Analyse Numérique
Exercices – Série 8

1. **Stabilité backward**. Considérer le problème suivant : résoudre un système linéaire inversible, c.-à-d., trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$ tel que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, étant donnés $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^s$.

   (a) Écrire ce problème comme l'évaluation d'une fonction $f(\boldsymbol{z}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, c.-à-d., identifier les données $\boldsymbol{z}$, la fonction f et définir exactement $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
   Indication : Ne confondez pas le $\boldsymbol{x}$ comme solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec le $\boldsymbol{z}$ comme variable de $f(\boldsymbol{z})$.

   (b) On note $\tilde{f}$ l'algorithme pour résoudre $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ce qui donne une solution $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^s$ t.q.
   $$(A + \delta A)\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b},$$
   où
   $$\delta A \in \mathbb{R}^{s\times s} \quad \text{t.q.} \quad \|\delta A\|_\infty \le \varepsilon_{\text{mach}}\|A\|_\infty \quad \text{et} \quad \delta\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^s \quad \text{t.q.} \quad \|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty \le \varepsilon_{\text{mach}}\|\boldsymbol{b}\|_\infty.$$
   Montrer que $\tilde{f}$ est backward stable au sens de la définition 3.11 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Quelle est la valeur de la constante C ?

   (c) Montrer que $\tilde{f}$ est aussi backward stable pour la norme $\|\cdot\|_1$. Quelle est la constante C ?

   (d) Qu'est-ce qu'on peut conclure par rapport à la stabilité de ce problème ?

2. **Erreurs des formules de quadrature**. Considérer les intégrales $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x$.

   (a) Écrire les erreurs $E_s(f, 0, 1) := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^s b_i f(c_i)$ pour approcher ces deux intégrales avec la règle du trapèze et de Simpson.

   (b) Trouver la valeur de la constante α pour laquelle la règle du trapèze donne le résultat exact de $\int_0^1 (x^5 - \alpha x^4)\,\mathrm{d}x$.

   (c) Montrer que, pour $\int_0^1 (x^5 - \alpha x^4)\,\mathrm{d}x$, la règle du trapèze donne un résultat plus précis de la règle de Simpson quand $\frac{15}{14} < \alpha < \frac{85}{74}$.

3. ($\star$) **Formules de quadrature symétriques**. Soit (b_i, c_i) $(i = 1, \ldots, s)$ une formule de quadrature symétrique, c'est-à-dire avec $b_{s+1-i} = b_i$, $c_{s+1-i} = 1 - c_i$, $i = 1, \ldots, s$. Le but de cet exercice est de montrer que l'ordre de la formule de quadrature est pair. Autrement dit, si la méthode est d'ordre $2m - 1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors elle est d'ordre $2m$.

   (a) Montrer que tout polynôme $g(t)$ de degré $2m - 1$ peut être écrit sous la forme
   $$g(t) = C\,(t - 1/2)^{2m-1} + g_1(t),$$
   où C est une constante et $g_1(t)$ est un polynôme de degré $\le 2m - 2$.

   (b) Montrer que la formule de quadrature est exacte pour approcher l'intégrale $\int_0^1 (t-1/2)^{2m-1}\,\mathrm{d}t = 0$.

   (c) Conclure.