UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Analyse Numérique
Corrigé Série 22

30 avril 2020

1. **Équations différentielles linéaires**

   (a) On considère le système d'équations différentielles
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \tag{1}$$
où A est une matrice constante de taille $n \times n$ et $\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la solution exacte est donnée par
$$\boldsymbol{y}(t) = \exp(tA)\boldsymbol{y}_0,$$
où $\exp(M) = \sum_{k\geq 0} \frac{M^k}{k!}$ désigne la série exponentielle pour toute matrice carrée M (convergente pour tout M avec $\exp((t_1+t_2)A) = \exp(t_1A)\exp(t_2A)$ pour tous réels t_1, t_2).
Indice : montrer d'abord que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-tA)\boldsymbol{y}(t)) = 0$.
Sol.: *On calcule :*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-tA)\boldsymbol{y}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-tA))\boldsymbol{y}(t) + \exp(-tA)\boldsymbol{y}'(t) = \exp(-tA)(-A+A)\boldsymbol{y}(t) = 0.$$
On a utilisé $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tA)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\exp((t+\varepsilon)A) - \exp(tA)\Big) = \exp(tA)A$, *avec*
$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\exp((t+\varepsilon)A) - \exp(tA)\Big) &= \frac{1}{\varepsilon}\exp(tA)\Big(\exp(\varepsilon A) - I\Big)\\ &= \frac{1}{\varepsilon}\exp(tA)\Big(I + \varepsilon A + O(\varepsilon^2) - I\Big)\\ &= \exp(tA)A + O(\varepsilon).\end{aligned}$$
Ainsi, $\exp(-tA)\boldsymbol{y}(t)$ *est une fonction constante égale à sa valeur en zéro :* $\exp(0)\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$. *En multipliant l'égalité* $\exp(-tA)\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_0$ *à gauche par* $\exp(tA)$, *on obtient le résultat* $\boldsymbol{y}(t) = \exp(tA)\boldsymbol{y}_0$.

   (b) On considère les méthodes d'Euler, de Heun et de Runge appliquées avec un pas constant h au problème (1). Montrer que la solution numérique est donnée par
$$\boldsymbol{y}_n = R(hA)^n\,\boldsymbol{y}_0,$$
et calculer $R(z)$ (avec $z = hA$) pour les trois méthodes. Par exemple, si $\boldsymbol{y}_n = (I + hA + h^2A^2)^n\,\boldsymbol{y}_0$, alors $R(z) = 1 + z + z^2$.
Sol.: *On obtient après un pas de chaque méthode* $\boldsymbol{y}_1 = R(hA)\boldsymbol{y}_0$. *Par exemple, pour la méthode d'Euler on a*
$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + hA\boldsymbol{y}_0 = (I + hA)\,\boldsymbol{y}_0,$$
et donc $R(z) = (1+z)\boldsymbol{y}_0$.
Pour Euler, Heun et Runge on obtient, respectivement,
$$R(z) = 1 + z, \qquad R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}, \qquad R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2},$$
puis par récurrence sur n, $\boldsymbol{y}_n = R(hA)^n\boldsymbol{y}_0$.

2. ($\star$, tout l'exercice)(**Ordre des méthodes de Runge-Kutta**)

(a) **(1 points)** Donner la famille à un paramètre des méthodes de Runge-Kutta explicites pour résoudre $y' = f(y)$, d'ordre $p = 2$ à $s = 2$ étages (avec comme paramètre libre c_2).
Sol.: *La méthode numérique est donnée par*

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n), \\ k_2 &= f(y_n + c_2 h k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + b_1 h k_1 + b_2 h k_2, \end{aligned}$$

d'où après un développement de Taylor :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + b_1 h f(y_n) + b_2 h (f(y_n) + f'(y_n)(c_2 h f(y_n)) + O(h^2)) \\ &= y_n + (b_1 + b_2) h f(y_n) + b_2 c_2 h^2 f'(y_n) f(y_n) + O(h^3). \end{aligned}$$

En comparant avec le développement pour la solution exacte $y(t_n+h) = y_n + hf(y_n) + \frac{h^2}{2} f'(y_n) f(y_n) + O(h^3)$, *on obtient les conditions d'ordre 2,*

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad b_2 c_2 = \frac{1}{2},$$

avec solutions $b_2 = \frac{1}{2c_2}, b_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}$, *d'où la famille de méthodes numériques :*

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n) + \frac{h}{2c_2}\Big(f(y_n + c_2 h f(y_n)) - f(y_n)\Big).$$

(b) **(0.25 points)** Étudier le comportement de la solution numérique de cette famille quand $c_2 \to 0$.
Sol.: *En faisant un développement limité pour* $c_2 \to 0$ *dans la famille de méthodes numériques*

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n) + \frac{h}{2c_2}\Big(f(y_n + c_2 h f(y_n)) - f(y_n)\Big),$$

on a $f(y_n + c_2 h f(y_n)) - f(y_n) = c_2 h f'(y_n) f(y_n) + O(c_2^2)$, *d'où en passant à la limite* $c_2 \to 0$,

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n) + \frac{h^2}{2} f'(y_n) f(y_n).$$

(c) **(0.25 points)** Le schéma limite obtenu est-il une méthode de Runge-Kutta ? Quel est son ordre ?
Sol.: *Le schéma fait intervenir la dérivée de* f, *donc ce n'est pas une méthode de Runge-Kutta. Par contre il est d'ordre 2 car*

$$y(t_n + h) = y_n + h f(y_n) + \frac{h^2}{2} f'(y_n) f(y_n) + O(h^3) = y_{n+1} + O(h^3).$$

(d) **(0.25 points)** Montrer que l'ordre p d'une méthode de Runge-Kutta explicite ne peut pas être plus grand que le nombre s d'étages, c'est-à-dire $p \leq s$.
Indication : appliquer la méthode à $y' = y$, $y(0) = 1$.
Sol.: *En appliquant la méthode à* $y' = y$, $y(0) = 1$, *on obtient* $y_1 = R(h)$ *où* $R(h)$ *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* s. *Comme la solution exacte vérifie* $y(h) = e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \ldots + \frac{h^p}{p} + \ldots$ *(tous les coefficients du développement de Taylor sont non nuls), on ne peut pas avoir* $R(h) - e^h = O(h^{p+1})$ *avec* $p > s$. *L'ordre est donc inférieur ou égal à* s.

(e) **(0.25 points)** L'inégalité $p \leq s$ est-elle encore vraie pour des méthodes de Runge-Kutta implicites ?
Indication : regarder le cas $s = 1$.
Sol.: *Non, ce n'est plus vrai. Par exemple, la méthode du point milieu est une méthode d'ordre 2 avec un seul étage.*

3. (**Problèmes linéaires et commutativité**)

(a) A-t-on pour des matrices générales $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)$?
Sol.: *C'est faux si les matrices ne commutent pas. Par exemple pour*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On trouve en utilisant $M_j^k = 0$ pour $k \geq 2$ dans la série exponentielle,

$$\exp(M_1 + M_2) = \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}, \qquad \exp(M_1)\exp(M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que si deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ commutent, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$.
Indice : utiliser le produit de Cauchy de deux séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$$

Sol.: *Comme $AB = BA$, on a*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{A+B} \end{aligned}$$

(c) En déduire que si $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ est régulière, et si $A(t)$ commute avec $A(s)$ pour tous s et t, alors la solution de

$$\boldsymbol{y}'(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

est donnée par

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds \right) \boldsymbol{y}_0.$$

On admettra que la propriété de commutation de A implique que $\int_{t_1}^{t_2} A(s)ds$ commute avec $\int_{t_3}^{t_4} A(s)ds$ pour tous t_1, t_2, t_3 et t_4.
Indice : utiliser la même technique que dans le (a).
Sol.: *Comme dans le (a), on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(\int_0^t A(s)ds)) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) A(t)$ car*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(\int_0^{t+\varepsilon} A(s)ds \right) - \exp\left(\int_0^t A(s)ds \right) \right) &= \exp\left(\int_0^t A(s)ds \right) \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp\left(\int_t^{t+\varepsilon} A(s)ds \right) - I \right) \\ &= \exp\left(\int_0^t A(s)ds \right) \frac{1}{\varepsilon} \left(I + \varepsilon A(t) + O(\varepsilon^2) - I \right) \\ &= \exp\left(\int_0^t A(s)ds \right) A(t) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(-\int_0^t A(s)ds\right)\boldsymbol{y}(t)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(-\int_0^t A(s)ds\right)\right)\boldsymbol{y}(t) + \exp\left(-\int_0^t A(s)ds\right)\boldsymbol{y}'(t)\\ &= \exp\left(-\int_0^t A(s)ds\right)(-A(t)+A(t))\boldsymbol{y}(t) = 0.\end{aligned}$$

Le résultat se déduit donc de la même manière qu'en (a).