Cálculo

Derivadas, diferencial y localidad las funciones

Índice

Esquema 2

Ideas clave 3

8.1 Introducción y objetivos 3

8.2 Derivadas de funciones 3

8.3 Derivadas sucesivas 14

8.4 Derivadas de las funciones circulares 15

8.5 Diferencial de una función 21

8.6 Interpretación geométrica de la diferencial 22

8.7 Crecimiento y decrecimiento de una función 23

8.8 Máximos y mínimos 25

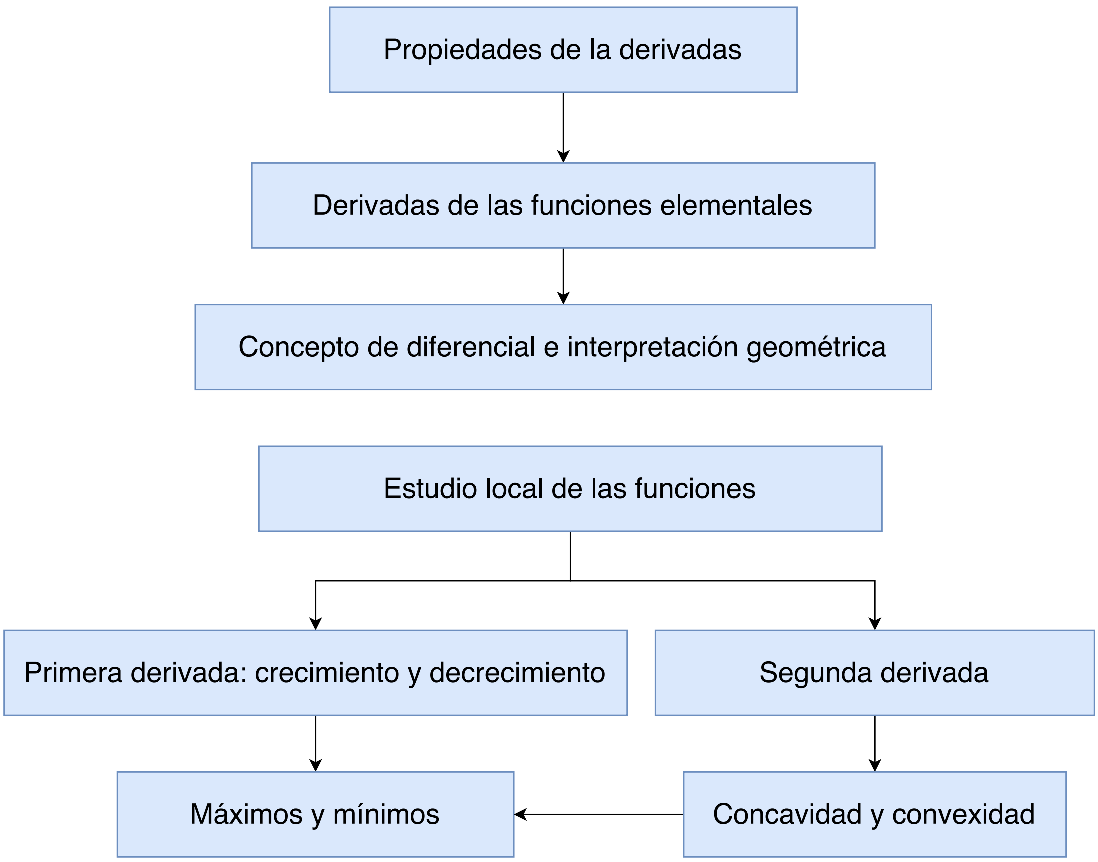
8.9 Criterio de la segunda derivada 27

8.10 Concavidad y convexidad 28

8.11 Referencias bibliográficas 32

8.12 Cuaderno de ejercicios 32

Esquema


Propiedades de la derivadas
Derivadas de las funciones elementales
Concepto de diferencial e interpretación geométrica
Estudio local de las funciones
Primera derivada: crecimiento y decrecimiento
Segunda derivada
Máximos y mínimos
Concavidad y convexidad

Ideas clave

8.1 Introducción y objetivos

En este tema presentamos las propiedades de las derivadas y las reglas de derivación de las funciones elementales, incluidas las funciones circulares. Incluimos las demostraciones de estas propiedades y reglas por su carácter instructivo. Explicamos el concepto de diferencial y su interpretación geométrica. Y finalmente, aplicamos el cálculo de derivadas a la determinación de los máximos, mínimos y curvatura de funciones.

Los objetivos son:

- Conocer las propiedades de la **derivación** y entender sus deducciones.
- Aprender las **derivadas de las funciones elementales** y conocer su deducción.
- Entender el concepto de **diferencial** y su interpretación geométrica.
- Estudiar del **crecimiento y decrecimiento** de las funciones.
- Calcular **máximos y mínimos** y curvatura de funciones.

8.2 Derivadas de funciones

Veamos algunas derivadas elementales y sus propiedades.

Teorema 1: Derivada de una constante

La derivada de una constante es igual a cero. Sea $f(x) = c$ entonces:

$$f'(x) = 0\,. \tag{1}$$

En efecto, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0\,. \tag{2}$$

Teorema 2: Derivada del producto de una constante por una función

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función. Sea $y = c\,f(x)$, entonces:

$$y' = c\,f'(x)\,. \tag{3}$$

Para demostrarlo, acudimos a la definición de derivada:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{c\,f(x+h) - c\,f(x)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c\,f'(x)\,. \tag{4}$$

Teorema 3: Derivada de la suma

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas. Sea $y = f(x) + g(x)$, entonces:

$$y' = f'(x) + g'(x)\,. \tag{5}$$

Para demostrarlo, acudimos de nuevo a la definición de derivada:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}\,, \tag{6}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\,, \tag{7}$$

$$y' = f'(x) + g'(x)\,. \tag{8}$$

Teorema 4: Derivada del producto de funciones

La derivada del producto de dos funciones es igual a la suma del producto de la derivada de la primera por la segunda sin derivar más el producto de la primera sin derivar por la segunda derivada. Sea $y = f(x)g(x)$ entonces:

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,. \tag{9}$$

Para demostrarlo, recurrimos a la definición:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\,. \tag{10}$$

Ahora en el numerador restamos y sumamos la cantidad $f(x+h)g(x)$:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\,. \tag{11}$$

Sacando factor común cuando se pueda y teniendo en cuenta que h tiende a cero:

$$y' = f(x)\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\,. \tag{12}$$

Como queríamos demostrar.

Teorema 5: Derivada de la función potencial

La derivada de x elevado a n es igual a n por x elevado a $n-1$. Sea $y = x^n$, entonces:

$$y' = nx^{n-1} \tag{13}$$

Para demostrarlo recurrimos a la definición y al binomio de Newton:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^{n-2}h^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} h^n - x^n}{h}\,. \tag{14}$$

Los términos que van con h^2 y potencias superiores de h, al dividirlos por h, y tomar el límite cuando h tiende a cero, se anulan. Por lo que queda:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h - x^n}{h} = nx^{n-1}. \tag{15}$$

Donde hemos usado:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1\,, \tag{16}$$

y que:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n\,. \tag{17}$$

Ejemplo 1. Derivada de la raíz cuadrada

Sea la función:

$$y = \sqrt{x}\,. \tag{18}$$

La derivada será, teniendo en cuenta que se puede poner la raíz como la potencia $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{19}$$

Ejemplo 2. Derivada de una función potencial

Sea la función:

$$y = \sqrt[5]{x^2}\,. \tag{20}$$

Se pide hallar la derivada. Primero notamos que la función es equivalente a $y = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$, por lo que la derivada es:

$$y' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\,. \tag{21}$$

Teorema 6: Derivada de la función compuesta

La derivada de la función compuesta $y = (f \circ g)$ es igual a la derivada de la primera función respecto de la segunda, como argumento, multiplicado por la derivada de la segunda función respecto de x. Es lo que se conoce como *regla de la cadena*. En efecto:

$$y' = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{22}$$

Para demostrarlo recurrimos a la definición:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\,. \tag{23}$$

Ahora llamamos $k = g(x+h) - g(x)$ que tenderá a cero al tender h a cero y dividimos la Ecuación (23) por k y multiplicamos por k, quedando todo igual:

$$y' = \lim_{k \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{k} \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{24}$$

Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre la derivada de la función compuesta.

Accede al vídeo: Derivada de la función compuesta

Ejemplo 3. Derivada de la potencia de una función

Supongamos que tenemos una función $y = f(x)^n$. Por aplicación de la regla de la cadena, derivamos primero como si $f(x)$ fuera la variable, aplicando la Ecuación (13), y a continuación derivamos respecto de x la función $f(x)$:

$$y' = nf(x)^{n-1}f'(x)\,. \tag{25}$$

Teorema 7: Derivada de la función recíproca

La función f^{-1} es la función recíproca de f y es la simétrica respecto de la composición de funciones, es decir:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i\,, \tag{26}$$

donde i es la función identidad, definida por $i(x) = x$. La derivada de la función recíproca es la inversa de la derivada de la función de la que es recíproca, esto es:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{27}$$

Para demostrarlo consideremos que, de acuerdo con la Ecuación (26) se cumple:

$$f^{-1}(f(x)) = x\,. \tag{28}$$

Derivando ahora ambos miembros mediante la regla de la cadena:

$$(f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = 1\,, \tag{29}$$

donde hemos llamado $y = f(x)$. Despejamos ahora la derivada de la función recíproca:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{30}$$

Como queríamos demostrar. Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre la derivada de la función recíproca.

Accede al vídeo: Derivada de la función recíproca

Ejemplo 4. Derivada de la raíz cuadrada

La derivada de la raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$ podemos obtenerla considerando que es la función recíproca de la función $y = f(x) = x^2$. Despejamos la x de esta última ecuación $x = \sqrt{y}$, por tanto, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. La derivada de la función recíproca es, de acuerdo con la Ecuación (27):

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,. \tag{31}$$

Cambiando ahora de nombre la variable resulta:

$$(f^{-1})'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \tag{32}$$

Otra derivada importante es la de la función inversa:

Teorema 8: Derivada de la inversa

La derivada de la función inversa es igual a la inversa del cuadrado cambiada de signo. Sea $y = 1/x$, entonces:

$$y' = -\frac{1}{x^2}\,. \tag{33}$$

Para demostrarlo acudimos a la definición y realizamos las operaciones:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}\,. \tag{34}$$

Veamos un ejemplo de función inversa en el que se aplique la regla de la cadena:

Ejemplo 5. Derivada de una función inversa

La derivada de la función inversa, por aplicación de la regla de la cadena, la Ecuación (22), es menos la derivada de la función dividido por el cuadrado de la función. Sea $y = 1/f(x)$, entonces:

$$y' = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x)\,. \tag{35}$$

Con lo que ya sabemos podemos calcular ya la derivada del cociente de funciones:

Teorema 9: Derivada del cociente de funciones

La derivada del cociente de funciones es igual a la derivada del numerador, por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por el denominador derivado, dividido todo por el cuadrado del denominador. En efecto, sea $y = f(x)/g(x)$, entonces:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,. \tag{36}$$

Para demostrarlo aplicamos la regla de la derivada del producto, la Ecuación (9), a $f(x)$ y a la inversa de $g(x)$, y realizamos las operaciones de suma de fracciones:

$$y' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,. \tag{37}$$

Como queríamos demostrar. Presentamos ahora la derivada del logaritmo neperiano:

Teorema 10: Derivada del logaritmo neperiano

La derivada del logaritmo neperiano es igual a la función inversa. Sea $y = \ln x$ entonces:

$$y' = \frac{1}{x}\,. \tag{38}$$

Para demostrarlo recurrimos a la definición de derivada y aplicamos las propiedades de los logaritmos, en particular que la diferencia de logaritmos es igual a la derivada del cociente, y que el producto de un número por un logaritmo es igual al logaritmo del argumento elevado a ese número:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}\,. \tag{39}$$

Ahora tratamos de reproducir en el argumento el número e, para ellos multiplicamos el exponente por x y dividimos por x para mantener la igualdad. Empleamos también la propiedad de que el límite del logaritmo es igual al logaritmo del límite:

$$y' = \ln \lim \left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}} = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}. \tag{40}$$

Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre la derivada de la función logarítmica.

Accede al vídeo: Derivada de la función logarítmica

Ejemplo 6. Derivada del logaritmo neperiano de una función

Sea $y = \ln f(x)$ la derivada, entonces, por aplicación de la Ecuación (38) y la regla de la cadena:

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{41}$$

Teorema 11: Derivada del logaritmo respecto de cualquier base

Sea la función logaritmo respecto a una base $a > 0$ y $a \neq 1$ $y = \log_a x$, la derivada será entonces:

$$y' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{42}$$

Para demostrarlo, basta aplicar la fórmula de cambio de base del logaritmo:

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \tag{43}$$

y la derivada del logaritmo neperiano, la Ecuación (38), y la Ecuación (3):

$$y' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{44}$$

Ejemplo 7. Derivada de una función logarítmica

Sea la función:

$$y = \ln(3x^3 + x^2)\,. \tag{45}$$

Se pide hallar la derivada. Se trata de la función compuesta de $f(x) = 3x^3 + x^2$ y $g(x) = \ln x$. Para calcular su derivada, derivamos el logaritmo neperiano respecto del argumento, como si fuera una variable, y multiplicamos por la derivada del argumento respecto de x:

$$y' = \frac{1}{3x^3 + x^2}(9x^2 + 2x) = \frac{9x + 2}{3x^2 + x}\,, \tag{46}$$

donde, en el último paso, hemos simplificado x del numerador y del denominador.

Teorema 12: Derivada de la función exponencial

La derivada de la función exponencial es igual a sí misma, esto es, es igual a la misma función exponencial. Sea $y = e^x$, entonces:

$$y' = e^x\,. \tag{47}$$

Para demostrarlo, tenemos en cuenta el hecho de que la función logaritmo neperiano y la exponencial son funciones recíprocas, es decir: $\ln e^x = x$. Derivamos ahora ambos miembros de esta ecuación:

$$\frac{(e^x)'}{e^x} = 1\,, \tag{48}$$

donde hemos hecho uso de la regla de la cadena, de la derivada de la función logaritmo neperiano y de la Ecuación (13) para $n = 1$. Finalmente obtenemos:

$$(e^x)' = e^x\,. \tag{49}$$

Si el exponente es diferente del número e entonces, sea $y = a^x$. Tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\ln y = x \ln a\,, \tag{50}$$

y derivamos:

$$\frac{y'}{y} = \ln a\,. \tag{51}$$

Despejando y':

$$y' = a^x \ln a\,. \tag{52}$$

Veamos ahora la derivada de la función potencial-exponencial, que es aquella en la que tanto la base como el exponente son funciones:

Teorema 13: Derivada de la función potencial-exponencial

Sea la función $y = [f(x)]^{g(x)}$, la derivada es:

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]\,. \tag{53}$$

Para demostrarlo se toman logaritmos neperianos en ambos miembros de $y = [f(x)]^{g(x)}$:

$$\ln y = g(x) \ln f(x)\,. \tag{54}$$

Ahora derivamos ambos miembros respecto de x:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\,, \tag{55}$$

donde hemos aplicado la regla de la derivada del producto, la Ecuación (9), la derivada del logaritmo neperiano, la Ecuación (38) y la regla de la cadena. Despejamos ahora y' y sustituimos y por su valor:

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]\,.$$

8.3 Derivadas sucesivas

Si una función $y = f(x)$ admite una derivada $y' = f'(x)$, es posible que esta función sea también derivable. Su derivada se llama *derivada segunda* y se expresa mediante la notación:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} . \tag{56}$$

A su vez la segunda derivada puede ser también derivable y así sucesivamente, de manera que tendríamos la derivada tercera:

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} , \tag{57}$$

y la cuarta:

$$y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} , \tag{58}$$

y así sucesivamente hasta la derivada n-ésima:

$$y^{(n} = f^{(n}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} . \tag{59}$$

Ejemplo 8. Derivadas sucesivas

Hallar las derivadas sucesivas de:

$$y = \frac{1}{x} . \tag{60}$$

- La derivada primera es:

$$y' = -\frac{1}{x^2} . \tag{61}$$

- La derivada segunda:

$$y'' = \frac{2}{x^3} . \tag{62}$$

- La derivada tercera:

$$y''' = -\frac{6}{x^4} . \tag{63}$$

- La derivada cuarta:

$$y^{IV} = \frac{24}{x^5}\,. \tag{64}$$

- La derivada n-ésima:

$$y^{(n} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\,.$$

8.4 Derivadas de las funciones circulares

Teorema 14: Límite de la razón del seno al arco

La razón del seno al arco no está definida en $x = 0$, pero su límite cuando x tiende a 0 existe y vale 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,. \tag{65}$$

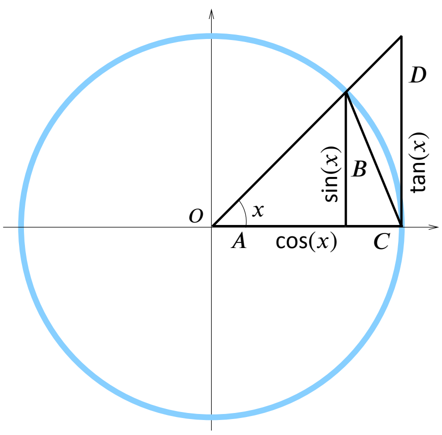


Figura 1: Círculo unitario.

Para demostrarlo, basta considerar el límite por la derecha, esto es, ángulos positivos, puesto que:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}\,, \tag{66}$$

ya que sabemos que el seno del ángulo opuesto es igual a menos el seno del ángulo original $\sin(-x) = -\sin(x)$. Se considera el ángulo AOB de x radiantes de una circunferencia goniométrica (de radio unidad). Se observa en la Figura 1 que el área del sector OCB está comprendida entre el área de los triángulos OCB y OCD. El área de un sector es igual a 1/2 · radio · arco, por tanto, tenemos la desigualdad:

$$\frac{1}{2}OC \cdot AB < \frac{1}{2}\widehat{BC} \cdot OC < \frac{1}{2}OC \cdot CD\,. \tag{67}$$

Ahora simplificamos $1/2OC$ de los tres miembros de la desigualdad y teniendo en cuenta que $AB = \sin(x)$ y que $CD = \tan(x)$ y que $\widehat{BC} = x$, resulta:

$$\sin x < x < \tan x \,. \tag{68}$$

Ahora dividimos los tres miembros por $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \,. \tag{69}$$

Invertimos ahora los tres miembros de la desigualdad (con lo que las desigualdades cambian de sentido):

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \,. \tag{70}$$

Aplicamos ahora que:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \,, \tag{71}$$

con lo que resulta:

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1 \,, \tag{72}$$

de donde se deriva evidentemente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \,. \tag{73}$$

Como queríamos demostrar.

Teorema 15: Derivada del seno

La derivada del seno es el coseno. Si $f(x) = \sin(x)$:

$$f'(x) = \cos(x) \,.$$

Para probarlo, recurrimos a la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \,. \tag{74}$$

Ahora desarrollamos el seno de la suma: $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}\,. \tag{75}$$

Teniendo en cuenta:

$$\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1\,. \tag{76}$$

El primer término del numerador y el tercero se cancelan, por lo que resulta:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\,. \tag{77}$$

Ahora, sabemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1\,. \tag{78}$$

Así que la Ecuación (77), queda como:

$$f'(x) = \cos(x)\,. \tag{79}$$

Como queríamos demostrar.

Teorema 16: Derivada del coseno

La derivada del coseno es igual a menos el seno. Si $f(x) = \cos(x)$ entonces:

$$f'(x) = -\sin(x)\,. \tag{80}$$

Para demostrarlo, recurrimos a la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}\,. \tag{81}$$

Ahora desarrollamos el coseno de la suma: $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$ y sustituimos en la Ecuación (81):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}\,. \tag{82}$$

Otra vez recurrimos a los límites anteriores, la Ecuación (76) y la Ecuación (78), con lo que el primer término del numerador y el tercero se cancelan y resulta:

$$f'(x) = -\sin(x) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x)\,. \tag{83}$$

Como queríamos demostrar.

Teorema 17: Derivada de la tangente

La derivada de la tangente es igual a la inversa del coseno al cuadrado, o equivalentemente, igual a uno más el cuadrado de la tangente. Si $f(x) = \tan(x)$, entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,. \tag{84}$$

Para demostrarlo, contemplamos el hecho de que la tangente es el cociente entre el seno y el coseno y a la derivada del cociente:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,, \tag{85}$$

donde en hemos utilizado las fórmulas trigonométricas: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ y $1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$. Obsérvese que la segunda derivada tanto del seno como del coseno vuelve a ser la función original cambiada de signo. En efecto:

$$(\sin(x))'' = (\cos(x))' = -\sin(x)\,, \tag{86}$$

y

$$(\cos(x))'' = (-\sin(x))' = -\cos(x)\,, \tag{87}$$

por lo que para ambas funciones se cumple la ecuación diferencial: $f'' + f = 0$. Las derivadas de las funciones inversas de las trigonométricas: la secante, la cosecante y la cotangente, se hallan aplicando la derivada de la función inversa y la regla de la cadena.

Ejemplo 9. Derivada de la secante

La derivada de la secante, $f(x) = \sec(x)$ es:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,. \tag{88}$$

Dejamos el cálculo de las otras funciones trigonométricas inversas como ejercicio.

Teorema 18: Derivada del arco seno

La derivada de la función arco seno, $f(x) = \arcsin(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{89}$$

Para demostrarlo, consideremos que:

$$y = \arcsin(x) \Rightarrow \sin(y) = x\,.$$

Ahora derivamos ambos miembros de la última ecuación:

$$\cos(y)y' = 1\,. \tag{90}$$

Despejamos ahora y' y utilizamos que $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \tag{91}$$

tal y como queríamos demostrar.

Teorema 19: Derivada del arco coseno

La derivada del arco coseno $f(x) = \arccos(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{92}$$

Para demostrarlo procedemos como en el teorema anterior:

$$y = \operatorname{arc}\cos(x) \Rightarrow \cos(y) = x\,. \tag{93}$$

Ahora derivamos ambos miembros de la última ecuación:

$$-\sin(y)y' = 1 \tag{94}$$

Despejamos y' y utilizamos que $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{95}$$

Como queríamos demostrar.

Teorema 20: Derivada del arco tangente

La derivada del arco tangente $f(x) = \arctan(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{96}$$

Para demostrarlo recurrimos a que:

$$y = \arctan(x) \Rightarrow \tan(y) = x\,. \tag{97}$$

Derivamos ahora ambos miembros:

$$(1+\tan^2(y))y' = 1\,. \tag{98}$$

Despejamos y':

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{99}$$

Como queríamos demostrar.

8.5 Diferencial de una función

Si una función es derivable en un punto, es decir si existe su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{100}$$

se puede escribir:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \epsilon\,. \tag{101}$$

donde ϵ es una función de h que tiende a cero cuando h tiende a cero, esto es:

$$\lim_{h \to 0} \epsilon = 0\,. \tag{102}$$

De la Ecuación (101), podemos obtener:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \epsilon h\,. \tag{103}$$

En esta ecuación el segundo sumando del segundo miembro es menor que el primero y se puede despreciar, de manera que se define la diferencial de la función y se representa por $df(x)$ ó dy como:

$$dy = f'(x)h\,. \tag{104}$$

Ahora bien, para la función $f(x) = x$, cuya derivada es 1, se cumple:

$$dx = 1 \cdot h\,. \tag{105}$$

Por lo que se emplea la notación para la diferencial de la Ecuación (104):

$$dy = f'(x)dx\,. \tag{106}$$

Si despejamos la derivada del segundo miembro se obtiene:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\,.$$

Esta es la razón de que se emplee, para la notación de la derivada, el cociente entre las diferenciales, que se conoce como *notación de Leibniz*. Aunque matemáticamente no es riguroso, se puede operar en la práctica, teniendo cuidado de que los cálculos sean correctos, como si la derivada de una función respecto de x fuera el cociente entre la diferencial de y (dy) y la diferencial de x (dx).

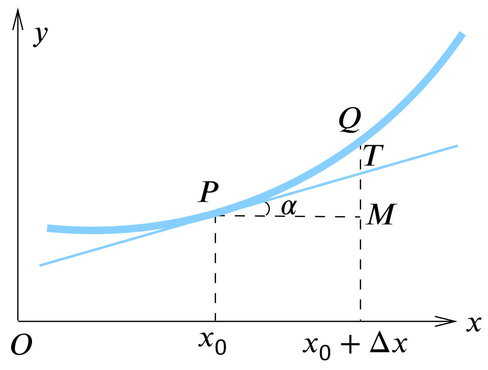


Figura 2: Interpretación geométrica de la diferencial.

8.6 Interpretación geométrica de la diferencial

Si observamos la Figura 2, podemos ver que la paralela al eje OX por el punto P, la tangente a la curva en el punto P y la paralela al eje OY en el punto de abscisa $x_0+\Delta x$ forman el triángulo PMT. En este triángulo se cumple:

$$\tan \alpha = \frac{MT}{PM}, \qquad (107)$$

entonces $MT = \tan \alpha \cdot PM = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$. Puesto que la derivada de la función en un punto es igual a la tangente de la recta tangente a la función en dicho punto. Entonces la distancia MT es la diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 para el incremento Δx.

La diferencial entonces es una buena aproximación a la variación de la función $\Delta y = MQ$ cuando el incremento Δx tiende a cero. La diferencial es entonces el incremento de la función medido sobre la recta tangente a la función en el punto considerado.

8.7 Crecimiento y decrecimiento de una función

Si una función es creciente en un punto x_0 se verificará que su tasa de variación es positiva, por lo que el cociente entre la tasa de variación Δf y el incremento de la variable (que suponemos positivo) Δx será una cantidad positiva:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0\,. \tag{108}$$

Tomando el límite cuando Δx tienda a cero tendremos que una función será estrictamente creciente en un punto x_0, en el que suponemos que es derivable, cuando su derivada en ese punto sea positiva:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ estrictamente creciente en } x_0. \tag{109}$$

Del mismo modo, por análogo razonamiento, si la función es estrictamente decreciente en un punto, su derivada en ese punto será negativa:

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ estrictamente decreciente en } x_0. \tag{110}$$

Ejemplo 10. Crecimiento o decrecimiento de una función

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3}\,. \tag{111}$$

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función en los puntos $x = 1$, $x = -1$ y $x = 0$. Primero hallamos la derivada, que es la derivada de un cociente:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x}{(x+3)^2}\,. \tag{112}$$

Estudiamos el signo de la derivada en los puntos citados:

$$f'(1) = \frac{7}{16} > 0\,. \tag{113}$$

Luego la función es estrictamente creciente en $x = 1$.

$$f'(-1) = -\frac{5}{4} < 0\,. \tag{114}$$

Luego la función es estrictamente decreciente en $x = -1$.

$$f'(0) = 0\,. \tag{115}$$

Como la derivada en $x = 0$ no es ni positiva ni negativa no nos informa sobre el crecimiento o decrecimiento de la función. Estudiamos entonces el cociente entre la tasa de variación de la función y el incremento Δx, llamado cociente incremental:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{(0+\Delta x)^2}{(0+\Delta x)+3} - 0}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x(\Delta x + 3)} = \frac{\Delta x}{\Delta x + 3}\,.$$

Veamos el signo del cociente incremental en función del incremento Δx:

$$\Delta x > 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \tag{116}$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0 \tag{117}$$

Es decir, que en $x = 0$ la función no es ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente. Por otro lado es fácil observar que es decreciente a la izquierda de 0 y creciente a su derecha.

Ejemplo 11. Condición de crecimiento o decrecimiento

Sea la función:

$$f(x) = x^3\,. \tag{118}$$

La derivada es:

$$f'(x) = 3x^2\,. \tag{119}$$

En el punto $x = 0$ la derivada es cero $f'(0) = 0$, por lo que la derivada no nos permite afirmar si la función es creciente o decreciente en ese punto. Para averiguarlo tomemos el cociente incremental:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(0+\Delta x)^3 - 0}{\Delta x} = (\Delta x)^2 > 0\,. \tag{120}$$

El cociente incremental nos informa de que la función es estrictamente creciente en $x = 0$.

Del Ejemplo 11, podemos concluir que el que la condición de que la derivada sea positiva $f'(x_0) > 0$ (o negativa) es una condición suficiente pero no necesaria para el crecimiento (o decrecimiento) de una función en un punto.

8.8 Máximos y mínimos

Vamos a estudiar ahora la condición para que una función presente un máximo o un mínimo relativo. Se cumple que si una función presenta un máximo relativo en un punto x_0 entonces:

$$f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)\,. \tag{121}$$

Si la función presenta un mínimo relativo en x_0, entonces:

$$f(x_0 - \Delta x) > f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)\,. \tag{122}$$

De la Ecuación (121) y la Ecuación (122), es fácil ver que la función en el punto x_0 no puede tener derivada ni positiva ni negativa. Luego la derivada en ese punto ha de ser cero, lo que establece una condición necesaria para que la función tenga un máximo o un mínimo en dicho punto. Es decir:

Teorema 21: Máximos y mínimos

Si $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo relativos en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Para saber si un punto, en el que la derivada de la función es cero, se trata de un máximo o un mínimo relativo, se procede a estudiar el signo de la función derivada.

- Si la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del cero, entonces la función es decreciente a la izquierda del punto donde la derivada se anula y creciente a su derecha, por lo que se trata de un mínimo relativo.
- Si la derivada es positiva a la izquierda del punto donde la derivada de la función es cero y negativa a la izquierda, entonces la función es creciente a la izquierda del cero (de la derivada) y decreciente a su derecha, por lo que en ese punto la función presenta un máximo relativo.

Ejemplo 12. Máximos y mínimos relativos de una función

Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Para encontrar los puntos donde la función presenta un máximo o un mínimo relativos estudiamos la función derivada y los puntos donde se anula, así como su signo a izquierda y derecha de esos puntos. La derivada es $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Igualamos a cero la derivada:

$$4x^3 - 4x = 0\,. \tag{123}$$

Ahora factorizamos la ecuación:

$$4x(x^2 - 1) = 0\,. \tag{124}$$

Las posibles soluciones son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. En estos puntos la función puede presentar máximos o mínimos relativos. Para saber de cuáles se trata estudiamos el signo de la derivada a izquierda y derecha.

- Si $x < -1$, el signo de la derivada es negativo, por lo que la función es decreciente.
- Si $-1 < x < 0$, el signo de la derivada es positivo, por lo que la función es creciente.
- Si $0 < x < 1$, el signo de la derivada es negativo, por lo que la función es decreciente.

- Si $x > 1$, el signo de la derivada es positivo, por lo que la función es creciente.

De las consideraciones anteriores deducimos que:

- En $x = -1$ la función presenta un mínimo relativo.
- En $x = 0$ la función presenta un máximo relativo.
- En $x = 1$ la función presenta un mínimo relativo.

8.9 Criterio de la segunda derivada

Si una función presenta un máximo relativo en un punto x_0, entonces es creciente a la izquierda de ese punto y decreciente a su derecha, lo que significa que la derivada es positiva a la derecha y negativa a a la izquierda. Por tanto, en ese tramo la derivada decrece, por lo que su derivada, es decir, la *derivada de la derivada* o *segunda derivada* es negativa. Por ello es suficiente que la segunda derivada sea negativa para que la función en el punto x_0 presente un máximo relativo. Igualmente se puede argumentar para concluir que es suficiente que la segunda derivada sea positiva, en un punto en el que la primera derivada se anula, para que la función presente en ese punto un mínimo relativo.

- Si la derivada de una función en un punto x_0 es cero $f'(x_0) = 0$ y la segunda derivada en ese punto es negativa $f''(x_0) < 0$, entonces la función presenta un máximo relativo en ese punto.
- Si la derivada de una función en un punto x_0 es cero $f'(x_0) = 0$ y la segunda derivada en ese punto es positiva $f''(x_0) > 0$, entonces la función presenta un mínimo relativo en ese punto.

8.10 Concavidad y convexidad

Los conceptos de concavidad y convexidad son relativos. Por ejemplo, una bóveda vista desde abajo es cóncava, pero vista desde arriba resulta ser convexa. Para eludir esta relatividad se conviene en fijar el criterio de que la convexidad y la concavidad sean referidas a la posición «desde arriba» o dirección positiva del eje de ordenadas, que representaremos por OY^+.

Definición 1: Concavidad

Una función $y = f(x)$ se dice que es cóncava en un punto x_0, respecto a la dirección positiva del eje de ordenadas OY^+,cuando existe un entorno de x_0 tal que la curva queda por encima de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Puede observarse en la Figura 3, a la izquierda, una curva cóncava.

Definición 2: Convexidad

Una función $y = f(x)$ se dice que es convexa en un punto x_0, respecto a la dirección positiva del eje de ordenadas OY^+, cuando existe un entorno de x_0 tal que la curva queda por debajo de la recta tangente a la curva en dicho punto.

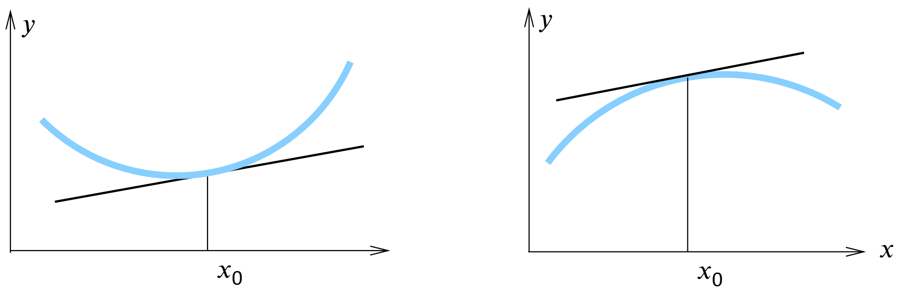


Figura 3: Concavidad y convexidad.

Puede visualizarse en la Figura 3 que, en una curva cóncava, la pendiente de la recta tangente va creciendo, de izquierda a derecha, por lo que, como la pendiente de la recta tangente es la primera derivada, esta será una función creciente y por tanto, la segunda derivada será positiva. Análogamente, en una curva convexa la pendiente de la recta tangente va decreciendo, por lo que la primera derivada es una función decreciente y por tanto, la segunda derivada es negativa. Es decir:

- $f(x)$ es cóncava respecto a OY^+ en x_0 si y solo si $f'(x)$ es creciente.
- $f(x)$ es convexa respecto a OY^+ en x_0 si y solo si $f'(x)$ es decreciente.

Por tanto, obtenemos las siguientes condiciones suficientes:

- Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x)$ es cóncava, respecto de OY^+, en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x)$ es convexa, respecto de OY^+, en x_0.

Ahora se comprende mejor el criterio de la segunda derivada. Allá donde la primera derivada sea cero ($f'(x) = 0$) tendremos un mínimo si la función es cóncava, es decir, si su segunda derivada es positiva ($f''(x) > 0$), mientras que tendremos un máximo si la función es convexa, es decir, si su segunda derivada es negativa ($f''(x) > 0$).

Ejemplo 13. Estudio de los intervalos de concavidad y convexidad de una función

Sea la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, su primera derivada es $f'(x) = 4x^3 - 12x$ y la segunda derivada es $f''(x) = 12x^2 - 12$. Veamos dónde se anula la segunda derivada:

$$12x^2 - 12 = 0\,. \tag{125}$$

Sacando 12 como factor común queda la ecuación:

$$x^2 - 1 = 0\,, \tag{126}$$

cuyas soluciones son: $x = 1$ y $x = -1$. Para $x < -1$ la segunda derivada es positiva. Para $-1 < x < 1$ la segunda derivada es negativa. Y para $x > 1$ la segunda derivada vuelve a ser positiva. Por tanto:

- $f(x)$ es cóncava en el intervalo $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
- $f(x)$ es convexa en el intervalo $]-1, 1[$.

En los puntos $x = -1$ y $x = 1$, la función no es ni cóncava ni convexa. En esos puntos la función cambia de curvatura. Se dice que son puntos de inflexión. Y en ellos la derivada segunda es cero.

El ejemplo anterior nos motiva a introducir el concepto de punto de inflexión:

Definición 3: Punto de inflexión

Se dice que una función $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión en un punto x_0 cuando en un entorno de dicho punto la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Como la función, al pasar de cóncava a convexa o viceversa, es tal que su segunda derivada cambia de signo, necesariamente en el punto de inflexión la derivada segunda será cero. Por tanto, se obtiene una condición necesaria para que una función tenga en un punto un punto de inflexión.

Teorema 22: Punto de inflexión y derivada segunda

Si una función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 entonces la derivada segunda de la función en dicho punto es cero, es decir, $f''(x_0) = 0$.

Ejemplo 14. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión de una función

Sea la función $f(x) = x^4 e^{-x}$. Para estudiar la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada. Para ello calculamos primero la primera derivada:

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = (4x^3 - x^4)e^{-x}\,, \tag{127}$$

donde hemos aplicado la regla de la derivada del producto. Calculamos ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = (12x^2 - 4x^3)e^{-x} - (4x^3 - x^4)e^{-x} = (12x^2 - 8x^3 + x^4)e^{-x}\,. \tag{128}$$

Igualamos ahora la segunda derivada a cero $f''(x) = 0$:

$$(12x^2 - 8x^3 + x^4)e^{-x} = 0\,. \tag{129}$$

Las soluciones a esta ecuación, puesto que la exponencial no se puede anular, son las soluciones a la ecuación:

$$x^2(x^2 - 8x + 12) = 0\,. \tag{130}$$

Las soluciones a esta ecuación son: $x = 0$, $x = 4 + 2\sqrt{7}$ y $x = 4 - 2\sqrt{7}$.

- La segunda derivada es positiva en el intervalo $x < 4 - 2\sqrt{7}$, luego en esa región es cóncava.
- La segunda derivada es negativa en el intervalo $4 - 2\sqrt{7} < x < 0$, luego en esa región es convexa.
- La segunda derivada es negativa en el intervalo $0 < x < 4 + 2\sqrt{7}$, luego en esa región es convexa.
- La segunda derivada es positiva en el intervalo $x > 4 + 2\sqrt{7}$, luego en esa región es cóncava.

Vemos, pues, que la función presenta puntos de inflexión en $x = 4 - 2\sqrt{7}$ y en $x = 4 + 2\sqrt{7}$. Sin embargo, $x = 0$ no es un punto de inflexión, a pesar de que la segunda derivada se anula, puesto que la función no cambia de curvatura.

Del Ejemplo 14 se deduce que $x = 0$ no es un punto de inflexión. Que la segunda derivada se anule es condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia de un punto de inflexión.

Para una presentación histórica y didáctica, con otros enfoques, del concepto de derivada y sus aplicaciones remitimos a (Vázquez & del Rincón, 1998)

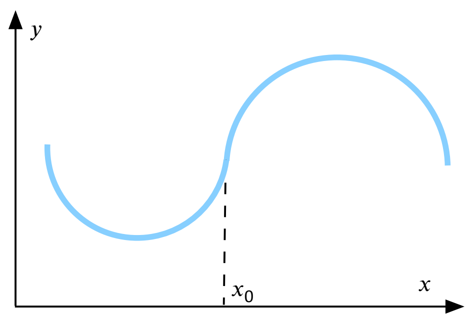


Figura 4: Punto de inflexión en x_0 (la función cambia de cóncava a convexa).

8.11 Referencias bibliográficas

Vázquez, M. S. & del Rincón, T. O. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 87–115.

8.12 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios relacionados con lo visto en este tema.

Ejercicio 1. Calcular la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^2$. *Solución*: $2(x^2 + 2x + 1)(2x + 2)$.

Ejercicio 2. Calcular la derivada de $f(x) = 1/(x^3 + 2)$. *Solución*: $-3x^2/(x^3 + 2)^2$.

Ejercicio 3. Calcular la derivada de $f(x) = \ln(x^2+3x+1)$. *Solución*: $(2x+3)/(x^2 + 3x + 1)$.