilibrio dinámico. Se está en equilibrio dinámico cuando la aceleración de un cuerpo es nula aunque esté sometido a fueras. Condición de equilibrio dinámico:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$$

- Operaciones posibles con vectores en estática: sustituir varias fuerzas por su suma, descomponer una fuerza en distintos ejes, incorporar dos fuerzas iguales con sentidos opuestos, eliminar dos fuerzas iguales con sentidos opuestos...
  - **Ejemplo 1.** Bloque colgado del techo
  - **Ejemplo 2.** Bloque colgado del techo por varias cuerdas

Móviles sometidos a fuerzas

- **Ejemplo 3.** Móvil sometido a una fuerza
- **Ejemplo 4.** Móvil bajo la acción de la ley de Hooke
- **Ley de Hooke:** $F = -K(x - x_0)$

Planos inclinados

- **Ejemplo 5.** Plano inclinado sin rozamiento
- **Ejemplo 6.** Plano inclinado sin rozamiento y con cuerdas
  Ejemplo 7. Plano inclinado sin rozamiento y con sistemas elásticos

Problemas con rozamiento

- **Ejemplo 8.** Movimiento de un bloque del que se tira considerando rozamiento
- **Ejemplo 9.** Plano inclinado con rozamiento
- **Ejemplo 10.** Plano inclinado doble con rozamiento

Al resolver problemas de dinámica en los que la aceleración puede tener dos sentidos, hay que plantear los diagramas de fuerza asumiendo que la aceleración tendrá un sentido determinado. Si, al resolver, sale una aceleración negativa, la suposición será incorrecta y habrá que repetirlo suponiendo que la aceleración va en el otro sentido.

Movimiento circulares

- **Ejemplo 11.** Móvil que gira atado a una cuerda
- **Ejemplo 12.** Satélite que orbita alrededor de la Tierra.
- **Ejemplo 13.** Ángulo de peralte

Colisiones

- Se resuelven usando el principio d conservación de la cantidad de movimiento:
- **Ejemplo 14.** Colisión en una dirección
- **Ejemplo 15.** Colisión en un plano
- **Ejemplo 16.** Colisión con la aparición de nuevos móviles

6.1. Introducción y objetivos

En los dos temas anteriores, hemos descrito todos los conceptos básicos necesarios para comprender la dinámica newtoniana y saber cómo modela esta las interacciones entre partículas, que se producen por medio de la aplicación de fuerzas por parte de unos objetos sobre otros. Sin embargo, no se ha entrado en ningún momento en cómo se utilizan en la práctica.

En este tema se cubre ese hueco y a través de una serie de problemas tipo resueltos ilustraremos el empleo de los métodos y conceptos definidos en los dos temas precedentes. La idea es mostrar la forma de trabajar de manera que obtengas las herramientas necesarias para abordar problemas de mayor complejidad.

Una vez terminada la lectura y asimilación del tema, adquirirás las siguientes competencias:

- Saber resolver problemas típicos de sistemas sometidos a varias fuerzas en equilibrio.
- Conocer las formas de abordar problemas de móviles sometidos a fuerzas.
- Saber resolver problemas de planos inclinados, con o sin ligaduras.
- Saber cómo solucionar problemas cuando se considera rozamiento.
- Hacer cálculos sencillos de movimientos circulares.
- Resolver problemas de colisiones aplicando la conservación de la cantidad de movimiento.

6.2. Partículas en equilibrio dinámico

Antes de empezar con la resolución de problemas, hay que presentar algunos conceptos teóricos muy breves, que consideramos mejor introducir en este tema porque no tienen la entidad suficiente como para crear una nueva sección en los temas precedentes.

El estudio de las partículas en equilibrio dinámico, a menudo, se denomina **estática o estática de la partícula**. Se basa en la siguiente definición:

Se dice que una partícula se halla en equilibrio dinámico con respecto a un sistema de referencia inercial cuando su aceleración es nula a pesar de estar sometida a la acción de varias fuerzas. La condición de equilibrio dinámico se obtiene haciendo cero el término que lleva la aceleración en la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$$

Donde el sumatorio se extiende a todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

En los problemas de estática, es necesario, a veces, cambiar las fuerzas para simplificar el problema, y puede ser imposible la resolución si no se hacen ciertas manipulaciones en el sistema de fuerzas que actúan sobre la partícula. Es legítimo efectuar cambios siempre y cuando el efecto total de las fuerzas siga siendo el mismo. Por ello, es posible hacer cosas como las siguientes:

- Sustituir varias fuerzas por su suma vectorial.
- Sustituir una fuerza por varias de manera que la suma de todas las nuevas fuerzas den lo mismo que la original.

- Como caso particular de la anterior, se puede sustituir una fuerza por su descomposición en dos o tres ejes.
- Se pueden incorporar dos fuerzas iguales, pero de sentidos opuestos.
- También se puede hacer lo contrario: eliminar dos fuerzas iguales, pero de sentidos opuestos.

Este tipo de operaciones puede hacerse siempre, aunque no hay reglas fijas: hay muchas formas de resolver problemas de estática.

Como último comentario de esta introducción, no se debe confundir ausencia de velocidad con equilibrio. Aunque en la vida cotidiana, la mayoría de los cuerpos que se hallan en equilibrio dinámico también están quietos, es posible que una partícula inmóvil no esté en equilibrio y una partícula en movimiento sí lo esté.

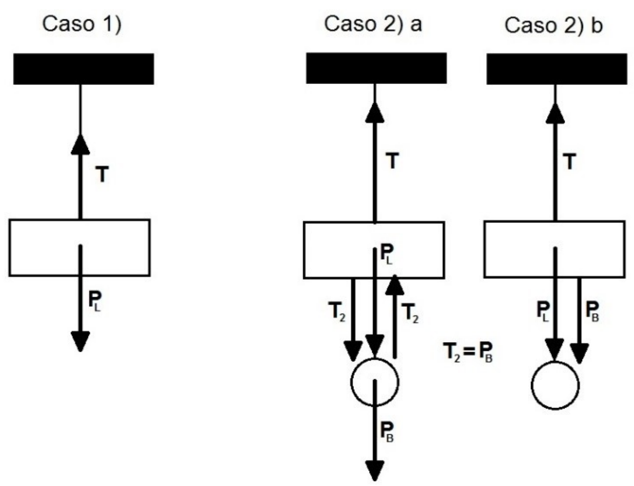
Por ejemplo, en un lanzamiento vertical de los estudiados en cinemática, en el punto más alto de la trayectoria el objeto está parado (al menos instantáneamente), pero no está en equilibrio porque el peso no está compensado con ninguna fuerza. En cambio, si se arrastra un bloque por el suelo efectuando sobre él la fuerza justa para vencer el rozamiento, el sistema está en equilibrio dinámico, ya que la suma de fuerzas sobre el mismo es nula, independientemente de que se esté moviendo a velocidad constante.

Ejemplo 1: Bloque colgado del techo

Un bloque de 5 kg de masa está sujeto del techo de una habitación por una cuerda que soporta un máximo de 150 N. En un momento dado, se cuelga bajo el bloque una bola de acero de 3 Kg. Calcular:
La tensión de la cuerda antes de colgar la bola.
La tensión de la cuerda tras colgar la bola.
¿Se rompe la cuerda en alguno de los dos casos?

El primer paso es analizar si el bloque se halla en equilibrio. En principio, ha de concluirse que sí, siempre que la cuerda soporte su peso, porque se mantiene inmóvil y, en todo momento, sufre la acción del peso. Ello implica que la suma de las fuerzas que actúan sobre el bloque ha de ser nula, y que ha de existir una fuerza de sentido opuesto al peso y de igual módulo, que haga nula la resultante de las fuerzas. Esa fuerza solo la puede suministrar la cuerda y es, precisamente, la tensión de la misma. Se esquematiza esta situación en la parte izquierda de la figura.

Cuando se cuelga la bola de acero, el sistema de fuerzas se complica, pero como lo que se desea calcular es la tensión de la cuerda, es posible limitarse a la acción que la cuerda que une al bloque y a la bola ejerce sobre el bloque, básicamente, el peso de la bola de acero. Los dos diagramas de la derecha de la figura esquematizan la manera de tratar el problema. Las dos tensiones que sufre la cuerda de unión entre bloque y bola deben ser iguales entre sí, de otro modo, la cuerda no estaría en equilibrio y sufriría una aceleración neta, cosa que es absurda:



Con estos datos podemos abordar los apartados del problema.

En la primera cuestión, la condición de equilibrio dinámico en la dirección vertical lleva a:

$$T - P = 0$$

De donde se despeja T y se obtiene la solución al primer caso:

$$T = P = m\,g = 5\ \cdot 9{,}8 = 49\,N$$

A la vista del diagrama, el segundo caso lo resolvemos imponiendo la ecuación que expresa la condición de equilibrio para el bloque:

$$T - P - T_B = 0$$

Sabiendo que T_B es igual al peso de la bola y despejando la tensión, queda:

$$\boldsymbol{T = P + T_B = 5\ \cdot 9{,}8 + 3\ \cdot 9{,}8 = 78{,}4\,N}$$

A la vista de este resultado, dado que la cuerda aguanta 150 N, se puede afirmar que la cuerda es capaz de resistir la tensión en ambos casos.

En este problema hemos puesto de manifiesto una cuestión importante siempre que se traten problemas de dinámica: los signos de las fuerzas en las ecuaciones escalares.

El uso de ecuaciones escalares en problemas de dinámica es una simplificación, ya que siempre se deberían emplear ecuaciones vectoriales. Sin embargo, cuando todas las fuerzas actúan en la misma dirección, es más sencillo plantear directamente las ecuaciones en módulo.

Cuando se tratan problemas de estática, en los cuales el producto de la masa por la aceleración es nulo, es indiferente el signo y en vez de $T - P = 0$podríamos haber escrito $-T + P = 0$: el resultado sería idéntico.

En problemas posteriores, utilizaremos el convenio, de extraordinaria utilidad, de considerar positivas las fuerzas que van a favor de la aceleración y negativas las que van en contra.

En todo caso, no habría equívocos si se hubiera resuelto el problema anterior escribiendo las ecuaciones vectoriales que, en realidad, es el método correcto. Esto implicaría seguir los siguientes pasos:

- Definir el sistema de referencia.
- Escribir los vectores asociados a cada fuerza usando ese mismo sistema de referencia.
- Plantear las ecuaciones vectoriales y resolverlas.

A modo de ejemplo, resolveremos el primer apartado de nuevo, pero usando todos los pasos que, al plantear ecuaciones escalares, se hacen de manera implícita. El sistema de referencia escogido es aquel cuyo eje es paralelo a la cuerda que sujeta el bloque. En este sistema de referencia, la tensión y el peso valen:

$$\vec{T} = T\,\hat{j} \qquad\qquad \vec{P} = -mg\,\hat{j}$$

La condición de equilibrio dinámico queda:

$$\vec{T} + \vec{P} = 0 \;\Rightarrow\; T\,\hat{j} - mg\,\hat{j} = 0 \;\Rightarrow\; (T - mg)\,\hat{j} = 0$$

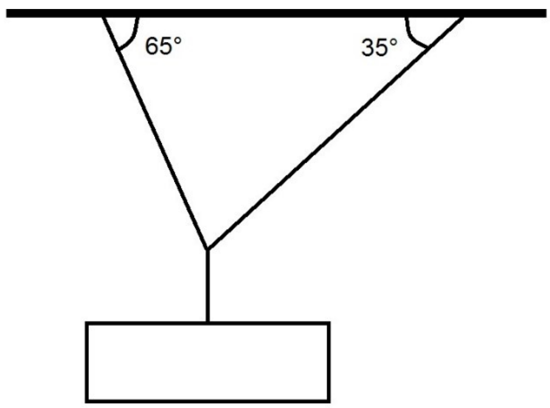
Y como dos vectores son iguales si sus componentes también lo son, es evidente que resolver la ecuación vectorial precedente equivale a resolver:

$$T - mg = 0$$

Que es la misma ecuación que se resolvió en el problema.

Ejemplo 2: Bloque colgado de varias cuerdas

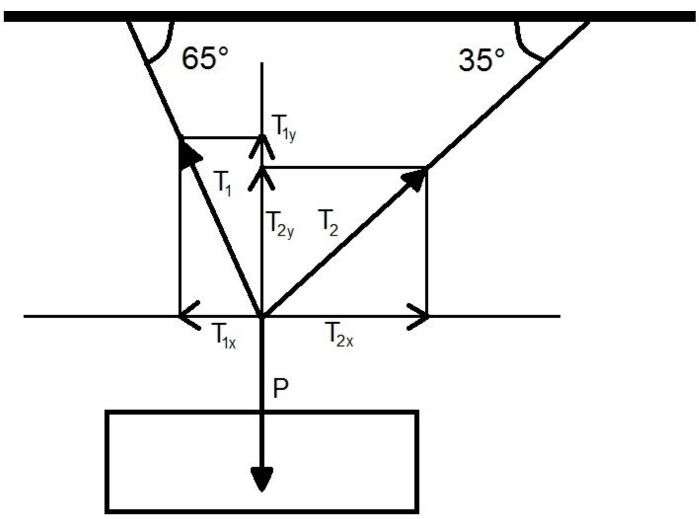
Un bloque de 25 kg de masa está sujeto a un techo por las dos cuerdas de la figura. Calcular la tensión de las dos cuerdas.



Es evidente que el sistema se halla en equilibrio dinámico. La manera de abordar el problema es plantear la ecuación a que nos lleva la condición de equilibrio dinámico. Llamaremos cuerda 1 a la que describe un ángulo de 65º con el techo, y cuerda 2 a la que define un ángulo de 35º. La ecuación vectorial que indica la condición de equilibrio es:

$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \vec{P} = 0$$

De esos tres vectores, solo se conoce el valor del peso del cuerpo. De las tensiones lo único claro es que son vectores que irán en la misma dirección de cada cuerda. Las fuerzas se representan en la siguiente figura:



Donde se ha movido el peso al punto donde se unen las cuerdas. Esto es posible hacerlo, ya que la tensión de la cuerda que va del punto de unión hasta el bloque está sometida a una tensión igual al peso del bloque, cuyo efecto es tirar del punto de unión entre las cuerdas hacia abajo.

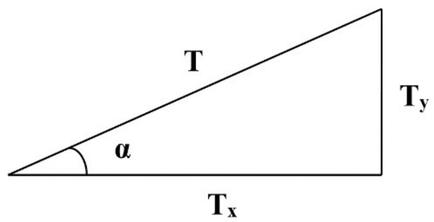
Usando un sistema de referencia tal que el eje x es paralelo al techo y el eje y perpendicular al mismo, se pueden escribir los vectores involucrados descompuestos en las direcciones de ambos ejes. Esta descomposición es la que permitirá solucionar el problema.

Hay dos formas de abordar la resolución: con ecuaciones escalares y con ecuaciones vectoriales. En este problema se muestran las dos, aunque, a partir de ahora, se usará el método con ecuaciones escalares de manera preferente, al ser algo más rápido.

Comenzaremos con el método escalar. A partir de la figura se ve que la única forma de que todas las fuerzas se compensen es que las componentes horizontales se anulen y las verticales también lo hagan. A la vista de la figura ello implica que:

- Eje horizontal: $T_{1x} = T_{2x}$.
- Eje vertical: $T_{1y} + T_{2y} = \mathrm{P}$.

Como hay cuatro incógnitas, dos componentes de cada una de las tensiones, en principio no se puede resolver el problema, ya que faltarían dos ecuaciones. Sin embargo, es posible relacionar las componentes horizontal y vertical de cada tensión usando las expresiones de senos y cosenos, que se muestran como referencia en la siguiente figura:



$$T_x = T \cos\alpha$$
$$T_y = T\ sen\ \alpha$$

Usando esto, las ecuaciones para la dirección horizontal y la vertical quedan:

- Eje horizontal: $T_1 \cos 65° = T_2 \cos 35°$
- Eje vertical: $T_1 sen\ 65° + T_2\ sen\ 35° = P$

Como el valor de *P* es conocido, ha quedado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, con lo que ya es posible resolverlo. Tras hacerlo, los valores de las tensiones son:

$$\boldsymbol{T_1 = 203{,}7883N} \qquad \boldsymbol{T_2 = 105{,}1388\ N}$$

Resolverlo usando expresiones vectoriales implica escribir cada vector implicado en el sistema de referencia escogido. Con ello, se tiene:

$$\overrightarrow{T_1} = -T_{1x}\hat{\imath} + T_{1y}\,\hat{\jmath}$$
$$\overrightarrow{T_2} = T_{2x}\hat{\imath} + T_{2y}\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{P} = -mg\,\hat{\jmath}$$

Aplicando la condición de equilibrio dinámico:

$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \vec{P} = 0$$

Obtenemos:

$$-T_{1x}\hat{\imath} + T_{1y}\,\hat{\jmath} + T_{2x}\hat{\imath} + T_{2y}\,\hat{\jmath} + -mg\,\hat{\jmath} = 0$$

Reordenando los términos, agrupando aquellos que van multiplicados por î por un lado, y los multiplicados por ĵ por otro, queda:

$$(-T_{1x} + T_{2x})\hat{\imath} + (T_{1y} + T_{2y} - mg)\,\hat{\jmath} = 0$$

Es trivial ver que al igualar cada uno de los dos componentes de este vector a cero, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones que resolvimos para el caso de las ecuaciones escalares.

6.3. Móviles sometidos a fuerzas

En este apartado, trataremos problemas de móviles sometidos a fuerzas donde no se considera la acción de fuerzas de rozamiento.

> **Ejemplo 3: Móvil que sufre una fuerza**
>
> Una bola de 2,5 kg se desplaza en línea recta con una velocidad hacia la derecha de 10 m/s. En la misma dirección, pero en sentido contrario, empieza a actuar una fuerza constante de 60 N:
> Describir cualitativamente el movimiento.
> ¿Hay algún punto en el que se detiene la bola? Si es así, ¿cuándo?
> ¿Qué velocidad llevará la bola 200 s después del comienzo de la actuación de la fuerza?

- El cuerpo se desplazará en un Movimiento Rectilíneo Uniforme hacia la derecha hasta el instante en que la fuerza se empieza a aplicar, que se supondrá el instante *t=0s*. En ese momento, la bola adquirirá una aceleración constante que frenará a la partícula. La partícula irá reduciendo su velocidad hacia la derecha, llegará a detenerse y empezará a incrementar su velocidad en el sentido contrario al original.

- Como hemos visto en el apartado anterior, el cuerpo se detendrá. Para calcular el momento en que lo hace, hay que empezar usando la ecuación fundamental de la dinámica para calcular la aceleración. Dado que velocidad y aceleración están en la misma dirección, se pueden usar expresiones escalares. Con ello:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow\; F = m\,a \;\Rightarrow\; 60 = 2{,}5\,a \;\Rightarrow\; a = 24\,m/s^2$$

A partir de aquí, el procedimiento de cálculo se basa en la cinemática. La aportación de la dinámica se ha limitado a decir qué aceleración adquiere la bola tras someterla a la acción de la fuerza de 60 N, cosa que la cinemática no podía aportar. Como se busca el instante en que la velocidad se anula y, tras la acción de la fuerza, la bola se mueve en un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado, el momento buscado se hallará imponiendo que la velocidad sea nula en la ecuación de la velocidad en un MRUA:

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; 0 = 10 - 24t \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{24}} = \mathbf{0{,}4167}\boldsymbol{s}$$

En esta ecuación, **hemos supuesto negativa la aceleración porque se opone al movimiento**. Esta forma de proceder es vital para la resolución de problemas usando ecuaciones escalares.

- Este apartado vuelve a ser de cinemática. Se utiliza la misma ecuación que en el segundo, pero basta con limitarnos a sustituir los datos para calcular la velocidad:

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; v = 10 - 24 \cdot 200 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v} = -\,\mathbf{4\,790}\;\boldsymbol{m/s}$$

Donde el signo negativo indica que la velocidad va hacia la izquierda.

Ejemplo 4: Movimiento bajo la acción de la ley de Hooke

Un móvil de 1 kg de masa rueda en una superficie horizontal, a 30 m/s, hacia un muelle muy largo, que cumple la ley de Hooke, de constante recuperadora K=50 N/m. En consecuencia, el móvil se comprimirá en una longitud determinada. Calcular:

¿Cuánto se comprime el muelle?

¿Qué fuerza ejerce el muelle sobre el móvil en el punto en que su compresión es máxima?

¿Con qué velocidad sale rebotado el móvil tras recuperar el muelle su longitud original?

Un muelle obedece la ley de Hooke si la fuerza que suministra está dada por:

$$F = -k\,(x - x_0)$$

Donde k es la constante recuperadora, x la longitud del muelle en determinado momento y x_0 la longitud natural del muelle (la longitud sin que sufra compresión o estiramiento).

Para este problema, supondremos que el eje x tiene su cero en la longitud natural del muelle, o sea: $x_0 = 0$. Con esto, la expresión de la ecuación fundamental de la dinámica cobra la forma:

$$-k\,x = ma$$

A pesar de su aparente sencillez, esta ecuación no la podemos resolver sin utilizar métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de segundo grado que, en un principio, exceden los conocimientos de un estudiante de primer curso universitario. Por ello, deberemos aceptar que la solución de esta ecuación diferencial es la siguiente ecuación del movimiento:

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\; sen \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\; t \right)$$

Una vez obtenida esta ecuación, contamos con todo lo necesario para conocer cómo se mueve el sistema; el problema era la incapacidad de obtener tal ecuación con los conocimientos matemáticos a tu disposición. Pasamos a resolver los apartados:

- La ecuación del movimiento durante el intervalo en el que sufre la acción del muelle, la obtenida antes, tiene la particularidad de que es periódica, ya que la función seno es una función periódica cuyos valores oscilan entre 1 y -1. Por ello, la máxima compresión del muelle se produce cuando el seno es 1. Eso implica que la máxima compresión vale:

$$\boldsymbol{x_{MAX} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = 30 \sqrt{\frac{1}{50}} = 4,2426\, m}$$

Para calcular esta fuerza, basta sustituir el valor obtenido en el apartado anterior en la expresión de la ley de Hooke, lo que resulta:

$$\boldsymbol{F = -k\, x = -50 \cdot 4,2426 = -\,212,13\, N}$$

- El cálculo de la velocidad a la salida implica obtener la expresión de la velocidad para cualquier instante. Como puede hacerse en general, se deriva con respecto al tiempo la expresión de x(t), lo que lleva a:

$$v(t) = v_0\ cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Es evidente que la velocidad con la que sale el móvil es aquella que lleve cuando x=0 m. El problema está en que x será nula en todos los instantes que cumplan:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, t = n\pi\,,\quad n = 0{,}1{,}2\ \ldots$$

En esos instantes, el coseno será 1 o -1. En el caso del presente problema, deseamos calcular la velocidad del móvil cuando n=1, esto es, la primera vez que el muelle se estira completamente tras haberse comprimido. Por ello, el coseno que aparece en la expresión de la velocidad vale -1, y la velocidad, por tanto, es:

$$\boldsymbol{v(t) = -\,v_0}$$

El signo negativo indica que la velocidad del móvil va en la dirección negativa del eje, como es lógico que suceda.

Este problema, en realidad inabordable con los conocimientos habituales de un estudiante que se inicia en la física, será muy sencillo de resolver con los métodos que estudiaremos en el tema siguiente: trabajo, energía y su conservación. Repetiremos este problema en el tema 8 usando esos métodos para ilustrar hasta qué punto pueden simplificar la resolución.

6.4. Planos inclinados

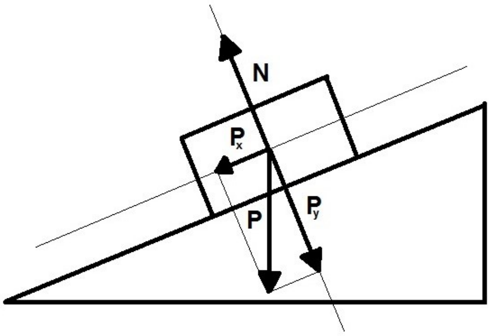
El estudio del movimiento de bloques que se deslizan por planos inclinados es un tema tradicional en todos los cursos de dinámica. Son sistemas que aúnan el representar algo muy cotidiano con el hecho de que son problemas sin excesiva dificultad, pero que obligan a emplear muchos de los conceptos fundamentales de la mecánica.

Empezaremos tratando casos donde el rozamiento es despreciable con el propósito de ir presentando los contenidos con dificultad creciente.

Ejemplo 5: Plano inclinado elemental sin rozamiento

Un bloque de masa 5 kg se deja caer por un plano, inclinado 35º con respecto a la horizontal y cuyo extremo superior, desde donde se deja caer el bloque, está a 10 m de altura. Suponiendo despreciable el rozamiento, calcular:
Velocidad que lleva cuando alcanza el final del plano.
Tiempo que tarda en llegar al final del plano.

El primer paso para la resolución del problema es hacer un esquema con las fuerzas que afectan al bloque. Este esquema será como el de la figura:



Las dos únicas fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso y la normal, que introduce el hecho de que el bloque no puede atravesar el plano inclinado. Algo muy importante a tener en cuenta es:

El ángulo del plano inclinado con respecto a la horizontal es el mismo que hay entre la vertical y la componente P_y del peso. Dicho de otro modo, el ángulo entre los vectores peso y componente y del peso es el mismo que la inclinación del plano

Esto lo usaremos para calcular las componentes del peso en las direcciones adecuadas.

Un procedimiento muy útil y recomendable en todo problema de dinámica es que cuando los movimientos sean rectilíneos, descompongas todas las fuerzas en dos (o en tres) direcciones: una de las direcciones será siempre aquella en la que se produzca el movimiento y las otras dos, perpendiculares a esta y entre sí.

Para el caso del plano inclinado basta con dos: la del movimiento y la perpendicular a esta. Esto implica descomponer el peso en dos componentes, que son:

$$P_x = P\ sen\ \theta$$
$$P_y = P\ cos\ \theta$$

Donde el ángulo es el ángulo del plano inclinado. Esto nos permite convertir la ecuación fundamental de la dinámica en dos ecuaciones escalares: una para las fuerzas en horizontal y otro para las fuerzas en vertical. En este caso, son:

- Horizontal: $P_x = m\,a \Rightarrow mg\,sen\,\theta = m\,a \Rightarrow \boldsymbol{a = g\,sen\,\theta}$
- Vertical: $N = P_y \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$

Dado que en el eje donde se halla la normal no hay movimiento y la masa por la aceleración dan cero, esto implica que los módulos de ambos vectores son iguales. La ecuación vertical, en este caso, no sirve porque el enunciado no pide la normal. Sin embargo, la horizontal nos da toda la información necesaria: la aceleración. Con ese dato ya es posible resolver el problema apartado a apartado.

Tanto para el primer apartado como para el segundo lo primero que debemos averiguar es la distancia que recorre el bloque desde el punto situado a 10 m de altura hasta el final del plano. Para ello, utilizaremos nuevamente trigonometría. Siendo *h* la altura de 10 m, esa distancia *d* queda:

$$d = \frac{h}{sen\,\theta}$$

Y el problema se reduce a resolver un MRUA cuyas ecuaciones, dado que la velocidad inicial es nula (se deja caer), son:

$$e = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$
$$v = a\,t$$

Por sencillez, hemos supuesto como espacio inicial el punto de salida del bloque y la aceleración, la velocidad y el espacio como positivos, lo que es legítimo.

Sustituyendo los valores del problema, queda:

$$\frac{h}{sen\,\theta} = \frac{1}{2}\,g\,sen\,\theta\,t^2$$

$$v = g\,sen\,\theta\,t$$

Vemos que en la ecuación anterior, solo desconocemos el tiempo. Despejando el tiempo:

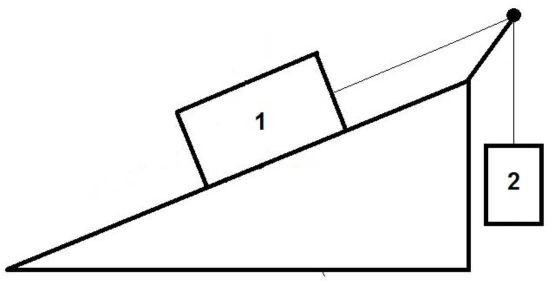
$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2h}{g\,sen^2\,\theta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,8\ \cdot\ sen^2\,35°}} = 2,49\ s}$$

Y la velocidad queda, por tanto:

$$\boldsymbol{v = 9,8\ sen\,35°\ 2,49 = 14\ m/s}$$

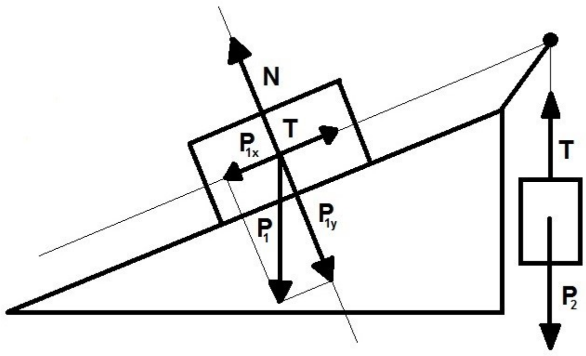
Ejemplo 6: Plano inclinado sin rozamiento y con cuerdas

Dos bloques están atados en un plano inclinado de la manera en que se indica en la figura. El bloque 1 pesa 20 kg mientras que el bloque 2 pesa 9 kg. El ángulo del plano inclinado con el suelo es de 25º. Si se desprecian los rozamientos, el peso de la cuerda y la acción de la pequeña polea representada, calcular la aceleración que adquieren los bloques y hacia dónde va dirigida y la tensión de la cuerda.



Como en todos los problemas de dinámica, el primer paso es representar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos considerados (en este caso, el cuerpo 1 y el cuerpo 2).

El diagrama que contiene todas las fuerzas que experimentan los bloques es el siguiente:



El esquema es similar al que dibujamos para el caso de un único bloque en lo que respecta al bloque 1. La diferencia está en que la acción del cuerpo 2 en el 1 se efectúa por medio de la cuerda, que imprime una tensión llamada *T* en la figura.

El cuerpo 2, simplemente, cuelga en vertical y la acción de sujeción del bloque 1 la efectúa la tensión. Como se ha despreciado el efecto de la polea que dobla la cuerda, la tensión a ambos lados de la cuerda es la misma y representa una fuerza de ligadura que obliga a ambos bloques a moverse solidariamente. Esa misma suposición implica que la aceleración de ambos bloques será siempre la misma.

En los dos casos, se han descompuesto todas las fuerzas en dos direcciones: aquella en la que se produce el movimiento y la perpendicular a esta. Para el cuerpo 1 es necesario descomponer el peso en dos vectores, algo innecesario en el caso del cuerpo 2, ya que todas las fuerzas están en la dirección del movimiento. Recordando que, por trigonometría:

$$P_{1x} = P_1 \, sen \, \theta$$
$$P_{1y} = P_1 \, cos \, \theta$$

Donde el ángulo son los 25º, se pueden plantear las siguientes ecuaciones escalares:

- Bloque 1. Dirección horizontal: $P_{1x} - T = m_1\ a$

  Dirección vertical: $N = \ P_{1y}$
- Bloque 2. Dirección vertical: $T - P_2 = m_2\ a$

En las ecuaciones anteriores hemos hecho una suposición cuya importancia es vital en este tipo de problemas: que la aceleración va hacia la izquierda, esto es, que el bloque 1 tira del bloque 2 de manera que el 1 desliza por el plano y el 2 sube. Esto es tan fundamental que se establece un procedimiento a seguir en todo momento:

A la hora de plantear ecuaciones escalares en dinámica debemos fijar el sentido probable de la aceleración. Es imprescindible porque todas las fuerzas que vayan en el sentido de la aceleración serán positivas y las que vayan al contrario, negativas.

El problema debe resolverse y si la aceleración resultara ser negativa, ello indicará que la suposición es incorrecta y la aceleración va en sentido contrario. Entonces, tendremos que volver a plantear el problema desde el principio, suponiendo opuesto el sentido de la aceleración.

Si utilizamos el método vectorial, esta suposición no es necesaria (**salvo que se introduzcan fuerzas de rozamiento u otras que dependan del movimiento**). En ese caso, se elige un sistema de referencia, se escriben las expresiones de los vectores en función de ese sistema de referencia, se suman para cada uno de los bloques y se resuelve. La aceleración será un vector con la dirección correcta. No obstante, este método es más complicado en casos como el del presente problema, y merece la pena plantear las ecuaciones escalares suponiendo un sentido de desplazamiento del sistema.

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores los datos del problema, obtenemos:

- Bloque 1. Dirección horizontal: $m_1\ g\ sen\ \theta - T = m_1\ a$
- Bloque 2. Dirección vertical: $T - m_2\ g = m_2\ a$

Donde hemos eliminado la ecuación en la dirección vertical del bloque 1 porque no aporta nada en este problema. Solo son desconocidas T y a, con lo que tenemos suficiente con estas dos ecuaciones. Este hecho es importante en general:

Un sistema de ecuaciones, en lo que respecta a los problemas de física, es resoluble si el número de incógnitas (el número de variables desconocidas o que se desean calcular) es igual al número de ecuaciones. Si hubiera más incógnitas que ecuaciones, algunas de ellas quedarían indeterminadas.

Resolver este sistema de ecuaciones puede hacerse de muchas maneras y no detallaremos aquí el cálculo. El resultado para la aceleración es:

$$a = -0{,}185\ m/s^2$$

Ello implica que hemos supuesto mal el sentido de la aceleración. El bloque 2 pesa demasiado como para que el bloque 1 pueda tirar de él, y es el bloque 2 el que baja y el 1 el que sube por el plano inclinado. Por tanto, se ha de rehacer el sistema de ecuaciones, suponiendo opuestos los signos de las fuerzas porque, ahora, la aceleración va en el sentido contrario. Este nuevo sistema, donde obviamos la ecuación vertical para el bloque 1, queda:

- Bloque 1. Dirección horizontal: $T - P_{1x} = m_1\, a$
- Bloque 2. Dirección vertical: $P_2 - T = m_2\, a$

Sustituimos cada fuerza por su valor y, nuevamente, sale un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, por tanto, puede resolverse y es:

- Bloque 1. Dirección horizontal: $T - m_1\, g\, sen\, \theta = m_1\, a$
- Bloque 2. Dirección vertical: $m_2\, g - T = m_2\, a$

Efectuamos los cálculos y la solución al problema es, finalmente:

$$a = 0,185\ m/s^2$$
$$T = 86,535\ N$$

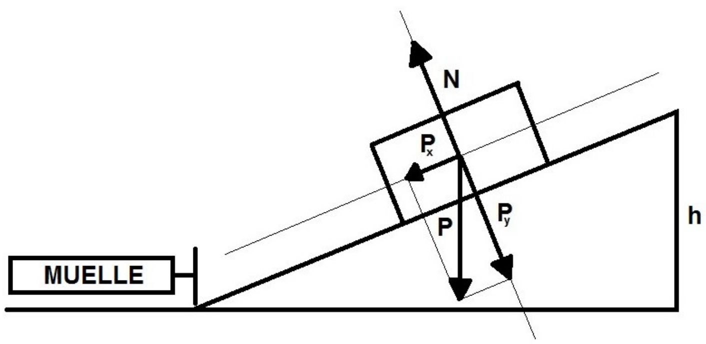
Aunque la aceleración ha quedado ahora con signo opuesto, **era necesario replantear el sistema de ecuaciones, y no bastaba con cambiar de signo los resultados**. La tensión que habría dado la primera versión del sistema de ecuaciones, que no escribimos por ser errónea, era de 89,865 N, diferente al valor real.

Ejemplo 7: Plano inclinado sin rozamiento y con sistemas elásticos

Un bloque de 10 kg caía por un plano inclinado 30º en cuyo final, y ya fuera del plano, hay un muelle de constante recuperadora k=20 N/m. El móvil se detuvo tras comprimir el muelle 78 centímetros. ¿De qué altura en el plano inclinado partió el bloque?

Este problema es bastante complicado, sobre todo si lo resolvemos por medio de métodos básicos de dinámica. Por ello, volveremos a solucionarlo en el tema 8 de una forma mucho más simple, gracias a los métodos introducidos en la mecánica clásica por los conceptos de trabajo y energía.

Un esquema que aclara las fuerzas que actúan (sin incluir las del muelle, de las que hablamos a continuación) y su descomposición es el siguiente:



La mayor complejidad de este problema reside en que, en teoría habría que resolverlo al revés y solucionar nuevamente problemas que ya hemos estudiado. Por ello, utilizaremos los resultados del ejemplo 4, concretamente que la compresión máxima de un muelle con el que impacta un objeto que lleva una velocidad *v* vale:

$$x_{MAX} = v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esta ecuación, que en la resolución de este problema **deberíamos deducirlo, no ponerlo simplemente**, es la que complica y llega a imposibilitar la resolución del problema salvo que poseamos conocimientos sólidos de cálculo de ecuaciones diferenciales. Gracias a esta ecuación, es posible despejar la velocidad y sale:

$$v_{FIN} = x_{MAX}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}78\sqrt{\frac{20}{10}} = 1{,}103\ m/s$$

Este dato es el que nos permitirá resolver al revés el problema, ya comentado, de un bloque que cae por un plano inclinado.

La ecuación fundamental de la dinámica para un bloque que cae libremente por un plano inclinado un ángulo θ lleva, si no se tiene en cuenta la ecuación escalar vertical porque no aporta nada en este problema, a:

$$P_x = m\,a \ \Rightarrow mg\ sen\ \theta = m\,a \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a = g\ sen\ \theta}$$

Ya solo nos queda resolver un problema de cinemática. Sustituimos directamente las variables del problema presente, anulando los términos necesarios en las ecuaciones originales y nos queda:

$$d = \frac{1}{2}\,g\ sen\ (\theta)\ t^2$$
$$v_{FIN} = g\ sen\ (\theta)\ t$$

Donde *d* es la distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano inclinado y vale, usando trigonometría elemental:

$$d = \frac{h}{sen\ (\theta)}$$

De las dos ecuaciones trigonométricas solo desconocemos t y h, lo que permite la resolución del sistema, al tener dos ecuaciones. Despejamos el tiempo en la segunda ecuación y sustituimos en la ecuación de arriba, lo que lleva a:

$$\frac{h}{sen\ (\theta)} = \frac{1}{2}\frac{v_{FIN}^2}{g\ sen\ (\theta)}$$

Despejamos h y ya podemos sustituir los valores numéricos, con lo que obtenemos la solución al problema:

$$\boldsymbol{h = \frac{1}{2}\frac{v_{FIN}^2}{g} = 0,062\ m}$$

6.5. Sistemas donde se consideran fuerzas de rozamiento

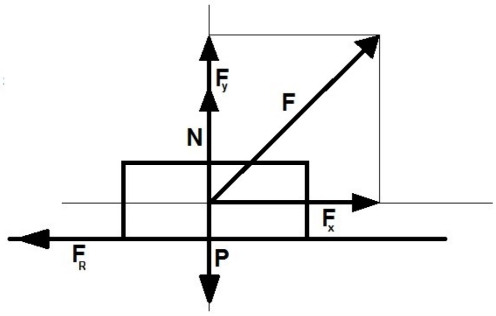
En los problemas precedentes tratamos casos que, en la práctica, son poco frecuentes. Habitualmente, todo plano inclinado presentará rozamiento, que es una fuerza que, en todo momento, se opondrá al movimiento y debemos tenerlo en cuenta en los cálculos.

En este apartado empezaremos con un problema sencillo de movimiento sometido a rozamiento por fricción, continuaremos con un problema de plano inclinado con rozamiento y, finalmente, resolveremos varios problemas de mayor complejidad.

Ejemplo 8: Movimiento de un bloque del que se tira considerando rozamiento estático y dinámico

Un bloque de 30 kg de peso está apoyado en una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático que presenta en esa superficie es de 0,4, mientras que el dinámico es de 0,3. Se ejerce una fuerza de 100 N en una dirección que forma 50º con la horizontal. Calcular:
¿Se puede vencer el rozamiento estático en esas condiciones?
¿Con qué aceleración se movería el cuerpo si se le aplicara esa fuerza, suponiendo que se ha vencido el rozamiento estático?

El diagrama de fuerzas que permitirá resolver el problema es el siguiente:



Solo un comentario. Como la fuerza de rozamiento sucede por la fricción entre las superficies, es tradicional pintarla como en la figura, pegada a la superficie de fricción. Sin embargo, esa fuerza debemos considerarla aplicada en el centro del bloque, donde están dibujados todos los demás vectores.

Las ecuaciones escalares para las direcciones horizontal y vertical son:

- Horizontal: $F_x - F_R = m\,a$
- Vertical: $N + F_y = P$

Estas ecuaciones son válidas para el caso del rozamiento estático y del dinámico, solo cambiaría el valor de la fuerza de rozamiento en cada caso. Si se sustituyen las fuerzas de las que se conocen sus expresiones, usando para ello que:

$$F_x = F\ cos\ \theta$$
$$F_y = F\ sen\ \theta$$
$$F_R = \ \mu\ N$$

El sistema queda:

- Horizontal: $F\ cos\ \theta - \ \mu\ N = m\ a$
- Vertical: $N + \ F\ sen\ \theta = mg$

Del primer caso al segundo la única diferencia será el valor del coeficiente de rozamiento que aparece en el caso horizontal. En los dos casos, lo que interesa es calcular el valor de la aceleración del bloque. Por ello, se despeja la normal en la ecuación vertical y se sustituye en la horizontal, con lo que la aceleración queda:

$$F\ cos\ \theta - \ \mu\ (mg - F\ sen\ \theta\ ) = m\ a$$

Esta última fórmula es la que usaremos para resolver cada apartado.

- La aceleración, tras despejarla de la expresión anterior y sustituyendo cada variable por su valor, queda:

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{30}\ [100\cos 50° \ - 0,4\ (30 \cdot 9,8 - 100\ sen\ 50°)] = \ -0,756\ m/s^2}$$

Resultado que implica que **no es posible** vencer la fuerza de rozamiento estático con la fuerza de 100 N aplicada de la forma que se expresa en el enunciado.

- Para el caso del coeficiente de rozamiento dinámico, basta con que cambiemos el 0,4 por 0,3, lo que lleva a:

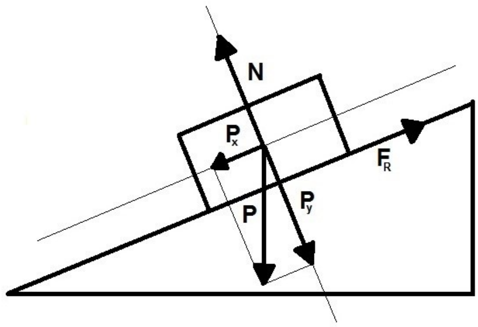
$$\boldsymbol{a = \frac{1}{30}\ [100\cos 50° \ - 0,3\ (30 \cdot 9,8 - 100\ sen\ 50°)] = \ -0,031\ m/s^2}$$

Este resultado es absurdo, ya que hemos supuesto que la aceleración es capaz de vencer la fuerza de rozamiento y mover el cuerpo. Al salir negativa, implica que la fuerza aplicada en estas condiciones es incapaz, incluso, de vencer el rozamiento dinámico. Por ello, la aceleración que adquiere el cuerpo es **nula**.

Ejemplo 9: Plano inclinado básico con rozamiento

Un bloque de 50 kg se deja caer desde una altura de 20 m por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento dinámico del bloque con la superficie del plano es de 0,2. Calcular:
¿Cuánto tiempo tarda el bloque en llegar al final del plano?
¿Qué velocidad lleva cuando ha descendido 10 m en vertical?
Si el rozamiento fuera nulo, ¿cuánto habría tardado el cuerpo en llegar al final del plano inclinado?

Este ejemplo es muy similar al ejemplo 5, solo que, ahora no se desprecia el rozamiento. El diagrama de fuerzas es:



Y la ecuación fundamental de la dinámica se convierte, ahora, en las siguientes ecuaciones escalares:

- Dirección horizontal: $P_x - F_R = m\,a$
- Dirección vertical: $N = P_y$

Con estas ecuaciones que, a causa de que la fuerza de rozamiento es proporcional a la normal, son todas de utilidad, es posible dar respuesta a todos los enunciados del problema. Utilizando la expresión acostumbrada para la descomposición del peso y sustituyendo todos los valores conocidos, el sistema de ecuaciones queda:

- Dirección horizontal: $mg\ sen\ \theta - \mu\ N = m\ a$
- Dirección vertical: $N =\ mg\ cos\ \theta$

Si sustituimos la normal en la fórmula de la dirección horizontal y despejamos la aceleración, queda:

$$a = g\ sen\ \theta - \mu\ g\ cos\ \theta$$

Expresión con la que podremos calcular todo lo que pide el problema.

- Para el **primer apartado** hay que calcular, primero, la distancia sobre el plano inclinado a la que equivalen esos 20 m de altura. Basta la trigonometría básica para saber que si se llama h a esos 20 m, la distancia en el plano, *d*, vale:

$$d = \frac{h}{sen\ (\theta)}$$

El tiempo se calcula con la expresión del espacio de los Movimientos Rectilíneos Uniformemente Acelerados, dado que la aceleración es constante. Así:

$$e = \frac{1}{2} a\, t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

Sustituyendo todos los valores numéricos, obtenemos:

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{sen\ (\theta) g\ (sen\ (\theta) - \mu\ cos\ (\theta))}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0,5 \cdot 9,8(0,5 - 0,2 \cdot 0,866)}}}$$
$$\boldsymbol{= 4,99\ s}$$

- Este **segundo apartado** es parecido, pero debemos usar, también, la expresión cinemática para la velocidad que lleva el bloque en función de la aceleración y el tiempo. Se puede emplear la expresión del tiempo calculada en el apartado anterior poniendo 10 m en vez de 20. Haciendo esto, queda:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{h}{sen\,(\theta) g\,(sen\,(\theta) - \mu\,cos\,(\theta))}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}5 \cdot 9{,}8(0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}866)}} = 2{,}5\ s$$

En ese instante, la velocidad vale:

$$\boldsymbol{v = a\,t = (g\,sen\,\theta - \mu\,g\,cos\,\theta)t = 8{,}01\,m/s}$$

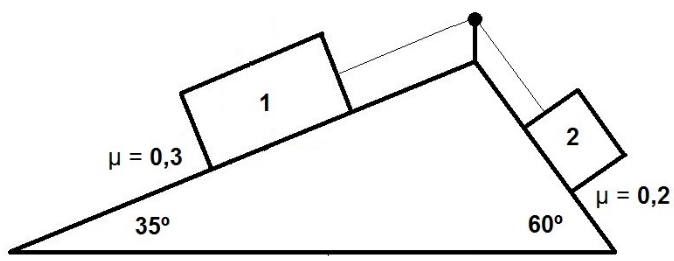
- Para el **último apartado**, como comparación, se repite el primer apartado, pero sin rozamiento. Basta con tomar la ecuación con la que calculamos el tiempo en el primer apartado haciendo cero el coeficiente de rozamiento. Por tanto:

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{sen\,(\theta) g\,sen\,(\theta)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0{,}5 \cdot 9{,}8\ \cdot 0{,}5}} = 4{,}04\,s}$$

El resultado del primer apartado era, como recordatorio, 4,99 s.

Ejemplo 10: Plano inclinado doble con rozamiento

En el sistema representado en la figura, el bloque 1 pesa 30 kg, su coeficiente de rozamiento es de 0,3 y el ángulo de 35º. El bloque 2 pesa 10 kg, su coeficiente de rozamiento con la superficie es de 0,2 y el ángulo es de 60º. Con estos datos, calcular la aceleración del sistema, su sentido y la tensión en la cuerda.

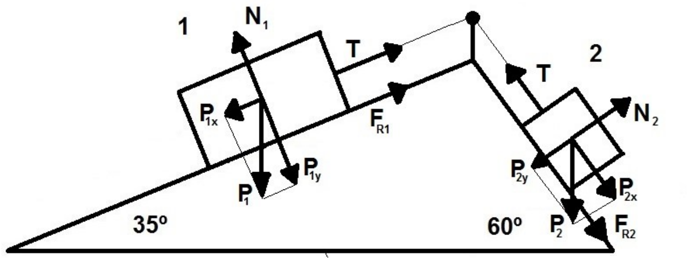


Este problema es el más difícil de esta sección del tema; sin embargo, podemos abordarlo sin mayor dificultad con los conocimientos matemáticos a nuestra disposición.

En este tipo de planos inclinados dobles, como en muchos otros problemas, tendremos que suponer cuál es la dirección en que se va a mover el sistema. Hay **dos posibilidades**:

- El bloque 1, más pesado, será capaz de tirar del bloque 2 y, por tanto, la aceleración irá de derecha a izquierda.
- El bloque 2, por su menor coeficiente de rozamiento y mayor ángulo, será capaz de mover al 1, aunque sea más pesado, y la aceleración irá de izquierda a derecha.

Supongamos que estamos en el primer caso. Por tanto, el diagrama de fuerzas para ambos bloques es el siguiente:



Lo primero que hay que destacar es que este diagrama es el más complicado que se ha hecho hasta el momento. Al suponer que la aceleración va hacia la izquierda, las fuerzas de rozamiento van hacia la derecha. Si esta suposición no fuera válida, habría que rehacer este diagrama, si bien el único cambio sería invertir los sentidos de las fuerzas de rozamiento.

El siguiente paso es aplicarle, a cada bloque, la ecuación fundamental de la dinámica. Para el bloque 1, planteamos las ecuaciones escalares horizontal y vertical que sustituyen a la ecuación vectorial y sale:

- Bloque 1. Dirección horizontal: $P_{1x} - T - F_{R1} = m_1 \, a$
- Bloque 1. Dirección vertical: $N_1 = P_{1y}$

Para el bloque 2, las ecuaciones quedan:

- Bloque 2. Dirección horizontal: $T - P_{2x} - F_{R2} = m_2 \, a$
- Bloque 2. Dirección vertical: $N_2 = P_{2y}$

Sustituyendo en todas las ecuaciones sus valores, obtenemos:

- Bloque 1. Dirección horizontal: $m_1 \, g \, sen \, \theta_1 - T - \mu_1 \, N_1 = m_1 \, a$
- Bloque 1. Dirección vertical: $N_1 = m_1 \, g \, cos \, \theta_1$
- Bloque 2. Dirección horizontal: $T - m_2 \, g \, sen \, \theta_2 - \mu_2 \, N_2 = m_2 \, a$
- Bloque 2. Dirección vertical: $N_2 = m_2 \, g \, cos \, \theta_2$

Las ecuaciones de la dirección vertical solo nos sirven para eliminar el valor de ambas normales. Con ello, el sistema de ecuaciones que debemos resolver es:

$$m_1 \, g \, sen \, \theta_1 - T - \mu_1 m_1 \, g \, cos \, \theta_1 = m_1 \, a$$
$$T - m_2 \, g \, sen \, \theta_2 - \mu_2 \, m_2 \, g \, cos \, \theta_2 = m_2 \, a$$

En este sistema sabemos todos los valores salvo T y a, pero como son dos ecuaciones, es posible resolver el sistema, al tener tantas ecuaciones como incógnitas. Sumamos ambas ecuaciones y llegamos a la siguiente expresión para la aceleración:

$$a = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 g \, sen \, \theta_1 - \mu_1 m_1 \, g \, cos \, \theta_1 - m_2 \, g \, sen \, \theta_2 - \mu_2 \, m_2 \, g \, cos \, \theta_2 \right)$$

Tras sustituir todos los valores numéricos da como resultado:

$$\boldsymbol{a = 0,0443 \, m/s^2}$$

Valor pequeño, pero positivo, lo que nos permite afirmar que el sentido de la aceleración es correcto. Para calcular la tensión, despejamos esta de la segunda ecuación, aunque podríamos haberlo hecho también con la primera, con lo que obtenemos:

$$T = m_2\, a + m_2\, g\, sen\, \theta_2 + \mu_2\, m_2\, g\, cos\, \theta_2$$

Se sustituyen los valores numéricos en esta expresión y obtenemos el resultado:

$$\boldsymbol{T = 95,1135\ N}$$

6.6. Movimiento circular

Los problemas de movimientos circulares tienen como ecuación más importante, habitualmente, la de la fuerza centrípeta. Habrá que calcular la fuerza centrípeta o utilizar esa ecuación para calcular velocidades.

En esta parte del tema, empezaremos con un movimiento circular de un móvil atado a una cuerda, abordaremos un segundo problema de movimiento orbital de un satélite y trataremos el tema, bastante importante para los conductores, de los ángulos de peralte.

Ejemplo 11: Móvil que gira atado a una cuerda

Una bola de 2 kg gira, en horizontal, atada a una cuerda de 2 m que es capaz de soportar una tensión de 100 N. Al principio, está girando a una velocidad lineal de 2 m/s y, en un momento dado, empieza a sufrir una aceleración angular de 0,1 rad/s2. Calcular:
¿Qué tensión soportaba la cuerda antes de que empezara a actuar la aceleración?
¿Durante cuánto tiempo ha de actuar la aceleración angular para conseguir que la cuerda se rompa?

¿Con qué velocidad lineal sale disparada la bola en el momento en el que la cuerda se rompe?

Como se dijo en la introducción, en lo que respecta a la dinámica, todo el problema gira en torno a la expresión de la fuerza centrípeta:

$$F_C = m\,\frac{v^2}{r}$$

Pasamos, por tanto, a resolver apartado a apartado.

- **Apartado 1**. De temas anteriores sabemos que la fuerza centrípeta es, en cierto modo, una fuerza ficticia. No es una fuerza que aparezca cuando se está efectuando un giro a cierta velocidad, sino la fuerza que hay que proporcionarle a un cuerpo de masa determinada para que gire a una velocidad dada en torno a un radio preestablecido.

  Como en el caso de un cuerpo que gira atado a una cuerda, es fácil ver que la única fuerza real que actúa es la tensión de la cuerda. La gravedad actúa, pero al realizarse el giro en horizontal, el peso no afecta a la tensión de la cuerda. Como no hay ninguna otra fuerza capaz de suministrar una fuerza hacia el eje en torno al cual gira la bola, se cumple que:

$$T = m\,\frac{v^2}{r}$$

  Por tanto, la tensión vale:

$$\boldsymbol{T = 2\,\frac{2^2}{2} = 4\,N}$$

- **Apartado 2**. El inicio de la actuación de una aceleración angular implica la aparición de una aceleración lineal. Ello implicaría, asimismo, la aparición de una nueva fuerza que es la que acelera a la bola. Sin embargo, esta fuerza es perpendicular a la fuerza centrípeta y a la tensión, por lo tanto, no afecta a estas. Por ello, podemos afirmar que la cuerda se rompe cuando la velocidad angular haga que la tensión llegue a los 100 N que soporta la cuerda. Esto implica usar:

$$T = m\,\frac{v^2}{r}$$

Con los siguientes datos:

$$100 = 2\,\frac{v^2}{2}$$

Despejamos la velocidad y queda:

$$v = \sqrt{100} = 10\,m/s$$

Una vez conocida la velocidad lineal necesaria para romper la cuerda, el problema se reduce a uno de cinemática. Partiendo de una velocidad lineal debida al giro de 2 m/s hay que calcular el tiempo que ha de actuar la velocidad angular para que esta llegue a 10 m/s. Como vamos a utilizar velocidades y aceleraciones angulares, se debe empezar calculando las velocidades angulares asociadas a las lineales mediante la ecuación:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Con ello las velocidades angulares inicial y final son:

$$\omega_0 = 1\frac{rad}{s} \qquad\qquad \omega_F = 5\frac{rad}{s}$$

Basta aplicar la siguiente ecuación de la cinemática de sistemas en rotación:

$$\omega_F = \omega_0 + \alpha\, t$$

Si sustituimos los valores y se despeja el tiempo:

$$5 = 1 + 0{,}1\, t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = 40\ s}$$

- **Apartado 3**. Como ya sabemos que la cuerda se rompe cuando la velocidad lineal es de 10 m/s, responder a este apartado es trivial. La velocidad de la bola es de 10 m/s y está dirigida en la dirección tangente a la circunferencia en que consiste la trayectoria. El sentido de la velocidad es el mismo que el de giro.

Ejemplo 12: Satélite que orbita alrededor de la Tierra

Un satélite artificial de 2000 kg de peso orbita a 1000 km por encima de la superficie de la Tierra. Conociendo los siguientes datos:

Radio de la Tierra: 6.371 km
Masa de la Tierra: 5,976 ·10^24 kg
Constante de gravitación universal: G=6,67 · 10^(-11) m3/kg s

Calcular:
Velocidad a que se mueve el satélite.
Si la velocidad de rotación del satélite se divide entre 2, ¿a qué altura debería orbitar?

Aunque no lo parezca, este es un problema con ciertos parecidos con el precedente. Para que un satélite permanezca en órbita, es necesario que algo le imprima una fuerza centrípeta suficiente para mantenerlo en órbita. La fuerza centrípeta tiene la conocida expresión:

$$F_C = m\,\frac{v^2}{r}$$

La única manera en la que un satélite pueda permanecer en órbita estable alrededor de la Tierra es que la gravedad de la Tierra le imprima exactamente esa fuerza. Es fundamental advertir que esta fuerza depende de la velocidad a la que el satélite orbita y de la distancia al centro de giro del satélite, esto es, de la distancia del satélite al centro de la Tierra. Por otro lado, la fuerza que la Tierra ejerce sobre el satélite está dada por:

$$F_T = G\,\frac{m\,M_T}{r^2}$$

Por ello, para que un satélite se mantenga en órbita habrá de cumplirse:

$$F_C = F_T \;\Rightarrow\; m\,\frac{v^2}{r} = G\,\frac{m\,M_T}{r^2} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$$

Esta expresión relaciona la velocidad y la distancia del satélite al centro de la Tierra. Esto significa que para cada altitud hay una única velocidad orbital y que la velocidad orbital o la altura a la que se orbita no dependen de la masa del satélite. Con esta ecuación ya es posible resolver el problema.

- **Apartado 1**. El radio al que órbita el satélite es 6.371+1000=7.371 km. Este es el único dato necesario, que, tras introducirlo en la expresión de la velocidad lleva a:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\,\cdot\,10^{-11}\,\cdot 5,976\,\cdot\,10^{24}}{7,371\,\cdot\,10^{6}}} = \sqrt{5,4077\,\cdot\,10^{7}} = 7353,707\;m/s}$$

- **Apartado 2**. Resolver este apartado implica, en primer lugar, despejar el radio de la ecuación que usamos en el caso anterior. Con ello, llegamos a:

$$r = \frac{G\,M_T}{v^2}$$

Sustituimos los datos con la velocidad igual a la mitad del resultado del apartado anterior y queda:

$$r = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,976 \cdot 10^{24}}{3.676,8535^2} = 29.483.821,295m$$

Descontando el radio de la Tierra y convirtiendo el resultado en kilómetros, nos sale que satélite ha de orbitar a 23.112,821 km sobre la superficie de la Tierra en las nuevas condiciones del problema.

Ejemplo 13: Ángulo de peralte

En una carretera o en un circuito se dice que una curva está peraltada cuando la calzada, en el tramo curvado, está inclinada determinado ángulo, de manera que la parte externa de la curva está a mayor altura que la parte interna.

Al ángulo de elevación de la parte externa se le llama «ángulo de peralte». El ángulo de peralte tiene la función de conseguir que parte de las fuerzas que actúan sobre el automóvil (el peso y la normal) se aprovechen para suministrar al vehículo aceleración (o fuerza) centrípeta y pueda aumentar la velocidad a la que tome la curva.

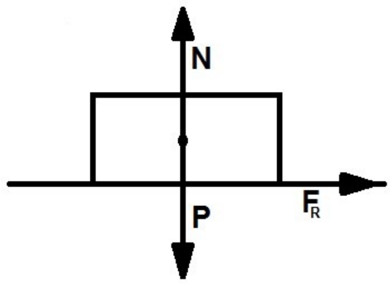
Sea una curva de radio 500 m que tiene un ángulo de peralte de 10º. Sea el coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas de un vehículo y de la calzada igual a 0,2. ¿Cuál será la velocidad máxima en las siguientes circunstancias?

En la situación planteada en el enunciado, esto es, ángulo de peralte de 10º y coeficiente de rozamiento igual a 0,2.
Si no hay ni peralte ni rozamiento.
Si el peralte se mantiene pero no hay rozamiento.
Si hay rozamiento pero no peralte.
Si hay peralte pero el coeficiente de rozamiento se ha reducido a 0,1.
Si el peralte se reduce a la mitad con un coeficiente de rozamiento de 0,2

Los ángulos de peralte en las carreteras son muy importantes para asegurar que los automóviles no se salgan de la calzada, por ello están presentes en la mayoría de ellas.

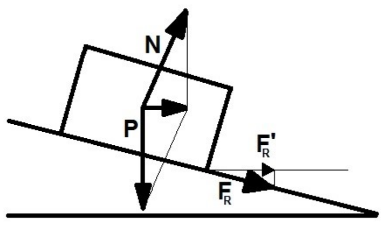
Para que un vehículo pueda tomar una curva es preciso que alguna fuerza real suministre una fuerza centrípeta dirigida hacia el eje de giro, que en una curva será una recta vertical que pasa por el centro de la curva. Es fácil comprobar por qué volcar una curva consigue mejorar la estabilidad de un vehículo en una curva.

En las situaciones reales, en las que siempre hay rozamiento, si queremos tomar una curva sin peralte, es el rozamiento el único agente capaz de proporcionar fuerza centrípeta, como se ve en el siguiente diagrama:



Este rozamiento se debe a que al entrar en una curva el coche, por inercia, tiende a seguir en línea recta y la carretera ejerce un rozamiento que se opone a que el vehículo siga en línea recta. Suponiendo que el bloque representado está girando hacia la derecha en una curva, la única fuerza que se ejerce en horizontal hacia la derecha es el rozamiento.

Ni el peso ni la normal tienen componente en horizontal, por lo que ninguna de esas fuerzas puede ayudar a proporcionar aceleración centrípeta. En cambio, si se inclina la curva un ángulo determinado, la situación cambia y se tiene:



Como podemos ver, al inclinarse, la curva la normal se desvía de la vertical y al sumarse vectorialmente con el peso da como resultado una fuerza horizontal dirigida hacia el centro de giro. Inclinar la curva implica que parte del efecto del rozamiento se pierde, ya que el rozamiento va en la dirección definida por la superficie y solo actúa para proporcionar aceleración centrípeta la componente horizontal de la fuerza de rozamiento, de módulo algo inferior. Sin embargo, el efecto de desviar la normal suele superar con creces la reducción de la fuerza de rozamiento.

El objetivo de este problema es, precisamente, analizar las características de construcción de una carretera que son más relevantes a la hora de aumentar la velocidad máxima de giro y, por tanto, aumentar la estabilidad de un vehículo al tomar una curva.

- El primer caso es el más general, en el que hay peralte y rozamiento. Las ecuaciones que obtengamos en este apartado serán válidas para muchos de los demás. Hay que realizar dos cálculos:
  - Calcular la resultante entre la normal y el peso.
  - Calcular la componente horizontal de la fuerza de rozamiento.

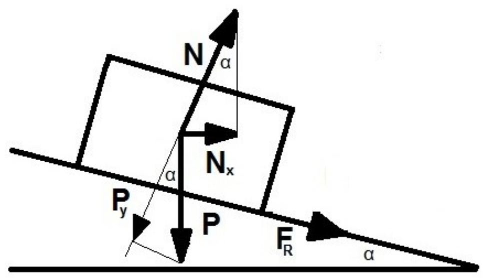
Para la primera cuestión, hay que calcular primero la normal. Para ello, descomponemos el peso en la dirección normal y la dirección paralela a la calzada de la curva, de manera que se cumplirá que:

$$N = P_y = m\, g \cos\alpha$$

Donde α es el ángulo de peralte. La suma del peso y la normal equivale a la componente horizontal de la normal. Esta componente vale:

$$N_x = m\, g \cos\alpha \; sen\, \alpha$$

Se explica este resultado en la siguiente figura:



Para la segunda cuestión basta aplicar, de nuevo, trigonometría elemental y obtenemos para la componente horizontal de la fuerza de rozamiento:

$$F_{Rx} = \mu\, m\, \mathrm{g} \cos\alpha \cos\alpha$$

Con ello, la suma de las fuerzas hacia el interior de la curva es:

$$N_x + F_{Rx} = m\, g \cos\alpha \;\; sen\,\alpha + \; \mu\, m\, \mathrm{g} \cos\alpha \cos\alpha$$

Si se iguala esta expresión a la de la fuerza centrípeta, llegamos a:

$$m\,\frac{v^2}{r} = m\, g \cos\alpha \;\; sen\,\alpha + \; \mu\, m\, \mathrm{g} \cos\alpha \cos\alpha$$

Las masas se cancelan, por lo que se ha obtenido un primer resultado interesante: **la velocidad máxima no depende de la masa del vehículo que gira**. Despejamos la velocidad y llegamos a la expresión final de la velocidad máxima en función del peralte y el rozamiento:

$$v = \sqrt{r\; g\; cos\;\;\alpha\;\;(sen\,\alpha + \;\mu\; cos\;\;\alpha)}$$

Sustituyendo los datos, queda la siguiente velocidad límite:

$$\boldsymbol{v = 42,29\; m/s}$$

- Para el **segundo caso** si no hay ángulo de peralte y tampoco existe rozamiento, es imposible tomar la curva. No hay nada que consiga suministrar aceleración centrípeta y, por tanto, la velocidad límite es cero, lo que equivale a imposibilitar tomar la curva.

- El **tercer caso**, una vez resuelto el primero, es muy sencillo. Basta hacer cero el coeficiente de rozamiento en la ecuación de la velocidad límite para la primera cuestión y sustituir los demás valores. Se obtiene, por ello:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{r\, g\, cos\ \alpha\ \ sen\, \alpha} = 28,95\ m/s}$$

- **Cuarto caso**. Si solo hay rozamiento, pero no peralte los cálculos son sencillos. La fuerza de rozamiento en ausencia de peralte vale:

$$F_R = \mu\, N = \mu\, m\, g$$

Como es el único elemento que proporciona aceleración centrípeta, la velocidad máxima a la que puede tomarse la curva vale:

$$\mu\, m\, g = m\,\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\mu\, g\, r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v = \sqrt{0,2 \cdot 9,8 \cdot 500} = 31,31\ m/s}$$

- En el **quinto caso** basta con sustituir los nuevos datos en la ecuación obtenida en el primer caso:

$$v = \sqrt{r\, g\, cos\ \alpha\ \ (sen\, \alpha + \ \mu\, cos\ \alpha)}$$

Recordando que, ahora, el coeficiente de rozamiento es 0,1 se llega a:

$$\boldsymbol{v = 36,24\ m/s}$$

- **Sexto caso**. Nueva aplicación de la ecuación usada en el apartado anterior, pero usando 5º en vez de 10º para el ángulo. Así, el resultado es:

$$v = 37{,}39\ m/s$$

Hay que tener en cuenta que los datos del problema pueden no ser realistas, en especial, el coeficiente de rozamiento, pero sirve para ilustrar cómo influyen el ángulo y el coeficiente de rozamiento en el cálculo de la velocidad máxima a la que se puede tomar una curva. Y también, sirve para tomar conciencia de que existe esta velocidad límite.

6.7. Colisiones

En este último apartado del tema, resolveremos tres problemas relacionados con colisiones que se resuelven utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

En casos generales, suele ser necesario utilizar otros principios físicos, en particular, el de conservación de la energía, pero como aún no hemos estudiado tal principio, los problemas están diseñados para que no sea necesario el uso de tal principio y baste con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, que es el que se pretende ilustrar en esta sección del tema.

Ejemplo 14: Colisión en una dirección

Una bala de 5 g se dispara en horizontal a una velocidad de 100 m/s contra un bloque de 3 kg en reposo en el que se queda incrustada. ¿Qué velocidad adquiere el bloque tras el impacto?

El método general para abordar problemas de colisiones, donde se puede aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento, consiste en los siguientes pasos:

- Calcular la cantidad de movimiento inicial (vectorial) de todas las partículas.
- Calcular la cantidad de movimiento final (vectorial) de todas las partículas.
- Igualar ambas y averiguar los datos desconocidos.

En este caso particular de movimiento en una misma dirección, no es necesario escribir las expresiones de los vectores y basta trabajar con módulos. La cantidad de movimiento inicial se debe, exclusivamente, a la bala, ya que el bloque está en reposo:

$$p_0 = m_{BALA}\, v_0 = 0{,}005 \cdot 100 = 0{,}5\; kg\; m/s$$

La cantidad de movimiento final, que va en la misma dirección inicial y, por ello, tiene el mismo signo que la inicial, vale:

$$p_F = \left(m_{BALA} + m_{BLOQUE}\right) v_F = 3{,}005\; v_F$$

Solo resta igualar la cantidad de movimiento inicial y la final y despejar la velocidad final:

$$0{,}5 = 3{,}005\; v_F$$

Con lo que queda, finalmente:

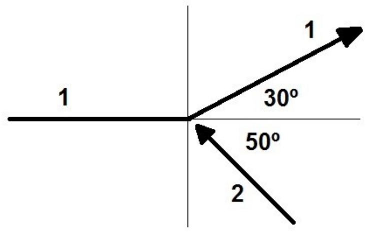
$$\boldsymbol{v_F = 0{,}1664\; m/s}$$

Ejemplo 15: Colisión en un plano

Una bola de billar de 200 g que se mueve en línea recta a 10 m/s choca con otra del mismo peso que viene en sentido contrario formando un ángulo de 50º con respecto a la dirección de la primera bola y a 15 m/s. Si la primera bola, tras el choque, acaba con una velocidad de 8 m/s formando un ángulo de 30º con la dirección de partida, ¿cuál es el módulo y dirección de la velocidad de la segunda bola?

Seguimos el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, pero, en este caso, es preciso escribir las expresiones vectoriales de las cantidades de movimiento, al tener lugar el movimiento en el plano.

Lo primero será definir los ejes de coordenadas. Tomaremos como eje x la dirección en la que avanza la bola de billar y como eje y la perpendicular. El esquema de los movimientos de las bolas de billar del enunciado, donde no se dibuja la velocidad final de la bola 2, ya que es la incógnita y no sabemos, a priori, cuál será su dirección, es:



La cantidad de movimiento inicial de la bola 1 es:

$$\overrightarrow{p_{01}} = m_1 \, v_{01} \, \hat{\imath}$$

La cantidad de movimiento inicial de la bola 2 es:

$$\overrightarrow{p_{02}} = - \, m_2 \, v_{02} \, \cos\theta_2 \, \hat{\imath} + m_2 \, v_{02} \, \operatorname{sen}\theta_2 \, \hat{\jmath}$$

En cuanto al instante final, conocemos la cantidad de movimiento de la bola 1, pero no la de la bola 2. Expresamos ambas así:

$$\overrightarrow{p_{F1}} = m_1\, v_{F1}\, \cos\theta_1\ \hat{\imath} + m_1\, v_{F1}\, \operatorname{sen}\theta_1\ \hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{p_{F2}} = p_x\, \hat{\imath} + p_y\, \hat{\jmath}$$

Dado que conocemos todo salvo las coordenadas del momento lineal final de la bola 2 y que la igualación de todas las cantidades de movimiento va a dar dos ecuaciones, el problema puede resolverse. Sustituyendo sus valores numéricos, obtenemos:

$$\overrightarrow{p_{0T}} = 0{,}0716\, \hat{\imath}\ + 2{,}298\, \hat{\jmath}$$

Con respecto a la cantidad de movimiento final, queda:

$$\overrightarrow{p_{FT}} = (1{,}386 + 0{,}2\ v_{Fx})\, \hat{\imath}\ + (0{,}8 + 0{,}2 v_{Fy})\, \hat{\jmath}$$

Igualando $\overrightarrow{p_{0T}}$ y $\overrightarrow{p_{FT}}$ obtenemos dos ecuaciones:

$$0{,}0716 = 1{,}386 + 0{,}2\ v_{Fx}$$
$$2{,}298 = 0{,}8 + 0{,}2 v_{Fy}$$

Resolvemos y obtenemos:

$$v_{Fx} = -6{,}572 \qquad\qquad v_{Fy} = 7{,}49$$

Con lo que la velocidad, en forma vectorial, de la bola 2 tras la colisión es:

$$\boldsymbol{\vec{v} = -6{,}572\, \hat{\imath}\ + 7{,}49\, \hat{\jmath}}$$

Ejemplo 16: Colisión con la aparición de nuevos móviles

Una cuña de metal de 300 g impacta, a una velocidad de 30 m/s con un bloque de madera que estaba en reposo. La cuña rompe el trozo y continúa tras el choque viajando en la misma dirección y sentido, pero a una velocidad de 15 m/s.

El bloque de madera se ha roto en dos pedazos, uno de 100 g y el otro de 50 g que salen despedidos formando ángulos con la horizontal de 30º y de 45º, el primero por encima de la dirección de la cuña y el segundo por debajo. ¿Qué velocidades llevan ambos fragmentos de madera?

En este último problema tenemos que usar, también, las expresiones vectoriales de la cantidad de movimiento. El eje x del sistema de coordenadas es la dirección que sigue en todo momento la cuña metálica, y el eje y su perpendicular.

Con respecto a la cuña, las cantidades de movimiento inicial y final valen:

$$\overrightarrow{p_0} = 9\hat{\imath} \qquad\qquad \overrightarrow{p_F} = 4{,}5\hat{\imath}$$

Como las incógnitas son las velocidades finales lo más práctico, en este caso, es escribir los vectores cantidad de movimiento de ambos fragmentos así:

$$\overrightarrow{p_{F1}} = p_{1x}\,\hat{\imath} + p_{1y}\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{p_{F2}} = p_{2x}\,\hat{\imath} + p_{2y}\,\hat{\jmath}$$

Sustituyendo todos los valores numéricos posibles:

$$\overrightarrow{p_{F1}} = 0{,}1v_1 \cos 30°\ \hat{\imath} + 0{,}1\, v_1 sen\, 30°\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{p_{F2}} = 0{,}05v_2 \cos 45°\ \hat{\imath} - 0{,}05\, v_2 sen\, 45°\,\hat{\jmath}$$

Esto es:

$$\overrightarrow{p_{F1}} = 0{,}0866\, v_1\, \hat{\imath}\, +\, 0{,}05\, v_1\, \hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{p_{F2}} = 0{,}0354\, v_2\, \hat{\imath} -\, 0{,}0354\, v_2\, \hat{\jmath}$$

Sumando todas las cantidades de movimiento iniciales y finales entre sí nos lleva a:

$$\overrightarrow{p_0} = 9\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{p_F} = (4{,}5 + 0{,}0866\, v_1 + 0{,}0354\, v_2)\hat{\imath} + (0{,}05\, v_1 - 0{,}0354\, v_2)\, \hat{\jmath}$$

Si igualamos ambas expresiones e imponemos que las componentes de ambos vectores sean iguales, obtenemos dos ecuaciones escalares:

$$9 = 4{,}5 + 0{,}0866\, v_1 + 0{,}0354\, v_2$$
$$0 = \, 0{,}05\, v_1 - 0{,}0354\, v_2$$

Resolvemos el sistema y obtenemos el resultado siguiente para los módulos de cada una de las velocidades finales:

$$v_1 = 32{,}94\, m/s$$
$$v_2 = 46{,}53\, m/s$$

El resultado final para las velocidades es:

$$\boldsymbol{\vec{v}_1 = v_1 \cos 30°\ \hat{\imath} + v_1 \operatorname{sen} 30°\, \hat{\jmath} = 28,53\, \hat{\imath} + 16,47\, \hat{\jmath}\ \ m/s}$$
$$\boldsymbol{\vec{v}_2 = v_2\, cos\, 45°\ \hat{\imath} + v_2\, sen\, 45°\, \hat{\jmath} = 32,9\, \hat{\imath} + 32,9\, \hat{\jmath}}$$