

1ª Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear

---

1. Considere as matrizes  $A, B, C, D$  e  $E$  com respectivas ordens,  $4 \times 3$ ,  $4 \times 5$ ,  $3 \times 5$ ,  $2 \times 5$  e  $3 \times 5$ . Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

(a)  $AE + B^T$ ;                      (b)  $C(D^T + B)$ ;                      (c)  $AC + B$ ;                      (d)  $E^T(CB)$ .

2. Determine a ordem das matrizes  $A, B, C, D$  e  $E$ , sabendo-se que  $AB^T$  tem ordem  $5 \times 3$ ,  $(C^T + D)B$  tem ordem  $4 \times 6$  e  $E^T C$  tem ordem  $5 \times 4$ .

3. Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 11 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ . Determine:

(a) A ordem de  $A$ ;

(b) Os elementos  $a_{23}$ ,  $a_{35}$  e  $a_{43}$ .

4. Sejam as matrizes  $A, B, C, D$  e  $E$  que verificam  $ABCDE = EDCBA$ . Sabendo que  $C$  é uma matriz de ordem  $3 \times 2$ , quais são as ordens das outras quatro matrizes?

5. Sejam as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$C = AB$  e  $D = BA$ . Determine os elementos  $c_{32}$  e  $d_{43}$ , sendo  $(c_{ij}) = C$  e  $(d_{ij}) = D$ .

6. Determine a matriz quadrada  $A = (a_{ij})$ , de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j, & \text{se } i < j \\ i^2 + 2j, & \text{se } i = j \\ -3i + 4j, & \text{se } i > j \end{cases}.$$

7. Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ . Determine:

(a)  $A^2$ ;                      (b)  $A^3$ ;                      (c)  $A^{31}$ ;                      (d)  $A^{42}$ .

8. Sejam  $A = (a_{ij})_{70 \times 5}$  e  $B = (b_{ij})_{5 \times 27}$  matrizes definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{se } i = j \\ i + j + 2 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} j - 2, & \text{se } i < j \\ i/j & \text{se } i \geq j \end{cases}.$$

Se  $D = AB$ , calcule o elemento  $d_{35,2}$ , sendo  $D = (d_{ij})$ .

9. Determine números reais  $x$  e  $y$  tais que

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Determine em cada um dos casos abaixo,  $x$ ,  $y$  e  $z$  números reais tais que a matriz  $A$  seja simétrica.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) B = \begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix}, \quad (c) C = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}.$$

11. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quando possível, calcule o que se pede.

$$(a) 4E - 2D; \quad (b) 2A^T + C; \quad (c) (2E^T - 3D^T)^T; \quad (d) (BA^T - 2C)^T.$$

12. Diz-se que uma matriz  $B$  é uma *raiz quadrada* de uma matriz  $A$  se  $B^2 = A$ .

$$(a) \text{ Encontre duas raízes quadradas de } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \text{ Existem quantas raízes quadradas distintas de } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} ? \text{ Justifique.}$$

(c) Na sua opinião qualquer matriz  $2 \times 2$  tem pelo menos uma raiz quadrada? Justifique.

13. Sejam  $A, B$  matrizes em  $M_n(\mathbb{R})$ . Se  $AB = BA$ , mostre que:

$$(a) (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2; \quad (b) (A - B)(A + B) = A^2 - B^2;$$

$$(c) (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3.$$

14. Seja  $A$  matriz em  $M_n(\mathbb{R})$ . Mostre que:

$$(a) \text{ As matrizes } AA^T, A + A^T \text{ e } \frac{1}{2}(A + A^T) \text{ são simétricas,}$$

$$(b) \text{ A matriz } \frac{1}{2}(A - A^T) \text{ é antissimétrica,}$$

(c) Toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

15. Dizemos que uma matriz  $A$  é *ortogonal* se, e somente se,  $AA^T = I$ . Determine:

(a) Os possíveis valores para o determinante de uma matriz ortogonal.

(b) Quais matrizes reais de ordem 2 são simultaneamente antissimétricas e ortogonais.

16. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Defina  $A^0 = I$  e  $A^n = A^{n-1}A$ ,

para todo número natural  $n \geq 1$ . Mostre que:  $A^{2n} = I$  e  $A^{2n+1} = A$ , para todo natural  $n$ .

17. Determine o número real  $m$  de modo que a matriz  $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$  seja ortogonal.

18. Verifique quais das matrizes abaixo são ortogonais.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

19. Dado um número real  $\alpha$ , considere a matriz  $T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

(a) Dados  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{R}$ , mostre que  $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ .

(b) Calcule  $T_{-\alpha}$ .

(c) Mostre que para todo número  $\alpha$  a matriz  $T_\alpha$  é ortogonal.

20. Seja  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , uma matriz quadrada de ordem  $n$ . O **traço** de  $A$ , denotado

por  $tr(A)$ , é definido como sendo o número real

$$tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

ou seja, o traço de  $A$  é a soma dos elementos da diagonal principal de  $A$ .

Dadas  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordem  $n$ , valem as seguintes propriedades:

$$(a) \quad tr(A + B) = tr(A) + tr(B);$$

$$(c) \quad tr(A^T) = tr(A);$$

$$(b) \quad tr(kA) = ktr(A), \text{ onde } k \in \mathbb{R};$$

$$(d) \quad tr(AB) = tr(BA).$$

Usando algumas destas propriedades verifique que não existem  $A$  e  $B$ , matrizes quadradas de ordem  $n$ , tais que  $AB - BA = I$ .

21. Verifique que se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então os traços de  $AA^T$  e  $A^T A$  estão definidos. Em seguida prove que  $\text{tr}(AA^T) = \text{tr}(A^T A)$ .
22. Mostre que se  $A^T A = A$ , então  $A$  é simétrica e  $A = A^2$ .
23. Suponha que  $A$  é uma matriz quadrada e que  $D$  é uma matriz diagonal tal que  $AD = I$ . O que se pode afirmar sobre a matriz  $A$ ? Justifique.
24. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , onde  $a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \neq 0$ . Determine  $A^{-1}$ , a inversa de  $A$ , se existir.
25. Prove que se  $A$  é inversível e  $AB = AC$ , então  $B = C$ .
26. É possível ter  $AB = I$  e  $B$  não ser inversa de  $A$ ? Justifique sua resposta.
27. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , mostre que:
- (a) Se  $A$  satisfaz a igualdade  $A^2 - 3A + I = 0$ , então  $A^{-1} = 3I - A$ .
  - (b) Se  $A$  é tal que  $A^{n+1} = 0$ , então  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n$ .
28. Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra exemplo.
- (a) ( ) Se a primeira coluna de  $A$  for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto  $AB$ .
  - (b) ( ) Se a primeira linha de  $A$  for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto  $AB$ .
  - (c) ( ) Se a soma de matrizes  $AB + BA$  estiver definida, então  $A$  e  $B$  devem ser matrizes quadradas.
  - (d) ( ) Se  $A$  é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então  $A^2$  tem duas linhas idênticas.
  - (e) ( ) Se  $A$  é uma matriz quadrada e  $A^2$  tem uma coluna constituída somente de zeros, então necessariamente  $A$  tem uma coluna constituída somente de zeros.
  - (f) ( ) Se  $AA^T$  é uma matriz singular (não inversível), então  $A$  não é inversível.
  - (g) ( ) Se  $A$  é inversível e  $AB = 0$ , então necessariamente  $B$  é a matriz nula.
  - (h) ( ) A soma de duas matrizes inversíveis é sempre uma matriz inversível.
  - (i) ( ) Se  $A$  é uma matriz quadrada tal que  $A^4 = 0$ , então

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.$$

29. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a  $-3$ , pede-se:

- (a) O determinante da matriz  $P$  dada por  $P = 4A^{-1}A^T$ .
- (b) Decidir se  $P$  é ou não inversível.
- (c) O determinante da matriz  $B$  obtida de  $A$  após serem realizadas as seguintes operações:  
 $L_3 \longleftrightarrow L_2$ ;  $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_5$ ;  $L_4 \longrightarrow -3L_4$ .
- (d) Decidir se a matriz  $Q = AA^T$  é ou não inversível.

30. Calcule o determinante da matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ;

- (a) Desenvolvendo-o pela segunda linha (usando cofatores).
- (b) Usando operações elementares sobre as linhas da matriz.

31. Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , determine:

- (a)  $\det(AB)$ ; (b)  $A^{-1}$ ; (c)  $B^{-1}$ ; (d)  $(BA)^{-1}$ ; (e)  $\det(C)$ , onde  $CA^T = 2BC^2$ .

32. Seja  $Q$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $\det Q \neq 0$  e  $Q^3 + 2Q^2 = 0$ . Determine o valor de  $\det Q$ .

33. Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , determine:

- (a)  $\det A$  utilizando as operações elementares sobre as linhas de  $A$ ;
- (b)  $\det A^T$ ; (c)  $\det(A^2)$ ; (d)  $\det(A^{-1})$ ; (e)  $\det(-A)$ ; (f)  $\det(3AA^T)$ .

34. Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Determine o polinômio  $p(x) = \det(xI_3 - A)$ , onde  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3 e  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Verifique que  $p(A) = 0$ , onde 0 é a matriz nula de ordem 3.
- (c) Use o item anterior para calcular a inversa de  $A$ .

35. Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{aligned}
(a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}; \\
(d) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad (f) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

36. Resolva as seguintes equações:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16; \quad (c) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}.$$

37. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Generalize o resultado para uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  na qual  $a_{ij} = 0$  sempre que  $i + j \leq n$ .

38. Diz-se que uma matriz  $A$  é *semelhante* à matriz  $B$  quando existe uma matriz inversível  $P$  tal que  $B = PAP^{-1}$ .

- (a) Mostre que se  $A$  é uma matriz semelhante a  $B$ , então  $B$  é semelhante a  $A$ .
- (b) Mostre que se  $A$  é semelhante a  $B$  e  $B$  é semelhante a  $C$ , então  $A$  é semelhante a  $C$ .
- (c) Prove que matrizes semelhantes tem mesmo determinante.

39. Nos casos abaixo, pede-se: verificar se  $A$  é inversível;  $\text{cof}(A)$ , a matriz cofatora de  $A$ , e  $A^{-1}$ , a matriz inversa de  $A$  (usando  $\text{cof}(A)$ ), se esta existir.

$$\begin{aligned}
(a) A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; & (b) A &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
(c) A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & (d) A &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

40. Sem calcular diretamente, verifique que

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

41. Nos casos abaixo, determine  $A^{-1}$ , utilizando operações elementares, se esta existir.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & 24 \end{bmatrix}.$$

42. Calcule o determinante da matriz abaixo e determine sua inversa, se esta existir;

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

43. Decida se a afirmação é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

(a) ☐  $\det(2A) = 2 \det(A)$ .

(b) ☐  $\det(I + A) = 1 + \det(A)$ .

(c) ☐ Não existe matriz real quadrada  $A$  tal que  $\det(AA^T) = -1$ .

(d) ☐ Se  $\det(AA^T) = 4$ , então  $\det(A) = 2$ .

(e) ☐ Se  $\det(A) \neq 0$  e  $AB = 0$ , então  $B$  é inversível.

(f) ☐ Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $n$  é par, então  $\det(A) = \det(-A)$ .

(g) ☐ Se  $A^{100}$  é inversível, então  $3A$  também o é.

(h) ☐ Se a diagonal principal da matriz quadrada  $A$  consiste de zeros, então  $\det A = 0$ .

44. A tiragem diária na cidade de Mimosa dos jornais: **Dia a Dia**, **Nossa Hora**, **Acontece** e **Urgente**, durante o ano de 2002 está representada na seguinte tabela:

	Dia a Dia	Nossa Hora	Acontece	Urgente
Dias Úteis	400	600	450	650
Feriados	350	550	500	600
Sábados	350	600	500	650
Domingos	450	500	400	700

Determine:

- (a) A tiragem de cada jornal em Mimosa em 2002, sabendo-se que 2002 tivemos 52 sábados, 52 domingos, 12 feriados e 249 dias úteis.
- (b) A estimativa de tiragem total de cada jornal em Mimosa para o ano de 2005, sabendo-se que a previsão é que até o final deste ano(2005) a tiragem tenha um aumento de 60% em relação à 2002.
45. Uma construtora está fazendo o orçamento de 65 estabelecimentos rurais sendo estes divididos em: 20 de alvenaria, 30 mistos e 15 de madeira. A tabela abaixo descreve a quantidade de material utilizado em cada tipo de construção.

Tipo de construção/ Material	Tábuas (unidade)	Tijolos (mil)	Telhas (mil)	Tinta (litros)	Mão-de-obra (dias)
Alvenaria	50	15	6	70	25
Madeira	500	1	5	20	30
Misto	200	8	7	50	40

Pede-se:

- (a) Determinar, utilizando o produto de matrizes, a matriz A que descreve quantas unidades de cada componente serão necessárias para cumprir o orçamento.
- (b) Dar o significado do produto de matrizes AB, sendo A a matriz obtida no item (a) e B a matriz obtida pela tabela abaixo

	Valor da Compra (a unidade em reais)	Transporte (a unidade em reais)
Tábuas	12	0,08
Tijolos	100	20
Telhas	300	10
Tinta	3	0,50
Mão-de-obra	40	1,50

46. Considere os adubos I,II,III e IV com características e preços descritos nas tabelas abaixo:



Substância por kg	Fósforo	Nitrato	Potássio
Adubo I	25g	15g	70g
Adubo II	30kg	25g	40g
Adubo III	60g	10g	55g
Adubo IV	15g	30g	60g

Adubos	I	II	III	IV
Preço por Kg	R\$7,50	R\$5,00	R\$4,50	R\$6,50

Um agricultor necessita de uma mistura com a seguinte especificação: 6 kg do adubo I, 7 kg do adubo II, 5 kg do adubo III e 8 kg do adubo IV. Usando o produto de matrizes, determine a quantidade de cada substância na mistura descrita acima e o preço desta mistura.

47. Um fabricante de farinha produz três tipos de farinha: de mandioca, de milho e de trigo. Para produzir cada um dos tipos de farinha o produto bruto passa por três processos: seleção, processamento e embalagem. O tempo necessário (em horas), em cada processo, para produzir uma saca de farinha, é dado na tabela abaixo:

Processos/ Tipos de Farinha	Seleção	Processamento	Embalagem
Mandioca	1	3	1
Milho	2	5	1
Trigo	1,5	4	1

O fabricante produz as farinhas em duas usinas uma em Cacha Pregos (BA) e outra em Cacimba de Dentro (PB), as taxas por hora para cada um dos processos são dadas (em reais) na tabela abaixo:

	Cacha Pregos	Cacimba de Dentro
Seleção	2	1,50
Processamento	1	1,80
Embalagem	0,50	0,60

Encontre A e B matrizes obtidas pelas primeira e segunda tabelas, respectivamente. Qual o significado do produto AB?

48. Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

(a)  $\det(-A) = \det(A)$ .

(b)  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .

(c) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $P$  matrizes reais de ordem  $n$ , tais que  $B = P^T A P$ , sendo  $P$  inversível. Então  $\det(A) = \det(B)$ .

- (d) ( ) Dada a equação matricial  $X^2 + 2X = 0$ , onde  $X$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , não singular. Então esta equação tem única solução.
- (e) ( ) Se  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  são tais que  $AB = 0$  (matriz nula), então  $BA$  também é a matriz nula.
- (f) ( ) Se  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  são tais que  $AB = 0$  (matriz nula), então  $A = 0$  ou  $B = 0$ .
- (g) ( ) A soma de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.
- (h) ( ) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.
- Nas afirmativas abaixo,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes de ordens apropriadas para as operações indicadas.
- (i) ( ) Se  $AC = BC$  e  $C$  é inversível, então  $A = B$ .
- (j) ( ) Se  $AB = 0$  e  $B$  é inversível, então  $A = 0$ .
- (k) ( ) Se  $AB = C$  e duas das matrizes são inversíveis, então a terceira também é.
- (l) ( ) Se  $AB = C$  e duas das matrizes são singulares (não inversíveis), então a terceira também é.

49. Uma mensagem contendo caracteres pode ser associada a uma matriz  $M$  fazendo uma correspondência entre cada caracter da mensagem e cada elemento da matriz através da tabela abaixo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	V	W	X	Y	Z	.	!	,	-												
	22	23	24	25	26	27	28	29	30												

Suponhamos que a nossa mensagem seja “PUXA VIDA”. Podemos formar a matriz  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{bmatrix}, \text{ que tem matriz mensagem associada } M = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 24 \\ 1 & 30 & 22 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

De modo geral, para transmitir uma mensagem de forma segura vamos utilizar a **matriz chave**

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sendo } C \text{ uma matriz inversível e codificamos a mensagem fazendo o produto}$$

$$M \cdot C = \begin{bmatrix} -5 & 87 & 61 \\ -29 & 112 & 53 \\ 5 & 13 & 14 \end{bmatrix}, \text{ onde } M \text{ é a matriz da mensagem.}$$

Transmitimos esta nova mensagem (na prática, envia-se a cadeia de números  $-5 \ 87 \ 61$   
 $-29 \ 112 \ 53 \ 5 \ 13 \ 14$ ). O receptor receberá a matriz  $M \cdot C$  e tem a tabela de correspondência entre caracteres e números. Para decodificar a mensagem ele deve efetuar a multiplicação  $(M \cdot C) \cdot C^{-1} = M$ .

(a) Se você é o receptor e recebeu a mensagem codificada:

$-16 \ 63 \ 26 \ -2 \ 27 \ 22 \ 1 \ 21 \ 18 \ 5 \ 45 \ 35 \ 13 \ 3 \ 15 \ 1 \ 33 \ 30 \ 2 \ 6 \ 7 \ -14 \ 73 \ 44$ .

Utilizando a mesma matriz chave traduza a mensagem original.

- (b) Aconteceu que o inimigo descobriu sua chave. O seu comandante manda você substituir a matriz chave por  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Você transmite a mensagem “CRETINO!!” a ele (codificada, naturalmente!). Por que não será possível a ele decodificar sua mensagem?