TD n°1 : Sommes et symbole Σ

Travaux dirigés

1 Une somme télescopique

1. Posons $S_4 = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \dfrac{1}{4\times 5}$. Le nombre S_4 est une somme de termes qui sont tous de la forme $\dfrac{1}{k\times(k+1)}$.
Pour quelle valeur de k obtient-on le premier terme de S_4 ? le deuxième ? le troisième ? le quatrième ?

Remarque

On écrira $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k\times(k+1)}$. Cette écriture désigne la somme de tous les termes de la forme $\dfrac{1}{k\times(k+1)}$ obtenus en remplaçant successivement k par 1, par 2, par 3 et par 4.

2. Pour tout entier naturel n non nul, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\times(k+1)}$.

a. Écrire sans le symbole Σ les nombres S_5 et S_6.

b. Déterminer une relation entre S_{n+1} et S_n.

c. Écrire sans le symbole Σ le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ puis le calculer.

d. Montrer que $\dfrac{1}{k\times(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Remarque

On retiendra l'idée fondamentale suivante :
Si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

2 Quelques calculs complémentaires

1. Écrire sans le symbole Σ le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$.

2. Écrire la somme $3\times 4^2 + 4\times 5^2 + 5\times 6^2 + 6\times 7^2 + 7\times 8^2$.

3. Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$.

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+2)$.

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+3}$.

Exercices à faire : énoncé 2 page 13 (exercice corrigé) ; 50 et 51 page 24.