Chapitre 10 : Lois de probabilités à densités

Cours (partie 1)

1 Loi à densité sur un intervalle

Comme nous l'avons déjà observé dans l'activité d'introduction à la notion d'intégrale, la représentation de la répartition des probabilités sous la forme d'un diagramme en bâtons, pour une loi binomiale correspondant à un grand nombre de répétitions conduit à approcher l'aire des rectangles par l'aire sous la courbe d'une fonction continue, comme le suggère la figure ci-dessous.
La situation précédente montre que l'on peut calculer des probabilités à partir des intégrales de fonctions continues et positives.

Définition 1

- On appelle fonction de densité de probabilité sur un intervalle I toute fonction continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.
- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f lorsque la probabilité que X appartienne à un intervalle $[a;b]$ est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$, c'est-à-dire :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarques

- Dans le cas d'une loi de probabilité à densité, la valeur d'une probabilité est la même pour des inégalités strictes ou des inégalités larges : par exemple, $P(X < a) = P(X \leqslant a)$.
- $P(X = a) = \displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

Définition 2

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $[a;b]$ est donnée par :

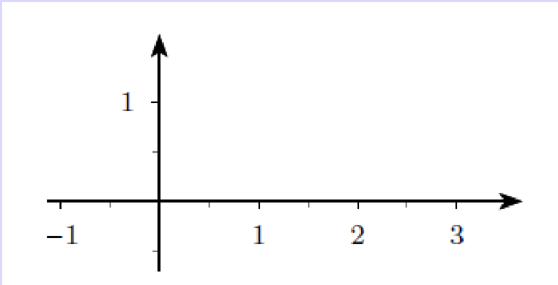
$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$$

Remarque

Ce théorème est admis. On remarquera néanmoins l'analogie avec la formule donnant l'espérance mathématique pour une variable aléatoire X de loi de probabilité discrète : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} x_i P(X = x_i)$.

Méthode 1

Soit la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Montrer que cette fonction est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[0;2]$.
2. Soit X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité a pour densité f. Calculer $P(X \leqslant 1,7)$.
3. Calculer l'espérance mathématique de X.

2 La loi uniforme

Définition 3

Étant donnés deux réels a et b, avec $a \leqslant b$, on appelle <u>loi uniforme</u> sur l'intervalle $[a;b]$ la loi dont la fonction de densité est la fonction constante définie par :

$$\forall x \in [a;b], f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Théorème 1

Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$, alors son espérance mathématique est donnée par la formule suivante :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Démonstration. voir cahier. □

Remarque

La commande `NbrAléat` de la calculatrice retourne une nombre décimal choisi au hasard dans l'intervalle $[0;1]$, avec 10 décimales. En assimilant ce choix au choix d'un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0;1]$, on peut considérer que cette commande <u>simule</u> une loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

Méthode 2 *Utilisation d'une loi uniforme*

Martin arrive tous les matins entre 7 : 15 et 7 : 35 à son arrêt de bus. On considère que son heure d'arrivée est une variable aléatoire suivant une loi uniforme, notée X, sur l'intervalle $[15;35]$.
Le bus qu'il attend passe à 7 : 00, puis toutes les 10 minutes.

1. Quelle est la probabilité que Martin attende moins de 5 min le prochain bus ?
2. S'il rate le bus de 7 : 30, Martin arrive en retard. Quelle est la probabilité que Martin soit en retard ?

3 La loi exponentielle

Dans ce paragraphe, nous allons étudier un exemple un peu plus général que ceux des paragraphes précédents. La loi exponentielle est en effet une loi de probabilité à densité définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et non sur un intervalle du type $[a;b]$.

Soit λ un réel strictement positif. On a alors, pour tout réel t : $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

On a donc : $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} = 1$.

Par analogie avec les definitions du premier paragraphe, on peut donc dire que la fonction $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Définition 4

Soit λ un réel strictement positif.
On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de probabilité de densité $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

Théorème 2

Si X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors l'espérance mathématique de X est donnée par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration. Voir cahier. Attention, cette démonstration est exigible. □

Méthode 3 *Utilisation d'une loi exponentielle (Pondichéry 2014)*

La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 2) = 0,15$. Déterminer la valeur exacte de λ (dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ).
2. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 3)$.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

La loi exponentielle a une propriété bien particulière, dite de "durée de vie sans vieillissement". Cette propriété traduit l'idée que, si la variable aléatoire X modélise par exemple la durée de vie d'un composant électronique, la probabilité que ce composant fonctionne encore au moins 10 heures sachant qu'il a déjà fonctionné n heures ne dépend pas de n : elle est égale à la probabilité que ce composant fonctionne au moins 10 heures quand il est neuf.

Théorème 3 *durée de vie sans vieillissement*

Si X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors pour tous réels positifs t et h, on a :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t + h) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h)$$

Démonstration. Voir cahier. Cette preuve est au programme, non exigible. □

Méthode 4 *Utilisation d'une exponentielle - Suite - (Pondichéry 2014)*

La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

4. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?