Devoir surveillé d'informatique

Consignes

- Les programmes demandés doivent être écrits en C ou en OCaml. Dans le cas du C, on suppose que les librairies standards usuelles (`<stdio.h>`, `<stdlib.h>`, `<stdbool.h>`, `<stdassert.h>`, ...) sont déjà importées.
- On pourra toujours librement utiliser une fonction demandée à une question précédente même si cette question n'a pas été traitée.
- Veillez à présenter vos idées et vos réponses partielles même si vous ne trouvez pas la solution complète à une question.
- La clarté et la lisibilité de la rédaction et des programmes sont des éléments de notation.

❑ Exercice 1 : *Analyse d'un algorithme*

> « *Le problème du drapeau hollandais est un problème de programmation, présenté par Edsger Dijkstra, qui consiste à réorganiser une collection d'éléments identifiés par leur couleur, sachant que seules trois couleurs sont présentes (par exemple, rouge, blanc, bleu, dans le cas du drapeau des Pays-Bas). Étant donné un nombre quelconque de balles rouges, blanches et bleues alignées dans n'importe quel ordre, le problème est à les réarranger dans le bon ordre : les bleues d'abord, puis les blanches, puis les rouges.* »
>
> (Wikipedia)

On suppose déjà écrite la fonction `echange` de prototype `void echange(int tab[], int i, int j)` qui échange les éléments d'indice `i` et `j` dans le tableau `tab` et on considère dans la suite que cet échange s'effectue en temps constant. On donne ci-dessous une implémentation de l'algorithme du drapeau hollandais en langage C permettant de réarranger les éléments d'un tableau ne contenant les trois valeurs entières 1, 2 et 3 :

```c
// Prend en entrée un tableau (ne contenant que les valeurs 1, 2 et 3)
// Ne renvoie rien
// Réarrange les éléments du tableau de façon à avoir les 1 puis les 2 et les 3
void drapeau_hollandais(int tab[], int taille)
{
    int i1 = 0;
    int i2 = taille - 1;
    int i3 = taille - 1;
    while (i1 <= i2){
        if (tab[i1] == 1){
            i1 = i1 + 1;}
        else{
            if (tab[i1] == 2){
                echange(tab, i1, i2);
                i2 = i2 - 1;}
            else{
                echange(tab, i1, i2);
                echange(tab, i2, i3);
                i3 = i3 - 1;
                i2 = i2 - 1;}
        }
    }
}

```

1. Etude de l'algorithme du drapeau hollandais.

a) Faire fonctionner cet algorithme sur le tableau `tab = {1, 3, 2, 2, 3, 1}`, et donner le contenu de `tab` ainsi que celui des variables `i1`, `i2`, `i3` lors du déroulement de l'algorithme en recopiant et complétant le tableau suivant :

	`tab`	`i1`	`i2`	`i3`
Initialisation	`{1, 3, 2, 2, 3, 1}`	`0`	`5`	`5`
Etape 1	...	...	...	...
Etape 2	...	...	...	...
Etape 3	...	...	...	...
Etape 4	...	...	...	...
Etape 5	...	...	...	...
Etape 5	...	...	...	...

b) Prouver la terminaison de cet algorithme.

c) Prouver la correction de cet algorithme.

🛟 *Indication : on pourra noter n la taille du tableau et :*

— P_1 *la tranche du tableau* `tab` *comprise entre les indices 0 et* `i1` *(exclu)*

— P_2 *la portion du tableau* `tab` *comprise entre les indices* `i2` *et* `i3` *(exclu)*

— P_3 *la portion du tableau* `tab` *comprise entre les indices* `i3` *et* $n-1$ *(exclu)*

Et prouver l'invariant suivant : « P_1 ne contient que des 1, P_2 que des 2 et P_3 que des 3 ».

d) Donner, en la justifiant brièvement, la complexité de l'algorithme du drapeau hollandais.

2. Comparaison avec le tri par insertion

a) Rappeler la complexité de l'algorithme du tri par insertion (on ne demande pas de justification).

b) On a mesuré qu'en utilisant l'algorithme du tri par insertion un ordinateur trie une liste de dix million d'éléments en 5 secondes. Quel est le temps prévisible approximatif pour trier une liste contenant un milliard d'éléments ?

c) On a mesuré qu'en utilisant l'algorithme du drapeau hollandais un ordinateur trie une liste de dix million d'éléments en 0.2 secondes. Quel est le temps prévisible approximatif pour un trier une liste contenant un milliard d'éléments ?

❑ Exercice 2 : *Manipulation de listes en OCaml*

On considère la fonction `est_triee` suivante :

```
let rec est_trie lst =
  (* Renvoie true si lst est triée dans l'ordre croissant et false sinon*)
  match lst with
  | [] -> true
  | h::[] -> true
  | h::i::t -> if h<=i then est_trie t else false;;
```

1. Proposer au moins un test permettant de montrer que cette fonction ne répond pas à sa spécification donnée en commentaire dans le code.
2. Corriger le code de cette fonction afin qu'elle soit conforme à sa spécification (on pourra simplement indiquer le numéro de la ligne à modifier et donner son nouveau contenu).
3. Ecrire une fonction `fusion: int list -> int list -> int list` qui prend en argument deux listes *supposées triées* et renvoie la fusion de ces deux listes (avec répétition éventuelle des éléments). Par exemples :

— `fusion [4; 8; 9] [0; 2; 3; 10]` renvoie `[0; 2; 3; 4; 8; 9; 10]`

— `fusion [4; 4; 5; 7] [4; 6]` renvoie `[4; 4; 4; 5; 6; 7]`

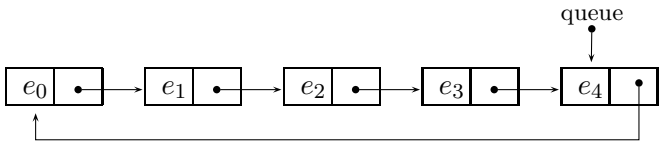
— `fusion [3] [1; 2; 2; 4; 6]` renvoie `[1; 2; 2; 3; 4; 6]`

4. Prouver que la fonction `fusion` termine.

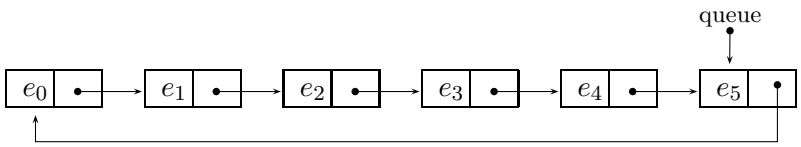
❑ **Exercice 3** : *Liste chaînée circulaire*

Le langage utilisé dans cet exercice est le langage C.

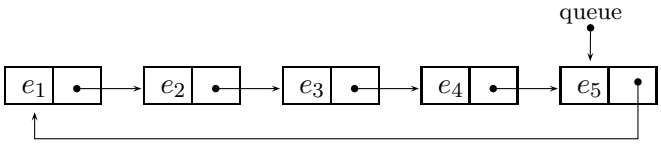
On veut implémenter une structure de données de liste chainée circulaire avec un pointeur sur la queue telle que représentée ci-dessous :



La queue pointe toujours vers *le dernier élément inséré* ainsi, après l'ajout d'un nouvel élément e_5, la structure de données ci-dessus devient :



Lorsqu'on retire un élément de cette structure de données, on retire le maillon qui *suit le pointeur de queue*. Par conséquent, si on retire un élément de la structure de donnée ci-dessus, c'est le maillon contenant e_0 qui est retiré et on obtient :



Afin d'implémenter cette structure de données, on propose d'utiliser les types suivants

```c
struct maillon_s
{
    int valeur;
    struct maillon_s *suivant;
};
typedef struct maillon_s maillon;
typedef maillon *liste_circulaire;
```

La liste chainée circulaire vide est alors représentée par le pointeur NULL.

1. En partant d'une liste chainée circulaire initialement vide, donner les étapes de son évolution après les opérations suivantes :
   1. `ajouter 12`
   2. `ajouter 6`
   3. `ajouter 7`
   4. `retirer`
   5. `ajouter 42`
   6. `retirer`

   On précisera la valeur des entiers renvoyés par la fonction `retirer`.
2. Ecrire la fonction `ajouter` de signature `void ajouter(liste_circulaire *lc, int v)` qui modifie la liste circulaire donnée en argument en lui ajoutant un nouveau maillon contenant la valeur `v`.
   ⛑ Indication : on fera attention à traiter le cas particulier d'une liste circulaire initialement vide.
3. Ecrire la fonction `retirer` de signature `int retirer(liste_circulaire *lc)` qui prend en argument une liste circulaire *supposée non vide* et renvoie la valeur du maillon situé après le pointeur de queue en le retirant de la liste circulaire.
4. Quelle structure de données connue a-t-on implémenté ici ? Justifier et proposer des noms plus appropriés pour les fonctions `ajouter` et `retirer`.

5. Ecrire une fonction `longueur` de signature `int longueur(liste_circulaire lc)` qui renvoie le nombre d'éléments d'une liste chaînée circulaire.
6. Donner, en les justifiant, les complexités des opérations `retirer`, `ajouter` et `longueur`.

❑ **Exercice 4** : *Plus petit entier manquant*

Le langage utilisé dans cet exercice est le langage Ocaml.

Etant donné une liste d'entiers *naturels*, on cherche à déterminer le plus petit entier manquant dans cette liste. Par exemples :

— si la liste est `[6; 4; 2; 0; 1; 2; 5]` alors le plus petit entier manquant est 3

— si la liste est `[0; 2; 1; 1; 3; 2; 1]` alors le plus petit entier manquant est 4

— si la liste est `[1; 3; 7;]` alors le plus petit entier manquant est 0

— si la liste est vide alors le plus petit entier manquant est 0.

Dans toute la suite de l'exercice, on notera N la longueur de la liste donnée en argument et M le maximum de ses éléments.

1. Dans cette partie, on propose de répondre au problème en testant successivement la présence de chaque entier dans la liste.
   a) Ecrire une fonction `est_dans 'a -> 'a list -> bool` qui prend en entrée un élément `elt` et une liste `lst` et renvoie `true` lorsque `elt` est dans `lst` et `false` sinon.
   b) Ecrire une fonction `manquant: intlist -> int` qui renvoie le plus petit entier manquant dans la liste donnée en argument en testant successivement la présence des entiers $0, 1, 2, \ldots$ et en s'arrêtant dès que l'un deux n'est pas trouvé.
   ✪ Indication : on pourra utiliser une fonction auxiliaire récursive.
   c) Donner en la justifiant la complexité de la fonction `manquant`.
2. Dans cette partie, on propose de trier au préalable la liste d'entiers. On suppose *déjà écrite* une fonction `trie int list -> int list` qui prend en argument une liste d'entiers et renvoie cette liste triée.
   a) Ecrire une fonction `manquant_trie : int list -> int` qui prend en argument une liste triée d'entiers et renvoie le plus petit entier manquant dans cette liste.
   b) Citer au moins un algorithme permettant de trier une liste avec une complexité en $\mathcal{O}(N \log N)$ où N est la longueur de la liste.
   c) On suppose que la fonction `trie` a une complexité linéarithmique, donner alors en la justifiant la complexité de la méthode consistant à trier au préalable la liste avec la fonction `trie` puis à utiliser la fonction `manquant_trie`.
3. Proposer un algorithme permettant de résoudre le problème de la recherche du plus petit entier manquant en complexité $\mathcal{O}(M)$ où M est le maximum des éléments de la liste. On *ne demande pas de coder* cet algorithme, mais simplement d'en décrire le fonctionnement (ou de l'écrire en pseudo-langage) et d'en justifier la complexité.
   ✪ Indication : on pourra utiliser un tableau de booléens de taille M.