Analyse Numérique
Corrigé Série 17

19 mars 2020

1. (**Résolution itérative d'un système linéaire avec la méthode du point fixe**)
Considérer le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Considérer la méthode du point fixe dont les itérées sont données par

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \theta(A\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b}), \tag{1}$$

avec $\theta \neq 0$. En supposant que cette suite converge, montrer que le point fixe $\boldsymbol{x}^*$ équivaut à une solution du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Sol.: *Si la suite $\{\boldsymbol{x}_k\}$ converge vers le point fixe $\boldsymbol{x}^*$ dans la limite $k \to \infty$, on a*

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^* - \theta(A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}),$$

et comme $\theta \neq 0$, on obtient $A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = 0$, c.-à-d., $A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$.

(b) Soit $e_k = x^* - x_k$. Montrer que $e_k = T^k e_0$ où T est à déterminer.

Sol.:

$$x_k = (I - \theta A)x_{k-1} + \theta b$$
$$x^* = (I - \theta A)x^* + \theta b$$

Posons $T = I - \theta A$

$$\Rightarrow e_k = x - x_k = T(x - x_{k-1}) = Te_{k-1} = T^2 e_{k-2} = \ldots = T^k e_0.$$

(c) Donner une condition suffisante sur la norme de T pour que la méthode converge.

Sol.: *Si $\|T\| < 1$,*

$$\|e_k\| = \|T^k e_0\| \le \|T\|^k \|e_0\| \to 0$$

quand $k \to \infty$.

(d) Supposons maintenant que A soit une matrice symétrique, définie positive, avec valeurs propres $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Montrer que $\|T\|_2 = \max_i |1 - \theta\lambda_i|$.

Sol.: *Comme A est symétrique, on a que $T = I - \theta A$ est symétrique aussi, donc la norme spectrale est donnée par le maximum des valeurs absolues des valeurs propres de $I - \theta A$, c.-à-d.,*

$$\|T\|_2 = \|I - \theta A\|_2 = \max_i |1 - \theta\lambda_i|.$$

On remarque que les valeurs propres de $I - \theta A$ sont les mêmes que celles de A, multipliées par $-\theta$ et décalées de 1.

(e) On définit la fonction $f_{\lambda_i}(\theta) = |1 - \theta\lambda_i|$. Trouver les valeurs de θ pour lesquelles (1) converge pour tout $\boldsymbol{x}_0$, c.-à-d., trouver les θ pour lesquelles $\|T\|_2 = \max_i f_{\lambda_i}(\theta) < 1$. Aidez-vous en traçant les graphiques de $f_{\lambda_i}(\theta)$ pour les valeurs propres extrémales λ_1 et λ_n.

Sol.: *La plus grande valeur propre λ_n donne la borne supérieure pour θ. On a :*

$$f_{\lambda_n}(\theta) = |1 - \theta\lambda_n| < 1, \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 + \theta\lambda_n < 1, \\ 1 - \theta\lambda_n < 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta < 2/\lambda_n, \\ \theta > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Regardez la Figure 1.

(f) Toujours à l'aide des graphiques de $f_{\lambda_1}(\theta)$ et $f_{\lambda_n}(\theta)$, trouver la valeur optimale θ_{opt} qui minimise $\|T\|_2$.

Sol.: *En nous aidant des graphiques, on trouve $\theta_{\text{opt}} = 2/(\lambda_1 + \lambda_n)$.*

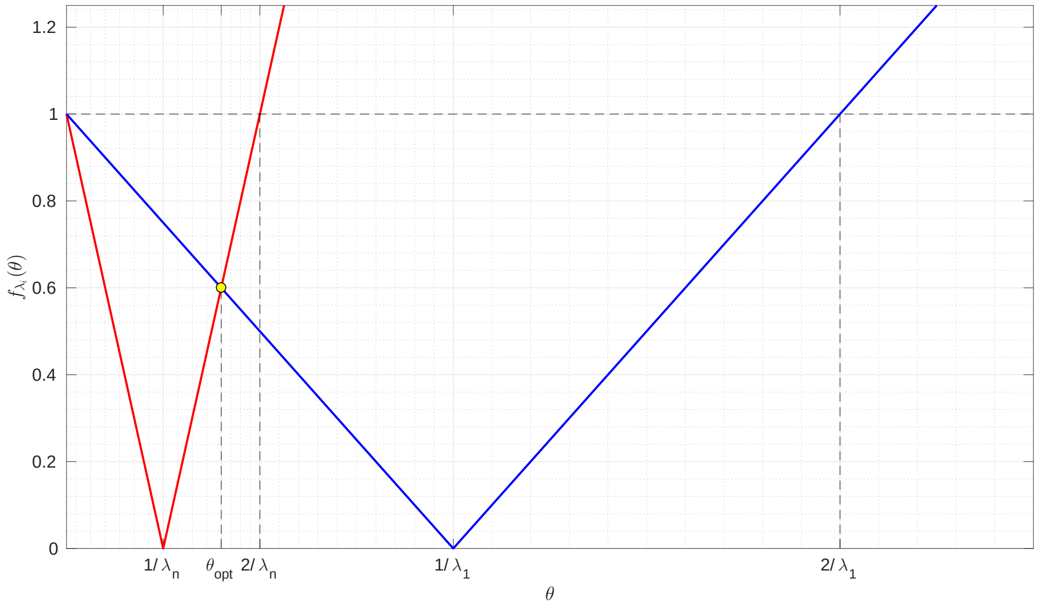

FIGURE 1 – Graphique pour l'Exercice 1.

2. ($\star$, tout l'exercice)(**Norme d'opérateur et rayon spectral**) Dans cet exercice, on veut prouver le théorème suivant.

Théorème 1. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\varepsilon > 0$, il existe une norme d'opérateur $\|.\|_{\varepsilon,A}$ satisfaisant*

$$\|A\|_{\varepsilon,A} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

On rappelle que le rayon spectral est défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

(a) On se propose d'abord de redémontrer quelques propriétés élémentaires sur les matrices et leurs normes.

i. **(0.25 points)** Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, montrer par récurrence qu'il existe $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
Indication : On rappelle que toute matrice a au moins un vecteur propre dans $\mathbb{C}$.
Sol.: *Voir cours d'algèbre 1.*

ii. **(0.5 points)** Montrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \qquad \text{et} \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Sol.: *On prend un vecteur v que l'on décompose dans une base de vecteurs propres de $A^T A$ comme $v = \sum_i b_i$. Alors on a*

$$\|Av\|_2^2 = v^T A^T A v = \sum_i \lambda_i b_i^T b_i \leq \rho(A^T A) \sum_i b_i^T b_i = \rho(A^T A)\,\|v\|_2^2\,.$$

Donc on a $\|A\|_2^2 \leq \rho(A^T A)$. L'égalité est obtenue en choisissant v comme un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module. Pour la norme $\|.\|_\infty$, on a

$$\|Av\|_\infty \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|v_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,\|v\|_\infty\,,$$

ce qui donne une première inégalité. L'égalité est obtenue en prenant $v = \sum_j \mathrm{sgn}(a_{i_0,j}) e_j$ où (e_i) est la base canonique et i_0 réalise le maximum de $\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

iii. **(0.25 points)** Montrer que toute norme d'opérateur $\|.\|$ vérifie

$$\rho(A) \leq \|A\|, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Le rayon spectral ρ est-il une norme sur $\mathbb{R}^{n\times n}$ en général ?

Sol.: *Si v est un vecteur propre associé la plus grande valeur propre en module de A, alors*

$$\|Av\| = |\lambda| \|v\| = \rho(A) \|v\| \leq \|A\| \|v\|.$$

En général, le rayon spectral n'est pas une norme. Par exemple, ρ s'annule sur des matrices non-nulles :

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Démontrons à présent le théorème 1.

i. **(0.5 points)** On suppose que A est triangulaire supérieure, c'est-à-dire $A = D + T$ avec D diagonale et T triangulaire supérieure stricte. À l'aide d'une norme d'opérateur bien choisie, construire explicitement une norme d'opérateur $\|.\|_{\varepsilon,A}$ vérifiant $\|A\|_{\varepsilon,A} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Indication : On pourra considérer la matrice $D_\delta^{-1} A D_\delta$ où $D_\delta = \mathrm{Diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1})$ et δ est choisi assez petit de telle manière que $\sum_{j=i+1}^{n} |\delta^{j-1} t_{ij}| \leq \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Sol.: *On pose la norme suivante*

$$\|B\|_{\varepsilon,A} = \left\|D_\delta^{-1} B D_\delta\right\|_\infty.$$

On vérifie que c'est bien une norme. De plus,

$$\|A\|_{\varepsilon,A} \leq \left\|D_\delta^{-1} D D_\delta\right\|_\infty + \left\|D_\delta^{-1} T D_\delta\right\|_\infty = \|D\|_\infty + \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=i+1}^{n} \left|\delta^{j-1} t_{ij}\right| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

ii. **(0.25 points)** Démontrer le theorème 1 dans le cas général.

Sol.: *On se donne $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure puis on pose*

$$\|B\|_{\varepsilon,A} = \left\|D_\delta^{-1} P^{-1} B P D_\delta\right\|_\infty.$$

iii. **(0.25 points)** En déduire que la suite définie par $x_{k+1} = Ax_k$ converge vers 0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Sol.: *Si $\rho(A) < 1$, comme toutes les normes sont équivalentes, on peut choisir la norme $\|.\|_{\varepsilon,A}$ avec $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}$. Alors*

$$\|x_{k+1}\|_{\varepsilon,A} \leq \|A\|_{\varepsilon,A} \|x_k\|_{\varepsilon,A} \leq (\rho(A) + \varepsilon) \|x_k\|_{\varepsilon,A} = \frac{1+\rho(A)}{2} \|x_k\|_{\varepsilon,A}.$$

Comme $\frac{1+\rho(A)}{2} < 1$, la suite $(\|x_k\|_{\varepsilon,A})$ tend vers 0, donc (x_k) converge vers 0. Pour l'implication réciproque, on suppose $\rho(A) \geq 1$. On prend x_0 un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A de plus grand module. Alors $x_k = \lambda^k x_0$. Donc $\|x_k\| = \rho(A)^k \|x_0\| \geq \|x_0\|$. On ne peut pas converger vers 0.