# Analyse Numérique
## Corrigé Série 3

1. $\star$ **(Interpolation d'Hermite)** Soit $p(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions suivantes :
$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 0, \quad p(2) = 3, \quad p'(2) = 7.$$
Ce polynôme, qui fait intervenir les dérivées de $p(x)$, s'appelle *polynôme d'interpolation d'Hermite.*

(a) Écrire le système linéaire en forme matricielle vérifié par les coefficients $\alpha_i$ du polynôme
$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i.$$
***Sol.:*** *On a* $p(1) = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$, $p'(1) = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 = 0$, $p(2) = \alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2+8\alpha_3 = 3$, $p'(2) = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 12\alpha_3 = 7$, *ce qui donne le système linéaire en forme matricielle*
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer explicitement que ce système possède exactement une solution (faire le calcul).
***Sol.:*** *Le déterminant de la matrice du système linéaire est non nul.*

(c) Calculer le polynôme d'interpolation dans la base d'Hermite,
$$p(x) = \beta_0 + \beta_1(x-1) + \beta_2(x-1)^2 + \beta_3(x-1)^2(x-2),$$
en calculant successivement les valeurs $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.
*Indication : utiliser* $p'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}$.

***Sol.:*** *On a* $p(1) = \beta_0 = 0$, *puis*
$$0 = p'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{p(x)-p(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \beta_1 + \beta_2(x-1) + \beta_3(x-1)(x-2) = \beta_1,$$
*d'où* $\beta_1 = 0$.
*Ensuite,* $3 = p(2) = 0 + 0 + \beta_2(2-1)^2 = 3$, *d'où* $\beta_2 = 3$.
*Puis,*
$$\begin{aligned} 7 = p'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{p(x)-p(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-1)^2 + \beta_3(x-1)^2(x-2) - 3}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3x(x-2) + \beta_3(x-1)^2(x-2)}{x-2} = 6 + \beta_3, \end{aligned}$$
*d'où* $\beta_3 = 1$.
*On obtient* $p(x) = 3(x-1)^2 + (x-1)^2(x-2) = 1 - x - x^2 + x^3$.

(d) En déduire la solution $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ du système linéaire de la question (a).
***Sol.:*** *On a* $p(x) = 3(x-1)^2+(x-1)^2(x-2) = 1-x-x^2+x^3$, *d'où* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -1, -1, 1)$.

2. **(Polynômes de Chebyshev de seconde espèce)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut définir les polynômes de Chebyshev de seconde espèce par

$$U_n(x)\frac{1}{n+1}\,T'_{n+1}(x),$$

où $T_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev (de première espèce) de degré $n$, défini comme vu en cours. On va montrer les propriétés suivantes :

(a) Montrer que

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta}, \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}.$$

***Sol.:***

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left[(n+1)\arccos(x)\right] = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos(x)\right]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*En remplaçant $x = \cos\theta$, on obtient le résultat cherché.*

(b) Montrer que les polynômes de Chebyshev de seconde espèce $U_n$ satisfont la même relation de récurrence que ceux de première espèce, avec des premiers termes différents :

$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1, \quad \text{avec} \quad U_0(x) = 1 \text{ et } U_1(x) = 2x.$$

*Indication : Utiliser la relation $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.*
***Sol.:***

$$2\cos\theta\,U_n(\cos\theta) - U_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\,\frac{\sin\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin\left[(n+2)\theta\right]}{\sin\theta} = U_{n+1}(\cos\theta).$$

*Ceci montre la propriété pour $x = \cos\theta \in [-1,1]$. Comme $U_{n+1}(x) - 2x\,U_n(x) + U_{n-1}(x)$ est un polynôme nul sur $[-1,1]$ il est nul sur $\mathbb{R}$ (infinité de racines).*

(c) Trouver toutes les racines des $U_n(x)$ pour tout $n \geq 1$.
***Sol.:*** *Dans l'exercice 3.(a) on a trouvé*

$$U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos(x)\right]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*On note par $e_k^{(n)}$ les $n$ racines de $U_n(x)$, $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Pour $x \neq 1$, $U_n(x)$ vaut zéro si et seulement si le numérateur vaut zéro :*

$$\begin{aligned}\sin\left[(n+1)\arccos(x)\right] = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (n+1)\arccos(x) = k\pi, \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}\\ &\Leftrightarrow \quad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}.\end{aligned}$$

*Remarque : ces points correspondent aux extrema locaux de $T_{n+1}$ ($T_{n+1}\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right) = (-1)^k$ pour $k = 0,1,\ldots,n$).*

(d) Étudier la parité des $U_n(x)$.
***Sol.:*** *On remarque que les polynômes de Chebyshev de première espèce $T_n$ sont pair pour $n$ pair et impair pour $n$ impair. Comme on a $U_n(x)\frac{1}{n+1}\,T'_{n+1}(x)$, à cause de la dérivée dans la définition on obtient également que les polynômes de Chebyshev de seconde espèce $U_n$ sont pair pour $n$ pair et impair pour $n$ impair.*

3. **(Formules barycentriques)** Le polynôme d'interpolation $p(x)$ est unique, mais il y a plusieurs façons de l'évaluer. Pour la formule de Lagrange,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\,\ell_i(x), \qquad \text{où} \qquad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \tag{1}$$

pour chaque point $x$, il faut évaluer $\ell_i(x)$, ce qui demande $O(n)$ opérations. Ensuite, pour obtenir $p(x)$ on doit sommer les $\ell_i(x)$, $i = 0,\ldots,n$. Donc, le total est de $O(n^2)$ opérations pour chaque $x$.
On peut réduire le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer $p(x)$ en un $x$ donné. On définit d'abord $\ell(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$ et les *poids* $w_i = 1/\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$.

(a) En utilisant ces définitions, obtenir, à partir de (1), la *formule barycentrique de la 1^re^ espèce* :

$$p(x) = \ell(x) \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{w_i}{x - x_i}. \tag{2}$$

***Sol.:***

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \, w_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x - x_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \, w_i \frac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{x - x_i} = \underbrace{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}_{=:\ell(x)} \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{w_i}{x - x_i} = \ell(x) \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{w_i}{x - x_i}. \end{aligned}$$

(b) La formule (2) ressemble à une fonction rationnelle. Cependant, c'est un polynôme. Expliquer pourquoi.

***Sol.:*** *La formule* (2) *se réduit à un polynôme car* $(x - x_i)$ *se simplifie avec* $\ell(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

(c) On remarque que le calcul des poids $w_i$ s'effectue une seule fois.

i. Quel est le nombre d'opérations nécessaires pour ce calcul ?

***Sol.:*** *Calculer les poids avec la formule* $w_i = 1/\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)$ *coûte* $O(n^2)$ *opérations.*

ii. Dès que l'on connaît les poids $w_i$, quel est le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer $p(x)$ en $x$ avec la formule (2) ? Expliquer vos calculs.

***Sol.:*** *Dès que l'on connaît les poids* $w_i$*, on peut évaluer* $p(x)$ *en chaque* $x$ *en seulement* $O(n)$ *opérations.*

(d) Parfois on peut trouver une formule explicite pour le calcul des poids $w_i$. Montrer que pour une subdivision équidistante de $[-1, 1]$ avec $n + 1$ points on obtient la formule

$$w_i = \frac{(-1)^{n-i}}{h^n \, n!} \binom{n}{i}, \quad \text{où} \quad h = 2/n.$$

***Sol.:*** *On considère les points d'interpolation équidistants*

$$x_0, \; x_1 = x_0 + h, \; \ldots, \; x_j = x_0 + j\,h, \; \ldots, \; x_n = x_0 + n\,h, .$$

*Pour le poids générique* $w_i$ *on obtient*

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} = \frac{1}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \frac{1}{(-1)^{n-i}\, h^n \, \underbrace{[i(i-1)\cdots 1][1\cdot 2\cdots (n-i)]}_{i!(n-i)!}} = \frac{(-1)^{n-i}}{h^n \, n!}\binom{n}{i}. \end{aligned}$$