Devoir de type
BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

NUMÉRIQUE et SCIENCES INFORMATIQUES

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8

Le candidat traite au choix 2 exercices parmi les 3 exercices proposés

Chaque exercice est noté sur 10 points.

Exercice 4 (4 points)

Cet exercice porte sur l'algorithmique et la programmation en Python. Il aborde les notions de tableaux de tableaux et d'algorithmes de parcours de tableaux.

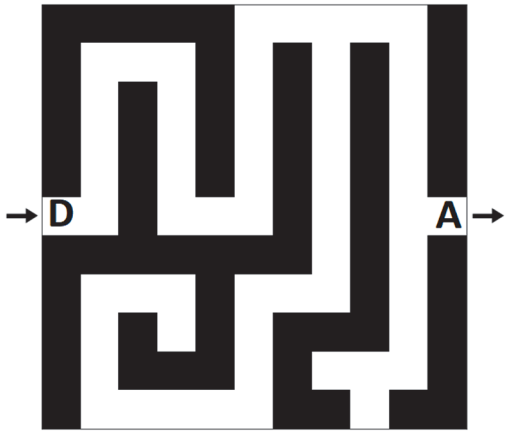
Partie A : Représentation d'un labyrinthe

On modélise un labyrinthe par un tableau à deux dimensions à n lignes et m colonnes avec n et m des entiers strictement positifs.
Les lignes sont numérotées de 0 à $n-1$ et les colonnes de 0 à $m-1$.
La case en haut à gauche est repérée par $(0,0)$ et la case en bas à droite par $(n-1, m-1)$.

Dans ce tableau :

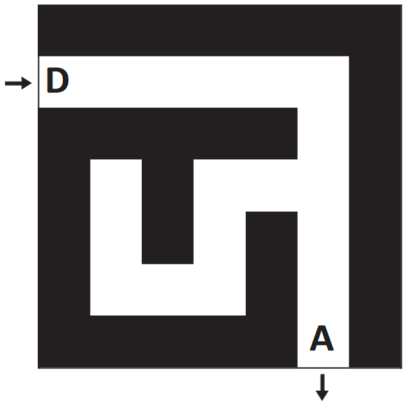
- 0 représente une case vide, hors case de départ et arrivée,
- 1 représente un mur,
- 2 représente le départ du labyrinthe,
- 3 représente l'arrivée du labyrinthe.

Ainsi, en Python, le labyrinthe ci-dessous est représentée par le tableau de tableaux `lab1`.




```
lab1 = [[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
        [1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1],
        [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1],
        [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1],
        [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1],
        [2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 3],
        [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1],
        [1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1],
        [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1],
        [1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1],
        [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1]]
```

1. Le labyrinthe ci-dessous est censé être représenté par le tableau de tableaux `lab2`.
Cependant, dans ce tableau, un mur se trouve à la place du départ du labyrinthe.
Donner une instruction permettant de placer le départ au bon endroit dans `lab2`.




```
lab2 = [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
        [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
        [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1],
        [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1],
        [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1],
        [1, 0, 0, 0, 1, 0, 1],
        [1, 1, 1, 1, 1, 3, 1]]
```

2. Écrire une fonction `est_valide(i, j, n, m)` qui renvoie `True` si le couple (i, j) correspond à des coordonnées valides pour un labyrinthe de taille (n, m), et `False` sinon. On donne ci-dessous des exemples d'appels.

```
>>> est_valide(5, 2, 10, 10)
True
>>> est_valide(-3, 4, 10, 10)
False
```

3. On suppose que le départ d'un labyrinthe est toujours indiqué, mais on ne fait aucune supposition sur son emplacement. Compléter la fonction `depart(lab)` ci-dessous de sorte qu'elle renvoie, sous la forme d'un tuple, les coordonnées du départ d'un labyrinthe (représenté par le paramètre `lab`). Par exemple, l'appel `depart(lab1)` doit renvoyer le tuple `(5, 0)`.

```
def depart(lab) :
    n = len(lab)
    m = len(lab[0])
    …
```

4. Écrire une fonction `nb_cases_vides(lab)` qui renvoie le nombre de cases vides d'un labyrinthe (comprenant donc l'arrivée et le départ).
Par exemple, l'appel `nb_cases_vides(lab2)` doit renvoyer la valeur `19`.

Partie B : Recherche d'une solution dans un labyrinthe

On suppose dans cette partie que les labyrinthes possèdent un unique chemin allant du départ à l'arrivée sans repasser par la même case. Dans la suite, c'est ce chemin que l'on appellera solution du labyrinthe.

Pour déterminer la solution d'un labyrinthe, on parcourt les cases vides de proche en proche. Lors d'un tel parcours, afin d'éviter de tourner en rond, on choisit de marquer les cases visitées. Pour cela, on remplace la valeur d'une case visitée dans le tableau représentant le labyrinthe par la valeur 4.

1. On dit que deux cases d'un labyrinthe sont voisines si elles ont un côté commun.
On considère une fonction `voisines(i, j, lab)` qui prend en arguments deux entiers i et j représentant les coordonnées d'une case et un tableau `lab` qui représente un labyrinthe. Cette fonction renvoie la liste des coordonnées des cases voisines de la case de coordonnées (i, j) qui sont valides, non visitées et qui ne sont pas des murs. L'ordre des éléments de cette liste n'importe pas.

Ainsi, l'appel `voisines(1, 1, [[1, 1, 1], [4, 0, 0], [1, 0, 1]])` renvoie la liste `[(2, 1), (1, 2)]`.

Que renvoie l'appel `voisines(1, 2, [[1, 1, 4], [0, 0, 0], [1, 1, 0]])` ?

2. On souhaite stocker la solution dans une liste `chemin`. Cette liste contiendra les coordonnées des cases de la solution, dans l'ordre. Pour cela, on procède de la façon suivante.

- Initialement :
  - déterminer les coordonnées du départ : c'est la première case à visiter ;
  - ajouter les coordonnées de la case départ à la liste `chemin`.
- Tant que l'arrivée n'a pas été atteinte :
  - on marque la case visitée avec la valeur 4 ;
  - si la case visitée possède une case voisine libre, la première case de la liste renvoyée par la fonction `voisines` devient la prochaine case à visiter et on ajoute à la liste `chemin` ;
  - sinon, il s'agit d'une impasse. On supprime alors la dernière case dans la liste `chemin`. La prochaine case à visiter est celle qui est désormais en dernière position de la liste `chemin`.

a. Le tableau de tableaux `lab3` ci-dessous représente un labyrinthe.

```
lab3 = [[1, 1, 1, 1, 1, 1],
        [2, 0, 0, 0, 0, 3],
        [1, 0, 1, 0, 1, 1],
        [1, 1, 1, 0, 0, 1]]
```

La suite d'instructions ci-dessous simule le début des modifications subies par la liste `chemin` lorsque l'on applique la méthode présentée.

```
# entrée: (1, 0), sortie (1, 5)
chemin = [(1, 0)]
chemin.append((1, 1))
chemin.append((2, 1))
chemin.pop()
chemin.append((1, 2))
chemin.append((1, 3))
chemin.append((2, 3))
```

Compléter cette suite d'instructions jusqu'à ce que la liste `chemin` représente la solution. *Rappel : la méthode* `pop` *supprime le dernier élément d'une liste et renvoie cet élément.*

b. Recopier et compléter la fonction `solution(lab)` donnée ci-dessous de sorte qu'elle renvoie le chemin solution du labyrinthe représenté par le paramètre `lab`.
On pourra pour cela utiliser la fonction `voisines`.

```
def solution(lab):
    chemin = [depart(lab)]
    case = chemin[0]
    i = case[0]
    j = case[1]
    ...
```

Par exemple, l 'appel `solution(lab2)` doit renvoyer `[(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)]`.

Exercice 5 (4 points)

Cet exercice traite de manipulation de tableaux, de récursivité et du paradigme « diviser pour régner ».

Dans un tableau Python d'entiers `tab`, on dit que le couple d'indices (i, j) forme une inversion lorsque $i < j$ et `tab[i]` $>$ `tab[j]`. On donne ci-dessous quelques exemples.

- Dans le tableau `[1, 5, 3, 7]`, le couple d'indices $(1,2)$ forme une inversion car $5 > 3$.
  Par contre, le couple $(1,3)$ ne forme pas d'inversion car $5 < 7$.
  Il n'y a qu'une inversion dans ce tableau.

- Il y a trois inversions dans le tableau `[1, 6, 2, 7, 3]`, à savoir les couples d'indices $(1, 2)$, $(1, 4)$ et $(3, 4)$.

- On peut compter six inversions dans le tableau `[7, 6, 5, 3]` : les couples d'indices $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ et $(2, 3)$.

On se propose dans cet exercice de déterminer le nombre d'inversions dans un tableau quelconque.

Questions préliminaires

1. Expliquer pourquoi le couple $(1, 3)$ est une inversion dans le tableau `[4, 8, 3, 7]`.
2. Justifier que le couple $(2, 3)$ n'en est pas une.

Partie A : Méthode itérative

Le but de cette partie est d'écrire une fonction itérative `nombre_inversion` qui renvoie le nombre d'inversions dans un tableau. Pour cela, on commence par écrire une fonction `fonction1` qui sera ensuite utilisée pour écrire la fonction `nombre_inversion`.

1. On donne la fonction suivante.

```
def fonction1(tab, i):
    nb_elem = len(tab)
    cpt = 0
    for j in range(i+1, nb_elem):
        if tab[j] < tab[i]:
            cpt += 1
    return cpt
```

   a. Indiquer ce que renvoie la `fonction1(tab, i)` dans les cas suivants.
   - Cas n°1 : `tab = [1, 5, 3, 7]` et `i = 0`.
   - Cas n°2 : `tab = [1, 5, 3, 7]` et `i = 1`.
   - Cas n°3 : `tab = [1, 5, 2, 6, 4]` et `i = 1`.

   b. Expliquer ce que permet de déterminer cette fonction.

2. En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `nombre_inversion(tab)` qui prend en argument un tableau et renvoie le nombre d'inversions dans ce tableau.
On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

```
>>> nombre_inversions([1, 5, 7])
0
>>> nombre_inversions([1, 6, 2, 7, 3])
3
>>> nombre_inversions([7, 6, 5, 3])
6
```

3. Quelle est l'ordre de grandeur de la complexité en temps de l'algorithme obtenu ? Aucune justification n'est attendue.

Partie B : Méthode récursive

Le but de cette partie est de concevoir une version récursive de la fonction `nombre_inversion`.
On définit pour cela des fonctions auxiliaires.

1. Donner le nom d'un algorithme de tri ayant une complexité meilleure que quadratique.

Dans la suite de cet exercice, on suppose qu'on dispose d'une fonction `tri(tab)` qui prend en argument un tableau et renvoie un tableau contenant les mêmes éléments rangés dans l'ordre croissant.

2. Écrire une fonction `moitie_gauche(tab)` qui prend en argument un tableau `tab` et renvoie un nouveau tableau contenant la moitié gauche de `tab`. Si le nombre d'éléments de `tab` est impair, l'élément du centre se trouve dans cette partie gauche.
On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

```
>>> moitie_gauche([])
[]
>>> moitie_gauche([4, 8, 3])
[4, 8]
>>> moitie_gauche ([4, 8, 3, 7])
[4, 8]
```

Dans la suite, on suppose qu'on dispose de la fonction `moitie_droite(tab)` qui renvoie la moitié droite sans l'élément du milieu.

3. On suppose qu'une fonction `nb_inv_tab(tab1, tab2)` a été écrite. Cette fonction renvoie le nombre d'inversions du tableau obtenu en mettant bout à bout les tableaux `tab1` et `tab2`, à condition que `tab1` et `tab2` soient triés dans l'ordre croissant.
On donne ci-dessous deux exemples d'appel de cette fonction :

```
>>> nb_inv_tab([3, 7, 9], [2, 10])
3
>>> nb_inv_tab([7, 9, 13], [7, 10, 14])
3
```

En utilisant la fonction `nb_inv_tab` et les questions précédentes, écrire une fonction récursive `nb_inversions_rec(tab)` qui permet de calculer le nombre d'inversions dans un tableau. Cette fonction renverra le même nombre que `nombre_inversions(tab)` de la partie A. On procédera de la façon suivante :

- Séparer le tableau en deux tableaux de tailles égales (à une unité près).
- Appeler récursivement la fonction `nb_inversions_rec` pour compter le nombre d'inversions dans chacun des deux tableaux.
- Trier les deux tableaux (on rappelle qu'une fonction de tri est déjà définie).
- Ajouter au nombre d'inversions précédemment comptées le nombre renvoyé par la fonction `nb_inv_tab` avec pour arguments les deux tableaux triés.

EXERCICE 1 : Algorithmes de tri (4 points)

Cet exercice traite principalement du thème « algorithmique, langages et programmation ». Le but est de comparer le tri par insertion (l'un des algorithmes étudiés en 1ère NSI pour trier un tableau) avec le tri fusion (un algorithme qui applique le principe de « diviser pour régner »).

Partie A : Manipulation d'une liste en Python

1. Donner les affichages obtenus après l'exécution du code Python suivant.

```
notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
notes[3] = 16
print(len(notes))
print(notes)
```

2. Écrire un code Python permettant d'afficher les éléments d'indice 2 à 4 de la liste `notes`.

Partie B : Tri par insertion

Le tri par insertion est un algorithme efficace qui s'inspire de la façon dont on peut trier une poignée de cartes. On commence avec une seule carte dans la main gauche (les autres cartes sont en tas sur la table) puis on pioche la carte suivante et on l'insère au bon endroit dans la main gauche.

1. Voici une implémentation en Python de cet algorithme. Recopier et compléter les lignes 6 et 7 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1  def tri_insertion(liste):
2      """ trie par insertion la liste en paramètre """
3      for indice_courant in range(1,len(liste)):
4          element_a_inserer = liste[indice_courant]
5          i = indice_courant - 1
6          while i >= 0 and liste[i] > ..... :
7              liste[.....] = liste[.....]
8              i = i - 1
9          liste[i + 1] = element_a_inserer
```

On a écrit dans la console les instructions suivantes :

```
notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
tri_insertion(notes)
print(notes)
```

On a obtenu l'affichage suivant : `[3, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 18]`

On s'interroge sur ce qui s'est passé lors de l'exécution de `tri_insertion(notes)`.

2. Donner le contenu de la liste `notes` après le premier passage dans la boucle `for`.
3. Donner le contenu de la liste `notes` après le troisième passage dans la boucle `for`.

Partie C : Tri fusion

L'algorithme de tri fusion suit le principe de « diviser pour régner ».

> (1) Si le tableau à trier n'a qu'un élément, il est déjà trié.
>
> (2) Sinon, séparer le tableau en deux parties à peu près égales.
>
> (3) Trier les deux parties avec l'algorithme de tri fusion.
>
> (4) Fusionner les deux tableaux triés en un seul tableau. *source : Wikipedia*

1. Cet algorithme est-il itératif ou récursif ? Justifier en une phrase.

2. Expliquer en trois lignes comment faire pour rassembler dans une main deux tas déjà triés de cartes, la carte en haut d'un tas étant la plus petite de ce même tas ; la deuxième carte d'un tas n'étant visible qu'après avoir retiré la première carte de ce tas.
   À la fin du procédé, les cartes en main doivent être triées par ordre croissant.

Une fonction `fusionner` a été implémentée en Python en s'inspirant du procédé de la question précédente. Elle prend quatre arguments : la liste qui est en train d'être triée, l'indice où commence la sous-liste de gauche à fusionner, l'indice où termine cette sous-liste, et l'indice où se termine la sous-liste de droite.

3. Voici une implémentation de l'algorithme de tri fusion. Recopier et compléter les lignes 8, 9 et 10 surlignées (uniquement celles-ci).

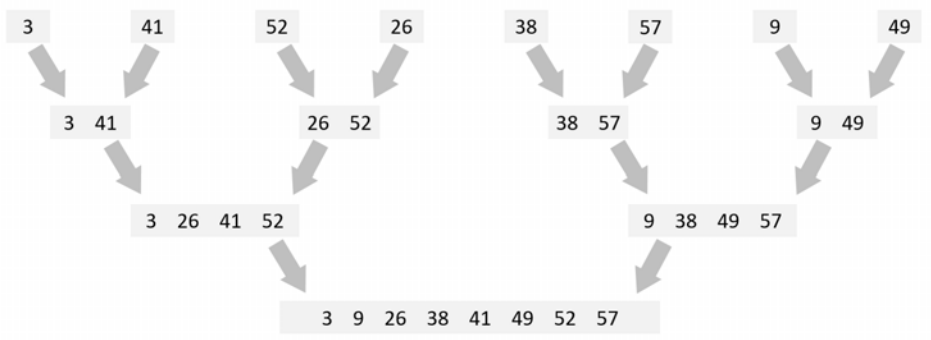
```
1   from math import floor
2
3   def tri_fusion (liste, i_debut, i_fin):
4       """ trie par fusion la liste en paramètre depuis
5       i_debut jusqu'à i_fin """
6       if i_debut < i_fin:
7           i_partage = floor((i_debut + i_fin) / 2)
8           tri_fusion(liste, i_debut, ……)
9           tri_fusion(liste, ……, i_fin)
10          fusionner(liste, ……, ……, ……)
```

Remarque : la fonction `floor` renvoie la partie entière du nombre passé en paramètre.

4. Expliquer le rôle de la première ligne du code de la question 3.

Partie D : Comparaison du tri par insertion et du tri fusion

Voici une illustration des étapes d'un tri effectué sur la liste [3, 41, 52, 26, 38, 57, 9, 49].



1. Quel algorithme a été utilisé : le tri par insertion ou le tri fusion ? Justifier.

2. Identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en $O(n^2)$ et identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en $O(n \log_2 n)$.
   Remarque : n représente la longueur de la liste à trier.

3. Justifier brièvement ces deux complexités.