Analyse Numérique
Corrigé Série 21

23 avril 2020

1. ($\star$, tout l'exercice)(**Méthode de Newton–Schulz pour calculer l'inverse d'une matrice**)
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible. Dans cet exercice, on va montrer qu'il est possible de trouver une approximation de A^{-1} avec la méthode de Newton. Étant donnée A, on cherche la "racine" de l'équation sous forme matricielle
$$f(X) = X^{-1} - A = 0.$$
L'itération de Newton est donnée par
$$X_{k+1} = X_k - [f'(X_k)]^{-1} f(X_k). \tag{1}$$
On remarque que la dérivée $f'(X) \equiv g'(X)$, où $g(X) = X^{-1}$. Il s'agit d'un opérateur linéaire
$$g'(X) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \text{défini par} \quad E \mapsto -X^{-1}EX^{-1}.$$
Autrement dit, l'application de $g'(X)$ à une matrice E nous donne la matrice $-X^{-1}EX^{-1}$.

(a) **(0.5 points)** Montrer que l'itération de Newton (1) peut être réécrite sous la forme
$$X_{k+1} = 2X_k - X_kAX_k.$$

Sol.:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k - [f'(X_k)]^{-1} f(X_k), \\ f'(X_k)X_{k+1} &= f'(X_k)X_k - f(X_k), \\ &\cdots \\ X_{k+1} &= 2X_k - X_kAX_k. \end{aligned}$$

(b) Maintenant on définit $R_k = I - X_kA$ et on va montrer que si $\|R_0\| = \|I - X_0A\| = \alpha < 1$, alors le taux de convergence de l'erreur $\|X_k - A^{-1}\|$ est quadratique.

i. **(0.5 points)** Montrer d'abord, par calcul direct, que $R_{k+1} = R_k^2$.
Sol.:
$$\begin{aligned} R_{k+1} &= I - X_{k+1}A = \cdots = I - 2X_kA + X_kAX_kA, \\ R_k^2 &= (I - X_kA)(I - X_kA) = \cdots = I - 2X_kA + X_kAX_kA. \end{aligned}$$

ii. **(1 point)** Montrer qu'il existe une constante C telle que
$$\|X_{k+1} - A^{-1}\| \le C\,\|X_k - A^{-1}\|^2. \tag{2}$$
Indication : on pourra utiliser que $R_kA^{-1} = A^{-1} - X_k$ et $R_k = R_kA^{-1}A$.
Sol.:
$$\begin{aligned} \|A^{-1} - X_{k+1}\| &= \|R_{k+1}A^{-1}\| \\ &\le \|R_k\|^2\,\|A^{-1}\| \\ &= \|R_kA^{-1}A\|^2\,\|A^{-1}\| \\ &\le \|R_kA^{-1}\|^2\,\|A\|^2\,\|A^{-1}\|, \end{aligned}$$
ce qui montre (2) *avec* $C = \|A\|^2\,\|A^{-1}\|$.

2. (**Méthode de Runge**)

(a) Réécrire l'équation différentielle d'ordre 2

$$z'' - \alpha z = 0, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 1$$

en un problème différentielle d'ordre 1 de la forme

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0.$$

Sol.: *On pose* $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$, *donc on a* $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} z' \\ z'' \end{pmatrix}$. *On obtient un système de la forme souhaitée* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On rappelle le tableau de Butcher de la méthode de Runge :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Pour $\alpha = -1$, calculer la solution exacte $\boldsymbol{y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et la solution numérique avec la méthode de Runge sur [0,1]. avec $h = 1/2$. Évaluer les deux solutions en $t = 1$ et les comparer.

Sol.: *La solution exacte est donnée par* $z(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ *avec* $1 = z(0) = a$ *et* $1 = z'(t) = b$, *c'est-à-dire*

$$z(t) = \cos(t) + \sin(t).$$

On obtient à $t = 1$

$$\boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} z(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1) + \sin(1) \\ -\sin(1) + \cos(1) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.38 \\ -0.301 \end{pmatrix}.$$

Le tableau de Butcher nous donne

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + h\boldsymbol{k}_2, \qquad \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{y}_0), \qquad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t_0 + \tfrac{h}{2}, \boldsymbol{y}_0 + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_1).$$

La méthode de Runge appliquée avec un pas $h = 1/2$ *au problème linéaire donne*

$$\boldsymbol{k_1} = A\boldsymbol{y}_0, \qquad \boldsymbol{k}_2 = A\left(\boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1\right),$$

et donc

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + h\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{y}_0 + hA\left(\boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{2}A\boldsymbol{y}_0\right) = \left(I + hA + \frac{h^2}{2}A^2\right)\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0.$$

où on utilise $A^2 = -I$. *Ainsi en faisant deux pas de longueur* $h = 1/2$, *on obtient la solution numérique à* $t = 1$

$$\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{64} & \frac{7}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{33}{64} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{89}{64} \\ -\frac{23}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.39 \\ -0.359 \end{pmatrix}.$$

(c) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la solution $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie

$$\lim_{t\to\infty} |z(t)| < \infty \ ?$$

Sol.: *La solution exacte du problème*

$$z'' - \alpha z = 0, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 1$$

est
$z(t) = C_1 e^{\sqrt{\alpha}t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}t}$. *De plus* $z(0) = C_1 + C_2 = 1$ *et* $z'(0) = \sqrt{\alpha}C_1 - \sqrt{\alpha}C_2 = 1$.

$$\sqrt{\alpha}C_1 - \sqrt{\alpha}(1 - C_1) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$C_2 = 1 - \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha} - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} e^{\sqrt{\alpha}t} + \frac{\sqrt{\alpha} - 1}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\sqrt{\alpha}t}$$

Il faut donc que la partie réelle de $\sqrt{\alpha}$ *soit nulle. Ainsi*

$$\lim_{t \to \infty} |z(t)| < \infty \quad \forall \alpha < 0$$