Física I

Electromagnetismo

Índice

Esquema

CAMPO MAGNÉTICO

Imanes permanentes

Primero ejemplos de interacción magnética. Los imanes atraen a distancia objetos metálicos no magnéticos. Todo imán tiene dos polos: norte y sur. No existen los monopolos. Polos iguales se repelen, polos opuestos se atraen. Un trozo de metal en contacto con un imán se magnetiza.

Relación entre magnetismo y electricidad

- **Oersted:** una corriente eléctrica desvía una brújula de igual forma que lo hace un imán permanente.
- **Faraday y Henry:** mover imanes en las proximidades de espiras provoca corrientes en ellas.
- Hacer circular corriente por una espira hace que esta cree un campo magnético igual que el de un imán permanente, con polos norte y sur.

Característica del campo magnético: flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ejemplo 1: uso ley Biot y Savart.

Definición de campo magnético

Fuerza por un campo magnético $\vec{B}$ solo actúa sobre cargas en movimiento.

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

$\vec{B}$ se mide en teslas =

kg/C s

También se mide en gauss:

$$1\,T = 10^4\ gauss$$

Cálculo del campo magnético. Campo creado por Q en P, a una distancia *r* de la perpendicular en la dirección del vector $\vec{u}_r$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{Q\,v}{r^2}\,\vec{u}_v \times \vec{u}_r$$

μ = permitividad magnética del medio

$$\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ H/m\ \text{(en el vacío)}$$

Ley de Biot y Savart: campo creado por un diferencial de corriente.

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\,\vec{u}_v \times \vec{u}_r$$

Ley de Ampère

La integral en torno a una línea cerrada del campo magnético vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\, I_{ES}$$

Ej. 3. Campo magnético creado por una corriente rectilínea.

Ej. 4. Campo magnético creado por un conductor grueso dentro y fuera del mismo.

La intensidad es la suma de las intensidades que cruzan el área creada por la curva cerrada. Su signo depende del sentido de recorrido de la superficie y se calcula con la regla de la mano derecha.

Acción de un campo magnético sobre cargas en movimiento

El campo magnético no cambia el módulo de la velocidad, solo su dirección.

Si el campo magnético es perpendicular ala velocidad y es constante, la trayectoria de la carga es una circunferencia, cuyo sentido depende de la carga y de radio:

$$R = \frac{m\,v}{q\,B}$$

Si el capo magnético no es perpendicular, la trayectoria es helicoidal.

Fuerza magnética sobre conductor:

$$\vec{F} = \int I\,(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Ej. 2. Fuerza creada sobre un conductor rectilíneo.

11.1. Introducción y objetivos

Este es el segundo tema dedicado a los fenómenos electromagnéticos. En el tema anterior estudiamos, por separado, la interacción eléctrica, así que era de esperar que este tema se centrara en la interacción magnética, también por separado.

Sin embargo, esto resulta muy complicado, ya que la mayoría de los fenómenos magnéticos están relacionados con los eléctricos. Con la excepción de ciertos fenómenos puramente magnéticos, la influencia de los campos magnéticos solo es visible si actúan sobre objetos con carga eléctrica en movimiento, de ahí que se deba hablar de fenómenos electromagnéticos.

En realidad, al profundizar en el estudio de la física se termina demostrando que los fenómenos eléctricos y los magnéticos forman parte de una única interacción, que se podría llamar electromagnetismo. Lo que sucede es que hay muchos fenómenos que solo dependen de la parte eléctrica y, además, son más sencillos de entender y concebir, de ahí que en los cursos introductorios de física sea posible tratar muchos fenómenos eléctricos sin tener que introducir fenómenos magnéticos, de mayor complejidad conceptual.

Después de estudiar los conceptos explicados en este tema, serás capaz de:

- Comprender los elementos esenciales de la interacción magnética y su relación con la carga eléctrica.
- Saber cómo se define un campo magnético y cómo actúa sobre cargas en movimiento.
- Conocer y aplicar la ley de Ampère.

11.2. Introducción a la interacción magnética

El magnetismo es, en principio, una interacción diferente a la eléctrica. Sin embargo, como veremos, está relacionada con esta, lo que forma parte de la dificultad de comprender este fenómeno.

El ejemplo más claro y tradicional de magnetismo son los llamados **imanes permanentes**. Un imán permanente es un bloque de determinado material que cumple las siguientes características:

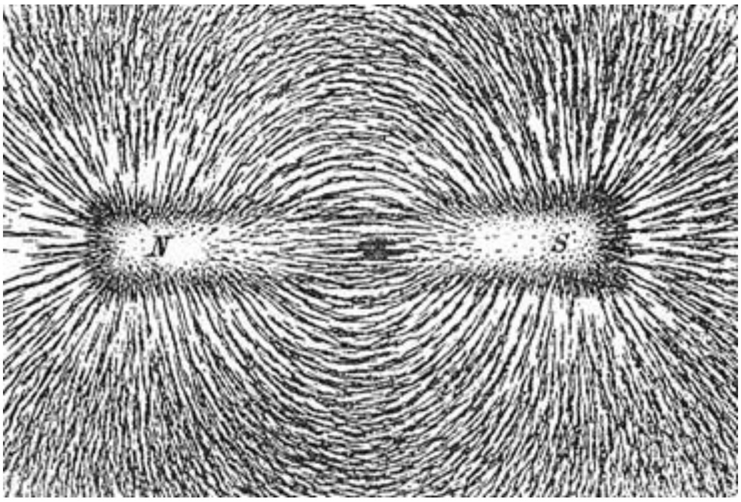
- Es capaz de atraer objetos metálicos no magnéticos.
- Todo objeto magnético presenta siempre dos polos magnéticos. Se denominan de manera arbitraria **polo norte y polo sur**.
- No existen los monopolos, esto es, objetos magnéticos que contengan solo un polo norte o un polo sur: siempre aparecen juntos. Si se rompe un imán por la mitad, los dos trozos resultantes presentarán un polo norte y otro sur, cosa que sucederá por mucho que se parta el imán o sus trozos.
- Si un trozo de hierro se pone en contacto con un imán, se magnetiza y adquiere la capacidad de atraer a otros objetos metálicos.

La interacción entre los imanes entre sí y con objetos metálicos es como sigue. Dos polos norte se repelen, así como dos polos sur. Sin embargo, polos de diferente denominación se atraen: el polo norte atrae al polo sur y viceversa. Cualquiera de los dos polos es capaz de atraer a un trozo de metal no imantado.

La acción de los imanes se produce a distancia: cuando se acercan entre sí dos imanes con los polos norte enfrentados, la fuerza repulsiva no requiere contacto, sino que se nota antes de este. Por ello, de manera análoga a como se hizo para las interacciones gravitatoria y eléctrica, se puede suponer que los materiales magnéticos crean campos a su alrededor. Esta idea se potencia con una imagen experimental muy típica.

Se pone, sobre una superficie blanca de algún material de escaso grosor y poco magnetizable, cierta cantidad de limaduras de hierro, que habitualmente son bastante oscuras.

Si bajo esa superficie se coloca un imán, las limaduras de hierro dibujarán una figura parecida a la siguiente:



Fuente: http://www.portaleso.com

Esto supone una representación gráfica de las líneas de campo de un campo generado por el imán (que no de fuerza, ya que no dan la fuerza que experimenta una partícula en el seno del campo eléctrico, sino la dirección del campo magnético. En el campo eléctrico equivalen porque la fuerza se genera en la dirección del campo).

Vemos que este campo tiene ciertos parecidos con el campo eléctrico, ya que cada polo del imán parece producir un campo propio. Sin embargo, como nunca hay un polo en solitario y polos opuestos se atraen, la configuración de este campo contiene líneas que van de un polo a otro y otras líneas que, aparentemente, se pierden en el espacio.

Una consecuencia interesante es que las líneas de campo del campo magnético, a diferencia de las del campo eléctrico, no tienen extremos, sino que son siempre cerradas. En efecto, en la figura puede verse que las líneas se cierran en los polos norte y sur, aunque no se aprecie del todo debido a que las ligaduras de hierro no forman líneas justo en los polos por limitaciones del experimento.

En los próximos apartados, definiremos las características esenciales de este campo, que se puede denominar magnético. Para ello, habrá que tener en cuenta que la interacción magnética está muy relacionada con la eléctrica. De hecho, el campo magnético lo crea una carga, o un conjunto de ellas, cuando se ponen en movimiento.

En el caso de los campos eléctrico o gravitatorio se supone que una carga o una masa crea, por estar quieta en un determinado lugar, un campo eléctrico o gravitatorio que hace que aparezca una fuerza sobre un objeto que se coloque en sus alrededores. Para el campo magnético, una carga que está en movimiento genera un campo magnético a su alrededor y una segunda carga o conjunto de ellas en movimiento reacciona al campo, con lo que experimenta una fuerza magnética.

En este tema estudiaremos este segundo caso, la reacción de cargas móviles al existir un campo magnético en sus proximidades. En el tema 12, último dedicado al electromagnetismo, trataremos la inducción magnética, esto es, cómo las cargas en movimiento generan un campo magnético.

11.3. Relación de la interacción magnética con la carga eléctrica

En este apartado se tratan, brevemente, algunos fenómenos experimentales que demuestran **la relación tan fuerte que hay entre magnetismo y campos eléctricos**.

Uno de los primeros hechos que demostraron la relación entre ambos fenómenos fueron los experimentos realizados por el científico danés **Hans Christian Oersted**, hacia 1820. Un fenómeno magnético que se conoce desde antiguo son las brújulas. Una **brújula** consiste, básicamente, en un trozo de metal magnetizado que puede girar con libertad.

Aunque el campo magnético terrestre no es muy potente, al tener el trozo de metal completa libertad para girar, acaba orientado en su dirección. Como el polo norte magnético de la Tierra coincide, aproximadamente, con el polo norte geográfico, y teniendo en cuenta que cerca de la superficie terrestre las líneas del campo magnético son más o menos paralelas a la superficie y van de un polo a otro (de forma similar a como sucede con el imán y las ligaduras de hierro de la figura de la sección anterior), una brújula se orienta, siempre, en la dirección norte-sur, lo que nos permite orientarnos.

Oersted, en sus experimentos, conectó a un alambre conductor una fuente de electricidad, de manera que hacía circular corriente en cualquiera de los dos sentidos del alambre, o bien, podía detener la corriente eléctrica que circulara por el mismo. Cuando no circulaba corriente por el alambre, la brújula apuntaba hacia el norte.

Sin embargo, cuando hacía circular electricidad a través del alambre, la brújula se desviaba de su dirección, con la característica interesante de que la dirección de esa desviación dependía del sentido de la corriente. Este efecto era el mismo que se observaría en la brújula si se le acercaba o alejaba un imán, lo que puso de manifiesto que la corriente eléctrica, esto es, la carga eléctrica en movimiento, era capaz de inducir un campo magnético al mismo nivel que un imán permanente.

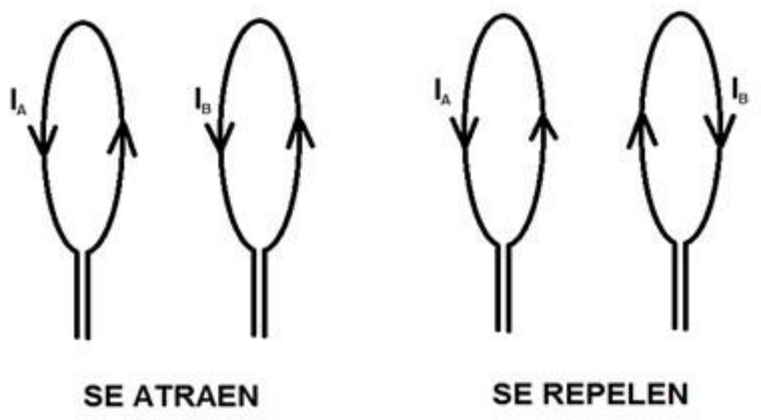
Unos años después, de manera independiente **Michael Faraday y Joseph Henry** descubrieron que **mover imanes en las proximidades de espiras** provocaba en ellas la aparición de corrientes eléctricas. Hay diversos experimentos que apuntan a características importantes de este tipo de relación entre la carga eléctrica en movimiento y el magnetismo.

Un **primer ejemplo** es suponer dos alambres rectilíneos que se hallan próximos. Si no circula corriente por ninguno de los dos, no sucede nada. Si solo circula intensidad a través de uno de ellos, tampoco. Sin embargo, si circula corriente de alta intensidad a través de ambos alambres a la vez, aparecerá una fuerza en cada uno de ellos. Esta fuerza será atractiva si la intensidad que circula por ambos lo hace en el mismo sentido, y repulsiva si circula en sentidos opuestos.

Esto parece indicar que el magnetismo creado por cargas en movimiento es una interacción que solo afecta a cargas que también se estén moviendo.

El **segundo hecho experimental** muestra que las características del campo magnético creado por imanes permanentes y el generado por la corriente eléctrica son las mismas. Si hacemos circular corriente eléctrica a través de una espira, que es, en esencia, un alambre que forma una circunferencia, se crea un campo magnético dirigido perpendicularmente a la circunferencia que forma la espira.

En función del sentido de giro de la intensidad eléctrica, las espiras se atraerán o se repelerán:



Si se acerca a una espira cargada un imán, es posible definir un polo norte y un polo sur para una espira. Según el sentido de giro de la intensidad eléctrica que la recorre, si se le acerca un imán con el polo norte orientado hacia la espira repelerá el imán si se le acerca por un sentido y lo atraerá si se le acerca por el otro, de la misma forma que dos imanes se atraen o se repelen si se acercan con polos iguales enfrentados o con polos diferentes.

En definitiva, la interacción magnética permanente y la inducida en conductores recorridos por cargas eléctricas son de la misma naturaleza.

11.4. Definición de campo magnético

Este apartado se divide en dos partes. En la primera, se obtiene una expresión para la fuerza magnética, en analogía con el tratamiento realizado para los campos eléctrico y gravitatorio. En la segunda, mostramos la manera de calcular el vector campo magnético.

Expresión de la fuerza magnética

A partir de experimentos como los anteriores, y otros más complicados, es posible deducir una **ecuación para calcular la fuerza inducida por la interacción magnética**, similar a las expresiones obtenidas en temas anteriores para la fuerza gravitatoria o la eléctrica.

Sea una región del espacio en la que existe un campo magnético de determinada intensidad y dirección, y que queda descrito en todos los puntos del espacio por un vector que se denota $\vec{B}$. No sabemos qué provoca ese campo, solo que admite una expresión vectorial y que su intensidad tiene cierto valor. Si en esa región hay una carga q que se mueve a una velocidad $\vec{v}$, la fuerza que sufre esa carga debida a la interacción con el campo magnético vale:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Esta expresión se deduce a partir de los siguientes **hechos experimentales**:

1. Si la carga que se coloca en la región del espacio donde se halla el campo no se mueve, no aparece fuerza magnética.
2. Si la carga se mueve a cierta velocidad, experimenta una fuerza magnética siempre, exceptuando si la velocidad está dirigida en la misma dirección que el campo magnético, caso en el cual no hay fuerza magnética.
3. La fuerza magnética depende de la dirección de la velocidad, de manera que es máxima cuando velocidad y campo magnético son perpendiculares.
4. La fuerza magnética depende linealmente de la carga. Si la carga se multiplica por k, la fuerza queda multiplicada por ese mismo número. Además, el sentido de la fuerza depende del signo de la carga: si la carga es negativa, la fuerza va en un sentido y si es positiva, en el contrario.
5. La fuerza magnética depende del módulo de la velocidad linealmente.
6. La fuerza magnética depende de la intensidad del campo de manera lineal.

Los hechos 1, 2, 3, 5 y 6 nos hacen pensar que la fuerza magnética es proporcional al producto vectorial del vector velocidad por el vector campo. Nota que el producto vectorial de dos vectores es cero si, al menos, uno de ellos lo es (punto 1), que su módulo es proporcional al seno del ángulo que forman (puntos 2 y 3) y que es proporcional linealmente a los módulos de ambos vectores (puntos 5 y 6), cosa también propia de productos vectoriales. El punto 4 completa la ecuación, al demostrar que la fuerza es proporcional a la carga eléctrica.

A diferencia de lo sucedido con el campo gravitatorio y el eléctrico, no se ha considerado aquí una constante de proporcionalidad. Ello se debe a que el campo magnético se ha supuesto de intensidad desconocida e imposible de medir experimentalmente de manera directa. La forma en que se mide consiste en lanzar partículas de determinada carga y con una velocidad cuyo módulo no varía, y su dirección se va modificando. En el caso en el que la fuerza es máxima, se define el módulo del campo magnético $\vec{B}$ como:

$$B = \frac{F}{q\,v}$$

Por ello no es necesaria la constante de proporcionalidad. Esta ecuación da, además, las unidades en las que se mide el campo magnético. En el Sistema Internacional, se mide en **teslas**, que se abrevia como T. Un tesla vale, a la vista de la expresión anterior:

$$1T = \frac{N\,s}{C\,m} = \frac{kg}{C\,s}$$

Otra unidad muy conocida de campo magnético es el **gauss**, que se define:

$$1\,tesla = 10^4\,gauss$$

Cálculo de campos magnéticos

En el aparatado anterior supusimos que el vector campo magnético, $\vec{B}$, era conocido. En esta parte del tema se exponen ecuaciones que nos permitirán calcular este vector.

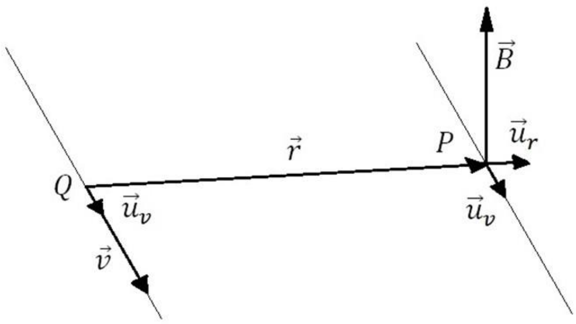
Se supone que en una región del espacio hay una partícula, de carga Q, que viaja a una velocidad que se denominará $\vec{v}$. Esa partícula generará un campo magnético en sus alrededores. Sea P un punto cualquiera de la región donde se mueve la partícula mencionada y sea $\vec{r}$ el vector que va desde la posición de la partícula hasta el punto P.

Por último, se definen dos vectores unitarios, $\vec{u}_v$ y $\mathrm{y}\,\vec{u}_r$, en la dirección de la velocidad y del vector $\vec{r}$ respectivamente.

El campo que la carga Q crea en P al moverse, en las condiciones descritas antes, vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Q\,v}{r^2} \, \vec{u}_v \times \vec{u}_r$$

De las propiedades del producto vectorial puede extraerse que el vector campo magnético será perpendicular al plano formado por la velocidad de la carga que lo crea y el vector que une la posición de la carga con el punto donde se calcula el campo.



Por otro lado, la constante μ se denomina **permeabilidad magnética del medio**, y es diferente para cada medio. Esta es una nueva analogía entre el campo eléctrico y el magnético, ya que aparece otra vez una constante que depende del medio considerado. Esta **constante** vale, para el **vacío**:

$$\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\; H/m$$

Donde la H es una unidad denominada henrio que equivale $kg\; m^2/C^2$.

Como ya sucedió con el campo eléctrico, la permeabilidad de un medio se suele expresar así:

$$\mu = \mu_r\, \mu_0$$

Donde μ_r se denomina **permeabilidad magnética relativa del medio** y es un número adimensional. Para materiales isótropos, que son la mayoría, la permeabilidad es un escalar. Solo en el caso de materiales anisótropos se convertirá en una magnitud tensorial.

El valor de la permeabilidad magnética del medio permite clasificar los medios en tres **categorías**:

- **Diamagnéticos**: son aquellos cuya permeabilidad magnética es inferior a la del vacío y, por tanto, los campos magnéticos existentes son un poco más débiles que en el vacío. También son aquellos cuya permeabilidad magnética relativa es menor que 1.
- **Paramagnéticos**: aquellas sustancias en las que la permeabilidad es igual o un poco mayor a la del vacío, o sea, con permeabilidad magnética relativa similar a 1.
- **Ferromagnéticos**: los medios en los que la permeabilidad magnética es muy superior a la del vacío y, por tanto, el campo magnético es mucho más intenso. Su permeabilidad magnética relativa es muy superior a 1.

La expresión anterior admite una forma, bastante compleja, para calcular el campo magnético que crean elementos por los que circulan intensidades, como hilos conductores. Para ello, hay que tener en cuenta que habrá que dividir el circuito por el que circula la intensidad en trozos infinitesimales, dado que solo se saben calcular campos magnéticos creados por cargas puntuales en movimiento. Como la intensidad puede escribirse, por definición:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Dado que representa la cantidad de carga que atraviesa una parte del circuito por unidad de tiempo, si se considera el campo magnético creado en un punto determinado por una carga infinitesimal *dq*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{dq\, v}{r^2}\, \vec{u}_v \times \vec{u}_r$$

Usando que:

$$I\,dl = \frac{dq}{dt}\,dl = dq\,\frac{dl}{dt} = dq\,v$$

Válido puesto que la derivada de la longitud con respecto al tiempo equivale a la velocidad. Esto permite escribir el campo diferencial creado por el elemento infinitesimal de corriente como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\,\vec{u}_v \times \vec{u}_r$$

A este último resultado se lo denomina **ley de Biot y Savart**.

Para obtener el campo total creado por un circuito completo hay que integrar y queda:

$$\vec{B} = \frac{\mu\,I}{4\pi}\int \frac{\vec{u}_v \times \vec{u}_r}{r^2}\,dl$$

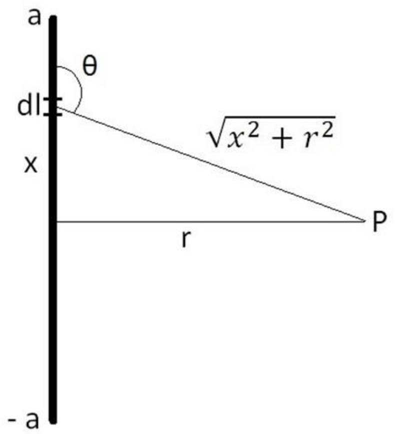
Esta integral, en general, es muy complicada de resolver, ya que, aunque se ha supuesto que la intensidad es constante a lo largo de todo el circuito y sale de la integral, tanto la distancia al punto donde se calcula el campo como las expresiones de ambos vectores unitarios dependen del circuito concreto y tendrán expresiones muy complicadas en función de cada punto del circuito. Solo en casos muy sencillos es posible resolverla con los conocimientos esperables en este curso introductorio.

A modo de ejemplo, se resolverá uno de los problemas más sencillos.

Ejemplo 1: Campo magnético creado por una corriente rectilínea

Se tiene un hilo conductor de longitud *L*. Por el hilo circula una intensidad de corriente dada por *I*. Calcular el campo magnético que crea a una distancia *r*, muy pequeña en comparación con la longitud del hilo.

Este es uno de los casos más típicos de **cálculo directo de un campo magnético**. En primer lugar, por razones que podríamos denominar «estéticas» (las ecuaciones quedan más simplificadas) supondremos que la longitud se puede escribir: $L = 2a$. Una ventaja adicional de redefinir la longitud la vemos en la siguiente figura:



Se quiere calcular el campo magnético en *P*, punto situado muy cerca del conductor rectilíneo (obviamente, el dibujo no está a escala: *r* es muy pequeño comparado con *L* y *a*). Para ello, hay que integrar el campo creado por cada diferencial de corriente, *dl*, para todo el conductor. La distancia de cada elemento diferencial de corriente al punto *P* vale, en todo momento:

$$\sqrt{x^2 + r^2}$$

Donde *x* es la distancia entre el centro del conductor y el punto donde se halla el diferencial de corriente. Puede ser positivo y negativo y sus valores van desde –*a* hasta *a*. Esta forma de proceder, buscar una coordenada que permita recorrer el conductor completo, es habitual al resolver este tipo de problemas. Con todo esto, la integral de la ley de Biot y Savart vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu\, I}{4\pi} \int \frac{\vec{u}_v \times \vec{u}_r}{r^2}\, dl = \frac{\mu\, I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\vec{u}_v \times \vec{u}_r}{x^2 + r^2}\, \mathrm{dx}$$

El producto escalar entre los dos vectores unitarios valdrá $sen\,\theta\,\hat{u}_t$ donde θ es el ángulo, representado en la figura, entre el conductor y el vector que une el diferencial de elemento de intensidad con el punto *P*, donde se calcula el campo. El vector $\hat{u}_t$ es el vector unitario en la dirección tangente a la circunferencia de radio r que se puede dibujar perpendicular al punto *P*.

A partir de la figura, usando el triángulo rectángulo que forman *r*, la distancia al punto P desde *dl* y el propio conductor, se cumple que:

$$sen\,\theta = sen\,\pi - \theta = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Donde se ha usado que dos ángulos que sumen 180º tienen el mismo seno y la definición trigonométrica del seno para el triángulo rectángulo considerado. Con ello, la ecuación queda:

$$\vec{B} = \frac{\mu\,I}{4\pi}\,\hat{u}_t \int_{-a}^{a} \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}}\,\mathrm{dx}$$

Esta integral se resuelve (de manera complicada) y queda:

$$\vec{B} = \frac{\mu\,I}{4\pi}\,\frac{2a}{r\,\sqrt{a^2 + r^2}}\hat{u}_t$$

Si usamos la suposición de estar muy cerca del conductor, eso implica que $a \gg r$ y por tanto:

$$\sqrt{a^2 + r^2} \;\cong\; \sqrt{a^2} = a$$

Y se obtiene el resultado aproximado que buscábamos:

$$\vec{B} = \frac{\mu\,I}{2\pi r}\,\hat{u}_t$$

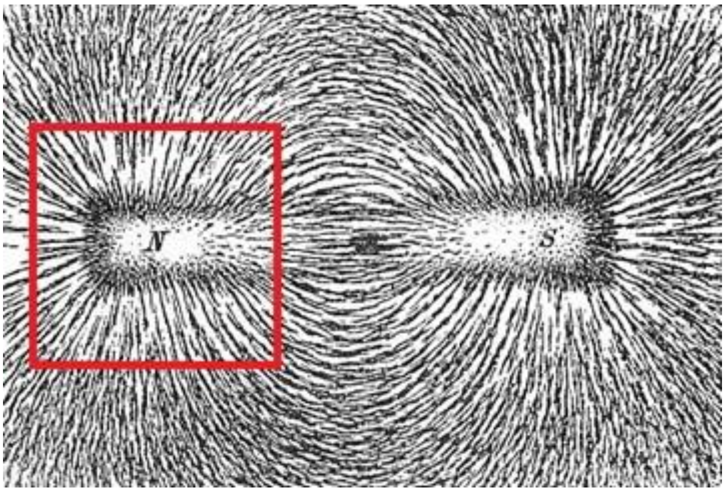
Para terminar esta parte del tema, un último comentario. Como vimos en apartados anteriores, las líneas de campo del campo magnético no se cierran debido a que los polos siempre se encuentran por parejas, esto es, porque no existen los monopolos magnéticos. Esto tiene su importancia si, recordando la definición del flujo del campo eléctrico, se hace una definición análoga para el campo magnético. El flujo de un campo magnético a través de una superficie dada sería:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Como no existen los monopolos magnéticos y, por tanto, todas las líneas de campo son cerradas, es fácil ver que el flujo magnético a través de una superficie cerrada será siempre nulo. La única forma en que se podría tener un flujo magnético no nulo a través de una superficie cerrada sería que encerrara en su interior un monopolo magnético, cosa que no existe. Como son cerradas, todas las líneas de campo magnético que entran en una superficie salen de ella.

Si como se ve en la imagen de la figura de más abajo, se consideran las líneas de campo que entran y salen del cuadrado rojo que se ha dibujado, puede verse que las líneas de campo que entran por las caras superior, izquierda e inferior salen por la cara derecha.

En realidad, las líneas son cerradas: van de un polo a otro, se curvan y se cierran cerca de uno de los polos. Las que están encima del imán se cierran por arriba y las que están debajo por abajo. Las líneas que parecen salir en horizontal, en realidad, se van curvando muy lejos del imán y se vuelven a cerrar.



Fuente: http://www.portaleso.com

Por ello, dada cualquier superficie cerrada se verifica que:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Este resultado es el **equivalente al teorema de Gauss para el campo eléctrico, con la diferencia de que aquí el resultado siempre es nulo**.

Aunque esta ecuación tiene sus aplicaciones, no hablaremos más de ella ya que, normalmente, es **más útil la ley de Ampère**, con la que cerraremos el tema.

11.5. Acción de un campo magnético sobre cargas en movimiento y corrientes eléctricas

En este apartado regresamos a la ecuación que da la fuerza de la interacción magnética:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Analizaremos qué consecuencias tiene esta fuerza sobre las partículas que se mueven en su seno, ya se trate de partículas aisladas o de corrientes eléctricas.

Trayectorias de partículas cargadas en el seno de campos magnéticos

Dadas las características del producto escalar, la fuerza es perpendicular a la velocidad de la partícula que experimenta el campo. Por ello:

El campo magnético no modifica el módulo de la velocidad original de la partícula, solo su dirección.

Supongamos que la velocidad de la partícula es perpendicular a la dirección del campo magnético, que es uniforme. En ese caso, el módulo de la fuerza magnética es:

$$F = q\ v\ B$$

Al ser una fuerza perpendicular a la velocidad, actúa como una fuerza centrípeta, esto es, como el motivo de que la trayectoria de la partícula se curve. De hecho, dado que la aceleración centrípeta es constante, lo que se va a obtener será una trayectoria curvilínea. Si la partícula tiene masa m, la fuerza centrípeta estará dada por:

$$F_C = m\ \frac{v^2}{R}$$

Donde *R* será el radio de la circunferencia en la que consistirá la trayectoria. Como no hay más fuerzas que la eléctrica (el problema se plantea de manera que la gravedad no afecte a las ecuaciones: partículas muy poco masivas, orientaciones adecuadas, etc.), hay que igualar ambas expresiones y queda, tras despejar el radio:

$$q\ v\ B = m\ \frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{m\ v}{q\ B}$$

Una observación importante es la siguiente:

El sentido de giro depende del signo de la carga. Dado un mismo campo magnético, una carga positiva girará en sentido contrario al de una negativa.

Si se despeja la velocidad lineal y se divide entre el radio de curvatura, se puede calcular la velocidad angular del movimiento circular inducido por un campo magnético:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q\,B}{m}$$

Y la frecuencia de este movimiento circular vale:

$$f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{q\,B}{2\,\pi\,m}$$

A esta frecuencia se la llama, a menudo, **frecuencia de ciclotrón**, debido a que un tipo particular de acelerador, denominado ciclotrón, funciona en las condiciones expresadas: haciendo que las partículas aceleradas giren en trayectorias circulares.

Si el campo no es perpendicular a la velocidad, esta siempre se podrá dividir en dos componentes, una de ellas una dirección paralela a la velocidad y la otra perpendicular a la componente anterior. La velocidad paralela al campo permanece constante en módulo y dirección, mientras que la perpendicular sufre una aceleración centrípeta que hace girar a la partícula en un movimiento circular. La composición de ambos movimientos supone una **trayectoria helicoidal** que avanza en la dirección del campo si la carga es positiva.

Fuerzas magnéticas sobre elementos de corriente

Seguiremos un proceso parecido al descrito cuando se dedujo la ley de Biot y Savart. Se puede definir la intensidad como:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

La ecuación de la fuerza magnética que un campo magnético $\vec{B}$ ejercería sobre un elemento del circuito de longitud $d\vec{l}$, que tendría una carga *dq*, sería:

$$d\vec{F} = dq\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Si se supone que *dq* es la carga que contiene un elemento diferencial del conductor de corriente de longitud $d\vec{l}$, la velocidad de la corriente eléctrica está dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}\,dq = \frac{d\vec{l}}{dt}\,dq = d\vec{l}\,\frac{dq}{dt} = I\,d\vec{l}$$

Así, la ecuación de la fuerza es:

$$d\vec{F} = I\,(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Dado un conductor cuya forma sea cualquiera habrá que integrar, a lo largo de todo el circuito, para saber la fuerza que el campo ejerce sobre todo el conductor, lo que lleva a la expresión final buscada:

$$\vec{F} = \int I\,(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Para terminar este apartado, resolveremos uno de los ejemplos más sencillos de aplicación de la fórmula precedente.

> **Ejemplo 2: Fuerza de un campo magnético uniforme sobre un conductor rectilíneo.**
>
> Sea un conductor rectilíneo de longitud L por el que circula una intensidad de corriente constante **I** y que se halla en el seno de un campo magnético $\vec{B}$. Calcular la fuerza magnética que experimenta el conductor.

Supondremos que el conductor rectilíneo está orientado en la dirección de un vector unitario $\vec{u}_L$, que es la misma dirección seguida por la corriente. Todo elemento diferencial de longitud dentro del conductor podrá escribirse como.

$$d\vec{l} = dl\,\vec{u}_L$$

Se sustituye en la expresión de la fuerza y sale:

$$\vec{F} = \int I\,dl\,(\vec{u}_L \times \vec{B})$$

Debido a que la intensidad es constante y a que el conductor es rectilíneo y, por tanto, el producto escalar entre el campo magnético y el vector unitario en la dirección de la corriente es siempre constante, se puede escribir:

$$\vec{F} = I\,(\vec{u}_L \times \vec{B}) \int dl$$

Como la integral del diferencial de longitud a lo largo de todo el conductor será L y $\vec{L} = L\,\vec{u}_L$ por definición, el resultado final es:

$$\vec{F} = I\,(\vec{L} \times \vec{B})$$

11.6. Ley de Ampère

Hay una cuestión importante sobre el campo magnético que no se ha tratado hasta ahora.

A la hora de hablar de los campos gravitatorio y eléctrico se dio especial importancia a su carácter conservativo. Ambos campos, como ya es sabido, son conservativos, lo que permite definir para ambos energías potenciales. Eso es muy importante a la hora de realizar cálculos.

Por tanto, es legítimo preguntarse si el campo magnético, cuyas características esenciales se han estudiado en los apartados anteriores, es conservativo o no.

Un campo de fuerzas en general, denotado por $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si la integral a lo largo de toda línea cerrada es nula, esto es:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Sea cual sea la curva cerrada considerada.

Para comprobarlo emplearemos uno de los resultados obtenidos en apartados precedentes de este mismo tema. Se demostró anteriormente que, dado un conductor recto que se supone indefinido (suposición válida para conductores rectilíneos lo bastante grandes), el campo magnético generado es tangente a cualquier circunferencia perpendicular al conductor rectilíneo y centrada en él.

Si se supone que por el conductor circula una intensidad eléctrica I dada, y que el punto en el que se calcula el campo está a una distancia *r* del conductor, el módulo del campo magnético está dado por:

$$B = \frac{\mu}{2\,\pi}\frac{I}{r}$$

Si se toma como superficie cerrada una bastante simétrica, por ejemplo, una circunferencia perpendicular al conductor y centrada en él, el campo magnético deberá anularse si es conservativo. Al plantear la ecuación:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Hay que tener en cuenta que el vector campo magnético es paralelo, a lo largo de toda la circunferencia, al vector diferencial de desplazamiento $d\vec{l}$. Por tanto, recordando que *I* y *r* son constantes por las características del conductor y la circunferencia consideradas:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B\,dl = \frac{\mu\,I}{2\,\pi\,r}\oint dl$$

La integral curvilínea de un diferencial de distancia a lo largo de una circunferencia es igual a la longitud de esta, o sea, $2\,\pi\,r$. Así:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu\,I}{2\,\pi\,r}\,2\,\pi\,r = \mu\,I$$

Como puede comprobarse, esta integral a lo largo de un camino cerrado no da cero, de donde se extrae la conclusión de que: el **campo magnético no es conservativo**.

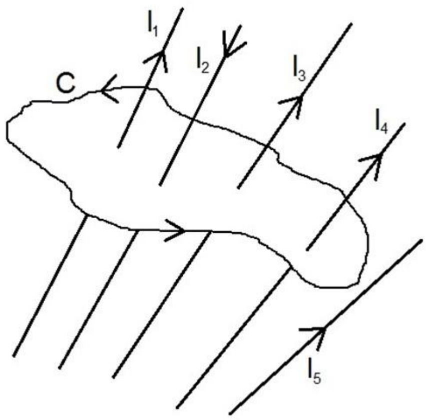
Este resultado puede generalizarse para medios isótropos (en los que la permeabilidad magnética es un número), lo que lleva a la definición de la ley de Ampère:

La ley de Ampère afirma que la integral de línea del campo magnético a lo largo de una línea cerrada que tenga cualquier forma es igual al producto de la permeabilidad magnética del medio por la intensidad que atraviesa la superficie definida por la curva cerrada a lo largo de la cual se hace la integración. Puede expresarse así:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\, I_{ES}$$

Donde µ es la permeabilidad magnética del medio e I_{ES} es la intensidad que cruza la superficie encerrada por la curva.

Antes de usar esta expresión hay que tener en cuenta varias cuestiones. La intensidad que cruza la superficie encerrada por la curva debe calcularse sumando y restando las intensidades que cruzan esa superficie. El signo de las intensidades depende del sentido en el que se recorre la curva que la encierra. Por ejemplo, en la figura siguiente:



Las intensidades que cruzan la superficie descrita por C son I_1, I_2, I_3 e I_4. Para saber, de manera rápida, si con el sentido de recorrido definido en C (antihorario) las intensidades son positivas o negativas se utiliza la **regla de la mano derecha**. Esta regla consiste en doblar los dedos de la mano derecha siguiendo el sentido de recorrido por C con el pulgar extendido. Haciendo eso, la intensidad será positiva si está en el sentido del pulgar. En este caso, por tanto, son positivas I_1, I_3 e I_4. Por ello:

$$I_{ES} = I_1 - I_2 + I_3 + I_4$$

Por otro lado, la expresión anterior implica que el medio es isótropo y que, por tanto, la permeabilidad magnética del medio se puede expresar como un escalar.

Para aclarar el uso de este teorema, expondremos dos ejemplos:

> **Ejemplo 3: Campo magnético creado por una corriente rectilínea usando la ley de Ampère**
>
> Se tiene un hilo conductor de longitud *L*. Por el hilo circula una intensidad de corriente dada por *I*. Calcular el campo magnético que crea a una distancia r muy pequeña en comparación con la longitud del hilo.

Este enunciado es idéntico al del ejemplo 1, con la salvedad de que ahora lo resolveremos usando la Ley de Ampère. La curva que se recorrerá es una circunferencia perpendicular a la corriente, de radio *r*, y en cuyo centro está el conductor. La aplicación de la ley de Ampère lleva a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$$

El secreto para que esta ley simplifique los cálculos suele residir en la elección de la curva a recorrer. En este caso, la curva tiene la ventaja de que el campo magnético, si se está a distancias pequeñas en comparación a la longitud del hilo conductor, es tangente a la circunferencia que se va a recorrer y, además, constante en módulo, al hallarse a la misma distancia del hilo. Ello implicará que:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\, dl$$

Al ser paralelo el elemento diferencial de la circunferencia y el campo. Introducido en la expresión de la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B\, dl = B \oint dl$$

Como la integral de línea a lo largo de la circunferencia será su longitud:

$$B \oint dl = B\,2\,\pi\,r \qquad \Rightarrow \qquad B\,2\,\pi\,r = \mu\,I \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B = \frac{\mu\,I}{2\,\pi\,r}}$$

Notemos que la Ley de Ampère es cierta, cerca o lejos del conductor. La suposición de estar cerca del conductor ha servido para resolver la integral de línea propia de la ley de una forma simplificada. Si no se hubieran hecho esas simplificaciones, el resultado habría sido el mismo que aquel que se simplificó para obtener la expresión en negrita.

> **Ejemplo 4: Campo magnético creado por un conductor grueso en su interior y en el exterior usando la ley de Ampère**
>
> Se tiene un conductor cilíndrico muy largo y de radio *R*. Por el conductor circula una intensidad de corriente dada por *I* distribuida de manera uniforme. Calcular el campo magnético que crea en su interior y en puntos cercanos al conductor.

La curva en la que se aplica la ley de Ampère es la misma que en el caso anterior, solo que ahora hay que distinguir dos situaciones: $r < R$ y $r > R$. La diferencia en ambos casos será el valor de la intensidad de la corriente. Si el radio de la curva en la que aplicamos la ley de Ampère es menor que el radio del conductor, la intensidad que la recorre será:

$$I_r = I\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I\,\frac{r^2}{R^2}$$

Mientras que en los puntos externos, la intensidad será *I*.

En ambos casos, se aplican las mismas simplificaciones que en el ejemplo anterior y la integral queda:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B\,dl = B \oint dl = B\,2\,\pi\,r$$

Por tanto:

$$B = \frac{\mu\, I\, r}{2\, \pi\, R^2} \qquad \qquad si\, r < R$$

$$B = \frac{\mu\, I}{2\, \pi\, r} \qquad \qquad si\, r > R$$

Como puede observarse para $r > R$ se reproduce el resultado para un conductor rectilíneo del ejemplo 3.