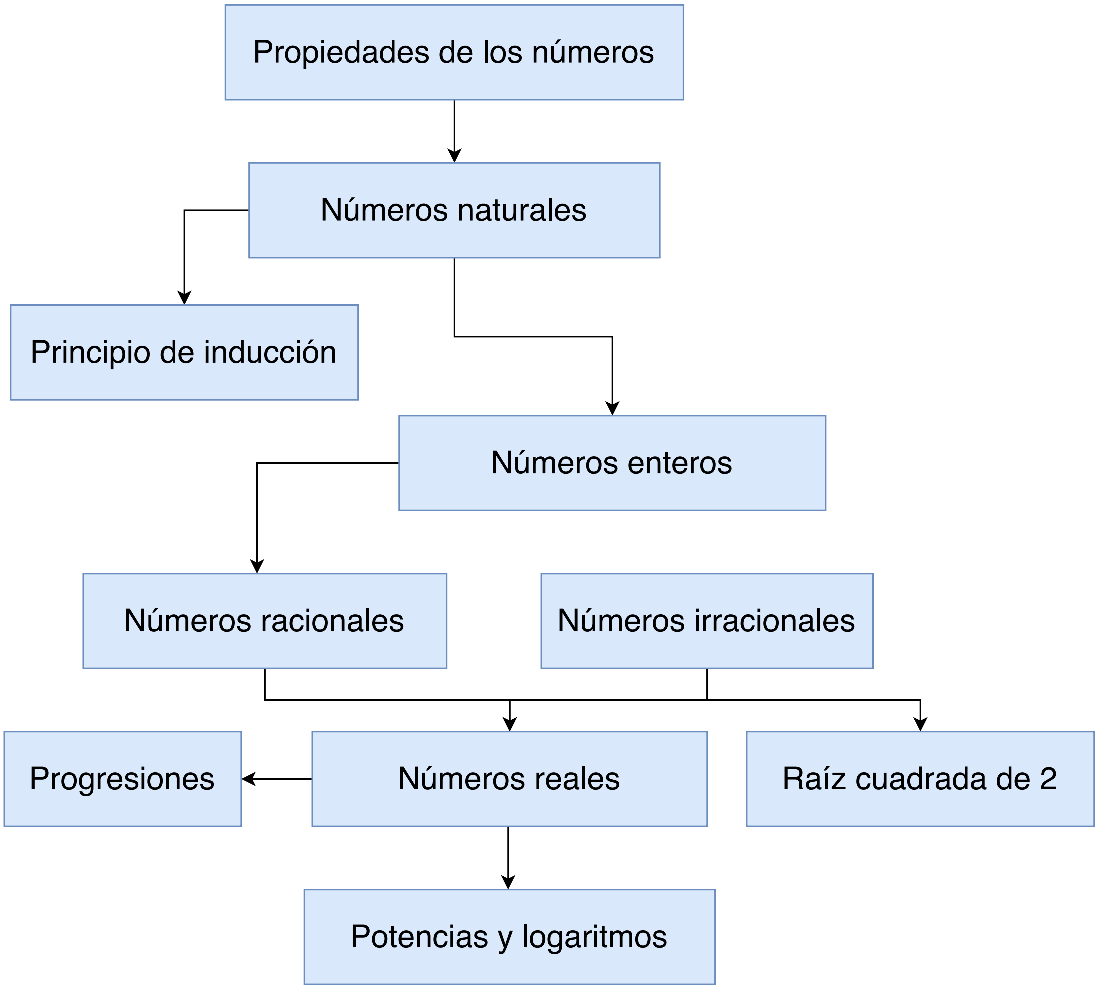
Cálculo

Propiedades de los números

Índice

Esquema


Propiedades de los números
Números naturales
Principio de inducción
Números enteros
Números racionales
Números irracionales
Progresiones
Números reales
Raíz cuadrada de 2
Potencias y logaritmos

Ideas clave

1.1 Introducción y objetivos

En este tema introduciremos las propiedades básicas de los números e iremos introduciendo los diferentes conjuntos numéricos: los números naturales, los números enteros, los números racionales, los irracionales y finalmente, los reales. Expondremos el principio de inducción matemática que emplearemos para la demostración de algunas fórmulas importantes. Demostraremos que la raíz cuadrada de dos y el número e son números irracionales, mediante el procedimiento de reducción al absurdo. Trataremos, con sus deducciones, las progresiones aritméticas y geométricas y expondremos las propiedades de las potencias y los logaritmos.

En concreto, los objetivos son:

- Conocer las **propiedades básicas de los números**.
- Saber tratar las ecuaciones con **desigualdades**.
- Comprender los conjuntos numéricos: los **naturales**, los **enteros**, los **racionales**, los **irracionales** y los **reales**.
- Saber aplicar el principio de **inducción matemática** para la demostración de fórmulas.
- Introducir las **progresiones aritméticas y geométricas** y deducir sus fórmulas básicas.
- Entender las demostraciones de que la **raíz cuadrada de dos** y el **número** e son **números irracionales**, mediante el procedimiento de reducción al absurdo.
- Conocer y saber deducir las propiedades de las **potencias** y de los **logaritmos**.

1.2 Propiedades básicas

Vamos a estudiar las propiedades de los números (ya sean naturales, enteros, racionales o reales) para la suma o adición. Empecemos con la propiedad asociativa.

Definición 1: Propiedad *asociativa*

Sean a, b y c tres números cualesquiera. Entonces se cumple la propiedad llamada *asociativa*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,. \tag{1}$$

Esta propiedad permite definir la suma de tres números del modo $a + b + c$, pues este número representa cualquiera de las dos formas de la Ecuación (1). Lo mismo se puede aplicar a la suma de cuatro números, de cinco y así sucesivamente.

Definición 2: Propiedad de existencia de elemento neutro

Se cumple que, para cualquier número a existe un número 0, llamado *elemento neutro*, tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a\,. \tag{2}$$

Definición 3: Existencia de elemento opuesto

Se cumple que para cualquier número a existe un número, llamado *opuesto*, que se representa por $-a$ tal que:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0\,. \tag{3}$$

La suma de un número y su opuesto es igual al elemento neutro de la adición. Nótese que esta propiedad no se cumple para los números naturales, pero sí para los enteros, los racionales y los reales. Ahora vamos a demostrar que si tenemos la ecuación:

$$a + x = a\,, \tag{4}$$

entonces necesariamente $x = 0$, es decir x es igual al elemento neutro de la adición. Para demostrarlo sumamos a ambos miembros el opuesto de a:

$$(-a) + (a + x) = (-a) + a\,. \tag{5}$$

Aplicando ahora la Definición 1 y la Definición 3, resulta:

$$((-a) + a) + x = 0\,. \tag{6}$$

Y aplicando otra vez la Definición 3 al primer miembro y después la Definición 2, resulta:

$$0 + x = x = 0\,, \tag{7}$$

que es lo que se quería demostrar. Con estas propiedades ya podemos resolver ecuaciones sencillas como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Resolver ecuación

Resuélvase, aplicando las propiedades de la suma estudiadas hasta ahora, la ecuación:

$$x + 2 = 6\,. \tag{8}$$

Para ello sumamos el opuesto de 2 en ambos miembros:

$$(x + 2) + (-2) = 6 + (-2)\,. \tag{9}$$

Aplicamos ahora la propiedad distributiva al primer miembro:

$$x + (2 + (-2)) = 4\,. \tag{10}$$

Aplicamos ahora la propiedad de existencia de elemento opuesto al primer miembro:

$$x + 0 = 4\,. \tag{11}$$

Y por último la propiedad de existencia de elemento neutro:

$$x = 4\,. \tag{12}$$

La resta de dos números $a - b$ se puede definir como la suma del primero y el opuesto del segundo, esto es: $a - b = a + (-b)$. Por último, existe la propiedad *conmutativa* o *abeliana* que reza:

Definición 4: Propiedad conmutativa

Para cualquier par de números a y b se cumple:

$$a + b = b + a\,. \tag{13}$$

Esta propiedad se cumple para la suma o adición pero no para la resta o sustracción, en efecto: $a - b \neq b - a$, a menos que $a = b$. Veamos ahora las propiedades de la multiplicación:

Definición 5: Propiedad asociativa

Dados tres números a, b y c, se cumple:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,. \tag{14}$$

Lo que permite dar sentido a la expresión $a \cdot b \cdot c$ que corresponde a cualquiera de las dos formas de la Ecuación (14). Así como en la suma existe el elemento neutro, que es el cero, en la multiplicación también existe un elemento neutro, que es la unidad.

Definición 6: Existencia de elemento idéntico

Para cualquier número a existe un número 1 tal que:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a\,. \tag{15}$$

Se cumple además $1 \neq 0$. Este aserto es necesario incluirlo pues no es posible demostrarlo a partir de las propiedades anteriores.

Así como para la adición tenemos la propiedad de existencia de elemento opuesto, tal que sumado a un número nos da el elemento neutro, así también para la multiplicación existe un elemento, cuyo producto con un número es el elemento neutro de la multiplicación, esto es la unidad.

Definición 7: Existencia de elemento inverso

Para cualquier número distinto de cero $a \neq 0$ existe un número, llamado *inverso*, y representado por a^{-1} tal que:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1\,. \tag{16}$$

También existe la propiedad conmutativa para la multiplicación:

Definición 8: Propiedad conmutativa

Para cualesquiera dos números a y b se cumple:

$$a \cdot b = b \cdot a\,. \tag{17}$$

Hay que destacar que no existe el inverso de 0, el 0^{-1}, puesto que como $0 \cdot a = 0$, para todo a (aserto que aunque parezca evidente no se puede demostrar con las propiedades hasta aquí enumeradas y que necesitará de otra propiedad que veremos a continuación), no hay ningún número 0^{-1} tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$.

Al igual que la resta se podía definir en función de la suma empleando el elemento opuesto, la división se puede definir como la multiplicación de un número, el dividendo, por el inverso de otro, el divisor, esto es $a/b = a \cdot b^{-1}$ siempre que $b \neq 0$. Ahora presentamos una propiedad que relaciona la suma con la multiplicación.

Definición 9: Propiedad distributiva

Sean tres números a, b y c, se cumple:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,. \tag{18}$$

Ahora podemos demostrar que $a \cdot 0 = 0$:

Teorema 1: Multiplicación por cero

Se cumple que para cualquier número a:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0\,. \tag{19}$$

En efecto, aplicando la propiedad distributiva:

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0\,, \tag{20}$$

pues 0 es el elemento neutro de la suma, así que $0 + 0 = 0$ y sumando a ambos miembros el opuesto de $a \cdot 0$:

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0\,, \tag{21}$$

resulta:

$$a \cdot 0 = 0\,. \tag{22}$$

Como queríamos demostrar. Vamos a demostrar ahora que el producto de dos números negativos es un número positivo.

Teorema 2: Producto de dos números negativos

Para cualquier par de números a y b se cumple:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b\,.$$

Para ello hay que demostrar primero que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, en efecto:

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b \, , \tag{23}$$

donde se ha aplicado la propiedad distributiva. Ahora aplicamos al segundo miembro la propiedad de existencia de elemento opuesto:

$$((-a) + a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0 \, , \tag{24}$$

luego $a \cdot b$ es el opuesto de $(-a) \cdot b$. A partir de aquí podemos escribir:

$$(-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \, , \tag{25}$$

donde hemos aplicado que $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$. Ahora aplicamos la propiedad distributiva al segundo miembro de la Ecuación (25):

$$(-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] = (-a) \cdot (-b + b) \, . \tag{26}$$

Ahora aplicamos la propiedad de existencia de elemento opuesto al segundo miembro de la ecuación:

$$(-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] = 0 \, ,$$

y sumando $a \cdot b$ en ambos miembros resulta:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \, . \tag{27}$$

Como queríamos demostrar. Te recomendamos que veas el siguiente video sobre las propiedades básicas de los números.

Accede al vídeo: Propiedades básicas de los números

1.3 Desigualdades

Las desigualdades son muy importantes en el cálculo infinitesimal, así que vamos a exponer sus propiedades básicas y un teorema importante. Definamos $\mathbb{P}$ como el conjunto de todos los números positivos.

Definición 10: Ley de tricotomía

Para todo número a se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

- $a = 0$.
- $a \in \mathbb{P}$, esto es, a es un número positivo.
- $-a \in \mathbb{P}$, esto es, a es un número negativo y por tanto su opuesto es un número positivo.

Veamos ahora algunas propiedades de las desigualdades:

Definición 11: Cierra de la suma

Si $a, b \in \mathbb{P}$, entonces $a + b \in \mathbb{P}$.

Definición 12: Cierre de la multiplicación

Si $a, b \in \mathbb{P}$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{P}$.

Exponemos ahora una serie de definiciones rápidas:

- $a > b$, si $a - b \in \mathbb{P}$.
- $a < b$, si $b > a$.
- $a \geq b$, si $a > b$ ó $a = b$.
- $a \leq b$, si $a < b$ ó $a = b$.

En estas definiciones la conjunción disyuntiva «o» significa o bien se cumple el primer aserto o bien el segundo o bien ambos. La propiedad Definición 12 tiene la consecuencia de que cualquier número elevado al cuadrado es siempre positivo, es decir $a^2 > 0$, en particular $1 = 1^2 > 0$ por lo que podemos afirmar que $1 \neq 0$. A los números que cumplen $a > 0$, se les llama *números positivos* y a los números que cumplen $a < 0$ se les llama *números negativos*.

Definimos ahora el valor *absoluto de un número*, que se representa $|a|$, de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} .$$

Vamos a demostrar un teorema importante sobre desigualdades que se cumple no solamente para los valores absolutos sino también para las normas de vectores (que definiremos más adelante) y para las distancias.

Teorema 3: Desigualdad de Schwarz

Para todo par de números a y b se cumple:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \,. \tag{28}$$

Para demostrarlo se puede estudiar los casos particulares de los signos, demostración que dejamos como ejercicio al lector. Lo demostraremos de una forma más sencilla recurriendo a la igualdad $|a| = \sqrt{a^2}$, donde la raíz cuadrada suponemos que es la positiva. Ahora tenemos que:

$$(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \,. \tag{29}$$

Ahora, $ab \leq |a||b|$ por lo tanto:

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \,. \tag{30}$$

Tomando ahora la raíz cuadrada positiva del primer miembro de la Ecuación (29) y del último miembro de la Ecuación (30), queda demostrado el teorema.

1.4 Números naturales y enteros

Los números naturales son los números de contar $1, 2, ..., n, ...$ El conjunto de los números naturales se representa como $\mathbb{N}$. Los números naturales, con la suma, no cumplen la Definición 3 ni la Definición 2 (puesto que el 0 no se considera un número natural). Para incluir los números negativos y el cero hay que extender el conjunto de los números naturales al conjunto de los números enteros, que se representa por $\mathbb{Z}$ (del alemán «Zahl», que significa «número»).

Una propiedad importante de los números naturales es lo que se conoce como *inducción matemática*. La inducción matemática consiste en que si una propiedad $P(x)$ se cumple para $x = 1$ y además se supone que se cumple para $x = n$ y se demuestra que se cumple también para $x = n + 1$, entonces la propiedad $P(x)$ se cumple para todos los números naturales. Es decir, si se cumple para 1 se cumplirá también para 2, y si se cumple para 2 se cumplirá también para 3, y así sucesivamente.

Ejemplo 2. Suma de los n primeros números naturales

Dada la fórmula:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}\,, \tag{31}$$

demostrémosla por inducción matemática. En efecto, la Ecuación (31) se cumple evidentemente para 1. Supongamos ahora que se cumple para n. Pasamos a demostrar que se cumple para $n + 1$:

$$1 + ... + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \tag{32}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,, \tag{33}$$

donde en el último paso hemos factorizado el polinomio. Luego queda demostrada para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Una consecuencia del principio de inducción es el *principio de inducción completa*, que dice que si una propiedad $P(x)$ se cumple para 1 y se cumple para todos los números naturales menores que n y se demuestra que entonces se cumple también para $n+1$, entonces queda probado que se cumple para todos los números naturales.

Relacionado con el principio de inducción están las definiciones recursivas. En efecto el factorial de n, que se representa por $n!$ se define como el producto de todos los números naturales iguales o menores que n, esto es:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,. \tag{34}$$

La definición recursiva reza tal que así:

$$\begin{aligned} 1! &= 1\,, \\ n! &= n \cdot (n-1)!\,. \end{aligned} \tag{35}$$

El factorial de cero es igual a uno $0! = 1$. La razón es la siguiente. Si en la segunda parte de la Ecuación (35) despejamos $(n-1)!$, nos queda:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}\,. \tag{36}$$

Si hacemos $n = 1$, resulta:

$$0! = \frac{1!}{1} = 1\,. \tag{37}$$

Otra definición recursiva interesante es la del *sumatorio*, que se define como:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + .. + n\,. \tag{38}$$

Recursivamente lo definiríamos como:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{1} i &= 1\,, \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} i &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} i + n\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Igualmente podemos definir recursivamente el *productorio*:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,,$$

de manera que:

$$\begin{array}{rcl} \prod_{i=1}^{1} i & = & 1 \\ \prod_{i=1}^{n} i & = & \prod_{i=1}^{n-1} i \cdot n \end{array} . \tag{40}$$

Vamos a demostrar ahora, por inducción, un teorema para calcular la potencia de la suma de cualquier par de números o variables.

Teorema 4: Binomio de Newton

Para cualquier par de números a y b y para cualquier número natural n se cumple:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k , \tag{41}$$

donde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} , \tag{42}$$

que se llama *número combinatorio*.

Demostramos que es verdadero para $n = 1$:

$$(a+b) = \binom{1}{0} a \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^0 \cdot b = a + b . \tag{43}$$

Ahora suponemos que es verdadero para n y comprobamos que se cumple para $n+1$. Para ello multiplicamos la Ecuación (41) por $(a+b)$:

$$(a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1} = (1) + (2) . \tag{44}$$

Ahora desdoblamos ambos sumandos (1) y (2) del segundo miembro:

$$(1) = \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k , \tag{45}$$

$$(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} . \tag{46}$$

Ahora tenemos en cuenta que:

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} , \tag{47}$$

y que:

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} , \tag{48}$$

las cuales se pueden comprobar con la definición de número combinatorio. Ahora hacemos un cambio de variable en el sumando: (2) $k + 1 = j$. Así cuando $k = 0$, entonces $j = 1$ y cuando $k = n - 1$, entonces $j = n$. En el primer sumando (1) cambiamos la letra muda k por j, y nos queda:

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^j + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} . \tag{49}$$

Ahora, la parte literal de los sumandos segundo y tercero es la misma por lo que podemos combinarlos:

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] a^{n+1-j} b^j + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} , \tag{50}$$

pero:

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j} , \tag{51}$$

de manera que resulta:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j , \tag{52}$$

como queríamos demostrar.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito. El *cardinal* de un conjunto es el número de elementos que contiene. Si el número de elementos es infinito se habla del *aleph*, que se representa por $\aleph$. El aleph de los números naturales es el llamado infinito numerable. El aleph de los números reales es el infinito del continuo. El conjunto de los números enteros es el formado por los números naturales, el cero y los números negativos, también es un conjunto infinito y su $\aleph$ es el infinito numerable:

$$... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$$

Para él se cumplen todas las propiedades salvo la de existencia de elemento inverso para la multiplicación.

1.5 Números racionales

Para incluir la propiedad de existencia de elemento inverso hay que hacer una extensión del conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales, que se representa por $\mathbb{Q}$ (del inglés *quotient*) y que se obtiene tomando el cociente m/n donde $n \neq 0$. A m se le denomina numerador y a n denominador. Los números racionales se reducen a los enteros cuando el denominador vale la unidad. Se pueden representar por números con cifras decimales. Puede ocurrir que el número de decimales sea infinito, pero para un número racional siempre es periódico, es decir, existe un conjunto de cifras decimales que acaban repitiéndose.

Definición 13: Número racional

El número racional se representa por p/q, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}$ con $q > 0$. Está constituido por todos los pares (hp, hq), para $h \in \mathbb{Z} - \{0\}$, que se puede denotar hp/hq. Se representa por $\mathbb{Q}$. El número racional $p/1$ es el entero $p \in \mathbb{Z}$, por lo que el conjunto de los números enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

En el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ se define la suma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\,, \tag{53}$$

y la multiplicación:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}\,. \tag{54}$$

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ cumple todas las propiedades de los números expuestas para la suma y para la multiplicación. Se dice que $(\mathbb{Q}, +)$ tiene la estructura algebraica de *grupo.* Asimismo $(\mathbb{Q}, \cdot)$ con la multiplicación tiene también la estructura algebraica de *grupo*. En conjunto $\mathbb{Q}$ con la estructura de grupo para la suma y la estructura de grupo para la multiplicación, más la propiedad distributiva, se dice que tiene la estructura algebraica de *cuerpo*.

Una definición más precisa de los números racionales es la siguiente: En el conjunto producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, donde el asterisco significa que se excluye el 0 (del denominador, se entiende) se define una relación $\sim$ definida por:

$$(a, b) \sim (a', b') \longleftrightarrow ab' = a'b\,. \tag{55}$$

Esta relación tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto es una relación de *equivalencia*. Las clases de equivalencia de esta relación definen los números racionales:

$$\frac{a}{b} = \left\{(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / ab' = a'b\right\}$$

Las operaciones en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definidas por:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)\,,$$

y

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)\,,$$

inducen las operaciones dadas por la Ecuación (53) y la Ecuación (54) en el conjunto cociente, esto es en $\mathbb{Q}$. El conjunto de los números racionales constituye entonces el conjunto cociente $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$. Existe también una relación de orden en $\mathbb{Q}$, definida por:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \longleftrightarrow ad \leq bc\,. \tag{56}$$

Por último, citamos algunas propiedades del conjunto $\mathbb{Q}$:

Teorema 5: $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso respecto de la relación de orden.

Lo que significa que si para dos números racionales $a < b$ entonces existen infinitos números racionales entre a y b.

En efecto, sean dos números racionales $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $a < b$, entonces el número racional $(a+b)/2$ se encuentra entre ambos. Repitiendo este proceso indefinidamente se demuestra el teorema. Por último hay que decir, que aunque el conjunto de los números racionales sea denso su infinito, puesto que también es un conjunto infinito, no es es el infinito del continuo (que es el de los números reales) sino el infinito numerable. Dicho de otra manera: se puede establecer una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.

1.6 Números irracionales y reales

Existe un conjunto numérico todavía más amplio, el conjunto de los números reales, que se representa por $\mathbb{R}$. El conjunto de los números reales incluye el conjunto de los números *racionales* y los números *irracionales*. Los números irracionales son aquellos que no se pueden representar mediante una fracción. En su representación en cifras decimales tienen infinitas cifras no periódicas, es decir, que no se repiten. Ejemplos de números irracionales son el número pi π, el número e y la raíz cuadrada de dos $\sqrt{2}$. Vamos a demostrar, por el procedimiento llamado *reducción al absurdo*, que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Teorema 6: La raíz cuadrada de dos

La raíz cuadrada de dos $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Para demostrarlo primero hay que considerar que cualquier número par se puede escribir como $2k$, donde k es un número entero. Y un número impar se puede escribir como $2k+1$. Ahora veamos que el cuadrado de un número par es también un número par:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)\,, \tag{57}$$

y que el cuadrado de un número impar es también un número impar. En efecto:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1\,. \tag{58}$$

Como ejemplos tenemos: $3^2 = 9$, ambos impares y $4^2 = 16$, ambos pares. Ahora podemos demostrar el teorema. En efecto, supongamos que $\sqrt{2}$ se puede expresar como una fracción ya simplificada de dos número enteros:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}\,. \tag{59}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2\,, \tag{60}$$

de donde resulta que $p^2 = 2q^2$ lo que implica que p^2 es un número par y por tanto p también es un número par, que expresaremos como $p = 2k$. Poniendo ahora este resultado en la Ecuación (60), resulta $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$ y simplificando resulta que $q^2 = 2k^2$, por lo que q^2 y por tanto q también es un número par. Pero habíamos supuesto que la fracción ya estaba totalmente simplificada, con lo que llegamos al absurdo de la suposición de partida, lo que demuestra que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como una fracción. Esta es una demostración por reducción al absurdo. Te recomendamos que visualices la siguiente video-píldora sobre la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Accede al vídeo: La raíz cuadrada de dos es un número irracional

Sabemos que el cuadrado de cualquier número es siempre positivo, por lo que no existen, en el campo de los números reales, raíces cuadradas de números negativos. Sin embargo se puede definir un nuevo número, llamado unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ que permite ampliar el conjunto de los números reales al conjunto de los *números complejos*, representado por $\mathbb{C}$. A los números complejos se le dedicará un capítulo.

1.7 Progresiones aritméticas

Se define una progresión aritmética como una sucesión de números $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que la diferencia entre un número y el siguiente es un número fijo llamado diferencia d. La fórmula recursiva que la define es:

$$a_i = a_{i-1} + d \,. \tag{61}$$

Podemos ver que $a_2 = a_1 + d$ y que $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ y así sucesivamente, por lo que en general se cumple:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \,. \tag{62}$$

Ejemplo 3. Una progresión aritmética

La progresión $1, 3, 5, 7, 9$ es una progresión aritmética de diferencia 2. Vemos que el 9 es el quinto elemento, por lo que aplicando la Ecuación (62), resulta:

$$a_5 = 1 + (5-1)2 = 9 \,.$$

Se da la siguiente propiedad: la suma de los términos que equidistan de los extremos es igual a la suma de los extremos. En efecto:

$$a_{i+1} + a_{n-i} = a_1 + id + a_1 + (n-i-1)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n \,, \tag{63}$$

donde hemos aplicado la Ecuación (62). Ahora podemos demostrar la siguiente fórmula para la suma de todos los términos de la progresión:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} n \,. \tag{64}$$

Es decir que la suma de todos los términos es igual a la semisuma de los extremos multiplicada por el número de términos de la progresión. Para demostrarlo consideremos primero la suma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \,, \tag{65}$$

y la misma suma en orden inverso:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \,. \tag{66}$$

Ahora sumamos la Ecuación (65) y la Ecuación (66), resultando:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n) \,, \tag{67}$$

donde hemos aplicado la Ecuación (63) en el último paso. Por tanto:

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \,, \tag{68}$$

como queríamos demostrar. Ahora vamos a demostrar la misma fórmula por inducción. Vemos que se cumple, para $n = 1$, que

$$S_1 = 1\frac{1+1}{2} = 1 \,. \tag{69}$$

Vamos a demostrar ahora que se cumple para $n + 1$ suponiendo que se cumple para n. En efecto:

$$S_{n+1} = (n{+}1)\frac{a_1 + a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + a_1 + n(a_n + d) + a_{n+1}}{2} = n\frac{a_1 + a_n}{2} + \frac{a_1 + nd + a_{n+1}}{2} \,. \tag{70}$$

Ahora utilizamos el hecho de que $a_1 + nd = a_1 + (n-1)d + d = a_n + d = a_{n+1}$, obteniendo:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{a_{n+1} + a_{n+1}}{2} = S_n + a_{n+1}\,. \tag{71}$$

Te recomendamos que visualices la siguiente video-píldora sobre progresiones aritméticas.

Accede al vídeo: Progresiones aritméticas

1.8 Progresiones geométricas

Progresiones geométricas son aquellas sucesiones de números $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que un número es igual al anterior multiplicado por un número llamado razón y representado por r. La fórmula de recurrencia que define una progresión geométrica es:

$$a_i = a_{i-1} \cdot r\,. \tag{72}$$

Aplicando la fórmula de recurrencia sucesivamente $a_2 = a_1 \cdot r$, $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$, llegamos a la siguiente expresión:

$$a_i = a_1 \cdot r^{i-1}\,. \tag{73}$$

Vamos a deducir ahora la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n\,. \tag{74}$$

Esta fórmula, aplicando la Ecuación (73), podemos expresarla como:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}\,. \tag{75}$$

Multiplicamos ahora S_n por r:

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \,. \tag{76}$$

Ahora restamos la Ecuación (75) de la Ecuación (76), cancelando los términos semejantes, con lo que resulta:

$$(1 - r)S_n = a_1 - a_1 r^n \,. \tag{77}$$

Así, la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica resulta ser:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \,. \tag{78}$$

Supongamos ahora que $|r| < 1$ y que n tiende a infinito, entonces r^n tiende a cero, por lo que la suma de infinitos términos de una progresión geométrica con razón menor que la unidad resulta ser:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1 - r} \,. \tag{79}$$

Ejemplo 4. Suma infinita de una progresión geométrica de razón un medio

Sea la progresión 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...

La suma infinita, de acuerdo con la Ecuación (79) es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \,. \tag{80}$$

Te recomendamos que visualices la siguiente video-píldora sobre las progresiones geométricas.

Accede al vídeo: Progresiones geométricas

1.9 Potencias

Se define recursivamente la potencia de un número a^n, que se lee «a elevado a n», a se denomina base y n exponente, como:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a \end{aligned} . \tag{81}$$

Es decir que la potencia de a elevado a n es igual al producto de a por sí mismo tantas veces como indique el exponente. Veamos algunas propiedades:

Teorema 7: Producto de potencias

Para todo par de números enteros n y m y un número real a se cumple:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m . \tag{82}$$

Vamos a demostrar este teorema por inducción. Considerando n fijo, observamos que la Ecuación (82) se cumple por la definición Ecuación (81), pues $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Supongamos ahora que se cumple para m, vamos a demostrar que se cumple para $m + 1$:

$$a^{n+m+1} = a^{n+m} \cdot a = a^n \cdot a^m \cdot a = a^n \cdot a^{m+1} , \tag{83}$$

donde hemos aplicado la definición Ecuación (81) en el primer paso. En el segundo hemos utilizado que se cumple para m. En el tercer paso hemos vuelto a utilizar la definición de potencia.

Otras propiedades de las potencias son:

Teorema 8: Potencia de una potencia.

Sea un número real a y dos números enteros n y m, se cumple:

$$(a^n)^m = a^{nm} . \tag{84}$$

Vamos a ver ahora el significado de las potencias negativas:

Definición 14: Potencias negativas.

Un número elevado a un exponente negativo es igual a la inversa del mismo número elevado al exponente positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,. \tag{85}$$

Vamos a ver ahora qué ocurre con los cocientes de potencias.

Teorema 9: Cociente de potencias

Sea un número real a y dos números enteros n y m. Se cumple:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\,. \tag{86}$$

Nos queda por ver que la raíz n-ésima de un número es igual a la potencia con base fraccionaria.

Definición 15: Potencia de una raíz

Para un número real a y un índice n de la raíz enésima se cumple:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/\mathrm{n}}. \tag{87}$$

Vamos a ver ahora qué sucede cuando elevamos un número a cero.

Teorema 10: Todo número elevado a cero es igual a la unidad

En efecto:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0\,. \tag{88}$$

1.10 Logaritmos

El logaritmo surge cuando conocemos la potencia y la base y desconocemos el exponente.

Definición 16: Logaritmo

Se define el logaritmo en base a de un número x como el número al que hay que elevar la base para obtener la potencia x:

$$\log_a x = y \longleftrightarrow a^y = x\,. \tag{89}$$

La base tiene que ser positiva $a > 0$ y distinta de 1, $a \neq 1$.

Veamos algunas de sus propiedades:

- No existe el **logaritmo de base negativa**: $\nexists \log_a x$ si $a < 0$.
- No existe el **logaritmo de un número negativo**: $\nexists \log_a x$ si $x < 0$.
- No existe el **logaritmo de cero**: $\nexists \log_a 0$.
- El **logaritmo de 1** es cero, puesto que cualquier número elevado a cero es igual a la unidad:
$$\log_a 0 = 1 \leftrightarrow a^0 = 1\,. \tag{90}$$
- El **logaritmo de una potencia** de la base es igual al exponente:
$$\log_a a^x = x\,. \tag{91}$$
- El **logaritmo del producto** de dos números es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de ellos:
$$\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n\,. \tag{92}$$

  Para demostrarlo supongamos que $m = a^x$ y que $n = a^x$, entonces resulta, por las propiedades de las exponenciales:

$$\log_a m \cdot n = \log_a a^x \cdot a^y = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a m + \log_a n\,. \tag{93}$$

- El **logaritmo de un cociente** es igual a la diferencia de logaritmos:

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n\,. \tag{94}$$

La demostración es análoga a la de la propiedad anterior, la Ecuación (92), empleando la propiedad de las exponenciales dada por la Ecuación (86) y la dejamos como ejercicio. El logaritmo de la potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a m^n = n \log_a m\,. \tag{95}$$

Para demostrarlo se usa la propiedad de las exponenciales dada por la Ecuación (84) y se deja como ejercicio. El logaritmo de 1 en cualquier base siempre es cero:

$$\log_a 1 = 0\,. \tag{96}$$

Esto se sigue de la propiedad dada por la Ecuación (20).

- Propiedad de **cambio de base**. El logaritmo de un número en una base a es igual al cociente del logaritmo de dicho número en la nueva base dividido por el logaritmo de la base a en la nueva base:

$$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}\,. \tag{97}$$

Para demostrarlo supongamos que $\log_a m = n$ entonces, por la definición de logaritmo $a^n = m$. Tomamos ahora logaritmos en la nueva base en ambos miembros:

$$\log_b a^n = \log_b m\,, \tag{98}$$

y aplicamos ahora la propiedad dada por la Ecuación (95):

$$n \log_b a = \log_b m\,, \tag{99}$$

despejamos n:

$$n = \log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a} . \tag{100}$$

Nota: el logaritmo en base 10 se escribe como log, sin indicar la base, y al logaritmo con base el número e, que definimos a continuación, se le llama logaritmo neperiano o logaritmo natural y se representa por ln. Para conocer un poco la historia de los logaritmos neperianos o naturales y por qué se los considera naturales te aconsejamos que leas (Fernández & Pacheco, 2000).

1.11 El número e

Sea la magnitud:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n , \tag{101}$$

para valores crecientes del número natural $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces se cumple lo siguiente:

Teorema 11: El número e

La magnitud Ecuación (101) está *acotada* entre 2 y 3 y es creciente por lo que tiene un límite cuando n tiende a infinito, que es el número e.

Desarrollamos la magnitud Ecuación (101) utilizando el binomio de Newton (Ecuación (41)):

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= 1 + \tfrac{n}{1}\tfrac{1}{n} + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\tfrac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \\ &+ \tfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\tfrac{1}{n}\right)^n , \end{aligned} \tag{102}$$

expresión equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right) . \end{aligned} \tag{103}$$

La magnitud Ecuación (101) crece al aumentar n a $n+1$, pues:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \tag{104}$$

y además se añade un término más y todos los términos son positivos. Hemos demostrado pues que al crecer n la magnitud Ecuación (101) es creciente. Vamos a demostrar ahora que está acotada. Ocurre que:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<1\,, \tag{105}$$

y que:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1\,, \tag{106}$$

por tanto se obtiene la desigualdad:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\,. \tag{107}$$

Ahora se cumple que:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}\quad . \tag{108}$$

Por tanto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\,. \tag{109}$$

Los sumandos posteriores al primero del segundo miembro constituyen una progresión geométrica de razón 1/2 cuya suma es:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}\,. \tag{110}$$

Por tanto, la Ecuación (109), queda:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3\,. \tag{111}$$

Además, de la Ecuación (103), se deduce que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2\,. \tag{112}$$

Por tanto la sucesión es creciente y está acotada, luego tiene un límite, que se conoce como número e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,. \tag{113}$$

Vamos a demostrar ahora que el número e es irracional. Para ellos consideremos que e también es el límite de la siguiente sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n\,, \tag{114}$$

donde:

$$x_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\,. \tag{115}$$

Que el número e es igual al límite de esta sucesión lo comprobaremos cuando estudiemos el desarrollo en serie de Taylor. Definamos ahora la sucesión $y_n = x_n + 1/n!$ Se verifica que las sucesiones x_n y y_n son convergentes y que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple $x_n < e < y_n$. Hecho que dejamos sin demostración. Sabemos que $x_1 < e < y_1$, es decir $2 < e < 3$, luego e no es un número natural. Supongamos ahora que es un número racional que se puede expresar como p/q con $p, q \in \mathbb{N}$ y $q \neq 1$, pues e no es natural. Como se cumple que $x_n < e < y_n$ esta desigualdad se cumplirá también para $n = q$, es decir:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q!}\,. \tag{116}$$

Multiplicamos ahora esta desigualdad por $q!$, obteniéndose un número natural puesto que $q!$ es múltiplo de todos los denominadores. Resultará entonces:

$$N < p(q-1)! < N+1\,, \tag{117}$$

lo cual es absurdo puesto que la desigualdad nos dice que hay un número natural ($p(q-1)!$ es un número natural) entre dos números naturales consecutivos. Así que hemos demostrado por reducción al absurdo que e no es un número racional y por tanto, es un número irracional. Las primeras cifras decimales de e son 2.7182818284...

1.12 Referencias bibliográficas

Fernández, I. & Pacheco, J. (2000). ¿Por qué son naturales los logaritmos neperianos? *Epsilon*, (pp. 46–47).

1.13 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios relacionados con lo visto en este tema.

Ejercicio 1. Simplifica la siguiente expresión, utilizando las propiedades de las potencias: $\frac{6x^4y^2}{3x^2y^{-2}}$. *Solución*: $2x^2y^4$.

Ejercicio 2. Calcula la siguiente potencia utilizando las propiedades de las raíces y las potencias: $4^{\frac{3}{2}}$. *Solución*: 8.

Ejercicio 3. Sabiendo que $\log 2 \simeq 0.301030$, calcula $\log \sqrt[3]{2}$. *Solución*: 0.100343.