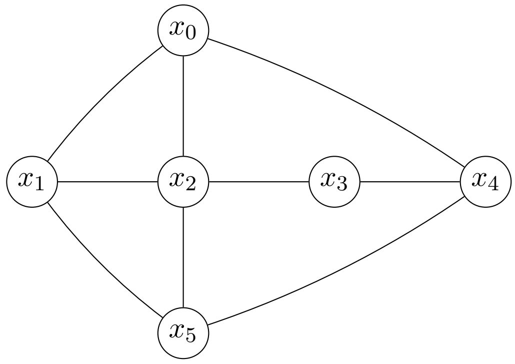
❑ **Exercice 1** : *Définition et représentation d'un graphe non orienté*
On note : $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $A = \{ab, ac, bc, ef, gf, ed, ce, bg\}$

1. Représenter le graphe non orienté $G = (S, A)$
2. Donner le degré de chaque sommet.
3. Donner la représentation de G sous forme de matrice d'adjacence.
4. Donner la représentation de G sous forme de listes d'adjacence.

❑ **Exercice 2** : *Définition et représentation d'un graphe orienté*
On note : $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $A = \{ab, ac, bc, ef, gf, ed, ce, bg\}$

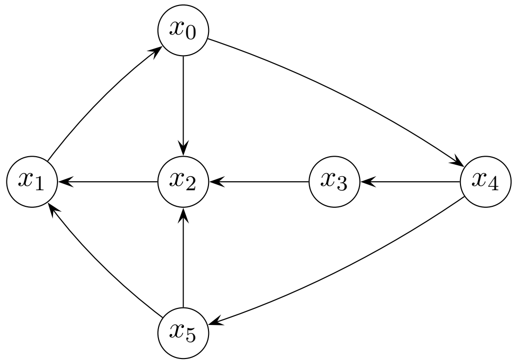
1. Représenter le graphe orienté $G = (S, A)$
2. Donner les degrés entrant et sortants de chaque sommet.
3. Donner la représentation de G sous forme de matrice d'adjacence.
4. Donner la représentation de G sous forme de listes d'adjacence.

❑ **Exercice 3** : *Représentation d'un graphe*
On considère le graphe suivant :



1. Donner sa représentation sous forme de matrice d'adjacence.
2. Donner sa représentation sous forme de listes d'adjacence.
3. Quel est le sommet de plus haut degré ? Donner la liste de ses voisins.

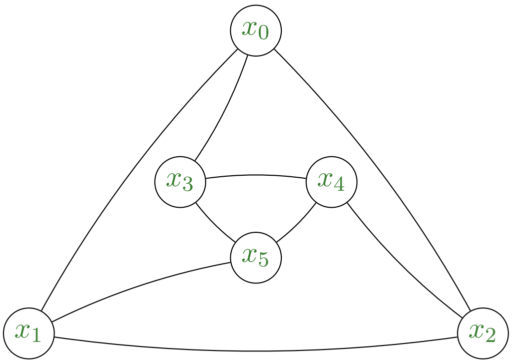
❑ **Exercice 4** : *Représentation d'un graphe orienté*
On considère le graphe G représenté ci-dessous :



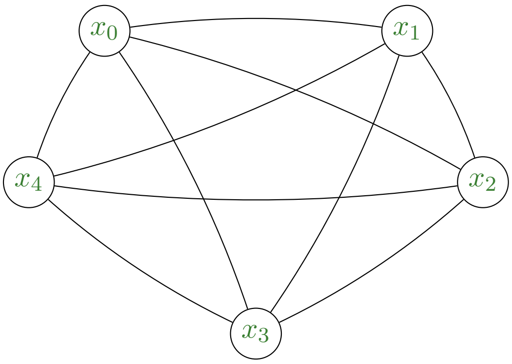
1. Donner sa représentation sous forme de matrice d'adjacence.
2. Donner sa représentation sous forme de listes d'adjacence.
3. Donner les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
4. Donner $\mathcal{V}_+(x_0)$ et $\mathcal{V}_-(x_1)$
5. Dessiner le graphe dont la matrice d'adjacence est la transposée de celle de ce graphe.

❑ **Exercice 5** : *Graphe régulier, graphe complet*
Les graphes considérés dans cet exercice sont non orientés. On dit qu'un graphe $G = (S, A)$ est *régulier* lorsque tous ses sommets ont le même degré. Et on dit qu'un graphe est *complet* lorsque qu'il y a une arête entre tous les paires de sommets

1. Dessiner un graphe non orienté régulier de taille 6 dont les sommets sont de degré 3



2. Dessiner un graphe complet de taille 5



3. Déterminer le nombre d'arêtes du graphe complet à n sommets

Le nombre d'arêtes du graphe complet à n sommets est $\frac{n(n-1)}{2}$

4. Un graphe complet est-il régulier ?

Oui, tous les sommets ont le même degré $n-1$

5. Peut-on construire un graphe régulier de taille 5 dont tous les sommets sont de degré 3 ?

Si tous les sommets sont de degrés 3 alors il y a $\frac{3n}{2}$ arêtes. Or $n = 5$ donc $\frac{3n}{2} = \frac{15}{2}$ n'est pas un entier. Donc un tel graphe n'existe pas.

6. A quelle condition portant sur n et k peut-on construire un graphe régulier de taille n dont tous les sommets sont de degré k ?

Il faut que n et k soient de même parité. En effet, le nombre d'arêtes est $\frac{nk}{2}$ et il faut que ce soit un entier. De plus comme le degré maximal est $n-1$, il faut que $k \leq n-1$.

❑ **Exercice 6** : *Sommet isolé*

On dit qu'un sommet d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est *isolé* lorsque son degré est nul.

1. Montrer qu'un graphe ne peut avoir simultanément un sommet isolé et un sommet de degré $|S|-1$

Supposons que G ait un sommet isolé x et un sommet de degré $|S|-1$ noté y. Comme y est de degré $|S|-1$, il est adjacent à tous les autres sommets du graphe. En particulier, il est adjacent à x. Donc x n'est pas isolé.

2. En déduire qu'un graphe a au moins deux sommets de même degré.

Soit G un graphe non orienté de taille n. Soit $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ les degrés des sommets de G. On a $d_i \leq n-1$ pour tout i. Donc les d_i sont dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$. D'après la question précédente, cette ensemble ne peut contenir simultanément 0 et $n-1$, donc il a au plus $n-1$ élements. Donc il y a au moins deux sommets de même degré.

❑ **Exercice 7** : *Parité*

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté, on note $d(x)$ le degré d'un sommet $x \in S$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{x \in S} d(x) = 2|A|$

On peut raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes. Soi $|A| = 0$ alors tous les degrés sont nuls et la propriété est vraie. On suppose la propriété vraie pour un graphe ayant n arêtes et on considère un graphe G ayant $n+1$ arêtes. On supprime une arête $\{y, z\}$ de G, on obtient un graphe $G' = (S, A')$ ayant n arêtes. On a donc $\sum_{x \in S} d_{G'}(x) = \sum_{x \in S} d(x) + 1 + 1 = 2|A'| + 2 = 2|A|$.

2. En déduire que G a forcément un nombre pair de sommets de degré impair

En effet, on a $\sum_{x \in S} d(x) = 2|A|$ est un nombre pair. Or la somme des degrés des sommets de degré impair est un nombre impair. Donc il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

❑ **Exercice 8** : *Un peu de dénombrement*

1. Montrer qu'il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ graphes non orientés à n sommets.

On a n sommets et $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes possibles. Chaque arête peut être présente ou non dans le graphe. Donc il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ graphes non orientés à n sommets.

2. Déterminer le nombre de graphes orientés à n sommets.

On a n sommets et $n(n-1)$ arêtes possibles. Chaque arête peut être présente ou non dans le graphe. Donc il y a $2^{n(n-1)}$ graphes orientés à n sommets.

❑ **Exercice 9** : *Matrice d'adjacence et nombre de chemins*

Soit $G = (S, A)$ et M sa matrice d'adjacence, le but de l'exercice est de calculer le nombre de chemins de longueur k entre deux sommets i et j d'un graphe qu'on notera $c_{i,j,k}$.

1. Montrer que $c_{i,j,1} = M_{i,j}$

En effet, $c_{i,j,1}$ est le nombre de chemins de longueur 1 entre i et j. Or il y a une arête entre i et j si et seulement si $M_{i,j} = 1$. Donc $c_{i,j,1} = M_{i,j}$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{i,j,k} = M^k_{i,j}$ (on pourra raisonner par récurrence)

On suppose la propriété vraie pour k et on montre qu'elle est vraie pour $k+1$. On a :

$$c_{i,j,k+1} = \sum_{x \in S} c_{i,x,k} c_{x,j,1} = \sum_{x \in S} M^k_{i,x} M_{x,j} = \sum_{x \in S} M^k_{i,x} M^1_{x,j} = (M^k M^1)_{i,j} = (M^{k+1})_{i,j}$$

Donc la propriété est vraie pour $k+1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En supposant qu'on calcule M^k avec l'algorithme d'exponentiation rapide, donner la complexité de cette méthode pour calculer les $c_{i,j,k}$