CA 04 - STAT 100

Fábio Rodrigues Pereira

Oppgave 0

Forrige ukes kollokvieoppgaver var et spesielt viktig oppgavesett for kurset så langt. Gå grundig gjennom løsningsforslaget (men bruk maks en time på dette), og diskuter det dere ikke helt forstod, og som dere nå skjønner litt bedre.
Skriv ned hvilke(t) delspørsmål (eller hvilke deler av løsningsforslaget) dere mener hjalp best for å øke forståelsen, og hvorfor.

1c. $X_i \sim norm(\mu, \sigma) = X_i = \varepsilon_i + \mu$ where $\varepsilon_i \sim norm(0, \sigma)$. ☒

The solution is not clear in this point.

3 Please, could you just point to me how you set "$n \geq 4 \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \left(\frac{1,96}{0,02}\right)^2$" ? Thanks! ✱ question here

4 $H_0 :=$ not have reduction Vs $H_1 :=$ One-sided $p < 0,523$
or $p \geq 0,523$ ☒

Oppgave 1

To scrabblespillere A og B ønsker å gjøre en statistisk hypotesetest for å finne ut om de er like gode, eller om den ene er bedre enn den andre.

a) Bør A og B velge en ensidig eller tosidig hypotesetest? Hvorfor?

b) Sett opp hypotesene med ord.

a and b: The hypotese tests can be set as one-sided H_1 or two-sided H_1, such that:

$H_0 :=$ They are just as good Vs $H_1 :=$ B is the best (one-sided)

or

$H_0 :=$ They are just as good Vs $H_1 :=$ One is better than the other (two-sided)

↳ According to the exercise text, we are interested in finding if someone is better than the other, thus the hypotese test H_1 is two-sided. ☒

For å undersøke dette, avtaler A og B å spille 25 spill og å beregne poengdifferansen D mellom spiller A og B i hvert spill. De antar følgende sannsynlighetsmodell: $D_i \sim N(\mu_D, \sigma)$, D_i uavhengige.

c) Hvilken av de to parameterene μ_D og σ er hovedfokus for denne hypotesetesten?

↳ Here, we are interested in finding μ_D for the two-sided H_1 hypotese test from the previous exercise, such that: $H_0 := \mu_D = \mu_0 = 0$ Vs $H_1 := \mu_D \neq \mu_0 = 0$ ☒

d) Spiller A velger signifikansnivå α=0.05 for testen sin. Hva betyr dette? Svar både med en forklaring som tar utgangspunkt i sannsynligheten for Type I-feil, og en forklaring som sier hva dette betyr i denne spesielle situasjonen. $P(\text{type I error}) = P(\text{Reject } H_0 \mid H_0 \text{ true})$

↳ For 1-sided H_1 hypotese := If μ_D is larger or equal k (rejection limit) which is calculated using the significance level $\alpha = 0{,}05$, then we reject H_0 hypotese otherwise we hold H_0.

↳ For 2-sided H_1 hypotese := If μ_D is less or equal k_1 (rejection limit) or μ_D is larger or equal k_2 (rejection limit) which is calculated using 1/2 of the significance level $\alpha = 0{,}05$, then we reject H_0 hypotese otherwise we hold H_0.

e) Hvis H_0 forkastes med et signifikansnivå på 0.05, hvorfor kan vi ikke konkludere med at «sannsynligheten for at H_0 ikke er sann, er 95%»?

↳ H_0 and H_1 are claims not stochastic variables and these have observations which we are interested in.

f) Spiller A velger å bruke gjennomsnittlig poengdifferanse, $\overline{D}$ for de 25 spillene, som sin testobservator. Hvorfor er dette en fornuftig testobservator?

↳ The average of the difference of points $\overline{D}$ is reasonable because we can choose the statistic test $\overline{D} \sim \text{norm}(\mu_D, \sigma)$, standardidose it to get Z and then check the following rejection limits to evaluate if H_0 is rejected or holded.

g) Hvilken fordeling har testobservatoren hvis σ er kjent? $\overline{D} \sim \text{norm}\left(\mu_D, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Hvilken fordeling har testobservatoren hvis σ er ukjent? $\overline{D} \sim T_{n-1}\left(\mu_D, \frac{SD}{\sqrt{n}}\right)$

La oss gni det inn:

i) Forklar hvorfor en test basert på testobservatoren $\overline{D}$, den sannsynlighetsmodellen som ble formulert i begynnelsen av oppgaven, og antakelsen at σ er kjent, kalles en «ett-utvalgs z-test».

↳ This is a sample z-test because it is standardisededed under μ_0, such that $Z = \dfrac{\overline{d} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Forklar også hvorfor en test basert på testobservatoren $\overline{D}$, den sannsynlighetsmodellen som ble formulert i begynnelsen av oppgaven, og sistnevnte antakelser (ukjent σ) kalles en «ett-utvalgs t-test».

↳ This is a sample t-test because it is approximated to t-distribution due to scarce number of attempts ($n=25$) and σ unknown. Then, we use t-distribution to approximate to the standard normal distribution Z.

h) Anta først at σ er kjent, σ=40. Finn forkastningsområdet for den tilsvarende ett-utvalgs z-testen når det valgte signifikasnnivået er α=0.05.
Oppgi forkastningsområdet både i form av z-verdier og i form av $\bar{d}$-verdier.

$H_0 := \mu_D = 0$ Vs $H_1 := \mu_D \neq 0$

* $n = 25$ and Significance level (α): 0,05

* Test statistic: $\bar{D} \sim norm(\mu_D; 40)$ where $\hat{\mu}_D = \bar{d}$

$$P(\bar{D} \leq k_1) = P\left(\frac{\bar{d}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{k_1-0}{40/\sqrt{25}}\right) = P\left(Z \leq \frac{k_1}{8}\right) = 0,025$$

$$\therefore \frac{k_1}{8} = -1,96 \longrightarrow k_1 = 8\cdot(-1,96) = -15,68$$

$$P(\bar{D} \geq k_2) = P\left(\frac{\bar{d}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k_2-0}{40/\sqrt{25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k_2}{8}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{k_2}{8}\right) = 0,025$$

$$0,975 = 1 - 0,025 = P\left(Z \leq \frac{k_2}{8}\right)$$

$$\therefore \frac{k_2}{8} = 1,96 \longrightarrow k_2 = 15,68$$

* Therefore, $\bar{D} \sim norm\left(0, \frac{40}{\sqrt{25}}\right)$ has Rejection limits $k_1 = -15,68$ and $k_2 = +15,68$. The Rejection regions are $|\bar{D}| \geq 15,68$ with $P(\bar{D} \leq -15,68) + P(\bar{D} \geq 15,68) = 0,05$.

* On the other hand, $Z \sim norm(0,1)$ has Rejection limits $k_1 = -1,96$ and $k_2 = 1,96$. The Rejection regions are $|Z| \geq 1,96$ with $P(Z \leq -1,96) + P(Z \geq 1,96) = 0,05$. ☐

i) Anta at vi har observert $\bar{d} = 17.5$. Hva blir konklusjonen på hypotesetesten?

↳ Since $\bar{d} = 17,5$ which is bigger than the Rejection limit $k_2 = 15,68$ and inside the Rejection region, then We Reject H_0, in other words, one player is better than the other. ☐

j) Anta fra nå at σ ikke er kjent, og at vi har observert $\bar{d} = 17.5$, og $SD_D = 43.7$.

Hvordan vil forkastningsgrensene endre seg under denne nye antakelsen? Svar først uten å regne, men bare ved å sammenligne det kjente teoretiske standardavviket som vi brukte tidligere i oppgaven, med det nå oppgitte empiriske standardavviket, og ved å mobilisere det du vet om normalfordelingen (og z-test) vs t-fordelingen (og t-test).

→ The Rejection regions or limits should be changed because their calculations are based on the statistic test T-distribution, not anymore on Z-normal distribution. The distribution curve for T is wider than for Z, then the Rejection regions, despite that T approximates Z, should be with little discrepancy.

k) Utfør hypotesetesten, det vil si gjør en ett-utvalgs t-test ved å beregne de nye forkastningsgrensene, og trekk konklusjon.

$H_0 := \mu_D = 0$ Vs $H_1 := \mu_D \neq 0$

* $n = 25$
* Significance level (α): 0,05
* Test statistic: $\bar{D} \sim T_{24}(\mu_D, SD)$

$$P\left(\frac{\bar{d}-\mu_0}{SD/\sqrt{n}} \leq \frac{k_1-\mu_0}{SD/\sqrt{n}}\right) = P\left(T_{24} \leq \frac{k_1}{43{,}7/\sqrt{25}}\right) = 0{,}025$$

$$\therefore \frac{k_1}{8{,}74} = t_{24;0{,}025} = -2{,}064 \longrightarrow k_1 \cong -18{,}04$$

$$P\left(\frac{\bar{d}-\mu_0}{SD/\sqrt{n}} \geq \frac{k_2-\mu_0}{SD/\sqrt{n}}\right) = P\left(T_{24} \geq \frac{k_2}{43{,}7/\sqrt{25}}\right) = 1 - P\left(T_{24} \leq \frac{k_2}{8{,}74}\right) = 0{,}025$$

$$\therefore P\left(T_{24} \leq \frac{k_2}{8{,}74}\right) = 0{,}975 \longrightarrow \frac{k_2}{8{,}74} = 2{,}064 \longrightarrow k_2 \cong 18{,}04$$

* The Rejection regions: $|d| \geq 18{,}04$
* As expected, the rejection limits now are a little higher

→ Since $\bar{d} = 17{,}5 < 18{,}04$, then we don't reject H_0.

l) Hva ville vært det minste signifikansnivået vi kunne valgt for at H_0 skulle blitt forkastet med disse observasjonene? Eller sagt på en annen måte, hva er sannsynligheten for at du observerer minst så store forskjeller i gjennomsnittet som $\bar{d} = 17.5$, gitt at H_0 er sann? Men aller først, altså før dere begynner å regne: Hva kalles dette tallet? → p-value

Deretter: Beregn det. Og så: sammenlign det med signifikansnivået α og trekk en konklusjon på testen din. Forklar samtidig hvorfor dette også er en fornuftig fremgangsmåte når du skal gjøre hypotesetester.

↳ $\text{p-value} = P(\bar{D} \leq 17{,}5) + P(\bar{D} \geq 17{,}5) = P\left(T_{24} \leq \frac{17{,}5-0}{43{,}7/\sqrt{25}} = 2\right) + P(T_{24} \geq 2) = 2 \cdot 0{,}0285 = 0{,}057$ //

↳ Since p-value $= 0{,}057 > \alpha = 0{,}05$, then we hold H_0.

↳ We can see that the first method by rejection regions we hold H_0 because $\bar{d} = 17{,}5 < 18{,}04 = k_2$.
Also, since p-value $= 0{,}057 > 0{,}05 = \alpha$, then we hold H_0. ☑

m) Til slutt skal vi repetere estimering og konfidensintervall for μ. Anta fortsatt at du har observert $\bar{d} = 17.5$ og $SD_D = 43.7$. Bruk dette til å gi et punktestimat for μ_D. Beregn et tilhørende 95% konfidensintervall for μ_D.

↳ Estimator for $\hat{\mu}_D = \bar{d} = 17{,}5$ → where $\bar{d} \sim T_{n-1}\left(\mu_D, SD/\sqrt{n}\right)$; $n = 25$ and σ unknown.

↳ $KI\,95\% = \bar{d} \pm T_{24;0{,}025} \cdot \cancel{\frac{SD}{\sqrt{n}}} = 17{,}5 \pm \frac{2{,}064 \cdot 5}{43{,}7} = [-0{,}5 ; 35{,}5]$ ☑

n) Er H_0-verdien for μ_D innenfor eller utenfor det konfidensintervallet du akkurat har beregnet? Overbevis hverandre om at dette er det samme som å teste en tosidig test på nivå 0.05.

↳ We see that the entire KI95% is outside the rejection region of H_0, then we hold H_0 when using this method for this case.

↳ Both methods are almost the same because both uses the standard error $\frac{SD}{\sqrt{n}}$ and the estimate $\bar{d}$ to compute their limits. ☑

→ Since H_0 value for μ_D is covered by KI 95%, then we can not reject H_0. This is the same for two-sided test at $\alpha = 0{,}05$. ☑

o) Hva ville konklusjonen på testen vært hvis hvis observasjonene var de samme, men α=0.10? Begrunn svaret.

↳ $KI\,90\% = \bar{d} \pm T_{24;0,05} \cdot \frac{\sqrt{m}}{SD} = 17,5 \pm \frac{1,711 \cdot 5}{43,7} = [17,304 \, ; \, 17,695]$ * We see that the KI 90% is tighter than the KI 95%.

↳ $p\text{-value} = P(\bar{D} \leq 17,5) + P(\bar{D} \geq 17,5) = P\left(T_{24} \leq \frac{17,5-0}{43,7/\sqrt{25}} = 2\right) + P(T_{24} \geq 2) = 2 \cdot 0,0285 = 0,057$

* The p-value is the same as the previous exercise.

↳ $H_0 := \mu_D = 0$ Vs $H_1 := \mu_D \neq 0$

* $m = 25$
* Significance level (α): $0,1$
* Test statistic: $\bar{D} \sim T_{24}(\mu_D, SD)$

$$P\left(\frac{\bar{d}-\mu_0}{SD/\sqrt{m}} \leq \frac{k_1-\mu_0}{SD/\sqrt{m}}\right) = P\left(T_{24} \leq \frac{k_1}{43,7/\sqrt{25}}\right) = 0,05$$

$$\therefore \frac{k_1}{8,74} = t_{24;0,025} = -1,711 \longrightarrow k_1 \cong -14,95$$

$$P\left(\frac{\bar{d}-\mu_0}{SD/\sqrt{m}} \geq \frac{k_2-\mu_0}{SD/\sqrt{m}}\right) = P\left(T_{24} \geq \frac{k_2}{43,7/\sqrt{25}}\right) = 1 - P\left(T_{24} \leq \frac{k_2}{8,74}\right) = 0,05$$

$$\therefore P\left(T_{24} \leq \frac{k_2}{8,74}\right) = 0,95 \longrightarrow \frac{k_2}{8,74} = 1,711 \longrightarrow k_2 \cong 14,95$$

* The Rejection regions: $|d| \geq 14,95$

↳ The conclusion is that H_0 is rejected by the rejection regions because $\bar{d} = 17,5 > 14,95 = k_2$ and H_0 is rejected by KI 90% method because the KI interval $[17,304 \, ; \, 17,695]$ is inside the rejection region $|T| \geq 14,95$. Also H_0 is rejected by p-value method because $p\text{-value} = 0,057 < 0,1 = \alpha$. ☒

p) Hva ville konklusjonen på denne testen vært hvis hvis $\bar{d} = 17.5$ og $SD_D = 43.7$ var det samme, men n var dobbelt så stor? Begrunn svaret.

$H_0 := \mu_D = 0$ Vs $H_1 := \mu_D \neq 0$

* $n = 50$ and Significance level (α) : 0,05

* Test statistic : $\bar{D} \sim norm(\mu_D ; 40)$ where $\hat{\mu}_D = \bar{d}$

$$P(\bar{D} \leq k_1) = P\left(\frac{\bar{d} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{k_1 - 0}{43,7/\sqrt{50}}\right) = P\left(Z \leq \frac{k_1}{6,18}\right) = 0,025$$

$$\therefore \frac{k_1}{6,18} = -1,96 \longrightarrow k_1 = 6,18 \cdot (-1,96) = -12,11$$

$$P(\bar{D} \geq k_2) = P\left(\frac{\bar{d} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k_2 - 0}{43,7/\sqrt{50}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k_2}{6,18}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{k_2}{6,18}\right) = 0,025$$

$$0,975 = 1 - 0,025 = P\left(Z \leq \frac{k_2}{6,18}\right)$$

$$\therefore \frac{k_2}{6,18} = 1,96 \longrightarrow k_2 = 12,11$$

* The rejection region is $|\bar{D}| \geq 12,11$

* We can use normal distribution as statistic test despite that σ is unknown because n is larger than 30. Therefore the rejection regions will be $|\bar{D}| \geq 12,11$. Since $\bar{d} = 17,5$ is inside the rejection region, then we reject H_0.