Analyse Numérique
Exercices – Série 21

9 avril 2020
Questions marquées de $\star$
à rendre le 23 avril 2020

1. ($\star$, tout l'exercice)(**Méthode de Newton–Schulz pour calculer l'inverse d'une matrice**)
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible. Dans cet exercice, on va montrer qu'il est possible de trouver une approximation de A^{-1} avec la méthode de Newton. Étant donnée A, on cherche la "racine" de l'équation sous forme matricielle
$$f(X) = X^{-1} - A = 0.$$
L'itération de Newton est donnée par
$$X_{k+1} = X_k - [f'(X_k)]^{-1} f(X_k). \tag{1}$$
On remarque que la dérivée $f'(X) \equiv g'(X)$, où $g(X) = X^{-1}$. Il s'agit d'un opérateur linéaire
$$g'(X) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \text{défini par} \quad E \mapsto -X^{-1}EX^{-1}.$$
Autrement dit, l'application de $g'(X)$ à une matrice E nous donne la matrice $-X^{-1}EX^{-1}$.
   (a) **(0.5 points)** Montrer que l'itération de Newton (1) peut être réécrite sous la forme
$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k.$$
   (b) Maintenant on définit $R_k = I - X_k A$ et on va montrer que si $\|R_0\| = \|I - X_0 A\| = \alpha < 1$, alors le taux de convergence de l'erreur $\|X_k - A^{-1}\|$ est quadratique.
      i. **(0.5 points)** Montrer d'abord, par calcul direct, que $R_{k+1} = R_k^2$.
      ii. **(1 point)** Montrer qu'il existe une constante C telle que
$$\|X_{k+1} - A^{-1}\| \leq C\,\|X_k - A^{-1}\|^2. \tag{2}$$
Indication : on pourra utiliser que $R_k A^{-1} = A^{-1} - X_k$ et $R_k = R_k A^{-1} A$.

2. (**Méthode de Runge**)
   (a) Réécrire l'équation différentielle d'ordre 2
$$z'' - \alpha z = 0, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 1$$
en un problème différentielle d'ordre 1 de la forme
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0.$$
   (b) On rappelle le tableau de Butcher de la méthode de Runge :
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$
Pour $\alpha = -1$, calculer la solution exacte $\boldsymbol{y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et la solution numérique avec la méthode de Runge sur [0,1]. avec $h = 1/2$. Évaluer les deux solutions en $t = 1$ et les comparer.
   (c) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la solution $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie
$$\lim_{t\to\infty} |z(t)| < \infty \text{ ?}$$