Interro de cours n° 4 MP2I – **Relations d'ordre**

Nom :	Note : ..... / 10
Prénom :	

❑ **Exercice 1** : *Caractérisation des ordres bien fondés*

1. Rappeler la définition d'un ordre bien bien fondé.

   On dit que relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble E est bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'elements de E.

2. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, prouver qu'un $\preccurlyeq$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de $(E, \preccurlyeq)$ admet un élément minimal

   Sens direct :
   Si $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné où $\preccurlyeq$ est bien fondée et A une partie non vide de E. On suppose que A n'admet pas d'élément minimal, et on considère l'application $f : A \mapsto A$ qui a tout élément de $a \in A$ associe $f(a)$ tel que $f(a) \preccurlyeq a$, cela est possible puisque A n'a pas d'élément minimal. On considère alors la suite $(x_n)_{n \in N}$ définie par : $x_0 = a$ et $x_n = f^n(a)$. Par construction cette suite est strictement décroissante ce qui est impossible puisque $(E, \preccurlyeq)$ est bien fondé.

   Sens réciproque :
   On suppose que toute partie non vide de E admet un élément minimal, montrons par l'absurde qu'il ne peut pas exister de suite strictement décroissante d'elements de E, soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de E strictement décroissante, l'ensemble des valeurs prises par cette suite $A = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ admet un élément minimal donc il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que x_m soit un élément minimal de A, or comme (x_n) est strictement décroissante x_{m+1} est un élément de A strictement inférieur à x_m, on aboutit à une contradiction.

❑ **Exercice 2** : *Terminaison d'une fonction*

1. Ecrire en OCaml la fonction `fusion int list -> int list -> int list` qui prend en argument deux listes d'entiers triées et renvoie leur fusion triée. Par exemple `fusion [1; 4; 7; 9; 10] [2; 3; 8; 15]` renvoie `[1; 2; 3; 4; 7; 8; 9; 10; 15]`

```ocaml
let rec fusion l1 l2 =
  match l1,l2 with
   | [], l2 -> l2
   | l1, [] -> l1
   | h1::t1, h2::t2 -> if h1<h2 then h1::fusion t1 l2 else h2::fusion l1 t2;;
```

2. En utilisant un variant sur $(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq_p)$ où $\preccurlyeq_P$ désigne l'ordre produit sur $\mathbb{N}^2$, prouver la terminaison de cette fonction

   On note n_1 (resp. n_2) la longueur de `l1` (resp. `l2`), et n_1', n_2' ces mêmes longueurs après un appel récursif. Alors :

   — Soit $n_1' = n1 - 1$ et $n_2' = n_2$

   — Soit $n_1' = n1$ et $n_2' = n_2 - 1$

   Dans les deux cas $(n_1', n_2') \preccurlyeq_P (n_1, n_2)$, l'ordre produit sur $\mathbb{N}^2$ étant bien fondé, la fonction termine car il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de $(N^2, \preccurlyeq)$.