Física I

Campo eléctrico

Índice

CAMPO ELÉCTRICO

Concepto

Interacción en la que existen dos cargas: positiva y negativa. Cargas del mismo signo se repelen, de signo contrario se atraen.

Fuerza eléctrica:

$$\overrightarrow{F_{21}} = K\,\frac{q_2 q_1}{r^2}\,\widehat{u_{21}}$$

K depende dela constante dieléctrica del medio:

$$K = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon}$$

Valor de K en el vacío:

$$K = 8{,}9874 \cdot 10^9\ N\,m^2/C^2$$

Campo eléctrico: fuerza eléctrica por unidad de carga. Se mide en N/C

$$\vec{E} = K\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{u}$$

Potencial eléctrico: se mide en voltios. 1V = Nm/C

$$V = K\,\frac{Q}{r}$$

Campo creado por cargas puntuales

El campo creado por diversas cargas puntuales en un punto P es la suma de los campos creados por cada partícula puntual en P. Lo mismo para el potencial.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} K\,\frac{q_i}{d_i^2}\,\hat{u}_i$$

$$V_T = \sum_{i=1}^{N} K\,\frac{q_i}{d_i}$$

Se ilustra en el ejemplo 1

Características de los campos eléctricos

Un cuerpo solo reacciona a un campo eléctrico si posee carga eléctrica neta positiva o negativa, o sea, las cargas de distintos signos se anulan entre sí.

La diferencia de potencial puede interpretarse como el trabajo por unidad de carga necesario para mover una carga entre ambos puntos:

$$\Delta V = \frac{W}{q}$$

Para campos eléctricos uniformes, el módulo del campo es igual a la diferencia de potencial entre dos puntos dividido entre la distancia entre ambos puntos:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

El campo eléctrico también se puede medir en V/m

Flujo de un campo eléctrico

Línea de fuerza:
Línea tal que los vectores campo eléctrico son tangentes a las mismas. Si se dibujan de forma simétrica y a distancias regulares, su densidad da idea de la intensidad del campo.

Flujo a través de una superficie: idea relacionada con las líneas de fuerza; mide el número de líneas de fuerza que la atraviesas. Expresiones:

$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S} \qquad \Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Teorema de Gauss

El flujo que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga total que hay dentro de la superficie dividida entre la constante dieléctrica del medic

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Ejemplo 2: campo eléctrico creado en las cercanías de un plano cargado.

10.1. Introducción y objetivos

Este es el primero de los temas dedicados a los fenómenos relacionados con la electricidad y el magnetismo. Los conceptos que estudiaremos en este tema y los siguientes tienen poco que ver con los temas precedentes en lo que respectan a los fenómenos físicos estudiados. No obstante, buena parte del formalismo teórico y de los conceptos previos siguen siendo de aplicación.

Así, aunque en el tema hablamos de la interacción eléctrica y sus características, la actuación de los campos eléctricos y magnéticos supone la aparición de fuerzas que actúan sobre partículas y cuerpos cargados, y esas fuerzas son de la misma naturaleza que las estudiadas en las lecciones precedentes. Además, son compatibles, esto es, un móvil cargado en la superficie de la Tierra sentirá la interacción electromagnética y la fuerza de la gravedad, y las fuerzas, con independencia de su origen, se pueden sumar y producen cambios en los estados de movimiento o reposo de los diferentes cuerpos.

Como veremos en los primeros apartados, si se comparan las expresiones de la interacción eléctrica con la interacción gravitatoria vemos que son muy parecidas, así que ambos tipos de campo presentan ciertas analogías. Por eso, buena parte de las definiciones que establecemos en este tema son válidas para el campo gravitatorio. En particular, el teorema de Gauss.

En este primer tema de este bloque, estudiamos los fenómenos fundamentales relacionados con el campo eléctrico, que es la formalización de la interacción eléctrica. Si situamos dos cargas a cierta distancia, cada una provoca una fuerza en la otra, que depende de la intensidad de ambas cargas y de la distancia que las separe. Esto se modela asumiendo que una partícula cargada genera un campo eléctrico a su alrededor. Por eso, este tema estudiará, principalmente, las características de este campo.

Al asimilar los conceptos del tema, serás capaz de:

- Conocer qué es un campo eléctrico y sus características básicas.
- Saber calcular el campo creado por cargas puntuales y conocer sus características esenciales.
- Comprender la terminología básica sobre campos eléctricos.
- Saber usar el teorema de Gauss para calcular campos eléctricos producidos por diversos tipos de cargas.

10.2. Concepto de campo eléctrico

En esencia, un campo eléctrico es un campo de fuerzas. La definición es idéntica a la que fijamos en el apartado 7.3 del tema 7: una región del espacio en la que una partícula sensible al campo experimenta una fuerza determinada en módulo, dirección y sentido.

En el tema 7 estudiamos las características del campo de fuerzas que crea la interacción gravitatoria. En el presente apartado haremos lo propio para el caso particular de los campos eléctricos. Por ello, dividimos este apartado en **dos partes**: una en que se describen las características de la interacción eléctrica y otra en la que se habla de conceptos generales acerca del campo eléctrico.

Características de la interacción eléctrica

La interacción eléctrica tiene ciertas similitudes con respecto a la gravitatoria, si bien, presenta diferencias bastante grandes. La diferencia fundamental es que no todos los cuerpos son sensibles a la interacción eléctrica. Solo la sienten aquellos que presentan carga eléctrica.

La carga eléctrica es una propiedad que presentan algunos cuerpos, que los hace sensibles a la interacción eléctrica. En el Sistema Internacional **se mide en culombios**, abreviados por C. Asimismo, existen **dos tipos de carga**: una que se denomina carga positiva y otra llamada carga negativa. La naturaleza de la interacción eléctrica depende de la naturaleza de estas cargas, además de ser proporcional al valor numérico de cada una. Se verifica que:

- Dos cargas positivas se repelen.
- Dos cargas negativas se repelen.
- Dos cargas de signo contrario se atraen.

En la interacción gravitatoria no existe nada similar a dos tipos de masas: la gravedad es siempre una interacción atractiva.

Sabiendo que las cargas deben sustituirse en la ecuación siempre con su signo, la interacción eléctrica está dada por:

$$\overrightarrow{F_{21}} = K \frac{q_2 q_1}{r^2} \widehat{u_{21}}$$

A esta ecuación se la denomina **ley de Coulomb** y es la que rige la interacción de tipo eléctrico. La ecuación es muy similar a la de la interacción gravitatoria, pero presenta dos diferencias fundamentales: las características y el valor de la constante de proporcionalidad K, que sustituye a la constante de gravitación universal G. La primera diferencia es que no es universal. Para medios isótropos (de los que hablamos después) admite una expresión dada por:

$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon}$$

Donde ϵ es la permitividad del medio y varía para cada medio considerado. Para el vacío, esta constante se denota por ϵ_0 y vale $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ F/m$. (F significa faradio y es la unidad del Sistema Internacional para la capacidad eléctrica).

La segunda diferencia es que la constante K tiene un valor bastante grande comparado con el de G. Para el vacío, esta constante tiene el valor:

$$K = 8{,}9874 \cdot 10^9\ N\,m^2/C^2$$

Esto supone que la interacción eléctrica es de mayor intensidad que la gravitatoria. Lo que la hace menos influyente es que pocos cuerpos poseen carga eléctrica neta de manera natural, mientras que todo cuerpo posee masa.

La permitividad de un medio se suele escribir de la siguiente manera:

$$\epsilon = \epsilon_r\,\epsilon_0$$

Donde ϵ_r se denomina permitividad relativa del medio y es un número igual o mayor que 1. A la permitividad dieléctrica, que es una constante adimensional, se la llama también «constante dieléctrica» y, por abuso de lenguaje, a veces recibe este nombre ϵ, lo que no es del todo correcto.

La ley de Coulomb se enunció originalmente para el vacío, y se generaliza usando la permitividad del medio. Sin embargo, esta generalización solo es válida cuando el medio es **isótropo**, esto es, cuando sus propiedades no dependen de la dirección en la que se estudian. Hay materiales que presentan propiedades diferentes, por ejemplo, ópticas, según se analicen en una dirección del espacio o de otra: tales materiales no son isótropos. Cuando un material no es isótropo, la permitividad deja de ser un escalar y se convierte en un tensor, lo que cambia bastante las ecuaciones.

No obstante, en muchos casos prácticos, los cálculos se hacen con cargas o conductores que están en el aire. En tal caso, es una aproximación muy buena usar la permitividad del vacío, puesto de que la permitividad relativa del aire es, aproximadamente, 1,0006. Por ello, en muchos ejemplos y textos, usan directamente la permitividad del vacío.

Campo eléctrico

Según la definición estudiada en el tema 7, un campo de fuerzas genera una fuerza determinada sobre toda partícula sensible a él en una región del espacio. Como hicimos para el campo gravitatorio, es posible separar las características de la partícula u objeto que crea el campo de aquellas debidas al objeto que siente sus efectos. Por ello, se puede definir un vector que mida los efectos del campo eléctrico en cada punto del espacio:

Se define el campo eléctrico creado por una partícula de carga Q en un punto del espacio distante de ella r como la fuerza que ejerce por unidad de carga al colocarla a esa distancia.
Su expresión es:

$$\vec{E} = K\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{u}$$

Donde el vector unitario $\hat{u}$ va dirigido desde la posición del origen del campo hacia el punto en el que se sitúa la carga que siente su acción.

A menudo se denomina al módulo de este vector recién definido **intensidad de campo**. La unidad de campo eléctrico en el Sistema Internacional es el N/C, que no recibe ningún nombre particular.

El campo eléctrico, como sucede con el gravitatorio, es conservativo y, además, es un campo de fuerzas central. Ello implica que será posible definir una energía potencial eléctrica, en analogía con la gravitatoria. Para el caso del campo eléctrico esto supone introducir un nuevo concepto interesante.

Calcular el trabajo efectuado por la fuerza eléctrica a lo largo de un desplazamiento dado implica resolver la siguiente integral a lo largo del mismo:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Esta integral la abordamos en el apartado 7.3 del tema 7, de modo que usaremos ese resultado particularizándolo para el campo eléctrico. Como la única diferencia entre la fuerza gravitatoria y la eléctrica es que es proporcional a K por el producto de las cargas, en vez de a G por el producto de las masas, es fácil ver que si la energía potencial gravitatoria era:

$$E_{pg} = -G \frac{m\,M}{r}$$

La energía potencial eléctrica estará dada por:

$$E_{pe} = K \frac{q\,Q}{r}$$

Haciendo algo equivalente a lo que se efectuó con la fuerza eléctrica para definir el campo eléctrico, se define el potencial eléctrico como:

Se define el potencial eléctrico, creado por una partícula de carga Q en un punto del espacio distante de ella r, como la energía potencial en ese punto por unidad de carga eléctrica. Su expresión es:

$$V = K\,\frac{Q}{r}$$

El potencial eléctrico se mide en $N\,m/C$ en el Sistema Internacional. Esta unidad recibe el nombre de voltio y se abrevia V.

La manera de calcular campos y potenciales eléctricos es compleja en general. Solo para el caso de cargas puntuales resulta sencillo.

10.3. Campos creados por cargas puntuales

Un cuerpo cargado, de determinado tamaño, producirá un campo eléctrico en la región que lo circunda. Lo más normal es que ese campo eléctrico dependa de la forma del mismo, además de la carga que posea.

No obstante, la base del cálculo del campo eléctrico generado por objetos extensos es el cálculo de campos creados por cargas puntuales, ya que un objeto cargado puede dividirse en trozos infinitamente pequeños y calcularse el campo producido por él como la suma de los campos de cada trozo infinitesimal. Ese proceder tiene su origen en las propiedades de los campos creados por cargas puntuales que vamos a estudiar a continuación.

Un concepto fundamental acerca de la interacción eléctrica (compartido por la gravitatoria) es que los campos producidos en una región del espacio por dos o más cargas puntuales son aditivos, esto es, dado un punto del espacio P el campo eléctrico producido en él, por N cargas puntuales, será igual a la simple suma de los campos producidos por cada una de estas. Lo mismo sucederá con el potencial. Dada la importancia de este resultado, se formalizará:

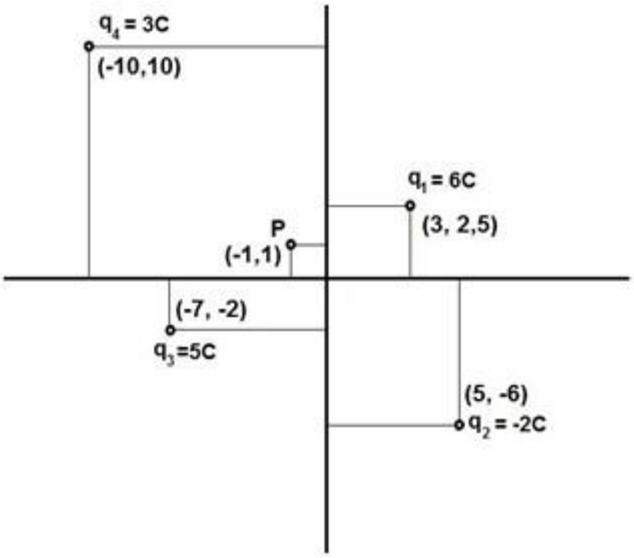
Sea P un punto del espacio cuyo vector de posición es $\overrightarrow{r_P}$ en un sistema de referencia dado. Sean q_i los valores de N cargas puntuales cuyos vectores de posición son $\vec{r_i}$, con lo cual la distancia de la carga iésima al punto P será: $d_i = |r_P - r_i|$ y sea el vector unitario uˆ_i que va en el sentido de la carga a P. En este caso, el campo eléctrico total y el potencial eléctrico total en P valdrán:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} K \frac{q_i}{d_i^2} \hat{u}_i \qquad V_T = \sum_{i=1}^{N} K \frac{q_i}{d_i}$$

Ilustraremos con un ejemplo esta cuestión.

Ejemplo 1

Sean las cuatro cargas puntuales que se muestran en la figura, donde las coordenadas están dadas en metros. Calcular, en el punto P el campo eléctrico y el potencial eléctrico creados en P por las cuatro cargas.



El primer paso es calcular las distancias que hay entre cada carga y el punto P. Para ello, dados dos puntos de coordenadas (x_1, x_2) y (y_1, y_2) la distancia entre ambos vale:

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Por lo tanto:

$$d_1 = \sqrt{(3-(-1))^2 + (2{,}5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} = 4{,}272\ m$$
$$d_2 = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-7)^2} = 9{,}22\ m$$
$$d_3 = \sqrt{(-7-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = 6{,}708\ m$$
$$d_4 = \sqrt{(-10-(-1))^2 + (10-1)^2} = \sqrt{(-9)^2 + 9^2} = 12{,}728\ m$$

A continuación, hay que calcular los vectores unitarios. Para ello, podemos usar el siguiente resultado: si un vector v ⃗ tiene como componentes (v_1, v_2), es posible construir un vector unitario en la dirección del vector original así:

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_1\,\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Gracias a esto:

$$\widehat{u_1} = \frac{-4\,\hat{\imath} - 1{,}5\hat{\jmath}}{\sqrt{-4^2 + -1{,}5^2}} = -0{,}936\,\hat{\imath} - 0{,}351\hat{\jmath}$$

$$\widehat{u_2} = \frac{-6\,\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}}{\sqrt{-6^2 + 7^2}} = -0{,}651\,\hat{\imath} + 0{,}759\hat{\jmath}$$

$$\widehat{u_3} = \frac{6\,\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = 0{,}894\,\hat{\imath} - 0{,}447\hat{\jmath}$$

$$\widehat{u_4} = \frac{9\,\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}}{\sqrt{9^2 + -9^2}} = 0{,}7071\,\hat{\imath} - 0{,}7071\hat{\jmath}$$

Donde hemos calculado las expresiones de los vectores según las coordenadas de las posiciones de las cargas y de las coordenadas de P.

Con estos datos es posible calcular los campos eléctricos y los potenciales como suma de los campos y potenciales creados por cada carga puntual. Así:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} K\,\frac{q_i}{d_i^2}\,\hat{u}_i$$

$$= \frac{8{,}9874 \cdot 10^9 \cdot 6}{18{,}25}\,(-0{,}936\,\hat{\imath} - 0{,}351\hat{\jmath})$$

$$+ \frac{8{,}9874 \cdot 10^9 \cdot (-2)}{85}\,(-0{,}651\,\hat{\imath} + 0{,}759\hat{\jmath})$$

$$+ \frac{8{,}9874 \cdot 10^9 \cdot 5}{45}\,(0{,}894\,\hat{\imath} - 0{,}447\hat{\jmath})$$

$$+ \frac{8{,}9874 \cdot 10^9 \cdot 3}{162}\,(0{,}7071\,\hat{\imath} - 0{,}7071\hat{\jmath})$$

Tras realizar las operaciones y reunir los términos proporcionales a cada uno de los dos vectores unitarios, el campo eléctrico queda:

$$\vec{E} = -1\,617\,557\,667\,\hat{\imath} - 1\,761\,684\,938\hat{\jmath}\ N/C$$

Averiguar el potencial implica los siguientes cálculos:

$$V = \sum_{i=1}^{N} K\,\frac{q_i}{d_i} = 8{,}9874 \cdot 10^9 \left\{\frac{6}{4{,}272} + \frac{-2}{9{,}22} + \frac{5}{6{,}708} + \frac{3}{12{,}728}\right\} = 19\,490\,561\,964\ V$$

Los valores indicados dan idea de la potencia de la interacción eléctrica, si bien, hay que tener en cuenta que las cargas indicadas son grandes para los valores cotidianos de esta interacción.

10.4. Características de los campos eléctricos

Dadas las magnitudes más importantes que caracterizan los campos eléctricos, el vector campo eléctrico y el potencial eléctrico, se estudian en este apartado determinadas características interesantes de los campos eléctricos. Tras una revisión de algunas propiedades generales, se establecen dos expresiones útiles que relacionan los conceptos de campo, potencial y energía potencial asociada a campos eléctricos.

Cuestiones generales sobre el campo eléctrico

Los efectos del campo eléctrico, a nivel macroscópico, son difíciles de experimentar directamente, a pesar de que, como es bien sabido en la actualidad, dos de las partículas elementales más comunes, el protón y el electrón, son partículas cargadas. Esto se debe al hecho de que los objetos materiales, normalmente, en lo que respecta a la carga eléctrica están equilibrados.

Los átomos, en su estado natural, suelen contener la misma cantidad de carga positiva como de carga negativa, lo que hace que, como sistema de partículas, no sientan globalmente la acción de un campo eléctrico. Para que un campo eléctrico sea capaz de mover un objeto, por ejemplo, este ha de presentar mayor carga de un tipo que de otro, ha de tener carga positiva o negativa netas. Se puede considerar que, en un átomo, en el que los protones y los electrones tienen cargas de igual magnitud, pero signos opuestos, las cargas positivas «anulan» a las negativas, de manera que un átomo con diez protones y diez electrones carece de carga neta y es eléctricamente neutro.

Un ion, que es un átomo al que le faltan o le sobran electrones, sí tiene carga neta y es posible movilizarlo gracias a la acción de un campo eléctrico. Un ion que posea diez electrones y nueve protones tendrá una carga eléctrica neta igual a la de un electrón, y reaccionará ante campos eléctricos como si su carga fuera esa, aunque, en realidad, posee bastante más carga positiva y negativa. Así, cuando se dice que un objeto tiene una carga de 2C, eso quiere decir que la diferencia entre sus cargas positivas y negativas es de 2C.

Esta es la diferencia fundamental con la interacción gravitatoria, que carece del concepto de masas positivas o negativas: todas las masas son positivas siempre.

Interpretación de la diferencia de potencial

Hay que considerar la cuestión de comprender el significado de la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos. Para ello, suponemos que en una región del espacio hay una carga Q positiva que crea un campo a su alrededor. Supóngase una partícula de carga q positiva también, que se halla a una distancia r de la primera carga. Se llamará a ese punto B. La energía potencial que la partícula de carga q posee en ese punto es:

$$E_{p\,B} = K\,\frac{Q\,q}{r}$$

Por convenio, la energía potencial que la carga q tendría en el infinito es nula. El incremento en energía potencial experimentado por la carga q vale:

$$\Delta E_{p\ \infty \to B} = E_{p\ B} - E_{p\ \infty} = K\ \frac{Q\ q}{r}$$

Como vimos anteriormente, el incremento de la energía potencial equivale al trabajo, cambiado de signo, necesario para mover la partícula entre ambos puntos. En este caso, es el trabajo realizado por el campo eléctrico. Su valor es:

$$W_{C\ \infty \to B} = -K\ \frac{Q\ q}{r}$$

Una fuerza externa que llevara la partícula desde el infinito a B tendría signo opuesto y llevaría a un trabajo de signo opuesto. Por ello, el trabajo necesario para llevar la carga q desde el infinito hasta B, vale:

$$W_{\infty \to B} = K\ \frac{Q\ q}{r}$$

Si la carga q se lleva al otro miembro y se recuerda la definición de potencial eléctrico, es fácil ver que:

$$\frac{W_{\infty \to B}}{q} = V$$

Si en vez de desplazar la carga desde el infinito, se desplaza desde el punto A, más alejado de la carga Q que el B, se puede escribir que:

$$\frac{W_{A \to B}}{q} = V_A - V_B$$

Esto es:

La diferencia de potencial entre dos puntos equivale al trabajo, por unidad de carga, necesario para llevar una carga de uno de los puntos al otro.

Según la ecuación que relaciona trabajo con energía potencial, y recordando que el trabajo de la expresión anterior es de signo contrario al que efectúa el campo, que es el medido por la diferencia de energía potencial, es posible escribir una última ecuación importante:

$$E_{p\,A} - E_{p\,B} = q\,(V_A - V_B)$$

Relación entre potencial y campo eléctrico

Si se conoce el valor del campo eléctrico en un punto concreto del espacio, es posible, de manera automática, conocer el valor de la fuerza eléctrica que sentirá una carga determinada en ese punto, simplemente usando:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Si conocemos el potencial eléctrico en un solo punto, no es posible tener esta información. Sin embargo, si se sabe el potencial en todos los puntos de una región, será posible, como mínimo, estimar el valor del campo en esa región. La ecuación general que relaciona la diferencia de potencial con el campo eléctrico es:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Esta expresión admite una forma simple que, sin embargo, es de utilidad para la estimación de los campos eléctricos. Para obtenerla, se supone una región del espacio donde el campo es uniforme y está orientado en la dirección de, por ejemplo, el eje x y en sentido positivo del mismo. Si se calcula la integral entre los puntos x_Ay x_B, como el campo es constante puede salir de la integral y queda:

$$V_B - V_A = -E\,(x_B - x_A)$$

Si denominamos d a la distancia entre ambos puntos, se obtiene que:

$$E = \frac{V_A - V_B}{d}$$

Esta ecuación es útil por dos motivos. En primer lugar, da una expresión que se puede emplear en situaciones de campos uniformes. Un ejemplo sería el campo eléctrico creado por dos placas cargadas paralelas, que cumple con la expresión precedente. En segundo lugar, da una unidad alternativa para el campo eléctrico: el V/m, que tiende a usarse con más frecuencia que el N/C. Podemos ver que ambas unidades son idénticas, puesto que el voltio es N m / C, de modo que V/m equivale a N/C.

10.5. Flujo de un campo eléctrico a través de una superficie

Hasta ahora, a la hora de analizar y estudiar las influencias de los campos eléctricos, hemos fijado las características básicas y las propiedades más relevantes de los mismos. Aunque se ha definido de manera precisa la forma de la interacción eléctrica, a menudo las expresiones de los campos se vuelven bastante complicadas, y no es fácil saber, en una región del espacio determinado, como es el campo eléctrico existente y, sobre todo, que intensidad tiene.

Para facilitar el análisis de los campos eléctricos, definiremos dos conceptos orientados a lograr representaciones gráficas de campos y a conocer, de manera cuantitativa, la intensidad del campo en una región determinada: el de **líneas de**

fuerza, que permiten crear una representación gráfica, y el de **flujo de un campo a través de una superficie**, que cuantifica la intensidad de un campo en una región determinada. Estos conceptos se pueden extender al campo gravitatorio, aunque todo lo que explicamos aquí se referirá, en exclusiva, al campo eléctrico.

Líneas de fuerza

Como ya estudiamos, el campo que crea, por ejemplo, una carga negativa, apunta siempre hacia la propia carga y siempre se dirige en la dirección normal a la carga. Esto se puede representar gráficamente dibujando la carga en un punto del espacio y trazando una serie de líneas que permitieran pintar, de manera sencilla, el campo en cada punto de las mismas. De esta manera, podríamos saber el sentido y la dirección del campo a lo largo de determinadas trayectorias del espacio. Esto lleva a la siguiente definición:

> Se define línea de fuerza, en una región del espacio donde actúa un campo, como una curva en el espacio cuya característica es que los vectores campo en cada uno de sus puntos son tangentes a la curva. Cada línea de fuerza tiene definido un sentido único del campo, que normalmente se representa por una flecha en la curva.

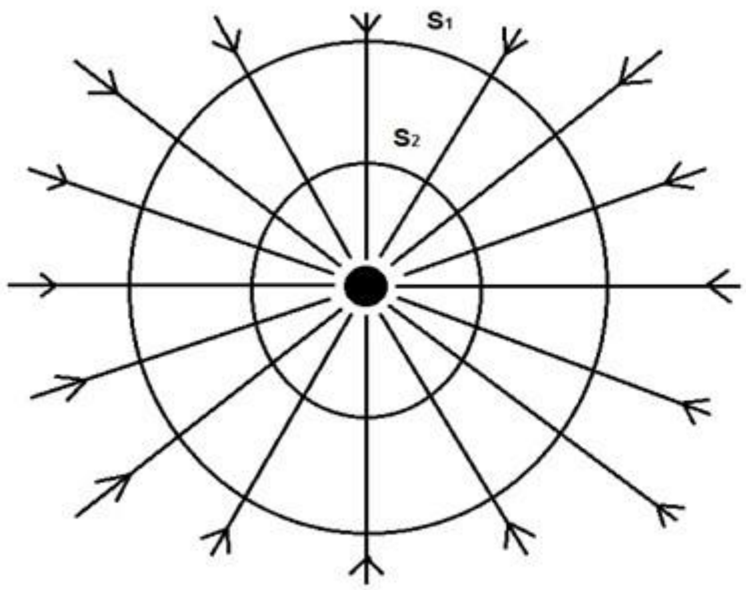
Para que este concepto sea útil, a la hora de dibujar las líneas de fuerza que representen un campo en determinada región del espacio, deben seguirse dos convenciones:

- Deben dibujarse con cierto espaciado regular. Por ejemplo, para el caso de una partícula puntual una línea cada 20º, de manera que se dibujarían 18 líneas alrededor de la fuente puntual de campo.
- Deben dibujarse de manera simétrica con respecto a las fuentes de campo consideradas. Así, si hay dos cargas puntuales no se deben dibujar más líneas alrededor de una que de la otra.

Si se siguen estas convenciones, podremos conocer, de un vistazo, información importante sobre el campo. La más útil y más fácil de interpretar es la intensidad del campo en cada región del espacio. En general:

Si en una región del espacio, las líneas de fuerza se han dibujado de manera simétrica y espaciadas regularmente, es posible conocer, de manera cualitativa, en qué regiones del espacio el campo es más intenso. El campo será más intenso en las zonas en las que la densidad de líneas de fuerza sea mayor

Esto es muy fácil de comprender con la siguiente figura, que representa el campo eléctrico creado por una carga puntual negativa y dos superficies aproximadamente esféricas que la rodean:

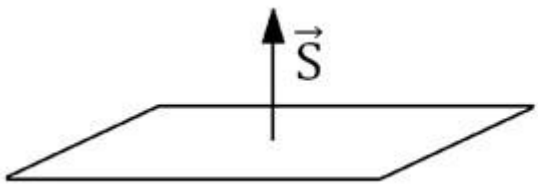


Es sabido que el campo eléctrico es inversamente proporcional a la distancia de la carga puntual. Por ello, en la figura, el campo será más intenso en la superficie S_2 que en la S_1, ya que la primera está más cerca de la partícula. Si observamos la figura, podemos ver que en la superficie S_2 las líneas de fuerza están más «apretadas», más cerca las unas de las otras. Esta es una característica general de utilidad, ya que permite, de un simple vistazo, saber cualitativamente la intensidad de un campo en una región del espacio. Sin embargo, sería muy útil tener una forma de medir, cuantitativamente, esta «densidad de líneas de fuerza». Ese es el propósito del concepto de flujo que se presenta a continuación.

Flujo de un campo eléctrico a través de una superficie

La definición de flujo de un campo, en general, a través de una superficie no es complicado, pero requiere asimilar un concepto previo: la manera de representar en física una superficie.

Sea una superficie como la de la figura. Se define el **vector de superficie** de la misma como un vector perpendicular a la superficie cuyo módulo es el valor del área de la superficie.

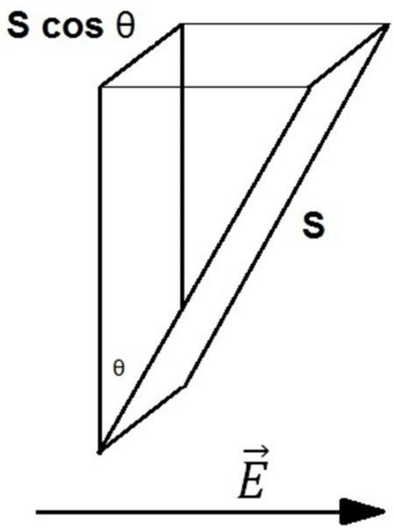


Aunque hemos dibujado una superficie plana, porque el vector de superficie se define para superficies planas, si la superficie tiene una forma general, es posible usar el concepto, si bien, necesitamos dividir la superficie en infinitos trozos muy pequeños, cada uno de los cuales puede considerarse como plano, y tener, en cada punto de la superficie un vector $d\vec{S}$.

El concepto de flujo está orientado a dar una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesa una superficie concreta. Se cumplen los siguientes hechos:

- El número de líneas que atraviesan una superficie será proporcional al módulo del campo (mientras más intenso, más líneas de campo habrá).

- También es proporcional a la superficie (mientras más extensa la superficie, más líneas de campo cabrán).
- Si la superficie no es perpendicular al campo, el número de líneas de fuerza que la cruzan será el mismo que atraviesan la proyección de la superficie original en una que sí es perpendicular al campo, como vemos en la figura:



Esto permite hacer la siguiente definición de flujo de un campo a través de una superficie:

Sea $\vec{S}$ el vector que representa una superficie plana, y $\vec{E}$ un campo eléctrico que atraviesa la superficie. Se define el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de la superficie $\vec{S}$ como el producto escalar del vector de la superficie por el vector del campo:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Si la superficie no es plana, sino general, la definición de flujo es la siguiente:

Para superficies generales el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través una superficie S está dada por:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Donde la integral se extiende a toda la superficie considerada.

La importancia del concepto de flujo reposa en que es la base del teorema de Gauss, del que tratará la última sección de este tema y que es una herramienta muy poderosa para calcular campos eléctricos creados por diferentes objetos materiales.

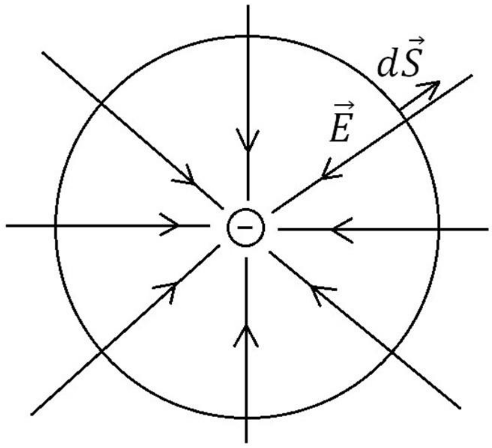
10.6. Teorema de Gauss

El teorema de Gauss es un resultado muy importante a la hora de tratar con campos eléctricos, ya que permite calcular los campos de manera muy sencilla en bastantes ocasiones. Además, en su forma generalizada, es una de las ecuaciones de Maxwell, que son un conjunto ecuaciones de gran importancia en la comprensión de la interacción electromagnética.

El teorema de Gauss está muy relacionado con el concepto de flujo, y este es el motivo por el que lo hemos introducido en el apartado precedente.

Como paso previo, analizaremos el flujo creado por una carga puntual, negativa primero y positiva después, a lo largo de una superficie esférica de radio R.

Una esfera, al no ser una superficie plana, hay que modelarla suponiendo la existencia de vectores de superficie infinitesimales en cada punto de la misma. Lo más común y, en cierto modo, lo más lógico es que esos vectores de superficie se consideren dirigidos siempre hacia el exterior de la superficie, nunca hacia el interior. Dado que el campo eléctrico creado por una carga negativa está dirigido hacia la propia carga y solo depende de la distancia a la propia carga, se puede esquematizar la situación en la siguiente figura:



El producto escalar entre el campo y los vectores diferenciales de superficie a lo largo de toda la esfera, debido a que, por la simetría del problema, van siempre en sentidos opuestos, vale:

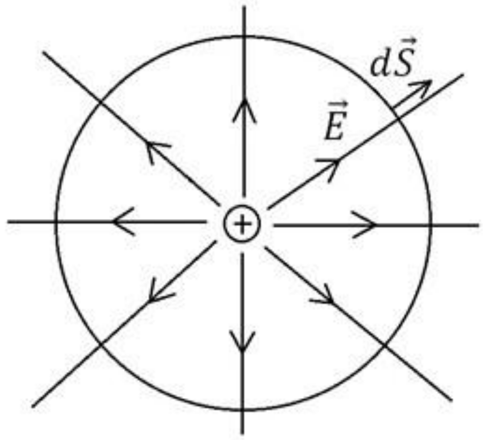
$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\ dS \cos 180° = -\ E\ dS$$

Sabiendo que la superficie de una esfera vale $4\pi r^2$ y que el campo eléctrico, al ser constante a lo largo de la superficie puede salir de la integral, se obtiene:

$$\Phi = \int -E\ dS = -E \int dS = -E\ 4\pi R^2$$

Puesto que la integral de superficie de un diferencial de superficie a lo largo de la esfera sería la superficie de la esfera.

Si el campo lo crea una carga positiva, el diagrama cambia de la siguiente manera:



Ahora, como ambos vectores van siempre en el mismo sentido, el producto escalar entre el campo y los vectores diferenciales de superficie a lo largo de toda la esfera, es:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS \cos 0° = E\, dS$$

Y el flujo vale ahora:

$$\Phi = \int E\, dS = E \int dS = E\, 4\pi R^2$$

Generalizando estos cálculos, cosa que es posible aunque complicada, llegamos a una conclusión interesante:

El flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada, debido a las cargas que contiene, tiene el mismo signo que esas cargas.

Usando la expresión del campo creado por una carga puntual, si suponemos el caso de cargas positivas y considerando que la carga rodeada por la esfera vale Q, llegamos a:

$$\Phi = K\frac{Q}{R^2}\,4\pi R^2 = \,4\pi K Q$$

La demostración rigurosa del teorema de Gauss excede los objetivos de esta asignatura. No obstante, hablaremos brevemente de los hechos que llevan a la misma. En primer lugar, se puede demostrar que el número de líneas de fuerza que atraviesan una superficie cerrada de cualquier forma es el mismo que atravesaría una superficie esférica que contuviera las mismas cargas. Esto es, el flujo debido a cargas internas a través de una superficie no depende de su forma, solo de las cargas que contiene.

Otro hecho fundamental es que dada una superficie cerrada, se puede demostrar que el número de líneas de fuerza que entran, debidas a cargas externas, es el mismo número de líneas de fuerzas que salen de ella debidos a campos externos. Esto es, el flujo de un campo eléctrico externo a través de una superficie cerrada es nulo.

Por ello, se puede enunciar una primera versión del Teorema de Gauss así:

El teorema de Gauss afirma que el flujo que atraviesa una superficie cerrada vale:

$$\Phi = 4\pi K\, Q_{int}$$

Donde Q_{int} es la suma de las cargas que hay en el interior.

O bien, utilizando la expresión que relaciona la constante de Coulomb con la permitividad del medio:

$$K = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon}$$

Enunciamos el teorema de Gauss de una manera equivalente más útil:

El teorema de Gauss afirma que el flujo que atraviesa una superficie cerrada vale:

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Donde Q_{int} es la suma de las cargas que hay en el interior y ϵ la permitividad del medio.

Aunque ello implique tener que tocar de refilón cuestiones de electromagnetismo avanzado, al igual que hicimos en la ley de Coulomb, es preciso hacer algunos comentarios a la permitividad.

Normalmente, el teorema de Gauss se utiliza en el vacío, pero se puede generalizar en medios isótropos a la expresión indicada en el recuadro. Ello se debe a que, en estos medios, la permitividad sigue siendo un escalar y, por tanto, lo único que sucede es que la permitividad usada tiene un valor distinto.

En muchos textos, se usa directamente el valor de la permitividad del vacío porque, habitualmente, los cálculos se hacen considerando que se está en el aire. Recuerda que se podía escribir:

$$\epsilon = \epsilon_r \, \epsilon_0$$

La permitividad relativa ϵ_r vale un poco más de 1 para el aire y es 1 para conductores como el cobre, el oro, el hierro o la plata. De manera que, a menudo, es buena aproximación usar el valor de esa constante en el vacío.

Si el medio es **anísotropo**, esto es, no es isótropo, el teorema de Gauss debe modificarse debido al hecho de que la permitividad ya no es un número. Hay que definir un nuevo vector proporcional al campo, denominado **vector desplazamiento**, que se denota por $\vec{D}$, y cambiar la expresión del teorema.

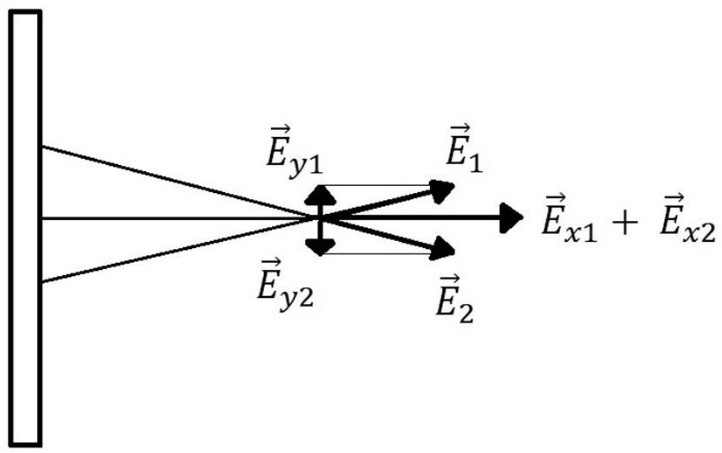
Aunque no se exigirá el dominio de la física de dieléctricos, se incluye en el apartado «A fondo» dos documentos, de dificultad creciente, que abordan este tema de una forma sencilla.

Este teorema es bastante útil a la hora de calcular campos eléctricos producidos por objetos materiales de una forma bastante más simple que con otros métodos. Para ilustrarlo, terminaremos este tema con un ejemplo de cálculo.

> **Ejemplo 2**
>
> Sea una placa recta muy delgada y de gran tamaño que tiene una densidad de carga superficial positiva dada por σ. Calcular el campo eléctrico en puntos próximos al plano.

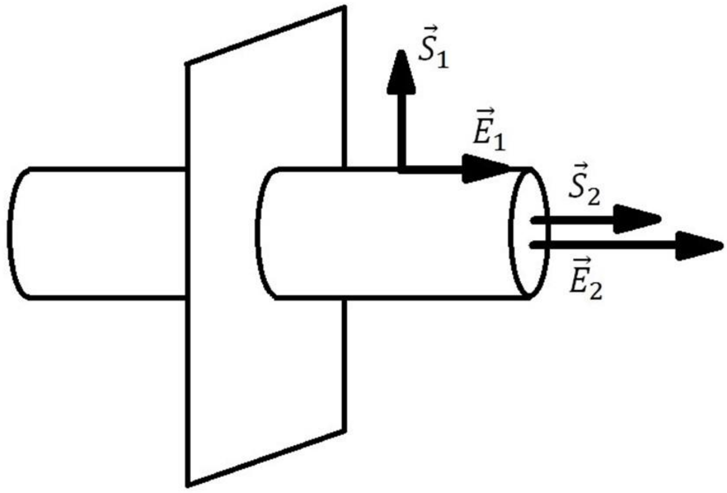
Como siempre que se aplica el teorema de Gauss, **el secreto para facilitar los cálculos es una elección adecuada de la superficie considerada para aplicarlo**.

En primer lugar, hay que tener en cuenta cómo es el campo eléctrico producido por una placa. Si la placa es lo bastante grande y se consideran puntos próximos a la superficie, el campo eléctrico producido es perpendicular a la misma. En la figura siguiente:



Puede verse que las componentes y de los dos campos dibujados se cancelan, y solo queda la suma de las componentes en el eje x, que son perpendiculares a la superficie. Esto solo es válido si se está cerca de la placa y lejos de los bordes.

Para aplicar el teorema de Gauss, elegiremos una superficie cilíndrica que atraviesa la placa. La longitud será *l*, pequeña en comparación al plano, y el área de los dos círculos o bases será *A*. La ventaja de elegir esta superficie la esquematizamos en la siguiente figura:



Para el caso de la superficie $\vec{S}_1$, que sería toda la superficie lateral del cilindro, vemos que el producto escalar entre el campo y la superficie es nulo, ya que ambos vectores son perpendiculares. En las dos superficies circulares, el producto escalar entre superficie y campo es igual al producto de sus módulos, ya que son paralelos. Como el flujo es, básicamente, el producto escalar entre el vector campo y el vector superficie, es posible escribir:

$$\Phi = \int_{Sup\ Lateral} \vec{E} \cdot d\vec{S} + 2\int_{Base} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Donde la integral a lo largo de la base del cilindro va multiplicada por dos porque el cilindro tiene dos bases. El flujo a lo largo de la superficie lateral es nulo, y como el flujo en la superficie lateral es nulo, como hemos demostrado antes, llegamos a:

$$\Phi = 2\int_{Base} E\, dS = 2E \int_{Base} dS = 2EA$$

Ya que la integral de un diferencial de superficie a lo largo de toda la base es igual al área considerada.

El área de la base del cilindro no se ha especificado, pero no es necesario hacerlo. La densidad de carga superficial σ, se define:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Esto es, se trata de la carga por unidad de área presente en la placa. Aplicar el teorema de Gauss para el cilindro considerado implica entender que la carga presente dentro del cilindro vale:

$$Q = A\sigma$$

Por ello, se ha de cumplir que:

$$\Phi = \frac{A\sigma}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad 2EA = \frac{A\sigma}{\epsilon} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

El módulo del campo, por tanto, ya está calculado y su dirección es perpendicular al plano y dirigida hacia fuera.