Analyse Numérique
Corrigé Série 19

2 avril 2020

1. ($\star$, questions e-f)(**Applications lipschitziennes**)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
   - pour $U \subset \mathbb{R}^n$, on dit que f est *lipschitzienne* sur U s'il existe $L > 0$ t.q.
$$\|f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{y})\| \leq L\,\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|, \qquad \forall \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in U;$$
   - f est dite *localement lipschitzienne*, si pour tout $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$, f est lipschitzienne sur $B_\epsilon(\boldsymbol{x_0})$ avec $\epsilon > 0$, où $B_\epsilon(\boldsymbol{x_0})$ dénote la boule fermée
$$B_\epsilon(\boldsymbol{x_0}) = \{\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n, \text{ t.q. } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| \leq \epsilon\}\,;$$
   - si f est lipschitzienne sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$, alors elle est dite *globalement lipschitzienne*.

   Supposons que f est continûment différentiable (c.-à-d., $f \in \mathcal{C}^1$). On suppose également que U est convexe pour la suite de l'exercice.

   (a) Montrer que si f est lipschitzienne sur U de constante L alors
$$\|f'(y)\| \leq L \tag{1}$$
Indication : $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(y+\epsilon h)-f(y)}{\epsilon} = f'(y)h$.
Sol.: *En utilisant la condition de Lipschitz de f, on obtient*
$$\|f(y+\epsilon h) - f(y)\| \leq L\epsilon\|h\|.$$
On obtient le résulat désiré en divisant par ϵ puis en faisant tendre ϵ vers 0.
$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\frac{f(y+\epsilon h) - f(y)}{\epsilon}\right\| = \|f'(y)h\| \leq L\|h\|.$$
Ainsi
$$\|f'(y)\| = \sup_{\|h\|=1}\|f'(y)h\| \leq L.$$

   (b) Réciproquement, montrer que si f vérifie (1), alors f est lipischizienne de constante L sur U.
Sol.: *C'est une conséquence directe du théorème des accroissement finis. En effet pour $y, z \in U$, on a*
$$\|f(z) - f(y)\| \leq \sup_{\xi\in(y,z)}\|f'(\xi)\|\|z-y\| \leq L\|z-y\|$$
où (y, z) dénote le segment joignant y à z.

   (c) Montrer que f est *localement lipschitzienne*.
Sol.: *Soit $\epsilon > 0$. Comme $f'(y)$ est continue pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $f'(y)$ est bornée sur $B_\epsilon(\boldsymbol{x_0})$ qui est compacte. Ainsi f est localement lipschitzienne.*

   (d) Montrer que si f est lipschitzienne sur U, alors
$$\|f(x)\| \leq C(1 + \|x\|)$$
pour tout x dans U, et avec C indépendant de x.
Sol.: *Soit a dans U.*
$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a)\| \leq L\|x-a\| + \|f(a)\| \\ &\leq L\|x\| + L\|a\| + \|f(a)\| \leq \max(L, L\|a\| + \|f(a)\|)(\|x\| + 1)\end{aligned}$$

(e) **(0.5 points)** Les fonctions $f(x) = \frac{e^x}{1+x^4}$ et $g(x) = e^{\sin(x)}$ sont-elles lipschitziennes ?
Sol.: *On a en l'infini*

$$\frac{|f(x)|}{1+\|x\|} \to +\infty.$$

Ainsi, il n'existe pas de C tel que $\|f(x)\| \leq C(1+\|x\|)$ et donc f n'est pas lipschitzienne. Pour g, on a $|g'(x)| \leq e$ donc g est lipschitzienne.

(f) **(0.25 points)** Donner une fonction qui est lipschitzienne mais pas C^1 et une fonction bornée qui n'est pas lipschitzienne.
Sol.: *Par exemple $f(x) = \|x\|$ et $g(x) = \sin(1/x)$.*

2. ($\star$, tout l'exercice)(**Méthode de Newton**)
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable et ξ une racine de multiplicité m de f, c'est-à-dire

$$f(\xi) = f'(\xi) = \ldots = f^{(m-1)}(\xi) = 0, \quad f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

(a) **(0.25 points)** Développer $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ en série de Taylor autour de ξ en donnant explicitement le terme dominant (c'est-à-dire le premier terme non-nul). Exprimer vos réponses sous la forme $C(x-\xi)^r + O((x-\xi)^{r+1})$, où les constantes C et r sont à déterminer dans chaque cas.
Sol.: *En appliquant la formule de Taylor à $f(x), f'(x), f''(x)$, on obtient pour $x \to \xi$,*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + O((x-\xi)^{m+1}) \\
f'(x) &= \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!}(x-\xi)^{m-1} + O((x-\xi)^m) \\
f''(x) &= \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-2)!}(x-\xi)^{m-2} + O((x-\xi)^{m-1})
\end{aligned}$$

(b) **(0.5 points)** Montrer que la méthode de Newton converge linéairement si $m \geq 2$. Est-ce en contradiction avec le théorème vu en cours ?
Indication : À l'aide des développements du point (a), calculer $\lim_{x\to\xi} F'(x)$, où $F(x)$ est la fonction de point fixe de la méthode de Newton.
Sol.: *La fonction de point fixe $F(x)$ de la méthode de Newton $x_{k+1} = F(x_k)$ est définie par*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

En utilisant les développements du point précédent, nous calculons

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\
&= \frac{\left(\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + O((x-\xi)^{m+1})\right)\left(\frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-2)!}(x-\xi)^{m-2} + O((x-\xi)^{m-1})\right)}{\left(\frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!}(x-\xi)^{m-1} + O((x-\xi)^m)\right)^2} \\
&= \frac{m-1}{m}\frac{(1+O((x-\xi)))^2}{(1+O((x-\xi)))^2} \\
&= \frac{m-1}{m}(1+O((x-\xi)))
\end{aligned}$$

où l'on a simplifié la fraction ci-dessus par $\frac{(f^{(m)}(\xi))^2}{(m-1)!(m-2)!}(x-\xi)^{2m-2}$. On utilise également

$$(1+O(\varepsilon))^2 = 1 + O(\varepsilon), \qquad \frac{1}{(1+O(\varepsilon))^2} = 1 + O(\varepsilon), \qquad \text{pour } \varepsilon = x - \xi \to 0.$$

Ainsi, $\lim_{x\to\xi} F'(x) = \frac{m-1}{m}$. $F(x)$ possède donc un prolongement de classe C^1 au voisinage de ξ et sa dérivée en ξ est non nulle et strictement inférieure à 1. Il y a donc bien convergence pour x_0 suffisament proche de ξ, mais seulement à une vitesse linéaire ($|x_k - \xi| \leq C|x_{k-1} - \xi|$ avec $C < 1$).

(c) **(0.25 points)** Considérons la méthode de Newton avec un paramètre de relaxation α :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Trouver le paramètre α pour que la méthode converge quadratiquement au voisinage d'une racine ξ de multiplicité m.

Sol.: *Si on insère le paramètre α dans la fonction du point fixe, on obtient*

$$F'(x) = 1 - \alpha + \alpha \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

ce qui donne

$$\lim_{x \to \xi} F'(x) = 1 - \alpha + \alpha \frac{m-1}{m} = 1 - \frac{\alpha}{m}$$

Pour que l'itération de Newton $x_{k+1} = F(x_k)$ converge quadratiquement, il faut que $F'(\xi)$ soit nulle, c'est-à-dire

$$\alpha = m.$$

(d) **(0.25 points)** On se donne le polynôme $p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$. Quels sont les zéros de p ? Proposer pour chacun des zéros une méthode numérique (en faisant tous les calculs) convergeant quadratiquement vers ce zéro.

Sol.: *Les zéros de p sont -4 et 1 de multiplicités respectives 1 et 2. En -4, la méthode de Newton usuelle converge quadratiquement. En 1, la méthode suivante fonctionne*

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k^2 + x_k + 8}{3x_k + 7}.$$