# L'algèbre relationnelle

"Collection d'opérations formelles agissant sur des relations et produisant des relations en résultat".

Analogie: l'algèbre relationnelle est aux relations ce que l'arithmétique est aux nombres entiers.

But: spécifier des interrogations sur une base de données pour en tirer des informations.

Moyen:

- combinaison de relations entre elles;
- sélection de tuples;
- sélection d'attributs.

4 opérations ensemblistes:

- union
- intersection
- différence
- produit cartésien

3 opérations spécifiques des BD relationnelles:

- sélection
- projection
- jointure



## Opérations ensemblistes

Union (∪), intersection (∩) et différence (–)

- opérations binaires
- restriction: les deux relations doivent avoir le même schéma de relation (les noms d'attribut peuvent être éventuellement différents)
- type du résultat: si r et s sont des relations sur le schéma R, alors r ∪ s, r ∩ s et r – s sont toutes des relations sur le schéma R.

Exemple:

Soit les relations auteur et rédEnChef sur le schéma PERSONNE(NOM,PRÉNOM)

| auteur | NOM | PRÉNOM |
|---|---|---|
| | Hélène | Greco |
| | Matile | François |
| | Monnier | Claude |

| rédEnChef | NOM | PRÉNOM |
|---|---|---|
| | Ribeaud | José |
| | Monnier | Claude |
| | Pillet | Jacques |

alors

auteur ∪ rédEnChef

| NOM | PRÉNOM |
|---|---|
| Hélène | Greco |
| Matile | François |
| Monnier | Claude |
| Ribeaud | José |
| Pillet | Jacques |

auteur ∩ rédEnChef

| NOM | PRÉNOM |
|---|---|
| Monnier | Claude |

auteur – rédEnChef

| NOM | PRÉNOM |
|---|---|
| Hélène | Greco |
| Matile | François |

## Opérations ensemblistes (suite)

Produit cartésien ( × )

- opération binaire
- résultat: relation qui a pour schéma la juxtaposition des deux schémas opérande et pour tuples toutes les combinaisons de tuples des deux relations opérande

Exemple:

| cru | NOM-CRU | COUL. | RÉGION |
|---|---|---|---|
| | ch. Margaux | rouge | bordeaux |
| | ch. Latour | rouge | bordeaux |
| | clos Vougeot | rouge | bourgogne |

×

| vins | R.PROD. | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| | bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| | bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| | bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |

↓

| NOM-CRU | COUL. | RÉGION | R.PROD. | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ch. Margaux | rouge | bordeaux | bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| ch. Margaux | rouge | bordeaux | bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| ch. Margaux | rouge | bordeaux | bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| ch. Margaux | rouge | bordeaux | bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |
| ch. Latour | rouge | bordeaux | bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| ch. Latour | rouge | bordeaux | bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| ch. Latour | rouge | bordeaux | bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| ch. Latour | rouge | bordeaux | bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |
| clos Vougeot | rouge | bourgogne | bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| clos Vougeot | rouge | bourgogne | bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| clos Vougeot | rouge | bourgogne | bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| clos Vougeot | rouge | bourgogne | bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |

Commentaire: certains tuples résultat n'ont pas de sens!



## Opérations spécifiques des BD relationnelles. Opération de sélection

Sélection ( $\sigma$ )

- opération unaire
- résultat: relation composée des tuples qui vérifient une condition spécifiée dans la sélection
- expression de la condition:
  - des opérandes (noms d'attribut et valeurs de dom.)
  - des opérateurs logiques (=, <, ≤, >, ≥, ≠ )
  - des connecteurs logiques (¬, ∧ et ∨ )

Exemple:

$\sigma_{\text{(COUL.=rouge)} \wedge \text{(QUALITÉ} \geq \text{bonne)}}$ (vins)

| vins | R.PROD. | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| | bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| | bordeaux | blanc | 2007 | excellente |
| | bourgogne | rouge | 2007 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2007 | excellente |
| | bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| | bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| | bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |

Commentaire: cette sélection correspond à l'interrogation "Quels sont les vins rouge de bonne qualité ?"

## Opération de projection

Projection ( $\pi$ )

- opération unaire qui consiste à enlever à la relation initiale tous les attributs non mentionnés dans la projection et à éliminer les tuples à double
- résultat: relation restreinte aux attributs spécifiés dans la projection

Exemples:

- $\pi_{\text{NOM-CRU}}$ (cru)

| cru | NOM-CRU | COUL. | RÉGION |
|---|---|---|---|
| | ch. Margaux | rouge | bordeaux |
| | ch. Latour | rouge | bordeaux |
| | clos Vougeot | rouge | bourgogne |

- $\pi_{\text{R.PROD, MILL.}}$ (vins)

| vins | R.PROD. | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| | bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| | bordeaux | blanc | 2007 | excellente |
| | bourgogne | rouge | 2007 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2007 | excellente |
| | bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| | bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| | bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |

Commentaire: ...



## Opération de jointure

Jointure ( $\bowtie$ )

- opération binaire (sur les relations r et s)
- résultat: relation qui contient l'ensemble de tous les tuples obtenus en concaténant un tuple de r et un tuple de s vérifiant une condition(condition de jointure)
- expression de la condition de jointure :
  $\langle condition_1\rangle \wedge \langle condtion_2\rangle \wedge ... \wedge \langle condition_n\rangle$
  où chaque $\langle condition_i\rangle$ est de la forme ($A\ \theta\ B$), A est un attribut de r , B un attribut de s, A et B ont le même domaine et $\theta$ est un opérateur de comparaison (=,>,...)

Exemple: cru $\bowtie_{(\text{COUL.=COUL.})\wedge(\text{RÉGION = R.PROD})}$ vins

| cru | NOM-CRU | COUL. | RÉGION |
|---|---|---|---|
| | ch. Margaux | rouge | bordeaux |
| | ch. Latour | rouge | bordeaux |
| | clos Vougeot | rouge | bourgogne |

$\bowtie_{(\text{COUL.=COUL.})\wedge(\text{RÉGION = R.PROD})}$

| vins | R.PROD. | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| | bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| | bordeaux | blanc | 2007 | excellente |
| | bourgogne | rouge | 2007 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2007 | excellente |

$\downarrow$

| NOM-CRU | COUL. | RÉGION | R.PROD. | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ch. Margaux | rouge | bordeaux | bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| ch. Latour | rouge | bordeaux | bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| clos Vougeot | rouge | bourgogne | bourgogne | rouge | 2007 | bonne |

## Opération de jointure (variantes)

Equi-jointure

- si le seul opérateur $\theta$ utilisé dans la condition de jointure est l'égalité, l'opération est appelée équi-jointure

Jointure naturelle

- dans le cas de l'équi-jointure, les colonnes jointes ont toujours un contenu identique, on en supprime une: dans ce cas l'opération est appelée jointure naturelle
- restriction: il faut que les attributs à joindre portent le même nom

Exemple: cru $\bowtie$ vins

| cru | NOM-CRU | COUL. | RÉGION |
|---|---|---|---|
| | ch. Margaux | rouge | bordeaux |
| | ch. Latour | rouge | bordeaux |
| | clos Vougeot | rouge | bourgogne |

$\bowtie$

| vins | RÉGION | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| | bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| | bordeaux | blanc | 2007 | excellente |
| | bourgogne | rouge | 2007 | bonne |
| | bourgogne | blanc | 2007 | excellente |

↓

| NOM-CRU | COUL. | RÉGION | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| ch. Margaux | rouge | bordeaux | 2007 | moyenne |
| ch. Latour | rouge | bordeaux | 2007 | moyenne |
| clos Vougeot | rouge | bourgogne | 2007 | bonne |



## Expressions algébriques

Rappel: le résultat d'une opération algébrique est une relation

–> cette nouvelle relation peut à son tour être utilisée dans une opération algébrique

Règles d'écriture

On obtient une expression algébrique bien formée (eabf) en applicant les règles suivantes:

(i) un nom de relation est une eabf

(ii) si $E_1$ et $E_2$ sont des eabf, alors

1) $(E_1 \cup E_2)$, $(E_1 \cap E_2)$ et $(E_1 - E_2)$ sont des eabf pour autant que $E_1$ et $E_2$ aient le même schéma
2) $(E_1 \times E_2)$ est une eabf
3) $(E_1 \bowtie_{<condition>} E_2)$ est une eabf si tous les attributs de la condition $\in$ aux schémas de $E_1$ et de $E_2$
4) $\pi_{<liste\ d'attributs>} (E_1)$ est une eabf si tous les attributs de la liste $\in$ au schéma de $E_1$
5) $\sigma_{<condition>}(E_1)$ est une eabf si tous les attributs de la condition $\in$ au schéma de $E_1$

(iii) rien d'autre n'est une eabf

## Ensemble d'opérations complète pour l'algèbre relationnelle

On peut monter que $\{\sigma, \pi, \cup, -, \times\}$ est un ensemble complet, c-à-d que l'on peut exprimer les autres opérations comme une séquence d'opérations de cet ensemble:

- $r \cap s \equiv (r \cup s) - ((r - s) \cup (s - r))$
- $r \bowtie_{<condition>} s \equiv \sigma_{<condition>}(r \times s)$



## Exercice d'expressions algébriques

portant sur les trois relations cru, vins, cépage-région:

- CRU(nom-cru:string, commune:string, région: string, coul.: couleurs)
  où couleurs = {rosé, blanc, rouge}
  Prédicat: ||cru(nc, com, r, coul.)||
  "Le cru qui s'appelle nc est produit dans la commune comse trouvant dans la région r et la couleur du cru est coul."
- VINS(région:string, coul.:couleurs, mill.:entier, qualité: qualités)
  où qualités = {médiocre, passable, moyenne, bonne, très bonne, excellente}
  ||vins(r, coul., mill., q) || "Le millésime mill. des vins de couleur coul. de la région r est de qualité q".
- CÉPAGE-RÉGION(cépage: sortes-de-raisin, r.prod.: string, coul.: couleurs)
  où sortes-de-raisin = {chardonnay, sémillon, pinot noir, cabernet-sauvignon}
  ||cépage-région(c, rp, coul.)|| "Dans la régionrp le vin de couleurcoul est produit principalement avec du cépagec".

## Exercice d'expressions algébriques (suite)

Soit les instances de cru, vins, et cépage-région :

| cru | NOM-CRU | COMMUNE | RÉGION | COUL |
|---|---|---|---|---|
| | Ch. Margaux | Margaux | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Rausan-Ségla | Margaux | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Latour | Pauillac | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Lynch-Bages | Pauillac | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Lagrange | St. Julien | Bordeaux | rouge |
| | Ch. d'Yquem | Sauternes | Bordeaux | blanc |
| | Ch. Myrat | Barsac | Bordeaux | blanc |
| | Clos Vougeot | Vougeot | Bourgogne | rouge |
| | Corton | Aloxe-Corton | Bourgogne | rouge |
| | Les Épenots | Pommard | Bourgogne | rouge |
| | Les Gravières | Santenay | Bourgogne | rouge |
| | Les Perrières | Meursault | Bourgogne | blanc |
| | Clos Vougeot | Meursault | Bourgogne | blanc |
| | Clos Vougeot | Meursault | Bourgogne | blanc |

| vins | RÉGION | COUL. | MILL. | QUALITÉ |
|---|---|---|---|---|
| | Bordeaux | rouge | 2007 | moyenne |
| | Bordeaux | blanc | 2007 | excellente |
| | Bourgogne | rouge | 2007 | bonne |
| | Bourgogne | blanc | 2007 | excellente |
| | Bordeaux | rouge | 2008 | excellente |
| | Bordeaux | blanc | 2008 | très bonne |
| | Bourgogne | rouge | 2008 | bonne |
| | Bourgogne | blanc | 2008 | très bonne |

| cépage-région | CÉPAGE | R. PROD | COUL |
|---|---|---|---|
| | Cabernet-Sauvignon | Bordeaux | rouge |
| | Pinot noir | Bourgogne | rouge |
| | Sémillon | Bordeaux | blanc |
| | Chardonnay | Bourgogne | blanc |
| | Chardonnay | Champagne | blanc |



## Exprimer à l'aide d'expressions algébriques les réponses aux questions suivantes:

Q1 "Tous les crus"

Q2 "Tous les crus rouges"

Q3 "La liste des noms de crus rouges"

Q4 "À partir de quel cépage principal est produit le Meursault blanc?"

Q5 "Quels sont les bons millésimes du Château Latour?" (i.e. bon, très bon ou excellent)

Q6 "Quels sont les crus rouges et leur millésime qui sont de bonne qualité?"

Q7 "Quels sont les millésimes où les Bordeaux rouges sont de qualité supérieure aux Bourgognes rouges?"

## Corrigé de l'exercice d'expressions algébriques

Q1: "Tous les crus"

Expression algébrique: cru

Réponse: toute la relation cru

Q2: "Tous les crus rouges"

Expr: $\sigma_{\text{coul = 'rouge'}}(\text{cru})$

Rép:

| réponse | NOM-CRU | COMMUNE | RÉGION | COUL |
|---|---|---|---|---|
| | Ch. Margaux | Margaux | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Rausan-Ségla | Margaux | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Latour | Pauillac | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Lynch-Bages | Pauillac | Bordeaux | rouge |
| | Ch. Lagrange | St. Julien | Bordeaux | rouge |
| | Clos Vougeot | Vougeot | Bourgogne | rouge |
| | Corton | Aloxe-Corton | Bourgogne | rouge |
| | Les Épenots | Pommard | Bourgogne | rouge |
| | Les Gravières | Santenay | Bourgogne | rouge |

Q3: "La liste des noms de crus rouges"

Expr: $\pi_{\text{nom-cru}}(\sigma_{\text{coul = 'rouge'}}(\text{cru}))$

Rép:

| réponse | NOM-CRU |
|---|---|
| | Ch. Margaux |
| | Ch. Rausan-Ségla |
| | Ch. Latour |
| | Ch. Lynch-Bages |
| | Ch. Lagrange |
| | Clos Vougeot |
| | Corton |
| | Les Épenots |
| | Les Gravières |



## Corrigé (suite)

Q4: "À partir de quel cépage principal est produit le Meursault blanc?"

Expr: $\pi_{\text{<cépage>}}(\sigma_{\text{commune='Meursault'} \wedge \text{ coul = 'blanc'}}(\text{cru}) \bowtie_{\text{région = r.prod} \wedge \text{ coul = coul}} \text{cépage-région})$

Rép:

| réponse | CÉPAGE |
|---|---|
| | chardonnay |

Q5: "Quels sont les bons millésimes du Château Latour?" (i.e. bon, très bon ou excellent)

Expr: $\pi_{\text{mill}}(\sigma_{\text{cru='Ch.Latour'}}(\text{cru}) \bowtie_{\text{région=région} \wedge \text{ coul=coul}} \sigma_{\text{qualité >= 'bonne'}}(\text{vins}))$

ou, en utilisant la jointure naturelle:

$$\pi_{\text{mill}}(\sigma_{\text{cru='Ch.Latour'}}(\text{cru}) \bowtie \sigma_{\text{qualité} \geq \text{'bonne'}}(\text{vins}))$$

Rép:

| réponse | MILL. |
|---|---|
| | 2008 |

Q6: “Quels sont les crus rouges et leur millésime qui sont de bonne qualité?”

Expr:

$$\pi_{\text{nom-cru,mill}}(\sigma_{\text{coul='rouge'}}(\text{cru}) \bowtie \sigma_{\text{qualité} \geq \text{'bonne'}}(\text{vins}))$$

Rép:

| réponse | NOM-CRU | MILL. |
|---|---|---|
| | Ch. Margaux | 2008 |
| | Ch. Rausan-Ségla | 2008 |
| | Ch. Latour | 2008 |
| | Ch. Lynch-Bages | 2008 |
| | Ch. Lagrange | 2008 |
| | Clos Vougeot | 2007 |
| | Corton | 2007 |
| | Les Épenots | 2007 |
| | Les Gravières | 2007 |
| | Clos vougeot | 2008 |
| | Corton | 2008 |
| | Les Épenots | 2008 |
| | Les Gravières | 2008 |

Q7: “Quels sont les millésimes où les Bordeaux rouges sont de qualité supérieure aux Bourgognes rouges?”

Expr:

$$\text{bord-rouge} \leftarrow \sigma_{\text{région='Bordeaux'} \wedge \text{coul='rouge'}}(\text{vins})$$

$$\text{bourg-rouge} \leftarrow \sigma_{\text{région='Bourgogne'} \wedge \text{coul='rouge'}}(\text{vins})$$

$$\pi_{\text{mill}}(\text{bord-rouge} \bowtie_{\text{mill=mill} \wedge \text{qualité > qualité}} \text{bourg-rouge})$$

Rép:

| réponse | MILL. |
|---|---|
| | 2008 |

Remarque: $\leftarrow$ est l'opérateur de renommage



# Récapitulation opérations de l’algèbre relationnelle

| Opération | Résultat | Notation |
|---|---|---|
| SELECTION | Sélectionne dans la relation r tous les tuples qui vérifient la condition de sélection. | $\sigma_{\text{<cond. de sélection>}}(r)$ |
| PROJECTION | Produit à partir de r une nouvelle relation dont le schéma est restreint aux attributs figurant dans la liste d’attributs de la projection. | $\pi_{\text{<liste d'attributs>}}(r)$ ou R[liste d’attributs] |
| UNION | Produit une nouvelle relation qui contient tous les tuples de la relation r et tous les tuples de la relation s. Les relations r et s doivent être définies sur le même schéma. | $r \cup s$ |
| INTERSECTION | Produit une nouvelle relation qui contient tous les tuples appartenant à la fois à la relation r et à la relation s. Les relations r et s doivent être définies sur le même schéma. | $r \cap s$ |
| DIFFERENCE | Produit une nouvelle relation qui contient tous les tuples appartenant à r mais pas à s. Les relations r et s doivent être définies sur le même schéma. | $r - s$ |
| PRODUIT CARTESIEN | Produit une nouvelle relation dont le schéma est défini par la juxtaposition des attributs de r et de s et qui contient toutes les combinaisons possibles des tuples de r et de s. | $r \times s$ |
| JOINTURE | Produit toutes les combinaisons possibles des tuples de r et de s qui vérifient la condition de jointure. | $r \bowtie_{\text{<cond de jointure>}} s$ |
| EQUI JOINTURE | Idem que la JOINTURE mais l’égalité est le seul opérateur qui apparaît dans la condition de jointure. | $r \bowtie_{\text{<cond de jointure>}} s$ |
| JOINTURE NATURELLE | Idem que l’EQUI JOINTURE mais les attributs de jointure de s sont absents de la relation résultat. La jointure s’effectue sur tous les attributs de r et de s qui portent le même nom. | $r \bowtie s$ |