UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Exercices – Série 22

23 avril 2020
Questions marquées de $\star$
à rendre le 30 avril 2020 avant 13h00

1. **Équations différentielles linéaires**

   (a) On considère le système d'équations différentielles
   $$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \tag{1}$$
   où A est une matrice constante de taille $n \times n$ et $\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la solution exacte est donnée par
   $$\boldsymbol{y}(t) = \exp(tA)\boldsymbol{y}_0,$$
   où $\exp(M) = \sum_{k\geq 0} \frac{M^k}{k!}$ désigne la série exponentielle pour toute matrice carrée M (convergente pour tout M avec $\exp((t_1+t_2)A) = \exp(t_1A)\exp(t_2A)$ pour tous réels t_1, t_2).
   Indice : montrer d'abord que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-tA)\boldsymbol{y}(t)) = 0$.

   (b) On considère les méthodes d'Euler, de Heun et de Runge appliquées avec un pas constant h au problème (1). Montrer que la solution numérique est donnée par
   $$\boldsymbol{y}_n = R(hA)^n\, \boldsymbol{y}_0,$$
   et calculer $R(z)$ (avec $z = hA$) pour les trois méthodes. Par exemple, si $\boldsymbol{y}_n = (I + hA + h^2A^2)^n\, \boldsymbol{y}_0$, alors $R(z) = 1 + z + z^2$.

2. ($\star$, tout l'exercice)(**Ordre des méthodes de Runge-Kutta**)

   (a) **(1 points)** Donner la famille à un paramètre des méthodes de Runge-Kutta explicites pour résoudre $y' = f(y)$, d'ordre $p = 2$ à $s = 2$ étages (avec comme paramètre libre c_2).

   (b) **(0.25 points)** Étudier le comportement de la solution numérique de cette famille quand $c_2 \to 0$.

   (c) **(0.25 points)** Le schéma limite obtenu est-il une méthode de Runge-Kutta ? Quel est son ordre ?

   (d) **(0.25 points)** Montrer que l'ordre p d'une méthode de Runge-Kutta explicite ne peut pas être plus grand que le nombre s d'étages, c'est-à-dire $p \leq s$.
   Indication : appliquer la méthode à $y' = y$, $y(0) = 1$.

   (e) **(0.25 points)** L'inégalité $p \leq s$ est-elle encore vraie pour des méthodes de Runge-Kutta implicites ?
   Indication : regarder le cas $s = 1$.

3. (**Problèmes linéaires et commutativité**)

   (a) A-t-on pour des matrices générales $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)$?

   (b) Montrer que si deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ commutent, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$.
   Indice : utiliser le produit de Cauchy de deux séries :
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$$

   (c) En déduire que si $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ est régulière, et si $A(t)$ commute avec $A(s)$ pour tous s et t, alors la solution de
   $$\boldsymbol{y}'(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$
   est donnée par
   $$\boldsymbol{y}(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)\boldsymbol{y}_0.$$
   On admettra que la propriété de commutation de A implique que $\int_{t_1}^{t_2} A(s)ds$ commute avec $\int_{t_3}^{t_4} A(s)ds$ pour tous t_1, t_2, t_3 et t_4.
   Indice : utiliser la même technique que dans le (a).