Analyse Numérique
Exercices – Série 3

1. $\star$ **(Interpolation d'Hermite)** Soit $p(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions suivantes :
$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 0, \quad p(2) = 3, \quad p'(2) = 7.$$
Ce polynôme, qui fait intervenir les dérivées de $p(x)$, s'appelle *polynôme d'interpolation d'Hermite.*
   (a) Écrire le système linéaire en forme matricielle vérifié par les coefficients α_i du polynôme
$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i.$$
   (b) Montrer explicitement que ce système possède exactement une solution (faire le calcul).
   (c) Calculer le polynôme d'interpolation dans la base d'Hermite,
$$p(x) = \beta_0 + \beta_1(x-1) + \beta_2(x-1)^2 + \beta_3(x-1)^2(x-2),$$
en calculant successivement les valeurs $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.
Indication : utiliser $p'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}$.
   (d) En déduire la solution $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ du système linéaire de la question (a).

2. **(Polynômes de Chebyshev de seconde espèce)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut définir les polynômes de Chebyshev de seconde espèce par
$$U_n(x) \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x),$$
où $T_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev (de première espèce) de degré n, défini comme vu en cours. On va montrer les propriétés suivantes :
   (a) Montrer que
$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}, \qquad \forall\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$
   (b) Montrer que les polynômes de Chebyshev de seconde espèce U_n satisfont la même relation de récurrence que ceux de première espèce, avec des premiers termes différents :
$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1, \quad \text{avec} \quad U_0(x) = 1 \text{ et } U_1(x) = 2x.$$
Indication : Utiliser la relation $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.
   (c) Trouver toutes les racines des $U_n(x)$ pour tout $n \geq 1$.
   (d) Étudier la parité des $U_n(x)$.

3. **(Formules barycentriques)** Le polynôme d'interpolation $p(x)$ est unique, mais il y a plusieurs façons de l'évaluer. Pour la formule de Lagrange,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x), \qquad \text{où} \qquad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{1}$$

pour chaque point x, il faut évaluer $\ell_i(x)$, ce qui demande $O(n)$ opérations. Ensuite, pour obtenir $p(x)$ on doit sommer les $\ell_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$. Donc, le total est de $O(n^2)$ opérations pour chaque x.

On peut réduire le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer $p(x)$ en un x donné. On définit d'abord $\ell(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ et les *poids* $w_i = 1/\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)$.

(a) En utilisant ces définitions, obtenir, à partir de (1), la *formule barycentrique de la 1re espèce* :

$$p(x) = \ell(x) \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{w_i}{x - x_i}. \tag{2}$$

(b) La formule (2) ressemble à une fonction rationnelle. Cependant, c'est un polynôme. Expliquer pourquoi.

(c) On remarque que le calcul des poids w_i s'effectue une seule fois.

   i. Quel est le nombre d'opérations nécessaires pour ce calcul ?

   ii. Dès que l'on connaît les poids w_i, quel est le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer $p(x)$ en x avec la formule (2) ? Expliquer vos calculs.

(d) Parfois on peut trouver une formule explicite pour le calcul des poids w_i. Montrer que pour une subdivision équidistante de $[-1, 1]$ avec $n + 1$ points on obtient la formule

$$w_i = \frac{(-1)^{n-i}}{h^n \, n!} \binom{n}{i}, \quad \text{où} \quad h = 2/n.$$