Analyse Numérique
Corrigé Série 18

26 mars 2020

1. **($\star$, 1 points) Direction optimale et méthode de Newton**
Soit un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ($n \geq 2$). Pour un $x_0 \in D$, supposons que $f(x_0) \neq 0$ et que $f'(x_0)$ est inversible. Montrer que

$$p_0 = -f'(x_0)^{-1} f(x_0)$$

est la seule direction dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété suivante : pour toute matrice inversible A, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $0 < \lambda < \lambda_0$,

$$\|Af(x_0 + \lambda p_0)\|_2 < \|Af(x_0)\|_2.$$

Sol.: *Pour $p \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \to 0$, on a :*

$$Af(x_0 + \lambda p) = Af(x_0) + \lambda Af'(x_0)p + o(\lambda).$$

On obtient en utilisant l'identité $\|a + b\|_2^2 = \|a\|_2^2 + 2a^T b + \|b\|_2^2$,

$$\|Af(x_0 + \lambda p_0)\|_2^2 = \|Af(x_0)\|_2^2 + 2(Af(x_0))^T \lambda Af'(x_0)p + o(\lambda).$$

Le signe de $\|Af(x_0 + \lambda p_0)\|_2^2 - \|Af(x_0)\|_2^2$ coïncide donc avec le signe de $(Af(x_0))^T Af'(x_0)p$ pour tout $\lambda > 0$ assez petit. Un calcul donne

$$(Af(x_0))^T Af'(x_0)p_0 = (Af(x_0))^T Af'(x_0)(-f'(x_0)^{-1} f(x_0)) = -(Af(x_0))^T Af(x_0) = -\|Af(x_0)\|_2^2 < 0$$

car A est inversible et $f(x_0) \neq 0$. Ceci montre que p_0 convient.
Il reste à montrer l'unicité de p_0 vérifiant la propriété étudiée. Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel vecteur p non-colinéaire à p_0. Il existe alors une matrice inversible B dont les deux premières colonnes sont données par les composantes de p_0 et p. Pour $A = B^{-1} f'(x_0)^{-1}$ on obtient alors

$$0 > (Af(x_0))^T Af'(x_0)p = (B^{-1} f'(x_0)^{-1} f(x_0))^T B^{-1} p = -(B^{-1} p_0)^T B^{-1} p = -e_1^T e_2 = 0,$$

où on utilise $B^{-1} p_0 = e_1, B^{-1} p = e_2$ (une conséquence de $Be_1 = p_0, Be_2 = p$), où $e_1, e_2, \ldots$ sont les vecteurs de la base canonique.

2. **(($\star$)**, questions a-b-c)(**Méthode de la sécante**) Pour trouver les zéros d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, nous étudions en cours la méthode de Newton. Il s'agit d'une méthode itérative, où l'on calcule x_{k+1} en fonction de x_k en résolvant à chaque itération le système linéaire suivant.

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Dans cet exercice, on va étudier une autre méthode en dimension $d = 1$, appelée méthode de la sécante, qui consiste à approximer $f'(x_k)$ par une différence finie, i.e.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Pour résumer, pour approcher numériquement un zéro x^* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous considérons l'itération $(x_{k-1}, x_k) \to x_{k+1}$ définie par

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_{k+1} - x_k).$$

(a) **(0.25 points)** Donner une interprétation géométrique.

Indication : quelle est l'équation de la droite sécante qui passe par les points $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ *et* $(x_k, f(x_k))$ *?*

Sol.: *Cette méthode itérative correspond à approcher à chaque itération la courbe de* $f(x)$ *par une droite qui passe par* $(x_k, f(x_k))$ *et* $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ *(droite sécante), d'équation*

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k),$$

qui intersecte l'axe des abscisses pour $x = x_{k+1}$.

Remarque : pour la méthode de Newton, on approche la courbe de $f(x)$ *par sa tangente en* x_k*, d'équation*

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

(b) Soit $(v_k)_{k\geq 0}$ une suite de Fibonacci, c'est-à-dire telle que

$$v_{k+1} = v_k + v_{k-1}, \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

On va montrer qu'il existe des constantes c, d telles que

$$v_k = cp^k + \frac{d}{(-p)^k}$$

où $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$ est le nombre d'or. De plus, on va montrer que pour $v_0 \neq -pv_1$, on a l'équivalence $v_k \sim cp^k$ pour $k \to \infty$.

i. **(0.25 points)** Poser $V_k = (v_{k+1}, v_k)$, et montrer que $V_{k+1} = AV_k$ où A est une matrice 2×2 que l'on peut diagonaliser. Trouver P inversible et D diagonal tel que $A = PDP^{-1}$. Sans calculer explicitement c et d, montrer que $v_k = cp^k + \frac{d}{(-p)^k}$.

Indication : Montrer d'abord que $p^2 = p + 1$.

ii. **(0.25 points)** En utilisant l'égalité $V_k = PD^kP^{-1}V_0$, et sans calculer explicitement c, montrer que pour $v_0 \neq -pv_1$, on a l'équivalence $v_k \sim cp^k$ pour $k \to \infty$.

Sol.:

i. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Les valeurs propres de* A *sont les racines du polynôme caractéristique* $X^2 - \mathrm{trace}(A)X + \det(A) = X^2 - X - 1$*. On trouve les valeurs propres* p *et* $-1/p$ *qui sont distinctes, donc* A *est diagonalisable. Il existe* P *inversible telle que* $A = PDP^{-1}$ *avec* $D = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & -1/p \end{pmatrix}$*. Les vecteurs propres pour les valeurs propres* p *et* $-\frac{1}{p}$ *sont respectivement engendrés par* $\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{p} \\ 1 \end{pmatrix}$*. Ainsi,* V_k *peut s'écrire de la manière suivante.*

$$V_k = A^kV_0 = PD^kP^{-1}V_0 = \frac{1}{p + \frac{1}{p}} \begin{pmatrix} p & -\frac{1}{p} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{p}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p} \\ -1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Pour que $c = 0$*, il faut que* $P^{-1}V_0 = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, c'est-à-dire* $v_1 + \frac{1}{p}v_0 = 0$*. Et donc pour* $v_0 \neq -pv_1$*,* c *est non nul. Comme* $\frac{1}{p^k} \to 0$ *pour* $k \to \infty$*, on déduit* $v_k \sim cp^k$ *pour* $k \to \infty$*.*

(c) **(0.25 points)** En posant $e_k = |x_k - x^*|$, on peut démontrer l'estimation d'erreur suivante pour la méthode de la sécante

$$e_{k+1} \leq Ce_ke_{k-1}$$

où $C > 0$ est une constante (qui ne dépend que de f). Montrer que si e_0 et e_1 sont assez petits, alors la convergence de la méthode de la sécante est d'ordre $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire

$$e_k \leq ab^{p^k} \to 0 \text{ pour } k \to +\infty$$

où a, b sont des constantes avec $0 \leq b < 1$ (indépendantes de k).

Indication : poser $u_k = \log(Ce_k)$

Sol.: *En posant $u_k = \log(Ce_k)$, on a $u_{k+1} \leq u_k + u_{k-1}$. Si e_0, e_1 sont assez petits, alors u_0, u_1 sont négatifs. Par récurrence sur n, on obtient $u_k \leq v_k < 0$ où v_k est définie par $v_0 = u_0, v_1 = u_1, v_{k+1} = v_k + v_{k-1}$, pour tout $k \geq 1$. D'après la question précédente, on a $v_k \sim cp^k$ (car $v_0 \neq -pv_1$ si v_0 et v_1 ont le même signe) avec $c < 0$ (car la suite est décroissante). On conclut en utilisant $e_k = C^{-1}e^{u_k} \leq C^{-1}e^{v_k}$.*

(d) Soit $f(x)$ un polynôme. Vous verrez en cours que la méthode de Newton satisfait la convergence quadratique $e_k \leq ab^{2^k}$ pour e_0 suffisament petit. On rappelle que le travail pour évaluer $f(x)$ et $f'(x)$ est approximativement le même (méthode de Hörner). Supposons que le coût des opérations d'addition, soustraction, multiplications, divisions sont négligeables par rapport à l'évaluation de $f(x)$. Quelle méthode choisiriez-vous entre la méthode de Newton et la méthode de la sécante ?

Sol.: *Sous ces hypothèses, une itération de la méthode de Newton a un coût identique à une itération de la méthode de la sécante. Par conséquent, la méthode de Newton est préférable car avec une vitesse de convergence plus rapide (convergence quadratique avec $e_{k+1} \leq Ce_k^2$ qui implique une décroissance de l'erreur en $e_k \leq ab^{2^k}$).*