Analyse Numérique
Exercices – Série 23

30 avril 2020
Questions marquées de $\star$
à rendre le 7 mai 2020

1. (**Constante de Lipschitz d'une méthode de Runge-Kutta**)
Soit $f(t,y)$ lipschitzienne par rapport à y avec une constante $\tilde{L}$. On considère une méthode de Runge-Kutta explicite à 3 étages, d'ordre $p = 3$ avec tous les coefficients a_{ij}, b_j positifs. L'objectif de l'exercice est de montrer que la constante de Lipschitz L de $\Phi(t,y,h)$ par rapport à y satisfait

$$(1 + hL) \leq e^{h\tilde{L}}. \tag{1}$$

On rappelle le résultat du cours suivant, pour $h \leq h_{\max}$

$$L \quad \leq \quad \tilde{L}\Big(|b_1| + |b_2| + |b_3| + h_{\max}\tilde{L}(|b_2c_2| + |b_3c_3|) + (h_{\max}\tilde{L})^2|b_3a_{32}c_2|\Big). \tag{2}$$

(a) Appliquer la méthode à l'équation différentielle $y' = \lambda y$, $y(t_0) = y_0$ et montrer que

$$y_1 \quad = \quad y_0\Big(1 + (h\lambda)(b_1 + b_2 + b_3) + (h\lambda)^2(b_2c_2 + b_3c_3) + (h\lambda)^3 b_3a_{32}c_2\Big).$$

(b) Par un développement de Taylor, montrer à l'aide du point précédent que

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 + b_2 + b_3 & = & 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 & = & \frac{1}{2} \\ b_3a_{32}c_2 & = & \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

(c) En déduire (1).

2. ($\star$, tout l'exercice)(**Constante de Lipschitz d'une méthode Runge-Kutta implicite**)
Considérer la règle des trapèzes pour intégrer des EDOs, définie par

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right].$$

La méthode Φ est alors définie implicitement par

$$\begin{aligned} h\Phi(t_n, h, y_n) &= \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + h\Phi(t_n, h, y_n))\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à y avec constante L_f.

(a) **(1 point)** On suppose qu'il existe une fonction Φ solution de (3). Montrer que si $\frac{1}{2}hL_f < 1$, la fonction Φ est lipschitzienne de constante L_Φ, dont on donnera l'expression en fonction de L_f.

(b) **(1 point)** Montrer que pour h assez petit, Φ est bien définie de manière unique par (3). En déduire que la méthode de Runge-Kutta associée est aussi bien définie.