Analyse Numérique
Exercices – Série 17

12 mars 2020
Questions marquées de ⋆
à rendre le 19 mars 2020

1. (**Résolution itérative d'un système linéaire avec la méthode du point fixe**)
Considérer le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Considérer la méthode du point fixe dont les itérées sont données par
   $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \theta(A\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b}), \tag{1}$$
   avec $\theta \neq 0$. En supposant que cette suite converge, montrer que le point fixe $\boldsymbol{x}^*$ équivaut à une solution du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   (b) Soit $e_k = x^* - x_k$. Montrer que $e_k = T^k e_0$ où T est à déterminer.
   (c) Donner une condition suffisante sur la norme de T pour que la méthode converge.
   (d) Supposons maintenant que A soit une matrice symétrique, définie positive, avec valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Montrer que $\|T\|_2 = \max_i |1 - \theta\lambda_i|$.
   (e) On définit la fonction $f_{\lambda_i}(\theta) = |1 - \theta\lambda_i|$. Trouver les valeurs de θ pour lesquelles (1) converge pour tout $\boldsymbol{x}_0$, c.-à-d., trouver les θ pour lesquelles $\|T\|_2 = \max_i f_{\lambda_i}(\theta) < 1$. Aidez-vous en traçant les graphiques de $f_{\lambda_i}(\theta)$ pour les valeurs propres extrémales λ_1 et λ_n.
   (f) Toujours à l'aide des graphiques de $f_{\lambda_1}(\theta)$ et $f_{\lambda_n}(\theta)$, trouver la valeur optimale θ_{opt} qui minimise $\|T\|_2$.

2. (⋆, tout l'exercice)(**Norme d'opérateur et rayon spectral**) Dans cet exercice, on veut prouver le théorème suivant.
Théorème 1. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\varepsilon > 0$, il existe une norme d'opérateur $\|.\|_{\varepsilon,A}$ satisfaisant*
$$\|A\|_{\varepsilon,A} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$
On rappelle que le rayon spectral est défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
   (a) On se propose d'abord de redémontrer quelques propriétés élémentaires sur les matrices et leurs normes.
      i. **(0.25 points)** Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, montrer par récurrence qu'il existe $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
      Indication : On rappelle que toute matrice a au moins un vecteur propre dans $\mathbb{C}$.
      ii. **(0.5 points)** Montrer que
      $$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} \qquad \text{et} \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$
      iii. **(0.25 points)** Montrer que toute norme d'opérateur $\|.\|$ vérifie
      $$\rho(A) \leq \|A\|, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$
      Le rayon spectral ρ est-il une norme sur $\mathbb{R}^{n\times n}$ en général ?
   (b) Démontrons à présent le théorème 1.
      i. **(0.5 points)** On suppose que A est triangulaire supérieure, c'est-à-dire $A = D + T$ avec D diagonale et T triangulaire supérieure stricte. À l'aide d'une norme d'opérateur bien choisie, construire explicitement une norme d'opérateur $\|.\|_{\varepsilon,A}$ vérifiant $\|A\|_{\varepsilon,A} \leq \rho(A) + \varepsilon$.
      Indication : On pourra considérer la matrice $D_\delta^{-1}AD_\delta$ où $D_\delta = \mathrm{Diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1})$ et δ est choisi assez petit de telle manière que $\sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-1}t_{ij}| \leq \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
      ii. **(0.25 points)** Démontrer le theorème 1 dans le cas général.
      iii. **(0.25 points)** En déduire que la suite définie par $x_{k+1} = Ax_k$ converge vers 0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.