Analyse Numérique
Corrigé Série 14

27 février 2019

1. (**Unicité de la décomposition** QR)
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible. On étudie actuellement en cours la décomposition $A = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure.

   (a) **(0.75 points)** Montrer qu'on peut choisir R tel que tous les éléments sur la diagonale soient positifs, c.-à-d. $\mathrm{diag}(R) > 0$.
   Sol.: *Soit* $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ *une décomposition de* A *avec une matrice* $\widetilde{Q}$ *orthogonale et une matrice* $\widetilde{R}$ *triangulaire supérieure. Puisque* A *et* $\widetilde{Q}$ *sont inversibles,* $\widetilde{R} = \widetilde{Q}^T A$ *est aussi inversible. Ainsi tous les éléments* R_{ii} $i = 1, \dots, n$ *sur la diagonale de* $\widetilde{R}$ *sont non-nuls. On définit la matrice diagonale* $\widetilde{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *par* $\widetilde{I}_{ii} := \mathrm{sign}(R_{ii}), i = 1, \dots, n$. *Alors la matrice* $Q := \widetilde{Q}\widetilde{I}$ *est orthogonale et* $R := \widetilde{I}\widetilde{R}$ *est triangulaire supérieure avec* $\mathrm{diag}(R) > 0$. *En plus on a* $A = QR$ *parce que* $\widetilde{I}^2$ *est l'identité.*

   (b) En supposant cette condition supplémentaire, on va montrer ensuite que cette décomposition est unique. Supposons qu'on ait deux décompositions $A = QR = Q'R'$. On va suivre les étapes suivants pour démontrer l'unicité.

      i. **(0.25 points)** Soit $U = Q'^T Q$. Montrer que U est aussi égale à $U = R'R^{-1}$.
      Sol.: *On multiplie l'égalité* $QR = Q'R'$ *à gauche par* Q'^T *et à droite par* R^{-1}.

      ii. **(0.25 points)** Demontrer que U est orthogonale et triangulaire supérieure.
      Sol.: U *est orthogonale comme produit des matrices orthogonales* Q'^T, Q. U *est triangulaire supérieure comme produit des matrices triangulaires supérieures* R', R^{-1}.

      iii. **(0.25 points)** Déduire des remarques précédentes que U doit être nécessairement diagonale.
      Sol.: *Comme* U *est orthogonale on a que* $U^T = U^{-1}$. *D'une part* U^T *est triangulaire inférieure et d'autre part* U^{-1} *est triangulaire supérieure, donc* U^T *est diagonale, de même que* U.

      iv. **(0.25 points)** À l'aide de l'hypothèse $\mathrm{diag}(R) > 0$, déduire que $U = I$.
      Sol.: *Comme* U *est orthogonale on a* $U^T U = I$, *donc les termes de* U *peuvent être seulement* 1 *et* -1. *De plus, par hypothèse on sait que* $\mathrm{diag}(R) > 0$ *et* $\mathrm{diag}(R') > 0$, *donc le produit de* $R'R^{-1} = U$ *doit être toujours positif. Alors* $U = I$.

      v. **(0.25 points)** Montrer l'unicité.
      Sol.: *Finalement on a la relation* $(Q')^T Q = I = R'R^{-1}$ *qui implique le résultat* $Q = Q'$ *et* $R = R'$.

2. (**Polynôme adapté aux données**)
Considérons les données $(x_i, y_i), \quad i = 1 \dots m$. On voudrait trouver les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ tel que

$$y_i \approx c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots + c_{n-1} x_i^{n-1} \quad i = 1, \dots, m. \tag{1}$$

   (a) Ecrire le système matriciel pour ce problème.
   Sol.: *On écrit le système en utilisant les matrices comme ci-dessous*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

   (b) Considérons les données $(0, 0), (1, 0), (2, 1)$. En utilisant l'équations normale, trouver $y = c_0 + c_1 x$ qui approche les données.

Sol.: *On doit résoudre les équations normales*

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

En utilisant les équations normales on a

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \tag{5}$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/6\\ 1/2.\end{bmatrix} \tag{6}$$

Et donc on obtient, $y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x$.

(c) Trouver le polynôme quadratique $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ pour les données de partie (b).
Sol.: *On a le système ci-dessous*

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{7}$$

Ici, il n'y a pas besoin de trouver l'équations normale. On peut résoudre cet système linéaire carré directement :

$$\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 4 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -1/2\\ 1/2\end{bmatrix} \tag{8}$$

On obtient donc $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

3. (**Décomposition LDL^T et décomposition de Cholesky**)

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive. A partir de la factorisation LDL^T (série 12, exercice 2), comment retrouve-t-on la factorisation de Cholesky de la matrice A ?
Rappel : $D = \mathrm{diag}(a_{11}^0, a_{22}^1, \ldots, a_{nn}^{n-1})$
Sol.: *Par définition des matrices définies positives,* $x^TAx > 0$ *pour tout* $x \neq 0$. *Posons* $x_i = (L^T)^{-1}e_i$, *où* e_i *est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, exceptée la ième composante. Notons* $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$. *On obtient*

$$x_i^TAx_i = e_i^TL^{-1}LDL^T(L^T)^{-1}e_i = e_i^TDe_i = d_i > 0.$$

Tous les éléments de D étant positifs, on peut prendre leur racine carrée et on obtient, $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$, *où* $\sqrt{D} = diag(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$. *Une matrice triangulaire reste triangulaire lorsque on la multplie par une matrice diagonale. On obtient finalement* $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$, *où* $\tilde{L} = \sqrt{D}L$.

(b) Touver la décomposition LDL^T et la décomposition de Cholesky de la matrice

$$\begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\ 8 & 20 & 36\\ 12 & 36 & 73\end{bmatrix}.$$

Sol.: *On commence avec la décomposition LDL^T de A.*

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 20 & 36 \\ 12 & 36 & 73 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_{21}=2, l_{31}=3} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 37 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_{32}=3} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On retrouve la décomposition de Cholesky en multipliant L avec $\sqrt{D}$. On obtient

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$