Université de Genève
Section de Mathématiques

année 2019-2020

Analyse Numérique (Automne 2019)

Questions pour l'examen oral

(version du 19 décembre 2019)

Cette liste indicative contient des questions sur les chapitres du premier semestre seulement ; celles pour le deuxième semestre suivront.

I. Interpolation polynomiale

1. Enoncer et démontrer le théorème concernant l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.
2. Définir la formule de Lagrange pour son calcul. Estimer son coût en flops.
3. Définir les différences divisées pour des points donnés. Enoncer et démontrer la formule de Newton pour l'interpolation en ces points.
4. Enoncer et démontrer le lemme mettant en relation les dérivées et les différences divisées. En déduire et démontrer le théorème pour estimer l'erreur de l'approximation par un polynôme d'interpolation.
5. Définir les polynômes de Chebyshev. Esquisser quelques exemples.
6. Définir les points de Chebyshev. Justifier pourquoi ils sont un bon choix pour des points d'interpolation. Illustrer par le phénomène de Runge.
7. Définir l'interpolation d'Hermite. Expliquer son calcul à l'aide des différences divisées.
8. Enoncer et démontrer le théorème pour estimer l'erreur de l'approximation par un polynôme d'interpolation d'Hermite.

II. Analyse d'erreurs d'arrondi

9. Détailler la représentation des nombres machine en virgule flottante (comme vue en cours) et définir l'epsilon de la machine. Exemplifier les définitions pour les nombres machine en double précision.
10. Expliquer l'arithmétique flottante et le phénomène d'annulation des chiffres.
11. Donner un exemple de calcul susceptible d'annulation des chiffres ainsi qu'une reformulation qui évite ce problème.

III. Condition et stabilité

12. Définir la condition (relative) d'un problème. Pourquoi la condition est-elle importante pour des calculs numériques ?
13. Enoncer et démontrer le théorème pour la condition des problèmes différentiables.
14. Définir la norme d'opérateur et donner un exemple concret.
15. Définir la notion de la stabilité "forward". Quelle est la distinction entre la condition et la stabilité ?

16. Définir la notion de la stabilité "backward". Montrer que la stabilité backward implique la stabilité forward.
17. Donner un exemple d'un problème bien conditionné et deux algorithmes pour le résoudre, un stable et l'autre instable (avec démonstration).
18. Donner un exemple d'un algorithme qui est stable en sens backward (avec démonstration).

IV. Intégration numérique

19. Définir les formules de quadrature à s étages et définir leur ordre.
20. Pour s nœuds distincts donnés, montrer l'existence d'une formule de quadrature d'ordre $\geq s$.
21. Expliquer la construction des formules de Newton–Cotes. Donner quelques exemples.
22. Définir les formules symétriques. Enoncer et démontrer le théorème concernant l'ordre de celles-ci.
23. Expliquer les formules de quadrature composées.
24. Si une formule de quadrature est d'ordre p, énoncer et démontrer le théorème de l'erreur *globale* de la quadrature en justifiant le lemme pour l'erreur *locale* à l'aide des développements de Taylor.
25. Enoncer et démontrer le théorème (ainsi que le lemme) disant que l'ordre d'une formule à s étages est $\leq 2s$.
26. En utilisant le produit scalaire $\langle p, q \rangle$ des polynômes p et q, énoncer et montrer le théorème sur l'existence des polynômes de Legendre.
27. Enoncer et démontrer le théorème concernant les racines des polynômes de Legendre.
28. Définir les formules de Gauss à s étages et montrer qu'elles sont d'ordre maximale.
29. Démontrer que les poids des formules de Gauss sont positifs. Pourquoi la positivité est-elle importante ? Comparer avec les formules de Newton–Cotes.
30. Comment peut-on construire une matrice symétrique dont les valeurs propres donnent les nœuds d'une formule de Gauss ?

V. Systèmes d'équations linéaires

31. Définir la condition d'une matrice inversible A. Donner quelques exemples des matrices qui sont bien et mal conditionnées.
32. Définir la condition de résoudre un système d'équations linéaires inversible.
33. Expliquer le lien entre l'algorithme de Gauss et la décomposition LU d'une matrice.
34. Enoncer et démontrer le théorème sur l'erreur backward d'un système d'équations linéaires inversible et son résidu.
35. Au premier ordre en $\varepsilon_{\text{mach}}$, montrer que la condition de résoudre un système d'équations linéaires est bornée par $2\kappa(A)$.
36. Montrer l'existence de la factorisation de LU avec changement de pivot partiel en expliquant en détail l'algorithme de son calcul pour une matrice de taille 5×5.

VI. Méthode des moindres carrés

37. Expliquer la méthode des moindres carrés. Enoncer et démontrer le théorème sur les équations normales.