

3ª Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear

- Sejam $u = (-4, 3)$, $v = (2, -5)$ e $w = (a, b)$. Encontre a e b tais que
 $(a)w = 2u + 3v$, $(b)w = \frac{2}{5}v$, $(c)u + w = 2u - v$.
Represente os vetores acima no plano cartesiano.
- Sejam $u = (4, -1, 2)$, $v = (3, -2, -4)$ e $w = (a, b, c)$. Encontre a, b, c tais que:
 $(a)w - u = v$, $(b)w = 3v$, $(c)u + w = 2u - v$.
- Sejam $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, -8)$ e $w = (6, -1, -4)$. Encontre escalares c_1 , c_2 e c_3 tais que
 $c_1u + c_2v + c_3w = (2, 0, 4)$.
- Encontre todos os escalares c_1 , c_2 e c_3 tais que $c_1u + c_2v + c_3w = (0, 0, 0)$, onde $u = (-3, 1, 2)$,
 $v = (4, 0, -8)$ e $w = (6, -1, -4)$.
- Abaixo, são apresentados um conjunto V com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verifique se eles são espaços vetoriais. Para aquele que não for, citar os axiomas que não se verificam. Para quaisquer (a, b) , (c, d) em V e α escalar real, sejam:
 $(a) V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, 0)$ e a multiplicação escalar usual.
 $(b) V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha^2a, \alpha^2b)$.
- Verifique detalhadamente que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais (com a soma e produto por escalar usuais):
 (a) Matrizes quaisquer de ordem 3×2 .
 (b) Polinômios de grau menor ou igual a 4.
 (c) Conjunto das funções contínuas de \mathbb{R} em \mathbb{R} .
- Em cada item deste exercício são dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V . Verifique se W é subespaço vetorial V .
 $(a) V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$;
 $(b) V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \leq 1\}$;
 $(c) V = (M_{3 \times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ $W = \{A \in M_{3 \times 3}; A = A^T\}$;
 $(d) V = (M_{2 \times 2}, +, \cdot, \mathbb{R})$ $W = \{A \in M_{2 \times 2}; \det A = 0\}$.
- Considere $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = d, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Para que valores de a, b, c e d , W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ?
- Mostre que os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^4 são subespaços de \mathbb{R}^4 .

- (a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 3z = 0\}$;
 (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + 2z = 0 \text{ e } t = 0\}$.

10. Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em \mathbb{R}^3 .

- (a) Escreva $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v .
 (b) O vetor $(2, -5, 4)$ pode ser escrito como combinação linear de u e v ? Justifique.
 (c) Para que valores de k o vetor $w = (-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v ?
 (d) Encontre condições sobre a , b e c de modo que o vetor $w = (a, b, c)$ seja combinação linear de u e v .

11. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $M_{3 \times 3}$?

$$(a) W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}; d = a + b + c \right\}; \quad (b) W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}; d < a + b + c \right\}.$$

12. Sejam $u = (-1, 2, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $v_1 = (-8, 4, 1)$, $v_2 = (0, 2, 3)$ e $v_3 = (0, 0, 0)$ como combinação linear de u , v e w .

13. Escreva E como combinação linear, se possível de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

$$(i) E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (ii) E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Que conjunto de $M_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear de A , B e C ?

14. Mostre que $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ geram o \mathbb{R}^3 . O que isto significa?

15. Determine condições sobre a , b e c de modo que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pertença ao espaço gerado pelos vetores $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$ e $w = (0, 3, -4)$.

16. Para qual valor de k o vetor $u = (1, -2, k)$ em \mathbb{R}^3 será uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

17. Determine condições sobre a , b e c devem satisfazer para que o vetor $v = (a, b, c)$ seja combinação linear dos vetores $u = (1, -3, 2)$ e $w = (2, -1, 1)$.

18. Mostre que o plano yz , isto é, $W = \{(0, b, c); b, c \in \mathbb{R}\}$ em \mathbb{R}^3 é gerado por:

- (a) $(0, 1, 1)$ e $(0, 2, -1)$;
 (b) $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 3)$ e $(0, 3, 1)$;
 (c) Por que um plano pode ser gerado por dois ou três vetores? Este mesmo plano pode ser gerado por um vetor? Exiba um conjunto de quatro vetores que geram W e um conjunto de dois vetores que geram W .

19. Verifique se o vetor $u = (1, 2, 3)$ pertence ao subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, 0, 1)$.
20. Verifique se o conjunto $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ gera o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$.
21. Mostre que os conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .
22. Determine um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços de \mathbb{R}^3 .
- $U = \{(x, y, z); x - 2y = 0\};$
 - $V = \{(x, y, z); x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\};$
 - $U \cap V.$
23. Encontre um vetor em \mathbb{R}^3 que gere a interseção de V e W , onde V é o plano xy e W é o espaço gerado pelos vetores $(1, 2, 3)$ e $(1, -1, 1)$.
24. Mostre que a interseção de subespaços é também um subespaço e verifique com um exemplo que a união de subespaços nem sempre é um subespaço.
25. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Mostre que $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.
26. Seja S subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 dado por $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$. Pergunta-se:
- $(-1, 2, 3, 0) \in S?$
 - $(3, 1, 4, 0) \in S?$
 - Determine dois vetores de geram S . Eles são únicos? Se não, apresente outros.
27. Determine $[S]$, onde $S = \{(1, -2, 5, 4), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\}$.
28. Verifique se o vetor $p(t) = t^3 - 2t$ pertence ao subespaço de \mathbb{P}_3 gerado por $\{t^3 - 1, t^2 + 1, t\}$.
29. Determine para que valores de k os vetores de \mathbb{R}^3 abaixo são L.I. ou L.D.
- $u = (1, 1, 2), v = (-1, 2, 3)$ e $w = (k, -1, 1)$
 - $u = (-1, 0, 7), v = (-4, 5, -3k), w = (0, 4, -2)$ e $z = (2k, 3, 1)$
30. Suponha que $\{u, v, w\}$ é L.I. Então $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ é L.I. ou L.D.? Justifique.
31. Os conjuntos abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Justifique (Faça contas somente quando for realmente necessário!)
- $\{x^3 - 3x, 2x^2 + 4, 5x^3 - 7x^2 + 3, 4x^3 - 8, 6x\} \subset \mathbb{P}_3;$
 - $\{(-1, 0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, -2, 1), (-2, 3, 4, -6, 5)\} \subset \mathbb{R}^5;$

- (c) $\{(2, -1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$;
- (d) $\{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;
- (e) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

32. Suponha que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja L.I., mas $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ seja L.D. Mostre que w é combinação linear dos vetores de S .
33. Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores L.I. de um espaço vetorial V e suponha que u é uma combinação linear desses vetores, digamos $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Mostre que a representação de u acima é única. Dê um exemplo em \mathbb{R}^3 mostrando que se o conjunto de vetores for L.D. Então a representação não será única.
34. Prove que o subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é L.D. se, e somente se, existe k inteiro, $1 \leq k \leq n$ tal que v_k é combinação linear dos demais vetores do subconjunto S .
35. Mostre que:
- (a) Se u, v, w são L.I. então $u + v, u + w, v + w$ são L.I.
 - (b) Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é L.D.
 - (c) Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é L.D. então A é L.D.
 - (d) Se um conjunto $A \subset V$ é L.I., qualquer subconjunto de A é L.I.
36. Consideremos no espaço vetorial \mathbb{R}^2 os vetores $u = (1 - a, 1 + a)$ e $v = (1 + a, 1 - a)$, onde $a \neq 0$. Mostre que $\{u, v\}$ é L.I.
37. Mostre que $\{(1, 0, a), (1, 1, a), (1, 1, a^2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I. se $a \neq 0$ e $a \neq 1$.
38. Se u, v e w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostrar que $\{u, v\}$ é L.D.
39. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que o seguinte subespaço de \mathbb{R}^3 tenha dimensão 1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ para algum vetor } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

40. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $M_4(\mathbb{R})$ formado por todas as matrizes diagonais.
41. Determine uma base e dimensão dos subespaços vetoriais:

- (a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2 \times 3}$.
- (b) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - 2y = 0\}$;
- (c) $W_3 = [(1, 2, 3), (0, 0, 2), (-2, -4, -2)]$;

(d) $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x - 2y = 0 \text{ e } t + x = z\}.$

42. Sendo $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, determinar $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base de \mathbb{R}^2 .

43. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base de \mathbb{R}^3 ? Nos que formarem, escrever um vetor genérico de \mathbb{R}^3 como combinação linear dos elementos desse conjunto.

(a) $\{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4)\};$

(b) $\{(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\};$

(c) $\{(2, 3, -1), (-2, 1, 1), (2, 0, 1)\}$

44. Mostre que $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

45. Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 0, 2)$ e $v_4 = (2, -1, 1)$ geram o \mathbb{R}^3 e encontrar uma base dentre esses vetores.

46. Determinar as coordenadas do vetor $v = (6, 2)$ em relação às bases:

(a) $\{(3, 0), (0, 2)\};$

(b) $\{(1, 2), (2, 1)\};$

(c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$

47. Considere $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ base de \mathbb{R}^3 . Determinar as coordenadas do vetor v em relação a B se:

(a) $v = (2, -3, 4);$

(b) $v = (3, 5, 6);$

(c) $v = (1, -2, 1).$

48. Determine uma base de \mathbb{R}^4 que contenha os seguintes vetores $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 1)$.

49. Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $M_2(\mathbb{R})$:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; c = a - 3b \text{ e } d = 0 \right\};$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = b + c \right\}.$

50. Seja W o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$, $(3, 8, -3, -5)$.

(i) Encontre uma base e a dimensão de W ;

(ii) Estenda a base de W a uma base do espaço \mathbb{R}^4 ;

(iii) Faça agora o caminho inverso, encontre, se possível, os vetores da base canônica de \mathbb{R}^4 que geram W .

51. Encontrar uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 4x + 3y - z + 5t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 6x + 2y + 4t = 0 \end{cases}.$$

52. Sejam U, V subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 . Determine uma base e a dimensão dos subespaços $U, V, U + V$ e $U \cap V$.

(a) $U = \{(x, y, x); x = 0\}, \quad V = \{(x, y, z); y - 2z = 0\}.$

(b) $U = \{(x, y, z); x + y = 0 \text{ e } 4x - z = 0\}, \quad V = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)].$

53. Sejam U e W subespaços vetoriais de \mathbb{R}^4 gerados por $R = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$ e $S = \{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$ respectivamente.

(a) Determine uma base para os espaços U e W .

(b) Determine $\dim U, \dim W, \dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.

54. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dados por $U = \{at^3 + bt^2 + ct + d; a = b - c\}$ e $W = \{at^3 + bt^2 + ct + d; d = a + b + c\}$

(a) Determine uma base para os espaços U e W .

(b) Determine $\dim U, \dim W, \dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.

55. Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determinar, nos seguintes casos:

(i) uma base e a dimensão de U .

(ii) uma base e a dimensão de W .

(iii) uma base e a dimensão de $U + W$.

(iv) uma base e a dimensão de $U \cap W$.

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}, W = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^3.$

(b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = t - z = 0\}, W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z = t = 0\}, V = \mathbb{R}^4.$

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}, W = [(2, 2, 0), (1, 2, 3), (7, 12, 21), (-1, -2, -3)], V = \mathbb{R}^3.$

(d) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + t + z = 0\}, W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - t + z = 0\}, V = \mathbb{R}^4.$