

□ **Exercice 1** : *Intersection*

En OCaml, on représente une partie de \mathbb{N} par une liste *triée* d'entiers, par exemple [9; 15; 22; 28]

1. Ecrire une fonction `intersection : list -> list -> list` calculant l'intersection de deux parties (le résultat doit être trié).
2. Prouver la terminaison de `intersection`.

□ **Exercice 2** : *Correction*

1. Ecrire en C une fonction de signature `int somme(int tab[], int taille)` renvoyant la somme des éléments d'un tableau.
2. Prouver la correction de votre fonction.

□ **Exercice 3** : *Notation O*

1. Déterminer un O des suites de terme général :

a) $2023n^2$	b) $n^2 + 10^9n$	c) $3n + 7 \log n$
d) $2^{n+7} + n^{10}$	e) $\sqrt{19n^2 + 3}$	f) $\log(3n) + \log(n)$
2. Montrer que si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.
3. Montrer que $O(u_n) + O(v_n) = O(\max(u_n, v_n))$.
4. Montrer que si $u_n = O(a_n)$ et $v_n = O(b_n)$ alors $u_n v_n = O(a_n b_n)$.
5. Déterminer un O (le « meilleur » possible) des expressions suivantes :

a) $O(n^4) + O(n^2)$	b) $O(n^5) + O(n^5)$	b) $O(n^3) + O(\log(n))$
d) $O(n^4) \times O(n^3)$	e) $O(n^4) \times O(\sqrt{n})$	f) $O(n^2) \times O(\log n)$

□ **Exercice 4** : *multiplier en additionnant*

```

1  int mult(int n, int p){
2      int prod = 0;
3      while (p>0){
4          prod = prod + n;
5          p = p -1;}
6      return prod;}

```

1. En supposant $p > 0$ montrer la terminaison.
2. Prouver que cette fonction renvoie $p \times n$.
3. Déterminer sa complexité.

□ **Exercice 5** : *Vérification du tri*

1. Ecrire un algorithme permettant de vérifier qu'un tableau est trié par ordre croissant.
2. En proposer une implémentation en OCaml permettant de vérifier qu'une liste est triée.
3. Prouver que votre algorithme est correct.
4. Déterminer sa complexité.

□ **Exercice 6** : *exponentiation rapide*

On rappelle la fonction d'exponentiation rapide dans sa version récursive :

```

1  float expo(float a, int n){
2      float cp = a;
3      float res = 1;
4      while (n!=0){
5          if (n%2==1){
6              res = res*cp;}
7          cp = cp*cp;
8          n=n/2;}
9      return res;}

```

1. Prouver que cet algorithme termine.
2. Prouver qu'il est correct.
 ⊗ En notant n_0 la valeur initiale de n , on pourra considérer l'invariant suivant : $\text{res} * \text{cp}^n = a^{n_0}$
3. Donner sa complexité.

□ **Exercice 7** : retour sur la multiplication

On donne la fonction suivante :

```

1  int multiplie(int n, int p){
2      int prod = 0;
3      while (n>0){
4          if (n%2==1) {
5              prod = prod+p;}
6          n= n / 2;
7          p = p*2;}
8      return prod;}

```

1. Vérifier à la main, sur deux entiers naturels de votre choix que cette fonction est conforme à sa spécification.
2. Montrer la terminaison de cette fonction
3. Montrer que cette fonction est bien conforme à sa spécification.

□ **Exercice 8** : tri à bulles

1. Rappeler le principe du tri à bulles.
2. En écrire une implémentation en C, dans laquelle on vérifie à chaque passage qu'au moins une inversion a été effectuée. Si tel n'est pas le cas on termine immédiatement l'algorithme puisque cela signifie que les éléments sont triés.
3. Montrer la terminaison de cette fonction
4. Prouver qu'elle est correcte.
 ⊗ On pourra exhiber un invariant qui donne le nombre d'éléments figurants à leur place finale après chaque itération.

□ **Exercice 9** : Recherche dichotomique

Algorithme : Recherche dichotomique

Entrées : $a \in \mathbb{N}$ et un tableau d'entiers t trié de longueur n

Sorties : Booléen indiquant si $a \in t$.

```

1  d ← 0
2  f ← n - 1
3  tant que f - d ≥ 0 faire
4      m ← (f + d)/2
5      si t[m] = a alors
6          | return Vrai
7      fin
8      si a < t[m] alors
9          | f ← m - 1
10     fin
11     sinon
12         | d ← m + 1
13     fin
14 fin
15 return Faux

```

1. Etudier la terminaison de cet algorithme.
2. Prouver que cet algorithme est totalement correct.
3. Déterminer sa complexité.

□ **Exercice 10** : nombre de chiffres d'un entier

1. Ecrire en C, une version itérative d'une fonction donnant le nombre de chiffres d'un entier naturel.

2. Ecrire une version récursive en OCaml.
3. Prouver la terminaison dans les deux cas.
4. Prouver la correction dans les deux cas.

□ **Exercice 11** : *majorité absolue*

On considère les résultats d'un vote sous la forme d'un tableau d'entier positifs, lorsqu'on rencontre la valeur i cela signifie que la candidat numéro i a obtenu un vote. Par exemple si le tableau contient les valeurs $[2, 3, 1, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 2]$, alors le candidat 1 a obtenu 3 voix, le candidat 2 a obtenu 5 voix, On cherche à déterminer un algorithme efficace permettant de déterminer (s'il existe) le candidat ayant obtenu la majorité absolue. Dans le cas où aucun candidat n'a la majorité absolue alors l'algorithme doit renvoyer -1. On note C le nombre de candidats et N le nombre de votes.

1. Proposer un algorithme permettant de résoudre ce problème et donner sa complexité

On donne ci-dessous le **début** de l'implémentation en C d'un algorithme proposé par R. Boyer et S. Moore :

```

1  int majorite_absolue(int vote[], int size){
2      int nb_votes = 0;
3      int candidat = 0;
4      for (int i = 0; i < size; i++){
5          if (nb_votes == 0){
6              candidat = vote[i];
7              nb_votes = 1;}
8          else{
9              if (vote[i] == candidat){
10                 nb_votes += 1;}
11             else{
12                 nb_votes -= 1;}
13         }
14     }

```

2. Prouver qu'à la fin de la boucle **for**, la variable **candidat** contient le numéro du seul candidat éventuellement majoritaire
3. Compléter l'implémentation en ajoutant les lignes permettant de vérifier après la boucle **for** que ce candidat est effectivement majoritaire
4. Donner la complexité de cet algorithme.

□ **Exercice 12** : *Fonction 91*

La fonction 91, noté f_{91} due à l'informaticien J. McCarthy est définie sur \mathbb{N} par :

$$f_{91}(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100, \\ f_{91}(f_{91}(n + 11)) & \text{si } n \leq 100. \end{cases}$$

1. Calculer $f_{91}(101)$, $f_{91}(200)$, $f_{91}(2025)$
2. Ecrire une fonction **f91** en OCaml permettant de calculer cette fonction.
3. Montrer que si $n \in \llbracket 90; 100 \rrbracket$ alors $f(n) = f(n + 1)$. En déduire la valeur de f sur $\llbracket 90; 100 \rrbracket$.
4. Prouver pour tout $n \in \llbracket 0; 101 \rrbracket$, cette fonction termine et vaut 91. On pourra considérer l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $90 \leq n + 11p \leq 100$.