

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

Exemples

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

- soit vide, on le note alors \emptyset

Exemples

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

- soit vide, on le note alors \emptyset
- soit un noeud (sag, r, sad) appelé **racine** où r est l'étiquette de la racine et sag et sad sont deux arbres binaires (le sous arbre gauche, et le sous arbre droit)

Exemples

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

- soit vide, on le note alors \emptyset
- soit un noeud (sag, r, sad) appelé **racine** où r est l'étiquette de la racine et sag et sad sont deux arbres binaires (le sous arbre gauche, et le sous arbre droit)

Exemples

L'arbre $(\emptyset, a, (\emptyset, b, \emptyset))$

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

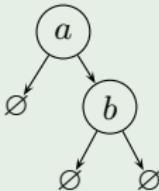
Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

- soit vide, on le note alors \emptyset
- soit un noeud (sag, r, sad) appelé **racine** où r est l'étiquette de la racine et sag et sad sont deux arbres binaires (le sous arbre gauche, et le sous arbre droit)

Exemples

L'arbre $(\emptyset, a, (\emptyset, b, \emptyset))$



C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

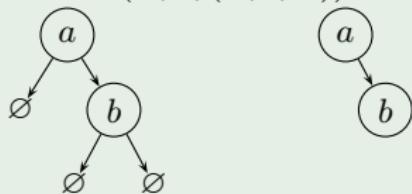
Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

- soit vide, on le note alors \emptyset
- soit un noeud (sag, r, sad) appelé **racine** où r est l'étiquette de la racine et sag et sad sont deux arbres binaires (le sous arbre gauche, et le sous arbre droit)

Exemples

L'arbre $(\emptyset, a, (\emptyset, b, \emptyset))$



C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition

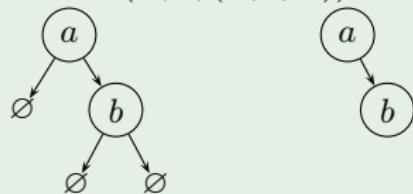
Un **arbre binaire**, est une structure de données *hiérarchique* (les éléments, appelés **noeuds** sont rangés par niveau) qui peut se définir récursivement.

En effet, un arbre binaire est

- soit vide, on le note alors \emptyset
- soit un noeud (sag, r, sad) appelé **racine** où r est l'étiquette de la racine et sag et sad sont deux arbres binaires (le sous arbre gauche, et le sous arbre droit)

Exemples

L'arbre $(\emptyset, a, (\emptyset, b, \emptyset))$



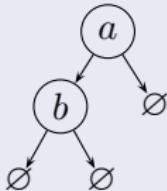
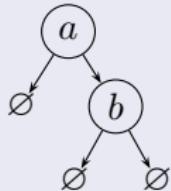
Représenté avec (à gauche) ou sans (à droite) les sous arbres vides.

C12 Arbres binaires

1. Définition

Remarques

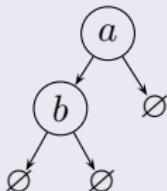
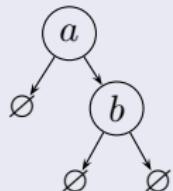
- ⚠ Les deux arbres ci-dessous sont **différents** !



1. Définition

Remarques

- ⚠ Les deux arbres ci-dessous sont **différents** !



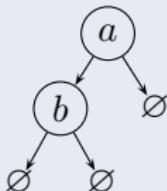
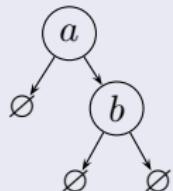
- On omet parfois de représenter les sous arbres vides, mais on doit garder à l'esprit qu'un noeud non vide est *toujours* un triplet. Et que donc les sous arbres gauche et droit même vides, sont toujours présents.

C12 Arbres binaires

1. Définition

Remarques

- ⚠ Les deux arbres ci-dessous sont **différents** !



- On omet parfois de représenter les sous arbres vides, mais on doit garder à l'esprit qu'un noeud non vide est *toujours* un triplet. Et que donc les sous arbres gauche et droit même vides, sont toujours présents.

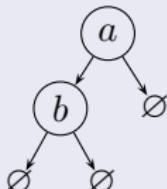
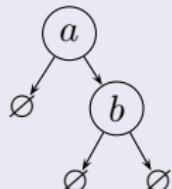
Vocabulaire

- Lorsque b est un sous arbre d'un noeud a , on dit que a est le **père** de b et que b est le **fils** a .

1. Définition

Remarques

- ⚠ Les deux arbres ci-dessous sont **différents** !



- On omet parfois de représenter les sous arbres vides, mais on doit garder à l'esprit qu'un noeud non vide est *toujours* un triplet. Et que donc les sous arbres gauche et droit même vides, sont toujours présents.

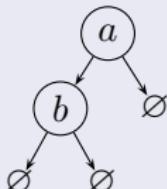
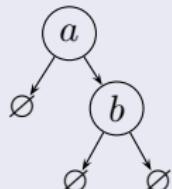
Vocabulaire

- Lorsque b est un sous arbre d'un noeud a , on dit que a est le **père** de b et que b est le **fils** a .
- Un noeud dont les deux sous arbres sont vides s'appelle une **feuille**.

1. Définition

Remarques

- ⚠ Les deux arbres ci-dessous sont **différents** !



- On omet parfois de représenter les sous arbres vides, mais on doit garder à l'esprit qu'un noeud non vide est *toujours* un triplet. Et que donc les sous arbres gauche et droit même vides, sont toujours présents.

Vocabulaire

- Lorsque b est un sous arbre d'un noeud a , on dit que a est le **père** de b et que b est le **fils** a .
- Un noeud dont les deux sous arbres sont vides s'appelle une **feuille**.
- un noeud qui n'est pas une feuille s'appelle un **noeud interne**.

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition récursive du nombre de noeuds et de la hauteur

- Le **nombre de noeuds** d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition récursive du nombre de noeuds et de la hauteur

- Le **nombre de noeuds** d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} n(A) = 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ n(A) = 1 + n(g) + n(d) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition récursive du nombre de noeuds et de la hauteur

- Le **nombre de noeuds** d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} n(A) = 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ n(A) = 1 + n(g) + n(d) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

- La **hauteur** d'un arbre binaire A , noté $h(A)$, se définit récursivement par :

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition récursive du nombre de noeuds et de la hauteur

- Le **nombre de noeuds** d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} n(A) = 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ n(A) = 1 + n(g) + n(d) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

- La **hauteur** d'un arbre binaire A , noté $h(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} h(A) = -1 & \text{si } A \text{ est vide} \\ h(A) = 1 + \max(h(g), h(d)) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

C12 Arbres binaires

1. Définition

Définition récursive du nombre de noeuds et de la hauteur

- Le **nombre de noeuds** d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} n(A) = 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ n(A) = 1 + n(g) + n(d) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

- La **hauteur** d'un arbre binaire A , noté $h(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} h(A) = -1 & \text{si } A \text{ est vide} \\ h(A) = 1 + \max(h(g), h(d)) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

⚠ Certains auteurs prennent 0 comme hauteur de l'arbre vide.

1. Définition

Définition récursive du nombre de noeuds et de la hauteur

- Le **nombre de noeuds** d'un arbre binaire A , noté $n(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} n(A) = 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ n(A) = 1 + n(g) + n(d) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

- La **hauteur** d'un arbre binaire A , noté $h(A)$, se définit récursivement par :

$$\begin{cases} h(A) = -1 & \text{si } A \text{ est vide} \\ h(A) = 1 + \max(h(g), h(d)) & \text{si } A = (g, a, d) \end{cases}$$

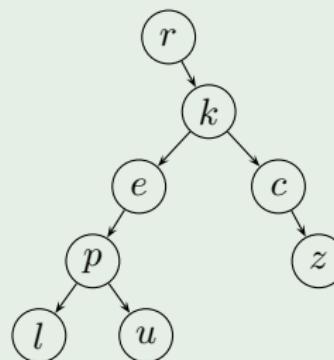
⚠ Certains auteurs prennent 0 comme hauteur de l'arbre vide.

- La **profondeur** d'un noeud est sa distance à la racine.

C12 Arbres binaires

1. Définition

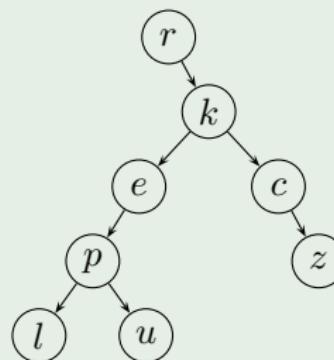
Exemple



C12 Arbres binaires

1. Définition

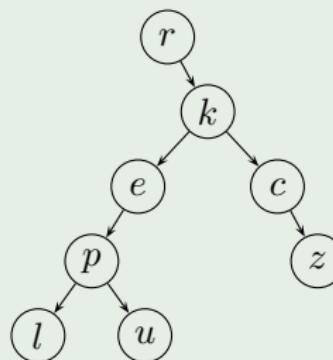
Exemple



- Nommer les feuilles et les noeuds internes

1. Définition

Exemple

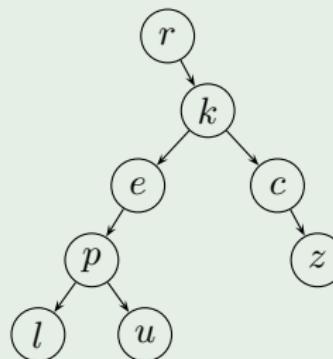


- Nommer les feuilles et les noeuds internes
- Donner le nombre de noeuds

C12 Arbres binaires

1. Définition

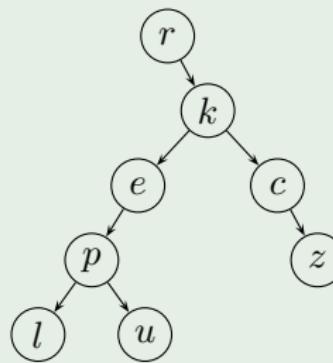
Exemple



- Nommer les feuilles et les noeuds internes
- Donner le nombre de noeuds
- Donner la hauteur de cet arbre

1. Définition

Exemple

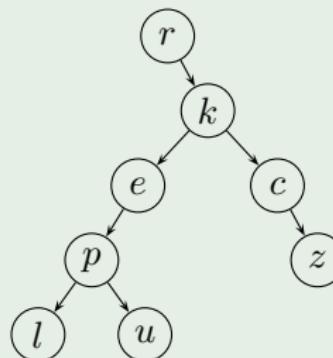


- Nommer les feuilles et les noeuds internes
- Donner le nombre de noeuds
- Donner la hauteur de cet arbre
- Donner un noeud de profondeur 2

C12 Arbres binaires

1. Définition

Exemple



- Nommer les feuilles et les noeuds internes
- Donner le nombre de noeuds
- Donner la hauteur de cet arbre
- Donner un noeud de profondeur 2
- Donner l'écriture de cet arbre sous forme de triplet

C12 Arbres binaires

1. Définition

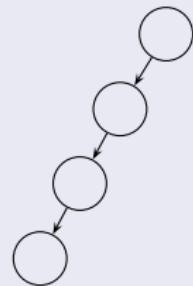
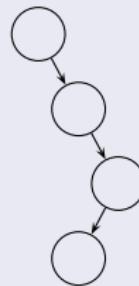
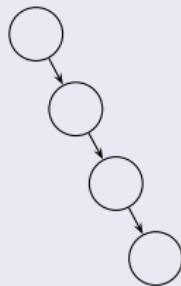
Quelques cas particuliers

- Un arbre binaire est dit **dégénéré** lorsque tous les noeuds à l'exception des feuilles n'ont qu'un fils non vide.

1. Définition

Quelques cas particuliers

- Un arbre binaire est dit **dégénéré** lorsque tous les noeuds à l'exception des feuilles n'ont qu'un fils non vide.



Pour les arbres représentés à gauche et à droite on parle de *peigne*, à rapprocher de la liste chainée.

C12 Arbres binaires

1. Définition

Quelques cas particuliers

C12 Arbres binaires

1. Définition

Quelques cas particuliers

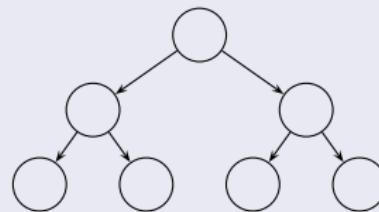
- Un arbre binaire est dit **parfait** lorsque tous les niveaux sont remplis :

C12 Arbres binaires

1. Définition

Quelques cas particuliers

- Un arbre binaire est dit **parfait** lorsque tous les niveaux sont remplis :

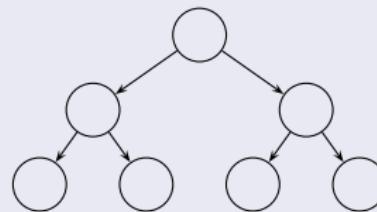


C12 Arbres binaires

1. Définition

Quelques cas particuliers

- Un arbre binaire est dit **parfait** lorsque tous les niveaux sont remplis :



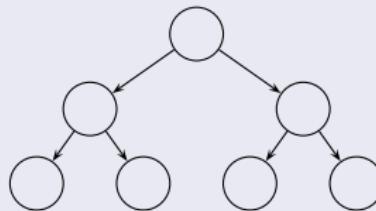
- Un arbre binaire est dit **complet** lorsque tous les niveaux à l'exception du dernier sont remplis et que le dernier niveau est rempli à parti de la gauche.

C12 Arbres binaires

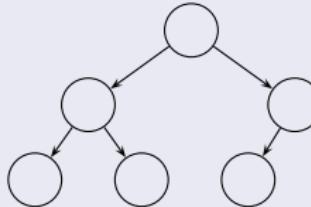
1. Définition

Quelques cas particuliers

- Un arbre binaire est dit **parfait** lorsque tous les niveaux sont remplis :



- Un arbre binaire est dit **complet** lorsque tous les niveaux à l'exception du dernier sont remplis et que le dernier niveau est rempli à parti de la gauche.



C12 Arbres binaires

1. Définition

Nombre de sous arbres vides

Le nombre de sous arbres vides d'un arbre binaire de taille n est $n + 1$.

C12 Arbres binaires

1. Définition

Nombre de sous arbres vides

Le nombre de sous arbres vides d'un arbre binaire de taille n est $n + 1$.

Relation entre hauteur et taille

En notant n la taille et h la hauteur d'un arbre binaire, on a la relation suivante :

C12 Arbres binaires

1. Définition

Nombre de sous arbres vides

Le nombre de sous arbres vides d'un arbre binaire de taille n est $n + 1$.

Relation entre hauteur et taille

En notant n la taille et h la hauteur d'un arbre binaire, on a la relation suivante :

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

Exemple

Quelle est la taille minimale (resp. maximale) d'un arbre binaire de hauteur 9 ?
Donner dans les deux cas le nombre de sous arbres vides.

1. Définition

Exercices

- ➊ Dessiner un arbres binaires de taille 4 dont l'un des noeuds au moins a un fils gauche vide.

C12 Arbres binaires

1. Définition

Exercices

- ① Dessiner un arbres binaires de taille 4 dont l'un des noeuds au moins a un fils gauche vide.
- ② Dessiner un arbre binaire de hauteur taille 4 et de hauteur 3.

1. Définition

Exercices

- ① Dessiner un arbres binaires de taille 4 dont l'un des noeuds au moins a un fils gauche vide.
- ② Dessiner un arbre binaire de hauteur taille 4 et de hauteur 3.
- ③ Dessiner un arbre binaire de hauteur 2 et de taille $2^3 - 1$.

1. Définition

Exercices

- ① Dessiner un arbres binaires de taille 4 dont l'un des noeuds au moins a un fils gauche vide.
- ② Dessiner un arbre binaire de hauteur taille 4 et de hauteur 3.
- ③ Dessiner un arbre binaire de hauteur 2 et de taille $2^3 - 1$.
- ④ Montrer que le nombre d'arêtes (trait reliant un noeud à un fils *non vide*) d'un arbre binaire à n noeuds ($n \geq 1$) est $n - 1$

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en C

En C, on représente un arbre binaire par un pointeur vers un type structuré contenant trois champs : l'étiquette (un **int**) de la racine, et les pointeurs vers les deux sous arbres (gauche et droit).

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en C

En C, on représente un arbre binaire par un pointeur vers un type structuré contenant trois champs : l'étiquette (un **int**) de la racine, et les pointeurs vers les deux sous arbres (gauche et droit).

L'arbre vide est alors représenté par le pointeur **NULL**.

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en C

En C, on représente un arbre binaire par un pointeur vers un type structuré contenant trois champs : l'étiquette (un **int**) de la racine, et les pointeurs vers les deux sous arbres (gauche et droit).

L'arbre vide est alors représenté par le pointeur **NULL**.

```
1 struct noeud
2 {
3     struct noeud *sag;
4     int valeur;
5     struct noeud *sad;
6 };
7 typedef struct noeud noeud;
8 typedef noeud *ab;
```

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Création d'un arbre

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Création d'un arbre

On écrit alors une fonction `ab cree_arbre(ab g, int v, ab d)` qui renvoie un arbre donne on donne l'étiquette de la racine et les deux sous arbres :

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Création d'un arbre

On écrit alors une fonction ab cree_arbre(ab g, int v, ab d) qui renvoie un arbre donne on donne l'étiquette de la racine et les deux sous arbres :

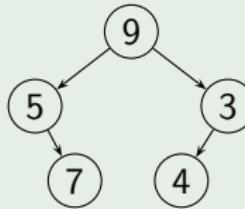
```
1 ab cree_arbre(ab g, int v, ab d)
2 {
3     noeud *n = malloc(sizeof(noeud));
4     assert n!=NULL;
5     n->sag = g;
6     n->valeur = v;
7     n->sad = d;
8     return n;
9 }
```

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Exemple

- En utilisant cette représentation, créer l'arbre binaire suivant :

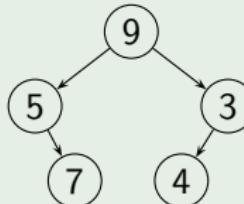


C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Exemple

- ① En utilisant cette représentation, créer l'arbre binaire suivant :



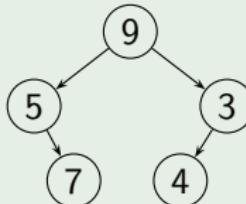
- ② Ecrire la fonction qui calcule le nombre de noeuds d'un arbre binaire.

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Exemple

- ① En utilisant cette représentation, créer l'arbre binaire suivant :



- ② Ecrire la fonction qui calcule le nombre de noeuds d'un arbre binaire.

```
1 int taille(ab a)
2 {
3     if (a == NULL)
4     {
5         return 0;
6     }
7     return 1 + taille(a->sag) + taille(a->sad);
8 }
```

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en OCaml

Un arbre binaire étant soit vide soit constituée d'une étiquette (qu'on suppose de type `int`), on le définit en OCaml en envisageant les 2 cas :

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en OCaml

Un arbre binaire étant soit vide soit constituée d'une étiquette (qu'on suppose de type `int`), on le définit en OCaml en envisageant les 2 cas :

```
1  type ab =
2    | Vide
3    | Noeud of ab * int * ab ;;
```

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en OCaml

Un arbre binaire étant soit vide soit constituée d'une étiquette (qu'on suppose de type `int`), on le définit en OCaml en envisageant les 2 cas :

```
1  type ab =
2    | Vide
3    | Noeud of ab * int * ab ;;
```

Pour un type quelconque d'étiquette, on utilise un type paramétré '`a`' :

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Type structuré en OCaml

Un arbre binaire étant soit vide soit constituée d'une étiquette (qu'on suppose de type `int`), on le définit en OCaml en envisageant les 2 cas :

```
1 type ab =
2   | Vide
3   | Noeud of ab * int * ab ;;
```

Pour un type quelconque d'étiquette, on utilise un type paramétré '`a`' :

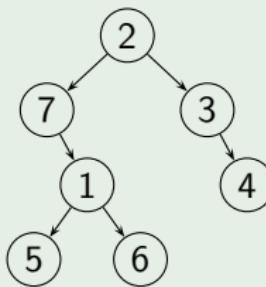
```
1 type 'a ab =
2   | Vide
3   | Noeud of 'a ab * 'a * 'a ab;;
```

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Exemple

- En utilisant cette représentation, créer l'arbre binaire suivant :

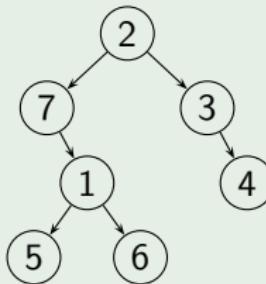


C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Exemple

- ① En utilisant cette représentation, créer l'arbre binaire suivant :



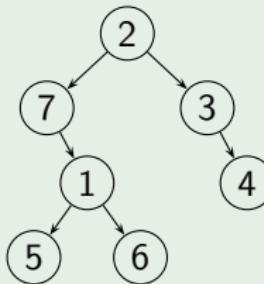
- ② Ecrire la fonction permettant de calculer le nombre de noeuds d'un arbre binaire et donner sa complexité.

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Exemple

- ① En utilisant cette représentation, créer l'arbre binaire suivant :



- ② Ecrire la fonction permettant de calculer le nombre de noeuds d'un arbre binaire et donner sa complexité.

```
1 let rec taille ab =
2   match ab with
3   | Vide -> 0
4   | Noeud (sag, _, sad) -> 1 + taille sag + taille sad;;
```

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n .

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

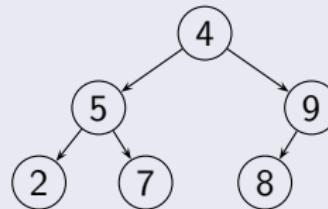
Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i .

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i . Par exemple :

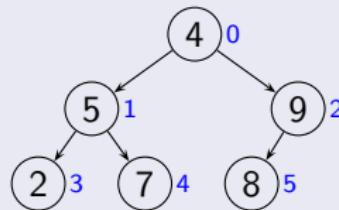


C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i . Par exemple :

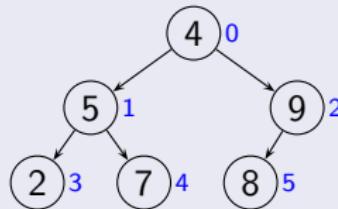


C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i . Par exemple :



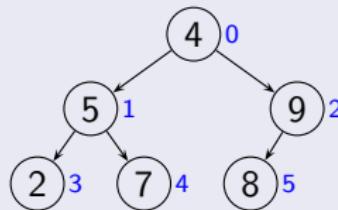
sera représenté par le tableau :

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i . Par exemple :



sera représenté par le tableau :

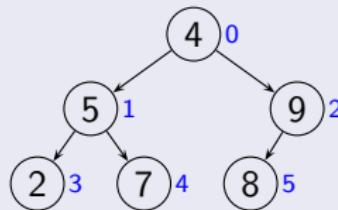
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 9 | 2 | 7 | 8 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i . Par exemple :



sera représenté par le tableau :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 9 | 2 | 7 | 8 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

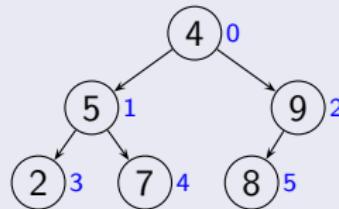
- Le fils gauche (resp. droit) du noeud i se trouve à l'indice $2i + 1$ (resp.) $2i + 2$.

C12 Arbres binaires

2. Représentation en machine

Cas particulier d'un arbre binaire complet

Un arbre binaire complet de taille n peut être représenté de façon compacte à l'aide d'un tableau de taille n . On numérote les noeuds depuis la racine, de gauche à droite et de haut en bas, le noeud numéroté i est placé dans la case d'indice i . Par exemple :



sera représenté par le tableau :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 9 | 2 | 7 | 8 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

- Le fils gauche (resp. droit) du noeud i se trouve à l'indice $2i + 1$ (resp.) $2i + 2$.
- Le père du noeud d'indice i se trouve à l'indice $\left\lfloor \frac{i - 1}{2} \right\rfloor$.

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours récursifs

On appelle *parcours d'un arbre binaire* un algorithme permettant de visiter chaque noeud de cet arbre une et une seule fois afin d'y effectuer un traitement (tester la présence d'une valeur, chercher la plus petite valeur, ...).

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours récursifs

On appelle *parcours d'un arbre binaire* un algorithme permettant de visiter chaque noeud de cet arbre une et une seule fois afin d'y effectuer un traitement (tester la présence d'une valeur, chercher la plus petite valeur, ...). Compte tenu de la structure récursive des arbres binaires, trois parcours récursifs émergent suivant le choix du moment où on traite la racine du noeud (g, r, d) :

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours récursifs

On appelle *parcours d'un arbre binaire* un algorithme permettant de visiter chaque noeud de cet arbre une et une seule fois afin d'y effectuer un traitement (tester la présence d'une valeur, chercher la plus petite valeur, ...). Compte tenu de la structure récursive des arbres binaires, trois parcours récursifs émergent suivant le choix du moment où on traite la racine du noeud (g, r, d) :

- Dans le parcours **préfixe**, la racine est traitée avant de relancer le parcours sur le sous arbre gauche g et le sous arbre droit d .

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours récursifs

On appelle *parcours d'un arbre binaire* un algorithme permettant de visiter chaque noeud de cet arbre une et une seule fois afin d'y effectuer un traitement (tester la présence d'une valeur, chercher la plus petite valeur, ...). Compte tenu de la structure récursive des arbres binaires, trois parcours récursifs émergent suivant le choix du moment où on traite la racine du noeud (g, r, d) :

- Dans le parcours **préfixe**, la racine est traitée avant de relancer le parcours sur le sous arbre gauche g et le sous arbre droit d .
- Dans le parcours **infixe**, la racine est traitée après le parcours du sous arbre gauche g mais avant celui du sous arbre droit d .

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours récursifs

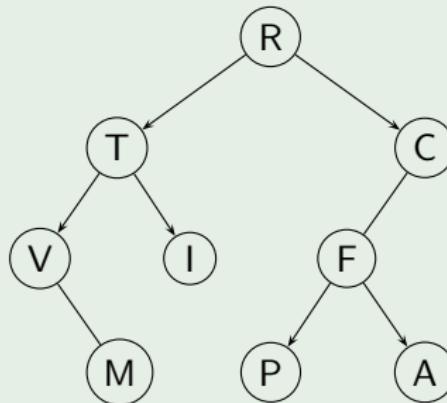
On appelle *parcours d'un arbre binaire* un algorithme permettant de visiter chaque noeud de cet arbre une et une seule fois afin d'y effectuer un traitement (tester la présence d'une valeur, chercher la plus petite valeur, ...). Compte tenu de la structure récursive des arbres binaires, trois parcours récursifs émergent suivant le choix du moment où on traite la racine du noeud (g, r, d) :

- Dans le parcours **préfixe**, la racine est traitée avant de relancer le parcours sur le sous arbre gauche g et le sous arbre droit d .
- Dans le parcours **infixe**, la racine est traitée après le parcours du sous arbre gauche g mais avant celui du sous arbre droit d .
- Dans le parcours **suffixe**, la racine est traitée après le parcours du sous arbre gauche g et du sous arbre droit d .

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple

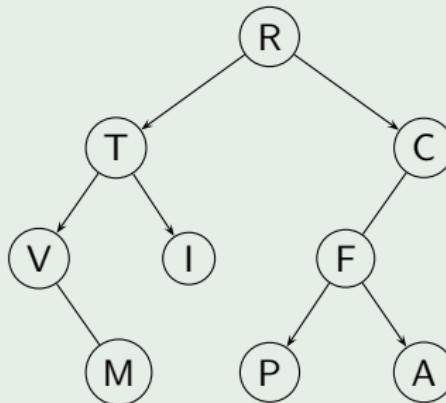


Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple



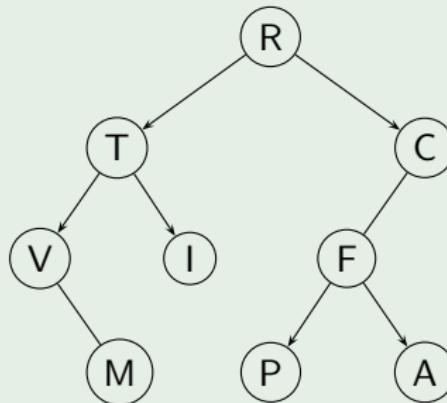
Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

- En profondeur préfixé :

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple



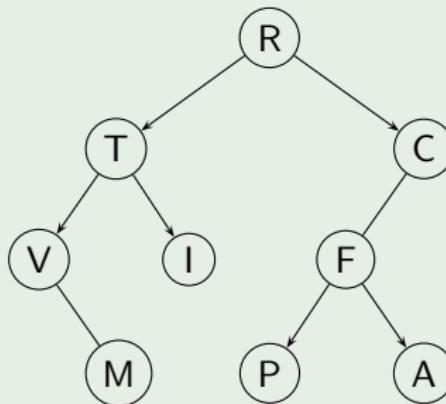
Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

- En profondeur préfixé : R, T, V, M, I, C, F, P, A

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple



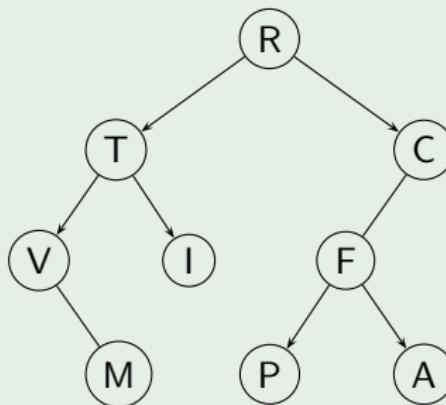
Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

- En profondeur préfixé : R, T, V, M, I, C, F, P, A
- En profondeur infixé :

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple



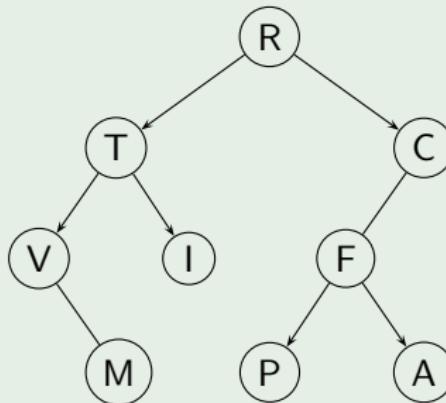
Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

- En profondeur préfixé : R, T, V, M, I, C, F, P, A
- En profondeur infixé : V, M, T, I, R, P, F, A, C

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple



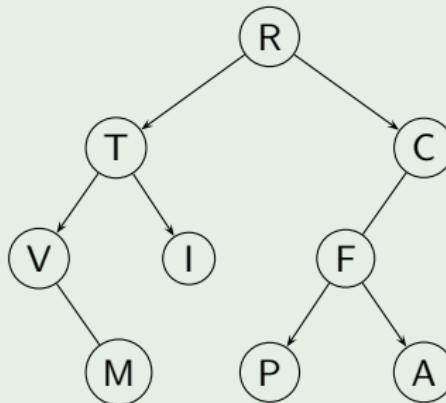
Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

- En profondeur préfixé : R, T, V, M, I, C, F, P, A
- En profondeur infixé : V, M, T, I, R, P, F, A, C
- En profondeur suffixé :

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemple



Donner l'ordre des noeuds lorsqu'on parcourt l'arbre ci-dessus :

- En profondeur préfixé : R, T, V, M, I, C, F, P, A
- En profondeur infixé : V, M, T, I, R, P, F, A, C
- En profondeur suffixé : M, V, I, T, P, A, F, C, R

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours en largeur

Le parcours en largeur revient à lister les noeuds par ordre croissant de profondeur et de gauche à droite

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours en largeur

Le parcours en largeur revient à lister les noeuds par ordre croissant de profondeur et de gauche à droite

L'implémentation de ce parcours peut se faire à l'aide d'une file dans laquelle on stocke les noeuds restants à parcourir. A chaque fois qu'on traite un noeud, on le défile et on enfile ses fils.

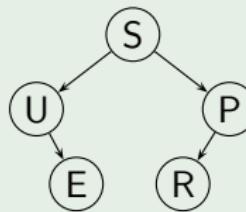
3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours en largeur

Le parcours en largeur revient à lister les noeuds par ordre croissant de profondeur et de gauche à droite

L'implémentation de ce parcours peut se faire à l'aide d'une file dans laquelle on stocke les noeuds restants à parcourir. A chaque fois qu'on traite un noeud, on le défile et on enfile ses fils.

Exemple



C12 Arbres binaires

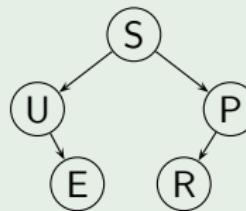
3. Parcours d'un arbre binaire

Parcours en largeur

Le parcours en largeur revient à lister les noeuds par ordre croissant de profondeur et de gauche à droite

L'implémentation de ce parcours peut se faire à l'aide d'une file dans laquelle on stocke les noeuds restants à parcourir. A chaque fois qu'on traite un noeud, on le défile et on enfile ses fils.

Exemple



Le parcours en largeur donne : S, U, P, E, R.

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemples d'implémentation

- Parcours préfixe en C (affichage des étiquettes)

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemples d'implémentation

- Parcours préfixe en C (affichage des étiquettes)

```
1 void prefixe(ab a)
2 {
3     if (a != NULL)
4     {
5         printf("%d ", a->valeur);
6         prefixe(a->sag);
7         prefixe(a->sad);
8     }
9 }
```

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemples d'implémentation

- Parcours préfixe en C (affichage des étiquettes)

```
1 void prefixe(ab a)
2 {
3     if (a != NULL)
4     {
5         printf("%d ", a->valeur);
6         prefixe(a->sag);
7         prefixe(a->sad);
8     }
9 }
```

- Parcours infixé en OCaml (affichage des étiquettes)

C12 Arbres binaires

3. Parcours d'un arbre binaire

Exemples d'implémentation

- Parcours préfixe en C (affichage des étiquettes)

```
1 void prefixe(ab a)
2 {
3     if (a != NULL)
4     {
5         printf("%d ", a->valeur);
6         prefixe(a->sag);
7         prefixe(a->sad);
8     }
9 }
```

- Parcours infixé en OCaml (affichage des étiquettes)

```
1 let rec infixé a =
2     match a with
3     | Vide -> ()
4     | Noeud (g,e,d) -> infixé g; Printf.printf "%c " e; infixé d;;
```

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées **clés** sont toutes comparables entre elles.

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées **clés** sont toutes comparables entre elles.

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées **clés** sont toutes comparables entre elles.
Par exemple, les étiquettes sont toutes des nombres ou encore des chaînes de caractères (comparées par ordre alphabétique).

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées **clés** sont toutes comparables entre elles.
Par exemple, les étiquettes sont toutes des nombres ou encore des chaînes de caractères (comparées par ordre alphabétique).
- Pour **tous** les noeuds $N(g, v, d)$ l'ensemble des clés présentes dans le sous arbre gauche g (resp. droit d) sont strictement inférieures (resp. supérieures) à v .

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées **clés** sont toutes comparables entre elles.
Par exemple, les étiquettes sont toutes des nombres ou encore des chaînes de caractères (comparées par ordre alphabétique).
- Pour **tous** les noeuds $N(g, v, d)$ l'ensemble des clés présentes dans le sous arbre gauche g (resp. droit d) sont strictement inférieures (resp. supérieures) à v .
- Les clés sont **uniques**.

4. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire **de recherche** (noté ABR), est un arbre binaire tel que :

- Les étiquettes des noeuds, appelées **clés** sont toutes comparables entre elles.
Par exemple, les étiquettes sont toutes des nombres ou encore des chaînes de caractères (comparées par ordre alphabétique).
- Pour **tous** les noeuds $N(g, v, d)$ l'ensemble des clés présentes dans le sous arbre gauche g (resp. droit d) sont strictement inférieures (resp. supérieures) à v .
- Les clés sont **uniques**.

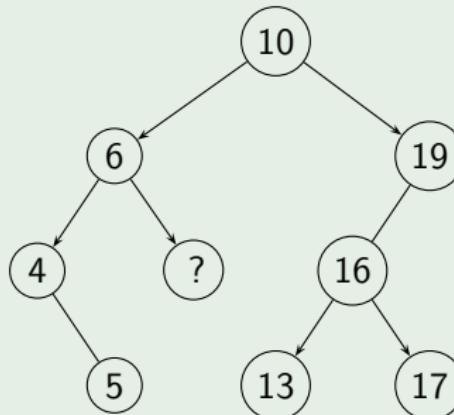
Caractérisation par le parcours infixé

Un arbre binaire est un ABR si et seulement si le parcours infixé fournit les clés dans l'ordre croissant.

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exemple

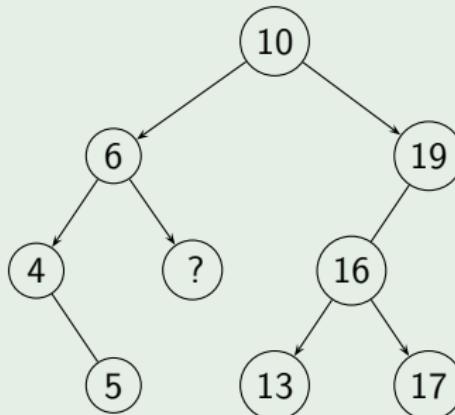


- Cet arbre est-il un ABR si la clé manquante est 2 ? 9 ? 12 ?

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

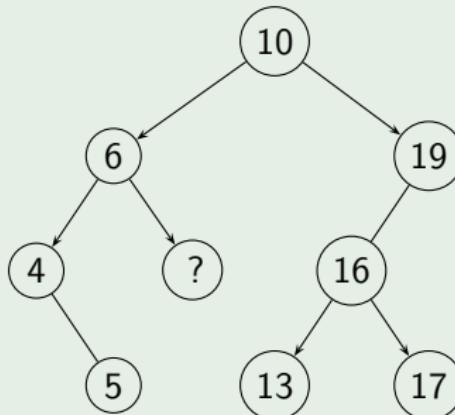
Exemple



- Cet arbre est-il un ABR si la clé manquante est 2 ? 9 ? 12 ?
- On suppose que la clé manquante est 9. Proposer une nouvelle valeur pour le noeud de clé 16 de façon à ce que cet arbre reste un ABR.

4. Arbres binaires de recherche

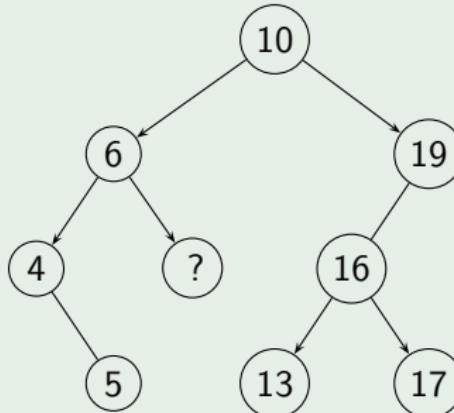
Exemple



- Cet arbre est-il un ABR si la clé manquante est 2 ? 9 ? 12 ?
- On suppose que la clé manquante est 9. Proposer une nouvelle valeur pour le noeud de clé 16 de façon à ce que cet arbre reste un ABR.
- Proposer une valeur pour le noeud de clé 16 de façon à ce que cet arbre ne soit pas un ABR.

4. Arbres binaires de recherche

Exemple



- Cet arbre est-il un ABR si la clé manquante est 2 ? 9 ? 12 ?
- On suppose que la clé manquante est 9. Proposer une nouvelle valeur pour le noeud de clé 16 de façon à ce que cet arbre reste un ABR.
- Proposer une valeur pour le noeud de clé 16 de façon à ce que cet arbre ne soit pas un ABR.
- Donner l'ordre des clés lors d'un parcours infixé.

4. Arbres binaires de recherche

Insertion dans un ABR

Pour insérer une nouvelle valeur u dans un ABR A :

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Insertion dans un ABR

Pour insérer une nouvelle valeur u dans un ABR A :

- Si A est vide on renvoie $(\emptyset, u, \emptyset)$.

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Insertion dans un ABR

Pour insérer une nouvelle valeur u dans un ABR A :

- Si A est vide on renvoie $(\emptyset, u, \emptyset)$.
- Sinon $A = (g, v, d)$ et on insère dans g si $u < v$ et dans d sinon.

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Insertion dans un ABR

Pour insérer une nouvelle valeur u dans un ABR A :

- Si A est vide on renvoie $(\emptyset, u, \emptyset)$.
- Sinon $A = (g, v, d)$ et on insère dans g si $u < v$ et dans d sinon.

Implémentation en OCaml

```
1 let rec insere abr nv =
2   match abr with
3   | Vide -> Noeud(Vide,nv,Vide)
4   | Noeud(g,v,d) -> if nv < v then Noeud(insere g nv, v, d)
5     else Noeud(g, v, insere d nv);;
```

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exercice

- Dessiner l'arbre obtenu en partant de l'arbre vide puis en insérant dans cet ordre les valeurs :

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exercice

- Dessiner l'arbre obtenu en partant de l'arbre vide puis en insérant dans cet ordre les valeurs :
 - 2, 5, 7, 9 et 11

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exercice

- Dessiner l'arbre obtenu en partant de l'arbre vide puis en insérant dans cet ordre les valeurs :
 - 2, 5, 7, 9 et 11
 - 9, 5, 11, 2, 7

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exercice

- Dessiner l'arbre obtenu en partant de l'arbre vide puis en insérant dans cet ordre les valeurs :
 - 2, 5, 7, 9 et 11
 - 9, 5, 11, 2, 7
 - 7, 5, 9, 2, 11

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exercice

- Dessiner l'arbre obtenu en partant de l'arbre vide puis en insérant dans cet ordre les valeurs :
 - 2, 5, 7, 9 et 11
 - 9, 5, 11, 2, 7
 - 7, 5, 9, 2, 11
- En vous inspirant de la fonction d'insertion, écrire une fonction `in_abr (abr -> int -> bool)` qui renvoie un booléen indiquant si la valeur passé en argument se trouve ou non dans l'ABR.

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exercice

- Dessiner l'arbre obtenu en partant de l'arbre vide puis en insérant dans cet ordre les valeurs :
 - 2, 5, 7, 9 et 11
 - 9, 5, 11, 2, 7
 - 7, 5, 9, 2, 11
- En vous inspirant de la fonction d'insertion, écrire une fonction `in_abr (abr -> int -> bool)` qui renvoie un booléen indiquant si la valeur passé en argument se trouve ou non dans l'ABR.

```
1 let rec in_abr abr u =
2   match abr with
3   | Vide -> false
4   | Noeud(g,v,d) -> if u=v then true else
5     if u<v then in_abr g u else in_abr d u;;
```

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Complexité

La complexité des opérations d'insertion et de recherche dans un ABR est majorée par la hauteur h de l'arbre.

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Complexité

La complexité des opérations d'insertion et de recherche dans un ABR est majorée par la hauteur h de l'arbre.

En effet, on descend d'un niveau dans l'arbre à chaque appel récursif et la profondeur d'un noeud est inférieure à h .

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Complexité

La complexité des opérations d'insertion et de recherche dans un ABR est majorée par la hauteur h de l'arbre.

En effet, on descend d'un niveau dans l'arbre à chaque appel récursif et la profondeur d'un noeud est inférieure à h .

Cas des arbres binaires équilibrés

Soit S , un ensemble d'arbres binaires. On dit que les arbres de S sont **équilibrés** s'il existe une constante C telle que, pour tout arbre $s \in S$:

$$h(s) \leq C \log(n(s))$$

Conséquence : pour tout $s \in S$, la complexité des opérations est **logarithmique** en fonction de la taille n de s .

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Implémentation des tableaux associatifs

- Si l'ensemble des clés est ordonné, on peut implémenter les tableaux associatifs en utilisant une famille d'arbres binaires équilibrés. Chaque noeud de l'arbre contient alors une information supplémentaire (sa valeur) en plus de la clé associée.

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Implémentation des tableaux associatifs

- Si l'ensemble des clés est ordonné, on peut implémenter les tableaux associatifs en utilisant une famille d'arbres binaires équilibrés. Chaque noeud de l'arbre contient alors une information supplémentaire (sa valeur) en plus de la clé associée.
- Les opérations usuelles (insertion, test d'appartenance, ...) ont alors une complexité logarithmique.

C12 Arbres binaires

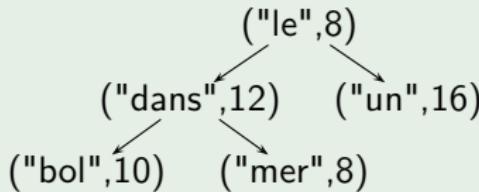
4. Arbres binaires de recherche

Implémentation des tableaux associatifs

- Si l'ensemble des clés est ordonné, on peut implémenter les tableaux associatifs en utilisant une famille d'arbres binaires équilibrés. Chaque noeud de l'arbre contient alors une information supplémentaire (sa valeur) en plus de la clé associée.
- Les opérations usuelles (insertion, test d'appartenance, ...) ont alors une complexité logarithmique.

Exemple

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10, "mer" : 8} est représenté par :



C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Suppression d'une clé dans un ABR

Pour supprimer une clé x dans un ABR A :

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Suppression d'une clé dans un ABR

Pour supprimer une clé x dans un ABR A :

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Suppression d'une clé dans un ABR

Pour supprimer une clé x dans un ABR A :

- Si A est vide, on renvoie A .

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Suppression d'une clé dans un ABR

Pour supprimer une clé x dans un ABR A :

- Si A est vide, on renvoie A .
- Sinon, en notant $A = (g, v, d)$:
 - si $x < v$ on supprime x de g .

4. Arbres binaires de recherche

Suppression d'une clé dans un ABR

Pour supprimer une clé x dans un ABR A :

- Si A est vide, on renvoie A .
- Sinon, en notant $A = (g, v, d)$:
 - si $x < v$ on supprime x de g .
 - Si $x > v$ on supprime x de d .

4. Arbres binaires de recherche

Suppression d'une clé dans un ABR

Pour supprimer une clé x dans un ABR A :

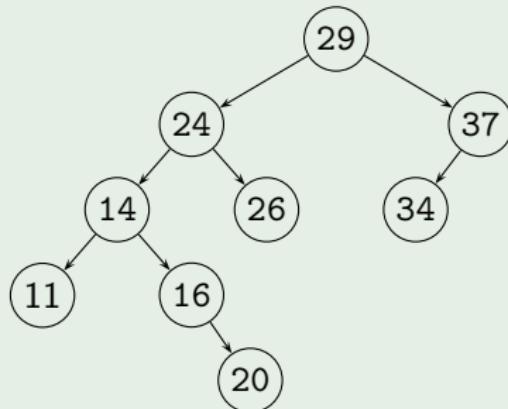
- Si A est vide, on renvoie A .
- Sinon, en notant $A = (g, v, d)$:
 - si $x < v$ on supprime x de g .
 - Si $x > v$ on supprime x de d .
 - Si $x = v$, dans le cas où g et d sont tous les deux vides on renvoie l'arbre vide.
Sinon, l'un au moins des deux arbres g ou d est non vide et on peut soit remplacer v par la clé minimale de d et on supprime cette clé de d soit remplacer v par la clé maximale de g et on supprime cette clé de g .

C12 Arbres binaires

4. Arbres binaires de recherche

Exemples

On considère l'arbre binaire de recherche suivant :



- Quel est l'arbre binaire obtenu si on supprime la clé 34 ?
- Même question pour la clé 16
- Même question pour la clé 14

Les implémentations (C ou OCaml) seront vus en TP.

5. Tas et files de priorité

Definition

Une file de priorité est une structure de données, dans laquelle :

5. Tas et files de priorité

Definition

Une file de priorité est une structure de données, dans laquelle :

- chaque élément enfilé possède une priorité.

Definition

Une file de priorité est une structure de données, dans laquelle :

- chaque élément enfilé possède une priorité.
- lorsqu'on défile un élément, on enlève l'élément le plus prioritaire (et donc pas forcément le premier enfilé comme dans une file classique).

Definition

Une file de priorité est une structure de données, dans laquelle :

- chaque élément enfilé possède une priorité.
- lorsqu'on défile un élément, on enlève l'élément le plus prioritaire (et donc pas forcément le premier enfilé comme dans une file classique).

Les applications de cette structure de données sont nombreuses en informatique, par exemple l'ordonnanceur (*scheduler*) d'un système d'exploitation ou encore comme ingrédient d'autres algorithmes.

5. Tas et files de priorité

Definition

Une file de priorité est une structure de données, dans laquelle :

- chaque élément enfilé possède une priorité.
- lorsqu'on défile un élément, on enlève l'élément le plus prioritaire (et donc pas forcément le premier enfilé comme dans une file classique).

Les applications de cette structure de données sont nombreuses en informatique, par exemple l'ordonnanceur (*scheduler*) d'un système d'exploitation ou encore comme ingrédient d'autres algorithmes.

Exercice

Déterminer les complexités des opérations enfiler et défiler si on implémente une file de priorité à l'aide d'une liste chainée.

Structure de tas

Soit t un arbre binaire dont les noeuds sont étiquetés par des éléments d'un ensemble ordonné.

Structure de tas

Soit t un arbre binaire dont les noeuds sont étiquetés par des éléments d'un ensemble ordonné.

- si l'étiquette d'un noeud est toujours inférieure à celle de ses enfants (lorsqu'ils existent), on dit que t possède la **propriété de tas-min**.

Structure de tas

Soit t un arbre binaire dont les noeuds sont étiquetés par des éléments d'un ensemble ordonné.

- si l'étiquette d'un noeud est toujours inférieure à celle de ses enfants (lorsqu'ils existent), on dit que t possède la **propriété de tas-min**.
- si de plus t est complet, on dit que t est un **tas-min binaire**.

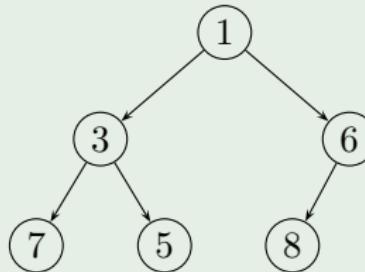
5. Tas et files de priorité

Structure de tas

Soit t un arbre binaire dont les noeuds sont étiquetés par des éléments d'un ensemble ordonné.

- si l'étiquette d'un noeud est toujours inférieure à celle de ses enfants (lorsqu'ils existent), on dit que t possède la **propriété de tas-min**.
- si de plus t est complet, on dit que t est un **tas-min binaire**.

Exemple



Remarques

- On parle de **tas-max** lorsque l'étiquette du noeud est toujours supérieure ou égale à celle de ses enfants.

5. Tas et files de priorité

Remarques

- On parle de **tas-max** lorsque l'étiquette du noeud est toujours supérieure ou égale à celle de ses enfants.
- Le terme anglais est *(binary) heap* (mais n'a rien à voir avec la zone mémoire dans laquelle on alloue à l'aide de `malloc`)

Remarques

- On parle de **tas-max** lorsque l'étiquette du noeud est toujours supérieure ou égale à celle de ses enfants.
- Le terme anglais est *(binary) heap* (mais n'a rien à voir avec la zone mémoire dans laquelle on alloue à l'aide de `malloc`)

Propriété

- La racine contient un élément de clé minimale

5. Tas et files de priorité

Remarques

- On parle de **tas-max** lorsque l'étiquette du noeud est toujours supérieure ou égale à celle de ses enfants.
- Le terme anglais est *(binary) heap* (mais n'a rien à voir avec la zone mémoire dans laquelle on alloue à l'aide de `malloc`)

Propriété

- La racine contient un élément de clé minimale
- Si a est un ancêtre de b alors l'étiquette de a est inférieure à celle de b .

5. Tas et files de priorité

Implémentation

Un tas binaire étant un arbre binaire complet, on peut utiliser la représentation des arbres binaires sous forme de tableau. On rappelle qu'alors :

5. Tas et files de priorité

Implémentation

Un tas binaire étant un arbre binaire complet, on peut utiliser la représentation des arbres binaires sous forme de tableau. On rappelle qu'alors :

- Le fils gauche (resp. droit) du noeud i se trouve à l'indice $2i + 1$ (resp. $2i + 2$)

5. Tas et files de priorité

Implémentation

Un tas binaire étant un arbre binaire complet, on peut utiliser la représentation des arbres binaires sous forme de tableau. On rappelle qu'alors :

- Le fils gauche (resp. droit) du noeud i se trouve à l'indice $2i + 1$ (resp. $2i + 2$)
- Le père du noeud d'indice i se trouve à l'indice $\left\lfloor \frac{i - 1}{2} \right\rfloor$.

5. Tas et files de priorité

Implémentation

Un tas binaire étant un arbre binaire complet, on peut utiliser la représentation des arbres binaires sous forme de tableau. On rappelle qu'alors :

- Le fils gauche (resp. droit) du noeud i se trouve à l'indice $2i + 1$ (resp. $2i + 2$)
- Le père du noeud d'indice i se trouve à l'indice $\left\lfloor \frac{i - 1}{2} \right\rfloor$.

Exemple

Donner la représentation sous forme de tableau du tas binaire donné en exemple

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation en C

Les opérations intéressantes faisant varier la taille du tas (insertion, extraction du minimum) on utilise un tableau de capacité fixée mais de taille variable :

```
1 struct heap_s
2 {
3     int size;
4     int capacity;
5     int *array;
6 };
7 typedef struct heap_s heap;
```

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation en OCaml

En OCaml, la capacité du tableau étant accessible (avec `Array.length`) on se contente de garder la taille effective utilisée dans un champ mutable

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation en OCaml

En OCaml, la capacité du tableau étant accessible (avec `Array.length`) on se contente de garder la taille effective utilisée dans un champ mutable

```
1 type 'a heap = {mutable size : int; data : 'a array};;
```

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation en OCaml

En OCaml, la capacité du tableau étant accessible (avec `Array.length`) on se contente de garder la taille effective utilisée dans un champ mutable

```
1 type 'a heap = {mutable size : int; data : 'a array};;
```

On remarque l'utilisation d'un type paramétrisé '`'a`' pour le type des éléments du tas. Ce type sera instancié dès la création du tas, par exemple :

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation en OCaml

En OCaml, la capacité du tableau étant accessible (avec `Array.length`) on se contente de garder la taille effective utilisée dans un champ mutable

```
1 type 'a heap = {mutable size : int; data : 'a array};;
```

On remarque l'utilisation d'un type paramétrisé '`'a`' pour le type des éléments du tas. Ce type sera instancié dès la création du tas, par exemple :

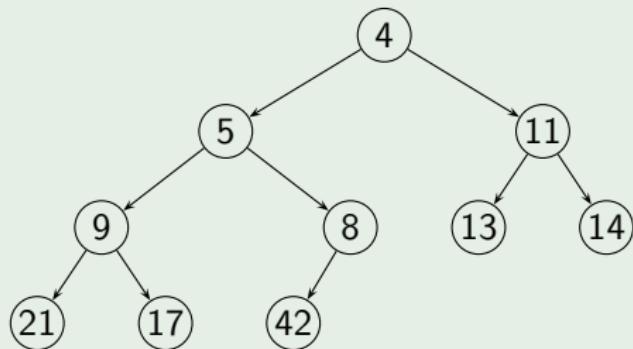
```
1 let heap_of_int = {size = 0; data = Array.make 1000 0}
2 let heap_of_char = {size = 0; data = Array.make 1000 ' '}
```

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Exemple

On considère l'arbre binaire suivant :

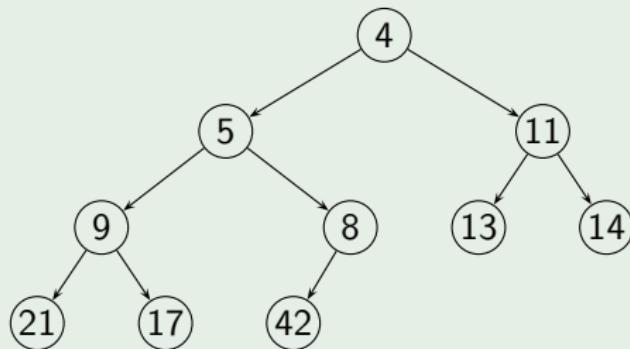


- ① Vérifier qu'il s'agit bien d'un tas binaire (min)

5. Tas et files de priorité

Exemple

On considère l'arbre binaire suivant :

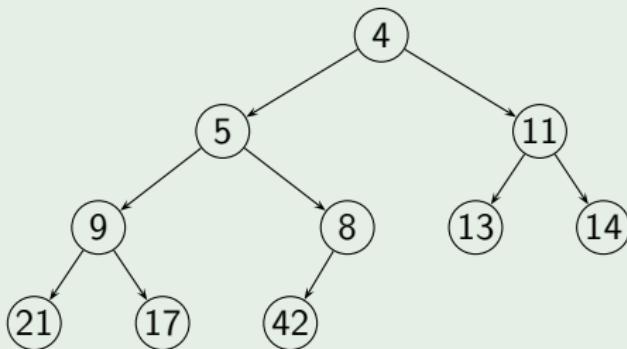


- ① Vérifier qu'il s'agit bien d'un tas binaire (min)
- ② Donner par deux méthodes différentes (un parcours en largeur et les formules donnant les indices des fils), le tableau représentant ce tas binaire,

5. Tas et files de priorité

Exemple

On considère l'arbre binaire suivant :



- ① Vérifier qu'il s'agit bien d'un tas binaire (min)
- ② Donner par deux méthodes différentes (un parcours en largeur et les formules donnant les indices des fils), le tableau représentant ce tas binaire,
- ③ Dessiner l'arbre correspondant au tableau [5; 7; 12; 9; 11; 10; 22; 31], est-ce un tas binaire ?

Insertion dans un tas binaire

Pour insérer une nouvelle valeur x dans un tas binaire, on écrit cette valeur dans la première case libre du tableau et on incrémente la taille du tas. Puis, on effectue une **percolation vers le haut** (*sift-up* en anglais) pour rétablir la propriété de tas si elle a été perdue.

Insertion dans un tas binaire

Pour insérer une nouvelle valeur x dans un tas binaire, on écrit cette valeur dans la première case libre du tableau et on incrémente la taille du tas. Puis, on effectue une **percolation vers le haut** (*sift-up* en anglais) pour rétablir la propriété de tas si elle a été perdue.

La percolation vers le haut, consiste à échanger l'élément inséré avec son père tant que ce dernier lui est supérieur (et qu'il existe).

Insertion dans un tas binaire

Pour insérer une nouvelle valeur x dans un tas binaire, on écrit cette valeur dans la première case libre du tableau et on incrémente la taille du tas. Puis, on effectue une **percolation vers le haut** (*sift-up* en anglais) pour rétablir la propriété de tas si elle a été perdue.

La percolation vers le haut, consiste à échanger l'élément inséré avec son père tant que ce dernier lui est supérieur (et qu'il existe).

Cet algorithme :

Insertion dans un tas binaire

Pour insérer une nouvelle valeur x dans un tas binaire, on écrit cette valeur dans la première case libre du tableau et on incrémente la taille du tas. Puis, on effectue une **percolation vers le haut** (*sift-up* en anglais) pour rétablir la propriété de tas si elle a été perdue.

La percolation vers le haut, consiste à échanger l'élément inséré avec son père tant que ce dernier lui est supérieur (et qu'il existe).

Cet algorithme :

- termine (x remonte d'un niveau à chaque étape).

5. Tas et files de priorité

Insertion dans un tas binaire

Pour insérer une nouvelle valeur x dans un tas binaire, on écrit cette valeur dans la première case libre du tableau et on incrémente la taille du tas. Puis, on effectue une **percolation vers le haut** (*sift-up* en anglais) pour rétablir la propriété de tas si elle a été perdue.

La percolation vers le haut, consiste à échanger l'élément inséré avec son père tant que ce dernier lui est supérieur (et qu'il existe).

Cet algorithme :

- termine (x remonte d'un niveau à chaque étape).
- est correct car l'invariant suivant est préservé : "*à tout moment, les deux seuls éléments pouvant entrer en conflit avec la propriété de tas sont x et son père*".

5. Tas et files de priorité

Insertion dans un tas binaire

Pour insérer une nouvelle valeur x dans un tas binaire, on écrit cette valeur dans la première case libre du tableau et on incrémente la taille du tas. Puis, on effectue une **percolation vers le haut** (*sift-up* en anglais) pour rétablir la propriété de tas si elle a été perdue.

La percolation vers le haut, consiste à échanger l'élément inséré avec son père tant que ce dernier lui est supérieur (et qu'il existe).

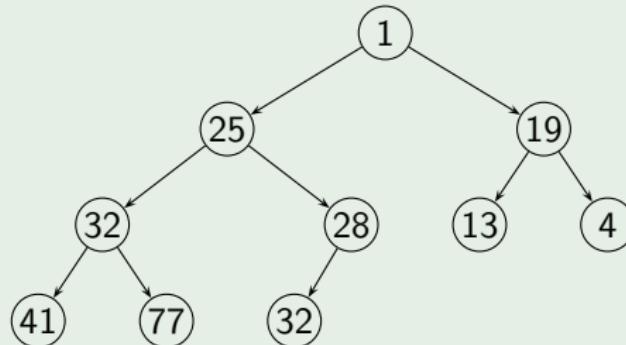
Cet algorithme :

- termine (x remonte d'un niveau à chaque étape).
- est correct car l'invariant suivant est préservé : "*à tout moment, les deux seuls éléments pouvant entrer en conflit avec la propriété de tas sont x et son père*".
- est de complexité $O(\log n)$.

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Exemple



Donner les étapes successives de l'insertion de 11 dans le tas ci-dessus

5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)

5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)
- On le remplace par le dernier élément du tableau et on diminue la taille du tas

5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

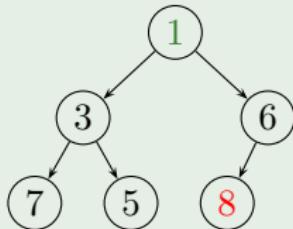
- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)
- On le remplace par le dernier élément du tableau et on diminue la taille du tas
- On effectue une **percolation vers le bas** de cet élément pour cela, on l'échange avec le plus petit de ses deux fils tant qu'il est supérieur à l'un des deux (et que les fils existent).

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)
- On le remplace par le dernier élément du tableau et on diminue la taille du tas
- On effectue une **percolation vers le bas** de cet élément pour cela, on l'échange avec le plus petit de ses deux fils tant qu'il est supérieur à l'un des deux (et que les fils existent).

Exemple



C12 Arbres binaires

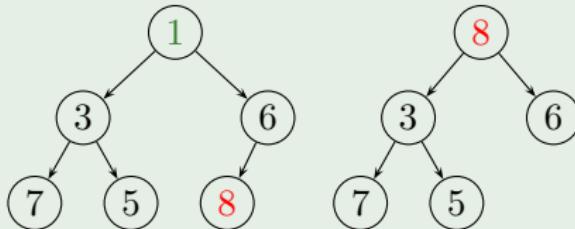
5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)
- On le remplace par le dernier élément du tableau et on diminue la taille du tas
- On effectue une **percolation vers le bas** de cet élément pour cela, on l'échange avec le plus petit de ses deux fils tant qu'il est supérieur à l'un des deux (et que les fils existent).

Exemple



C12 Arbres binaires

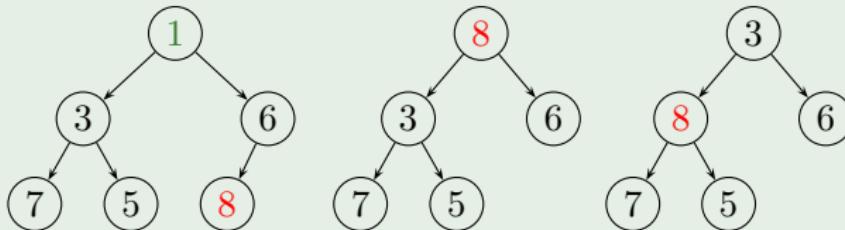
5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)
- On le remplace par le dernier élément du tableau et on diminue la taille du tas
- On effectue une **percolation vers le bas** de cet élément pour cela, on l'échange avec le plus petit de ses deux fils tant qu'il est supérieur à l'un des deux (et que les fils existent).

Exemple



C12 Arbres binaires

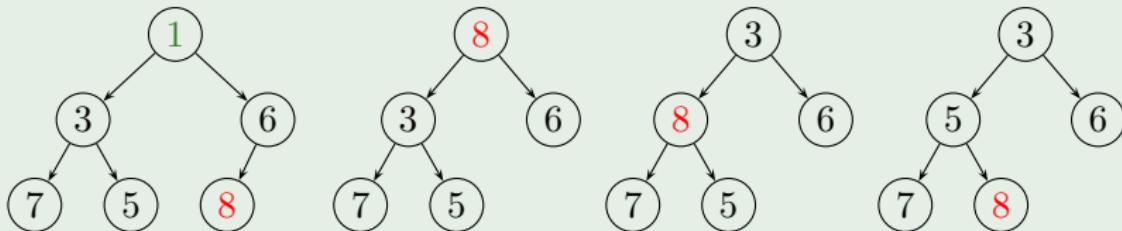
5. Tas et files de priorité

Extraction du minimum

Pour extraire le minimum d'un tas binaire :

- On extrait l'élément d'indice 0 du tableau (donc la racine du tas)
- On le remplace par le dernier élément du tableau et on diminue la taille du tas
- On effectue une **percolation vers le bas** de cet élément pour cela, on l'échange avec le plus petit de ses deux fils tant qu'il est supérieur à l'un des deux (et que les fils existent).

Exemple



C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation : percolation vers le haut en C

```
1  bool insert_heap(int nv, heap *mh)
2  {
3      int cp = mh->size;
4      if (mh->size == mh->capacity)
5      {
6          return false;
7      }
8      else
9      {
10         mh->array[cp] = nv;
11         while (father(cp) != -1 && mh->array[cp] < mh->array[father(cp)])
12         {
13             swap(mh->array, cp, father(cp));
14             cp = father(cp);
15         }
16         mh->size = mh->size + 1;
17         return true;
18     }
19 }
```

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Implémentation : percolation vers le bas en OCaml

```
1  let extract_min theap =
2    let minv = theap.data.(0) in
3    theap.data.(0) <- theap.data.(theap.size-1);
4    let cp = ref 0 in
5    let lc = ref (leftchild !cp theap.size) in
6    while ( !lc <> (-1) && (theap.data.(!lc) < theap.data.(!cp) || (!lc+1 <
7      theap.size && theap.data.(!lc+1) < theap.data.(!cp)))) do
8      if (!lc+1 >= theap.size || theap.data.(!lc)<theap.data.(!lc+1)) then
9        (swap theap.data !cp !lc;
10         cp := !lc)
11      else
12        (swap theap.data !cp (!lc+1);
13         cp := !lc+1);
14      lc := leftchild !cp theap.size;
15    done;
16    theap.size <- theap.size -1;
17    minv;;
```

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,
- on réalise ensuite n extractions du minimum.

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,
- on réalise ensuite n extractions du minimum.

Exercice

- ➊ Déterminer la complexité de cet algorithme de tri

C12 Arbres binaires

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,
- on réalise ensuite n extractions du minimum.

Exercice

- ➊ Déterminer la complexité de cet algorithme de tri
- ➋ En proposer une implémentation en C, en supposant déjà écrite les fonctions :

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,
- on réalise ensuite n extractions du minimum.

Exercice

- ➊ Déterminer la complexité de cet algorithme de tri
- ➋ En proposer une implémentation en C, en supposant déjà écrite les fonctions :
 - `heap make_heap(int c)` qui renvoie un tas vide de capacité c

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,
- on réalise ensuite n extractions du minimum.

Exercice

- ➊ Déterminer la complexité de cet algorithme de tri
- ➋ En proposer une implémentation en C, en supposant déjà écrite les fonctions :
 - `heap make_heap(int c)` qui renvoie un tas vide de capacité c
 - `bool insert_heap(int nv, heap* mh)` qui insère nv dans le tas mh

5. Tas et files de priorité

Tri par tas

A partir de la structure de tas, on obtient un algorithme de tri :

- on insère les n éléments à trier dans un tas initialement vide,
- on réalise ensuite n extractions du minimum.

Exercice

- ➊ Déterminer la complexité de cet algorithme de tri
- ➋ En proposer une implémentation en C, en supposant déjà écrite les fonctions :

- `heap make_heap(int c)` qui renvoie un tas vide de capacité c
- `bool insert_heap(int nv, heap* mh)` qui insère nv dans le tas $*mh$
- `int extract_min(heap * mh)` qui renvoie le minimum du tas $*mh$ en le supprimant de $*mh$