Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Gabarito $2^{\underline{a}}$ Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -16 \\ -66 \end{bmatrix}$;

   (c) $\begin{bmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 3 \\ 8 & 16 & -3 & -4 \\ 20 & 10 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -20 \\ 15 \end{bmatrix}$.

2. (a) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; det $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -5+6 = 1 \neq 0$, logo A é invertível.

   Logo, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix}$; det $\begin{bmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 64 \neq 0$, logo A é invertível.

   Logo, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -36 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{64} & \frac{19}{16} & -\frac{13}{8} \\ \frac{11}{32} & -\frac{7}{8} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -36 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (c) det $A = 0$, logo não é possível utilizar o método da matriz inversa para resolver o sistema.

3. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, logo det $A = 10+9 = 19 \neq 0$ portanto utilizar a regra de Cramer.

   Então, $D = \det A = 19$, $D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 38$ e $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -19$.

   Logo, $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{38}{19} = 2$ e $y = \dfrac{D_2}{D} = -\dfrac{19}{19} = -1$, e a solução do sistema é $S = \{(2,\ -1)\}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, logo $\det A = 22 \neq 0$ portanto podemos utilizar a regra de Cramer.

Então, $D = \det A = 22$, $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22$ e $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -13 \end{vmatrix} = 44$.

Logo, $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{66}{22} = 3$, $y = \dfrac{D_2}{D} = -\dfrac{22}{22} = -1$ e $z = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{44}{22} = 2$, e a solução do sistema é $S = \{(3,\ -1,\ 2)\}$.

4. (a) (i) $k \neq -3$ e $k \neq 2$; (ii) $k = 2$; (iii) $k = -3$.

   (b) (i) $k \neq 1$ e $k \neq -2$; (ii) $k = 1$; (iii) $k = -2$.

   (c) (i) para nenhum $k \in I\!R$; (ii) $k \neq 4$; (iii) $k = 4$.

   (d) (i) $k \neq 3$; (ii) $k = 3$; (iii) para nenhum $k \in I\!R$.

5. (a) $k = 1$ (b) $k = 2$.

6. (a) $a \neq \dfrac{2}{5}$ e $b \in I\!R$; (b) $a = \dfrac{2}{5}$ e $b = 0$; (c) $a = \dfrac{2}{5}$ e $b \neq 0$.

7. (a) $k = -6$ (b) $k = 13$.

8. $S = \{\lambda \in I\!R;\ \lambda \neq 0,\ \lambda \neq -1,\ \text{e}\ \lambda \neq 1\}$.

9. (a) $\det A = -1 \neq 0$ logo, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\text{Sol}_1 = \{(-1, -5, 4)\}$; $\text{Sol}_2 = \{(-1, -5, -3)\}$; $\text{Sol}_3 = \{(2, -8, 4)\}$.

10. (a) $-5a + 2b + c = 0$; (b) $2a - b + c = 0$; ; (c) para quaisquer a, b e c em $I\!R$;

    (d) $a \in I\!R \backslash \{1,\ -2\}$; (e) $-a + b + 2c = 0$; ; (f) $y + z = 0$ e $x + 2y - t = 0$.

11. (a) Se $ad - bc \neq 0$, então a matriz dos coeficientes do sistema é invertível, logo terá uma única solução dada por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{de - bf}{ad - bc} \\ \dfrac{af - ce}{ad - bc} \end{bmatrix}$.

12. (a) $\begin{cases} 2(1) & + & 3(-1) & - & (-1) = & 0 \\ 1 & - & 4(-1) & + & 5(-1) = & 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2(-2) & + & 3(2) & - & (2) = & 0 \\ -2 & - & 4(2) & + & 5(2) = & 0 \end{cases}$

(c) $x = -1$, $y = 1$ e $z = 1$, logo $\begin{cases} 2(-1) & + & 3(1) & - & (1) = & 0 \\ -1 & - & 4(1) & + & 5(1) = & 0 \end{cases}$

(d) $3x = -3$, $3y = 3$ e $3z = 3$, logo $\begin{cases} 2(-3) & + & 3(3) & - & (3) = & 0 \\ -3 & - & 4(3) & + & 5(3) = & 0 \end{cases}$

(e) Porque em um sistema homogêneo se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são soluções então,

$$k_1(x_1, y_1, z_1) + k_2(x_2, y_2, z_2)$$

também é solução para todo $k_1,\ k_2 \in I\!R$.

13. (a) Sol $= \{(0, 0, 0)\}$; o sistema é compatível determinado;

(b) Sol $= \{(2, 1, 2)\}$; o sistema é compatível determinado;

(c) sistema incompatível, não tem solução;

(d) Sol $= \left\{\left(-1 - 4z,\ \dfrac{1}{3} + 2z,\ z\right);\ z \in I\!R\right\}$; o sistema é compatível indeterminado;

(e) Sol $= \{(0, -w, -w, 0, w);\ w \in I\!R\}$; o sistema é compatível indeterminado;

(f) Sol $= \{(12 + 26z,\ -14 - 33z,\ z,\ 3 + 10z);\ z \in I\!R\}$; o sistema é compatível indeterminado;

(g) Sol $= \left\{\left(\dfrac{7}{16}, -\dfrac{1}{16}, \dfrac{17}{8}\right)\right\}$; o sistema é compatível determinado;

(h) sistema incompatível, não tem solução;

(i) Sol $= \{(0, 0, 0)\}$; o sistema é compatível determinado;

(j) sistema incompatível, não tem solução;

(k) Sol $= \left\{\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{2}, 2, -\dfrac{8}{3}\right)\right\}$; o sistema é compatível determinado;

(l) sistema incompatível, não tem solução;

(m) Sol $= \{(2, -1, -2)\}$; o sistema é compatível determinado;

(n) Sol $= \{(-4, 2, 10)\}$; o sistema é compatível determinado;

(o) Sol $= \{(5, 1)\}$; o sistema é compatível determinado;

(p) Sol $= \{(-20,\ y,\ -32 + 4y);\ y \in I\!R\}$ o sistema é compatível indeterminado;

(q) sistema incompatível, não tem solução;

(r) Sol $= \{(1, 2, 2 - 2)\}$ o sistema é compatível determinado;

(s) Sol $= \{(3 - 4y + 5z,\ y,\ z,\ 7 - 9y + 13zy);\ y, z \in I\!R\}$ o sistema é compatível indeterminado;

(t) Sol $= \left\{\left(-\dfrac{209}{33}t, -\dfrac{53}{11}t, -\dfrac{79}{33}t, t\right); t \in I\!R\right\}$ o sistema é compatível indeterminado;

(u) sistema incompatível, não tem solução;

(v) Sol $= \{(-z+2t,\ 1+2z\ z,\ t);\ z,t \in I\!R\}$; o sistema é compatível indeterminado;

(x) Sol $= \{(1-3y-w,\ y,\ 2+w,\ 3+2w,\ w);\ y,w \in I\!R\}$; o sistema é compatível indeterminado.

14. (a) $k=-6$; (b) $k=\frac{16}{7}$; (c) $k=-1$.

15. (a) (V); (b) (F); (c) (V); (d) (V); (e) (V); (f) (V); (g) (F); (h) (V); (i) (V); (j) (F); (k) (V); (l) (F); (m) (V); (n) (V).

16. Devem processadas $20t$ de cada tipo de combustível.

17. $1,5T$ de plástico normal e $2,5T$ de plástico especial.

18. Devem ser utilizadas $3,2g$ de A, $4,2g$ de B e $2g$ de C.

19. Este exercício não é coerente do ponto de vista prático, uma vez que a quantidade de ração do tipo B é negativa. Modele o problema e a solução será:

    Abril: 85 de A, -45 de B e 30 de C.

    Maio: 76 de A, -40 de B e 30 de C.

    Junho: 72 de A, -38 de B e 26 de C.

20.

21. $x=5$, $y=3$ e $z=2$.

22. Poderão ser fabricadas 60 unidade de A e 80 unidades de B.

23. Serão necessários $1.600Kg$ do minério de tipo I e $600Kg$ do minério de tipo II.

24. O jogador A tinha $R\$39,00$, o jogador B tinha $R\$21,00$ e o jogador C tinha $R\$12,00$.

25. Foram vendidos $700Kg$ do produto A, $200Kg$ do produto B e $100Kg$ do produto C.

26. Em dezembro foram produzidos 1 unidade da ração 1, 2 unidades da ração 2 e 4 unidades da ração 3.

    Já em janeiro foram produzidos 2 unidades da ração 1, 3 unidades da ração 2 e 1 unidade da ração 3.