Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Lista 5 - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear

1. Entre as funções dadas abaixo, verifique quais são transformações lineares.
   (a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T(x,y) = (x^2, y)$.
   (b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T(x,y) = (x, x+1)$.
   (c) $T: \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R}); T(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x+y \end{bmatrix}$.
   (d) $T: \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}); T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = bx^2 + cx + d$.
2. Considere a aplicação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x + ky, x + k, y)$. Verifique em que casos T é linear: $k = x$, $k = 0$, $k = 1$, $k = y$.
3. Encontrar a imagem do quadrado de vértices $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$ e $P_4 = (1,1)$ pela transformação linear dada por $T(x,y) = (-x + 2y, 2x - y)$. Esboce um desenho.
4. Seja $T: U \to V$ transformação linear tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$. Calcular em função de u e v :
   (a) $T(u+v)$
   (b) $T(3v)$
   (c) $T(4u - 5v)$.
5. Seja $T: U \to V$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais reais. Mostre que
   (a) Se T é transformação linear, então $T(0_U) = 0_V$.(Transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo).
   (b) T é transformação linear se, e somente se $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, para quaisquer $u, v \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
6. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$.
   (a) Determine $T(x,y,z)$.
   (b) Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3,-2)$.
   (c) Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (0,0)$.
7. Encontrar a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva um ponto (x,y) em:
   (a) Sua reflexão em torno da reta $y = -x$.
   (b) Sua reflexão através da origem.
   (c) Sua projeção ortogonal sobre o eixo x.
8. Achar a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que leva o ponto (x,y,z) em sua reflexão através do plano xy.
9. Dadas as transformações lineares $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, determine para cada uma delas:
   (i) Determinar o núcleo, uma base para este subespaço e a sua dimensão. T é injetora? Justifique.
   (ii) Determinar a imagem de T, uma base para este subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justifique.

(iii) Quais dos seguintes vetores $(1,-1,1)$, $(0,0,0)$, $(-3,3,3)$ pertencem ao núcleo de T na letra b.

(a) $T(x,y) = (x+y, x, 2y)$

(b) $T(x,y,z) = (x+y, y+z)$.

10. Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem da transformação linear $T : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definida por $T(X) = MX - XM$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Considere $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $T(x,y,z) = (x,y,0)$. Qual é o núcleo e a imagem da transformação linear? Neste caso, o que representam estes conjuntos geometricamente? Qual a relação entre a dimensão da imagem, a dimensão do núcleo e a dimensão do domínio da transformação?

12. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, mostre que $Im(T)$ e $N(T)$ são subespaços vetoriais de W e V respectivamente.

13. Seja $L : \mathbb{P}_3(I\!R) \to \mathbb{P}_3(I\!R)$ definida por $L(at^3 + bt^2 + ct + d) = (a-b)t^3 + (c-d)t$.

(a) O vetor $t^3 + t^2 + t - 1$ pertence a $N(L)$?

(b) O vetor $3t^3 + t$ pertence a $Im(L)$?

(c) Determine uma base para $N(L)$ e $dim N(L)$.

(d) Determine uma base para $Im(L)$ e $dim Im(L)$.

14. Determine uma transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^2$ cujo núcleo seja gerado pelos vetores $e_1 = (1,0,0)$ e $e_2 = (0,1,0)$.

15. Determine uma transformação linear $T : I\!R^2 \to I\!R^3$ cuja imagem seja gerada pelos vetores $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (0,1,1)$.

16. Seja $F : V \to I\!R^5$ uma transformação linear.

(a) Se F é sobrejetora e $dim N(F) = 2$, qual é a $dim V$?

(b) Se F é injetora e sobrejetora, qual é a $dim(V)$?

17. Sejam V e U espaços vetoriais e $T : V \to U$ uma transformação linear. Mostre que:

(a) Se os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ geram V, então os vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n) \in U$ geram $Im(T)$.

(b) Se $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é L.I., $S \subset V$ e T é injetora, então $\{T(v_1), T(v_2), ...T(v_n)\}$ é L.I. Mostre com um contra-exemplo que o fato de T ser injetora é essencial para que $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ seja L.I.

18. Considere a aplicação $T : M_2(I\!R) \to I\!R$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de T?

(c) Encontre uma base e a dimensão do núcleo de T.

(d) Encontre uma base e a dimensão da imagem de T.

19. Considere os operadores lineares do $I\!R^3$ definidos por $T(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$ e $T(x,y,z) = (x, x-y, 2x+y-z)$.
Verifique quais dos operadores lineares acima são isomorfismos e os que forem, determinar o isomorfismo inverso. Caso negativo, ache uma base para $N(T)$ e $Im(T)$.

20. Se a matriz de uma transformação linear, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, é $[T]_C^B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, onde $B = \{(-1,1),(1,0)\}$ e $C = \{(1,1,-1),(2,1,0),(1,1,0)\}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

   (a) Encontre a expressão de $T(x,y)$ e a matriz da transformação com respeito às bases canônicas de cada espaço.

   (b) Qual a imagem do vetor $(2,-3)$ pela T?

   (c) Se $T(v) = (2,4,-2)$, encontre, se possível, o vetor v.

21. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,0,-1)$ e $T(0,1,1) = (0,0,1)$.

   (a) Determine $T(x,y,z)$

   (b) Determine a matriz da transformação com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$

   (c) T é isomorfismo? Se for, calcule sua inversa.

22. Sejam $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x,y) = (y,x)$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (-x,y)$. Geometricamente, S e T produzem reflexões em relação às retas $y = x$ e $x = 0$ respectivamente. Determine:

   (a) $S^{-1}(x,y)$

   (b) $T^{-1}(x,y)$

   (c) $(S \circ T)(x,y)$ e interprete geometricamente

   (d) $(T \circ S)(x,y)$ e interprete geometricamente

23. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão em torno da reta $y = 3x$. Encontre uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

24. Sejam $u_1 = (1,2,-1)$, $u_2 = (a,0,1)$ e $u_3 = (1,b,c)$ e T um operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que $ImT = [u_1,u_2,u_3]$.

   (a) Para que valores de a, b e c o operador é um isomorfismo?

   (b) Para que valores de a, b e c o núcleo de T terá dimensão 1?

   (c) Para que valores de a, b e c o núcleo de T terá dimensão 2?

   (d) A dimensão do núcleo de T pode ser 3?

25. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(x,y,z) = (x-y, x+2y-z, y-z)$.

   (a) Encontre $[T]_C^B$, sendo $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ e $C = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

   (b) Se $[T(v)]_C = (12-1)$, encontre v.

26. Sejam os vetores $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (-1,4)$ e a matriz $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, onde $B = \{v_1, v_2\}$.

   (a) Determine $[T(v_1)]_B$ e $[T(v_2)]_B$.

   (b) Encontre $T(v_1)$ e $T(v_2)$.

   (c) Encontre $T(x,y)$.

27. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_C^B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $B = \{(1,1),(0,1)\}$ e $C = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\}$.

28. Determine a transformação linear $T : \mathbb{P}_2(I\!R) \to \mathbb{P}_2(I\!R)$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = 2x$. Encontre $N(T)$ e $Im(T)$.

29. Sejam $T_1 : I\!R^2 \to I\!R^2$ e $T_2 : I\!R^2 \to I\!R^3$ dadas por $T_1(x, y) = (3x - y, -3x + y)$ e $T_2(x, y) = (x + y, x, 2y)$.

   (a) Calcule $T_2 \circ T_1 : I\!R^2 \to I\!R^3$

   (b) Mostre que $T_2 \circ T_1$ é uma transformação linear.

   (c) Calcule $[T_1]_B$, $[T_2]_B^C$ e $[T_2 \circ T_1]_B^C$, onde B e C são as bases canônicas do $I\!R^2$ e $I\!R^3$, respectivamente.

   (d) Compare as matrizes $[T_2]_B^C \,.\, [T_1]_B^C$ e $[T_2 \circ T_1]_B^C$. O que você observa?

30. Seja $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = (2, 1)$ e triplica o comprimento do vetor $v = (1, 2)$ sem alterar as direções e nem inverter os sentidos.

   (a) Determine $T(x, y)$

   (b) Qual é a matriz do operador T na base $\{(2, 1), (1, 2)\}$.

31. Verifique se o vetor v dado é autovetor do correspondente operador linear.

   (a) $v = (-2, 1)$, $[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e C base canônica de $I\!R^2$.

   (b) $v = (1, 1, 2)$, $[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e C é a base canônica de $I\!R^3$.

32. Determine os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

   (a) $T : I\!R^2 \to I\!R^2, T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$

   (b) $T : I\!R^2 \to I\!R^2, T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$

   (c) $T : I\!R^3 \to I\!R^3, T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

   (d) $T : I\!R^3 \to I\!R^3, T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$

33. Determine o operador linear $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ associados aos autovetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (-1, 0)$ respectivamente.

34. Suponha que o polinômio característico do operador linear T seja $p(x) = x(x + 2)^2(x - 2)^3(x - 3)^4$. Responda justificando cada ítem

   (a) Qual a dimensão do domínio de T.

   (b) T é inversível?

   (c) Quantos auto-espaços tem T?

   (d) O que podemos dizer sobre as dimensões dos auto-espaços de T?

   (e) O que podemos dizer sobre as dimensões dos auto-espaços de T, se souber que T é diagonalizável?

   (f) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto L.I. de autovetores de T, todos associados ao mesmo autovalor. O que podemos dizer sobre este autovalor?

35. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

   (a) Toda transformação linear sobrejetora tem obrigatoriamente núcleo de dimensão zero.

   (b) Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $dim(V) < dim(W)$, então T não pode ser sobrejetora.

   (c) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear . Se $dimV = n$, então uma condição suficiente para que T seja diagonalizável é que T tenha n autovalores distintos.

36. Sejam $T : V \to V$ e $S : W \to W$ operadores lineares, onde $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $[S]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, para determinadas bases B e C de V e W respectivamente. Procure observar neste exercício as seguintes propriedades:

(a) Se um operador admite $\lambda = 0$ como autovalor, então T não é inversível.

(b) Se ao invés das matrizes acima, tivéssemos a sua transposta, os autovalores permaneceriam os mesmos.

(c) Os autovalores de uma transformação liner cuja matriz com respeito a uma base é triangular, os autovalores são os elementos da diagonal principal.

37. Seja $[T]$ um operador linear em $I\!R^3$ e a matriz de T com respeito a base canônica é dada por

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores e autovetores correspondentes.

(b) Ache $[T]_B$, onde $B = \{(0,1,1),(0,-1,1),(1,0,1)\}$. O que você observou?

38. Verifique se a transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $T(x,y,z) = (x, y, x - 3y + 2z)$ é diagonalizável. Caso a resposta seja positiva, indique a matriz diagonal de T e a base em relação a qual T é diagonalizável.

39. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : I\!R^2 \to I\!R^2$. Mostre que:

(a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são L.I.

(b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são L.I.

40. Seja T um operador linear em $I\!R^2$. Sabendo que T duplica o vetor $(1,-1)$ e triplica o vetor $(0,1)$ sem alterar o sentido deles, determine $T(x,y)$. A transformação linear T é diagonalizável? Justifique sua resposta. Se for, dê a base do $I\!R^2$ com relação à qual a matriz de T é diagonal e escreva a matriz de T com relação a esta base.

41. Dê exemplos de:

(a) Um operador linear em $I\!R^2$ que não possui autovalores reais.

(b) Um operador linear em $I\!R^3$ que satisfaça todas as condições abaixo:

i. T é diagonalizável;

ii. T não é injetora;

iii. $T(v) \neq v$, para qualquer vetor não nulo;

iv. $\lambda = 2$ é autovalor de T;

v. $v_0 = (1, 0, -1)$ é autovetor de T;

vi. $T(v_0) \neq v_0$;

vii. $(0, 0, 2) \in Im(T)$.

42. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $T(v) = \lambda v$ para algum escalar não-nulo λ, então v é autovetor de T.

(b) Se λ é um autovalor do operador linear T, então $(\lambda I - [T]_B)X = 0$ só tem a solução trivial.

(c) Se v_1, v_2 e v_3 são vetores de auto-espaços distintos, então é impossível escrever v_3 como combinação linear de v_1 e v_2.

43. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão n.

 (a) Defina autovalor de T

 (b) Se λ é autovalor de T, então 2λ é autovalor de $2T$

 (c) Se λ é autovalor de T, mostre que λ^2 é autovalor de $T^2 = T \circ T$.

44. O Teorema de Cayley-Hamilton afirma que uma matriz quadrada A é uma raíz de seu polinômio característico, isto é, se $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ é o polinômio característico de A então $a_0I + a_1A = a_2A^2 + ... + a_nA^n =$ 0(matriz nula).

 (a) Verifique este resultado para $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

 (b) Este teorema proporciona um método para calcular a inversa e potências n de uma matriz, tendo conhecimento de potências inferiores. Verifique que isto é verdade tomando por exemplo uma matriz 2×2 com polinômio característico $c_0 + c_1x + c_2x^2$.

 (c) Calcule agora A^2 e A^3 sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e calcule a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.