Analyse Numérique
Corrigé Série 12

12 décembre 2019

1. **Système de Vandermonde.** Soit $c_1, \dots, c_n$ distincts deux-à-deux, et $b_1, \dots, b_n$ fixés. Proposer un algorithme qui nécessite seulement de $O(n^2)$ opérations élémentaires pour résoudre le système linéaire suivant, d'inconnues $x_1, \dots, x_n$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^{i-1} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Indication : Montrer que le système (1) *est équivalent à*

$$\sum_{j=1}^{n} p(c_j) x_j = b(p), \qquad \textit{pour } \deg(p) \leq n-1, \tag{2}$$

avec $b(p) = \sum_{j=1}^{n} d_j b_j$ *et* $p(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j t^{j-1}$. *Puis, choisir pour* $p(t)$ *les éléments de la base de Newton,* $1,\ t-c_1,\ (t-c_1)(t-c_2),\ \dots$.

Sol.: *Montrons d'abord l'équivalence entre* (1) *et* (2). *Si* (1) *est vérifié, et si* $p(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j t^{j-1}$ *est un polynôme de degré* $\leq n-1$, *alors* $b(p) = \sum_{i=1}^{n} d_i b_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=1}^{n} c_j^{i-1} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i c_j^{i-1} \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} p(c_j) x_j$. *Réciproquement, si* (2) *est vérifié, alors en prenant le cas particulier* $p(t) = t^{i-1}$, *on obtient* (1) *avec* $i = 1, \dots, n$.

Maintenant si $p(t) = p_k(t)$ *est le polynôme de la base de Newton de degré* k *(c.-à-d.,* $p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t - c_1,\ p_2(t) = (t-c_1)(t-c_2),\ \dots$*), alors* $p_{k-1}(c_j) = 0$ *pour* $j < k$ *et* (2) *devient*

$$\sum_{j=k}^{n} p_{k-1}(c_j) x_j = b(p_k), \qquad \textit{pour } k = 1, \dots, n,$$

c.-à-d., en forme matricielle, on obtient le système triangulaire suivant :

$$\begin{pmatrix} p_0(c_1) & \cdots & \cdots & \cdots & p_0(c_n) \\ 0 & p_1(c_2) & \cdots & \cdots & p_1(c_n) \\ 0 & 0 & p_2(c_3) & \cdots & p_2(c_n) \\ & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_{n-1}(c_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(p_1) \\ b(p_2) \\ \vdots \\ b(p_n) \end{pmatrix}$$

Le coût pour calculer tous les coefficients $b(p_k)$ *est* $O(n^2)$, *car il y a* $O(n)$ *opérations dans le calcul de chaque* $b(p_k) = \sum_{j=1}^{n} d_j^k b_j$, *où on pose* $p_k = \sum_{j=1}^{k+1} d_j^k t^{j-1}$, *et le calcul de tous les coefficients* d_j^k *coûte* $O(n^2)$ *opérations. En effet, la relation de récurrence* $p_{k+1}(t) = (t - c_{k+1}) p_k(t)$ *donne (avec la convention* $d_0^k = 0$*),*

$$d_j^{k+1} = d_{j-1}^k - c_{k+1} d_j^k, \quad j = 1, \dots, k+1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Par ailleurs, le coût pour calculer chaque colonne de la matrice de ce système est $O(n)$ *(en utilisant la relation de récurrence* $p_{k+1}(c_i) = (c_i - c_{k+1}) p_k(c_i)$*), donc le coût pour calculer tous les coefficients est* $O(n^2)$. *Le coût pour inverser un système triangulaire est seulement* $O(n^2)$. *Le coût de l'algorithme pour calculer* $x_1, \dots, x_n$ *à partir de ce système triangulaire est donc seulement* $O(n^2)$.

Remarque : On retrouve que ce système est inversible, car les coefficients diagonaux sont non nuls (en effet, $p_k(c_{k+1}) \neq 0$ *pour tout* k*).*

2. **($\star$) Factorisation $LDL^\top$.**

(a) **(0.25 points)** Soient A, B deux matrices triangulaires inférieures. Montrer que AB est aussi une matrice triangulaire inférieure.

Indication : Une matrice A est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$.

Sol.:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{j \le k \le i} a_{ik} b_{kj}.$$

Donc $(AB)_{ij} = 0$ si $i < j$.

(b) **(0.75 points)** Montrer que si A est une matrice inversible triangulaire inférieure, alors A^{-1} est également triangulaire inférieure.

Indication : Faire un argument par récurrence sur la taille de la matrice. Pour A, une matrice triangulaire inférieure de taille n, poser

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ \boldsymbol{r}^\top & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ une matrice triangulaire inférieure.

Sol.: *Pour $n = 1$, toute matrice est triangulaire inférieure. Supposons que le résultat est vrai pour des matrices de taille $n-1$. Alors on écrit comme dans l'énoncé*

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ \boldsymbol{r}^\top & \alpha \end{pmatrix}.$$

On écrit également A^{-1} sous cette forme :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}^\top & \beta \end{pmatrix},$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}B & \widetilde{A}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{r}^\top B + \alpha \boldsymbol{z}^\top & \boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{y} + \alpha\beta \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y} = 0 \quad \text{et} \quad B = \widetilde{A}^{-1},$$

car $\widetilde{A}$ est inversible B est triangulaire inférieure par hypothèse de récurrence. Ainsi A^{-1} est bien triangulaire inférieure.

(c) **(0.25 points)** Montrer que les deux résultats précédents sont également vrais pour des matrices A, B triangulaires supérieures.

Sol.: *$(AB)^\top = B^\top A^\top$ est triangulaire inférieure par 2a car $A^\top$ et $B^\top$ sont triangulaires inférieures. Donc AB est triangulaire supérieure. Or $A^{-\top}$ est l'inverse de $A^\top$ et donc est triangulaire inférieure par 2b. Ainsi A^{-1} est triangulaire supérieure.*

(d) Soit A une matrice inversible symétrique avec factorisation LU, c.-à-d., $A = LU$ sans recherche de pivot (donc, $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$). À l'aide des étapes suivantes, on va monter que $A = LDL^\top$ où

$$D = \operatorname{diag}(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}).$$

i. **(0.25 points)** Montrer que $U = DL^\top$, où D est une matrice triangulaire inférieure.

Sol.:

$$LU = U^\top L^\top \Rightarrow U = L^{-1} U^\top L^\top.$$

Posons $D = L^{-1} U^\top$. L^{-1} et $U^\top$ sont triangulaires inférieures et donc D l'est également.

ii. **(0.25 points)** Montrer que la matrice D trouvée précédemment est également une matrice triangulaire supérieure.

Sol.:
$$U^{-1}L^{-1} = L^{-T}U^{-T} \Rightarrow D = L^{-1}U^{T} = UL^{-T}.$$
U et L^{-T} sont triangulaires supérieures et donc D l'est également.

iii. **(0.25 points)** Conclure.

Sol.: *D est triangulaire inférieure et supérieure, donc elle est une matrice diagonale. En plus, on a*

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1(n-1)} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2(n-1)} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & & \\ 0 & d_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & d_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{(n-1)1} & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{(n-1)2} & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{23} & \cdots & l_{n3} \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_1 & \times & \cdots & \times & \times \\ 0 & d_2 & \cdots & \times & \times \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & \times \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \quad d_k = u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)}.$$

3. **Matrices bandes.** On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une *matrice bande*, avec ampleur de bande p, si $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| \geq p$. Par exemple, la matrice avec la structure suivante

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

est une matrice bande $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ avec $p = 4$.

On va montrer que la factorisation LU d'une telle matrice préserve la structure à bande, c.-à-d., si A a bande p, alors ses facteurs L et U ont la même bande p. Soit $A^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n-1$, la matrice obtenue à l'étape k de la méthode d'élimination de Gauss, avec $A^{(0)} = A$, $A^{(n-1)} = U$ (voir les polycopiés du cours, section 5.3). On montre par récurrence que $U = A^{(n-1)}$ est une matrice bande.

(a) Écrire le cas d'initialisation et l'hypothèse de récurrence.

Sol.: *Pour $k = 0$, $A^{(0)} = A$ est une matrice bande (initialisation). On suppose que $A^{(k)}$ est une matrice bande et on doit montrer que $A^{(k+1)}$ est une matrice bande aussi. On a donc que $a_{ij}^{(k)} = 0$ pour $|i-j| \geq p$ par hypothèse de récurrence.*

(b) Dans l'hérédité de la récurrence on doit montrer que $a_{ij}^{(k+1)} = 0$ pour $|i-j| \geq p$. Considérer d'abord les couples d'indices telles que $i - j \geq p$, c.-à-d., la partie en dessous de la bande (pour les couples telles que $j - i \geq p$ on procède de façon analogue), et montrer que la structure à bande de la matrice A est préservée.

Sol.:

i. On a pour $i \leq k$, $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} = 0$.

ii. Pour $i \geq k+1$ et $j \leq k$, $a_{ij}^{(k+1)} = 0$ (éléments annulés par les étapes précédentes de l'élimination de Gauss).

iii. Pour $i \geq k+1$ et $j \geq k+1$,

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}. \tag{3}$$

Par hypothèse on a que $a_{ij}^{(k)} = 0$ pour $i - j \geq p$ et pour $a_{ik}^{(k)}$ on a

$$i - j \geq p \Longrightarrow i \geq j + p \geq k + 1 + p \Longrightarrow i - k > p \Longrightarrow a_{ik}^{(k)} = 0.$$

Grâce à (3), ces deux résultats impliquent $a_{ij}^{(k+1)} = 0$.

On a bien trouvé que pour $i - j \geq p$, $a_{ij}^{(k+1)} = 0$.

On peut trouver le même résultat pour $j - i \geq p$ (c.-à-d., pour la partie en dessus de la bande), en montrant que $a_{kj}^{(k)} = 0$.

(c) Montrer que L a la même structure à bande que A. Exploiter ce que vous avez trouvé dans le point précédent.

Sol.: *Les éléments sous-diagonales non-nuls de L sont les multiplicateurs $\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ de l'élimination de Gauss. En exploitant ce qu'on a trouvé au point (b), si $i - k \geq p$ on aura $0 = a_{ik}^{(k)} = \ell_{ik}$, c.-à-d., L a la même structure à bande de A.*

(d) Comment calculer le déterminant d'une matrice carrée à l'aide de la décomposition LU ? Quel est le coût en fonction de la dimension ? À comparer avec le coût du calcul en utilisant la formule de Laplace qui est $O(n!)$.

Sol.: $\det(A) = \det(PLU) = \det(P)\det(L)\det(U) = \pm 1 \times \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \times \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = \pm \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$ *(L et U sont des matrices triangulaires et $\operatorname{diag}(L) = (1, 1, \ldots, 1)$). Le coût est égal au coût de la décomposition LU + $O(n) = O(n^3) + O(n) = O(n^3) \ll O(n!)$.*