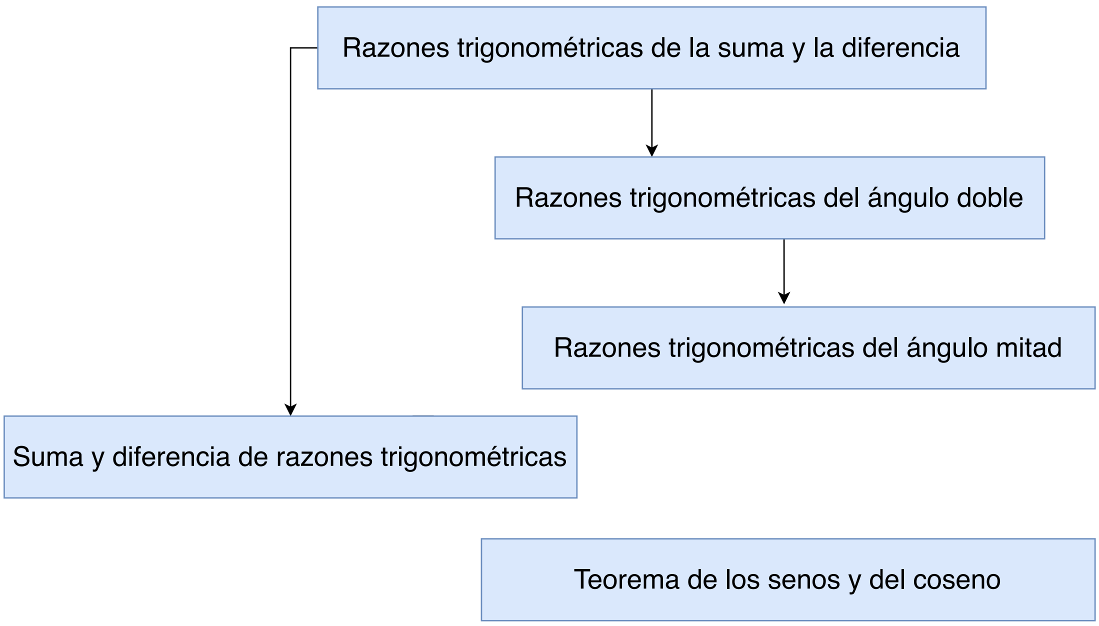
Cálculo

Trigonometría II

Índice

Esquema


Razones trigonométricas de la suma y la diferencia
Razones trigonométricas del ángulo doble
Razones trigonométricas del ángulo mitad
Suma y diferencia de razones trigonométricas
Teorema de los senos y del coseno

Ideas clave

3.1 Introducción y objetivos

Después del tema anterior de introducción a la trigonometría en este tema vamos a estudiar una serie de fórmulas utilísimas para el cálculo de las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos, el ángulo doble, el ángulo mitad, así como las fórmulas de la suma de razones trigonométricas. Expondremos en todos los casos las demostraciones y deducciones. Terminaremos exponiendo y demostrando dos teoremas importantísimos: el teorema de los senos y el teorema del coseno.

Los objetivos son:

- Calcular las razones trigonométricas de la **suma y diferencia de ángulos** y saber deducirlas.
- Saber hallar las razones trigonométricas del **ángulo doble**.
- Conocer las fórmulas para la determinación de las razones trigonométricas del **ángulo mitad**.
- Entender las fórmulas para la **suma de razones trigonométricas**.
- Conocer el **teorema de los senos** y el **teorema del coseno** junto con sus demostraciones.

3.2 Trigonometría de la suma y resta de ángulos

Primero deduciremos la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos y a partir de ella las demás. Para deducir el coseno de la diferencia de dos ángulos acudimos al concepto de producto escalar de vectores unitarios. En efecto, sean dos vectores unitarios (de módulo unidad): $\vec{u}_1$ que forma un ángulo α con el eje x y $\vec{u}_2$ que forma un ángulo β con el eje x. Sus componentes, en términos de los llamados cosenos directores, son:

$$\vec{u}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)\,, \tag{1}$$

y

$$\vec{u}_2 = (\cos\beta, \sin\beta)\,. \tag{2}$$

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman. Puesto que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son vectores unitarios su módulo vale 1 y el ángulo que forman es la diferencia $\alpha - \beta$. Así que el producto escalar es:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2| \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta)\,. \tag{3}$$

Por otra parte el producto escalar, en términos de las componentes, es igual a la suma de los productos de las respectivas componentes, así que tenemos:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \tag{4}$$

Y combinando la Ecuación (3) con la Ecuación (4), resulta:

Teorema 1: Coseno de la diferencia de ángulos

El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual al coseno del primero por el coseno del segundo más el seno del primero por el seno del segundo.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{5}$$

Así hemos obtenido la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos en términos de los senos y cosenos de los ángulos. La fórmula del coseno de la suma la podemos derivar de la Ecuación (5) considerando que $\beta = -(-\beta)$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)\,. \tag{6}$$

Ahora aplicamos las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos opuestos, que nos dicen que el coseno del ángulo opuesto es igual al del ángulo original y el seno del ángulo opuesto es igual al original pero cambiado de signo.

Teorema 2: Coseno de la suma

El coseno de la suma de dos ángulos es igual al coseno del primero por el coseno del segundo menos el seno del primero por el seno del segundo. Matemáticamente:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,. \tag{7}$$

Con ello hemos obtenido la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos. Para obtener ahora la fórmula del seno de la suma consideramos los ángulos complementarios:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\pi/2 - \alpha - \beta)\,. \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (5):

$$\cos(\pi/2 - \alpha - \beta) = \cos(\pi/2 - \alpha)\cos\beta + \sin(\pi/2 - \alpha)\sin\beta\,. \tag{9}$$

Ahora empleamos las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios, que nos dicen que el seno de un ángulo es igual al coseno del complementarios y viceversa.

Teorema 3: Seno de la suma

El seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo más el coseno del primero por el seno del segundo:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta\,. \tag{10}$$

Con lo que hemos obtenido la fórmula del seno de la suma. Para el seno de la diferencia empleamos el hecho de que $-\beta = +(-\beta)$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)\,. \tag{11}$$

Y ahora empleamos en el último miembro la relación entre las razones trigonométricas de los ángulos opuestos, vistas en el tema anterior:

Teorema 4: Seno de la diferencia

El seno de la diferencia de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo menos el coseno del primero por el seno del segundo:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,, \tag{12}$$

con lo que hemos obtenido la fórmula del seno de la diferencia de dos ángulos.

Teorema 5: Tangente de la suma

La tangente de la suma de dos ángulos es igual al cociente entre la suma de las tangentes del primero y del segundo y uno menos el producto de las tangentes. De manera simbólica:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\,. \tag{13}$$

Para demostrarlo empleamos la fórmula de que la tangente es el cociente entre el seno y el coseno:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\,. \tag{14}$$

Ahora empleamos la Ecuación (10) y la Ecuación (7):

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\,. \tag{15}$$

Ahora dividimos numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\,. \tag{16}$$

Como queríamos demostrar.

Teorema 6: Tangente de la diferencia de ángulos

La tangente de la diferencia de dos ángulos es igual al cociente de la diferencia de tangentes del primero y del segundo y uno menos la suma del producto de las tangentes.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1+\tan \alpha \tan \beta}\,. \tag{17}$$

Para demostrarlo basta emplear la Ecuación (16), que $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ y las fórmulas de los ángulos opuestos:

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1\text{-}\tan \alpha \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1+\tan \alpha \tan \beta}\,. \tag{18}$$

Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre las razones trigonométricas de la suma y diferencia.

Accede al vídeo: Razones trigonométricas de la suma y la diferencia

3.3 Razones trigonométricas del ángulo doble

Vamos a deducir ahora las razones trigonométricas del ángulo doble, utilizando lo aprendido hasta ahora.

Teorema 7: El seno del ángulo doble

El seno del ángulo doble es igual al doble del producto del seno del ángulo por el coseno del mismo ángulo.

En efecto, empleamos la Ecuación (10) poniendo $\beta = \alpha$:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha\,. \tag{19}$$

Teorema 8: El coseno del ángulo doble

El coseno del ángulo doble es igual al cuadrado del coseno del ángulo menos el cuadrado del seno del ángulo.

Para demostrarlo basta poner $\beta = \alpha$ en la Ecuación (7):

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,, \tag{20}$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, podemos escribir:

$$\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\,, \tag{21}$$

y también:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1\,. \tag{22}$$

Teorema 9: Tangente del ángulo doble

La tangente del ángulo doble es igual al cociente entre el doble de la tangente del ángulo y uno menos el cuadrado de la tangente.

Para demostrarlo volvemos a utilizar $\beta = \alpha$ en la Ecuación (16):

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\,. \tag{23}$$

Si ponemos $A = 2\alpha$ y $\alpha = A/2$ obtenemos las siguientes fórmulas. De la Ecuación (19):

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\,. \tag{24}$$

De la Ecuación (20):

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\,. \tag{25}$$

De la Ecuación (21):

$$\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\,. \tag{26}$$

De la Ecuación (22):

$$\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1\,. \tag{27}$$

Y por último, de la Ecuación (23):

$$\tan A = \frac{2\tan(A/2)}{1 - \tan^2(A/2)}\,. \tag{28}$$

3.4 Razones trigonométricas del ángulo mitad

Las razones trigonométricas del ángulo mitad pueden deducirse de lo ya visto.

Teorema 10: Seno del ángulo mitad

El seno del ángulo mitad es igual a la raíz cuadrada de la semidiferencia de uno y el coseno del ángulo.

En efecto, de la Ecuación (26), resulta:

$$2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha\,. \tag{29}$$

y despejando el seno del ángulo mitad:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,. \tag{30}$$

Teorema 11: Coseno del ángulo mitad

El coseno del ángulo mitad es igual a la raíz cuadrada de la semisuma de uno y el coseno del ángulo.

En efecto, de la Ecuación (27), resulta:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha\,, \tag{31}$$

y despejando el coseno del ángulo mitad:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,. \tag{32}$$

Teorema 12: Tangente del ángulo mitad

La tangente del ángulo mitad es igual a la raíz cuadrada del cociente entre uno menos el coseno y uno más el coseno.

Como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno de un ángulo dividimos la Ecuación (30) por la Ecuación (32) resultando:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,. \tag{33}$$

Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre las razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.

Accede al vídeo: Razones trigonométricas del ángulo doble y el ángulo mitad

3.5 Suma y resta de razones trigonométricas

Vamos a ver ahora las fórmulas para la suma y la diferencia de las razones trigonométricas.

Teorema 13: La suma de senos

La suma de los senos de dos ángulos es igual al doble del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia.

Aplicando la Ecuación (10) y la Ecuación (12) tenemos:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\beta \tag{34}$$

Ahora llamamos $A = \alpha + \beta$ y $B = \alpha - \beta$ de manera que resolviendo las ecuaciones resulta $\alpha = (A + B)/2$ y $\beta = (A - B)/2$, así que la Ecuación (34) queda:

$$\sin A + \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\,. \tag{35}$$

Teorema 14: La diferencia de senos

La diferencia de los senos de dos ángulos es igual al doble del coseno de la semisuma por el seno de la semidiferencia.

El razonamiento es análogo al seguido para demostrar el teorema anterior.

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta\,, \tag{36}$$

de donde resulta:

$$\sin A + \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\,. \tag{37}$$

Teorema 15: La suma de cosenos

La suma de los cosenos de dos ángulos es igual al doble de coseno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia.

Esta vez sumamos la Ecuación (7) y la Ecuación (5):

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta\,, \tag{38}$$

por lo que siguiendo el mismo razonamiento que en el Teorema 13, queda:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\,. \tag{39}$$

Teorema 16: La diferencia de cosenos

La diferencia de los cosenos de dos ángulos es igual a menos el doble del seno de la semisuma por el seno de la semidiferencia.

La demostración es análoga a la seguida en los teoremas anteriores:

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\,. \tag{40}$$

Teorema 17: La suma de tangentes

La suma de las tangentes de dos ángulos es igual al cociente entre el seno de la suma y el producto de los cosenos de cada ángulo.

En efecto, empleando el hecho de que la tangente es el cociente entre el seno y el coseno, obtenemos:

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos B} = \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin A}{\cos A\cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\,, \tag{41}$$

donde en el último paso hemos empleado la Ecuación (10).

Teorema 18: Diferencia de tangentes

La diferencia de las tangentes de dos ángulos es igual al cociente del seno de la diferencia y el producto de los cosenos de los ángulos.

Se procede análogamente al teorema anterior:

$$\tan A - \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin A}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B},$$

donde en el último paso hemos empleado la Ecuación (12). Te recomendamos que veas la siguiente video-píldora sobre la suma y diferencia de razones trigonométricas.

Accede al vídeo: Fórmulas de la suma y diferencia de las razones trigonométricas

3.6 Teorema de los senos y del coseno

Vamos a presentar el teorema de los senos:

Teorema 19: Teorema de los senos

En todo triángulo se verifica que los lados del triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Expresado como ecuación:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{42}$$

Para demostrarlo consideremos el triángulo de la Figura 1 en la que se ha dibujado una de las alturas, la CD. Esta altura divide el triángulo en dos triángulos rectángulos. En el triángulo rectángulo ACD, observamos que:

$$h = b \sin A. \tag{43}$$

En el triángulo rectángulo BCD, se tiene:

$$h = a \sin B \,. \tag{44}$$

Combinando la Ecuación (43) y la Ecuación (44), resulta:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \,. \tag{45}$$

Utilizando otras alturas se puede demostrar que la igualdad se cumple también para c y el $\sin C$. Se puede demostrar también que estas relaciones se cumplen aun cuando la altura quede fuera del triángulo o que coincida con uno de los lados. Con ello queda demostrado el teorema.

Teorema 20: Teorema del coseno

En todo triángulo se verifica que el cuadrado de un lado es igual la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de estos por el coseno del ángulo que forman:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \tag{46}$$

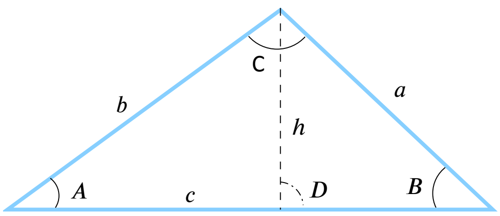


Figura 1: Triángulo en el que se considera una de las alturas, la CD.

Para demostrarlo fijémonos en la Figura 1, en el triángulo rectángulo BCD se cumple, por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + DB^2 \,, \tag{47}$$

pero en el triángulo rectángulo DCA tenemos, aplicando otra vez el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = b^2 - AD^2 \,. \tag{48}$$

Ahora se cumple:

$$DB = c - AD \,, \tag{49}$$

que elevada al cuadrado:

$$DB^2 = c^2 + AD^2 - 2cAD\,. \tag{50}$$

En el triángulo rectángulo DCA se cumple:

$$AD = b \cos A\,, \tag{51}$$

por tanto la Ecuación (50) se puede escribir como:

$$DB^2 = c^2 + AD^2 - 2cb \cos A\,. \tag{52}$$

Ahora sustituimos en la Ecuación (47), la Ecuación (48) y la Ecuación (52):

$$a^2 = h^2 + DB^2 = (b^2 - AD^2) + (c^2 + AD^2 - 2cb \cos A) = b^2 + c^2 - 2cb \cos A\,. \tag{53}$$

Con lo que queda demostrado el teorema. Para demostrarlo para los otros casos basta considerar los otros ángulos. Obsérvese que si $A = 90^\circ$, puesto que $\cos 90^\circ = 0$ se recupera el teorema de Pitágoras. Para otra demostración del teorema del coseno te recomendamos (Cagliero & Podestá, 2020).

3.7 Referencias bibliográficas

Cagliero, L. & Podestá, R. A. (2020). ¿Sabías que...? *Revista de Educación Matemática*, 35(3), 37–39.

3.8 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios relacionados con lo visto en este tema.

Ejercicio 1. Calcular, usando la fórmula del coseno de la diferencia, $\cos 15^\circ$. *Solución*: 0.9659.

Ejercicio 2. Calcula, usando la fórmula de la tangente de la suma, $\tan 75^\circ$. *Solución*: 3.7321.

Ejercicio 3. Calcular el $\sin 3x$ en función de $\sin x$. *Solución*: $3\sin x - 4\sin^3 x$.