Analyse Numérique
Exercices – Série 24

7 mai 2020
Questions marquées de $\star$
à rendre le 14 mai 2020 avant 13h00

1. ($\star$, tout l'exercice) **A-stabilité de la méthode theta**
   On rappelle le théorème suivant vu en cours : Si une méthode de Runge-Kutta avec fonction de stabilité $R(z)$ vérifie
   - $|R(iy)| \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ (propriété appelée I-stabilité)
   - $R(z)$ n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re z \leq 0\}$

   alors la méthode est A-stable.
   On considère la méthode théta définie par :
   $$y_{n+1} = y_n + (1-\theta)hf(t_n, y_n) + \theta hf(t_{n+1}, y_{n+1}),$$
   où $\theta \in [0, 1]$.
   (a) **(0.50 points)** Montrer que la méthode théta est bien une méthode de Runge-Kutta et donner son tableau de Butcher.
   (b) **(0.25 points)** Quelle méthode retrouve-t-on pour $\theta = 1/2$?
   (c) **(0.75 points)** Montrer que la méthode est I-stable si et seulement si $\theta \geq 1/2$.
   Indication : Rappelez-vous que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et observez que $|1-\theta iy|^2 = 1+\theta^2 y^2$.
   (d) **(0.50 points)** En utilisant le théorème rappelé plus haut, en déduire une condition suffisante sur θ pour que la méthode soit A-stable. Montrer que cette condition est nécessaire.
   Indication : La condition $|R(z)| \leq 1$ doit être vraie sur tout $\mathbb{C}_-$ et donc pour des z arbitrairement grands en module.

2. (**Valeurs propres du Laplacien discret**)
   On considère la matrice $N \times N$
   $$A = (N+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$
   utilisée pour la discrétisation du Laplacien en 1D ($\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$) avec conditions aux bords de Dirichlet $u(0,t) = u(1,t) = 0$ sur une grille de points à pas constant $\Delta x = 1/(N+1)$. Le but est de montrer que les valeurs propres de A sont
   $$\lambda_k = (N+1)^2 \left(2\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) - 2\right), \qquad 1 \leq k \leq N,$$
   avec les vecteurs propres associés $v^{(k)} = \left(v_1^{(k)}, \ldots, v_N^{(k)}\right)^T$ définis par
   $$v_j^{(k)} = C \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right), \qquad 1 \leq j, k \leq N.$$
   (a) On pose la matrice suivante
   $$B := (N+1)^{-2}A + 2Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour chaque valeur propre μ de B, les composantes du vecteur propre associé $v = (v_1, \ldots, v_N)^T$ satisfont la relation de récurrence

$$v_0 = 0, \qquad v_{j-1} + v_{j+1} = \mu v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad v_{N+1} = 0.$$

En déduire que v peut se mettre sous la forme $v_j = C\left(\zeta_1^j - \zeta_2^j\right)$ où

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \mu, \quad \zeta_1\zeta_2 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{N+1} = 1.$$

(b) En déduire les valeurs possibles de ζ_1 et ζ_2, puis celles de μ. Conclure sur les valeurs et vecteurs propres de A.

Indication : les racines $(N+1)$-ième de l'unité sont exactement les $\exp\left(\frac{2ik\pi}{N+1}\right)$, $0 \leq k \leq N$.

(c) Vérifier le théorème de Gerschgorin avec la matrice A.

(d) Quel est le conditionnement $\kappa = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ de la matrice A ? Que se passe-t-il quand N tend vers l'infini ? Que peut-on en déduire sur la résolution numérique par différences finies de $\Delta u = f$ sur $[0, 1]$ avec $u(0) = u(1) = 0$?