Física I

Cinemática de la partícula. Conceptos básicos y ecuaciones fundamentales

Índice

Esquema

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA. CONCEPTOS BÁSICOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

Cinemática: estudio del movimiento **sin atender a sus causas**

El movimiento es relativo: es necesario definir siempre un **sistema de referencia**

Trayectoria: curva que recorre el móvil en su desplazamiento. Concepto fundamental de la cinemática clásica, de donde se extrae toda la información necesaria sobre el movimiento. Determinada por el **vector de posición**

Velocidad media:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea: límite vel. media si intervalo tiende a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

El vector velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria

Aceleración media:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea: límite acel. media si intervalo tiende a cero

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración instantánea se descompone en:
Aceleración tangencial: modifica el módulo de la velocidad
Aceleración normal: modifica la dirección de la velocidad

Ecuaciones básicas

Movimiento rectilíneo:

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Equivalencias:

θ equivale a e
ω equivale a v
α equivale a a

Movimientos generales:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Movimiento circulares:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

2.1. Introducción y objetivos

Tras haber introducido, en el tema anterior, una serie de conceptos generales necesarios para entender cuestiones como las unidades de medida, el cálculo de errores o elementos matemáticos, en este tema se abordan los primeros modelos físicos operativos.

Tras el estudio y la asimilación de los conceptos descritos en este tema serás capaz se:

- Comprender que el movimiento es relativo, en el sentido de que siempre hay que referirlo a un sistema de referencia.
- Asimilar el concepto de trayectoria, saber identificarlas en movimientos reales y comprender su importancia.
- Saber cómo define la física la velocidad de un móvil.
- Comprender qué es la aceleración, cómo y por qué se descompone y cómo la define la física.
- Conocer las ecuaciones básicas de la cinemática, con objeto de poder aplicarlas a problemas reales.

2.2. Introducción. ¿Qué es la cinemática?

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento por sí mismo, sin preocuparse por las causas que lo producen.

La cinemática se considera una parte de la mecánica, aquella dedicada al estudio exclusivo del movimiento en sí mismo. A la cinemática no le interesa qué produce el movimiento, solamente la descripción de este. A la hora de calcular, por ejemplo, el tiempo que está en el aire un balón golpeado por un futbolista, en cinemática carece de interés si el futbolista golpeó la pelota con más o menos fuerza, si la transmisión de energía de la pierna a la pelota fue completa o se perdió parte por la elasticidad del balón.

La cinemática partirá del hecho de que, tras haber sido golpeada, la pelota tendrá una velocidad inicial determinada y que empezó a moverse a partir de un punto concreto. Los resultados que dará serán tiempos, distancias, velocidades y aceleraciones, sin que pueda ofrecer información acerca de las fuerzas involucradas en el movimiento.

La cinemática se basa en tres conceptos básicos: **espacio, tiempo y móvil**. Las ecuaciones cinemáticas están referidas a un móvil y permiten relacionar y calcular el espacio que recorre el cuerpo y el tiempo en que lo hace. Normalmente, los problemas cinemáticos son de **tres tipos**:

- Conociendo la posición inicial, la velocidad inicial, el momento de partida y las aceleraciones que pudieran afectar al movimiento, se calculan todos estos datos en un momento final dado.
- Conociendo la posición final, velocidades, aceleraciones y otros datos finales, averiguar velocidades iniciales, puntos de partida, etc.
- Problemas mixtos: sabiendo algunas condiciones iniciales y otras finales, averiguar el resto.

En cinemática clásica, la rama que se estudia en este tema, se hacen varias suposiciones, que otras ramas de la física definen como incorrectas. En particular que existen un espacio y un **tiempo absolutos**. Se supone que el espacio es algo inmutable, que existe con anterioridad a los móviles y no se ve afectado por estos. Y, también, que el tiempo transcurre de la misma forma a lo largo de todo el espacio.

Aunque ramas modernas de la física, como la relatividad, han demostrado la inexistencia de un tiempo y un espacio absolutos, bajo las condiciones en que se suele usar la cinemática clásica, esto es, velocidades reducidas (como mucho, el 10 % de la velocidad de la luz) y lugares donde la gravedad no es lo bastante fuerte como para alterar el espacio, esas suposiciones son bastante precisas. Por ejemplo, para estudiar movimientos sobre la superficie de la Tierra, es una aproximación muy buena.

La cinemática clásica se basa en el concepto de **trayectoria**, que se expone en el siguiente apartado.

2.3. Relatividad del movimiento. Sistemas de referencia y concepto de trayectoria

Aunque se haya hablado antes de espacios y tiempos absolutos, **en cinemática todo movimiento es relativo**, en el sentido de que estará referido a un punto determinado, que se considera «fijo». Dicho de otro modo, si un móvil se desplaza a 25 m/s, será siempre con respecto a una posición determinada (la posición del observador, un edificio, etc.). Por tanto, un primer paso a la hora de describir un movimiento en física será definir con respecto a qué punto se miden posiciones y velocidades. Ello se hace fijando un sistema de referencia.

Sistemas de referencia

En cinemática clásica, un sistema de referencia se define como un punto, denominado origen, en el cual se cruzan tres rectas, perpendiculares entre sí, denominadas ejes cartesianos.

La definición de sistema de referencia es muy similar a la que se hace en matemáticas para definir los ejes de coordenadas en el espacio. En cinemática, hay que ser consciente de que la elección del sistema de referencia es arbitraria. Ello implica que un mismo movimiento puede describirse desde distintos sistemas de referencia. No obstante, como el fenómeno físico que se está describiendo es el mismo, aunque desde cada sistema de referencia las cosas se verán de manera diferente, será posible conciliar las observaciones realizadas desde cada uno de ellos.

Según lo dicho anteriormente, esto implica que se puede elegir un sistema que se mueva con respecto a otro, o que esté girando respecto a otro. Dados dos sistemas de referencia pueden darse las siguientes situaciones:

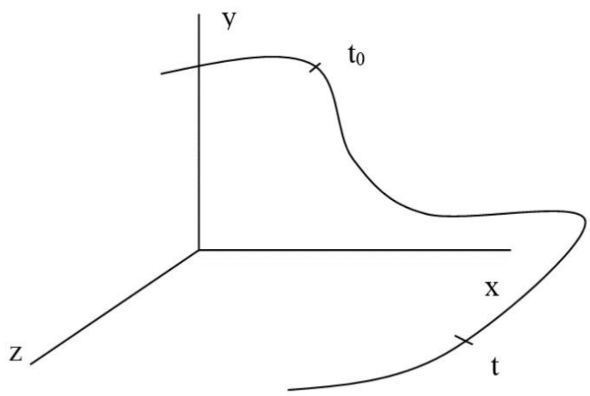
Se desplazan uno respecto del otro	Rotan uno respecto del otro	Comentarios
NO	NO	El caso más sencillo. Los ejes pueden ser paralelos o no.
SI	NO	Los ejes pueden ser paralelos o no. Un ejemplo sería un sistema de coordenadas fijo en la Tierra y otro que está dentro de un tren y se mueve con él.
NO	SI	Un ejemplo sería un sistema de referencia fijo en la superficie de la tierra y otro situado en el eje de giro de un tiovivo.
SI	SI	El caso más complejo y general.

A veces, resulta más conveniente utilizar un sistema de referencia en movimiento en vez de uno que esté fijo en la superficie de la Tierra, por ejemplo, si se hacen experimentos en un tren en marcha. De ahí que sea necesario saber que es posible hacerlo. Debido a que no es muy común, en problemas prácticos, considerar varios sistemas de coordenadas y, por tanto, necesitar cambiar de uno a otro, no se hablará más de esta cuestión en este tema.

Concepto de trayectoria

En cinemática clásica, la curva que recorre un móvil en el espacio al desplazarse se denomina trayectoria. La existencia de una trayectoria que es posible determinar exactamente es la base de la cinemática clásica.

La trayectoria de un móvil, y la asignación de cada punto de la misma a un instante de tiempo determinado, da toda la información necesaria para describir el movimiento de un cuerpo. De ahí la importancia que tiene este concepto.



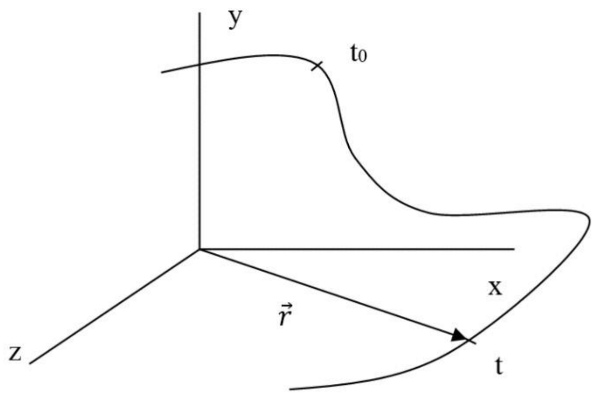
Como se desprende de la figura, aunque la trayectoria de un móvil sea la misma, en función de la posición del origen y los ejes del sistema de referencia que se escoja, las coordenadas asociadas a cada punto de la trayectoria variarán. Por ello, antes de describir la trayectoria de un móvil, será necesario fijar el sistema de referencia. Una vez definido el sistema de referencia a utilizar, el movimiento quedará descrito por tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Estas expresiones dan las tres coordenadas cartesianas de un móvil para cada instante de tiempo t.

La trayectoria puede expresarse de una manera equivalente más útil, lo que requiere definir un concepto nuevo.

Se define vector de posición de un móvil en el instante t al vector que une el origen del sistema de referencia considerado con el punto de la trayectoria en que se halla el cuerpo en el instante t. Se denota por $\vec{r}$..



Es fácil reparar en que el vector de posición genérico de un móvil está dado por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Como el vector de posición es el elemento matemático que contiene toda la información posible sobre el movimiento, conocer su expresión para todo instante de tiempo en el que estemos interesados implica saber todo acerca de cómo se desplaza el móvil. Conocido el vector de posición, se pueden calcular la velocidad y la aceleración sin muchos problemas.

No obstante, a la hora de usar la cinemática, no se tendrá, normalmente, toda la información necesaria y habrá que aplicar determinadas fórmulas para calcular las magnitudes de interés. Además, existen otros conceptos que hay que conocer para poder emplear las ecuaciones de la cinemática.

2.4. La velocidad

La velocidad es, quizá, la magnitud cinemática más cotidiana. Aunque los conceptos de trayectoria, tiempo y posición son bastante intuitivos, en la vida diaria se presta más atención a la velocidad —aunque sea para evitar multas cuando se conduce un automóvil—.

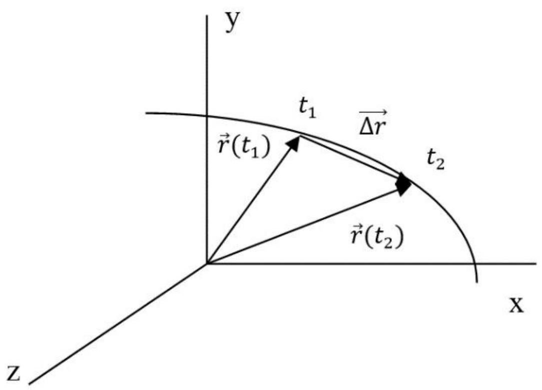
En esta parte del tema se define la velocidad tal y como debe emplearse en cinemática.

Concepto previo: vector desplazamiento

Para definir matemáticamente la velocidad es necesario conocer un concepto previo:

Se define **vector desplazamiento** entre los instantes t_1 y t_2 como el vector obtenido tras restarle al vector de posición en el instante t_2 el vector de posición en el instante t_1. Se expresa como $\Delta r^{\rightarrow}$ y se calcula:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



El vector desplazamiento da la diferencia en las posiciones de un móvil entre dos instantes. Como se desprende de la figura, en el caso general, su módulo no dice la distancia recorrida en realidad por el móvil, ya que la distancia recorrida ha de medirse sobre la trayectoria entre ambos puntos, y no coincide con el segmento que representa al vector. Es obvio comprobar que si la trayectoria es una línea recta, entonces el módulo del vector desplazamiento sí equivale a la distancia recorrida por el móvil.

Puede parecer, por tanto, que este concepto no es práctico ni realista, salvo para movimientos rectilíneos. Sin embargo, es una impresión errónea, puesto que la velocidad se define en función de este vector.

Hay que tener en cuenta una cuestión adicional al definir la velocidad. Si se toma como ejemplo un automóvil que se desplaza de una ciudad a otra por autovía, donde la velocidad está limitada a 120 km/h, si ha recorrido 300 km en 3 horas, se podría afirmar que su velocidad media habrá sido de 100 km/h. Sin embargo, esto no implica que en cada momento su velocidad haya sido esa. De hecho, en cada instante, es posible que haya tenido una velocidad distinta. En varios tramos, el vehículo se habrá desplazado a 120 km/h, en otros, al encontrarse con un camión que circule más despacio, por ejemplo, habrá tenido que reducir su velocidad. Ello implica la existencia de, al menos, dos tipos de velocidad: la media de todo el recorrido y la que el automóvil llevaba en cada instante, que se puede llamar instantánea. La cinemática formaliza ambos conceptos.

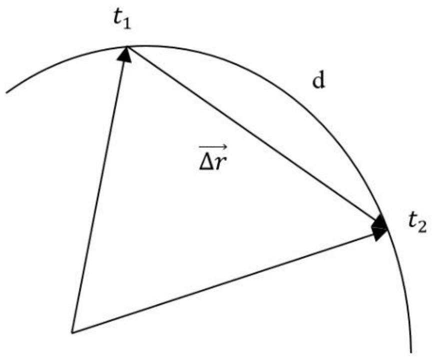
Definición de velocidad media

La velocidad media de un móvil entre los instantes t_1 y t_2 es el vector definido como el cociente entre el vector desplazamiento entre ambos tiempos y el intervalo transcurrido: $\Delta t = t_2 - t_1$. Se puede escribir como:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

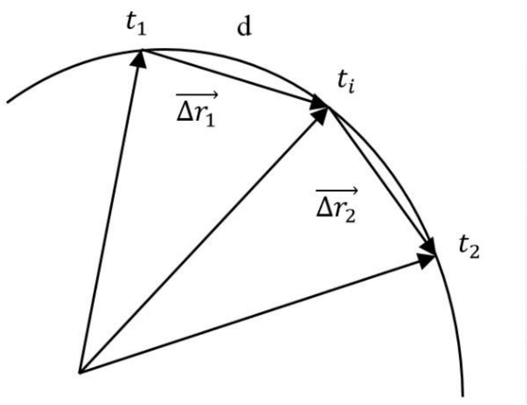
La velocidad media recién definida es una formalización del concepto cotidiano que incluye la dirección de esa velocidad promedio entre dos instantes de tiempo.

Sin embargo, esta definición presenta un problema. Si se quiere calcular la velocidad media de un autobús a lo largo de una curva, la definición lógica (y correcta) de módulo de la velocidad implicaría dividir la distancia recorrida sobre la curva entre el tiempo consumido al recorrerla. Pero el módulo de la velocidad media, según la definición cinemática, será la longitud del vector desplazamiento, que será menor que la distancia realmente recorrida, como se desprende del gráfico siguiente:



La longitud «d» del arco de la trayectoria es distinta a la longitud del vector desplazamiento. Por tanto, el módulo de la velocidad media será menor que la velocidad media real en el ejemplo del gráfico.

No obstante, a la vista de la figura, resulta obvio que se puede mejorar el resultado si se consideran intervalos de tiempo cada vez más pequeños para el cálculo de la velocidad media. Si en vez de calcular la velocidad media entre t_1 y t_2 se divide ese intervalo introduciendo ti, un instante intermedio, se logra una aproximación mejor al recorrido real del móvil:



Este hecho es la base de la definición de velocidad instantánea.

Definición de velocidad instantánea

La **velocidad instantánea** de un móvil en un punto se define como el límite de la velocidad media en ese punto cuando se hace tender a cero el intervalo de tiempo utilizado para el cálculo de la velocidad media. Esto es:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Puede comprobarse que la velocidad instantánea representa el cambio del vector de posición con respecto al tiempo.

El concepto de velocidad instantánea está basado en que mientras más pequeño es el intervalo de tiempo utilizado para calcular la velocidad media más exacto es el cálculo. En el **límite de un intervalo nulo**, se obtiene el valor más exacto. Puede demostrarse que al considerar un intervalo que tiende a cero, se está efectuando la operación matemática de derivar el vector de posición con respecto al tiempo. Como el vector de posición será, normalmente, una función explícita del tiempo, su derivada será otra función del tiempo, y se podrá conocer la velocidad en cada instante sustituyendo en la función resultante el valor del tiempo que se desee.

La velocidad instantánea es un vector tangente a la trayectoria cuyo sentido coincide con el del movimiento. En el caso de una trayectoria rectilínea, el vector velocidad se encuentra sobre la línea que describe la misma. Es importante destacar que, en cada punto de la trayectoria, existe un vector velocidad instantánea que expresa la experimentada por el móvil en cada instante.

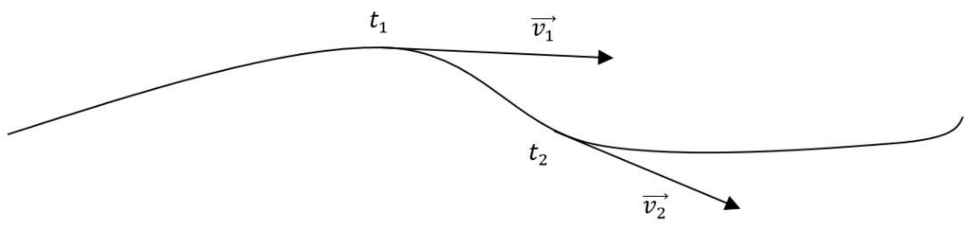
En la vida cotidiana, apenas se producen situaciones en las que la velocidad no cambie. Lo más habitual es partir del reposo con una velocidad determinada que, después, aumenta o disminuye. Por ejemplo, una persona que se levanta y camina unos metros para detenerse al final, no ha llevado la misma velocidad en casi ningún momento. Por ello, introducir un último concepto para tratar sistemas donde la velocidad varía.

2.5. La aceleración. Componentes intrínsecas

La aceleración es el concepto cinemático que permite cuantificar el **cambio que sufre la velocidad de un móvil a lo largo de su trayectoria**. El procedimiento para definirlo es similar al que siguió con la velocidad.

Aceleración media

En cada punto de la trayectoria de un móvil se puede definir un vector velocidad instantánea, que normalmente será diferente en cada punto de la misma.



Por ello, se define:

La **aceleración media** de un móvil entre los instantes t_1 y t_2 es el vector definido como el cociente entre la resta vectorial de la velocidad instantánea, en cada uno de los instantes, y el intervalo transcurrido: $\Delta t = t_2 - t_1$. Se puede escribir como:

$$\vec{a_m} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Debe tenerse en cuenta que la aceleración media mide **dos tipos de cambio de la velocidad**: el cambio en su módulo (que pase, por ejemplo, de 5 m/s a 9 m/s) y el cambio en su dirección. Así, aunque el módulo de la velocidad de un móvil se mantenga siempre en un valor fijo, si la velocidad cambia de dirección existirá una aceleración. De hecho, la aceleración denota cualquier cambio del vector velocidad instantánea a lo largo del tiempo.

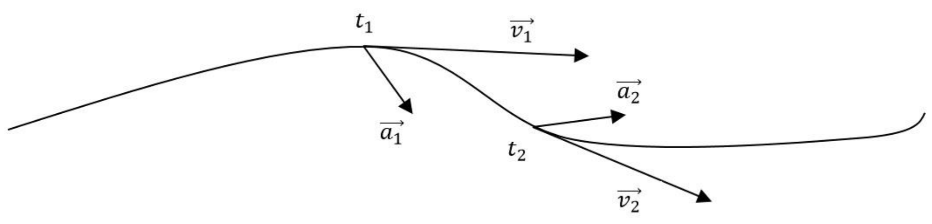
La definición de aceleración media, a pesar de que es muy intuitiva, tiene el mismo problema que presentó la velocidad media: su valor depende del intervalo de tiempo elegido y variará bastante en función de esa elección. Por ello, para asegurar una precisión mayor, se hace un paso al límite, como con la velocidad.

Aceleración instantánea

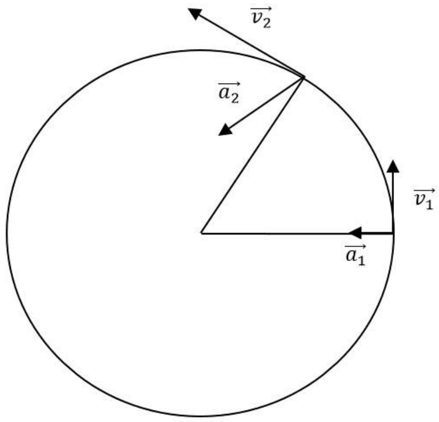
La **aceleración instantánea** de un móvil en un punto se define como el límite de la aceleración media en ese punto cuando tiende a cero el intervalo de tiempo empleado para calcular la aceleración media. Esto es:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración instantánea, como su propio nombre indica, mide el cambio instantáneo que experimenta la velocidad. Es un vector que apuntará hacia la concavidad de cada tramo de la curva, como puede verse en la figura:



Si en una trayectoria general, la velocidad no cambia en módulo durante un tramo, en esos puntos el vector aceleración apuntará directamente al centro de curvatura de la trayectoria. Si se considera, por ejemplo, una trayectoria circular, la aceleración apuntará al centro de la circunferencia siempre que la velocidad permanezca constante en módulo. Si no es así, el vector aceleración estará desplazado un poco en la dirección del cambio de la velocidad, como se comprueba en la figura:

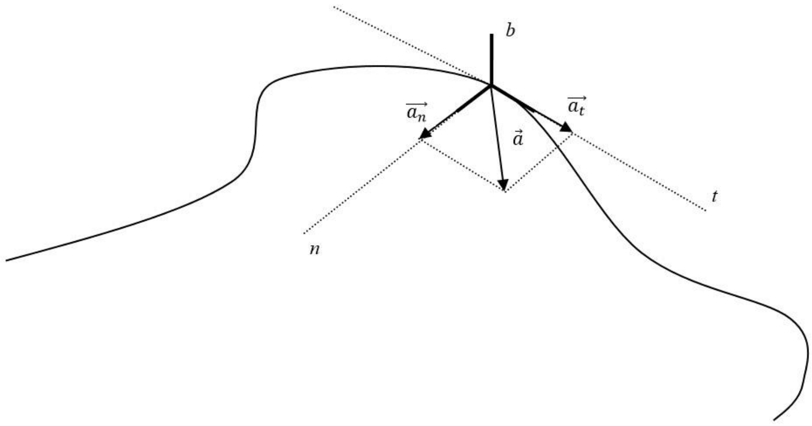


La aceleración $\overrightarrow{a_1}$ corresponde al caso de que no haya cambio en el módulo de la velocidad, mientras que la $\overrightarrow{a_2}$ implica que la velocidad, además de cambiar de dirección está aumentando en módulo.

Se intuye, a la vista de estos hechos, que la aceleración tiene dos efectos que se pueden superponer. Por un lado, modifica la dirección de la velocidad; por el otro, modifica el módulo de la misma, ya sea aumentando la velocidad, o acelerando el móvil en lenguaje coloquial, o reduciéndola, esto es, frenándolo. Esta intuición se puede formalizar y, de hecho, se comprenderá la importancia de hacerlo en temas posteriores. De esto trata el siguiente apartado.

Componentes intrínsecas de la aceleración

Sea una trayectoria general, como la descrita en la figura siguiente:



En todo punto de la trayectoria será posible definir el sistema de ejes que se puede ver en la figura. Este sistema tiene el eje denominado *t* coincidente con una tangente a la trayectoria en el punto considerado, en la misma dirección que tiene el vector velocidad instantánea en ese punto. El eje llamado *n* une el punto considerado con el centro de curvatura de la trayectoria en tal posición. El centro de curvatura tiene una definición matemática rigurosa que excede el objetivo de este curso; es el punto que correspondería al centro en torno al que parece girar cada sección de la trayectoria y, por tanto, varía en cada tramo, salvo si la trayectoria es una circunferencia, caso en el que el centro de curvatura se halla en el centro de la misma. Finalmente, el eje *b* es perpendicular a los otros dos.

Puede comprobarse que la aceleración siempre estará confinada en el plano formado por los ejes *n* y *t*, plano que suele variar de orientación en cada punto de la trayectoria (una excepción es, de nuevo, una trayectoria circular, en la cual, el plano creado por los ejes n y t coincide con el plano que contiene a la trayectoria). Por ello, siempre será posible escribir la aceleración $\vec{a}$ en dos componentes, cada una paralela a cada uno de estos dos ejes: $\vec{a_t}$ que está sobre el eje *t* y se denomina **aceleración tangencial** y $\vec{a_n}$, componente en el eje n que se llama **aceleración normal**.

La importancia de estas dos aceleraciones es que puede demostrarse que el efecto exclusivo de la aceleración tangencial es aumentar o reducir el módulo de la velocidad, en función de si va en la misma dirección de esta o en la contraria. Asimismo, la aceleración normal tendrá el único efecto de cambiar la dirección de la velocidad. Esto permite conocer la naturaleza de diversos movimientos sin más que descomponer la aceleración en estas dos componentes.

Por ejemplo, en una trayectoria circular, si la aceleración tangencial es nula, se tendrá un movimiento de rotación donde la velocidad de giro se mantiene constante, mientras que si la aceleración tangencial fuese no nula y orientada en el sentido del giro, se tendría un móvil que rota cada vez más rápido.

Las expresiones de los módulos de ambas aceleraciones son:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Donde *v* es el módulo de la velocidad instantánea y *r* el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado. Para el caso de un movimiento circular, r es el radio de la circunferencia.

2.6. Ecuaciones básicas de la cinemática

Una vez definidos los conceptos esenciales, es posible construir las ecuaciones básicas que permitirán resolver problemas y aplicar estos conceptos a casos reales. Esta sección se divide en **dos grandes apartados**, aunque se subdivida en más:

- Exposición de las ecuaciones cinemáticas generales.
- Exposición de las ecuaciones cinemáticas para movimientos giratorios.

Para el segundo caso, habrá que introducir magnitudes nuevas, si bien, serán análogas a sus equivalentes para movimientos generales.

A partir de aquí, solo se tratarán movimientos con aceleración constante. La cinemática puede tratar movimientos en los que la aceleración varía, no obstante, ello requiere de conocimientos matemáticos bastante sólidos (derivación e integración) y, a menudo, son problemas cuya complejidad excede los objetivos de una introducción a la física. Por otro lado, la mayoría de problemas de interés consideran aceleraciones constantes.

Ecuaciones cinemáticas para movimientos rectilíneos con aceleración constante

Se definirán las ecuaciones cinemáticas partiendo del caso más simple, para irlas construyendo paso a paso. Dado que la aceleración no varía, serán necesarias **dos tipos de ecuaciones**:

- Ecuación para calcular el espacio.
- Expresión para calcular la velocidad.

El caso más sencillo de movimiento es el movimiento rectilíneo.

Un movimiento rectilíneo es aquel cuya trayectoria es una línea recta.

Antes de proseguir, hay que destacar algo esencial:

A la hora de estudiar un movimiento, es necesario fijar un instante inicial, denotado normalmente por t_0, y una posición inicial del móvil.

El caso más simple de movimiento es aquél en el que la velocidad del móvil es constante. Al tener una trayectoria rectilínea, no es necesario preocuparse de la inexactitud del vector desplazamiento, ni trabajar con vectores. La ecuación básica en este caso es:

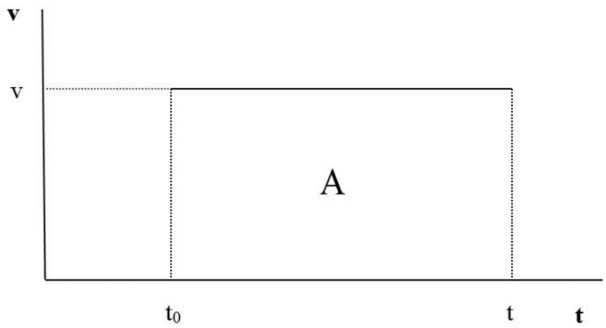
$$v = \frac{e - e_0}{t - t_0}$$

Donde e0 es la posición del móvil en el instante t0. La única ecuación en este caso se obtiene despejando el espacio:

$$e = e_0 + v(t - t_0)$$

Esta fórmula da la distancia, respecto del origen de coordenadas e, a la que está el móvil en el momento *t*. Tanto e_0 como t_0 pueden hacerse cero si se elige $t_0=0$ y se considera que el móvil parte del origen de coordenadas.

Si existe una aceleración no nula, habrá que utilizar dos ecuaciones. Para entender la demostración, es necesario conocer el concepto de gráfica v-t y su utilidad a la hora de calcular el espacio recorrido. Para un movimiento a velocidad constante, la gráfica v-t tiene un aspecto similar al siguiente:



A la vista de la ecuación deducida anteriormente, $\mathrm{e} = \mathrm{e}_0 + \mathrm{v}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$, el espacio recorrido por el móvil entre t_0 y t es el área A, la descrita por la curva (recta en este caso) de la velocidad en el diagrama v-t, ya que el área de ese rectángulo es $v(t - t_0)$. Hay que tener en cuenta que e0 marca la posición original del móvil y que la distancia recorrida entre t_0 y t es el segundo sumando.

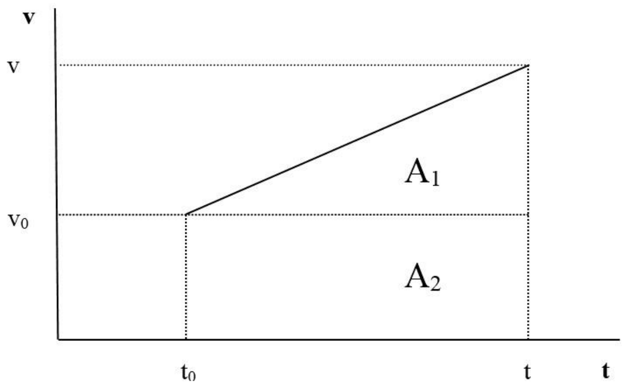
Si existe una aceleración **constante**, dado que esta mide la tasa de cambio de la velocidad, es posible escribir:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

De donde, si se despeja v:

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

Falta una expresión para calcular el espacio. Para deducirla hay que reparar en la forma que tiene la gráfica v-t en un movimiento con aceleración constante:



El área que hay debajo de la curva de la velocidad en el gráfico se divide en dos partes: un triángulo (A_1) y un rectángulo (A_2). Como el espacio recorrido por el móvil entre t_0 y t será la suma de ambas áreas, se tiene:

$$A_1 = \frac{1}{2}(t - t_0)(v - v_0)$$
$$A_2 = v_0(t - t_0)$$

Por ello, el espacio recorrido puede escribirse:

$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)(v - v_0)$$

Usando la fórmula precedente para obtener la velocidad en función de la aceleración, se tiene:

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

Con lo que se obtiene, al final:

$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Con estas dos ecuaciones recuadradas, en principio, será posible resolver cualquier problema de cinemática con trayectorias lineales y aceleración constante.

Ecuaciones cinemáticas para movimientos generales con aceleración constante

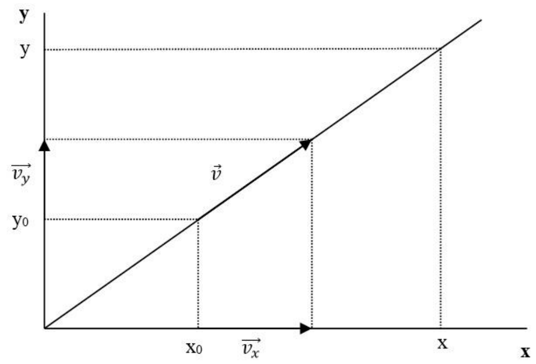
Las ecuaciones deducidas en la sección «Ecuaciones cinemáticas para movimientos rectilíneos con aceleración constante» pueden generalizarse a trayectorias generales utilizando una técnica derivada de las dos expresiones de la trayectoria definidas en la sección «Concepto de trayectoria». Esta técnica suele denominarse **composición de movimientos**:

Todo movimiento puede descomponerse en tres movimientos rectilíneos, cada uno en la dirección de cada eje de coordenadas del sistema de referencia. Estudiar un movimiento analizando los diversos movimientos rectilíneos en cada eje se denomina composición de movimientos.

La explicación es sencilla. Dado que una trayectoria se escribe matemáticamente como:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Es evidente que *x (t)* conforma un movimiento rectilíneo a lo largo del eje *x*, al igual que hacen *y(t)* y *z(t)*. Se expone un ejemplo para aclararlo, en un plano por simplicidad. Sea el movimiento de la figura:



Es fácil ver que el movimiento del cuerpo, que trascurre en una línea recta entre los ejes *x* e *y*, puede describirse como la composición de un movimiento horizontal y otro vertical cuyas velocidades son las proyecciones de la velocidad total en cada uno de los ejes.

Como todas las magnitudes cinemáticas pueden expresarse como vectores y los vectores tienen tres componentes, una para cada eje coordenado, es posible generalizar las ecuaciones de la cinemática para movimientos con aceleración constante de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Sabiendo que la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración pueden escribirse así:

$$\overrightarrow{r_0} = x_0\,\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\,\vec{\imath} + v_{0y}\,\vec{\jmath} + v_{0z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{\imath} + a_y\,\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

Las dos ecuaciones básicas quedan:

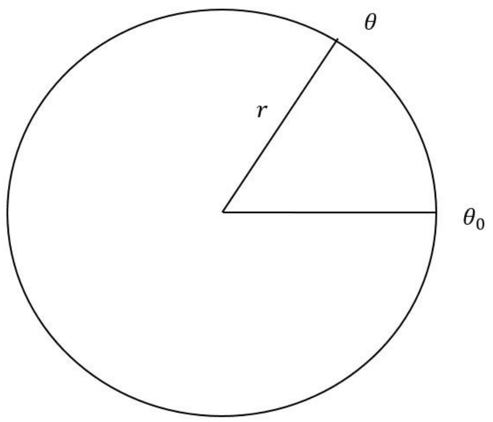
$$\vec{r} = \left(x_0 + v_{0x}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a_x(t - t_0)^2\right)\vec{\imath} + \left(y_0 + v_{0y}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a_y(t - t_0)^2\right)\vec{\jmath} + \left(z_0 + v_{0z}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a_z(t - t_0)^2\right)\vec{k}$$

$$\vec{v} = (v_{0x} + a_x(t - t_0))\vec{\imath} + (v_{0y} + a_y(t - t_0))\,\vec{\jmath} + (v_{0z} + a_z(t - t_0))\vec{k}$$

Como puede comprobarse, en cada componente del vector de posición y del vector velocidad están las ecuaciones escalares de los movimientos rectilíneos, lo que permite trabajar, en muchos casos, con las ecuaciones escalares del movimiento rectilíneo aunque los movimientos estudiados no lo sean.

Descripción de las magnitudes usadas en movimientos circulares

Un caso particular e interesante de movimiento es aquél en el que el móvil describe una trayectoria circular. A la hora de estudiar movimientos circulares, se suelen definir una serie de magnitudes específicas que facilitan el trabajo. Un movimiento circular podría tratarse perfectamente con los conceptos generales y las magnitudes definidas anteriormente; el problema es que el cálculo sería mucho más complejo que utilizando los métodos que se describen a continuación.



La primera magnitud que se define para estudiar el movimiento circular es el ángulo recorrido por el móvil. En el Sistema Internacional de Unidades, habrá que expresar los ángulos en **radianes**. Convertir de grados sexagesimales (la unidad cotidiana) a radianes es fácil si se nota que un círculo completo son 2π radianes o 360º. Así, basta multiplicar la cantidad en grados por π/180. Por ejemplo, si un móvil da dos vueltas completas, habrá recorrido 4π radianes.

El concepto de ángulo recorrido equivale al de distancia recorrida por un móvil en la cinemática general. Debe destacarse que si el ángulo está expresado en radianes, la distancia que ha recorrido un móvil al desplazarse un ángulo θ está dada por $r\vartheta$ donde r es el radio de la trayectoria circular seguida por el móvil.

Intuitivamente, mientras más rápido recorra un móvil un ángulo dado, más rápido se dirá que gira. Por ello, a partir del ángulo recorrido se define la velocidad angular:

Se denomina **velocidad angular** y se denota por ω al ángulo que ha recorrido un móvil dividido por el tiempo que ha tardado en recorrerlo:

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

En el SI sus unidades son el rad/s.

Otra unidad de uso común para la velocidad angular son las revoluciones por minuto (r. p. m.) que se definen como las vueltas completas que da un móvil cada minuto. Fueron unidades muy populares porque los discos de música antiguos, de vinilo, rotaban a 33 r. p. m. o a 45 r. p. m. Para convertir r. p. m. a rad/s basta multiplicar por 2π (una vuelta son 2π rad) y dividir por 60 (un minuto son 60 segundos).

El concepto de velocidad angular es equivalente al de velocidad en cinemática general. Ambos conceptos están, asimismo, relacionados en módulo:

$$v = \omega\, r$$

Para distinguirlos, es frecuente hablar de velocidad angular y de velocidad lineal, usando esta última denominación para tratar la velocidad tal y como se definió en el apartado 2.4. Por otro lado, el vector velocidad lineal en un movimiento circular es un vector tangente a la circunferencia de giro y orientado hacia el sentido en el que se está girando.

Es evidente que un móvil que gira en torno a un punto puede hacerlo a velocidades angulares diferentes en distintos puntos del trayecto. Ello implica la definición del concepto de aceleración angular.

Se denomina **aceleración angular** y se denota por α al cambio en la velocidad angular producido durante un intervalo de tiempo determinado:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

En el SI sus unidades son el rad/s^2.

Este concepto es equivalente al de aceleración lineal en la cinemática general.

A la hora de hablar de la relación entre velocidad lineal y angular, se estableció una relación sencilla entre el módulo de la velocidad lineal y el valor de la velocidad angular.

Para el caso de la aceleración angular, la relación no es tan simple, ya que el vector aceleración para un movimiento circular no es ni tangente ni normal a la trayectoria, y debe descomponerse como se estudió en el apartado 2.5. Además, aunque la aceleración angular sea nula, la aceleración lineal en un movimiento circular no lo será nunca, ya que ha de existir una aceleración lineal normal, dirigida hacia el centro del giro, que es la que mantiene al móvil girando en círculos.

Aunque la aceleración angular sea nula, siempre existe una aceleración normal, esto es, dirigida al centro de giro, al centro de la circunferencia que conforma la trayectoria, cuyo módulo es:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

Este concepto será muy importante en lecciones posteriores, aunque en los problemas de cinemática de interés no tenga demasiada utilidad.

Finalmente, se tiene que destacar que la velocidad y la aceleración angular son también magnitudes vectoriales.

Ecuaciones cinemáticas de los movimientos circulares para aceleraciones angulares constantes

Las ecuaciones básicas del movimiento circular se pueden deducir de manera muy similar a como se hace con sus equivalentes lineales. Como se ha apuntado antes, existe una relación entre las ecuaciones de los movimientos rectilíneos con aceleración constante y las equivalentes para los movimientos circulares. Esta relación se basa en las siguientes equivalencias:

Magnitud lineal	Magnitud angular
Espacio (e)	Ángulo recorrido (ϑ)
Velocidad (v)	Velocidad angular (ω)
Aceleración (a)	Aceleración angular (α)

Así, las ecuaciones fundamentales que rigen el movimiento circular, expresado en las magnitudes angulares, tienen la siguiente forma:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Del todo análoga a las ecuaciones escritas para los movimientos rectilíneos con aceleración constante.