UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 11

28 novembre 2019
Questions marquées de ⋆
à rendre le 5 décembre 2019

1. (**Polynômes de Legendre**) On souhaite démonter le théorème du cours qui dit que les polynômes de Legendre avec $P_k(1) = 1$ satisfont

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$
$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

   (a) Montrer que les polynômes définis par la formule de Rodrigues :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \left((x^2-1)^k \right). \tag{1}$$

   satisfont la condition

$$\int_{-1}^{1} P_k(x) g(x) dx = 0 \qquad \text{si} \quad \deg(g) \leq k-1. \tag{2}$$

   La constante (de normalisation) est choisie pour avoir $P_k(1) = 1$ et donc ces polynômes correspondent aux polynômes de Legendre considérés dans le théorème.
   Indication : faire plusieurs intégrations par parties.

   (b) ⋆ **(0.25 pts)** Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire (et vice versa). En déduire que le polynôme de Legendre $P_k(x)$ est une fonction de même parité de k (paire si k est pair, et impaire si k est impair).

   (c) ⋆ **(0.5 pts)** Montrer que

$$xP_k(x) = a_{k+1}P_{k+1}(x) + a_{k-1}P_{k-1}(x) + a_{k-3}P_{k-3}(x) + a_{k-5}P_{k-5}(x) + \dots \,. \tag{3}$$

   Indication : utiliser (b).

   (d) ⋆ **(0.25 pts)** En utilisant (2) montrer que les coefficients $a_{k-3},\ a_{k-5}, \dots,\ a_0$ sont nuls.

   (e) ⋆ **(0.5 pts)** En comparant le coefficient de x^{k+1} dans (3) avec le terme dominant de (1), et en utilisant le fait que $P_k(1) = 1,\ \forall\ k$, montrer que

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \quad \text{et} \quad a_{k-1} = \frac{k}{2k+1}.$$

2. **(Opérations sur les lignes d'une matrice)**
   On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 pour effectuer les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

   (a) ⋆ **(0.5 pts)** Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelles opérations élémentaires chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \neq 0).$$

   (b) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 1 et 4.

   (c) Donner la matrice élémentaire qui ajoute trois fois la ligne 1 sur la ligne 3.

   (d) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 7.

   (e) Donner les inverses des matrices considérées aux questions (b), (c), et (d).