Analyse Numérique
Corrigé Série 23

7 mai 2020

1. (**Constante de Lipschitz d'une méthode de Runge-Kutta**)
Soit $f(t,y)$ lipschitzienne par rapport à y avec une constante $\tilde{L}$. On considère une méthode de Runge-Kutta explicite à 3 étages, d'ordre $p=3$ avec tous les coefficients a_{ij}, b_j positifs. L'objectif de l'exercice est de montrer que la constante de Lipschitz L de $\Phi(t,y,h)$ par rapport à y satisfait

$$(1+hL) \leq e^{h\tilde{L}}. \tag{1}$$

On rappelle le résultat du cours suivant, pour $h \leq h_{\max}$

$$L \quad \leq \quad \tilde{L}\Big(|b_1|+|b_2|+|b_3|+h_{\max}\tilde{L}(|b_2c_2|+|b_3c_3|)+(h_{\max}\tilde{L})^2|b_3a_{32}c_2|\Big). \tag{2}$$

(a) Appliquer la méthode à l'équation différentielle $y'=\lambda y$, $y(t_0)=y_0$ et montrer que

$$y_1 \quad = \quad y_0\Big(1+(h\lambda)(b_1+b_2+b_3)+(h\lambda)^2(b_2c_2+b_3c_3)+(h\lambda)^3b_3a_{32}c_2\Big).$$

Sol.: *On considère l'équation différentielle $y'=\lambda y$ avec $y(t_0)=y_0$ et on va calculer y_1. Calculons d'abord les coefficients k_j*

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(y_0)=\lambda y_0\\
k_2 &= f(y_0+ha_{21}k_1)=\lambda y_0(1+\lambda h a_{21})\\
k_3 &= f(y_0+h(a_{31}k_1+a_{32}k_2))=\lambda y_0(1+\lambda h(a_{31}+a_{32})+\lambda^2h^2a_{32}a_{21})
\end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire $y_1=y_0+h\sum_{i=1}^3 b_ik_i$ comme

$$y_1 \quad = \quad y_0\Big(1+\lambda h(b_1+b_2+b_3)+\lambda^2h^2(b_2a_{21}+b_3(a_{31}+a_{32}))+\lambda^3h^3b_3a_{32}a_{21}\Big)$$

On rappelle que $c_i=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}$, ce qui nous permet d'écrire y_1 dans une forme plus compacte

$$y_1 \quad = \quad y_0\Big(1+(h\lambda)(b_1+b_2+b_3)+(h\lambda)^2(b_2c_2+b_3c_3)+(h\lambda)^3b_3a_{32}c_2\Big)$$

(b) Par un développement de Taylor, montrer à l'aide du point précédent que

$$\left\{\begin{aligned}
b_1+b_2+b_3 &= 1\\
b_2c_2+b_3c_3 &= \tfrac{1}{2}\\
b_3a_{32}c_2 &= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}\right.$$

Sol.: *Un développement de Taylor donne*

$$y(t_0+h)=y_0+hy'(t_0)+\frac{1}{2}h^2y''(t_0)+\frac{1}{6}h^3y^{(3)}(t_0)+\mathcal{O}(h^4)$$

On fait la substitution $y^{(n)}=\lambda^n y_0$, ce qui nous donne

$$y(t_0+h)=y_0\Big(1+\lambda h+\frac{1}{2}\lambda^2h^2+\frac{1}{6}\lambda^3h^3+\mathcal{O}(h^4)\Big)$$

On sait par hypothèse que $y_1-y(t_0+h)=\mathcal{O}(h^4)$. On obtient ainsi

$$\left\{\begin{aligned}
b_1+b_2+b_3 &= 1\\
b_2c_2+b_3c_3 &= \tfrac{1}{2}\\
b_3a_{32}c_2 &= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

(c) En déduire (1).

Sol.: *En remplaçant les valeurs de l'équations* (3) *dans* (2), *on obtient*

$$(1+hL) \leq 1 + h\tilde{L}\left(1 + \frac{h\tilde{L}}{2} + \frac{h^2\tilde{L}^2}{6}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i\tilde{L}^i}{i!} = e^{h\tilde{L}}$$

2. ($\star$, tout l'exercice)(**Constante de Lipschitz d'une méthode Runge-Kutta implicite**)
Considérer la règle des trapèzes pour intégrer des EDOs, définie par

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right].$$

La méthode Φ est alors définie implicitement par

$$\begin{aligned} h\Phi(t_n, h, y_n) &= \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + h\Phi(t_n, h, y_n))\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à y avec constante L_f.

(a) **(1 point)** On suppose qu'il existe une fonction Φ solution de (4). Montrer que si $\frac{1}{2}hL_f < 1$, la fonction Φ est lipschitzienne de constante L_Φ, dont on donnera l'expression en fonction de L_f.

(b) **(1 point)** Montrer que pour h assez petit, Φ est bien définie de manière unique par (4). En déduire que la méthode de Runge-Kutta associée est aussi bien définie.

Sol.: *On a*

$$\begin{aligned} \left|\Phi(t_n, h, u) - \Phi(t_n, h, v)\right| &= \frac{1}{2}\left|f(t_n, u) + f(t_n + h, u + h\Phi(t_n, h, u)) - f(t_n, v) - f(t_n + h, v + h\Phi(t_n, h, v))\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|f(t_n, u) - f(t_n, v)\right| + \frac{1}{2}\left|f(t_n + h, u + h\Phi(t_n, h, u)) - f(t_n + h, v + h\Phi(t_n, h, v))\right|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|\Phi(t_n, h, u) - \Phi(t_n, h, v)\right| &\leq \frac{1}{2}\left|f(t_n, u) - f(t_n, v)\right| + \frac{1}{2}\left|f(t_n + h, u + h\Phi(t_n, h, u)) - f(t_n + h, v + h\Phi(t_n, h, v))\right| \\ &\leq \frac{1}{2}L_f\left|u - v\right| + \frac{1}{2}L_f\left|u + h\Phi(t_n, h, u) - v - h\Phi(t_n, h, v)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}L_f\left|u - v\right| + \frac{1}{2}L_f\left|u - v\right| + \frac{1}{2}L_f h\left|\Phi(t_n, h, u) - \Phi(t_n, h, v)\right| \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - \frac{1}{2}hL_f)\left|\Phi(t_n, h, u) - \Phi(t_n, h, v)\right| \leq L_f\left|u - v\right|$$

et $L_\Phi \leq \frac{L_f}{1 - \frac{1}{2}hL_f}$ *sous la condition* $\frac{1}{2}hL_f < 1$.

Pour montrer que Φ *est bien définie, on fixe* $t \in \mathbb{R}$, $h \in]-2/L_f, 2/L_f[$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$, *puis on pose*

$$F_{t,h,y}(X) = \frac{1}{2}[f(t, y) + f(t + h, y + hX)].$$

Les mêmes arguments qu'à la question précédente montrent que $F_{t,h,y}$ *est contractante. Donc on a bien un unique point fixe de* $F_{t,h,y}$, *noté* $\Phi(t, h, y)$. *Ainsi la méthode est bien définie par* $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, h, y_n)$.