Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$2^{\underline{a}}$ Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear

1. Escreva os seguintes sistemas na forma matricial:

$$(a)\ \begin{cases} 2x + 8y = 18 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y + 7z = 12 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 7x_4 = -16 \\ 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 21x_4 = -66 \end{cases},$$

$$(c)\ \begin{cases} 8x + 12y - 4z = -36 \\ 6x + 5y + 7z = 11 \\ 2x + y + 6z = 16 \end{cases}, \qquad (d)\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -4x_1 - 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 13 \\ 8x_1 + 16x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -20 \\ 20x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

2. Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando o **Método da Matriz Inversa**, caso seja possível:

$$(a)\ \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} 8x + 12y - 4z = -36 \\ 6x + 5y + 7z = 11 \\ 2x + y + 6z = 16 \end{cases},$$

$$(c)\ \begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

3. Resolva os seguintes sistemas utilizando a **Regra de Cramer**:

$$(a)\ \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

4. Determine, caso exista, os valores reais de k, em cada um dos casos, tais que o sistema linear dado tenha:

(i) uma única solução; (ii) infinitas soluções; (iii) nenhuma solução:

$$(a)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases},$$

$(c)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 8z & = & 3 \end{array}\right.$, $\quad (d)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & kz & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & k \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$

5. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial:

   $(a)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & ky & + & z & = & 0 \end{array}\right.$, $\quad (b)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & kz & = & 0 \end{array}\right.$

6. Determine os valores reais de a e b para que o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

   tenha:

   (a) uma única solução; $\quad (b)$ infinitas soluções; $\quad (c)$ nenhuma solução:

7. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, para que o sistema linear dado seja compatível.

   $(a)\left\{\begin{array}{rcrcr} -4x & + & 3y & = & 2 \\ 5x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & k \end{array}\right.$, $\quad (b)\left\{\begin{array}{rcrcr} a_1 & + & 2a_2 & = & -1 \\ -3a_1 & + & 4a_2 & = & k \\ 2a_1 & - & a_2 & = & -7 \end{array}\right.$

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$. Encontre os valores reais de λ para os quais o sistema homogêneo $AX = 0$ admite apenas a solução trivial.

9. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine, se possível, a inversa de A.

   (b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1, 2, 3$.

10. Determine a condição que os números reais a, b e c devem satisfazer para que, em cada um dos casos abaixo, o sistema dado tenha solução.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right., \qquad (b)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 5y & + & 8z & = & c \end{array}\right.,$$

$$(c)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & a \\ 2x & + & 3y & - & z & = & b \\ 3x & + & y & + & 2z & = & b \end{array}\right., \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 7y & = & a \\ x & + & y & = & b \\ 5x & + & 3y & = & 5a+2b \\ x & + & 2y & = & a+b-1 \end{array}\right.,$$

$$(e)\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & a \\ -3x & + & 4y & = & b \\ 2x & - & y & = & c \end{array}\right., \qquad (f)\left\{\begin{array}{rcrcl} -a & + & 3b & = & x \\ 2a & - & b & = & y \\ -2a & + & b & = & z \\ 3a & + & b & = & t \end{array}\right.$$

11. Considere o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right.$$

Mostre que:

(a) se $ad - bc \neq 0$, então o sistema tem uma única solução, dada por

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ce}{ad - bc};$$

(b) se $ad - bc = 0$ e $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \neq \dfrac{e}{f}$, então o sistema não tem solução.

(c) se $ad - bc = 0$ e $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{e}{f}$, então o sistema tem infinitas soluções.

12. Dado o sistema linear

$$S:\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right..$$

(a) Verifique que $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ e $z_1 = -1$ é uma solução de S;

(b) Verifique que $x_2 = -2$, $y_1 = 2$ e $z_1 = 2$ também é uma solução de S;

(c) É verdade que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ e $z = z_1 + z_2$ é uma solução de S?

(d) É verdade que $3x$, $3y$ e $3z$, onde x, y e z são como no item (c), é uma solução de S?

(e) Se as respostas de (c) e (d) forem afirmativas, então responda: Por que isso ocorre?

13. Resolva os seguintes sistemas utilizando o **Método de Gauss-Jordan**. Classifique-os.

$$(a)\begin{cases} x+2y+z=0\\ 2x+y-z=0\\ 3x-y-2z=0\end{cases},\qquad (b)\begin{cases} x+2y-z=2\\ 2x-y+z=5\\ x+3y+2z=9\\ 3x-y+4z=13\end{cases},$$

$$(c)\begin{cases} x+3y+2z=2\\ 3x+5y+4z=4\\ 5x+3y+4z=-10\end{cases},\qquad (d)\begin{cases} x+6y-8z=1\\ 2x+6y-4z=0\end{cases},$$

$$(e)\begin{cases} x+2y-z+w=0\\ -x-y+2z-3t+w=0\\ x+y-2z-w=0\\ z+t+w=0\end{cases},\qquad (f)\begin{cases} x+y-3z+t=1\\ 3x+3y+z+2t=0\\ 2x+y+z-2t=4\end{cases},$$

$$(g)\begin{cases} 3x+5y=1\\ 2x+z=3\\ 5x+y-z=0\end{cases},\qquad (h)\begin{cases} x+y+z=4\\ 2x+5y-2z=3\\ x+7y-7z=5\end{cases},$$

$$(i)\begin{cases} x+2y+3z=0\\ 2x+y+3z=0\\ 3x+2y+z=0\end{cases},\qquad (j)\begin{cases} 2x-y+3z=11\\ 4x-3y+2z=6\\ x+y+z=0\\ 3x+y+z=4\end{cases},$$

$$(k)\begin{cases} x+y+z+t=0\\ x+3y+z-t=4\\ x+y-z+t=-4\\ x-2y+z+t=2\end{cases},\qquad (l)\begin{cases} 3x+2y-4z=1\\ x-y+z=3\\ x-y-3z=-3\\ 3x+3y-5z=0\\ -x+y+z=1\end{cases},$$

$$(m)\begin{cases} x+2y+3z=-6\\ 2x-3y-4z=15\\ 3x+4y+5z=-8\end{cases},\qquad (n)\begin{cases} 3x+2y+z=2\\ 4x+2y+2z=8\\ x-y+z=4\end{cases},$$

$$(o)\begin{cases} 2x+3y=13\\ x-2y=3\\ 5x+2y=27\end{cases},\qquad (p)\begin{cases} x+4y-z=12\\ 3x+8y-2z=4\end{cases},$$

$$(q)\begin{cases} x+3y=-4\\ 2x+5y=-8\\ x+3y=-5\end{cases},\qquad (r)\begin{cases} 2x-y+z-t=4\\ 3x+2y-z+2t=1\\ 2x-y-z-t=0\\ 5x+2t=1\end{cases},$$

$$(s)\begin{cases} 3x+3y-2z-t=2\\ 5x+2y+z-2t=1\\ 2x-y+3z-t=-1\end{cases},\qquad (t)\begin{cases} x+2y-5z+4t=0\\ 2x-3y+2z+3t=0\\ 4x-7y+z-6t=0\end{cases}$$

$$(u)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 5y & + & 4z & - & 13t = & 3 \\ 3x & - & y & + & 2z & + & 5t = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & - & 4t = & 1 \end{array}\right., \quad (v)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 3z & + & 2t = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & + & 6t = & 5 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & + & 2t = & 4 \end{array}\right.,$$

$$(x)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & + & 3t & - & 7w & = & 14 \\ 2x & + & 6y & + & z & - & 2t & + & 5w & = & -2 \\ x & + & 3y & - & z & & & + & 2w & = & -1 \end{array}\right..$$

14. Determine k, nos seguintes casos, de acordo com o que se pede.

(a) De modo que o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -4x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & k \end{array}\right.,$$

admita solução.

(b) De modo que o sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & kx_3 & = & 0 \end{array}\right.,$$

tenha uma solução distinta da solução trivial.

(c) Que torne o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 12x_3 & - & x_4 = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 = & -6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 = & 5 \\ & & & & 2x_3 & + & kx_4 = & 9 \end{array}\right.,$$

incompatível.

15. Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

(a) ( ) Se o sistema linear $AX = 0$ admite as soluções X_1 e X_2, então também admite $k_1X_1 + k_2X_2$ como solução, quaisquer que sejam os números reais k_1 e k_2.

(b) ( ) Uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear $AX = 0$ tenha somente a solução trivial é que $\det A \neq 0$.

(c) ( ) Todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial.

(d) ( ) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $AX = 0$, então $X_1 - X_2$ é solução de $AX = 0$.

(e) ( ) Se C é uma matriz invertível tal que $CA = CB$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $BX = b$ são equivalentes.

(f) ( ) Se A é uma matriz tal que $A^T A = A$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $A^2 X = b$ são equivalentes.

(g) ( ) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema $AX = B$, então $X_1 + X_2$ é solução de $AX = B$.

(h) ( ) Se X_0 é uma solução do sistema $AX = 0$ e X_1 é uma solução do sistema $AX = B$, então $X_0 + X_1$ é solução de $AX = B$.

(i) ( ) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se o sistema $AX = 0$ é compatível determinado, então o sistema $AX = B$ é compatível determinado.

(j) ( ) Todo sistema linear em que o número de equações é menor que o número de incógnitas é compatível indeterminado.

(k) ( ) Todo sistema linear homogêneo em que o número de equações é menor que o número de incógnitas é compatível indeterminado.

(l) ( ) Todo sistema linear homogêneo em que o número de equações é maior que o número de incógnitas é incompatível.

(m) ( ) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se o sistema linear $AX = B$ é incompatível, então a matriz A não é invertível.

(n) ( ) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se o sistema linear $AX = 0$ é determinado, então A é linha equivalente à matriz identidade I_n.

16. Uma refinaria de petróleo processa dois tipos de petróleo: com alto teor de enxofre e com baixo teor de enxofre. Cada tonelada de petróleo de baixo teor necessita de 5 minutos no setor de mistura e 4 minutos no setor de refinaria; já o petróleo com alto teor são necessários 4 minutos no setor de mistura e 2 minutos no setor de refinaria. Se o setor de mistura está disponível por 3 horas, e o setor de refinaria por 2 horas, quantas toneladas de cada tipo de combustível devem ser processadas de modo que os dois setores não fiquem ociosos?

17. Um fabricante de plástico produz dois tipos de plástico: o normal e o especial. Para produzir uma tonelada de plástico normal são necessárias duas horas na fábrica A e 5 horas na fábrica B; já na produção de uma tonelada de plástico especial são necessárias 2 horas na fábrica A e 3 horas na fábrica B. Se a fábrica A funciona 8 horas por dia e a fábrica B funciona 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico devem ser produzidas diariamente para que as duas fábricas se mantenham totalmente ocupadas?

18. Um nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama do alimento B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já o alimento no alimento C encontramos 3 unidades

de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de alimento devem ser utilizados?

19. Um cooperativa produz três tipos de ração: A, B e C, utilizando farelo de soja, gordura animal e milho. Cada quilograma da ração A contém 100 g de farelo de soja e 200 g de milho e não contém gordura animal; cada quilograma da ração B contém 300 g de farelo de soja, 100 g de gordura animal e 400 g de milho; cada quilograma da ração C contém 200 g de farelo de soja, 200 g de gordura animal e 100 g de milho.

    Sabendo que a disponibilidade destes produtos na cooperativa nos meses de abril, maio e junho foi dada como na tabela abaixo. Pede-se para determinar qual a quantidade de cada tipo de ração foi produzido em cada um destes meses.

Quant./ Mês (em tonelada)	Farelo de Soja	Gordura Animal	Milho
Abril	1	1,5	2
Maio	1,3	2	1,6
Junho	1	1,4	1,8

20. Num concurso, foram aplicadas a quatro candidatos três provas A, B e C de pesos a, b e c, respectivamente. O quadro abaixo mostra as notas obtidas em cada prova e a nota final de cada um dos candidatos desse concurso.

	Prova A	Prova B	Prova C	Prova Final
Candidato 1	10	7	8	8
Candidato 2	10	10	8	9
Candidato 3	4	7	4	5
Candidato 4	8	5	8	6

    Cada nota final foi obtida calculando-se a média ponderada das notas obtidas pelo candidato. Calcula-se a média ponderada somando-se os produtos das notas de cada prova pelo seu respectivo peso e dividindo-se a soma assim obtida pela soma dos pesos. O quarto candidato alegou que se as notas dos outros três candidatos estejam corretas, a sua estaria incorreta.

Supondo que as notas finais dos primeiros três candidatos estejam corretas, calcule a nota final do candidato 4.

21. No meu bairro há três cadeias de supermercados: A, B e C. A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto X, do produto Y e do produto Z, nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se x quilos do produto X, y quilos do produto Y e z quilos do produto Z em qualquer dos supermercados pagarei $R\$31,00$. Determine x, y e z.

22. Uma firma fabrica dois produtos: A e B. Cada um deles passa por duas máquinas: I e II. Para se fabricar uma unidade de A gasta-se $1h$ da máquina I e $1,5h$ da máquina II. Cada unidade de B gasta $3h$ de I e $2h$ de II. Quantas unidades de cada produto poderão ser fabricadas em um mês se, por motivos técnicos, I só funciona 300 horas e II só 250 horas por mês?

23. Dois metais x e y são obtidos de dois tipos de minérios I e II. De $100Kg$ de I se obtém 3 gramas de x e 5 gramas de y e de $100Kg$ de II obtém-se 4 gramas de x e 2,5 gramas de y. Quantos quilos de minério de cada tipo serão necessários para se obter 72 gramas de x e 95 gramas de y, usando-se simultaneamente os dois minérios?

24. Três pessoas jogam juntas. Na primeira rodada a primeira perde para cada um dos outros dois a mesma quantia que cada um deles tinha no início do jogo. Na segunda rodada, a segunda pessoa perde para cada um dos outros a mesma quantia que eles tinham no final da 1a rodada. Na terceira rodada, o 1º e o 2º jogadores ganham do 3º a mesma quantia que cada um tinha no final da segunda rodada. Neste momento, os jogadores verificaram que cada um deles possui $R\$24,00$. Quanto cada jogador tinha ao começar o jogo?

25. Uma indústria produz três produtos, A, B e C, utilizando dois tipos de insumos, X e Y. Para a manufatura de cada quilo de A são utilizados 1 grama do insumo X e 2 gramas do insumo Y; para cada quilo de B, 1 grama do insumo X e 1 grama do insumo Y e, para cada quilo de C, 1 grama do insumo X e 4 gramas do insumo Y. O preço da venda do quilo de cada um dos produtos A, B e C é de $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$5,00$, respectivamente. Com a venda de toda a produção de A, B e C manufaturada com 1 quilo de X e 2 quilos de Y, essa indústria arrecadou $R\$2500,00$. Determine quantos quilos de cada um dos produtos A, B e C foram vendidos.

26. Cada ração contém as seguintes unidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G).

	P	C	G
(1)	1	0	2
(2)	3	1	4
(3)	2	2	1

Se as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G) que a cooperativa tem disponível, nos meses de dezembro e janeiro, são mostradas na tabela abaixo, qual a quantidade de cada tipo de ração é produzido em cada mês?

Quant./mês	P	C	G
Dezembro	15	10	14
Janeiro	13	5	17