Analyse Numérique
Corrigé Série 24

14 mai 2020

1. ($\star$, tout l'exercice) **A-stabilité de la méthode theta**

On rappelle le théorème suivant vu en cours : Si une méthode de Runge-Kutta avec fonction de stabilité $R(z)$ vérifie
- $|R(iy)| \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ (propriété appelée I-stabilité)
- $R(z)$ n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; \Re z \leq 0\}$

alors la méthode est A-stable.

On considère la méthode théta définie par :

$$y_{n+1} = y_n + (1-\theta)hf(t_n, y_n) + \theta hf(t_{n+1}, y_{n+1}),$$

où $\theta \in [0, 1]$.

(a) **(0.50 points)** Montrer que la méthode théta est bien une méthode de Runge-Kutta et donner son tableau de Butcher.

Sol.: *La méthode théta a au plus deux étages car f n'apparaît que deux fois. On cherche donc les coefficients dans le tableau suivant*

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

tels que $y_{n+1} = y_n + hb_1k_1 + hb_2k_2 = y_n + (1-\theta)hf(y_n) + \theta hf(y_{n+1})$. On trouve $k_1 = f(t_n, y_n)$, $k_2 = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, $b_1 = 1-\theta$ et $b_2 = \theta$. L'expression pour k_1 nous donne $c_1 = a_{11} = a_{12} = 0$. L'expression pour k_2 nous donne

$$k_2 = f(t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_n + h, y_n + hb_1k_1 + hb_2k_2).$$

Ainsi $c_2 = 1$, $a_{21} = b_1 = 1-\theta$ et $a_{22} = b_2 = \theta$. Finalement, on obtient

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\theta & \theta \\ \hline & 1-\theta & \theta \end{array}$$

(b) **(0.25 points)** Quelle méthode retrouve-t-on pour $\theta = 1/2$?

Sol.: *Pour $\theta = \frac{1}{2}$, on obtient la méthode*

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}.$$

Il s'agit de la méthode des trapèzes. Son tableau de Butcher est

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(c) **(0.75 points)** Montrer que la méthode est I-stable si et seulement si $\theta \geq 1/2$.

Indication : Rappelez-vous que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et observez que $|1-\theta iy|^2 = 1+\theta^2y^2$.

Sol.: *Commençons par calculer la fonction de stabilité $R(z)$ de la méthode théta. Pour cela, on applique la méthode au problème scalaire test*

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1.$$

On obtient

$$y_{n+1} = y_n + (1-\theta)h\lambda y_n + \theta h\lambda y_{n+1}.$$

Ainsi

$$y_{n+1} = \frac{1+(1-\theta)h\lambda}{1-\theta h\lambda} y_n$$

et donc

$$R(z) = \frac{1+(1-\theta)z}{1-\theta z}.$$

Pour étudier la I-stabilité de la méthode, on évalue la fonction R en iy avec $y \in \mathbb{R}$.

$$R(iy) = \frac{1+(1-\theta)iy}{1-\theta iy}.$$

On calcule le module de $R(iy)$ au carré.

$$|R(iy)|^2 = \frac{1+(1-\theta)^2y^2}{1+\theta^2y^2} = \frac{1+y^2-2\theta y^2+\theta^2y^2}{1+\theta^2y^2}$$

Pour que la méthode soit I-stable, il faut que $|R(iy)| \leq 1$ ou de manière équivalente $|R(iy)|^2 \leq 1$. On veut donc

$$1+y^2-2\theta y^2+\theta^2y^2 \leq 1+\theta^2y^2.$$

Ce qui est équivalent à

$$y^2(1-2\theta) \leq 0.$$

Cette inégalité est vérifiée si et seulement si

$$\theta \geq \frac{1}{2}.$$

(d) **(0.50 points)** En utilisant le théorème rappelé plus haut, en déduire une condition suffisante sur θ pour que la méthode soit A-stable. Montrer que cette condition est nécessaire.
Indication : La condition $|R(z)| \leq 1$ doit être vraie sur tout $\mathbb{C}_-$ et donc pour des z arbitrairement grands en module.
Sol.: *Une condition suffisante pour que la méthode soit A-stable est que celle-ci soit I-stable et ait une fonction de stabilité $R(z)$ analytique dans $\mathbb{C}_-$. On a vu que la méthode est I-stable pour $\theta \geq \frac{1}{2}$. La fonction*

$$R(z) = \frac{1+(1-\theta)z}{1-\theta z}$$

possède un unique pôle en $\frac{1}{\theta}$. Celle-ci est donc analytique dans $\mathbb{C}_-$ car $\theta \geq 0$. Donc la méthode est A-stable pour $\theta \geq \frac{1}{2}$.
On vérifie que la condition est nécessaire en faisant tendre $|z|$ vers l'infini.

$$|R(z)| \longrightarrow \frac{1-\theta}{\theta}.$$

Or

$$\frac{1-\theta}{\theta} \leq 1$$

seulement si

$$\theta \geq \frac{1}{2}.$$

2. (**Valeurs propres du Laplacien discret**)
On considère la matrice $N \times N$

$$A = (N+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

utilisée pour la discrétisation du Laplacien en 1D ($\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$) avec conditions aux bords de Dirichlet $u(0,t) = u(1,t) = 0$ sur une grille de points à pas constant $\Delta x = 1/(N+1)$. Le but est de montrer que les valeurs propres de A sont

$$\lambda_k = (N+1)^2 \left(2\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) - 2\right), \qquad 1 \leq k \leq N,$$

avec les vecteurs propres associés $v^{(k)} = \left(v_1^{(k)}, \dots, v_N^{(k)}\right)^T$ définis par

$$v_j^{(k)} = C \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right), \qquad 1 \leq j,k \leq N.$$

(a) On pose la matrice suivante

$$B := (N+1)^{-2} A + 2Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour chaque valeur propre μ de B, les composantes du vecteur propre associé $v = (v_1, \dots, v_N)^T$ satisfont la relation de récurrence

$$v_0 = 0, \qquad v_{j-1} + v_{j+1} = \mu v_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \qquad v_{N+1} = 0.$$

En déduire que v peut se mettre sous la forme $v_j = C\left(\zeta_1^j - \zeta_2^j\right)$ où

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \mu, \quad \zeta_1\zeta_2 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{N+1} = 1.$$

Sol.: *Pour la relation de récurrence, il suffit de réécrire* $Bv = \mu v$. *Résoudre* $v_{j-1} + v_{j+1} = \mu v_j$ *donne* $v_j = \alpha\zeta_1^j + \beta\zeta_2^j$ *où* $\zeta_1 + \zeta_2 = \mu$ *et* $\zeta_1\zeta_2 = 1$. *Enfin* $v_0 = 0$ *donne* $\beta = -\alpha$ *et* $v_{N+1} = 0$ *donne* $\zeta_1^{N+1} = \zeta_2^{N+1}$.

(b) En déduire les valeurs possibles de ζ_1 et ζ_2, puis celles de μ. Conclure sur les valeurs et vecteurs propres de A.
Indication : les racines $(N+1)$-ième de l'unité sont exactement les $\exp\left(\frac{2ik\pi}{N+1}\right)$, $0 \leq k \leq N$.

Sol.: $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ *est une racine* $(N+1)$*-ième de l'unité, donc* $\zeta_1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{N+1}\right)\zeta_2$. *La relation* $\zeta_1\zeta_2 = 1$ *implique* $\zeta_2 = \exp\left(-\frac{ik\pi}{N+1}\right)$, *et on en déduit* $\zeta_1 = \exp\left(\frac{ik\pi}{N+1}\right)$ *(prendre l'autre racine carrée donne un résultat équivalent). Donc* $\mu = 2\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$ *et* $v_j = C\sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)$. *Pour conclure, on remarque que l'on a exactement* N *valeurs propres distinctes pour* $1 \leq k \leq N$, *donc on a bien tous les valeurs et vecteurs propres de* B. *Or comme* A *et* B *ont les mêmes vecteurs propres, on en déduit aisément les valeurs propres de* A : $\lambda_k = (N+1)^2\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) - 2\right)$.

(c) Vérifier le théorème de Gerschgorin avec la matrice A.
Sol.: *Le théorème donne* $\mathrm{Sp}(A) \subset D(-2(N+1)^2, 2(N+1)^2)$. *C'est bien le cas pour* A *car*

$$-4(N+1)^2 \leq \lambda_k \leq 0.$$

(d) Quel est le conditionnement $\kappa = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ de la matrice A ? Que se passe-t-il quand N tend vers l'infini ? Que peut-on en déduire sur la résolution numérique par différences finies de $\Delta u = f$ sur $[0, 1]$ avec $u(0) = u(1) = 0$?

Sol.: *Le conditionnement de A est donné par $\kappa = \frac{|\max \mathrm{Sp}(A)|}{|\min \mathrm{Sp}(A)|} = \frac{1-\cos\left(\frac{N\pi}{N+1}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)}$. Quand N tend vers l'infini, $\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \to 1$ et $\cos\left(\frac{N\pi}{N+1}\right) \to -1$ donc $\kappa \to \infty$.*

Une discrétisation par différences finies de $\Delta u = f$ avec conditions de bords Dirichlet donne un système à résoudre de la forme $AU = F$ où U, $F \in \mathbb{R}^N$ et N est le nombre de points de discrétisation. La complexité de ce système d'équations est fonction du conditionnement de A, qui explose quand la dimension augmente. Donc plus le pas de discrétisation est faible, plus il est difficile et instable numériquement de résoudre $\Delta u = f$ par différences finies.