Chapitre 1 - Suites numériques

Cours

1 Révisions de première

1.1 Notion de suite numérique

Définition 1 *Suite numérique*

Une **suite numérique** est une fonction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

- L'image de n par la suite u est notée u_n et non $u(n)$: l'**indice** n est écrit **plus bas** que la lettre u.
- $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sont les **termes** de la suite.
- La suite u est aussi notée (u_n).
- u_n est appelé **le terme général** de la suite, ou **terme de rang** n.

Une suite numérique peut être définie de deux façons principales. On peut aussi en donner une représentation graphique en construisant le nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$ dans un repère orthogonal du plan.

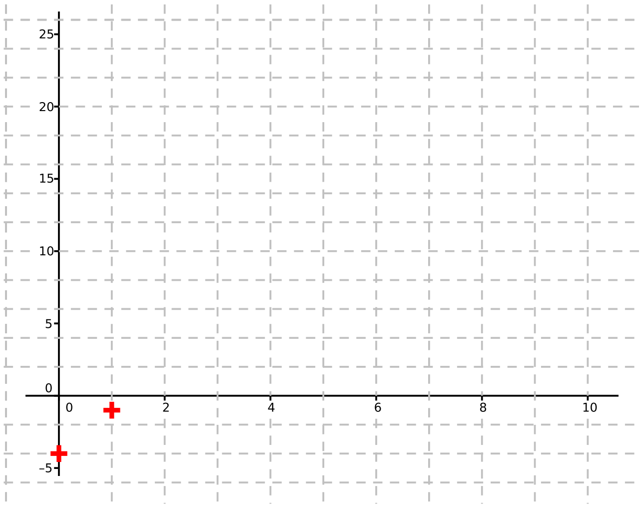
1.2 Définition d'une suite en fonction de n

On peut définir une suite u en donnant directement son terme général en fonction de n.
Soit par exemple la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 3n - 4$.

$u_0 = \cdots$
$u_1 = \cdots$

$u_2 = \cdots$
$u_{100} = \cdots$

Représentation graphique



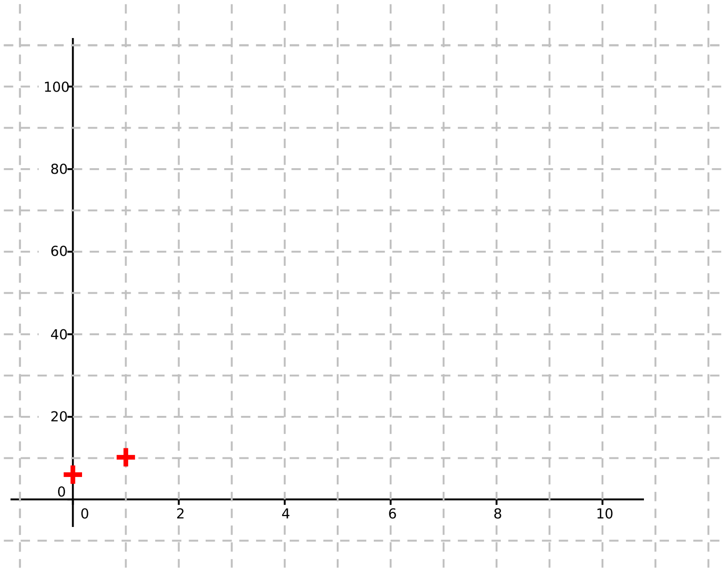
1.3 Définition d'une suite par une formule de récurrence

On peut définir une suite u en donnant une formule permettant de calculer un terme suivant u_{n+1} à partir du terme u_n, qui est les terme précédent. Il faut alors donner également le premier terme de la suite pour pouvoir commencer les calculs. On calcule les termes successifs de proche en proche.
Soit par exemple la suite u définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,2u_n + 3$.

$u_1 = \cdots$
$u_2 = \cdots$

$u_3 = \cdots$
$u_{100} = \cdots$

Représentation graphique



1.4 Suites arithmétiques.

Définition 2

On dit que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Théorème 1 *Propriétés des suites arithmétiques*

Calcul direct du terme de rang n : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$; $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}}$.

Cela peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\text{somme des termes} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}.$$

Cas particulier :

$$\text{somme des premiers entiers : } \boxed{0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

1.5 Suites géométriques.

Définition 3

On dit que (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Théorème 2 *Propriétés des suites géométriques*

Calcul direct du terme de rang n : $\boxed{u_n = u_0 q^n}$; $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$.

Somme des premiers termes d'une suite géométrique : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Cela peut aussi s'écrire : $\boxed{\text{somme des termes} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$.

Cas particulier :

somme des puissances successives d'un réel différent de 1 : $\boxed{q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

1.6 Sens de variation d'une suite

Définitions 4

Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- La suite (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$;
- La suite (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier n, $u_n \geqslant u_{n+1}$;
- La suite (u_n) est constante lorsque, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Méthode 1 *Comment étudier le sens de variation d'une suite ?*

- Dans le cas d'une suite définie par une relation de la forme $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
- Dans le cas général, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Dans le cas d'une suite dont tous les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- Un raisonnement par récurrence peut aussi parfois être utilisé pour étudier la monotonie d'une suite (voir paragraphe suivant).

Voir la fiche d'exercices pour des exemples d'application de ces méthodes.

2 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n.
Si l'on prouve les deux étapes suivantes :

Étape 1 : initialisation	Étape 2 : hérédité
$\mathcal{P}_n$ est vraie au départ : $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie	$\mathcal{P}_n$ est héréditaire, c'est-à-dire : $\mathcal{P}_n$ est vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

alors on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthode 2 *Comment démontrer par récurrence ?*

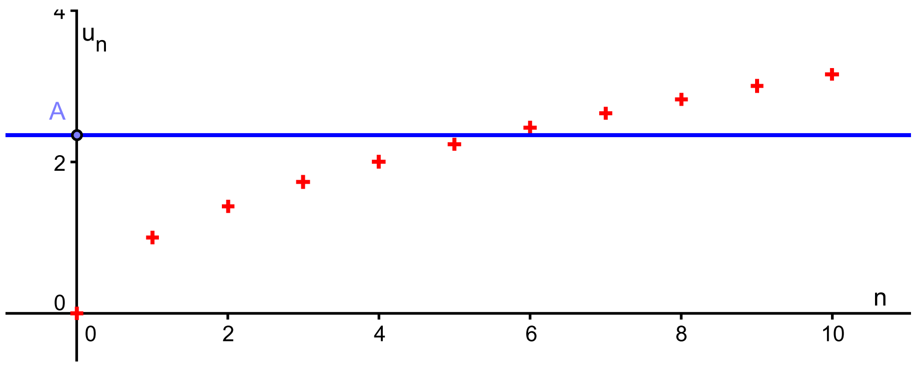
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour $n \geqslant 0$.
Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, la propriété $u_n \leqslant 3$ est vraie.

3 Limites

3.1 Suites divergentes de limite infinie

Définitions 5

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si pour tout nombre réel A, l'intervalle $]-\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



Théorème 3

Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2, n^3, ... admettent pour limite $+\infty$.

Démonstration. Démonstration pour la suite de terme général $\sqrt{n}$. Voir cahier. Méthode à retenir. $\square$

3.2 Algorithme de détermination d'un seuil

On considère une suite (u_n), croissante et de limite infinie.
D'après la définition ci-dessus, on peut affirmer que pour tout réel A fixé, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, il existe un plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$.
Le but de l'algorithme suivant est de déterminer la valeur de cet entier p (le seuil).
Le principe est le suivant, en langage naturel :

Algorithme en langage naturel *Détermination d'un seuil*

Choisir une valeur de A.
Calculer les termes de la suites, un à un, tant qu'ils restent inférieurs ou égaux à A.
Le seuil recherché p est l'indice du premier terme qui dépasse A.

Traduction de cet algorithme en pseudo-code (à compléter) :

Algorithme en pseudo code *Détermination d'un seuil*

Variables : A, U, N
début
  Lire un réel A
  Affecter à N la valeur 0
  Affecter à U la valeur u_0
  tant que   **faire**
    Affecter à N la valeur
    Affecter à U la valeur
  fin tq
  Afficher la variable N
fin

Cet algorithme est au programme, donc à savoir adapter à chacune des situations rencontrées en exercices.

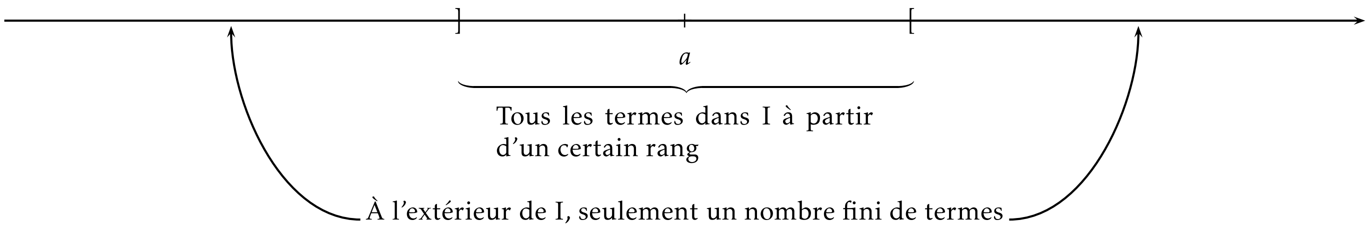
Il reste à le traduire pour la calculatrice : prenons l'exemple de la suite définie pour tout entier n par $u_n = \sqrt{n} + 6$. Cette suite est croissante et elle a pour limite $+\infty$. Écrivons un algorithme permettant de déterminer à partir de quel rang on a $u_n > 20$.

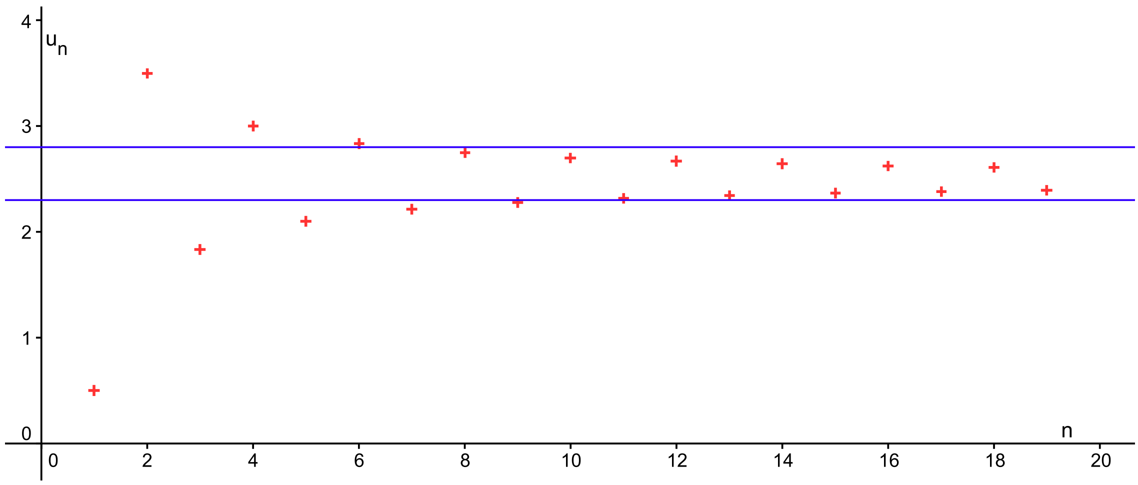
```
PROGRAM:SEUIL
:20→A
:0→N
:6→U
:While U≤A
:N+1→N
:√(N)+6→U
:End
:Disp N
```

3.3 Suites convergentes (limite finie)

Définition 6

Soit (u_n) une suite numérique et a un réel.
On dit que (u_n) admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$. On dit alors que la suite est convergente.
Lorsque la suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.





Remarques

- Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.
- On a vu dans le paragraphe précédent le cas des suites divergentes de limite infinie. Il existe aussi des suites divergentes qui n'ont pas de limite, comme par exemple la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$: elle oscille indéfiniment entre les deux valeurs $+1$ et -1.

Ces deux affirmations seront prouvées en exercices.

Méthode 3 *Utiliser la définition de la convergence*

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0.

3.4 Limites et opérations

Théorème 4

Dans ce théorème, u_n et v_n sont deux suites ayant une limite finie ou infinie.
Dans certains cas on peut conclure sur la limite de la somme, du produit et du quotient de ces deux suites.

Limite de la somme $u_n + v_n$ **:**

Si u_n a pour limite :	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si v_n a pour limite :	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $u_n + v_n$ a pour limite :	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ? ?

Limite du produit $u_n \times v_n$ **:**

Si u_n a pour limite :	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si v_n a pour limite :	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $u_n \times v_n$ a pour limite :	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	? ? ?

Limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ **:**

Cas où la limite de v_n n'est pas nulle :

Si u_n a pour limite :	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si v_n a pour limite :	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ a pour limite :	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ? ?

Cas où la limite de v_n est nulle :

Si u_n a pour limite :	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si v_n tend vers 0 en restant :	positive	négative	positive	négative	0
alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ a pour limite :	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ? ?

Remarque

Les cases ? ? ? sont des formes indéterminées qui demandent une étude spécifique. Il y en a quatre : "$\infty - \infty$" ; "$0 \times \infty$" ; "$\dfrac{\infty}{\infty}$" ; "$\dfrac{0}{0}$".

Méthode 4 *Déterminer une limite par opérations*

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+1}$.

3.5 Comparaison et compatibilité avec l'ordre

Théorème 5

Dans ce théorème, (x_n), (u_n) et (v_n) sont des suites ayant une limite finie ou infinie en $+\infty$; ℓ est un réel.

Hypothèse 1 une inégalité	Hypothèse 2 comportement à l'infini	Conclusion
$u_n \leqslant x_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
$x_n \leqslant u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$
$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ (théorème des gendarmes)

Démonstration. Voir le cahier. Cette démonstration est au programme, donc à retenir.
Le théorème des gendarmes est admis. □

Méthode 5 *Déterminer une limite par comparaison*

Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = n - 2 \times (-1)^n.$$

Application à la limite d'une suite géométrique
On s'intéresse ici à la limite de la suite de terme général q^n, où q est un réel donné.

Théorème 6

- Si $q \leqslant -1$, alors la suite terme général q^n n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$ (suite constante égale à 1).
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration. La première affirmation a été démontrée dans le cas $q = -1$ en exercices. La seconde affirmation est admise. La troisième est évidente. La preuve de la dernière (voir le cahier) est au programme et doit être retenue. □

4 Comportement global d'une suite

Définitions 7

Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- La suite (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- La suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Théorème 7

Si une suite croissante (u_n) converge vers un réel ℓ, alors cette suite est majorée par ℓ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell$$

Démonstration. Voir le cahier. Cette démonstration est au programme, donc à retenir. □

Théorème 8

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On a un résultat analogue pour une suite décroissante non minorée : Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Voir le cahier. Cette démonstration est au programme, donc à retenir. □

Théorème 9 *Théorème de la limite monotone (admis)*

Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Exemple d'application : Montrer que la suite de terme général $0,25^n$ est convergente.