UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 15

27 février 2020
Questions marquées de ⋆
à rendre le 5 mars 2020

1. (⋆, tout l'exercice)(**Régularisation de Tikhonov**) Considérons le problème de trouver $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\|A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \mu\|\boldsymbol{x}^*\|_2^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \mu\|\boldsymbol{x}\|_2^2,$$
avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, et $\mu \geq 0$. Ce problème est appelé *régularisation de Tikhonov.*
   (a) **(0.25 points)** Réécrire ce problème comme la minimisation d'une fonction $f(x) = \|\widetilde{A}\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2$ où la matrice $\widetilde{A}$ et le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ sont à préciser. Donner aussi la taille de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{\boldsymbol{b}}$.
   (b) **(0.25 points)** Écrire les équations normales associées uniquement en fonction de A, $\boldsymbol{b}$ et μ.
   (c) **(0.25 points)** Pour quels μ les équations normales ont-elles une unique solution $\boldsymbol{x}^*$? Donner dans ce cas une formule explicite pour $\boldsymbol{x}^*$.
   (d) **(0.25 points)** En fonction du rang de A, quelle peut être l'utilité de considérer la régularisation de Tikhonov plutôt que le problème habituel ($\mu = 0$) ?

2. (**Factorisation QR avec Gram–Schmidt classique et modifiée**) En cours (Section 6.2 dans le polycopié), on a vu les méthodes de Gram–Schmidt classique (GSC) et modifiée (GSM) pour calculer la factorisation QR d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Par commodité, on redonne ici les deux algorithmes.

Algorithme 1 (Factorisation QR – Gram–Schmidt classique (pas stable)).
Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ où $m \geq n$ et $\mathrm{rang}(A) = n$.

for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  $\tilde{\boldsymbol{q}}_j \leftarrow \boldsymbol{a}_j$
  for $i = 1, \ldots, j-1$ **do**
    $r_{ij} \leftarrow \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{q}_i$
    $\tilde{\boldsymbol{q}}_j \leftarrow \tilde{\boldsymbol{q}}_j - r_{ij}\boldsymbol{q}_i$
  end for
  $r_{jj} \leftarrow \|\tilde{\boldsymbol{q}}_j\|_2$
  $\boldsymbol{q}_j \leftarrow \tilde{\boldsymbol{q}}_j / r_{jj}$
end for

Algorithme 2 (Factorisation QR – Gram–Schmidt modifiée (stable)).
Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ où $m \geq n$ et $\mathrm{rang}(A) = n$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $\tilde{\boldsymbol{q}}_i \leftarrow \boldsymbol{a}_i$
end for
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $r_{ii} \leftarrow \|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|_2$
  $\boldsymbol{q}_i \leftarrow \tilde{\boldsymbol{q}}_i / r_{ii}$
  for $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    $r_{ij} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{q}}_j^\top \boldsymbol{q}_i$
    $\tilde{\boldsymbol{q}}_j \leftarrow \tilde{\boldsymbol{q}}_j - r_{ij}\boldsymbol{q}_i$
  end for
end for

   (a) Considérer la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix},$$

où ϵ est un petit nombre tel que le résultat de l'opération $1+\epsilon^2$ en précision finie est toujours arrondi à 1, c.-à-d., $\mathrm{fl}(1+\epsilon^2)=1$. En supposant l'absence d'autres erreurs d'arrondi, calculer les matrices Q produites par les méthodes GSC et GSM, et évaluer leur orthonormalité en norme $\|\cdot\|_2$, i.e. estimer $\|Q^\top Q - I\|_2$.

Indication : *Il n'est pas nécessaire de faire les calculs à la main. Utiliser un outil numérique (par exemple, MATLAB, Maple, Mathematica, Wolfram Alpha, ...).*

(b) La méthode GSC et la méthode GSM appliquées à la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ calculent une factorisation $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

i. En usant de projections orthogonales P_j bien choisies, réécrire les deux méthodes avec ces projections. Puis, montrer que la méthode GSC (Algorithme 1) correspond aux opérations

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_j \leftarrow (I - P_{j-1} - P_{j-2} - \cdots - P_1)\,\boldsymbol{a}_j, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

et que la méthode GSM (Algorithme 2) correspond à

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_j \leftarrow (I - P_{j-1})\,(I - P_{j-2})\cdots(I - P_1)\,\boldsymbol{a}_j, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

Rappel : *La matrice* $P = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *avec* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, *représente une projection orthogonale sur* $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v})$, *c.-à-d., le sous-espace vectoriel engendré par* $\boldsymbol{v}$.

ii. En utilisant la formulation avec les projections orthogonales, montrer que, en arithmétique exacte, les méthode GSC et GSM sont équivalentes.

3. ($\star$, questions a-b-c)(**Les transformations de Givens pour la décomposition QR**)

(a) **(0.25 points)** Étant donné un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, trouver toutes les matrices de la forme

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

telles que le vecteur $y = A(\theta)x$ vérifie $y_2 = 0$ (seconde composante nulle). Interpréter graphiquement le résultat dans le cas où $a = 0$ et dans le cas général.

(b) **(0.25 points)** Répétez la question a) en trouvant les transformations A telles que le vecteur $y = A(\theta)x$ vérifie $y_1 = y_2$. Interpréter graphiquement le résultat dans le cas où $a = 0$ et dans le cas général.

(c) **(0.5 points)** Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, trouver une matrice orthogonale Q telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$$Qx = \alpha e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : considérer des matrices de la forme

$$A_{n_1,n_2,n_3}(a,b) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}$ désignent les matrices identités de taille $n_1\times n_1, n_2\times n_2, n_3\times n_3$, respectivement.

(d) En déduire un algorithme de de décomposition QR utilisant les transformations précédentes (transformations de Givens), au lieu des réflexions de Householder qui seront vues en cours. Combien de transformations de la forme (1) l'algorithme QR obtenu nécessite t-il ?