Analyse Numérique
Exercices – Série 18

19 mars 2020
Questions marquées de ⋆
à rendre le 26 mars 2020 avant 13h00

1. **(⋆, 1 points) Direction optimale et méthode de Newton**
Soit un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ($n \geq 2$). Pour un $x_0 \in D$, supposons que $f(x_0) \neq 0$ et que $f'(x_0)$ est inversible. Montrer que
$$p_0 = -f'(x_0)^{-1} f(x_0)$$
est la seule direction dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété suivante : pour toute matrice inversible A, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $0 < \lambda < \lambda_0$,
$$\|Af(x_0 + \lambda p_0)\|_2 < \|Af(x_0)\|_2.$$

2. ((⋆), questions a-b-c)(**Méthode de la sécante**) Pour trouver les zéros d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, nous étudions en cours la méthode de Newton. Il s'agit d'une méthode itérative, où l'on calcule x_{k+1} en fonction de x_k en résolvant à chaque itération le système linéaire suivant.
$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$
Dans cet exercice, on va étudier une autre méthode en dimension $d = 1$, appelée méthode de la sécante, qui consiste à approximer $f'(x_k)$ par une différence finie, i.e.
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$
Pour résumer, pour approcher numériquement un zéro x^* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous considérons l'itération $(x_{k-1}, x_k) \to x_{k+1}$ définie par
$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_{k+1} - x_k).$$
   (a) **(0.25 points)** Donner une interprétation géométrique.
   Indication : quelle est l'équation de la droite sécante qui passe par les points $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ *et* $(x_k, f(x_k))$ *?*
   (b) Soit $(v_k)_{k\geq 0}$ une suite de Fibonacci, c'est-à-dire telle que
   $$v_{k+1} = v_k + v_{k-1}, \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$
   On va montrer qu'il existe des constantes c, d telles que
   $$v_k = cp^k + \frac{d}{(-p)^k}$$
   où $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$ est le nombre d'or. De plus, on va montrer que pour $v_0 \neq -pv_1$, on a l'équivalence $v_k \sim cp^k$ pour $k \to \infty$.
      i. **(0.25 points)** Poser $V_k = (v_{k+1}, v_k)$, et montrer que $V_{k+1} = AV_k$ où A est une matrice 2×2 que l'on peut diagonaliser. Trouver P inversible et D diagonal tel que $A = PDP^{-1}$. Sans calculer explicitement c et d, montrer que $v_k = cp^k + \frac{d}{(-p)^k}$.
      Indication : Montrer d'abord que $p^2 = p + 1$.
      ii. **(0.25 points)** En utilisant l'égalité $V_k = PD^kP^{-1}V_0$, et sans calculer explicitement c, montrer que pour $v_0 \neq -pv_1$, on a l'équivalence $v_k \sim cp^k$ pour $k \to \infty$.

(c) **(0.25 points)** En posant $e_k = |x_k - x^*|$, on peut démontrer l'estimation d'erreur suivante pour la méthode de la sécante

$$e_{k+1} \leq C e_k e_{k-1}$$

où $C > 0$ est une constante (qui ne dépend que de f). Montrer que si e_0 et e_1 sont assez petits, alors la convergence de la méthode de la sécante est d'ordre $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire

$$e_k \leq a b^{p^k} \to 0 \text{ pour } k \to +\infty$$

où a, b sont des constantes avec $0 \leq b < 1$ (indépendantes de k).
Indication : poser $u_k = \log(C e_k)$

(d) Soit $f(x)$ un polynôme. Vous verrez en cours que la méthode de Newton satisfait la convergence quadratique $e_k \leq a b^{2^k}$ pour e_0 suffisament petit. On rappelle que le travail pour évaluer $f(x)$ et $f'(x)$ est approximativement le même (méthode de Hörner). Supposons que le coût des opérations d'addition, soustraction, multiplications, divisions sont négligeables par rapport à l'évaluation de $f(x)$. Quelle méthode choisiriez-vous entre la méthode de Newton et la méthode de la sécante ?