TP 6 – 2019 Correction

Exercice 2:

a. On a deux définitions qui sont

$$d(x,y) = \min\{ w(p) , p \text{ appartient à } P(x,y)\}$$

et

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ \min\{ D(x,z) + d(z,y), x\sim z\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et on veut montrer quelles sont équivalentes. On utilise les notations, P(x,y) pour l'ensemble des chemins de x à y et P(x~z,y) l'ensemble des chemins de x à y qui passent par z et z est voisin de x (x~z). w(p) est le poids du chemin qui est la somme des poids des arêtes qui composent le chemin. Les poids des arêtes sont données par D(x,z) pour x~z.

On part de la première définition, x et y sont fixés et on note z1, z2, z3, … les voisins de x. On suppose que x n'est pas égal à y car dans ce cas on d(x,y)=0 comme le poids d'un chemin nul est nul. Donc si x=y les deux définitions sont bien identiques.

$d(x,y)= \min\{w(p) \mid p \text{ appartient à } P(x,y)\} = \min\{ \min\{w(pzi) \mid pzi \text{ appartient à } P(x\sim z,y)\} \mid zi\sim x\}$

L' égalité se déduit du fait que les chemins de x à y passent nécessairement par un voisin.

Ensuite, on utilise que

$\min\{w(pzi) \mid pzi \text{ appartient à } P(x\sim z,y)\} = D(x,zi) + \min\{w(p') \mid p' \text{ appartient à } P(zi,y)\}$

Et donc

$$d(x,y) = \min\{ D(x,zi) + \min\{\underbrace{w(p') \mid p' \text{ appartient à } P(zi,y)\} \mid zi\sim}_{= d(zi,y) \text{ par définition}} x\}$$

$$\boxed{d(x,y) = \min\{ D(x,zi) + d(zi,y) \mid zi\sim x\}}$$

C'est la deuxième définition. On a bien égalité entre les deux.

b. Les définitions satisfont bien les axiomes des distances.

$d(x,y)=d(y,x)$ car dans notre définition on a que les poids des arêtes $D(x,y) = D(y,x)$ le poids des chemins est donc symétrique.

$x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ car un chemin sans arêtes à un poids nul. Et on a $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$, car on suppose $D(x,y)>0$, donc si x et y sont différents il existe un chemin qui possède au moins une arête et on peut conclure.

$d(x,y)>0$ car les poids des arêtes $D(x,y) >0$

$d(x,z) <= d(x,y)+d(y,z)$ car sinon on construit un chemin de x à z avec un poids inférieur à $d(x,z)$ (en passant par y) mais ce n’est pas possible par définition de la distance.

c. On montre que les algorithmes convergent. On commence par la version 1, page 53, de l'algorithme.

On remarque qu'une valeur d(x,y) non infinie correspond toujours au poids d'un chemin.

L'algorithme définit un suite de fonction di: VxV -> R, avec V est l'ensemble des nœuds, R les nombres réels et i un indice i=0, 1, 2, etc.

La fonction d0(x,y) est définie par l'initialisation de l'algorithme.

La fonction d1(.,.) est obtenue en modifiant la valeur de d0(x,y) pour les x, y choisis au hasard. La fonction d2(.,.) en modifiant la fonction d1(.,.) etc.

On remarque que les fonctions sont toujours décroissantes dans le sens que pour tout x,y, on a toujours
di(x,y) >= d(i+1)(x,y).

C'est vrai pour les distances qui correspondent à un chemin minimal de longueur 1 (une seule arête) car on aura toujours d(x,y) = D(x,y), x~y sinon il existe un chemin de longueur plus grande que 1 et c'est une contradiction.

On suppose que c’est vrai pour toutes les distance qui correspondent à des chemins minimaux de longueur k (k arêtes = la longueur).

On considère x et y tels que la longueur du chemin minimal est k+1.

Au départ d(x,y) est infinie.

La valeur va changer

$d(i)(x,y) = \min\{ D(x,z)+d(i-1)(z,y) ¦ x \sim z\}$

$d(i+1)(x,y) = \min\{ D(x,z)+di(z,y) ¦ x \sim z\}$

Et l’expression à droite diminue toujours car d(z,y) à un chemin minimal de longueur k.

Comme les valeurs diminuent et sont positives elles doivent converger.

Pour la preuve de la version 2, c’est encore plus clair que les valeurs diminue toujours car c’est dans la définition de la mise-à-jour.