Analyse Numérique
Corrigé Série 7

7 novembre 2019

1. (**Équivalence des normes matricielles**) On rappelle que la norme p d'un vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$, est définie par

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

On rappelle que $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{x}\|_1 \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty \le n\|\boldsymbol{x}\|_1$, et $\|\boldsymbol{x}\|_2 \le \|\boldsymbol{x}\|_1 \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. En général, on dit que deux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sur $\mathbb{R}^n$ sont *équivalentes* s'il y a deux constantes $0 < c_1 \le c_2$ telles que $c_1\|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_q \le c_2\|\boldsymbol{x}\|_p$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. On peut montrer que toutes les normes vectorielles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, le résultat suivant (admis) montre que toutes les normes p sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes :

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \le \lambda_{pq}(n)\|\boldsymbol{x}\|_q, \quad \text{avec} \quad \lambda_{pq}(n) := \begin{cases} 1, & p \ge q, \\ n^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, & p < q. \end{cases} \tag{1}$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. En cours, on a défini la *norme d'opérateur* :

$$\|A\|_p := \max_{\|\boldsymbol{x}\|_p = 1} \|A\boldsymbol{x}\|_p = \max_{\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}. \tag{2}$$

(a) Montrer que toutes les normes d'opérateur sont équivalentes, c.-à-d., pour deux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ il existe deux constantes $0 < C_1 \le C_2$ telles que $C_1\|A\|_p \le \|A\|_q \le C_2\|A\|_p$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Indication : utiliser (1) *et* (2).
Sol.: *Comme $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, on peut utiliser* (1) *pour écrire $\|A\boldsymbol{x}\|_p \le \lambda_{pq}(m)\|A\boldsymbol{x}\|_q$. D'ailleurs,* (1) *implique aussi que $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_p} \ge \frac{\lambda_{qp}(n)}{\|\boldsymbol{x}\|_q}$. Donc*

$$\|A\|_p := \max_{\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p} \le \lambda_{pq}(m)\lambda_{qp}(n) \max_{\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_q} = \lambda_{pq}(m)\lambda_{qp}(n)\,\|A\|_q.$$

Par conséquent $C_1 = \frac{1}{\lambda_{pq}(m)\lambda_{qp}(n)}$ et $C_2 = \lambda_{qp}(m)\lambda_{pq}(n)$.

(b) Montrer que la norme de Frobenius de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, définie par $\|A\|_F := \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}$, n'est pas une norme d'opérateur. On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie comme $\mathrm{Tr}(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{ii}}$.
Indication : considérer un opérateur pour lequel la norme d'opérateur est triviale.
Sol.: *Il suffit de remarquer que pour l'opérateur identité I_n on a $\|I_n\|_p = 1$ pour toute norme d'opérateur $\|\cdot\|_p$. Par contre, pour la norme de Frobenius, on a $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$.*

(c) Malgré le fait que la norme de Frobenius ne soit pas une norme d'opérateur, elle est toutefois équivalente aux autres normes matricielles. En particulier, montrer explicitement que

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{r}\,\|A\|_2,$$

où $r \le n$ est le nombre de valeurs propre de $(A^\top A)$ différentes de zéro.
Indication : voir série 6, exercice 1, et utiliser la propriété cyclique de la trace $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$.
Sol.:

$$\|A\|_F^2 := \mathrm{Tr}(A^\top A) \overset{\text{t.s.}}{=} \mathrm{Tr}(Q\Lambda Q^\top) \overset{\text{p.c.}}{=} \mathrm{Tr}(Q^\top Q\Lambda) = \mathrm{Tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(A^\top A) \le r\, \underbrace{\lambda_{\max}(A^\top A)}_{=:\|A\|_2^2}.$$

$$\|A\|_2^2 := \lambda_{\max}(A^\top A) \le \sum_{i=1}^r \lambda_i(A^\top A) =: \|A\|_F^2.$$

2. $\star$ **(Condition de problèmes différentiables)** En cours, on a vu la Définition 3.1 et le Théorème 3.5 pour la condition relative d'un problème. On donne ici la définition de *condition absolue.*

Définition 1 *(Condition absolue).*
Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. Alors, la condition absolue κ_{abs} de f en $\boldsymbol{x}$ est

$$\kappa_{\text{abs}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{\|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})\|}{\varepsilon} : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon \right\} = \|f'(\boldsymbol{x})\|.$$

(a) Considérer le problème suivant : obtenir les quantités scalaires $f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - \sin(x_1 + x_2)$ et $f_2(x_1, x_2) = 2 + x_2 + \cos(x_1 - x_2)$ à partir du vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Calculer la condition absolue en norme $\|\cdot\|_\infty$ pour ce problème. Est-ce qu'il est bien conditionné au sens absolu ?

Sol.: *La matrice jacobienne est donnée par*

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 - \cos(x_1 + x_2) & -\cos(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 - x_2) & 1 + \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix},$$

d'où la condition absolue

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{abs}} = \|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\|_\infty &= \max\{|j_{11}| + |j_{12}|,\ |j_{21}| + |j_{22}|\} \\ &= \max\{|1 + \cos(x_1 + x_2)| + |\cos(x_1 + x_2)|,\ |\sin(x_1 - x_2)| + |1 + \sin(x_1 - x_2)|\} \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Ce problème est bien conditionné au sens absolu.

(b) Considérer le problème suivant : calculer $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ à partir du vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Calculer la condition absolue et relative en norme $\|\cdot\|_1$ pour ce problème. Est-ce qu'il est bien conditionné au sens absolu ? Et au sens relatif ?

Sol.: *On a $\|f(\boldsymbol{x})\|_1 = \|\boldsymbol{x}\|_2$. La matrice jacobienne est donnée par*

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\|\boldsymbol{x}\|_2} \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{x}^\top}{\|\boldsymbol{x}\|_2},$$

d'où la condition absolue

$$\kappa_{\text{abs}} = \|f'(\boldsymbol{x})\|_1 = \frac{\|\boldsymbol{x}^\top\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \overset{(1)}{\leq} 1.$$

Remarquer ici que $\|f'((x))\|_1$ désigne le norme d'opérateurs. Ainsi, la condition relative vaut :

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{\|f'(\boldsymbol{x})\|_1}{\|f(\boldsymbol{x})\|_1 / \|\boldsymbol{x}\|_1} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \leq \sqrt{2}.$$

Ce problème est donc bien conditionné au sens absolu et relatif.