Analyse Numérique
Exercices – Série 25

14 mai 2020
Questions marquées de $\star$
à rendre le 28 mai 2020

1. ($\star$, tout l'exercice)(**Différentiabilité des valeurs propres**)
   Considérons la matrice

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 3\varepsilon & -1+\varepsilon & -1+4\varepsilon \\ \varepsilon & 1+5\varepsilon & -1+9\varepsilon \\ 2\varepsilon & 6\varepsilon & 2+5\varepsilon \end{pmatrix}.$$

   (a) **(1 point)** Pour $A = A(0)$, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres à gauche et à droite.

   (b) **(1 point)** En utilisant le théorème de différentiabilité des valeurs propres montrer que, pour ϵ petit, la matrice $A(\epsilon)$ possède une valeur propre unique dans un voisinage de $\lambda = 2$. Déterminer $\lambda'(0)$ dans le développement de Taylor

$$\lambda(\epsilon) = \lambda + \lambda'(0)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

2. (**La pseudo-inverse de Moore–Penrose**)
   Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, m, $n \in \mathbb{N}$, on verra en cours que A peut se mettre sous la forme $A = U\Sigma V^\top$ où $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des matrices orthogonales et

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

   où les $\mathbf{0}$ désignent des matrices zéros avec des tailles appropriées. L'entier r est le rang de A et les σ_i sont appelées les *valeurs singulières* et satisfont $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$. Cette décomposition généralise la diagonalisation lorsque $m \neq n$ et est appelée la *décomposition en valeurs singulières (SVD)* de A.
   Dans cet exercice, on étudie la *pseudo-inverse de Moore–Penrose* $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ définie comme

$$A^+ = V\Sigma^+U^\top, \qquad \Sigma^+ = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad r = \mathrm{rang}(A).$$

   On va montrer les résultats suivants.

   (a) Soit un vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Si l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ n'a pas de solution, montrer que $\boldsymbol{x}^* = A^+\boldsymbol{b}$ est le vecteur qui minimise $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$, c.-à-d., la distance entre $A\boldsymbol{x}^*$ et $\boldsymbol{b}$ par rapport à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.
   Indice : Utiliser les équations normales.

   (b) Montrer que si $A \in R^{n\times n}$ est inversible, alors $A^+ = A^{-1}$.

   (c) Si l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a une infinité de solutions, alors $\boldsymbol{x}^* = A^+\boldsymbol{b}$ est la solution la plus proche à $\mathbf{0}$. Démontrer cela avec les étapes suivantes :

      i. Soient $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ les vecteurs singuliers à droite de A correspondants aux valeurs singulières non nulles $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ de A. Montrer que $\boldsymbol{x}^* \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\}$.

      ii. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ une autre solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Montrer que $A^\top A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$.

      iii. Montrer que la propriété ii. implique $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{v_{r+1}}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$.

      iv. En utilisant les résultats des point i. et iii., montrer que $\boldsymbol{x}^*$ est orthogonal à $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ et en déduire $\|\boldsymbol{x}\|_2 \geq \|\boldsymbol{x}^*\|_2$.