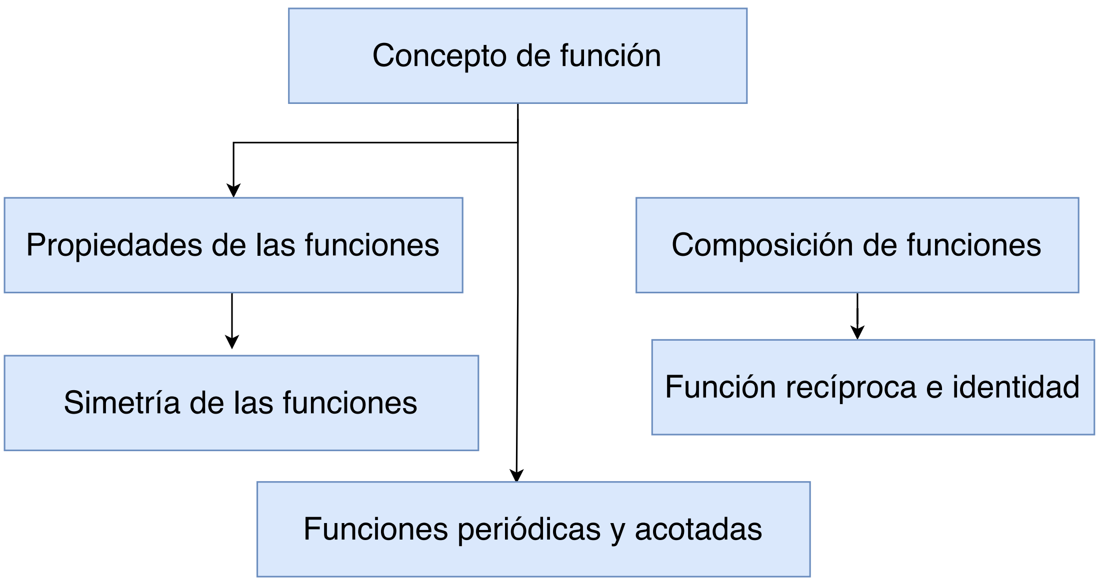
Cálculo

# Propiedades de las funciones

# Índice


Concepto de función
Propiedades de las funciones
Simetría de las funciones
Composición de funciones
Función recíproca e identidad
Funciones periódicas y acotadas

# Ideas clave

## 5.1 Introducción y objetivos

En este capítulo introducimos el concepto de función, así como sus propiedades básicas. Estudiaremos la composición de funciones, la función recíproca, así como las propiedades esenciales de las funciones.

Los objetivos son:

- Entender el **concepto de función**.
- Conocer las **propiedades básicas** de las funciones.
- Comprender el concepto de **composición de funciones** y el de **función recíproca** y sus propiedades.
- Conocer las definiciones de **función creciente y decreciente**, así como las definiciones de **máximo y mínimo relativos**.
- Entender la **simetría de las funciones**.
- Conocer la definición de **función periódica**.
- Comprender la condición de **función acotada**.

## 5.2 Concepto de función

Una función es una *correspondencia* entre dos números, de manera que al primero, llamado variable independiente, que suele representarse por $x$, se le asocia un único número, llamado variable dependiente y que se representa por $y$ ó $f(x)$.

**Definición 1: Concepto de función**

Una función es una correspondencia entre pares de números. Al primero se le denomina variable *independiente* $x$ y se le asocia un único número, llamado variable *dependiente* $y$ ó $f(x)$.

Se llama *conjunto inicial* al conjunto en el que toma valores la variable independiente. Al subconjunto del conjunto inicial de valores de la variable independiente para los que está definida la función se le denomina *dominio* y se representa por $D$.

**Ejemplo 1. Dominio de una función**

Sea la función $f(x) = x^2 + 2$. Esta función puede tomar valores en el conjunto de todos los números reales, por tanto su dominio coincide con el conjunto de los números reales $D = \mathbb{R}$. Sea ahora la función definida por:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}\,. \tag{1}$$

Esta función puede tomar valores en todo el conjunto de los números reales excepto en aquellos puntos que anulan el denominador (puesto que la división por 0 no está definida). Por tanto su dominio es $D = \mathbb{R} - \{2, -2\}$.

Se llama *conjunto final* al conjunto en el que toma valores la variable dependiente. Al subconjunto del conjunto final que comprende todos los valores que toma la variable dependiente, dentro de su dominio, se le conoce como *imagen*.

Si tanto el conjunto inicial como el conjunto final son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ hablamos de una *función real de variable real*. La función viene determinada por una regla que asocia la variable independiente con la variable dependiente. Esta regla puede ser una tabla, una gráfica o una fórmula matemática. Dos funciones $f$ y $g$ son iguales si además de tener el mismo dominio se verifica:

$$f(x) = g(x)\,, \tag{2}$$

para todo $x$ de su dominio.

## 5.3 Operaciones con funciones

Veamos ahora algunas de las operaciones más importantes con funciones.

**Teorema 1: Producto de una función por un número real**

El producto de una función $f$ por un número real $k$ es igual a la función $kf$ que verifica:

$$(kf)(x) = kf(x)\,. \tag{3}$$

Es decir, el producto de una función por un número real es una nueva función en la que la variable independiente de la función original queda multiplicada por el número real. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 2. Producto de una función por un número real**

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}\,. \tag{4}$$

La función $\frac{1}{2}f(x)$ tomará la forma:

$$\frac{1}{2}f(x) = \frac{x-1}{2(x^2+1)}\,. \tag{5}$$

Otra operación importante es la suma de funciones.

**Teorema 2: Suma de funciones**

La suma de dos funciones $f$ y $g$ es una función $f+g$ tal que:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,. \tag{6}$$

Es decir, que la función suma es tal que se suman las variables dependientes de las *funciones sumando*. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 3. Suma de funciones**

Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1\,, \tag{7}$$

y

$$g(x) = 2x^2 + x - 3\,. \tag{8}$$

La suma será la función:

$$(f + g)(x) = 3x^2 + 3x - 2\,, \tag{9}$$

donde, por ser ambas funciones polinómicas, se han sumado los términos semejantes, es decir, los términos con la misma potencia de $x$.

Dada una función $f$, la función opuesta $-f$ será aquella tal que la suma de ambas dé siempre cero. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 4. Función opuesta**

Sea la función $f(x) = x^3$, la función opuesta $-f$ será:

$$-f(x) = -x^3\,, \tag{10}$$

puesto que $(f - f)(x) = x^3 - x^3 = 0$ para todos los $x$ de su dominio, que es el conjunto de todos los números reales.

Las funciones también se pueden multiplicar.

**Teorema 3: Producto de funciones**

Dadas dos funciones $f$ y $g$ el producto de ambas funciones es una nueva función $f \cdot g$ tal que:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\,, \tag{11}$$

para todo $x$ de su dominio.

Es decir, que se multiplican los valores de las funciones. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 5. Producto de funciones**

Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}\,, \tag{12}$$

y

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-1}\,. \tag{13}$$

El producto de ambas funciones será:

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,, \tag{14}$$

donde en el último paso hemos simplificado empleando las igualdades notables:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)\,, \tag{15}$$

y

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)\,, \tag{16}$$

es decir, que el producto de la suma por la diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

La función inversa $1/f$ es aquella tal que multiplicada por la función original $f$ da la unidad. Es decir:

$$\left(\frac{1}{f} f\right)(x) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1\,. \tag{17}$$

**Ejemplo 6. Función inversa**

Sea la función $f(x) = x^2 + x + 1$. La función inversa es:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+x+1}\,. \tag{18}$$

Vamos a estudiar ahora el concepto de composición de funciones. En esencia significa que al componer dos funciones, una de ellas actúa sobre la variable independiente $x$ y la otra actúa sobre la imagen de la primera función, tal como si fuera la nueva variable independiente.

**Teorema 4: Composición de funciones**

Sean dos funciones $f$ y $g$. Se llama composición de ambas funciones a una nueva función, que se representa por $f \circ g$, y se lee «$f$ compuesta de $g$», tal que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \,. \tag{19}$$

Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 7. Composición de funciones**

Sea la función $f(x) = \sin(x)$ y la función $g(x) = x^2$. La función compuesta es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2) \,. \tag{20}$$

Se llama función identidad a aquella que deja la variable independiente inalterada, esto es:

**Definición 2: Función identidad**

Se llama función identidad y se representa por $i$ a la función:

$$i(x) = x \,. \tag{21}$$

La función identidad es el elemento unidad o elemento neutro de la operación de composición, es decir, que al componer cualquier función $f$ con la identidad $i$, tanto por la izquierda como por la derecha, resulta la función $f$. Esto es:

$$(i \circ f) = (f \circ i) = f(i(x)) = i(f(x)) = f(x) \,. \tag{22}$$

Si para una función dada $f$ existe una función tal que compuesta con $f$ da la identidad, se dice que es la *función recíproca*.

**Definición 3: Función recíproca**

Dada una función $f$, se llama función recíproca y se representa por $f^{-1}$ a una función tal que:

$$(f \circ f^{-1}) = (f^{-1} \circ f) = i\,. \tag{23}$$

Las gráficas de las funciones recíprocas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, esto es, respecto de la gráfica de la función identidad.

Veamos ahora un ejemplo de función recíproca:

**Ejemplo 8. Función recíproca**

Dada la función $f(x) = x^2$ la función recíproca es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ puesto que:

$$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = x\,. \tag{24}$$

La simetría de las gráficas de estas funciones recíprocas respecto a la bisectriz del primer cuadrante puede observarse en la Figura 1.

Otras funciones recíprocas son por ejemplo la función logarítmica $f(x) = \ln x$ y la exponencial $f^{-1}(x) = e^x$.

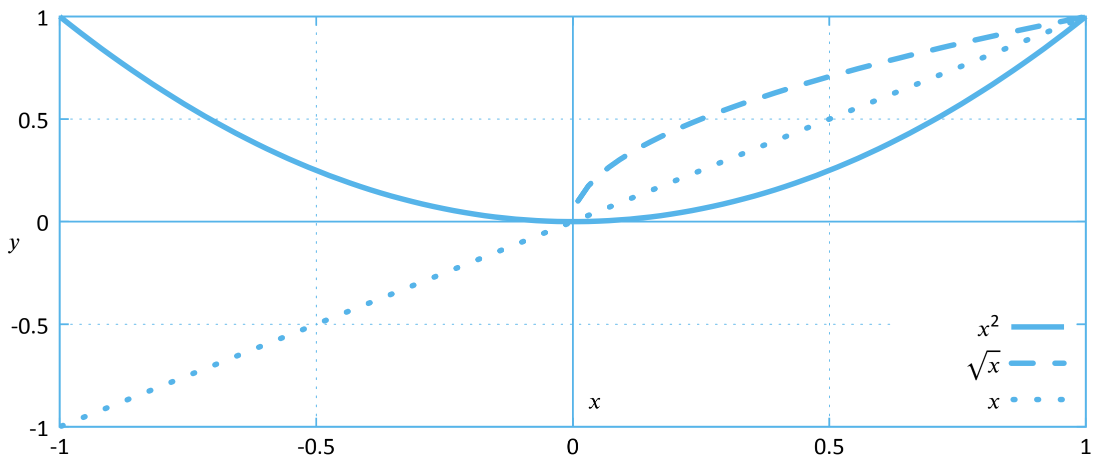



Figura 1: Varias funciones recíprocas (simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante).

Te recomendamos que visualices la siguiente video-píldora sobre composición de funciones.

Accede al vídeo: Composición de funciones

## 5.4 Tasa de variación

Definimos ahora la tasa de variación de una función.

**Definición 4: Tasa de variación de una función**

Se llama tasa de variación de una función para un incremento de la variable $h$ al incremento de la función entre el punto $x + h$ y el punto $x$ y se representa por $\Delta y$:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)\,. \tag{25}$$

Si la función es la posición de un móvil la tasa de variación será la distancia recorrida en un cierto intervalo de tiempo. Si la función mide la población, la tasa de variación de la función será el incremento o decremento de la población.

**Ejemplo 9. Tasa de variación de una función**

Sea la función $f(x) = x^2 + 2$. Calculemos la tasa de variación para un incremento $h$ de la variable independiente.

$$\Delta y = (x+h)^2 + 2 - (x^2+2) = x^2 + 2hx + h^2 + 2 - x^2 - 2 = 2hx + h^2\,. \tag{26}$$

## 5.5 Crecimiento/decrecimiento de funciones

Vamos a estudiar ahora las condiciones para que una función se pueda clasificar como *creciente* o *decreciente*.

**Definición 5: Función estrictamente creciente**

Se dice que una función es estrictamente creciente en un intervalo si se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')\,. \tag{27}$$

Si expresamos esta relación de la siguiente manera:

$$x' - x > 0 \Rightarrow f(x') - f(x) > 0\,, \tag{28}$$

es decir, que la función es estrictamente creciente si la tasa de variación de la función es positiva.

**Definición 6: Función creciente**

Se dice que una función es creciente en un intervalo si se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')\,. \tag{29}$$

En este caso la tasa de variación de la función es mayor o igual a cero:

$$\Delta y = f(x') - f(x) \geq 0\,. \tag{30}$$

En los casos de que la función sea creciente, la función va tomando valores mayores para valores mayores de la variable independiente. En el caso de que la función vaya tomando valores menores, tendremos una función decreciente.

**Definición 7: Función estrictamente decreciente**

Se dice que una función es estrictamente decreciente en un intervalo si se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \,. \tag{31}$$

En tal caso la tasa de variación de la función es negativa:

$$\Delta y = f(x') - f(x) < 0 \,. \tag{32}$$

En el caso de que se cumpla también la igualdad se habla de decrecimiento.

**Definición 8: Función decreciente**

Se dice que una función es decreciente en un intervalo si se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \,. \tag{33}$$

En tal caso la tasa de variación de la función es menor o igual que cero:

$$\Delta y = f(x') - f(x) \leq 0 \,. \tag{34}$$

## 5.6 Simetría de las funciones

Vamos a estudiar la simetría de las funciones respecto al origen y respecto a los ejes coordenados, esto es, las funciones *impares* y las funciones *pares*.

**Definición 9: Funciones impares**

Son funciones impares aquellas que satisfacen:

$$f(-x) = -f(x) \,. \tag{35}$$

Las funciones impares son *simétricas respecto al origen de coordenadas.*

**Ejemplo 10. Función impar**

Sea la función $f(x) = x^3$, se cumple para ella $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, luego se trata de una función impar, cuya gráfica es simétrica respecto al origen.

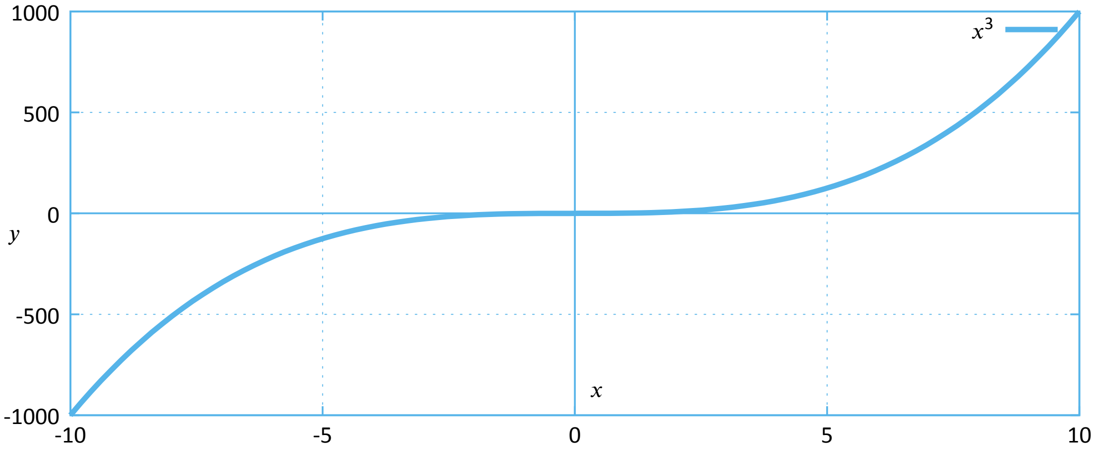



Figura 2: Ejemplo de función impar. Su gráfica es simétrica respecto al origen.

Estudiamos ahora las funciones que son *simétricas respecto al eje de ordenadas.*

**Definición 10: Funciones pares**

Una función es par, y por tanto simétrica respecto del eje de ordenadas, si se cumple:

$$f(-x) = f(x)\,. \tag{36}$$

Veamos un ejemplo de función par, cuya gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas:

**Ejemplo 11. Función par**

La función $f(x) = x^2$ es una función par, puesto que se cumple $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

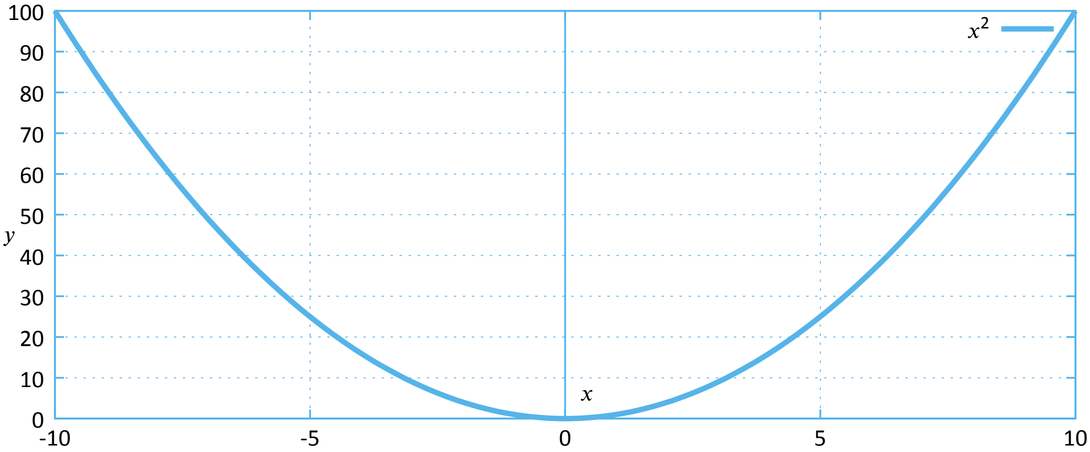


Figura 3: Ejemplo de función par. Su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Te recomendamos que visualices la siguiente video-píldora sobre simetría de funciones.

Accede al vídeo: Simetría de funciones

## 5.7 Funciones periódicas

Hay funciones cuyos valores se repiten cada cierto intervalo de la variable independiente.

**Definición 11: Función periódica**

Se dice que una función $f(x)$ es periódica, de período $T$, si se cumple:

$$f(x+T) = f(x)\,, \tag{37}$$

para todo $x$ de su dominio.

Las funciones periódicas más importantes son las circulares, el seno, el coseno y la tangente, así como sus inversas.

**Ejemplo 12. Seno**

La función seno es una función periódica de período $2\pi$, pues se verifica:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)\,. \qquad (38)$$

La periodicidad puede apreciarse en la Figura 4.

## 5.8 Funciones acotadas

Vamos a ver ahora lo que son las cotas y las funciones acotadas.

**Definición 12: Función acotada inferiormente**

Se dice que una función está acotada inferiormente cuando existe un número real $K$, denominado cota inferior, tal que todos los valores de la función son mayores que él. Es decir:

$$f(x) > K\,,$$

para todo $x$ del dominio de la función.

Definida la acotación inferior definamos ahora análogamente la acotación superior:

**Definición 13: Función acotada superiormente**

Se dice que una función está acotada superiormente cuando existe un número real $K'$, denominado cota superior, tal que todos los valores que toma la función son menores que él. Es decir:

$$f(x) < K'\,,$$

para todo $x$ del dominio de la función.

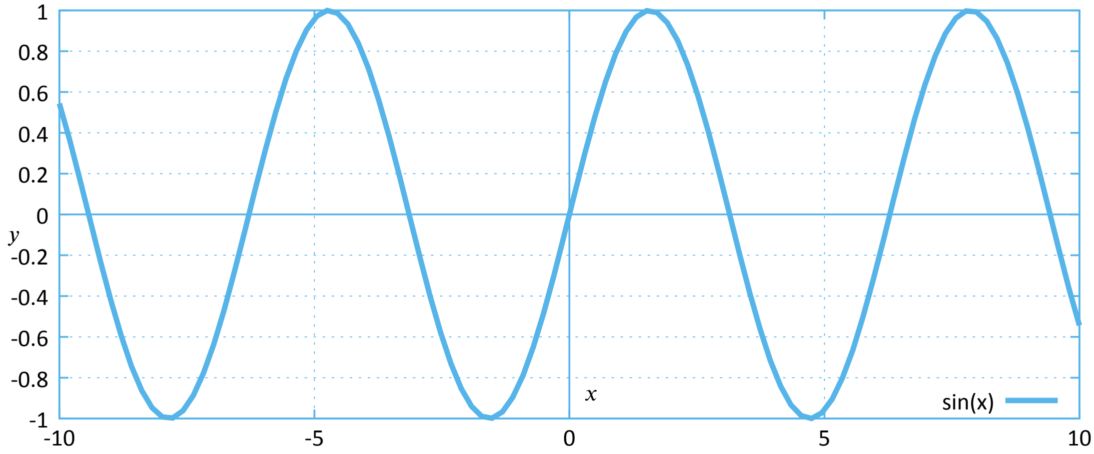



Figura 4: Gráfica de la función seno. Puede apreciarse su carácter periódico.

Pues bien, si una función está acotada inferior y superiormente se dice que está *acotada*. De las funciones que hemos estudiado, tal como puede apreciarse en sus gráficas, la función $f(x) = x^2$ está acotada inferiormente (Figura 3), la función $f(x) = x^3$ no está acotada ni superior ni inferiormente (Figura 2), y la función seno $f(x) = \sin(x)$ está acotada (como puede apreciarse en Figura 4).

Un repaso adicional a todo lo visto en este tema lo tienes disponible en (Contreras & del Pino, 2010).

## 5.9 Referencias bibliográficas


Contreras, J. & del Pino, C. (2010). Funciones y gráficas. In *Modelos matemáticos y funciones*. Universidad de Talca: Instituto de Matemática y Física.


## 5.10 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios relacionados con lo visto en este tema.

**Ejercicio 1.** Halla la función recíproca de $y = 2x + 5$. *Solución*: $y = \frac{x-5}{2}$.

**Ejercicio 2.** Sea la función $f(x) = |x|$. Determina si es par o impar. *Solución*: par.

**Ejercicio 3.** Determina el período de la función $f(x) = \sin(2x)$. *Solución*: $\pi$.