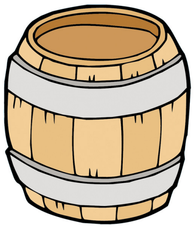
Analyse Numérique
Corrigé Série 9

21 novembre 2019

1. **Formule des tonneaux.** Pour calculer une approximation du volume d'un tonneau, on propose de mesurer sa hauteur H et les longueurs de ses circonférences en bas, au milieu et en haut du tonneau, notées respectivement L_b, L_m, L_h.



   (a) Proposer une formule d'approximation du volume V du tonneau en fonction de H, L_b, L_m, L_h en utilisant la formule de quadrature de Simpson (qui est d'ordre 4 d'après le cours).
   Indication : considérer $r(x)$, le rayon du tonneau à la hauteur x par rapport à l'axe vertical d'invariance par rotation du tonneau, et exprimer V à l'aide d'une intégrale de $r(x)^2$.
   Sol.: *Si $r(x)$ est le rayon du tonneau à la hauteur x, alors le volume du tonneau est donné par*

$$V = \int_0^H \pi\, r(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi H \int_0^1 r(Hs)^2 \,\mathrm{d}s,$$

   où $\pi r(x)^2$ est la surface d'un disque de rayon $r(x)$. En utilisant la formule de quadrature de Simpson appliquée à la fonction $s \mapsto \pi H r(Hs)^2$, on obtient

$$V \approx \pi H \,\frac{r(0)^2 + 4r(H/2)^2 + r(H)^2}{6}.$$

   Or $L_b = 2\pi r(0)$, $L_m = 2\pi r(H/2)$, $L_h = 2\pi r(H)$, d'où la formule d'approximation

$$V \approx H\,\frac{L_b^2 + 4L_m^2 + L_h^2}{24\pi}.$$

   (b) Montrer que cette approximation est exacte pour un tonneau dont le profil est celui d'un arc d'ellipse dont les foyers sont sur cet axe (on négligera l'épaisseur de la paroi du tonneau).

   Sol.: *Si le profil du tonneau est un arc d'ellipse dont les foyers sont sur l'axe vertical d'invariance par rotation, alors $r(x)$ vérifie une équation de la forme*

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{r(x)^2}{b^2} = 1$$

   avec a, b, c constantes, donc $r(x)^2$ est un polynôme de degré 2. Or la formule de Simpson est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, donc elle est exacte dans ce cas particulier.

2. **Calcul des poids de la formule de Gauss.** On a vu en cours que les noeuds $c_i = \frac{1+\xi_i}{2}$ de la formule de Gauss à s étages sont donnés en calculant les racines ξ_i du polynôme de Legendre de degré s. Ces racines ξ_i correspondent en fait aux valeurs propres de la matrice $s \times s$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & & & \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & & \\ & \gamma_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_{s-1} \\ & & & \gamma_{s-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

avec $\gamma_k = \frac{k}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}$. De plus, le vecteur propre correspondant à la valeur propre ξ_i est donné par

$$v_i = \begin{pmatrix} \hat{p}_0(\xi_i) \\ \hat{p}_1(\xi_i) \\ \hat{p}_2(\xi_i) \\ \vdots \\ \hat{p}_{s-1}(\xi_i) \end{pmatrix}$$

avec $\hat{p}_k(x) = \sqrt{2k+1}P_k(x)$ ($P_k(x)$ polynômes de Legendre).

(a) Justifier pourquoi A peut se décomposer sous la forme

$$A = QDQ^T$$

où Q est une matrice orthogonale, et $D = \mathrm{diag}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ est une matrice diagonale, et chaque colonne i de Q est un multiple de v_i pour tout $i = 1, \dots, s$.

Sol.: *La matrice A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, A est diagonalisable en base orthonormée. La matrice D correspond à la matrice diagonale des valeurs propres, et la matrice Q est la matrice des vecteurs propres correspondants.*

(b) **($\star$) (1 point)** Montrer la relation suivante pour tout $m = 0, 1, 2, \dots, s-1$.

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \hat{p}_m(\xi_i) = \int_0^1 \hat{p}_m(2t-1)\,dt = \begin{cases} 1, & \text{si } m = 0 \\ 0, & \text{si } m \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Sol.: *On a par définition des c_i,*

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \hat{p}_m(\xi_i) = \sum_{i=1}^{s} b_i \hat{p}_m(2c_i - 1).$$

Or la formule de quadrature est exacte pour $\hat{p}_m$ qui est de degré $m < 2s$, donc

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \hat{p}_m(2c_i - 1) = \int_0^1 \hat{p}_m(2t-1)\,dt.$$

Cette quantité vaut 0 pour $m > 0$ car $\hat{p}_m(x)$ est orthogonal à $\hat{p}_0(x) = 1$ (les polynômes de Legendre sont orthogonaux : $\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0$ pour tout $i \neq j$).

(c) **($\star$) (1 point)** En déduire que les poids b_i de la formule de Gauss sont donnés par le carré des éléments de la première ligne de la matrice Q :

$$b_i = q_{1i}^2, \quad i = 1, \dots, s.$$

Indication : remarquer $p_0(\xi_i) = 1$ et considérer les vecteurs et matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \hat{p}_0(\xi_1) & \cdots & \hat{p}_0(\xi_s) \\ \hat{p}_1(\xi_1) & \cdots & \hat{p}_1(\xi_s) \\ \vdots & \vdots & \\ \hat{p}_{s-1}(\xi_1) & \cdots & \hat{p}_{s-1}(\xi_s). \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} q_{11} & & & \\ & q_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_{1s} \end{pmatrix}.$$

Sol.: *Matriciellement, l'identité (1) s'écrit*

$$VB = e_1$$

Or les colonnes de Q sont des multiples des colonnes de V dont le premier coefficient est $\hat{p}_0(\xi_i) = 1$ donc

$$Q = V\Lambda.$$

Ainsi, $V^{-1} = \Lambda Q^T$ et

$$B = V^{-1}e_1 = \Lambda Q^T e_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & & & \\ & q_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_{1s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ \vdots \\ q_{1s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}^2 \\ q_{12}^2 \\ \vdots \\ q_{1s}^2 \end{pmatrix}.$$