
On note :

- $F(n)$ le nombre d'opérations nécessaire pour fusionner deux listes déjà triées de taille n , on sait qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $F(n) \leq Kn$ car la fusion est de complexité linéaire.
- $C(n)$ le nombre d'opérations élémentaires pour trier avec le tri fusion une liste de n éléments.

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, C(n) \leq Kn \log_2(n)$

Initialisation : $C(1) = 0$ et $K \times 1 \times \log_2(1) = 0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $C(n) \leq Kn \log_2(n)$ montrons qu'alors $C(2n) \leq 2Kn \log_2(2n)$ Le tri fusion d'une liste de taille $2n$ demande celui de deux listes de taille n puis la fusion de ces deux listes, c'est à dire :

$$\begin{aligned} C(2n) &= 2C(n) + F(n) \\ C(2n) &\leq 2Kn \log_2(n) + F(n) \quad (\text{par HR}) \\ C(2n) &\leq 2Kn \log_2(n) + Kn \\ C(2n) &\leq 2Kn(\log_2(n) + 1) \\ C(2n) &\leq 2Kn \log_2(2n) \end{aligned}$$