

Devoir surveillé d'informatique

⚠ Consignes

- Les programmes demandés doivent être écrits en C ou en OCaml. Dans le cas du C, on suppose que les bibliothèques standards usuelles (`<stdio.h>`, `<stdlib.h>`, `<stdbool.h>`, `<stdassert.h>`, ...) sont déjà importées.
- On pourra toujours librement utiliser une fonction demandée à une question précédente même si cette question n'a pas été traitée.
- Veuillez à présenter vos idées et vos réponses partielles même si vous ne trouvez pas la solution complète à une question.
- La clarté et la lisibilité de la rédaction et des programmes sont des éléments de notation.

□ Exercice 1 : Questions de cours

1. Donner la définition d'un arbre binaire.

Un arbre binaire est une structure de données hiérarchique composée de noeuds définie récursivement, en effet un arbre binaire est :

- soit vide, on le note alors \emptyset
- soit un noeud c'est à dire un triplet (g, v, d) où g et d sont deux arbres binaires et v l'étiquette.

2. Donner les définitions de la hauteur et de la taille d'un arbre binaire.

- Le nombre de noeuds d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} n(A) = 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ n(A) = 1 + n(g) + n(d) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$
- La hauteur d'un arbre binaire A , noté $h(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} h(A) = -1 & \text{si } A \text{ est vide} \\ h(A) = 1 + \max(h(g), h(d)) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

3. Donner la définition d'un arbre binaire de recherche.

Un arbre binaire de recherche (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées clés sont toutes comparables entre elles.
- Pour tous les noeuds (g, v, d) l'ensemble des clés présentes dans le sous arbre gauche g (resp. droit d) sont strictement inférieures (resp. supérieures) à v .
- Les clés sont uniques.

4. Prouver le parcours infixe d'un arbre binaire de recherche fournit les clés dans l'ordre croissant.

⊗ Indication : on pourra raisonner par récurrence sur la taille de l'arbre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « le parcours infixe d'un ABR de taille n fournit les clés dans l'ordre croissant ».

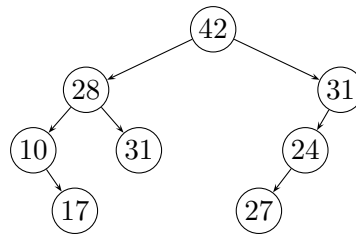
- Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque le parcours infixe d'un arbre vide est vide et donc rangé dans l'ordre croissant.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \leq n$, $\mathcal{P}(k)$ est vrai, montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit un arbre binaire de taille $n+1$, alors cet arbre n'est pas vide et donc c'est un triplet (g, e, d) où g et d sont des arbres binaires de taille inférieure ou égale à n . En notant $p(a)$ le parcours prefixe d'un arbre a , on a par définition du parcours infixe : $p((g, e, d)) = (p(g), e, p(d))$, on considère maintenant x, y deux éléments apparaissant dans cet ordre dans $(p(g), e, p(d))$ et on raisonne par disjonction de cas :

- $x \in p(g)$ et $y \in p(g)$, par hypothèse de récurrence le parcours infixe de g est rangé dans l'ordre croissant et donc $x < y$.
- $x \in p(g)$ et $y = e$, par la propriété des ABR les clés du sous arbre gauche sont strictement inférieure à la racine donc $x < y$.
- $x \in p(g)$ et $y \in p(d)$, par la propriété des ABR, $x < e$ et $e < y$, donc $x < y$.
- $x = e$ et $y \in p(d)$, par la propriété des ABR, $y > e$ donc $x < y$.
- $x \in p(d)$ et $y \in p(d)$, par hypothèse de récurrence le parcours infixe de d est rangé dans l'ordre croissant et donc $x < y$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

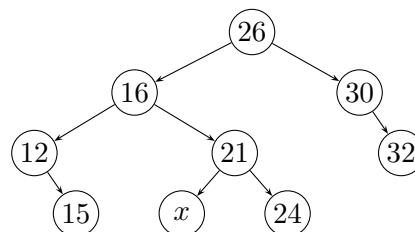
5. Donner l'ordre des noeuds lors des parcours prefixe, infixe et suffixe de l'arbre suivant :



Voici l'ordre des noeuds dans chacun des parcours :

- Prefixe : 42, 28, 10, 17, 31, 31, 24, 27
- Infixe : 10, 17, 28, 31, 42, 27, 24, 31
- Suffixe : 17, 10, 31, 28, 27, 24, 31, 42

6. On considère l'arbre binaire suivant :



Donner les valeurs de l'étiquette x pour lesquelles cet arbre est un arbre binaire de recherche.

On peut écrire le parcours infixe de cet arbre : 12, 15, 16, x , 21, 24, 26, 30, 32 et donc les valeurs de x pour lesquelles cet arbre est un ABR sont celles de l'intervalle $]16, 21[$ en supposant x entier, les valeurs possibles de x sont donc 17, 18, 19 et 20.

7. On implémente les arbres binaires de recherche en OCaml à l'aide du type suivant :

```

1 type abr =
2   | Vide
3   | Noeud of abr * int * abr;;

```

Ecrire une fonction `insere : int -> abr -> abr` qui prend en argument un entier x et un arbre binaire de recherche a et renvoie un arbre binaire de recherche contenant x et tous les éléments de a .

```

1 let rec insere abr nv =
2   match abr with
3   | Vide -> Noeud(Vide,nv,Vide)
4   | Noeud(g,v,d) -> if nv<v then Noeud(insere g nv, v, d) else Noeud(g, v, insere
   ↪ d nv);;

```

□ Exercice 2 : Valeur plus petite la plus proche

On considère un tableau d'entiers *positifs* et on s'intéresse au problème de la recherche pour chacun de ces entiers de la valeur plus petite la plus proche située à gauche dans le tableau. Dans le cas où aucune valeur située à gauche dans le tableau n'est plus petite que la valeur considérée alors on renverra -1 .

Par exemple dans le tableau $\{2, 1, 7, 9, 8, 3\}$:

- Il n'y a aucune valeur à gauche de 2, donc la valeur plus petite la plus proche est -1 ,
- Pour 1, aucune valeur située à gauche n'est plus petite, donc on renvoie aussi -1 ,
- Pour 7, la valeur plus petite la plus proche est 1.
- Pour 9, c'est 7.
- Pour 8 c'est 7.
- Pour 3, c'est 1.

Et donc le tableau des valeurs plus petites les plus proches dans cet exemple est $\{-1, -1, 1, 7, 7, 1\}$

1. Donner le tableau des valeurs plus petites les plus proches pour le tableau $\{5, 7, 11, 6, 9, 2\}$

On obtient : $\{-1, 5, 7, 5, 6, -1\}$

2. On propose l'algorithme suivant pour résoudre ce problème : pour chaque élément `tab[i]` du tableau on parcourt les valeurs `tab[i-1]`, ..., `tab[0]` dans cet ordre, si on trouve un élément strictement inférieur à `tab[i]` alors c'est la valeur plus petite la plus proche, sinon la valeur plus petite la plus proche est -1 . Ecrire une implémentation de cet algorithme en C sous la forme d'une fonction de signature `int *vpp_naif(int tab[], int size)` qui prend en argument un tableau d'entiers `tab` ainsi que sa taille `size` et renvoie un tableau de taille `size` contenant à l'indice `i` la valeur strictement inférieure la plus proche de `tab[i]`.

```

1  int *vpp_naif(int tab[], int size)
2  // Renvoie pour chaque indice i, l'emplacement de plus proche valeur inférieure -1
   ↪ si inexistant
3  {
4      int *nsv = malloc(sizeof(int) * size);
5      int idx;
6      nsv[0] = -1;
7      for (int i = 1; i < size; i++)
8      {
9          idx = i - 1;
10         while (idx >= 0 && tab[idx] >= tab[i])
11         {
12             idx--;
13         }
14         if (idx < 0)
15         {
16             nsv[i] = -1;
17         }
18         else
19         {
20             nsv[i] = tab[idx];
21         }
22     }
23     return nsv;
24 }

```

3. Justifier rapidement que l'algorithme précédent a une complexité quadratique

Pour chaque indice i du tableau, on parcourt dans le pire cas, le sous tableau $i-1, \dots, 0$ en effectuant des opérations élémentaires. On effectue donc au plus $1 + 2 + \dots (n-1)$ opérations élémentaires. Et donc la complexité est quadratique.

On considère maintenant l'algorithme suivant qui utilise une pile dotée de son interface usuelle (`est_vide`, `empiler`, `depiler`) et de la fonction `sommet` qui renvoie la valeur située au sommet de la pile sans la dépiler.

Algorithme : Valeurs plus petites les plus proches

Entrées : Un tableau t d'entiers positifs de taille n

Sorties : Un tableau s d'entiers positifs de taille n tel que $s[i]$ soit la valeur plus petite la plus proche de $t[i]$

```

1  s ← tableau de taille n
2  p ← pile de taille maximale n
3  pour i ← 0 à p - 1 faire
4      tant que p n'est pas vide et sommet(p) ≥ t[i] faire
5          | depiler(p);
6      fin
7      si p est vide alors
8          | s[i] ← -1
9      fin
10     sinon
11         | s[i] ← sommet(p)
12     fin
13     empiler t[i] dans p
14 fin
15 return s

```

4. On fait fonctionner cet algorithme sur le tableau $\{2, 7, 5, 8, 6, 3\}$. Recopier et compléter le tableau suivant qui indique pour chaque valeur de l'indice i de la boucle `for` l'état de la pile et du tableau s après l'exécution de la boucle pour les valeurs de i de 0 à 5 (on note une pile avec les extrémités `|` et `>`

pour indiquer le sommet de la pile)

i	État de la pile	État du tableau s
Initialement	$ >$	$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
0	$ 2>$	$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
1	$ 2, 7>$	$\{-1, 2, -1, -1, -1, -1\}$
2	$ 2, 5>$	$[-1, 2, 2, -1, -1, -1]$
3	$ 2, 5, 8>$	$[-1, 2, 2, 5, -1, -1]$
4	$ 2, 5, 6>$	$[-1, 2, 2, 5, 5, -1]$
5	$ 2, 3>$	$[-1, 2, 2, 5, 5, 2]$

5. On suppose qu'on a *déjà implémentée* en C une structure de donnée de pile qu'on manipule à l'aide des fonctions suivantes :

- `est_vide` de signature `bool est_vide(pile p)`,
- `empiler` de signature `void empiler(pile *p, int v)`,
- `depiler` de signature `int depiler(pile *p)`.

Ecrire en utilisant ces fonctions une fonction `sommet` de signature `int sommet(pile *p)` qui renvoie le sommet de la pile sans le depiler si la pile n'est pas vide et `-1` sinon.

```

1  int sommet(pile *p)
2  {
3      if (est_vide(*p))
4      {
5          return -1;
6      }
7      int temp = depiler(p);
8      empiler(p, temp);
9      return temp;
10 }
```

6. Ecrire une implémentation en C de l'algorithme des valeurs plus petites les plus proches donné ci-dessus et utilisant une pile sous la forme d'une fonction de signature `int *vpp_pile(int tab[], int size)` qui renvoie le tableau des valeurs plus petites les plus proches.

```

1  int *vpp_pile(int tab[], int size)
2  {
3      pile p = cree_pile(size);
4      int *nsv = malloc(sizeof(int) * size);
5      for (int i = 0; i < size; i++)
6      {
7          while (!est_vide(p) && sommet(&p) >= tab[i])
8          {
9              depiler(&p);
10             }
11             nsv[i] = sommet(&p);
12             empiler(&p, tab[i]);
13         }
14         return nsv;
15     }
```

7. Prouver que cet algorithme est de complexité linéaire, on pourra vérifier que chaque élément du tableau t est empilé une fois et dépilé au plus une fois.

La boucle **for** ne contient que des instructions depiler, empiler et d'affectation dans le tableau **nsv**, chaque élément n'est empilé qu'une seule fois il y en donc **n** opérations **empiler** en tout, on ne peut donc pas dépiler plus de **n** fois et donc l'algorithme est de complexité linéaire.

❑ **Exercice 3** : *Base de données de publications scientifiques*

On utilise le schéma relationnel suivant afin de modéliser une base de données de publications scientifiques. Chaque article publié ayant un ou plusieurs auteurs.

- **Article** (IdArticle, titre, revue, volume, annee)
- **Auteur** (IdAuteur, nom, prenom)
- **Publie** (#Article, #Auteur)

La clé étrangère #Article de la table **Publie** fait référence à la clé primaire de la table **Article** et la clé étrangère #Auteur de la table **Publie** fait référence à la clé primaire de la table **Auteur**. Les attributs titre, revue, nom et prénom sont des chaînes de caractères, les autres sont des entiers.

1. Justifier que l'attribut #Article de la table **Publie** seul, ne peut pas servir de clé primaire pour cette table.

L'énoncé indique qu'un article peut avoir plusieurs auteurs, par conséquent dans la table **publie**, plusieurs enregistrements peuvent avoir la même valeur pour le champ **Article**. Donc cette valeur n'est pas unique pour chaque enregistrement et donc ne peut pas servir de clé primaire.

2. Expliquer ce qu'affiche la requête suivante :

```
SELECT nom, prenom
FROM Auteur
JOIN Publie ON Auteur.IdAuteur = Publie.Auteur
WHERE Publie.Article = 42
```

Cet requête affiche les noms et prénoms des auteurs de l'article ayant l'IdArticle 42.

3. Ecrire les requêtes permettant d'afficher les informations suivante :

- a) La liste des titres des articles parus en 2022 listé par ordre alphabétique.

```
SELECT titre
FROM Article
WHERE annee = 2022
ORDER BY titre ASC ;
```

- b) Les noms des revues listé par ordre alphabétique, sans répétition.

```
SELECT DISTINCT revue
FROM Article
ORDER BY titre ASC ;
```

- c) Les noms et prénoms des auteurs qui ont publié dans la revue "Nature" en 2000.

```
SELECT nom, prenom FROM Auteur
JOIN Publie ON Publie.Article = Auteur.IdAuteur
JOIN Article ON Article.IdArticle = Publie.Article
WHERE Article.revue = "Nature" AND Article.annee = 2000
```

- d) Les titres et revues des articles écrits (ou co-écrit) par Donald KNUTH en 2010.

```
SELECT titre, revues FROM Article
JOIN Publie ON Publie.Article = Auteur.IdAuteur
JOIN Article ON Article.IdArticle = Publie.Article
WHERE Auteur.prenom = "Donald" AND Auteur.nom= "Knuth" AND Article.annee = 2010
```

- e) La liste des volumes de la revue "Nature" en 2020 avec le nombre d'article qu'il contient.

```
SELECT volume, COUNT(*) FROM Article
GROUPE BY volume
WHERE Article.annee = 2020 and Article.revue = "Nature"
```

f) Pour chaque revue, son nom et l'année de publication de son article le plus ancien.

```
SELECT revue, MIN(annee) FROM Article
GROUPE BY revue
```

□ Exercice 4 : Représentations classiques d'ensembles

🎓 d'après CCSE 2021 - MP (Partie 2)

Les programmes de cet exercice doivent être écrits en OCaml.

On s'intéresse dans cet exercice à des structures de données représentant des ensembles d'entiers naturels. On notera $|E|$ le cardinal d'un ensemble E .

■ Partie I : Avec une liste d'entiers triés

Dans cette partie uniquement, on implémente un ensemble d'entiers positifs par la liste des ses éléments rangés dans l'ordre croissant.. Par exemple la liste [2; 7; 11] représente l'ensemble {2, 7, 11}.

1. Ecrire la fonction `intersection : int list -> int list -> int list` qui prend en argument deux listes d'entiers triés représentant des ensembles et renvoyant leur intersection sous la forme d'une liste triée d'entiers.

```
1 let rec intersection l1 l2 =
2   match l1, l2 with
3   | l1, [] -> []
4   | [], l2 -> []
5   | h1::t1, h2::t2 -> if h1 = h2 then h1::(intersection t1 t2) else
6     if h1 < h2 then intersection t1 l2 else intersection l1 t2;;
```

2. Ecrire une fonction `succ_list` de signature `int list -> int -> int` prenant en arguments une liste d'entiers *distincts* dans l'ordre croissant et un entier x et renvoyant le successeur de x dans la liste, c'est à dire le plus petit entier strictement supérieur à x de la liste (-1 si cela n'existe pas). Par `succ_list [2; 7; 11] 5` doit renvoyer 7.

```
1 let rec succ_list entiers x =
2   match entiers with
3   | [] -> -1
4   | h::t -> if h>x then h else succ_list t x;;
```

3. Donner la complexité de cette fonction dans le pire des cas.

Les appels récursif sont en temps constant et la taille de la liste diminue de 1 à chaque appel donc la complexité est linéaire en fonction de la taille de la liste.

■ Partie II : Avec un tableau trié

Soit N un entier naturel strictement positif, fixé pour toute cette partie. On choisit de représenter un ensemble d'entiers E de cardinal $n \leq N$ par un tableau de taille $N + 1$ dont la case d'indice 0 indique le nombre n d'éléments de E et les cases d'indices 1 à n contiennent les éléments de E rangés dans l'ordre croissant, les autres cases étant non significatives. Par exemple, le tableau [1 3; 2; 5; 7; 9; 1; 14 1] représente l'ensemble {2, 5, 7}. En effet, cet ensemble contient 3 éléments car la case d'indice 0 du tableau contient 3 et ces 3 éléments sont 2, 5, 7 (cases d'indice 1 à 3).

1. Pour une telle implémentation d'un ensemble E , décrire brièvement des méthodes permettant de réaliser chacune des opérations ci-dessous (on ne demande pas d'écrire des programmes) et donner leurs complexités dans le pire cas :
 - déterminer le maximum de E ,

- tester l'appartenance d'un élément x à E
- ajouter un élément x dans E (on suppose que $x \notin E$ et que la taille du tableau est suffisante)

On note `tab` le tableau représentant l'ensemble d'entiers

- Pour déterminer le maximum de E , il suffit de renvoyer `tab[tab[0]]` car les éléments sont dans l'ordre croissant et leur indice vont de 1 à `tab[0]`. C'est donc une opération en temps constant.
- On doit parcourir le tableau entre les éléments d'indice 1 et `tab[0]` (complexité linéaire), ou alors (puisque le tableau est trié) effectuer une recherche dichotomique (complexité logarithmique).
- On incrémente `tab[0]` et on place l'élément x à l'indice `tab[0]`, ensuite, pour que le tableau reste trié, on peut par exemple échanger cet élément avec son voisin tant qu'il lui est inférieur (et qu'on a pas atteint l'indice 1). L'insertion est alors en complexité linéaire.

2. Par une méthode dichotomique, écrire une fonction `succ_vect` de signature `int array -> int -> int` prenant en arguments un tableau `t` codant un ensemble E comme ci-dessus et un entier x et renvoyant le successeur de x dans E (-1 si cela n'existe pas.)

```

1  let succ_vect entiers x =
2    if x >= entiers.(entiers.(0)) then -1 else
3    if x < entiers.(1) then entiers.(1) else
4      let rec aux entiers x deb fin =
5        let mil = (deb+fin)/2 in
6        if entiers.(mil) = x then entiers.(mil+1) else
7        if entiers.(mil) < x then aux entiers x mil fin else aux entiers x deb mil
8      in
9      aux entiers x 1 entiers.(0)
10  ;;

```

3. Calculer la complexité dans le pire cas de la fonction `succ_vect` en fonction de n .

A chaque appel récursif la taille de l'intervalle `[[deb;fin]]` est divisée par 2. Cet intervalle étant de taille $|E|$, il faut au plus $\log(|E|)$ division avant de quitter la boucle, la fonction est donc de complexité logarithmique en la taille de l'ensemble.

4. Ecrire une fonction `union_vect` de signature `int array -> int array -> int array` prenant en arguments deux tableaux `t_1` et `t_2`, de taille N , codant deux ensembles E_1 et E_2 et renvoyant le tableau correspondant à $E_1 \cup E_2$. On supposera que $|E_1 \cup E_2| \leq N$.


```

1  let union_vect entiers1 entiers2 =
2    (* les tailles des deux ensembles *)
3    let t1 = entiers1.(0) in
4    let t2 = entiers2.(0) in
5    let union = Array.make (Array.length entiers1) 0 in
6    let rec aux i i1 i2 =
7      (* affecte union.(i) et renvoie la taille de l'union *)
8      if i1 > t1 && i2 > t2 then i else
9      if (i1 > t1 || entiers2.(i2) < entiers1.(i1)) then (union.(i) <- entiers2.(i2);
10         ↪ aux (i+1) i1 (i2+1)) else
11      if (i2 > t2 || entiers1.(i2) < entiers2.(i1)) then (union.(i) <- entiers1.(i1);
12         ↪ aux (i+1) (i1+1) i2) else
13         (union.(i) <- entiers1.(i1); aux (i+1) (i1+1) (i2+1))
14    in
15    let t = aux 1 1 1 in
16    union.(0) <- (t-1);
17    union
18  ;;

```

■ Partie III : Avec une table de hachage

Soit K un entier naturel strictement positif. On choisit de représenter un ensemble d'entiers E de cardinal n par une table de hachage de taille K avec résolution des collisions par chaînage. La fonction de hachage est $h(i) = i \bmod K$.

1. Dans le cas où $K = 10$, représenter la table de hachage qui correspond à l'ensemble $\{2, 5, 7, 15\}$.

		2 -> null			5 -> 15 -> null		7 -> null		
--	--	-----------	--	--	-----------------	--	-----------	--	--

2. A quelle condition, portant sur K et sur n , la fonction h génère-t-elle forcément des collisions ?

Il y a K alvéoles donc dès que $n > K$, on a forcément des collisions (principe des tiroirs)

3. Décrire brièvement (on ne demande pas d'écrire un programme) une fonction permettant de renvoyer le maximum d'un ensemble E représenté par une table de hachage. Donner sa complexité.

On parcourt les listes chaînées contenues dans chaque alvéole, en mettant à jour une variable contenant le maximum. On a donc une complexité en $O(|E|)$.

4. En OCaml, un ensemble est donc représenté par un tableau (de taille K) de listes d'entiers c'est à dire par le type `array int list`. Ecrire la fonction `appartient : int -> int array list -> bool` qui prend en arguments un entier et un ensemble représenté par une table de hachage et renvoie un booléen indiquant si cet élément appartient ou non à l'ensemble.

```
1  let rec est_dans n l =  
2    (* Renvoie true si n est dans l et false sinon*)  
3    match l with  
4    | [] -> false  
5    | h::t -> h=n || est_dans n t;;  
6  
7  let seau n size =  
8    (* Renvoie le numéro de l'alvéole dans laquelle doit être rangée n*)  
9    n mod size;;  
10  
11 let appartient n ensemble size =  
12   (* renvoie true si n est dans ensemble (représenté par une table de hachage int  
13   ↪ list array)*)  
est_dans n (ensemble.(seau n size));;
```