UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 10

21 novembre 2019
Exercices marqués de ($\star$)
à rendre le 28 novembre 2019

Formules de Lobatto. On considère les Polynômes de Legendre

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left((1+x)^k (1-x)^k \right),$$

qui vérifient pour tout $k \geq 1$ (avec la convention $P_{-1}(x) = 0$),

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x).$$

On a vu précédemment que les nœuds de la formule de quadrature de Gauss (ordre $2s$) sont donnés par les racines de $P_s(2t-1)$. On considère maintenant les polynômes suivants de degré k,

$$Q_k(x) = \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}x^{k-2}} \left((1+x)^{k-1} (1-x)^{k-1} \right)$$

pour $k \geq 2$, avec lesquels on va construire de nouvelles formules de quadrature (formules de Lobatto).

1. **Partie 1.**
   (a) On sait que l'intégrale exacte satisfait pour toute fonction intégrable $g(t)$,
   $$g(t) \geq 0 \text{ sur } [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$
   Montrer qu'une formule de quadrature $(b_i, c_i)_{i=1,\ldots,s}$ vérifie
   $$g(t) \geq 0 \text{ sur } [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) \geq 0 \tag{1}$$
   si et seulement si les poids b_i sont positifs pour tout $i = 1, \ldots, s$.
   Indication : Considérer les polynômes de Lagrange.

   (b) ($\star$) **(0.25 points)** Montrer que si une formule de quadrature $(b_i, c_i)_{i=1,\ldots,s}$ est d'ordre $\geq 2s-1$, alors (1) est vérifiée.

   (c) Calculer les polynômes de Legendre $P_k(x)$ pour $k = 1, 2, 3$, ainsi que les polynômes $Q_k(x)$, $k = 2, 3, 4$.

   (d) Montrer que $Q_k(-1) = Q_k(1) = 0$.
   Indication : On pourra utiliser la formule de Leibniz.

   (e) ($\star$) **(0.75 points)** Montrer que les racines de $Q_k(x)$ sont simples, réelles et dans l'intervalle $[-1, 1]$.
   Indication : Considérer le polynôme $q(x) = \prod_{c \in J}(x-c)$ où J est l'ensemble des racines de multiplicité impaire de $Q_k(x)$ situées dans l'intervalle $]-1,1[$. Considérer également $r(x)$ une primitive de $q(x)$.

2. **Partie 2.**
   (a) On appelle "formule de Lobatto" la formule de quadrature dont les nœuds sont les racines de $Q_s(2t-1)$.
   Montrer que $c_1 = 0$ et $c_s = 1$ sont des nœuds de la formule de Lobatto et expliquer pourquoi cette propriété permet "d'économiser" des évaluations de la fonction lorsqu'on applique la formule de quadrature pour approcher numériquement une intégrale sur un intervalle $[a, b]$.

   (b) Calculer et identifier les formules de quadrature associées à ces racines pour $s = 2, 3$, respectivement.

(c) **($\star$) (0.50 points)** Montrer que la formule de quadrature de Lobatto à s noeuds est d'ordre $2s-2$.
Indication : Utiliser le lemme de Jacobi (sec. 4.3 polycopié, lemme 4.7). Voir aussi l'indication pour la partie 1e et utiliser l'intégration par parties.

(d) **($\star$) (0.50 points)** En déduire que les poids b_i de la formule de Lobatto sont positifs.
Indication : Considérer le polynôme

$$q_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} \left(\frac{c_i - t}{c_i - c_j} \right)^{\alpha_i}.$$

avec $\alpha_1 = \alpha_s = 1$ *et* $\alpha_i = 2$ *pour* $i = 2, \ldots, s-1$.