Analyse Numérique
Exercices – Série 20

2 avril 2020
Questions marquées de ⋆
à rendre le 9 avril 2020 avant 13h00

1. (($\star$), Questions a et b) **Fonction d'itérations et convergence de la méthode de point fixe**
Supposons que l'on veut calculer les racines de l'équation $f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ avec les méthodes de point fixe suivantes :

$$(1) \quad x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 6}{5}, \qquad (2) \quad x_{k+1} = \sqrt{5x_k - 6}, \qquad (3) \quad x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 6}{2x_k - 5}.$$

   (a) **(0.25 points)** Vérifier que les racines de $f(x)$ sont points fixes des fonctions d'itérations $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ relatives aux trois méthodes ci-dessus.

   (b) **(0.75 points)** Analyser la convergence de ces méthodes (convergente, pas convergente, taux de convergence).

   (c) Considérez le tableau suivant, qui collecte des valeurs de x_k calculées en MATLAB selon les méthodes de point fixe proposées ci-dessus :

itération	A	B	C	D	E
0	3.100000000000000	3.100000000000000	3.100000000000000	2.100000000000000	2.100000000000000
1	3.082207001484488	3.122000000000000	3.008333333333334	2.082000000000000	1.987500000000000
2	3.067741026785416	3.149376800000000	3.000068306010928	2.066944800000000	1.999847560975610
3	3.055929504083346	3.183714845675648	3.000000004665074	2.054452161249408	1.999999976769426
4	3.046251388250275	3.227208043715103	3.000000000000001	2.044154736572473	2.000000000000000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	3.000000001115209	Inf	3	2.000000000023234	2

   Associer chaque colonne à la fonction d'itération la plus raisonnable parmi les fonctions d'itérations $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$.

   (d) La fonction d'itération $\Phi_3(x)$ n'a pas été choisie par hasard. Pourquoi la méthode (3) montre le taux de convergence que vous avez trouvé dans le point (b) ? Comment est-ce qu'on peut construire $\Phi_3(x)$?

   (e) Considérer maintenant la fonction

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

   On veut calculer la racine de $g(x) = 0$ à l'aide de l'itération suivante :

$$x_{k+1} = -x_k^3.$$

      i. Quel est le taux de convergence de cette méthode ? Pour quelles valeurs de x_0 la méthode converge ? Comment est-ce qu'on peut trouver la fonction d'itération $\Phi(x) = -x^3$?

      ii. Qu'est-ce qui se passe pour $x_0 = \pm 1$? Et pour $x_0 = 2$? Vérifier directement.

2. ($\star$, Questions a et b)(**Quelques exemples contre-intuitifs**)

   (a) **(0.50 points)** On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Que valent les normes 2 de A et B ? **En fonction de la condition initiale choisie**, que peut-on dire de la convergence et de la divergence des suites définies par $x_{k+1} = Ax_k$ et $y_{k+1} = By_k$?

   (b) **(0.50 points)** On se donne la suite définie par $x_{k+1} = \sin(x_k)$, $x_0 \in]0, \pi/2]$. Montrer que pour tout k, $x_k \in [0, \pi/2]$. L'application sin est-elle contractante ? Montrer que $(x_k)_k$ converge vers 0, le point fixe de sin sur $[0, \pi/2]$.

(c) On définit la suite arithmético-géométrique par $x_{k+1} = \frac{x_k+y_k}{2}$, $y_{k+1} = \sqrt{x_k y_k}$, $x_0 = a$, $y_0 = b$ avec $a \geq b > 0$.

i. Montrer que $x_k \geq y_k$ pour $k \geq 1$. En déduire que les suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite notée m satisfaisant $x_k \geq m \geq y_k$.

ii. On pose $e_k = (x_k - m, y_k - m)$. Montrer que $\|e_k\|_1 = x_k - y_k$ pour $k \geq 1$. En déduire que

$$\|e_{k+1}\|_1 \leq \frac{1}{8m}\|e_k\|_1^2.$$

Indication : *On pourra prouver l'égalité* $\frac{(x_k-y_k)^2}{4} = 2(x_{k+1} - y_{k+1})x_{k+2}$.

iii. Donner une condition suffisante sur a et b pour avoir une inégalité du type $\|e_k\|_1 \leq \alpha\beta^{2^k}$ avec $|\beta| < 1$.

iv. On pose la fonction

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \sqrt{xy} \end{pmatrix}.$$

Que vaut $F'(m,m)$? Que dire de l'estimation précédente de e_k ? Est-elle en accord avec le cours ?