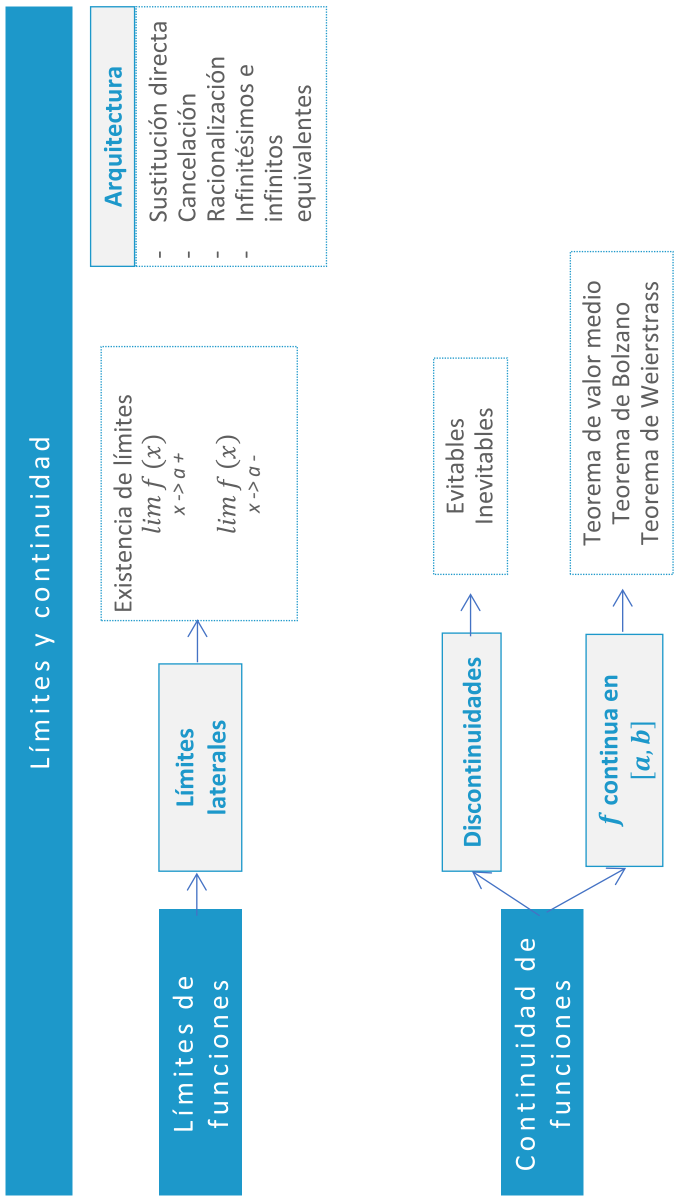
Cálculo

Límites y continuidad

Índice

Esquema



Límites y continuidad
Límites de funciones
Límites laterales
Existencia de límites
$\lim_{x \to a+} f(x)$
$\lim_{x \to a-} f(x)$
Arquitectura
- Sustitución directa
- Cancelación
- Racionalización
- Infinitésimos e infinitos equivalentes
Continuidad de funciones
Discontinuidades
Evitables
Inevitables
f continua en $[a, b]$
Teorema de valor medio
Teorema de Bolzano
Teorema de Weierstrass

Ideas clave

6.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que te presentamos a continuación.

Además, tendrás que leer las páginas 71-112, correspondientes al capítulo 1 del siguiente libro, disponible en la biblioteca virtual de UNIR:

Robert, A. (2009). *Cálculo* (Portillo, I.) (6 ed.). Madrid: Addison Wesley.

Los resultados que aquí se presentan no se acompañan de demostraciones. Por ello, para un tratamiento más riguroso remitimos a los siguientes libros, también disponibles en la biblioteca virtual de UNIR:

Apostol, T. (1984). *Calculus I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (2 ed.). Barcelona: Reverté.

Burgos, J. (2008). *Cálculo Infinitesimal de una variable* (2 ed.). Madrid: McGraw Hill.

Durante las primeras lecciones nos dedicaremos al cálculo unidimensional. En este tema iniciaremos el estudio del análisis matemático o cálculo. Hablaremos del concepto de **límite**, ya que será una de las piezas clave en las dos operaciones fundamentales del cálculo: la derivada y la integral.

Estudiaremos la manera de calcular límites y sus propiedades, veremos su relación con la **continuidad** de funciones y estableceremos las bases de las funciones que usaremos a lo largo de los siguientes capítulos.

Notación y convenciones

Llamaremos **entorno** de un punto $a \in \mathbb{R}$ a un conjunto de la forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.

Por **función** siempre se entenderá que se trata de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real en una variable real.

Los apartados de los que consta este tema son:

- Límites de funciones.
- Estrategias para el cálculo de límites.
- Continuidad de funciones.
- Teoremas sobre continuidad

6.2. Límites de funciones

Cuando queremos saber el comportamiento de una función $f(x)$ en un punto $x = c$ y no sabemos su valor exacto una estrategia que podemos tomar es estudiar la función en los valores cercanos a c, es decir, analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando los valores de x se aproximan a c. Esto nos lleva a la noción de **límite de una función**.

La mejor manera de comprender el concepto de límite es mediante algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Analicemos la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$, definida para valores $x \neq 1$, de la cual queremos conocer su comportamiento cerca de x=1. Si representamos gráficamente la función, vemos que es una parábola con un *hueco* en x=*1* (ver figura 1), sin embargo, tanto si nos aproximamos por la izquierda como por la derecha del punto x=1 vemos que $f(x)$ tiende a 3.

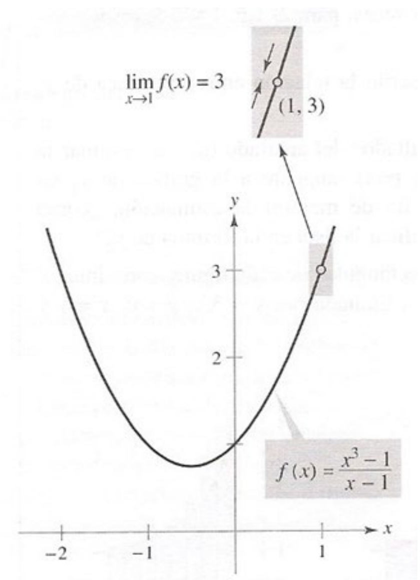


Figura 1. Límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 3$. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 48.

Podemos construir la siguiente tabla, que demuestra cómo también numéricamente se espera que $f(x)$ **tienda a 3 cuando** x **tiende a 3**.

x	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25
$f(x)$	2,313	2,710	2,997	2,997	?	3,003	3,030	3,310	3,813

Vemos que, a pesar de que la función no está definida en el punto $x=1$, podemos definir el valor al que tiende la función en ese punto a través de sus valores más cercanos. Decimos entonces que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende** a 1 es 3, y escribimos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2

El límite de una función puede no existir. Si analizamos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ en un entorno de $x = 0$ vemos que si nos aproximamos a $x = 0$ **por la derecha** entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Mientras que si nos aproximarnos a $x = 0$ **por la izquierda** tenemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

por lo que no coinciden. En este caso decimos que el límite no existe.

Los símbolos $\lim_{x \to 0^+}$ y $\lim_{x \to 0^-}$ representan los llamados **límites laterales** (figura 2).

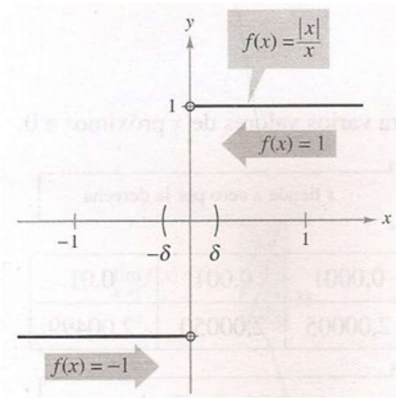


Figura 2. El límite de la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ cuando x tiende a 0 no existe. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 50

Lo mismo le ocurre a la función $g(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Ver figura 3. La función no está definida para $x = 0$ y, cuando intentamos obtener su límite, vemos que los valores cercanos no se estabilizan, sino que se repiten de manera periódica entre 1 y -1.

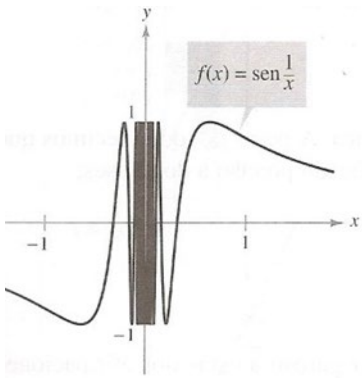


Figura 3 El límite cuando $x \to 0$ no existe. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 51

Se dice entonces que tiene un **comportamiento oscilante** en $x = 0$ y, por tanto, $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe.

Si, por otro lado, la función $f(x)$ no presenta ningún tipo de **anomalía** en el punto $x = c$, el valor del límite se puede obtener por **sustitución directa**, es decir:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Estas funciones que presentan **un buen comportamiento** en el entorno de un punto $x = c$ se dice que son funciones **continuas** en el punto $x = c$, de las cuales hablaremos más adelante en el tema.

Ejemplo 3. Algunos límites básicos

Sean $b, c \in \mathbb{R}$ y sea n un número entero positivo, entonces se tiene que:

$$\lim_{x\to c} b = b, \qquad \lim_{x\to c} x = c, \qquad \lim_{x\to c} x^n = c^n$$

Presentamos ahora la definición de límite, en la que se formaliza la idea de aproximarse a un punto $c \in \mathbb{R}$, considerando entornos del punto $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ de radio ε, que podemos tomar tan pequeño como queramos.

Definición 1

Sea $f(x)$ una función de variable real definida en un intervalo abierto (a, b) de la recta real que contiene a un punto c. Sea también l un valor real, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es l, si, y solo si para cada valor $\varepsilon > 0$ existe un valor $\delta > 0$ tal que se verifica que si $0<|x-c|< \delta$, entonces $|f(x)-l|< \varepsilon$, o escrito en lenguaje matemático:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad 0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

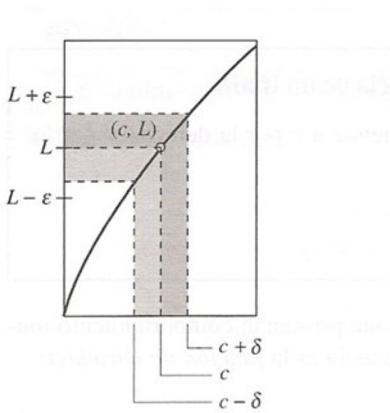


Figura 4. Definición $\delta - \varepsilon$ de límite. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 52

Como se puede ver en la figura 4, L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c, si todos los puntos en cualquier entorno que contenga a L (excepto L) son la imagen de puntos contenidos en un entorno del punto c.

Una manera más intuitiva de entender esta definición es la siguiente: para cualquier valor $\varepsilon>0$, por pequeño que sea, siempre vamos a encontrar otro valor $\delta>0$; tal que, si la distancia de x a c es menor que δ, entonces la distancia de $f(x)$ a l es menor que ε, es decir, que a medida x se acerca a c, f(x) se acerca a l.

Ejemplo 4

Vamos a usar la definición para demostrar que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. Para ello, tomamos un $\varepsilon > 0$ y tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

Vemos que $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$ y que en el entorno de 2 dado por el intervalo $(1,3)$ tenemos que $|x + 2| < 5$, una desigualdad que obviamente, se cumplirá para cualquier entorno de 2 más pequeño. Por tanto, tenemos que:

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2|$$

Si tomamos $\delta = \varepsilon/5$ tenemos que $|x^2 - 4| < 5(\varepsilon/5) = \varepsilon$, y hemos concluido.

Propiedades de los límites

La siguiente proposición nos habla de las propiedades fundamentales de los límites:

Proposición 1

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, n un número entero positivo y f, g dos funciones reales con límites:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

Entonces:

Múltiplo escalar: $\lim_{x \to c} bf(x) = bL$

Suma o diferencia: $\lim_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm K$

Producto: $\lim_{x \to c}(f(x)g(x)) = LK$

Cociente: $\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{K}$

Potencia: $\lim_{x \to c}(f(x))^n = L^n$

Función compuesta: $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x)) = f(K)$

El siguiente ejemplo ilustra cómo aplicar el resultado anterior en algunos casos prácticos:

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4}=2$$

$$\lim_{x\to \pi}(x\cos x)=\pi\cos(\pi)=-\pi$$

En consonancia con el ejemplo 5, el siguiente teorema establece la existencia del límite de una función por la coincidencia o no de los límites laterales:

Teorema 1. Existencia del límite

Sean f una función, c y L dos números reales. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L si y solamente si:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=L=\lim_{x\to c^+} f(x)$$

Hemos visto entonces el concepto de límite de una función con x tiende a un número cualquiera c, sin embargo, también podemos estar interesados en analizar el límite cuando los valores se hacen indefinidamente grandes. Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 2

Sea $f(x)$ una función de variable real definida en toda la recta real. Sea también l un valor real pero finito, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es l si y solo si para cada valor $\varepsilon>0$ existe un valor $\delta>0$ tal que se verifica que si $x>\delta$, entonces $|f(x)-l|<\varepsilon$, o escrito en lenguaje matemático:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l \leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\quad x>\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon$$

Es decir, que cuando x se va haciendo cada vez mayor, el límite se va estabilizando entorno al valor l.

6.3. Estrategias para el cálculo de límites

En muchas ocasiones, la sustitución directa en el límite proporciona lo que se llaman **indeterminaciones** de la forma:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$$

Vamos a ver a partir de ejemplos algunas de las técnicas que pueden usarse para la resolución de límites.

Técnica de cancelación

En el caso en que $f(x) = p(x)/q(x)$ sea una función racional con $p(x)$ y $q(x)$, dos polinomios, se buscará factorizar tanto el numerador como el denominador para cancelar el mayor número de términos posibles.

Ejemplo 6

Vamos a calcular el límite de $\frac{x^2+2x-6}{x+3}$ cuando $x \to -3$. Si realizamos la sustitución directa obtenemos $\frac{x^2+2x-6}{x+3} = \frac{0}{0}$. Se trata de una indeterminación. Así pues, vamos a factorizar el numerador y cancelar término.

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^2+2x-6}{x+3} = \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x\to-3} (x-2) = -5$$

Técnica de racionalización

En el caso de tener el límite de una suma (o diferencia), se multiplica y divide por la diferencia (o suma) para obtener una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right)=\frac{1}{2}$$

Infinitésimos e infinitos equivalentes

Decimos que f y g son **infinitésimos equivalentes** *en* $x=a$, y lo denotamos por $f\sim g$ cuando $x\to a$, si:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

Decimos que f y g son **infinitos equivalentes en** $x=a$, y lo denotamos por $f\sim g$ cuando $x\to a$, si:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$$

La siguiente tabla presenta los infinitésimos e infinitos equivalentes más comunes:

Infinitésimos equivalentes cuando $\lim_{x\to a} f(x)=0$		
$\mathbf{sen}\left(\boldsymbol{f(x)}\right)\sim \boldsymbol{f(x)}$	$\operatorname{tg}\left(f(x)\right)\sim f(x)$	$1-\cos(f(x))\sim (f(x))^2/2$
$\mathbf{arcsen}(\boldsymbol{f(x)})\sim \boldsymbol{f(x)}$	$\operatorname{arctg}(f(x))\sim f(x)$	$\log(1+f(x))\sim f(x)$
$(\mathbf{1}+\boldsymbol{f(x)})^{\boldsymbol{p}}-\mathbf{1}\sim \boldsymbol{pf(x)}$	$e^{f(x)}-1\sim f(x)$	$b^{f(x)}-1\sim f(x)\log b$
$\boldsymbol{a_k x^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{k+j}x^{k+j}\sim a_k x^k}$ $\quad$ $\mathbf{si}\ \boldsymbol{x\to 0}\quad(\boldsymbol{k>0, a_k\neq 0})$		

Infinitos equivalentes
$\boldsymbol{a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 \sim a_k x^k}$ **si** $\boldsymbol{x \to \pm\infty}$
$\log(\boldsymbol{a_k x^k} + \cdots + \boldsymbol{a_1 x + a_0}) \sim \boldsymbol{k \log x}$ **si** $\boldsymbol{x} \to \infty$ $(\boldsymbol{a_k} > 0)$

Tabla 1. Infinitésimos e infinitos equivalentes. Fuente: elaboración propia

Una vez identificados dos funciones **equivalentes** se puede usar el siguiente **principio de sustitución**: si f y g son equivalentes en $x = a$ entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)F(x) = \lim_{x\to a} g(x)F(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)}$$

Ejemplo 8

En el primer caso podemos tomar como equivalente el término con exponente mayor:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 3x^4 + 2x^2}{3x^7 + 4x^5 - 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{3x^7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2} = 0$$

En este segundo caso podemos tomar como equivalente $\log x \sim x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)\cos x}{x\ sen\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cos x}{x\ sen\ x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cos x}{x\ sen\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3 = 3$$

Terminamos esta sección con el conocido como **teorema del encaje**: si tenemos una función $f(x)$, y sabemos que está «encajada» entre dos funciones que tienen el mismo valor en un punto c, entonces el límite de f cuando x tiende a c es el mismo que el de las otras funciones. Más precisamente:

Teorema 2. Teorema del encaje

Si tenemos que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c, y si: $\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$, entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

Una aplicación de este teorema la veremos en el ejemplo 10.

Límite exponencial

Encontrar límites de la forma:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$$

En los cuales tenemos una función elevada a una segunda. En estos casos tenemos que tener en cuenta que:

Si existen los límites de las dos funciones y son finitos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A\,, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

Entonces se tiene que $C = A^B$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = A \neq 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, el problema se resuelve directamente.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces suponemos que $f(x) = 1 + \alpha(x)$ donde $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to 0$, de forma que nos queda:

$$C = \lim_{x \to a} \left(\left(1 + \alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right)^{\alpha(x) g(x)} = e^{\lim_{x \to a} \alpha(x) g(x)} = e^{\lim_{x \to a} (f(x) - 1) g(x)}$$

Donde $e = 2.718\ldots$ se trata del número de Neper.

Ejemplo 9

Resolver el límite siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$$

Observemos que el límite del interior del paréntesis es:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$$

Luego nos encontramos en el tercer caso. Para ello, vamos a proceder realizando la transformación indicada:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\underbrace{\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)}_{\alpha(x)}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+1}\cdot x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$$

6.4. Continuidad de funciones

Podemos decir que para una función f el término **continuo** tiene el mismo significado que en la vida cotidiana, es decir, f es continua en un punto $x = c$ si en la gráfica de la función no existe ninguna «interrupción» en c (ver figura 5). Una función es, por tanto, continua si lo es para todos los valores de x, o como se dice comúnmente, **si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel**.

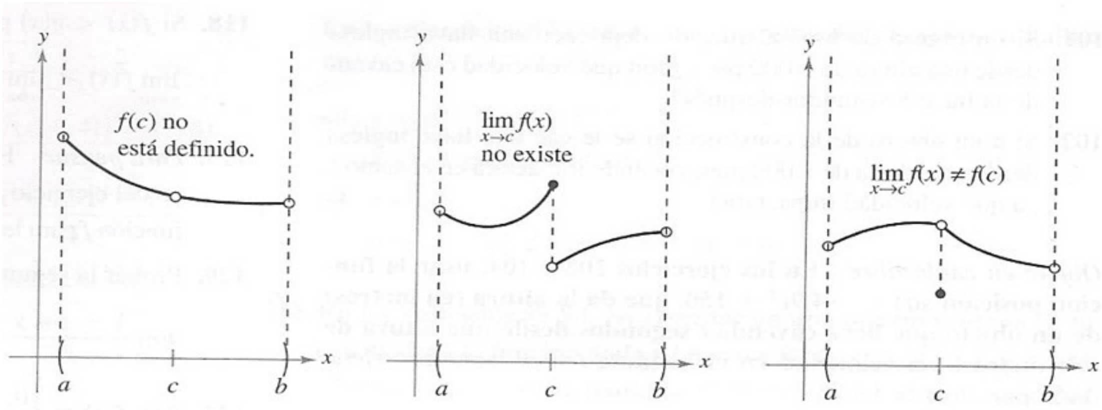


Figura 5. Tres posibilidades en las que $f(x)$ no es continua en $x = c$. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 65

A la hora de definir en términos precisos a qué nos referimos con continuidad en un punto, debemos considerar el comportamiento de la función en los puntos cercanos a él. Es decir, debemos hacerlo a través del límite de la función en ese punto.

Definición 3

Una función f es continua en $x = c$ si se verifican las condiciones:

$f(c)$ está definido.

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Diremos que una función es **continua** si es continua para todos los puntos $x \in \mathbb{R}$.

Si una función f no es continua en $x = c$, decimos que f tiene una **discontinuidad** en c. Existen dos tipos de discontinuidades, **evitables** o **inevitables**, dependiendo de si se podría o no hacer continua redefiniendo $f(c)$ de manera adecuada. Veamos cómo son cada uno de estos tipos mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. (Ver la figura 6)

(a) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función continua excepto en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad no evitable.

(b) La función $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es continua excepto en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad evitable, puesto que podemos definir $g(1) = 2$.

(c) La función $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$ es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) La función $y = \operatorname{sen} x$ es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

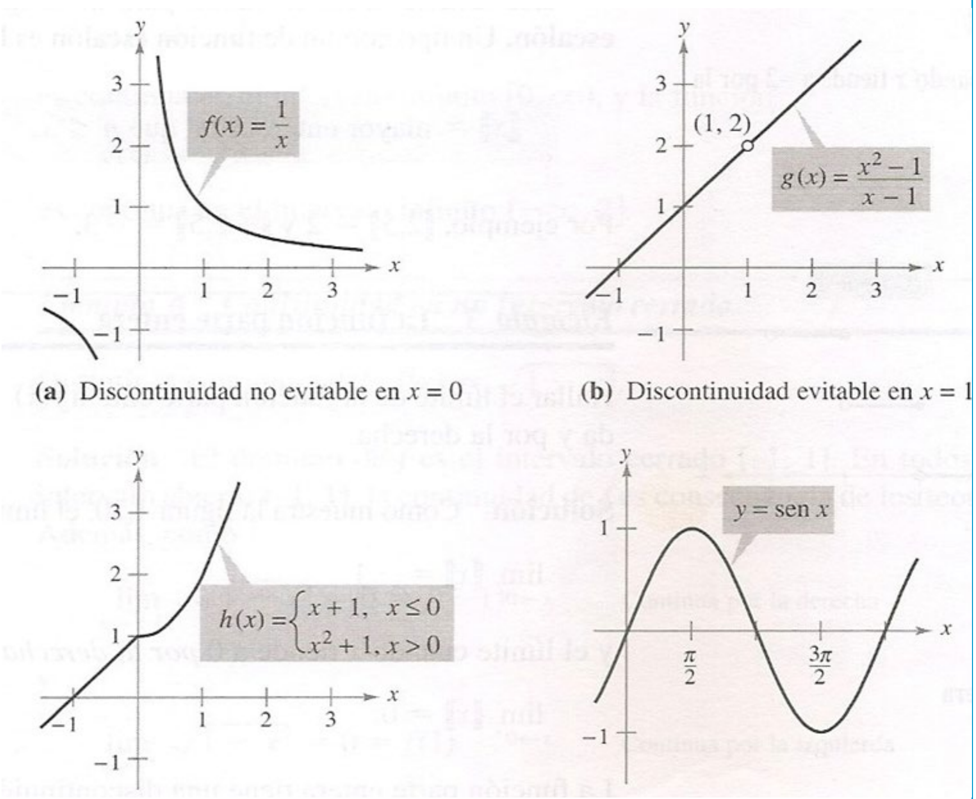


Figura 6. Gráficas de las funciones del ejemplo 9. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 69

Es común analizar funciones únicamente en ciertos intervalos que son de interés especial en el problema que analizamos. Esto hace que si consideramos intervalos que son cerrados en alguno de los extremos, la función en el extremo debe coincidir con el límite lateral. Veámoslo en la siguiente definición:

Definición 4

Sea f una función y sean $a, b \in \mathbb{R}$. f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo. f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, es decir, la función f es además continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

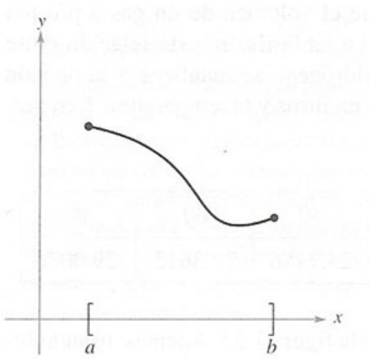


Figura 7. Función continua en un intervalo cerrado. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 71

Propiedades de la continuidad

A continuación, describimos una serie de propiedades de las funciones continuas, todas ellas consecuencia de las propiedades de los límites que vimos en el apartado anterior.

Teorema 3

Si b es un número real y f, g son dos funciones continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en $x = c$:

- **Múltiplo escalar** bf.
- **Suma y diferencia** $f \pm g$.
- **Producto** fg.
- **Cociente** f/g si $g(c) \neq 0$.

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$ entonces también es continua en c:

Composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Veamos en el siguiente ejemplo la aplicación de algunas de estas propiedades:

Ejemplo 11

Por medio del teorema anterior podemos estudiar la continuidad de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ descritas a continuación. Ver figura 8.

$$f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} x\ sen\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

Para $f(x)$ tenemos que la función $\operatorname{sen} x$ es continua pero la función $\frac{1}{x}$ lo es exceptuando el valor $x = 0$. Por tanto, la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es continua excepto para $x = 0$. La función del enunciado define $f(0) = 0$ sin embargo como vimos en el ejemplo 2 el límite de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe cuando $x \to \infty$, por lo que $f(x)$ no es continua en el origen de coordenadas.

Para $g(x)$ la situación es similar, solamente que la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ está ahora multiplicada por la función continua x. Se puede observar que la función $x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ está acotada entre las funciones $y = |x|$ e $y = -|x|$ de tal manera que:

$$-|x| \leq x\ sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

Usando el teorema del encaje tenemos que $\lim\limits_{x \to 0} x\ sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, por lo que $g(x)$ es continua para todos los valores de $\mathbb{R}$.

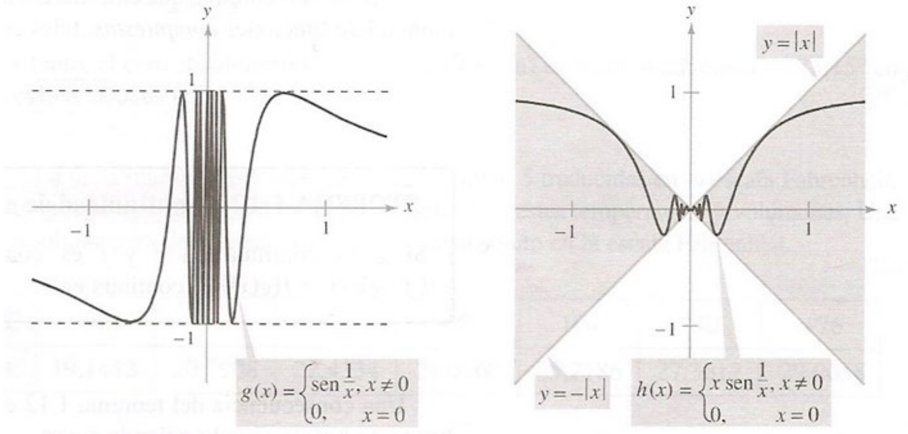


Figura 8. $g(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 74.

6.5. Teoremas sobre continuidad

Comenzamos la sección con el importante **teorema del valor intermedio o teorema de Darboux** sobre funciones continuas en un intervalo cerrado.

Teorema 4. Teorema del valor intermedio

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Es decir, f recorre al menos una vez todos los valores en el intervalo $[f(a), f(b)]$, pudiendo ser más de uno los valores que cumplan esta propiedad. Ver figura 9.

Ejemplo 9

Consideremos la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x - 1$ en el intervalo $[0,1]$.

Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$, tenemos que $0 \in [-1,2]$, y por el teorema de Bolzano existe un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$.

Pero, **¿qué valor es c?** Si seguimos dando valores a la función vemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$, por lo que $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si damos un paso más, tenemos que $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{31}{64} < 0$, por lo que $c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Vemos que si continuamos con este proceso de subdivisión del intervalo $[0,1]$ llegaremos al valor de c o a una aproximación de él.

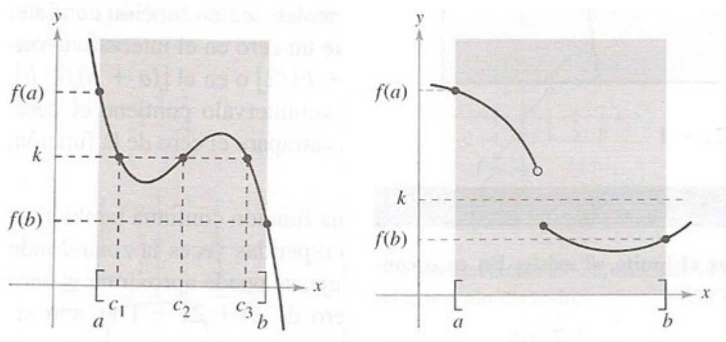


Figura 9. Teorema del valor intermedio. Fuente: Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 75

Una aplicación del teorema del valor intermedio permite localizar los ceros de una función en un intervalo. La idea se resume en que si sabemos que la función f cambia de signo, entre a y b existe al menos un punto c en el que $f(c) = 0$. A este resultado se le conoce como el teorema de Bolzano.

Teorema 5. Teorema de Bolzano

Sea f un a aplicación continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Este procedimiento se denomina **método de la bisección**, y es un método extendido en cálculo numérico para aproximar los ceros de funciones continuas en un intervalo cerrado.

Veamos ahora las nociones de máximo y mínimo de una función en un intervalo.

Definición 5

Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $x_0 \in [a, b]$. Entonces:

$f(x_0)$ es un **máximo** de f en $[a, b]$ si $\forall x \in [a, b]$ se verifica $f(x) \leq f(x_0)$.

$f(x_0)$ es un **mínimo** de f en $[a, b]$ si $\forall x \in [a, b]$ se verifica $f(x) \geq f(x_0)$.

Dada una función f continua en un intervalo $[a, b]$, analicemos ahora cómo es el conjunto imagen $f([a, b])$. La primera observación es que como f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces $f(x)$ es un conjunto acotado para $x \in [a, b]$. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado también conocido como **teorema de los valores extremos** o **teorema de Weierstrass**.

Teorema 6. Teorema de Weierstrass

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b]$$

Es decir, f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.

Los conceptos de máximo y mínimo de una función serán tratados con más detalle en el próximo capítulo.

6.6. Referencias bibliográficas

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2002). *Cálculo I* (ed. 7). Madrid: Houghton Mifflin