Analyse Numérique
Exercices – Série 6

24 octobre 2019
Exercices marqués de ($\star$)
à rendre le 31 octobre 2019

1. (**Normes matricielles**) Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la **norme d'opérateur** est donnée par :

$$\|A\|_p := \max_{\|\boldsymbol{x}\|_p=1} \|A\boldsymbol{x}\|_p = \max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}.$$

(a) Montrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{plus grande valeur propre de } A^\mathsf{T} A}. \tag{1}$$

On remarque que $A^\mathsf{T} A$ est symétrique et on rappelle le théorème suivant.

> **Théorème 1.** (Théorème spectral pour diagonaliser les matrices symétriques).
> Soit A une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice Q orthogonale et une matrice Λ diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice A est égale à $Q\Lambda Q^\mathsf{T}$.

(b) Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, montrer que les valeurs propres non nulles de AB et de BA sont égales ; en déduire que $\|A\|_2 = \left\|A^\mathsf{T}\right\|_2$.

(c) Dans le cas où A est symétrique, montrer $\|A\|_2 = |\lambda_{max}|$ où λ_{max} est la plus grande valeur propre de A en valeur absolue.

(d) ($\star$) Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, montrer que $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\}$.

2. (**Différence finie centrée et erreur d'arrondi**) Soit un intervalle $I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ et $f \in \mathcal{C}^3(I)$, et notons

$$\Delta_f(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

(a) ($\star$) Montrer que

$$|\Delta_f(h) - f'(x_0)| \leq C\,h^2, \quad \text{pour} \quad |h| \leq \varepsilon,$$

avec $C = \frac{1}{6} \max_{\eta\in I} |f^{(3)}(\eta)|$.

(b) ($\star$) L'erreur ci-dessus est un résultat pour le calcul exact. En prenant compte des erreurs d'arrondi, vérifier que le h optimal (c.-à-d., le h pour lequel l'erreur atteint son minimum) est donné par :

$$h_{\text{opt}} \approx \sqrt[3]{\varepsilon_{\text{mach}}},$$

où $\varepsilon_{\text{mach}}$ est la précision de la machine.

Indication : Séparer l'erreur en deux termes Exacte+Arrondi et étudier le comportement du nouveau terme à droite en h.

(c) Vérifier cette erreur en MATLAB, par exemple, pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $x = \pi/3$. Vous devriez obtenir une figure comme la Figure 1, qui montre que l'erreur décroît jusqu'à atteindre une valeur minimale en correspondance de $h_{\text{opt}} \approx \sqrt[3]{\varepsilon_{\text{mach}}} \approx 6.0555 \times 10^{-6}$ et puis augmente de nouveau pour des h plus petits que h_{opt}.

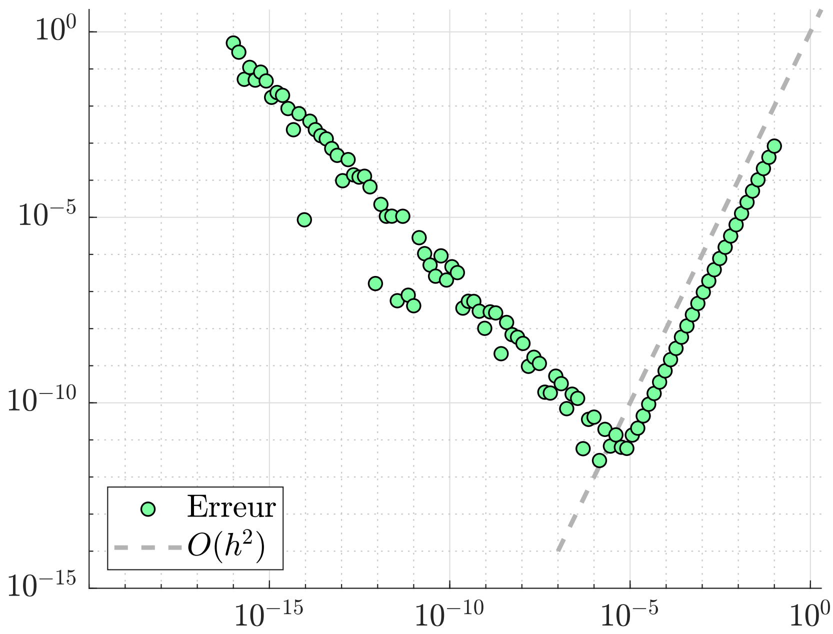

FIGURE 1 – Comportement logarithmique de l'erreur pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $x = \frac{\pi}{3}$ en fonction de h : l'erreur en arithmétique exacte (ligne) et l'erreur en arithmétique flottante (cercle).