UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Corrigé Série 10

28 novembre 2019

Formules de Lobatto. On considère les Polynômes de Legendre

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left((1+x)^k (1-x)^k\right),$$

qui vérifient pour tout $k \geq 1$ (avec la convention $P_{-1}(x) = 0$),

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x).$$

On a vu précédemment que les nœuds de la formule de quadrature de Gauss (ordre $2s$) sont donnés par les racines de $P_s(2t-1)$. On considère maintenant les polynômes suivants de degré k,

$$Q_k(x) = \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}x^{k-2}} \left((1+x)^{k-1}(1-x)^{k-1}\right)$$

pour $k \geq 2$, avec lesquels on va construire de nouvelles formules de quadrature (formules de Lobatto).

1. **Partie 1.**

   (a) On sait que l'intégrale exacte satisfait pour toute fonction intégrable $g(t)$,

   $$g(t) \geq 0 \text{ sur } [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

   Montrer qu'une formule de quadrature $(b_i, c_i)_{i=1,\ldots,s}$ vérifie

   $$g(t) \geq 0 \text{ sur } [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) \geq 0 \tag{1}$$

   si et seulement si les poids b_i sont positifs pour tout $i = 1, \ldots, s$.
   Indication : Considérer les polynômes de Lagrange.
   Sol.:

   - *"⇒" On suppose que (1) est vérifiée. On considère le cas particulier $g(t) = \ell_j(t)^2$ avec*

     $$\ell_j(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} \frac{t - c_i}{c_j - c_i}$$

     le polynôme de Lagrange qui vaut 1 pour $t = c_j$, et 0 si $t = c_i$ avec $i \neq j$. On obtient

     $$0 \leq \sum_{i=1}^{s} b_i \ell_j(c_i)^2 = \sum_{i=1}^{s} b_i \delta_{ij}^2 = b_j,$$

     ce qui montre que les poids sont positifs.
   - *"⇐" La réciproque est évidente.* □

   (b) **(⋆) (0.25 points)** Montrer que si une formule de quadrature $(b_i, c_i)_{i=1,\ldots,s}$ est d'ordre $\geq 2s-1$, alors (1) est vérifiée.

   Sol.: *Supposons la formule de quadrature d'ordre $\geq 2s-1$. La formule est donc exacte pour le polynôme $g(t) = \ell_j(t)^2$ qui est de degré $2s-2$ (car $\ell_j(t)$ est de degré $s-1$). On a ainsi*

   $$0 < \int_0^1 \ell_j(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{s} b_i \ell_j(c_i)^2 = b_j.$$

   On obtient le résultat par la question précédente. □

(c) Calculer les polynômes de Legendre $P_k(x)$ pour $k = 1, 2, 3$, ainsi que les polynômes $Q_k(x)$, $k = 2, 3, 4$.
Sol.: *On obtient*

$$P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \qquad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

$$Q_2(x) = 1 - x^2, \qquad Q_3(x) = -4x(1 - x^2), \qquad Q_4(x) = -30x^4 + 36x^2 - 6 = 6(1 - x^2)(5x^2 - 1).$$

(d) Montrer que $Q_k(-1) = Q_k(1) = 0$.
Indication : On pourra utiliser la formule de Leibniz.
Sol.: *Par la formule de Leibniz,*

$$\frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}x^{k-2}}\left((1-x)^{k-1}(1+x)^{k-1}\right) = \sum_{j=0}^{k-2}\begin{pmatrix} k-2 \\ j \end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left((1-x)^{k-1}\right)\frac{\mathrm{d}^{k-2-j}}{\mathrm{d}x^{k-2-j}}\left((1+x)^{k-1}\right)$$

Pour $x = 1$, la quantité $\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left((1-x)^{k-1}\right) = (-1)^k\frac{(k-1)!}{j!}(x-1)^{k-1-j}$ vaut 0 si $j < k-1$, et comme $j \leq k-2$ alors $Q_k(1) = 0$. De même, pour l'autre quantité du binôme on obtient $Q_k(-1) = 0$. □

(e) **($\star$) (0.75 points)** Montrer que les racines de $Q_k(x)$ sont simples, réelles et dans l'intervalle $[-1, 1]$.
Indication : Considérer le polynôme $q(x) = \prod_{c \in J}(x-c)$ où J est l'ensemble des racines de multiplicité impaire de $Q_k(x)$ situées dans l'intervalle $]-1,1[$. Considérer également $r(x)$ une primitive de $q(x)$.
Sol.: *Par 1d, on sait déjà que -1 et 1 sont deux racines de $Q_k(t)$. Procédons par l'absurde et supposons que $q(t)$ est de degré $< k-2$. Comme les racines de $Q_k(t)q(t)$ dans $]-1,1[$ sont de multiplicité paire, la fonction continue $Q_k(t)q(t)$ ne change pas de signe dans $]-1,1[$, ce qui implique*

$$\int_{-1}^{1} Q_k(t)q(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Par une intégration par parties, on a

$$\int_{-1}^{1} Q_k(t)q(t)\,\mathrm{d}t = Q_k(t)r(t)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_k'(t)r(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} Q_k'(t)r(t)\,\mathrm{d}t,$$

où on a utilisé $Q_k(-1) = Q_k(1) = 0$. Or $Q_k'(t) = C_kP_{k-1}(t)$ avec $C_k > 0$ constante, donc le polynôme $Q_k'(t)$ est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq k-2$, en particulier $r(t)$, pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient la contradiction suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q_k(t)q(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} Q_k'(t)r(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

□

2. **Partie 2.**

(a) On appelle "formule de Lobatto" la formule de quadrature dont les nœuds sont les racines de $Q_s(2t-1)$.
Montrer que $c_1 = 0$ et $c_s = 1$ sont des nœuds de la formule de Lobatto et expliquer pourquoi cette propriété permet "d'économiser" des évaluations de la fonction lorsqu'on applique la formule de quadrature pour approcher numériquement une intégrale sur un intervalle $[a, b]$.
Sol.: *On obtient que 0 et 1 sont racines de $Q_s(2t-1)$ car $Q_k(-1) = Q_k(1) = 0$ (par 1d).*
Lorsqu'on applique la formule de quadrature avec une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ d'un intervalle $[a, b]$, cette propriété permet d'utiliser deux fois les valeurs de la fonction à intégrer aux extrémités x_i des sous-intervalles de la subdivision. □

(b) Calculer et identifier les formules de quadrature associées à ces racines pour $s = 2, 3$, respectivement.
Sol.: *Pour $s = 2$, on obtient la formule du trapèze*

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{g(0) + g(1)}{2}.$$

Pour $s = 3$, on retrouve la formule de Simpson

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{g(0) + 4g(1/2) + g(1)}{6}.$$

(c) **($\star$) (0.50 points)** Montrer que la formule de quadrature de Lobatto à s noeuds est d'ordre $2s-2$.
Indication : Utiliser le lemme de Jacobi (sec. 4.3 polycopié, lemme 4.7). Voir aussi l'indication pour la partie 1e et utiliser l'intégration par parties.
Sol.: *On considère le polynôme $M(t) = Q_s(2t-1)$. D'après le lemme du cours, il suffit de montrer*

$$\int_0^1 M(t)p(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout polynôme $p(t)$ de degré $< s-2$. On remarque d'abord par un changement de variable $t = 1/2 + \tau/2$ l'égalité

$$\int_0^1 M(t)p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 Q_s(\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

où on a posé $q(\tau) = p(1/2 + \tau/2)$.
Or si $r(t)$ (degré $\leq s-2$) est une primitive de $q(t)$ d'après le calcul de la preuve de la question 1e, on obtient

$$\int_{-1}^1 Q_s(t)q(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^1 Q_s'(t)r(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

en utilisant à nouveau le fait que $Q_s'(t) = C_sP_{s-1}(t)$ est orthogonal aux polynômes de degré $\leq s-2$.
On obtient que la formule de quadrature est d'ordre $2s-2$. □

(d) **($\star$) (0.50 points)** En déduire que les poids b_i de la formule de Lobatto sont positifs.
Indication : Considérer le polynôme

$$q_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}\left(\frac{c_i - t}{c_i - c_j}\right)^{\alpha_i}.$$

avec $\alpha_1 = \alpha_s = 1$ et $\alpha_i = 2$ pour $i = 2, \ldots, s-1$.
Sol.: *Remarque : on ne peut pas utiliser la question 1b car l'ordre est seulement $2s-2$.*
On remarque pour tout $j = 1, \ldots, s$ que le polynôme $q_j(t)$ est positif sur l'intervalle $[0, 1]$, donc

$$\int_0^1 q_j(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Or la formule de quadrature est exacte pour $q_j(t)$ qui est de degré $\leq 2s-3$, donc

$$0 < \int_0^1 q_j(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{s} b_iq_j(c_i) = b_j,$$

d'où la positivité des poids de la formule de quadrature. □