UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 7

31 octobre 2019
Exercices marqués de $\star$
à rendre le 7 novembre 2019

1. (**Équivalence des normes matricielles**) On rappelle que la norme p d'un vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, est définie par

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

On rappelle que $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq n\|\boldsymbol{x}\|_1$, et $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. En général, on dit que deux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sur $\mathbb{R}^n$ sont *équivalentes* s'il y a deux constantes $0 < c_1 \leq c_2$ telles que $c_1\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_q \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|_p$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. On peut montrer que toutes les normes vectorielles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, le résultat suivant (admis) montre que toutes les normes p sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes :

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \lambda_{pq}(n)\|\boldsymbol{x}\|_q, \quad \text{avec} \quad \lambda_{pq}(n) \coloneqq \begin{cases} 1, & p \geq q, \\ n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & p < q. \end{cases} \tag{1}$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. En cours, on a défini la *norme d'opérateur* :

$$\|A\|_p \coloneqq \max_{\|\boldsymbol{x}\|_p=1} \|A\boldsymbol{x}\|_p = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}. \tag{2}$$

(a) Montrer que toutes les normes d'opérateur sont équivalentes, c.-à-d., pour deux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ il existe deux constantes $0 < C_1 \leq C_2$ telles que $C_1\|A\|_p \leq \|A\|_q \leq C_2\|A\|_p$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Indication : utiliser (1) *et* (2).

(b) Montrer que la norme de Frobenius de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, définie par $\|A\|_F \coloneqq \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}$, n'est pas une norme d'opérateur. On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie comme $\mathrm{Tr}(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{ii}}$.
Indication : considérer un opérateur pour lequel la norme d'opérateur est triviale.

(c) Malgré le fait que la norme de Frobenius ne soit pas une norme d'opérateur, elle est toutefois équivalente aux autres normes matricielles. En particulier, montrer explicitement que

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r}\,\|A\|_2,$$

où $r \leq n$ est le nombre de valeurs propre de $(A^\top A)$ différentes de zéro.
Indication : voir série 6, exercice 1, et utiliser la propriété cyclique de la trace $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$.

2. $\star$ **(Condition de problèmes différentiables)** En cours, on a vu la Définition 3.1 et le Théorème 3.5 pour la condition relative d'un problème. On donne ici la définition de *condition absolue*.

Définition 1 *(Condition absolue).*
Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. Alors, la condition absolue κ_{abs} de f en $\boldsymbol{x}$ est

$$\kappa_{\mathrm{abs}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup\left\{\frac{\|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})\|}{\varepsilon} : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon\right\} = \|f'(\boldsymbol{x})\|.$$

(a) Considérer le problème suivant : obtenir les quantités scalaires $f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - \sin(x_1 + x_2)$ et $f_2(x_1, x_2) = 2 + x_2 + \cos(x_1 - x_2)$ à partir du vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Calculer la condition absolue en norme $\|\cdot\|_\infty$ pour ce problème. Est-ce qu'il est bien conditionné au sens absolu ?

(b) Considérer le problème suivant : calculer $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ à partir du vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Calculer la condition absolue et relative en norme $\|\cdot\|_1$ pour ce problème. Est-ce qu'il est bien conditionné au sens absolu ? Et au sens relatif ?