UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 16

5 mars 2020
Questions marquées de ⋆
à rendre le 12 février 2020

1. **(⋆) Méthodes des moindres carrés pour des problèmes linéaires**
   Considérons le polynôme de degré 2 suivant,

   $$p(x) = 3 - x + 5x^2,$$

   qui passe par les points $(-2, 25)$, $(-1, 9)$, $(0, 3)$ et $(1, 7)$. Suite à des perturbations, les évaluations aux abscisses $(-2, -1, 0, 1)$ ont donné les valeurs $\widetilde{\eta} = (24, 12, 4, 10)$. Trouver les coefficients du polynôme

   $$\widetilde{p}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

   qui minimise le résidu $\sum_{i=1}^{4}(\widetilde{p}(\xi_i) - \widetilde{\eta}_i)^2$ de deux manières différentes :

   (a) **(1 points)** en résolvant directement les équations normales ;

   (b) **(1 points)** à l'aide de la décomposition QR en utilisant les réflexions de Householder (calculer α_1, puis $v_1 = \frac{a_1 + \mathrm{sgn}(a_1)\|a_1\|e_1}{\|a_1 + \mathrm{sgn}(a_1)\|a_1\|e_1\|_2}$, afin d'obtenir $H_1 = I - 2v_1v_1^T$, etc). On pourra s'aider d'une calculatrice (ou Matlab).

2. **Réflexions de Householder**

   (a) On a montré géométriquement en cours que $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{x} \pm \|\boldsymbol{x}\|_2 \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{x} \pm \|\boldsymbol{x}\|_2 \boldsymbol{e}_1\right\|_2}$ transforme un vecteur quelconque $\boldsymbol{x}$ de la manière suivante :

   $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{H} H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \pm\|\boldsymbol{x}\|_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \pm\|\boldsymbol{x}\|_2\,\boldsymbol{e}_1.$$

   Vérifier cette identité par calcul direct, c.-à-d., développer $\boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{x})$ et montrer l'égalité avec la quantité $\pm\|\boldsymbol{x}\|_2\,\boldsymbol{e}_1$.

   (b) Soit $Q = H_1 \cdots H_r$ un produit de r matrices de Householder de taille $m \times m$. On va montrer par récurrence que Q peut être écrit comme $Q = I_m - W_r Y_r^\top$ où $W_r, Y_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

      i. Montrer que pour $r = 2$, on a $Q = H_1 H_2 = I_m - W_2 Y_2^\top$, où $W_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{m\times 2}$.

      ii. Supposons $Q = H_1 \cdots H_r = I_m - W_r Y_r^\top$, $P = I_m - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top$ où $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ et $W_r, Y_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Trouver des matrices W_{r+1} et Y_{r+1} dans $\mathbb{R}^{m\times(r+1)}$ telles que

      $$Q_{r+1} = QP = I_m - W_{r+1} Y_{r+1}^\top.$$