UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 13

12 décembre 2019
Questions marquées de $\star$
à rendre le 19 décembre 2019

1. (**Elimination de Gauss – version de Doolittle**) On considère l'algorithme de Doolittle suivant pour calculer la décomposition $A = LU$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ à l'aide de la méthode de Gauss, ici formulé sans recherche de pivot :

   (Algorithme de Doolittle)

   $U \leftarrow A,\ L \leftarrow I$
   for $k = 1, \dots, n$ **do**
       for $j = k, \dots, n$ **do**
           $u_{kj} \leftarrow a_{kj} - \boldsymbol{\ell}^T_{k,1:k-1}\boldsymbol{u}_{1:k-1,j}$
       for $i = k+1, \dots, n$ **do**
           $\ell_{ik} \leftarrow (a_{ik} - \boldsymbol{\ell}^T_{i,1:k-1}\boldsymbol{u}_{1:k-1,k})/u_{kk}$

   (a) Justifier que l'on peut remplacer les termes a_{kj}, a_{ik} qui apparaissent dans l'algorithme ci-dessus par respectivement u_{kj}, u_{ik}, sans modifier le résultat de l'algorithme.

   (b) Justifier que cet algorithme met en oeuvre l'algorithme de la décomposition $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale.
   Indication. Pour les parties triangulaires supérieure et inférieure de la matrice A, montrer :

   $$\begin{aligned} a_{kj} &= \boldsymbol{\ell}^T_{k,1:k-1}\boldsymbol{u}_{1:k-1,j} + \ell_{kk}u_{kj}, \quad j = k, \dots, n, \\ a_{ik} &= \boldsymbol{\ell}^T_{i,1:k-1}\boldsymbol{u}_{1:k-1,k} + \ell_{ik}u_{kk}, \quad i = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

   (c) (0.5 pts) ($\star$) Modifier l'algorithme pour ajouter la recherche partielle de pivot.

   $U \leftarrow A,\ L \leftarrow I,\ P \leftarrow I$
   for $k = 1, \dots, n$ **do**
       ... (à compléter)
       for $j = k, \dots, n$ **do**
           $u_{kj} \leftarrow u_{kj} - \boldsymbol{\ell}^T_{k,1:k-1}\boldsymbol{u}_{1:k-1,j}$
       for $i = k+1, \dots, n$ **do**
           $\ell_{ik} \leftarrow (u_{ik} - \boldsymbol{\ell}^T_{i,1:k-1}\boldsymbol{u}_{1:k-1,k})/u_{kk}$

2. ($\star$, tout l'exercice) **(Décomposition LU et élimination de Gauss)**
   Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée à diagonale dominante par colonne, c.-à-d.,

   $$|a_{jj}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|,\ \forall j. \tag{1}$$

   (a) (0.25 pts) Montrer que A est inversible.
   Indication : Montrer que $A^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ implique $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

   (b) (0.25 pts) Démontrer qu'au premier pas d'une décomposition LU de A, il n'y a pas d'échanges de lignes, même si on utilise la recherche de pivot partielle (c'est-à-dire une recherche de pivots dans la même colonne à chaque étape de l'algorithme).

   (c) (0.25 pts) Démontrer $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |\ell_{i1}| < 1$ où $\ell_{i1} = a_{i1}/a_{11}$.

   (d) (0.75 pts) En utilisant les points précédents et un raisonnement par récurrence, démontrer que pendant la décomposition LU de A, il n'y a pas d'échanges de lignes, même si on utilise la recherche de pivot partielle.

3. **(Algorithme de Thomas)**

L'*algorithme de Thomas* est une formulation simplifiée de la factorisation LU qui peut être utilisée pour résoudre des systèmes linéaires $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où la matrice A est une *matrice tridiagonale*.

Soit A une matrice tridiagonale (de taille $n \times n$) :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & r_1 & & & \\ \ell_2 & d_2 & r_2 & & \\ & \ell_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & r_{n-1} \\ & & & \ell_n & d_n \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer la décomposition LU de A.

(b) Quel est le nombre approximatif d'opérations dont on a besoin pour construire L et U ? Donner la solution sous la forme Cn^k.

(c) On suppose maintenant que L et U sont construits. Résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant les résultats précédents. Quel est le nombre approximatif d'opérations, donné sous la forme Cn^k, de cet algorithme ?