Analyse Numérique
Corrigé Série 11

5 décembre 2019

1. (**Polynômes de Legendre**) On souhaite démonter le théorème du cours qui dit que les polynômes de Legendre avec $P_k(1) = 1$ satisfont

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$
$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

(a) Montrer que les polynômes définis par la formule de Rodrigues :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right). \tag{1}$$

satisfont la condition

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)g(x)dx = 0 \qquad \text{si} \quad \deg(g) \leq k-1. \tag{2}$$

La constante (de normalisation) est choisie pour avoir $P_k(1) = 1$ et donc ces polynômes correspondent aux polynômes de Legendre considérés dans le théorème.
Indication : faire plusieurs intégrations par parties.
Sol.: *Soit $g(x)$ un polynôme de degré $\leq k-1$.*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_k(x)g(x)dx &= C_k\int_{-1}^{1}\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right)g(x)dx\\ &= \underbrace{C_k\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)g(x)\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - C_k\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)g'(x)dx\\ &= \cdots = (-1)^k C_k\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k g^{(k)}(x)dx = 0,\end{aligned}$$

car $g^{(k)}(x) = 0$.

(b) $\star$ **(0.25 pts)** Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire (et vice versa). En déduire que le polynôme de Legendre $P_k(x)$ est une fonction de même parité de k (paire si k est pair, et impaire si k est impair).
Sol.: *Si f est pair et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors*

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x).$$

De même, on montre que la dérivée d'une fonction impaire est paire. $P_k(x)$ est la dérivée kième d'une fonction paire, donc $P_k(x)$ est paire si k est paire et impaire si k est impaire.

(c) $\star$ **(0.5 pts)** Montrer que

$$xP_k(x) = a_{k+1}P_{k+1}(x) + a_{k-1}P_{k-1}(x) + a_{k-3}P_{k-3}(x) + a_{k-5}P_{k-5}(x) + \dots \,. \tag{3}$$

Indication : utiliser (b).
Sol.: *On décompose $xP_k(x)$, polynôme de de degré $k+1$ dans la base $P_0(x), \dots, P_{k+1}(x)$ de $\mathbb{P}_{k+1}$ (c'est bien une base car $P_j(x)$ est de degré j pour tout j),*

$$xP_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j P_j(x).$$

On suppose que k est pair, donc $P_k(x)$ est une fonction paire, et $xP_k(x)$ est une fonction impaire et alors elle est une combinaison linéaire des élements impaires de la base qui sont $P_{k+1}(x)$ et $P_{k-l}(x)$ où l est impaire, d'où le résultat. De même si k est impair.

(d) ⋆ **(0.25 pts)** En utilisant (2) montrer que les coefficients $a_{k-3},\ a_{k-5}, \dots,\ a_0$ sont nuls.
Sol.: *Multipions l'équation* (3) *par* $P_{k-3}(x)$ *et intégrons de* -1 *à* 1. *Par orthogonalité, tous les termes vont s'annuler sauf le terme* $\int_{-1}^{1}(P_{k-3}(x))^2dx > 0$, *donc* $a_{k-3} = 0$. *Le même raisonnement s'applique à* $a_{k-5},\ a_{k-7}, \dots$.

(e) ⋆ **(0.5 pts)** En comparant le coefficient de x^{k+1} dans (3) avec le terme dominant de (1), et en utilisant le fait que $P_k(1) = 1,\ \forall\ k$, montrer que

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \quad \text{et} \quad a_{k-1} = \frac{k}{2k+1}.$$

Sol.: *Comme* $\frac{d^k}{dx^k}x^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}x^k$, *en utilisant la formule* (1), *le coefficient dominant de* P_k *est donné par*

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k}.$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} = a_{k+1}\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2 2^{k+1}}$$

d'où en simplifiant, $a_{k+1} = \frac{k+1}{2k+1}$.
Ensuite, en utilisant $P_k(1) = 1$, *on obtient* $1 = \frac{k+1}{2k+1} + a_{k-1}$, *ce qui implique que* $a_{k-1} = \frac{k}{2k+1}$.

2. **(Opérations sur les lignes d'une matrice)**
On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 pour effectuer les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

(a) ⋆ **(0.5 pts)** Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelles opérations élémentaires chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \neq 0).$$

Sol.:
$\det A = -1$ *(A échange les lignes 1 et 3).*
$\det B = \alpha$ *(B multiplie la ligne 2 par* α*).*
$\det C = 1$ *(C ajoute la ligne 3 multipliée par* α *sur la ligne 4).*

(b) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 1 et 4.

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) Donner la matrice élémentaire qui ajoute trois fois la ligne 1 sur la ligne 3.

Sol.: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 7.

Sol.: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(e) Donner les inverses des matrices considérées aux questions (b), (c), et (d).

Sol.: *Pour inverser la transformation associée à A, on considère la même transformation qui permute les lignes* 1 *et* 4*, ainsi*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour inverser la transformation associée à B, on considère la transformation qui soustrait trois fois la ligne 1 sur la ligne 3, ainsi

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour inverser la transformation associée à C, on considère la transformation qui divise la ligne 3 par 7*, ainsi*

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$