



Introdução ao Processamento Digital de Imagem MC920 / MO443

Prof. Hélio Pedrini

Instituto de Computação

UNICAMP

<http://www.ic.unicamp.br/~helio>

1º Semestre de 2018

1 Representação

- Código da Cadeia
- Aproximações Poligonais
- Assinatura
- Fecho Convexo
- Esqueleto

2 Descrição

- Descritores de Borda
- Descritores de Região

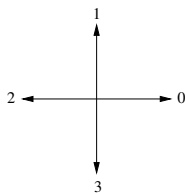
- Um dos problemas básicos no desenvolvimento de um sistema para análise de imagens é a seleção de um conjunto de características extraídas do objeto de interesse para o propósito de classificação.
- Após a imagem ter sido segmentada em regiões ou objetos, os agrupamentos resultantes de pixels são normalmente representados e descritos em formato apropriado para o processamento subsequente.
- Um objeto pode ser representado em termos de suas características externas (bordas) ou características internas (pixels que compõem o objeto).
- A descrição depende da representação adotada e deve permitir a caracterização de sua forma sem ambiguidades e com um número reduzido de características ou medidas extraídas do objeto.
- Diversos esquemas de representação e descrição de objetos têm sido propostos.

- Um aspecto desejável nos descritores de forma é que eles deveriam ser pouco afetados na presença de ruído e por transformações geométricas como mudança de escala, rotação e translação.
- Abordagens para representação e descrição de objetos segmentados das imagens são classificadas de acordo com as características extraídas dos contornos ou das próprias regiões que formam os objetos.
- Outra classificação possível seria considerar o domínio no qual as características são derivadas, tanto no domínio espacial quanto de frequência.
- As técnicas de segmentação descritas anteriormente resultam em agrupamentos de pixels que correspondem às regiões homogêneas da imagem ou aos contornos (bordas) dos objetos.
- Estruturas adequadas de representação facilitam o armazenamento e a manipulação dos objetos segmentados da imagem, além de simplificarem o cálculo de certos descritores de forma.

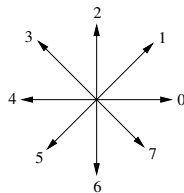
Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- Freeman (1961 e 1974) propôs um esquema conhecido como *código da cadeia* para representar a borda de um objeto:
 - Ao invés de armazenar as coordenadas absolutas dos pixels, a representação pelo código da cadeia utiliza a posição relativa entre pixels consecutivos da borda.
 - Dado um ponto inicial pertencente à borda, o código é definido por uma sequência formada pelas direções entre cada pixel e seu vizinho, até que todos os pixels da borda sejam considerados.
 - A direção de cada segmento é codificada por um esquema de numeração baseado na vizinhança-4 ou vizinhança-8, ilustrado a seguir.



(a) vizinhança-4

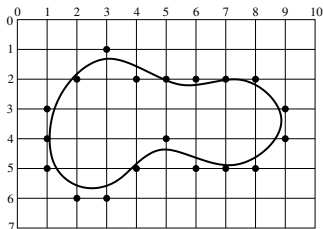


(b) vizinhança-8

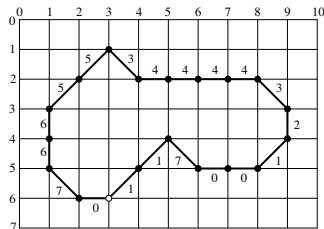
Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- Essa representação baseia-se inicialmente na amostragem da borda a ser codificada por meio de uma grade cujo espaçamento determina a resolução da codificação.
- A figura (a) mostra um contorno e uma grade de amostragem. Os pontos marcados são os vértices da grade que estão mais próximos da curva e que serão usados na codificação. A figura (b) mostra o resultado da amostragem da borda com a grade.



(a) borda original com pontos amostrados sobre a grade



(b) reamostragem da borda, com códigos direcionais

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- O código da cadeia é gerado seguindo-se a borda do objeto, por exemplo, no sentido anti-horário e atribuindo-se uma direção aos segmentos que conectam cada par de pixels, de acordo com a vizinhança-4 ou vizinhança-8.
- Assumindo-se que a posição inicial seja o ponto (3,6), o código da cadeia referente à curva da figura (b) é dado pela sequência 1170012344443556670.
- Na forma descrita, o código da cadeia é dependente do ponto inicial da borda.

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- Para torná-lo invariante com respeito à escolha do primeiro pixel da borda, um procedimento de normalização consiste em encontrar o pixel que resulte no menor número inteiro, considerando a sequência de dígitos como um número na base 4 ou 8, de acordo com o conceito de vizinhança adotado. Esse pixel é então utilizado como o ponto inicial.
- Esse processo é ilustrado na figura a seguir, em que o código da cadeia é obtido a partir do contorno do objeto da figura (b) anterior, tendo como ponto inicial o pixel (3,6).

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- O resultado do primeiro deslocamento circular de dígitos, em que o dígito menos significativo passa a ser o dígito mais significativo, é ilustrado na figura (b).
- Isso é equivalente ao código formado utilizando-se o pixel (2,6) como ponto inicial.
- O resultado do segundo deslocamento, mostrado na figura (c), é equivalente ao código formado com o pixel (1,5) como ponto inicial.
- O código cujo número inteiro é mínimo considerando-se todos os deslocamentos é mostrado na figura (d), o qual é derivado a partir do pixel (6,5).

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

$C = 1\ 1\ 7\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 0$

(a)

$C = 0\ 1\ 1\ 7\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7$

(b)

$C = 7\ 0\ 1\ 1\ 7\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 5\ 5\ 6\ 6$

(c)

$C = 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 0\ 1\ 1\ 7$

(d)

Figura: Invariância do código da cadeia com respeito à translação. (a) código da cadeia inicial; (b) resultado após primeiro deslocamento; (c) resultado após segundo deslocamento; (d) código da cadeia formado pelo menor número inteiro.

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- Para tornar o código da cadeia invariante quanto à mudança de escala, a borda pode ser reamostrada em uma grade de espaçamento conveniente.
 - ▶ Com a subdivisão da borda, os comprimentos dos segmentos dos códigos devem-se ajustar às subdivisões.
- A normalização pode também ser feita para tornar o código da cadeia invariante com respeito à rotação, utilizando-se a primeira diferença do código da cadeia.
 - ▶ A diferença é obtida contando-se, no sentido anti-horário, o número de direções que separam cada elemento adjacente ao código.
 - ▶ Seja $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ o código da cadeia que representa a borda de um objeto.
 - ▶ A primeira diferença do código da cadeia é dada por $b_0 b_1 \dots b_{n-1}$, em que $b_k = a_k - a_{k-1}$.
 - ▶ A diferença entre os elementos adjacentes é realizada de forma circular, ou seja, módulo 4 ou 8, conforme a vizinhança adotada para a adjacência dos pixels.

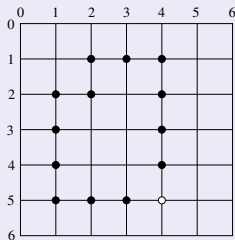
Esquemas de Representação

Código da Cadeia

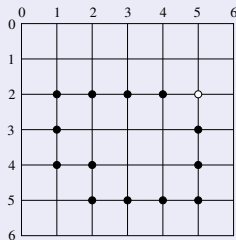
Exemplo:

Seja a borda B_1 de um objeto mostrado na figura (a) a seguir. Considerando o ponto inicial como (4,5), o código da cadeia de vizinhança-4 correspondente à borda B_1 é $C_1 = 11112232333000$.

Seja B_2 a borda do mesmo objeto, porém, após ter sofrido uma rotação de 90° no sentido horário. Considerando o ponto inicial como (5,2), o código da cadeia associado à borda B_2 é $C_2 = 22223303000111$.



(a) borda original do objeto



(b) borda após rotação do objeto em 90°

Uma observação interessante é que a diferença (módulo 4) entre cada par de dígitos correspondentes para os códigos C_1 e C_2 é sempre igual a 1, ou seja

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

Exemplo:

Após a rotação da borda, cada dígito do código da cadeia é alterado pelo mesmo valor, dependendo do grau de rotação, o que significa que dígitos *adjacentes* em um código da cadeia sempre terão a mesma diferença, mesmo após a rotação. Portanto, os códigos da cadeia representam a mesma borda de um objeto se pares de dígitos nos códigos possuem a mesma diferença.

Assim, para a borda B_2 do objeto após a rotação, cujo código da cadeia é 22223303000111, o código da primeira diferença é 0001013100100. Analogamente, para a borda B_1 do objeto original, cujo código da cadeia é 11112232333000, o código da primeira diferença também é 0001013100100.

Portanto, esses dois códigos da cadeia representam a mesma borda, uma vez que seus códigos de primeira diferença são iguais.

Esquemas de Representação

Código da Cadeia

- Além da redução do espaço de armazenamento, o código da cadeia pode ser aplicado em várias tarefas de processamento e análise de imagens.
- Freeman (1974) propôs algoritmos para cálculo de perímetro e área baseado no código da cadeia para contornos fechados.
- A detecção de cantos ou junções em contornos de objetos descrita anteriormente é outra operação que pode ser realizada com o uso do código da cadeia.
- Kuhl e Giardina (1982) desenvolveram um procedimento para determinar os coeficientes de Fourier a partir do código da cadeia.
- Uma desvantagem do código da cadeia é sua sensibilidade a pequenas perturbações ao longo da borda, devido a ruído ou a imperfeições durante o processo de segmentação.

Esquemas de Representação

Aproximações Poligonais

- A borda de um objeto pode ser aproximada por um polígono, segundo uma precisão arbitrária.
- No caso de um contorno fechado, a aproximação é exata quando o número de segmentos do polígono for igual ao número de pontos na borda, de maneira que cada par de pontos adjacentes defina um segmento do polígono.
- O principal objetivo da aproximação poligonal é capturar a essência da forma da borda com o menor número possível de segmentos poligonais.
- Esse problema não é, em geral, trivial, podendo se tornar uma busca iterativa bastante custosa.
- No entanto, várias técnicas de aproximação poligonal, com complexidade computacional relativamente baixa, podem ser bem adaptadas para aplicações em processamento de imagens.

Esquemas de Representação

Aproximações Poligonais

- Uma solução possível é realizar a busca de polígonos de perímetro mínimo, os quais se ajustam à geometria estabelecida pela grade da imagem.
- Uma técnica baseada na divisão de segmentos consiste em subdividir sucessivamente um segmento em duas partes até que um determinado critério de erro seja satisfeito.
 - ▶ Um exemplo de critério é que a maior distância perpendicular entre o segmento da borda e a linha que une seus dois pontos extremos não exceda um determinado limiar.
 - ▶ Caso isso ocorra, o ponto mais distante no segmento da borda se torna um vértice que subdivide o segmento inicial em dois segmentos.
 - ▶ No caso de uma borda fechada, os melhores pontos iniciais são, em geral, os dois pontos mais distantes entre si da borda.

Esquemas de Representação

Aproximações Poligonais

- Esse processo é ilustrado na figura a seguir.

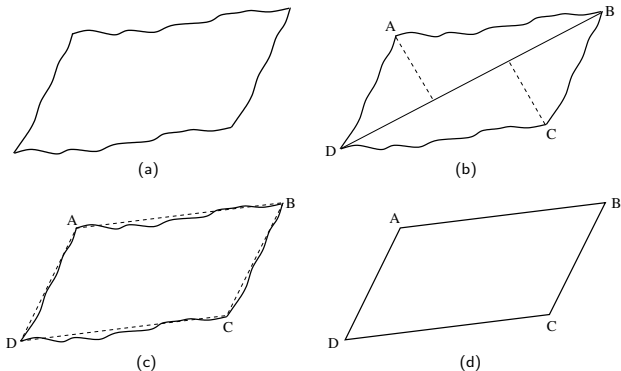


Figura: Aproximação poligonal. (a) borda original; (b) borda dividida em segmentos por meio de cálculo de distância; (c) união dos vértices; (d) polígono resultante.

Esquemas de Representação

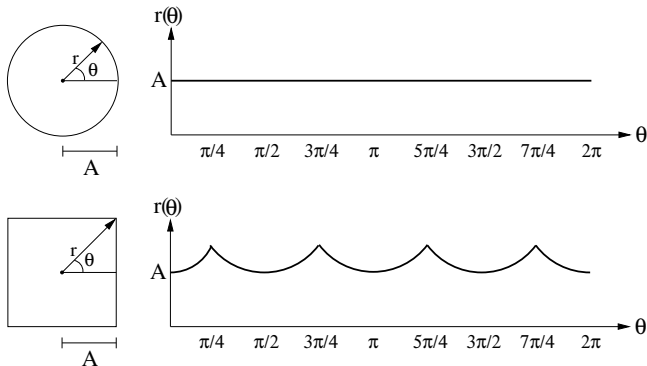
Aproximações Poligonais

- A borda do objeto, mostrada na figura (a), é subdividida em seus pontos mais distantes, conforme ilustrado na figura (b).
- O ponto A possui a maior distância perpendicular entre o segmento superior e a linha BD. De maneira similar, o ponto C possui a maior distância em relação ao segmento inferior.
- O processo termina com o polígono mostrado na figura (d), uma vez que nenhum ponto nos segmentos da borda possui uma distância perpendicular ao seu segmento correspondente maior que o limiar definido.

Esquemas de Representação

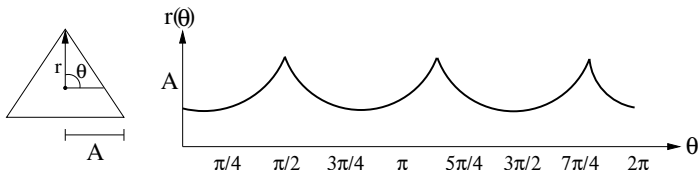
Assinatura

- Uma assinatura é uma representação unidimensional da borda de um objeto.
- Uma das formas mais simples é dada pelo gráfico da distância da borda ao centróide em função do ângulo, como ilustrado a seguir.



Esquemas de Representação

Assinatura



- Para essa definição, as assinaturas são invariantes com respeito à translação, mas são dependentes das transformações de rotação e mudanças de escala.
- A invariância com relação à rotação pode ser obtida pela seleção de um ponto inicial para a geração da assinatura, independente da orientação da forma.
 - ▶ Uma maneira é escolher o ponto mais distante do centróide, caso esse seja único.
 - ▶ Uma maneira alternativa é a seleção do ponto sobre o auto-eixo principal (maior) que esteja mais distante do centróide.
- A invariância com relação à escala pode ser obtida pela normalização dos valores de $r(\theta)$, por exemplo, no intervalo $[0, 1]$.

Esquemas de Representação

Fecho Convexo

- O fecho convexo de uma região planar R corresponde ao menor polígono convexo contendo R .
- Em análise de imagens, o fecho convexo é usado para representar formas poligonais complexas por meio de um polígono mais simples, o qual engloba a forma original.
- Essa forma mais simples, muitas vezes, é suficiente para permitir o reconhecimento do objeto.

Esquemas de Representação

Fecho Convexo

- A figura a seguir ilustra o fecho convexo, representado pelo polígono em linha tracejada, para um objeto extraído da imagem. Cada um dos ângulos dos vértices internos ao fecho convexo deve, naturalmente, ser menor que 180 graus.

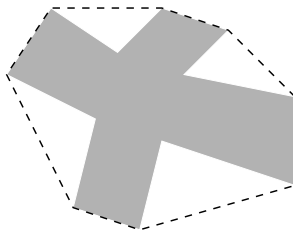


Figura: Fecho convexo (representado pelo polígono em linhas tracejadas) para uma região planar.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- Uma abordagem importante para a representação da forma de um objeto é reduzi-la a uma estrutura mais simples, chamada de *esqueleto*.
- O esqueleto de um objeto pode ser obtido por meio de técnicas como transformada do eixo médio, transformada de distância, diagrama de Voronoi e afinamento de objetos.
- A *transformada do eixo médio*, proposta por Blum (1967), determina o conjunto de pontos que estão mais próximos da borda do objeto. Um ponto interno ao objeto pertencerá ao esqueleto do objeto se ele tiver, no mínimo, dois pontos mais próximos da borda.
- De uma maneira mais formal, o eixo médio de um objeto pode ser definido como o conjunto de pontos formado pelos centros das maiores circunferências que inscrevem o objeto, cuja tangência ocorre em dois ou mais pontos.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- A figura a seguir ilustra essa definição para um objeto retangular.

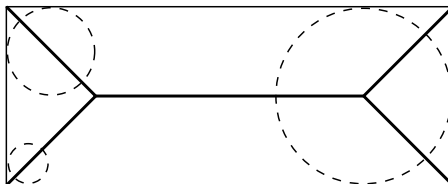


Figura: Eixo médio, representado pelos segmentos internos, para um objeto retangular.

- Embora a transformada do eixo médio resulte em um esqueleto intuitivamente aceitável, sua implementação direta é geralmente proibitiva em termos computacionais.
- Tal implementação envolve o cálculo da distância entre cada ponto interior e da borda do objeto. Inúmeros algoritmos têm sido propostos para melhorar a eficiência do cálculo dessa transformada.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- Outros exemplos de esqueletos de objetos, representados pelos segmentos internos em preto, são mostrados na figura a seguir, levando-se em consideração a distância Euclidiana entre os pontos.
- Conforme figuras (a) e (e), dois objetos diferentes podem ter o mesmo esqueleto. O esqueleto, mostrado na figura (d), contém um número muito menor de pontos comparado com o objeto original, entretanto, representa as simetrias locais e a estrutura topológica do objeto.

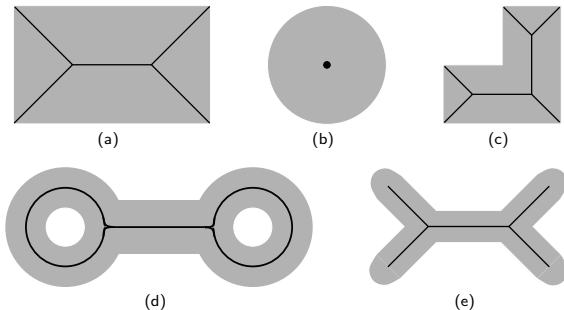
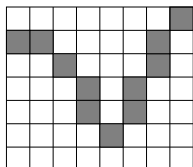


Figura: Exemplos de objetos e seus respectivos esqueletos.

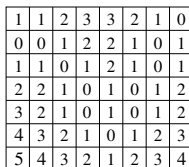
Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

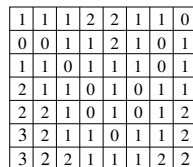
- A *transformada de distância* corresponde ao mapa resultante da distância entre cada ponto interior do objeto e de sua borda mais próxima.
- Os valores mais altos formam o esqueleto do objeto.
- Um exemplo da aplicação da transformada de distância em uma região da imagem é ilustrado na figura a seguir, sendo adotados dois conceitos para a adjacência entre pixels na imagem, a vizinhança-4 e vizinhança-8..



(a)



(b)



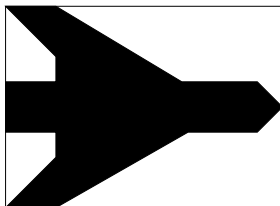
(c)

Figura: Transformada de distância. (a) imagem binária; (b) distâncias para vizinhança-4; (c) distâncias para vizinhança-8.

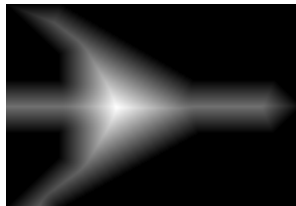
Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- A figura (a) a seguir mostra um objeto representado por uma imagem binária e o resultado da transformada da distância Euclidiana. O esqueleto do objeto, formado pelos valores mais altos de distância, corresponde às regiões mais claras mostradas na figura (b).



(a)



(b)

Figura: Transformada de distância. (a) imagem binária; (b) resultado da transformada da distância Euclidiana.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- O esqueleto de uma região também pode ser obtido por meio do *diagrama de Voronoi*.
- Seja S um conjunto de n pontos no plano. O diagrama de Voronoi do conjunto S é uma partição do plano em n regiões convexas $V(p)$ ao redor de cada ponto p , tal que cada ponto no interior da região $V(p)$ está mais próximo de p do que de qualquer outro ponto em S .
- Um exemplo de diagrama de Voronoi para um determinado conjunto de pontos é mostrado na figura a seguir.

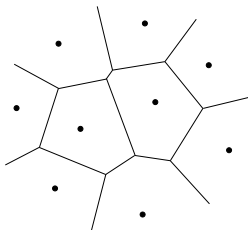
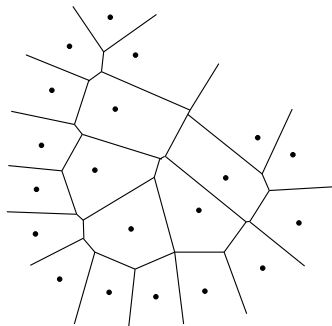


Figura: Diagrama de Voronoi para um dado conjunto de pontos.

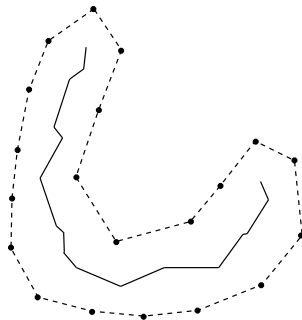
Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- As arestas do diagrama de Voronoi representam a fronteira entre regiões adjacentes no diagrama, tal que qualquer ponto sobre uma aresta possui mais de um ponto mais próximo. Assim, tomando-se as arestas de um diagrama de Voronoi, o resultado é chamado de esqueleto interno do objeto, como pode ser visto na figura a seguir.



(a) diagrama de Voronoi para um conjunto de pontos que forma o objeto



(b) arestas internas ao objeto

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- Técnicas de *afinamento* devem respeitar algumas condições durante o processo de remoção de pixels.
- O algoritmo não deve remover pontos extremos, não deve interromper a conectividade e nem causar erosão excessiva do objeto.
- Uma maneira comum de realizar o afinamento é por meio de sucessivas remoções, até que os pixels remanescentes sejam aqueles que pertencem ao esqueleto do objeto.
- Para a discussão dos algoritmos de afinamento a seguir, a vizinhança de um pixel é definida conforme convenção abaixo.

P_9	P_2	P_3
P_8	P_1	P_4
P_7	P_6	P_5

- Assume-se que os objetos possuem pixels de valor 1 (preto), enquanto que os pixels pertencentes ao fundo possuem valor 0 (branco).

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- O método de afinamento de Zhang e Suen (1984) verifica se um determinado pixel da imagem pode ser eliminado pela análise de seus oito pixels vizinhos.
- O método é composto de dois passos.
 - ▶ No passo 1, um pixel p é eliminado se satisfizer todas as seguintes condições:
 - (a) $2 \leq N(p) \leq 6$
 - (b) $S(p) = 1$
 - (c) $p_2 \ p_4 \ p_6 = 0$
 - (d) $p_4 \ p_6 \ p_8 = 0$

em que $N(p)$ é o número de vizinhos não nulos de p , ou seja

$$N(p) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 \quad (1)$$

e $S(p)$ é o número de transições de branco para preto (do valor 0 para o valor 1) na sequência ordenada $p_2, p_3, p_4, \dots, p_9, p_2$, ou seja, nos pixels que circundam o pixel central.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- ▶ A condição (a) verifica se existem ao menos dois pixels pretos que sejam vizinhos ao pixel p , e não mais do que seis. Essa condição procura remover sucessivamente pixels da borda do objeto, ao invés de suas partes internas.
- ▶ A condição (b) verifica se o número de conectividade do pixel p é igual a 1. Essa condição assegura que um pixel a ser removido pertença a apenas um único objeto.
- ▶ A condição (c) verifica se ao menos um dos pixels vizinhos p_2 , p_4 ou p_6 é fundo (branco) da imagem.
- ▶ A condição (d) verifica se ao menos um dos pixels p_4 , p_6 ou p_8 é fundo da imagem.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- ▶ No passo 2, um pixel p é eliminado se todas as condições abaixo forem satisfeitas:
 - (a) $2 \leq N(p) \leq 6$
 - (b) $S(p) = 1$
 - (c) $p_2 \ p_4 \ p_8 = 0$
 - (d) $p_2 \ p_6 \ p_8 = 0$
- ▶ Se um ponto satisfizer todas as condições (a) a (d), ele deve ser, inicialmente, marcado para ser removido.
- ▶ Em outras palavras, o ponto não deve ser efetivamente eliminado até que todos os pontos em cada passo tenham sido processados.
- ▶ Uma vez que o passo 1 tenha sido aplicado a todos os pontos, aqueles que tiverem sido marcados para remoção receberão o valor 0 (fundo).
- ▶ Em seguida, o passo 2 deve ser aplicado aos pontos resultantes exatamente da mesma maneira que o passo 1.
- ▶ Esse procedimento deve ser repetido até que não haja mais nenhum ponto a ser apagado, produzindo o esqueleto do objeto.

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- O método de Holt et al. (1987) é um refinamento do método de Zhang e Suen.
 - ▶ Inicialmente, os passos 1 e 2, descritos anteriormente, são aplicados aos objetos da imagem.
 - ▶ Posteriormente, aplica-se um processo de remoção de serrilhamento, o qual consiste na observação de que metade dos pontos que apresentam forma semelhante a uma escada pode ser removida sem afetar o formato ou a conectividade do objeto.
 - ▶ O pixel central das máscaras mostradas a seguir pode ser removido se um dos valores X for 0 (branco).

0	1	X
1	1	X
X	X	0
M_1		

X	1	0
X	1	1
0	X	X
M_2		

0	X	X
X	1	1
X	1	0
M_3		

X	X	0
1	1	X
0	1	X
M_4		

Figura: Máscaras de Holt et al. (1987).

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- O método de afinamento de Stentiford e Mortimer (1983) utiliza quatro máscaras M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , mostradas a seguir, em que o valor 0 representa um pixel branco (fundo), valor 1 representa um pixel preto (objeto) e X denota que o pixel pode ter valor 0 ou 1.

X	0	X
X	1	X
X	1	X

M_1

X	X	X
0	1	1
X	X	X

M_2

X	1	X
X	1	X
X	0	X

M_3

X	X	X
1	1	0
X	X	X

M_4

Figura: Máscaras de Stentiford e Mortimer (1983).

- Um *ponto final* é definido como um pixel preto que possui apenas um outro pixel preto como seu vizinho: esses pixels não podem ser removidos da imagem.
- Os passos do método, bem com a ordem na qual as quatro máscaras devem percorrer a imagem, são mostrados no algoritmo a seguir.

Algoritmo 1 Afinamento de Stentiford e Mortimer

- 1: Cada máscara deve percorrer a imagem em uma determinada ordem:
 - 2: M_1 : da esquerda para a direita e de cima para baixo
 - 3: M_2 : de baixo para cima e da esquerda para a direita
 - 4: M_3 : da direita para a esquerda e de baixo para cima
 - 5: M_4 : de cima para baixo e da direita para a esquerda
 - 6: Percorrer a imagem até encontrar um pixel que coincida com a máscara M_1 .
 - 7: Se este pixel não for um ponto final e se o seu número de transições S_p for igual a 1, marcar este ponto para que seja removido posteriormente.
 - 8: Repetir os passos (6) e (7) para todos os pixels que coincidam com a máscara M_1 .
 - 9: Repetir os passos (6), (7) e (8) para cada uma das máscaras M_2 , M_3 e M_4 , nesta ordem.
 - 10: Se algum ponto estiver marcado para ser removido, ele deve ser eliminado alterando seu valor para 0.
 - 11: Se algum ponto foi removido no passo (10), repetir todos os passos a partir do passo (6). Caso contrário, o processo termina.
-

Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- Exemplos de aplicação dos algoritmos de afinamento.



(a) imagem original



(b) Zhang e Suen (1984)

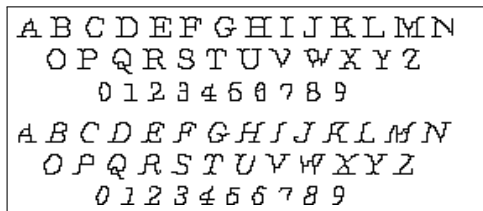
Esquemas de Representação

Esqueleto de um Objeto

- Exemplos de aplicação dos algoritmos de afinamento.



(c) Holt et al. (1987)



(d) Stentiford e Mortimer (1983)

Descritores de Bordas

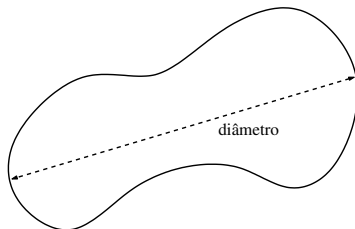
Diâmetro

- O *diâmetro* de uma borda B é definido como a maior distância entre dois pontos p_i e p_j pertencentes à borda, ou seja

$$\text{Diâmetro}(B) = \max_{i,j} [D(p_i, p_j)]$$

sendo que D é uma medida de distância entre os pontos.

- O conceito de diâmetro de uma borda é ilustrado na figura a seguir.



- O diâmetro é invariante quanto à rotação e translação do objeto.

Descritores de Bordas

Perímetro

- O *perímetro* representa o comprimento da borda de um objeto.
- Uma aproximação para este descritor pode ser obtida pela contagem dos pixels ao longo da borda do objeto na imagem.
- O perímetro é invariante quanto às operações de translação e rotação.
- Uma curva fechada que representa a borda de um objeto, como ilustrada a seguir, pode ser representada pela equação paramétrica complexa $z(t) = x(t) + i y(t)$, tal que $x(t)$ e $y(t)$ possuem período igual a 2π .

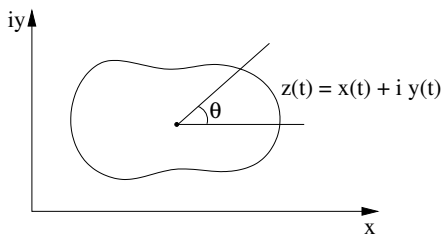


Figura: Representação paramétrica de uma curva fechada.

- O perímetro relativo à borda do objeto é dado por

$$\text{Perímetro} = \int \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} dt$$

- No caso de uma borda representada pelo código da cadeia baseada na vizinhança-8, ilustrado anteriormente, o perímetro pode ser calculado pelo número de códigos nas direções horizontal e vertical, adicionado pelo número de códigos nas direções diagonais, levando-se em conta o fator $\sqrt{2}$, ou seja

$$\text{Perímetro} = N_p + \sqrt{2} N_i$$

em que N_p e N_i representam o número de códigos direcionais pares (componentes horizontal e vertical) e ímpares (componentes diagonais), respectivamente.

Descritores de Bordas

Curvatura

- A *curvatura* mede a taxa de variação ao longo do contorno ou da borda do objeto.
 - ▶ Dessa forma, pontos situados em uma reta apresentam curvatura zero.
 - ▶ Uma circunferência possui curvatura constante, enquanto um contorno irregular apresenta curvatura mais alta em regiões de irregularidades, como cantos ou junções.
- A curvatura κ em um ponto do contorno pode então ser medida como

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

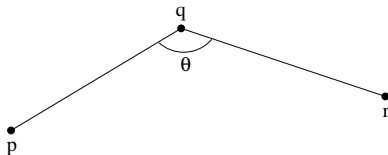
em que θ é a direção tangente do contorno e s é o perímetro do contorno. O valor de ds pode ser calculado como $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

- A obtenção de medidas de curvatura confiáveis em uma borda digital não é simples.

Descritores de Bordas

Curvatura

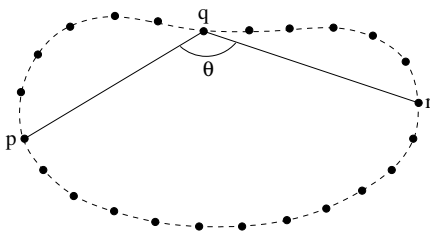
- Um descritor comum calcula a diferença entre as inclinações de segmentos de retas que unem pontos consecutivos da borda, conforme mostrado a seguir.



Descritores de Bordas

Curvatura

- A curvatura κ em um ponto (x_i, y_i) de um contorno planar fechado pode ser determinada por uma mudança na orientação entre os segmentos $\overline{(x_{i-j}, y_{i-j})(x_i, y_i)}$ e $\overline{(x_i, y_i)(x_{i+j}, y_{i+j})}$, ou seja, os segmentos unindo o ponto (x_i, y_i) a dois outros pontos localizados em uma vizinhança $j \geq 1$, conforme mostrado a seguir.



- A curvatura é calculada como

$$\kappa(x_i, y_i) = \arctan\left(\frac{y_{i+j} - y_i}{x_{i+j} - x_i}\right) - \arctan\left(\frac{y_i - y_{i-j}}{x_i - x_{i-j}}\right)$$

- Uma outra forma comum de medir a curvatura em um contorno utiliza a equação paramétrica da curva que forma o contorno.
- As coordenadas espaciais são dadas como uma função de um parâmetro $t \in [0, 1]$, expressas como $x(t)$ e $y(t)$.
- A curvatura pode ser dada pela equação

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

tal que

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \quad y'(t) = \frac{dy}{dt} \quad x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

- Para reduzir efeitos causados por amostragem pobre de pontos de contorno na imagem, as derivadas podem ser calculadas sobre uma versão suavizada da imagem, por exemplo, obtida pela aplicação de um filtro Gaussiano.

- Assim, a curvatura absoluta total ao longo de um contorno com perímetro L é dada por

$$\kappa_{\text{total}} = \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^L |\kappa(\rho)| = \oint |\kappa(\rho)| d\rho$$

Descritores de Bordas

Energia de Deformação

- A *energia de deformação* pode ser entendida como a energia necessária para ajustar um elástico ou arame à forma desejada da borda.
- A energia de deformação pode ser calculada como a soma dos quadrados da curvatura $\kappa(\rho)$ da borda sobre o perímetro L da borda, ou seja

$$\text{Energia} = \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^L \kappa^2(\rho)$$

em que $\text{Energia} \geq \frac{2\pi}{R}$. O valor mínimo $\frac{2\pi}{R}$ é obtido para um círculo de raio R .

Descritores de Região

- Nos descritores baseados em região, os pixels localizados no interior da região ou objeto são considerados no cálculo do descritor, em vez de utilizar apenas os pixels que formam a borda da região.

Descritores de Região

Área

- A *área* pode ser expressa como o número de pixels que compreende o objeto ou a região de interesse.
- Em uma imagem binária, a área de um objeto contido em um retângulo com dimensões de $m \times n$ pixels, em que os pixels $f(x, y)$ do objeto são representados pelo valor 1, é definida como

$$\text{Área} = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x, y)$$

- Em algumas aplicações, como sensoriamento remoto ou medicina, o tamanho real do pixel deve ser considerado, para que a área corresponda ao tamanho efetivo da região.

- Caso o objeto seja representado por um polígono de n vértices, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , \dots , (x_n, y_n) , com $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, ou seja, um contorno fechado, a área é dada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right|$$

- Embora a área possa ser utilizada como descritor de região, ela é geralmente aplicada a situações em que a escala dos objetos não varia.
- A área é invariante quanto à translação e rotação do objeto.

Descritores de Região

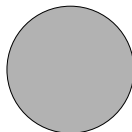
Compacidade ou Circularidade

- A *compacidade* ou *circularidade* de uma região é definida como

$$C = \frac{P^2}{A}$$

em que P e A são o perímetro e a área da região, respectivamente, medidos em unidades de pixels.

- De acordo com esse descritor, um círculo possui o menor valor de compacidade, igual a 4π .
- A figura a seguir ilustra o conceito de compacidade em dois objetos com formas diferentes.



(a)



(b)

Figura: Compacidade. (a) objeto com baixa compacidade; (b) objeto com alta compacidade.

Descritores de Região

Compacidade ou Circularidade

- A compacidade é invariante quanto às transformações de translação, escala e rotação dos objetos.

Exemplo: Cálculo da compacidade para os objetos mostrados a seguir.

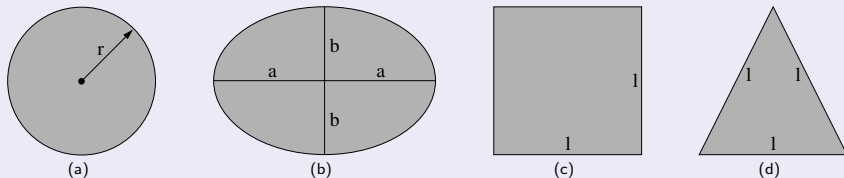


Figura: Exemplos de objetos para cálculo de compacidade.

(a) círculo

$$C = \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi$$

Descritores de Região

Compacidade ou Circularidade

(b) elipse

$$C = \frac{\left(2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right)^2}{\pi ab} = \frac{2\pi(a^2 + b^2)}{ab}$$

(c) quadrado

$$C = \frac{(4l)^2}{l^2} = 16$$

(d) triângulo

$$C = \frac{(3l)^2}{\frac{l}{2}\sqrt{l^2 - l^2/4}} = 12\sqrt{3}$$

Descritores de Região

Projeções Horizontal e Vertical

- Projeções horizontal e vertical podem ser calculadas para uma região.
- Para uma imagem binária, em que os pixels $f(x, y)$ da região possuem valor igual a 1, a *projeção horizontal* P_h é definida como a soma dos pixels existentes em cada linha do objeto

$$P_h(y) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y)$$

- A *projeção vertical* P_v é definida como a soma dos pixels existentes em cada coluna do objeto

$$P_v(x) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Descritores de Região

Projeções Horizontal e Vertical

- Um exemplo de uso de projeções horizontal e vertical em linhas de texto contidas em uma imagem é apresentado a seguir.

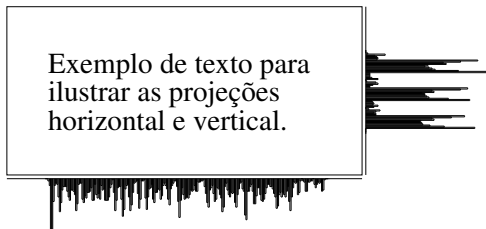


Figura: Projeções horizontal e vertical.

Descritores de Região

Propriedades Topológicas

- As propriedades topológicas são úteis para descrições globais de regiões no plano da imagem.
- De maneira geral, a *topologia* é o estudo das propriedades de um objeto que não sejam afetadas por deformações geométricas, na medida em que não existam cortes ou junções no objeto.
- Uma possível descrição topológica é dada pelo número de buracos na região.
- Essa propriedade, obviamente, não é afetada por rotações ou mudanças de escala.
- Outra propriedade topológica útil para descrição de regiões é o número de componentes conexos, definidos conforme o conceito de vizinhança adotado entre os pixels.

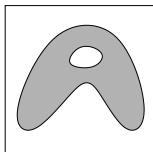
Descritores de Região

Propriedades Topológicas

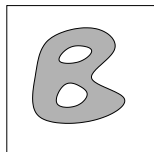
- O número de buracos H e de componentes conexos C em uma região de pixels podem ser usados na definição do *número de Euler* E

$$E = C - H$$

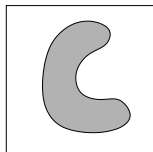
- O número de Euler também é uma propriedade topológica.
- As regiões mostradas na figura a seguir, por exemplo, possuem números de Euler iguais a 0, -1 e 1, respectivamente, visto que o objeto “A” possui um componente conexo e um buraco, “B” possui um componente conexo e dois buracos, enquanto o objeto “C” possui um componente conexo e nenhum buraco.



(a) $E = 0$



(b) $E = -1$



(c) $E = 1$

Descritores de Região

Propriedades Topológicas

- As regiões representadas por segmentos de retas (chamadas de *malhas poligonais*) possuem uma interpretação particularmente simples do número de Euler.
- Denotando o número de vértices por V , o número de arestas por A e o número de faces por F , tem-se a seguinte relação, conhecida como *fórmula de Euler*

$$V - A + F = C - H$$

que está relacionada ao número de Euler como

$$V - A + F = C - H = E$$

Descritores de Região

Propriedades Topológicas

- A malha poligonal, mostrada na figura a seguir, possui 11 vértices, 18 arestas, 4 faces, 1 região conexa e 4 buracos. Portanto,

$$11 - 18 + 4 = 1 - 4 = -3$$

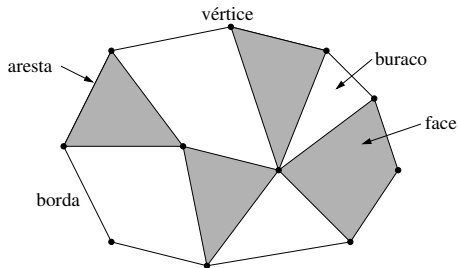


Figura: Malha poligonal.

Descritores de Região

Momentos

- O conceito matemático de momentos tem sido utilizado em muitos campos de conhecimento, tais como física, estatística e análise de imagens.
- Os *momentos geométricos* de ordem $p + q$ de uma função contínua bidimensional f são definidos como

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2)$$

- A função pode ser representada, portanto, por um conjunto infinito de valores de momentos.
- Um conjunto de n momentos consiste em todos m_{pq} , para $p + q \leq n$, ou seja, o conjunto contém $1/2(n + 1)(n + 2)$ elementos.
- A aplicação prática dos momentos implica, obviamente, a utilização de um número finito de valores.
- A seleção de um conjunto representativo de valores de momentos que contenha informações suficientes para caracterizar a imagem de forma única é uma tarefa extremamente importante.

- No caso de uma imagem com dimensões $M \times N$ pixels, a equação 2 pode ser reformulada usando a aproximação

$$m_{pq} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} x^p y^q f(x, y) \quad (3)$$

em que (x, y) são coordenadas de pontos das regiões.

- Propriedades de invariância quanto às transformações de escala, translação e rotação podem ser derivadas para os momentos.
- Invariância com relação à translação pode ser alcançada com o uso de momentos centrais, μ_{pq} , definidos como

$$\mu_{pq} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (x - x_c)^p (y - y_c)^q f(x, y) \quad (4)$$

em que x_c, y_c são as coordenadas do centro de massa (centróide) da região, as quais podem ser obtidas usando as expressões:

Descritores de Região

Momentos

$$x_c = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (5)$$

- No caso de uma imagem binária, o momento de ordem zero, m_{00} , representa a área da região, definida anteriormente.
- Os momentos de primeira ordem (m_{01} e m_{10}) representam o centro de massa da imagem f .
- As coordenadas descritas na equação 5 definem uma localização única da imagem f que pode ser utilizada como ponto de referência para descrever a posição da imagem.
- Os momentos de segunda ordem (m_{02} , m_{11} e m_{20}) são conhecidos como momentos de inércia.

- Os momentos centrais até a ordem $p + q = 3$ são listados a seguir:

$$\mu_{00} = m_{00}$$

$$\mu_{01} = \sum_x \sum_y (x - x_c)^0 (y - y_c)^1 f(x, y) = m_{01} - \frac{m_{01}}{m_{00}} m_{00} = 0$$

$$\mu_{10} = \sum_x \sum_y (x - x_c)^1 (y - y_c)^0 f(x, y) = m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{00} = 0$$

$$\mu_{11} = \sum_x \sum_y (x - x_c)^1 (y - y_c)^1 f(x, y) = m_{11} - \frac{m_{01}}{m_{00}} m_{10}$$

$$\mu_{02} = m_{02} - \frac{m_{01}^2}{m_{00}}$$

$$\mu_{20} = m_{20} - \frac{m_{10}^2}{m_{00}}$$

$$\mu_{12} = m_{12} - 2 \frac{m_{01}}{m_{00}} m_{11} - \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{02} + 2 \left(\frac{m_{01}}{m_{00}} \right)^2 m_{10}$$

$$\mu_{21} = m_{21} - 2 \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{11} - \frac{m_{01}}{m_{00}} m_{20} + 2 \left(\frac{m_{10}}{m_{00}} \right)^2 m_{01}$$

$$\mu_{03} = m_{03} - 3 \frac{m_{01}}{m_{00}} m_{02} + 2 \left(\frac{m_{01}}{m_{00}} \right)^2 m_{01}$$

$$\mu_{30} = m_{30} - 3 \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{20} + 2 \left(\frac{m_{10}}{m_{00}} \right)^2 m_{10}$$

Descritores de Região

Momentos

- Os momentos centrais, embora invariantes quanto à translação, são dependentes da escala e rotação.
- A invariância quanto à escala pode ser obtida normalizando-se μ_{pq} como

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{(\mu_{00})^\gamma} \quad (6)$$

em que

$$\gamma = \frac{p + q + 2}{2} \quad p + q \geq 2 \quad (7)$$

- Invariância quanto à rotação pode ser obtida se o sistema de coordenadas for escolhido tal que $\mu_{11} = 0$.
- Uma forma geral de invariância é mostrada por Hu (1962), em que sete momentos invariantes à translação, rotação e escala são calculados em função dos momentos de segunda e terceira ordens, listados a seguir:

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$\phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$\phi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + \\ (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

$$\phi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

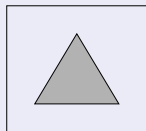
$$\phi_7 = (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] - \\ (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

Descritores de Região

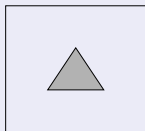
Momentos

Exemplo:

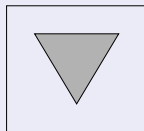
A imagem mostrada na figura (a) foi reduzida à metade do tamanho na figura (b), refletida com respeito ao eixo x na figura (c) e transformada por uma rotação de 20° e 45° nas figuras (d) e (e), respectivamente.



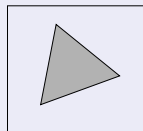
(a)



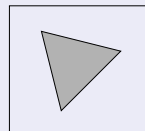
(b)



(c)



(d)



(e)

Os sete momentos invariantes, descritos anteriormente, são calculados para cada uma das imagens.

Descritores de Região

Momentos

Os resultados, apresentados na tabela a seguir, demonstram a invariância desses momentos.

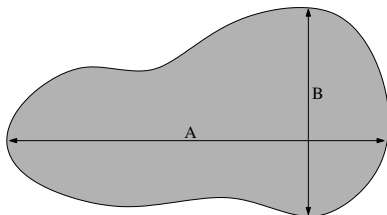
Momentos Invariantes (log)	Imagem Original	Após Redução	Após Reflexão	Após Rotação 20°	Após Rotação 45°
ϕ_1	1.1258	1.1644	1.1246	1.1247	1.1253
ϕ_2	2.6248	2.6965	2.6223	2.6251	2.6255
ϕ_3	24.9650	24.1925	27.3290	18.4029	18.7755
ϕ_4	16.3450	18.9354	16.2082	17.4779	17.0769
ϕ_5	37.0217	40.6211	39.3020	35.4284	35.5113
ϕ_6	17.9348	20.5269	17.7990	18.8074	19.9473
ϕ_7	38.7063	45.5126	38.0134	37.5000	35.3282

- A pequena diferença entre os valores pode ser atribuída à natureza discreta da imagem.
- O valor absoluto do logaritmo foi utilizado para evitar a manipulação de números complexos resultantes do logaritmo negativo dos momentos invariantes.

Descritores de Região

Eixos Maior e Menor

- O *eixo maior* corresponde ao comprimento do maior segmento de reta que pode ser traçado ao longo do objeto.
- O *eixo menor* é o comprimento do maior segmento de reta perpendicular ao eixo maior que pode ser traçado ao longo do objeto.
- A figura a seguir ilustra os eixos maior e menor de um objeto.



- Os eixos maior e menor são invariantes quanto à translação e rotação do objeto.

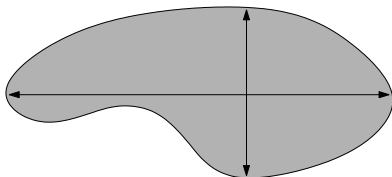
Descritores de Região

Excentricidade

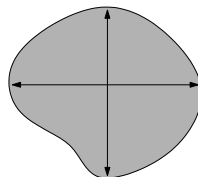
- A excentricidade é a relação entre o comprimento do eixo maior A e o comprimento do eixo menor B , ou seja

$$\text{Excentricidade} = \frac{A}{B}$$

- Exemplos de objetos apresentando valores de alta e baixa excentricidade são mostrados na figura a seguir.



(a) alta

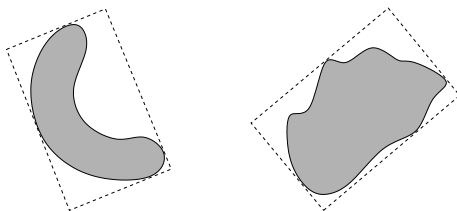


(b) baixa

Descritores de Região

Retângulo Envolvente

- O *retângulo envolvente* de um objeto bidimensional corresponde ao retângulo de dimensões mínimas que engloba o objeto, cujos lados são paralelos aos eixos principais (menor e maior) do objeto.
- Testes para verificação de intersecção entre objetos ou cálculos de área, por exemplo, podem ser simplificados pelo uso de retângulos envolventes.
- Exemplos de retângulos envolventes são mostrados na figura a seguir.



- O conceito pode ser facilmente estendido para objetos tridimensionais, o que pode reduzir consideravelmente o cálculo do volume de objetos em muitas aplicações práticas.

- A *convexidade* mede o grau com que um objeto difere de um objeto convexo.
- Uma medida de convexidade é dada pela relação entre o perímetro do fecho convexo do objeto e o perímetro do objeto.

$$\text{Convexidade} = \frac{\text{Perímetro convexo}}{\text{Perímetro}}$$

- O valor de convexidade é igual a 1 para objetos convexos e menor que 1 para objetos não convexos.

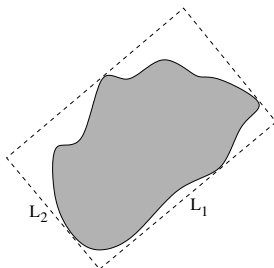
Descritores de Região

Retangularidade

- A retangularidade de um objeto é definida como a relação entre a área do objeto e a área do retângulo envolvente, ou seja

$$\text{Retangularidade} = \frac{\text{Área do objeto}}{L_1 L_2}$$

em que L_1 e L_2 são as dimensões do retângulo envolvente, conforme ilustrado na figura a seguir.



Descritores de Região

Retangularidade

- A retangularidade pode assumir valores no intervalo $(0,1]$, sendo que o valor 1 representa uma região perfeitamente retangular.
- Valores baixos de retangularidade indicam que o objeto possui muitas concavidades ou curvas.
- Pode-se mostrar que a retangularidade é invariante quanto à translação, rotação e escala.

- A *solidez* mede a densidade de um objeto.
- Uma medida de solidez pode ser obtida pela relação entre a área de um objeto e a área do fecho convexo do objeto.

$$\text{Solidez} = \frac{\text{Área do objeto}}{\text{Área do fecho convexo}}$$

- O valor de solidez é igual a 1 para um objeto sólido e menor que 1 para objetos apresentando borda irregular ou contendo buracos.

Descritores de Região

Descritores Sintáticos ou Relacionais

- Descritores sintáticos ou relacionais permitem que as estruturas segmentadas da imagem sejam organizadas de uma maneira formal.
- Objetos podem ser descritos recursivamente a partir de elementos mais simples, chamados primitivas.
- Bordas ou segmentos de bordas de objetos são primitivas comumente utilizadas para descrever estruturas e seus relacionamentos.
- Uma maneira de representar primitivas é utilizar uma sequência ordenada ou cadeia de caracteres: cada primitiva é interpretada como um alfabeto de uma determinada gramática, tal que um conjunto de regras de sintaxe determinam a geração das sequências formadas pelos símbolos do alfabeto.
- Um exemplo de uso dos descritores sintáticos é na análise de sequências genéticas.

- Em teoria de linguagens formais, uma gramática é definida pela quádrupla

$$G = (N, T, P, S)$$

em que N é um conjunto finito de símbolos não terminais, T é um conjunto finito de símbolos terminais, P é um conjunto finito de produções ou regras de reescrita e S é o símbolo inicial.

- A linguagem $L(G)$ de uma gramática G é definida como o conjunto de cadeias que podem ser derivadas a partir de um símbolo inicial por repetidas aplicações de regras de reescrita.
- Seja, por exemplo, a gramática $G = (N, T, P, S)$ definida como

$$N = \{S, A\}$$

$$T = \{a, b\}$$

$$P = \{S \rightarrow aA; A \rightarrow aA; A \rightarrow b\}$$

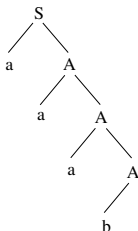
- A gramática gera a linguagem

$$L(G) = \{a^n b \mid n \geq 1\}$$

- A sentença ou cadeia $aaaab \in L(G)$ pode ser derivada a partir das regras

$$S \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaaA \rightarrow aaaaA \rightarrow aaaab$$

- Essa sentença também pode ser descrita por uma árvore de derivação, ilustrada a seguir, em que a raiz da árvore corresponde ao axioma S e os nós-folhas correspondem aos símbolos terminais que, concatenados da esquerda para a direita, formam a sentença original.



Descritores de Região

Descritores Sintáticos ou Relacionais

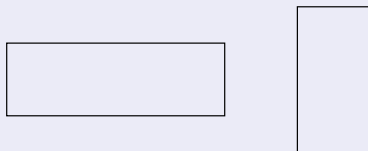
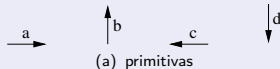
- A gramática formal G permite a descrição apropriada de um conjunto infinito de sequências, de acordo com a linguagem $L(G)$.
- A construção de elementos complexos a partir de primitivas mais simples é realizada pelas regras de reescrita.
- As primitivas servem como elementos básicos dos objetos que possibilitam uma descrição mais compacta dos dados em termos de suas relações estruturais.
- Para padrões de objetos em imagens, não há um conjunto universal de primitivas para utilização em diferentes aplicações.
- De modo a permitir uma descrição adequada dos objetos, as primitivas devem conter informação relativa sobre a aplicação em questão, tal como a forma ou a localização dos elementos.

Descritores de Região

Descritores Sintáticos ou Relacionais

Exemplo de descritor sintático:

Sejam as primitivas gráficas definidas na figura (a).



(b) retângulos derivados a partir da gramática

A figura (b) ilustra dois retângulos formados pelas primitivas. Um conjunto de retângulos de diferentes tamanhos pode ser descrito pela linguagem

$$L(G) = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$$