Table des matières

1 Index thématique **3**

2 (CCINP) Arbres Binaires de Recherche * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 77 lignes) **15**

3 (CCINP) Déduction naturelle * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 160 lignes) **17**

4 (CCINP) ID3 * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 177 lignes) **19**

5 (CCINP) Langages réguliers * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 120 lignes) **21**

6 (CCINP) Mutex * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 110 lignes) **23**

7 (CCINP) SQL * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 95 lignes) **25**

8 (CCINP) Arbres * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 247 lignes) **27**

9 (CCINP) Graphes * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 144 lignes) **31**

10 (CCINP) SAT * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 148 lignes) **35**

11 (CCINP) Sac à dos * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 178 lignes) **39**

12 (CCINP) Tableaux * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 149 lignes) **43**

13 (CCINP) Tableaux autoréférents * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 195 lignes) **47**

14 (CCINP) Activation de processus * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 156 lignes) **51**

15 (CCINP) Formules propositionnelles croissantes * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 142 lignes) **55**

16 (CCINP) Grammaires algébriques * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 123 lignes) **59**

17 (CCINP) Minima locaux dans des arbres (Couverture dans des arbres) * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 148 lignes) **61**

18 (CCINP) Langages locaux * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 215 lignes) **63**

19 (CCINP) Programmation dynamique pour la récolte de fleurs * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 204 lignes) **67**

20 (CCINP) calculs avec les flottants * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 207 lignes) **71**

21 (CCINP) chemins simples sans issue * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 199 lignes) **75**

22 (CCINP) Grammaires pour des langages de programmation * (CCINP 24, ex A, corrigé, à débugguer — oral - 90 lignes) **79**

23 (CCINP) chomp * (CCINP 24, ex A, corrigé — oral - 228 lignes) **81**

24 (CCINP) relation d'équivalence * (CCINP 24, ex A, corrigé — oral - 139 lignes) **85**

25 (CCINP) Fonctions pour la détection de motifs * (CCINP 24, ex B, corrigé — oral - 130 lignes) **87**

26 (CCINP) HORNSAT * (CCINP 24, ex B, corrigé — oral - 186 lignes) **89**

27 (CCINP) Mots de Dyck * (CCINP 24, ex B, corrigé — oral - 157 lignes) **93**

28 (ENS) Jeu des jetons * (ENS 23 MP, corrigé — oral - 153 lignes)** **97**

29 (ENS) Monoïdes et Langages * (ENS 23 MP, corrigé — oral - 238 lignes) 101**

30 (ENS) Élimination des coupures dans MLL et MALL * (ENS 23, corrigé partiellement — oral - 385 lignes) 105**

31 (ENS) Graphes parfaits * (ENS 23, corrigé — oral - 251 lignes) 111**

32 (ENS) Inférence de type * (ENS 23, corrigé — oral - 280 lignes) 115**

33 (ENS) Ordonnancement * (ENS 23, corrigé — oral - 201 lignes) 119**

34 (ENS) Permutations triables par pile * (ENS 23, corrigé — oral - 184 lignes) 123**

35 (ENS) Raisonnements ensemblistes * (ENS 23, corrigé — oral - 234 lignes) 127**

36 (ENS) Théorème des amis * (ENS 23, corrigé — oral - 202 lignes) 131**

37 (ENS) Structures pliables et traversables * (ENS 23, partiellement corrigé — oral - 306 lignes) 137**

38 (ENS) Composition Monadique * (ENS 24, corrigé très partiellement — oral - 191 lignes) 141**

39 (ENS) Déduction de messages * (ENS 24, corrigé — oral - 232 lignes) 145**

40 (ENS) Filtrage par motif en OCaml * (ENS 24, corrigé — oral - 323 lignes) 149**

41 (ENS) Implémentation des circuits réversibles * (ENS 24, corrigé — oral - 218 lignes) 153**

42 (ENS) Résolution d'inéquations linéaires * (ENS 24, corrigé — oral - 195 lignes) 157**

43 (ENS) Mots partiels et Théorème de Dilworth * (ENS 24, partiellement corrigé, niveau inapproprié, à débugguer — oral - 184 lignes) 161**

44 (ENS) Terminaison de lambda ref * (ENS 24, partiellement corrigé, niveau surréaliste — oral - 238 lignes) 165**

45 (MT) Déduction Naturelle * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 200 lignes) 169

46 (MT) Relations entre les nombres de sommets et d'arêtes de grphes * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 102 lignes) 173

47 (MT) bdd pour livraison * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 78 lignes) 175

48 (MT) couplages * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 64 lignes) 177

49 (MT) logique, cours * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 100 lignes) 179

50 (MT) Arbres Binaires de Recherche * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 159 lignes) 181

51 (MT) entrelacements de mots * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 109 lignes) 185

52 (MT) graphes * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 121 lignes) 187

53 (MT) montée et descente d'un bus * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 104 lignes) 189

54 (MT) subset-sum * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 143 lignes) 193

55 (MT) Classification hiérarchique ascendante * (MT 24, ex 1, corrigé, le graphique n'est pas l'original — oral - 44 lignes) 197

56 (MT) Graphes bipartis * (MT 24, ex 1, corrigé — oral - 88 lignes) 199

57 (MT) Tas binaires * (MT 24, ex 1, corrigé — oral - 129 lignes) 201

58 (MT) logique * (MT 24, ex 1, corrigé — oral - 141 lignes) 203

59 (MT) Automates de Büchi * (MT 24, ex 2, corrigé, (1 question ajoutée) — oral - 117 lignes) 205**

60 (MT) Automates, langages à saut * (MT 24, ex 2, corrigé, complété au jugé pour les dernières questions — oral - 85 lignes) 207

61 (MT) plus courts chemins dans des graphes * (MT 24, ex 2, corrigé, retour d'oral — oral - 117 lignes) 209

62 (MT) Décidabilité de programmes engendrés par une grammaire * (MT 24, ex 2, corrigé — oral - 127 lignes) 211

63 (X) Algorithme Union-Find * (X 23, corrigé — oral - 151 lignes) 213**

64 (X) Bob l'écureuil * (X 23, corrigé — oral - 141 lignes) 217**

65 (X) Langages rationnels et lemme de l'étoile * (X 23, corrigé — oral - 118 lignes) 221**

66 (X) Rationnalité de langages * (X 24, corrigé, complété au jugé pour les trois dernières questions — oral - 213 lignes) 225**

67 (X) Algorithme du tri lent * (X 24, corrigé — oral - 147 lignes) 229**

68 (X) Codage par couleur * (X 24, corrigé — oral - 154 lignes) 235**

Chapitre 1

Index thématique

Algorithmes d'approximation

- 53-subset-sum (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 143 lignes) *
  complexité, algorithmes d'approximation, algorithmes gloutons
  VOIR

Algorithmes gloutons

- 10-Sac à dos (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 178 lignes) *
  algorithmique, c, algorithmes gloutons, backtracking, branch and bound
  VOIR

- 53-subset-sum (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 143 lignes) *
  complexité, algorithmes d'approximation, algorithmes gloutons
  VOIR

Algorithmes probabilistes

- 9-SAT (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 148 lignes) *
  logique propositionnelle, algorithmes probabilistes
  VOIR

Algorithmique

- 10-Sac à dos (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 178 lignes) *
  algorithmique, c, algorithmes gloutons, backtracking, branch and bound
  VOIR

- 11-Tableaux (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 149 lignes) *
  algorithmique, c
  VOIR

- 12-Tableaux autoréférents (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 195 lignes) *
  algorithmique, backtracking, ocaml
  VOIR

- 23-relation d'équivalence (CCINP 24, ex A, **corrigé** — oral - 139 lignes) *
  algorithmique, graphes
  VOIR

- 31-Inférence de type (ENS 23, **corrigé** — oral - 280 lignes) ***
  algorithmique, langages fonctionnels, pseudocode
  VOIR

- 32-Ordonnancement (ENS 23, **corrigé** — oral - 201 lignes) ***

algorithmique, complexité
VOIR

- 33-Permutations triables par pile (ENS 23, **corrigé** — oral - 184 lignes) ***
  algorithmique, graphes, complexité
  VOIR

- 41-Résolution d'inéquations linéaires (ENS 24, **corrigé** — oral - 195 lignes) ***
  ocaml, algorithmique, complexité
  VOIR

- 62-Algorithme Union-Find (X 23, **corrigé** — oral - 151 lignes) ***
  algorithmique, complexité, structures de données
  VOIR

- 63-Bob l'écureuil (X 23, **corrigé** — oral - 141 lignes) ***
  algorithmique
  VOIR

- 66-Algorithme du tri lent (X 24, **corrigé** — oral - 147 lignes) ***
  algorithmique, tri, complexité, preuve
  VOIR

- 67-Codage par couleur (X 24, **corrigé** — oral - 154 lignes) ***
  algorithmique, complexité, graphes, backtracking
  VOIR

Arbres

- 1-Arbres Binaires de Recherche (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 77 lignes) *
  arbres, complexité
  VOIR

- 7-Arbres (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 247 lignes) *
  arbres, ocaml
  VOIR

- 16-Minima locaux dans des arbres (Couverture dans des arbres) (CCINP 23, ex A, **corrigé** — oral - 148 lignes) *
  arbres, complexité
  VOIR

- 49-Arbres Binaires de Recherche (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 159 lignes) *
  arbres, complexité, programmation dynamique
  VOIR

- 56-Tas binaires (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 129 lignes) *
  arbres, tri, structures de données, cours, complexité
  VOIR

Automates

- 4-Langages réguliers (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 120 lignes) *
  langages,Automates
  VOIR

- 17-Langages locaux (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 215 lignes) *
  langages, ocaml, automates
  VOIR

- 50-entrelacements de mots (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 109 lignes) *
  langages, automates, programmation dynamique
  VOIR

- 58-Automates de Büchi (MT 24, ex 2, **corrigé**, (1 question ajoutée) — oral - 117 lignes) ***
  langages, automates
  VOIR

- 59-Automates, langages à saut (MT 24, ex 2, **corrigé**, complété au jugé pour les dernières questions — oral - 85 lignes) *
  langages, automates
  VOIR

Backtracking

- 10-Sac à dos (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 178 lignes) *
  algorithmique, c, algorithmes gloutons, backtracking, branch and bound
  VOIR

- 12-Tableaux autoréférents (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 195 lignes) *
  algorithmique, backtracking, ocaml
  VOIR

- 20-chemins simples sans issue (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 199 lignes) *
  graphes, ocaml, complexité, backtracking
  VOIR

- 67-Codage par couleur (X 24, **corrigé** — oral - 154 lignes) ***
  algorithmique, complexité, graphes, backtracking
  VOIR

Branch and bound

- 10-Sac à dos (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 178 lignes) *
  algorithmique, c, algorithmes gloutons, backtracking, branch and bound
  VOIR

C

- 10-Sac à dos (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 178 lignes) *
  algorithmique, c, algorithmes gloutons, backtracking, branch and bound
  VOIR

- 11-Tableaux (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 149 lignes) *
  algorithmique, c
  VOIR

- 18-Programmation dynamique pour la récolte de fleurs (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 204 lignes) *
  programmation dynamique, c
  VOIR

- 19-calculs avec les flottants (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 207 lignes) *
  représentation des nombres, c
  VOIR

- 26-Mots de Dyck (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 157 lignes) *
  langages, c, complexité
  VOIR

- 61-Décidabilité de programmes engendrés par une grammaire (MT 24, ex 2, **corrigé** — oral - 127 lignes) *
  grammaire, décidabilité, c, logique propositionnelle
  VOIR

Circuits

- 40-Implémentation des circuits réversibles (ENS 24, **corrigé** — oral - 218 lignes) ***
  circuits
  VOIR

Classification hiérarchique ascendante

- 54-Classification hiérarchique ascendante (MT 24, ex 1, **corrigé**, le graphique n'est pas l'original — oral - 44 lignes) *
  ia, classification hiérarchique ascendante, cours
  VOIR

Complexité

- 1-Arbres Binaires de Recherche (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 77 lignes) *
  arbres, complexité
  VOIR

- 13-Activation de processus (CCINP 23, ex A, **corrigé** — oral - 156 lignes) *
  complexité, réduction
  VOIR

- 16-Minima locaux dans des arbres (Couverture dans des arbres) (CCINP 23, ex A, **corrigé** — oral - 148 lignes) *
  arbres, complexité
  VOIR

- 20-chemins simples sans issue (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 199 lignes) *
  graphes, ocaml, complexité, backtracking
  VOIR

- 25-HORNSAT (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 186 lignes) *
  logique propositionnelle, complexité, réduction
  VOIR

- 26-Mots de Dyck (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 157 lignes) *
  langages, c, complexité
  VOIR

- 32-Ordonnancement (ENS 23, **corrigé** — oral - 201 lignes) ***
  algorithmique, complexité
  VOIR

- 33-Permutations triables par pile (ENS 23, **corrigé** — oral - 184 lignes) ***
  algorithmique, graphes, complexité
  VOIR

- 41-Résolution d'inéquations linéaires (ENS 24, **corrigé** — oral - 195 lignes) ***
  ocaml, algorithmique, complexité
  VOIR

- 49-Arbres Binaires de Recherche (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 159 lignes) *
  arbres, complexité, programmation dynamique
  VOIR

- 53-subset-sum (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 143 lignes) *
  complexité, algorithmes d'approximation, algorithmes gloutons
  VOIR

- 55-Graphes bipartis (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 88 lignes) *
  graphes, logique propositionnelle, parcours de graphes, complexité
  VOIR

- 56-Tas binaires (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 129 lignes) *
  arbres, tri, structures de données, cours, complexité
  VOIR

- 60-plus courts chemins dans des graphes (MT 24, ex 2, **corrigé**, retour d'oral — oral - 117 lignes) *
  graphes, complexité, programmation dynamique
  VOIR

- 62-Algorithme Union-Find (X 23, **corrigé** — oral - 151 lignes) ***
  algorithmique, complexité, structures de données
  VOIR

- 66-Algorithme du tri lent (X 24, **corrigé** — oral - 147 lignes) ***
  algorithmique, tri, complexité, preuve
  VOIR

- 67-Codage par couleur (X 24, **corrigé** — oral - 154 lignes) ***
  algorithmique, complexité, graphes, backtracking
  VOIR

Concurrence

- 5-Mutex (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 110 lignes) *
  concurrence, ocaml
  VOIR

- 52-montée et descente d'un bus (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 104 lignes) *
  concurrence
  VOIR

Cours

- 54-Classification hiérarchique ascendante (MT 24, ex 1, **corrigé**, le graphique n'est pas l'original — oral - 44 lignes) *
  ia, classification hiérarchique ascendante, cours
  VOIR

- 56-Tas binaires (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 129 lignes) *
  arbres, tri, structures de données, cours, complexité
  VOIR

Décidabilité

- 61-Décidabilité de programmes engendrés par une grammaire (MT 24, ex 2, **corrigé** — oral - 127 lignes) *
  grammaire, décidabilité, c, logique propositionnelle
  VOIR

Déduction naturelle

- 2-Déduction naturelle (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 160 lignes) *
  déduction naturelle
  VOIR

- 38-Déduction de messages (ENS 24, **corrigé** — oral - 232 lignes) ***
  déduction naturelle, réduction
  VOIR

- 44-Déduction Naturelle (MT 0, ex 1, **corrigé** — oral - 200 lignes) *

déduction naturelle
VOIR

Grammaire

- 61-Décidabilité de programmes engendrés par une grammaire (MT 24, ex 2, **corrigé** — oral - 127 lignes) *
  grammaire, décidabilité, c, logique propositionnelle
  VOIR

Grammaires

- 15-Grammaires algébriques (CCINP 23, ex A, **corrigé** — oral - 123 lignes) *
  grammaires
  VOIR

- 21-Grammaires pour des langages de programmation (CCINP 24, ex A, **corrigé**, **à débugguer** — oral - 90 lignes) *
  grammaires, langages
  VOIR

Graphes

- 8-Graphes (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 144 lignes) *
  graphes
  VOIR

- 20-chemins simples sans issue (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 199 lignes) *
  graphes, ocaml, complexité, backtracking
  VOIR

- 23-relation d'équivalence (CCINP 24, ex A, **corrigé** — oral - 139 lignes) *
  algorithmique, graphes
  VOIR

- 27-Jeu des jetons (ENS 23 MP, **corrigé** — oral - 153 lignes) ***
  jeux, graphes
  VOIR

- 30-Graphes parfaits (ENS 23, **corrigé** — oral - 251 lignes) ***
  graphes
  VOIR

- 33-Permutations triables par pile (ENS 23, **corrigé** — oral - 184 lignes) ***
  algorithmique, graphes, complexité
  VOIR

- 34-Raisonnements ensemblistes (ENS 23, **corrigé** — oral - 234 lignes) ***
  graphes, logique
  VOIR

- 35-Théorème des amis (ENS 23, **corrigé** — oral - 202 lignes) ***
  graphes
  VOIR

- 42-Mots partiels et Théorème de Dilworth (ENS 24, partiellement **corrigé**, niveau inapproprié, **à débugguer** — oral - 184 lignes) ***
  graphes, réduction, langages
  VOIR

- 45-Relations entre les nombres de sommets et d'arêtes de grphes (MT 0, ex 1, **corrigé** — oral - 102 lignes) *

graphes
VOIR

- 47-couplages (MT 0, ex 1, **corrigé** — oral - 64 lignes) *
  graphes
  VOIR

- 51-graphes (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 121 lignes) *
  graphes
  VOIR

- 55-Graphes bipartis (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 88 lignes) *
  graphes, logique propositionnelle, parcours de graphes, complexité
  VOIR

- 60-plus courts chemins dans des graphes (MT 24, ex 2, **corrigé**, retour d'oral — oral - 117 lignes) *
  graphes, complexité, programmation dynamique
  VOIR

- 67-Codage par couleur (X 24, **corrigé** — oral - 154 lignes) ***
  algorithmique, complexité, graphes, backtracking
  VOIR

Ia

- 3-ID3 (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 177 lignes) *
  ia
  VOIR

- 54-Classification hiérarchique ascendante (MT 24, ex 1, **corrigé**, le graphique n'est pas l'original — oral - 44 lignes) *
  ia, classification hiérarchique ascendante, cours
  VOIR

Jeux

- 22-chomp (CCINP 24, ex A, **corrigé** — oral - 228 lignes) *
  jeux
  VOIR

- 27-Jeu des jetons (ENS 23 MP, **corrigé** — oral - 153 lignes) ***
  jeux, graphes
  VOIR

Langages

- 4-Langages réguliers (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 120 lignes) *
  langages,Automates
  VOIR

- 17-Langages locaux (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 215 lignes) *
  langages, ocaml, automates
  VOIR

- 21-Grammaires pour des langages de programmation (CCINP 24, ex A, **corrigé**, **à débugguer** — oral - 90 lignes) *
  grammaires, langages
  VOIR

- 24-Fonctions pour la détection de motifs (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 130 lignes) *
  langages, ocaml
  VOIR

- 26-Mots de Dyck (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 157 lignes) *
  langages, c, complexité
  VOIR

- 28-Monoïdes et Langages (ENS 23 MP, **corrigé** — oral - 238 lignes) ***
  langages
  VOIR

- 42-Mots partiels et Théorème de Dilworth (ENS 24, partiellement **corrigé**, niveau inapproprié, **à débugguer** — oral - 184 lignes) ***
  graphes, réduction, langages
  VOIR

- 50-entrelacements de mots (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 109 lignes) *
  langages, automates, programmation dynamique
  VOIR

- 58-Automates de Büchi (MT 24, ex 2, **corrigé**, (1 question ajoutée) — oral - 117 lignes) ***
  langages, automates
  VOIR

- 59-Automates, langages à saut (MT 24, ex 2, **corrigé**, complété au jugé pour les dernières questions — oral - 85 lignes) *
  langages, automates
  VOIR

- 64-Langages rationnels et lemme de l'étoile (X 23, **corrigé** — oral - 118 lignes) ***
  langages
  VOIR

- 65-Rationnalité de langages (X 24, **corrigé**, complété au jugé pour les trois dernières questions — oral - 213 lignes) ***
  langages, lemme de l'étoile
  VOIR

Langages fonctionnels

- 31-Inférence de type (ENS 23, **corrigé** — oral - 280 lignes) ***
  algorithmique, langages fonctionnels, pseudocode
  VOIR

Lemme de l'étoile

- 65-Rationnalité de langages (X 24, **corrigé**, complété au jugé pour les trois dernières questions — oral - 213 lignes) ***
  langages, lemme de l'étoile
  VOIR

Logique

- 34-Raisonnements ensemblistes (ENS 23, **corrigé** — oral - 234 lignes) ***
  graphes, logique
  VOIR

Logique propositionnelle

- 9-SAT (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 148 lignes) *
  logique propositionnelle, algorithmes probabilistes
  VOIR

- 14-Formules propositionnelles croissantes (CCINP 23, ex A, **corrigé** — oral - 142 lignes) *
  logique propositionnelle
  VOIR

- 25-HORNSAT (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 186 lignes) *
  logique propositionnelle, complexité, réduction
  VOIR

- 29-Élimination des coupures dans MLL et MALL (ENS 23, **corrigé** partiellement — oral - 385 lignes) ***
  logique propositionnelle
  VOIR

- 48-logique, cours (MT 0, ex 1, **corrigé** — oral - 100 lignes) *
  logique propositionnelle
  VOIR

- 55-Graphes bipartis (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 88 lignes) *
  graphes, logique propositionnelle, parcours de graphes, complexité
  VOIR

- 57-logique (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 141 lignes) *
  logique propositionnelle
  VOIR

- 61-Décidabilité de programmes engendrés par une grammaire (MT 24, ex 2, **corrigé** — oral - 127 lignes) *
  grammaire, décidabilité, c, logique propositionnelle
  VOIR

Ocaml

- 5-Mutex (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 110 lignes) *
  concurrence, ocaml
  VOIR

- 7-Arbres (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 247 lignes) *
  arbres, ocaml
  VOIR

- 12-Tableaux autoréférents (CCINP 0, ex B, **corrigé** — oral - 195 lignes) *
  algorithmique, backtracking, ocaml
  VOIR

- 17-Langages locaux (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 215 lignes) *
  langages, ocaml, automates
  VOIR

- 20-chemins simples sans issue (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 199 lignes) *
  graphes, ocaml, complexité, backtracking
  VOIR

- 24-Fonctions pour la détection de motifs (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 130 lignes) *
  langages, ocaml
  VOIR

- 36-Structures pliables et traversables (ENS 23, partiellement **corrigé** — oral - 306 lignes) ***
  ocaml, programmation fonctionnelle
  VOIR

- 37-Composition Monadique (ENS 24, **corrigé** très partiellement — oral - 191 lignes) ***
  ocaml, programmation fonctionnelle
  VOIR

- 39-Filtrage par motif en OCaml (ENS 24, **corrigé** — oral - 323 lignes) ***
  ocaml

VOIR

- 41-Résolution d'inéquations linéaires (ENS 24, **corrigé** — oral - 195 lignes) ***
  ocaml, algorithmique, complexité
  VOIR

- 43-Terminaison de lambda ref (ENS 24, partiellement **corrigé**, niveau surréaliste — oral - 238 lignes) ***
  ocaml
  VOIR

Parcours de graphes

- 55-Graphes bipartis (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 88 lignes) *
  graphes, logique propositionnelle, parcours de graphes, complexité
  VOIR

Preuve

- 66-Algorithme du tri lent (X 24, **corrigé** — oral - 147 lignes) ***
  algorithmique, tri, complexité, preuve
  VOIR

Programmation dynamique

- 18-Programmation dynamique pour la récolte de fleurs (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 204 lignes) *
  programmation dynamique, c
  VOIR

- 49-Arbres Binaires de Recherche (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 159 lignes) *
  arbres, complexité, programmation dynamique
  VOIR

- 50-entrelacements de mots (MT 0, ex 2, **corrigé** — oral - 109 lignes) *
  langages, automates, programmation dynamique
  VOIR

- 60-plus courts chemins dans des graphes (MT 24, ex 2, **corrigé**, retour d'oral — oral - 117 lignes) *
  graphes, complexité, programmation dynamique
  VOIR

Programmation fonctionnelle

- 36-Structures pliables et traversables (ENS 23, partiellement **corrigé** — oral - 306 lignes) ***
  ocaml, programmation fonctionnelle
  VOIR

- 37-Composition Monadique (ENS 24, **corrigé** très partiellement — oral - 191 lignes) ***
  ocaml, programmation fonctionnelle
  VOIR

Pseudocode

- 31-Inférence de type (ENS 23, **corrigé** — oral - 280 lignes) ***
  algorithmique, langages fonctionnels, pseudocode
  VOIR

Représentation des nombres

- 19-calculs avec les flottants (CCINP 23, ex B, **corrigé** — oral - 207 lignes) *
  représentation des nombres, c
  VOIR

Réduction

- 13-Activation de processus (CCINP 23, ex A, **corrigé** — oral - 156 lignes) *
  complexité, réduction
  VOIR

- 25-HORNSAT (CCINP 24, ex B, **corrigé** — oral - 186 lignes) *
  logique propositionnelle, complexité, réduction
  VOIR

- 38-Déduction de messages (ENS 24, **corrigé** — oral - 232 lignes) ***
  déduction naturelle, réduction
  VOIR

- 42-Mots partiels et Théorème de Dilworth (ENS 24, partiellement **corrigé**, niveau inapproprié, **à débugguer** — oral - 184 lignes) ***
  graphes, réduction, langages
  VOIR

Sql

- 6-SQL (CCINP 0, ex A, **corrigé** — oral - 95 lignes) *
  sql
  VOIR

- 46-bdd pour livraison (MT 0, ex 1, **corrigé** — oral - 78 lignes) *
  sql
  VOIR

Structures de données

- 56-Tas binaires (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 129 lignes) *
  arbres, tri, structures de données, cours, complexité
  VOIR

- 62-Algorithme Union-Find (X 23, **corrigé** — oral - 151 lignes) ***
  algorithmique, complexité, structures de données
  VOIR

Tri

- 56-Tas binaires (MT 24, ex 1, **corrigé** — oral - 129 lignes) *
  arbres, tri, structures de données, cours, complexité
  VOIR

- 66-Algorithme du tri lent (X 24, **corrigé** — oral - 147 lignes) ***
  algorithmique, tri, complexité, preuve
  VOIR

Chapitre 2

(CCINP) Arbres Binaires de Recherche * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 77 lignes)

$*$

Arbres, Complexité,
sources : `arbreCCINPA2.tex`

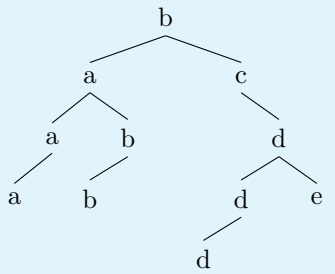
Arbres binaires de recherche :

Dans cet exercice, on autorise les doublons dans un arbre binaire de recherche et pour le cas d'égalité on choisira le sous-arbre gauche. On ne cherchera pas à équilibrer les arbres.

1. Rappeler la définition d'un arbre binaire de recherche.
2. Insérer successivement et une à une dans un arbre binaire de recherche initialement vide toutes les lettres du mot *bacddabdbae* en utilisant l'ordre alphabétique sur les lettres. Quelle est la hauteur de l'arbre ainsi obtenu ?
3. Montrer que le parcours en profondeur infixe d'un arbre binaire de recherche de lettres est un mot dont les lettres sont rangées dans l'ordre croissant. On pourra procéder par induction structurelle.
4. Proposer un algorithme qui permet de compter le nombre d'occurrences d'une lettre dans un arbre binaire de recherche de lettres. Quelle est sa complexité ?
5. On souhaite supprimer *une* occurrence d'une lettre donnée dans un arbre binaire de recherche de lettres. Expliquer le principe de l'algorithme permettant de résoudre ce problème et le mettre en oeuvre sur l'arbre obtenu à la question 2 en supprimant successivement une occurrence des lettres e, b, b, c et d. Quelle est sa complexité ?

correction

1. Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire dont les clés sont à valeurs dans un ensemble totalement ordonné. De plus, pour chaque noeud de cet arbre, son étiquette x est strictement supérieure aux étiquettes dans son fils gauche et strictement inférieure aux étiquettes dans son fils droit (des variantes autorisent une inégalité large d'un des deux côtés).
2. On décide de mettre les cas d'égalité à gauche (par exemple) :



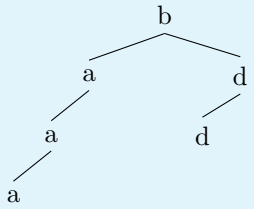
3. On procède par induction. On note $P(a)$ le parcours infixe de l'ABR a. Le parcours infixe d'un ABR vide est bien sûr trié. De plus, si a est un ABR de racine x et de fils gauche (respectivement droit) g (respectivement d) alors $P(a) = P(g), x, P(d)$. Par hypothèse inductive, $P(g)$ et $P(d)$ sont triés dans l'ordre croissant. Par définition d'un ABR, x est plus grand que les éléments apparaissant dans $P(g)$ et plus petit que ceux dans $P(d)$: $P(a)$ est donc trié dans l'ordre croissant.
4. On procède récursivement :
   - Le nombre d'occurrences d'une lettre u dans un arbre vide vaut 0.
   - Si l'ABR n'est pas vide, on compare u à sa racine x. Si $u < x$, on compte le nombre d'occurrences de u à gauche, si $u > x$, on compte le nombre d'occurrences de u à droite et si $u = x$, on compte le nombre d'occurrences de u à gauche et on lui ajoute 1.

   En fait, dès qu'on a trouvé une occurrence de u, les autres sont forcément à gauche et on peut ainsi compter

les occurrences de u en ne faisant le parcours que d'une branche de l'arbre. D'où une complexité en $O(h)$ où h est la hauteur de l'arbre.

5. On commence par chercher une occurrence de l'élément s à supprimer en descendant soit à gauche soit à droite selon comment s se compare à la racine courante. Une fois s trouvé :
- S'il n'a pas de fils, on peut le supprimer directement.
- S'il en a un, on remplace l'arbre enraciné en s par ce fils.
- S'il en a deux, on récupère le maximum m du fils gauche, on écrase s avec m puis on supprime m. Cet appel récursif aboutit à l'un des deux cas précédents car par définition le maximum d'un ABR se trouve en descendant systématiquement à droite dont m n'aura pas de fils droit.

Sur l'arbre de la question 2 on obtient après suppressions :



La complexité d'une suppression est logarithmique en la taille de l'arbre.

Chapitre 3

(CCINP) Déduction naturelle * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 160 lignes)

$*$

Déduction naturelle,
sources : `dednatCCINPA.tex`

Rappelons les règles de la déduction naturelle suivantes, où A et B sont des formules logiques et Γ un ensemble de formules logiques quelconque :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{AX} \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot_e \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ \to_e \quad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

1. Montrer que le séquent $\vdash \neg A \to (A \to \bot)$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.

correction

Corrigé de M.Péchaud

L'arbre de preuve A_1 suivant convient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vdash A}\ \text{AX} \quad \dfrac{}{A, \neg A \vdash \neg A}\ \text{AX}}{A, \neg A \vdash \bot}\ \neg_e}{\neg A \vdash A \to \bot}\ \to_i}{\vdash \neg A \to (A \to \bot)}\ \to_i$$

2. Montrer que le séquent $\vdash (A \to \bot) \to \neg A$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.

correction

L'arbre de preuve A_2 suivant convient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A \to \bot \vdash A}\ \text{AX} \quad \dfrac{}{A, A \to \bot \vdash A \to \bot}\ \text{AX}}{A, A \to \bot \vdash \bot}\ \to_e}{A \to \bot \vdash \neg A}\ \neg_i}{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}\ \to_i$$

3. Donner une règle correspondant à l'introduction du symbole $\wedge$ ainsi que deux règles correspondant à l'élimination du symbole $\wedge$. Montrer que le séquent $\vdash (\neg A \to (A \to \bot)) \wedge ((A \to \bot) \to \neg A)$ est dérivable.

correction

Dans cet ordre : l'introduction, l'élimination à gauche et celle à droite :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge_{eg} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge_{ed}$$

Le séquent demandé se dérive immédiatement des arbres A_1 et A_2 et de l'application de $\wedge_i$.

4. On considère la formule $P = ((A \to B) \to A) \to A$ appelée *loi de Peirce*. Montrer que $\models P$, c'est-à-dire que P est une tautologie.

correction

On peut par exemple dresser une table de vérité :

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$	P
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

On constate que P est effectivement une tautologie.

5. Pour montrer que le séquent $\vdash P$ est dérivable, il est nécessaire d'utiliser la règle d'absurdité classique $\bot_c$ (ou une règle équivalente), ce que l'on fait ci-dessous (il n'y aura pas besoin de réutiliser cette règle). Terminer la preuve du séquent $\vdash P$, dans laquelle on pose $\Gamma = \{(A \to B) \to A, \neg A\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{?}{\Gamma \vdash A}\ ? \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg A}\ \text{AX}}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_i}{(A \to B) \to A \vdash A}\ \bot_c}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\ \to_i$$

correction

On complète la branche de gauche avec l'arbre suivant (l'idée étant de prouver $A \to B$ à partir de Γ. En effet, il ne suffit plus ensuite que d'utiliser $(A \to B) \to A$ pour obtenir A) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{AX} \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash \neg A}\ \text{AX}}{\Gamma, A \vdash \bot}\ \neg_e}{\Gamma, A \vdash B}\ \bot_e}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to_i \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash (A \to B) \to A}\ \text{AX}}{\Gamma \vdash A}\ \to_e$$

Chapitre 4

(CCINP) ID3 * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 177 lignes)

$*$

Ia,
sources : `ccinpid3.tex`

ID3 :

On considère un problème d'apprentissage supervisé à deux classes dont les données d'apprentissage sont de la forme $Z = (x_i, y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{B}^d$, $y_i \in \{+, -\}$, où d est le nombre d'attributs binaires d'un exemple et $\mathbb{B} = \{\text{YES}, \text{NO}\}$, les valeurs possibles pour les attributs.

Par exemple, le tableau ci-dessous est un échantillon Z de données relatif aux infections à la COVID 19, extrait de IJCRD 2019. La première colonne indique l'identifiant d'un exemple x (qui comporte trois attributs F, T et R) et la dernière colonne son étiquette y (ici I).

ID	Fièvre (F)	Toux (T)	Problèmes respiratoires (R)	Infecté (I)
1	NO	NO	NO	-
2	YES	YES	YES	+
3	YES	YES	NO	-
4	YES	NO	YES	+
5	YES	YES	YES	+
6	NO	YES	NO	-
7	YES	NO	YES	+
8	YES	NO	YES	+
9	NO	YES	YES	+
10	YES	YES	NO	+
11	NO	YES	NO	-
12	NO	YES	YES	-
13	NO	YES	YES	-
14	YES	YES	NO	-

1. Rappeler le principe de l'apprentissage supervisé.
2. Dessiner l'arbre de décision obtenu en considérant successivement et dans l'ordre les attributs F, T et R. Commenter. *On rappelle qu'un arbre de décions est un arbre binaire dont les noeuds internes sont étiquetés par les attributs et les feuilles par $\{+, -\}$. Les fils gauches correspondent à une réponse NO et les fils droits à la réponse YES.*

L'entropie d'un ensemble S d'exemple est définie par :

$$H(S) = -\frac{n_+}{n}\log_2\left(\frac{n_+}{n}\right) - \frac{n_-}{n}\log_2\left(\frac{n_-}{n}\right)$$

où n_+, n_- et n désignent respectivement le nombre d'éléments de S dont l'étiquette est $+$, le nombre d'éléments de S dont l'étiquette est $-$ et enfin le nombre total d'éléments de S. Dans le cas où $k = 0$, on prend la convention que $k\log_2 k = 0$. Par exemple l'entropie de l'ensemble de toutes les données Z ci-dessus est 1.00.

Étant donné un attribut A, on définit le gain de A par rapport à S par :

$$G(S, A) = H(S) - \frac{n_{A=YES}}{n}H(S_{A=YES}) - \frac{n_{A=NO}}{n}H(S_{A=NO})$$

où $S_{A=YES}$ désigne le sous-ensemble des éléments de S dont l'attribut A est YES et $n_{A=YES}$ désigne son cardinal, de même pour NO et n désigne toujours le cardinal de S. Par exemple $G(Z, F) = 0.26$, $G(Z, T) = 0.07$ et $G(Z, R) = 0.26$ (les valeurs données sont approchées au centième).

Si l'on considère le sous-ensemble $Z_{F=YES}$ des individus qui ont eu de la fièvre, et en supprimant l'attribut F, on obtient le sous-tableau ci-dessous. Le gain d'information de l'attribut T est alors $G(Z_{F=YES}, T) = 0.20$.

ID	Toux (T)	Problèmes respiratoires (R)	Infecté (I)
2	YES	YES	+
3	YES	NO	-
4	NO	YES	+
5	YES	YES	+
7	NO	YES	+
8	NO	YES	+
10	YES	NO	+
14	YES	NO	-

3. Calculer le gain d'entropie $G(Z_{F=YES}, R)$ de l'attribut problèmes repiratoires pour le sous-ensemble des individus qui ont eu de la fièvre.

L'algorithme *Iterative Dichotomiser 3 (ID3)* (Algorithme 1) peut être utilisé pour construire un arbre de décision. Pour l'appel initial, il suffit de prendre l'ensemble de tous les exemples pour S_p et pour S, et l'ensemble de tous les attributs pour D.

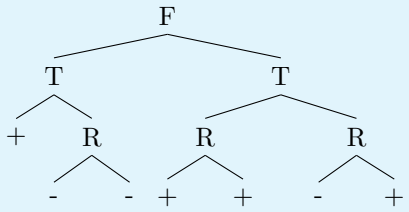
```
Entrées : S_p sous-ensemble des exemples du noeud parent, S sous-ensemble des ↩
    exemples à considérer, D sous-ensemble des attributs à considérer}
Sortie : Un arbre de décision.

Fonction ID3((S_p, S, D)) ;
    Si l'ensemble des exemples S est vide
        Renvoyer ···

    Si l'ensemble A des attributes est vide
        Renvoyer ···

    Si tous les exemples de S ont une même étiquette y
        Renvoyer ···

    Sinon :
        Soit A ∈ D l'attribut de plus grand gain G(S, A) \ ;
        Construire l'arbre de racine A et de sous-arbre gauche \texttt{ID3}↩
            (S, S_{A=NO}, D\{A}) et de sous-arbre droit \texttt{ID3}(S, S_{A=YES}, D\{A})
```

4. Indiquer comment compléter l'algorithme 1.

correction

1. Dans un problème d'apprentissage supervisé, on dispose d'objets ayant des attributs et une étiquette. L'objectif est de construire une fonction (un modèle) à partir d'exemples connus qui à partir des attributs d'un objet potentiellement inconnu indique son étiquette.

2. On obtient l'arbre suivant en prenant comme conventions qu'une feuille est étiquetée par la classe majoritaire des exemples qu'elle représente et que dans le cas où une branche ne recoupe plus aucun exemple, on créé une feuille dont la classe est la classe majoritaire de son noeud père :



Par exemple, sur la branche gauche, droite, droite, qui correspond à F = NO, T = YES, R = YES, les exemples correspondants sont 9 (+), 12 (-) et 13 (-) donc on étiquette la feuille par -. Sur la branche droite, gauche, gauche, qui correspond à F = YES, T = NO, R = NO, il n'y a aucun exemple associé : on créé une feuille dont l'étiquette est celle majoritaire parmi 4, 7 et 8 qui sont les exemples pour lesquels F = YES et T = NO.

Remarquons que cet arbre est inutilement complexe : certains branchements semblent inutiles.

3. On devrait trouver 0.47 (arrondi au centième), cf le fichier ID3.ml pour les calculs.

4. Indirectement on l'a déjà fait en question 2 :

- Si l'ensemble des exemples est vide, on créé une feuille avec une étiquette par défaut ; par exemple, on peut choisir l'étiquette majoritaire des exemples dans le noeud parent.
- Si l'ensemble des attributs est vide, on ne peut plus séparer les exemples : il faut donc créer une feuille qu'on étiquette par la classe majoritaire des exemples encore présents.
- Si tous les exemples sont dans la même classe, on créé une feuille étiquetée par cette classe.

Chapitre 5

(CCINP) Langages réguliers * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 120 lignes)

∗

Langages, Automates,
sources : `langccinp3.tex`

1. Rappeler la définition d'un langage régulier.

correction

Un langage est régulier s'il est dénoté par une expression régulière sur un certain alphabet Σ. Les expressions régulières sur Σ sont définies par induction par :
- $\varnothing$, ε et a pour $a \in \Sigma$ sont des expressions régulières.
- Si f et g sont des expressions régulières, $(f+g)$, fg et $f^\star$ aussi.

2. Les langages suivants sont-ils réguliers ? Justifier.

(a) $L_1 = \{a^n b a^m \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$

correction

L_1 est régulier car il est dénoté par $a^\star b a^\star$.

(b) $L_2 = \{a^n b a^m \,|\, n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m\}$

correction

L_2 n'est pas régulier. Par l'absurde, s'il l'était, le lemme de l'étoile fournirait $N \in \mathbb{N}$ tel que le mot $a^N b a^N \in L_2$ se factoriserait en $a^{n_1} a^{n_2} a^{N-n_1-n_2} b a^N$ avec $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}^\star$ et de sorte à ce que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $a^{N+(k-1)n_2} b a^N \in L_2$. Pour $k = 2$, on aurait $a^{N+n_2} b a^N \in L_2$ ce qui n'est pas le cas car $N + n_2 > N$ en vertu du fait que n_2 est non nul.

(c) $L_3 = \{a^n b a^m \,|\, n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

correction

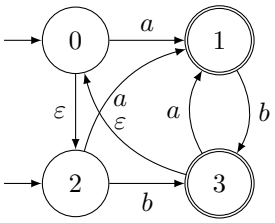
L_3 n'est pas régulier. S'il l'était, le langage $L_3^c \cap a^\star b a^\star$ le serait aussi par stabilité des langages réguliers par le complémnetaire et l'intersection ; or ce langage est L_2 qui n'est pas régulier.

(d) $L_4 = \{a^n b a^m \,|\, n, m \in \mathbb{N}, n + m \equiv 0 \mod 2\}$

correction

L_4 est le langage des mots de la forme $a^n b a^m$ avec n, m tous les deux pairs ou n, m tous les deux impairs. Il est donc dénoté par $(a^2)^\star b (a^2)^\star + a(a^2)^\star b a (a^2)^\star$ et est donc régulier.

3. On considère l'automate non déterministe suivant :



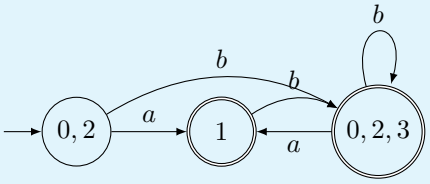
(a) Déterminiser cet automate.

correction

On applique l'algorithme de déterminisation habituel, en prenant en compte la présence des $\epsilon-$transitions. On peut l'écrire directement ou passer par la table :

	a	b
$\to \{0,2\}$	$\{1\}$	$\{0,2,3\}$
$\{1\}$	$\varnothing$	$\{0,2,3\}$
$\{0,2,3\}$	$\{1\}$	$\{0,2,3\}$

On trouve l'automate des parties suivant (si on ne complète pas) :



(b) Construire une expression régulière dénotant le langage reconnu par cet automate.

correction

En appliquant l'algorithme d'élimination des états en commençant par éliminer (0,2,3) puis 1 (on garde l'état initial), on obtient :
$(a + ba)(b^+a)^*b^*$.

(c) Décrire simplement avec des mots le langage reconnu par cet automate.

correction

Les mots de ce langage sont exactement les mots ne contenant pas 2 a d'affilée.

Chapitre 6

(CCINP) Mutex * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 110 lignes)

$*$

Concurrence, Ocaml,
sources : `concccinp1.tex`

Mutex :

On considère le programme suivant, ici en OCaml, dans lequel n fils d'exécution incrémentent tous un même compteur partagé.

```
(* Nombre de fils d'exécution *)
let n = 100
(* Un même compteur partagé *)
let compteur = ref 0
(* Chaque fil d'exécution de numéro i va incrémenter le compteur *)
let fi = compteur := ! compteur +1
(* Création de n fils exécutant f associant à chaque fil son numéro *)
let threads = Array. init n (fun i → Thread. create fi)
(* Attente de la fin des n fils d'exécution *)
let ()= Array. iter (fun t → Thread.join t) threads
```

On rappelle que l'on dispose en OCaml des trois fonctions `Mutex.create : unit -> Mutex.t` pour la création d'un verrou, `Mutex.lock : Mutex.t -> unit` pour le verrouillage et `Mutex.unlock : Mutex.t -> unit` pour le déverrouillage, du module `Mutex` pour manipuler des verrous.

1. Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre le compteur à la fin du programme.
2. Identifier la section critique et indiquer comment et à quel endroit ajouter des verrous pour garantir que la valeur du compteur à la fin du programme soit n de manière certaine.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'on ne dispose pas d'une implémentation des verrous. On se limite au cas de deux fils d'exécution, numérotés 0 et 1. Nous cherchons à garantir deux propriétés :

- *Exclusion mutuelle* : un seul fil d'exécution à la fois peut se trouver dans la section critique ;
- *Absence de famine* : tout fil d'exécution qui cherche à entrer dans la section critique pourra le faire à un moment.

On utilise pour cela un tableau `veut_entrer` qui indique pour chaque fil d'exécution s'il souhaite entrer en section critique ainsi qu'une variable `tour` qui indique quel fil d'exécution peut effectivement entrer dans la section critique. On propose ci-dessous deux versions modifiées `f_a` et `f_b` de la fonction `f`, l'objectif étant de pouvoir exécuter `f_a 0` et `f_a 1` de manière concurrente, et de même pour `f_b`.

```
let veut_entrer = [| false ; false |]
let tour = ref 0
let f_a i =
    let autre = 1 - i in
    veut_entrer.(i) <- true ;
    while veut_entrer.(autre) do () done ;
    (* section critique *)
    veut_entrer.(i) <- false
let f_b i =
    let autre = 1 - i in
    veut_entrer.(i) <- true ;
    tour  := i ;
    while veut_entrer.(autre) && ! tour = autre do () done ;
```

```
(* section critique *)
veut_entrer.(i) <- false
```

3. Expliquer pourquoi aucune de ces deux versions ne convient, en indiquant la propriété qui est violée.
4. Proposer une version `f_c` qui permet de garantir les deux propriétés.
5. Connaissez-vous un algorithme permettant de généraliser à n fils d'exécution ? Rappeler très succinctement son principe.

correction

1. A priori, toute valeur entre 1 et 100 (inclus de deux côtés) est possible.
2. Pour obtenir 100 de manière certaine, on protège la section critique comme suit :

3. Avec `f_a` on peut avoir famine avec la trace d'exécution suivante :
   - Le fil 0 calcul `autre` puis indique que `veut_entrer.(0)` vaut `true`.
   - Le fil 1 calcul `autre` puis indique que `veut_entrer.(1)` vaut `true`.
   - Les deux fils sont alors bloqués dans la boucle `while`.

   Avec `f_b` il n'y a pas exclusion mutuelle ce qui s'observe via la trace suivante :
   - Le fil 0 calcule `autre`, indique qu'il veut entrer, fixe `tour` à 0 puis entre en section critique (ce qui est possible puisque ce n'est pas le tour du fil 1).
   - Le fil 1 fait exactement la même chose.
   - Les deux fils sont alors en même temps en section critique.
4. Il s'agit de reconstruire l'algorithme de Peterson :
5. L'algorithme de la boulangerie de Lamport permet de généraliser à n fils. On y utilise un tableau `veut_entrer` à n cases et un tableau d'entiers `tickets` à n cases. Lorsqu'un fil i veut entrer en section critique, il modifie sa case `veut_entrer.(i)` puis calcule et stocke son ticket comme étant (le maximum du tableau `tickets`) $+1$. Il attend ensuite d'être le fil souhaitant aller en section critique disposant du couple (`tickets.(i)`, i) le plus petit pour l'ordre lexicographique.

Chapitre 7

(CCINP) SQL * (CCINP 0, ex A, corrigé — oral - 95 lignes)

$*$

Sql,
sources : `sqlccinp1.tex`

On considère le schéma de base de données suivant, qui décrit un ensemble de fabricants de matériel informatique, les matériels qu'ils vendent, leurs clients et ce qu'achètent leurs clients. Les attributs des clés primaires des six premières relations sont soulignés.

```
Production(NomFabricant, Modele)
Ordinateur(Modele, Frequence, Ram, Dd, Prix)
Portable(Modele, Frequence, Ram, Dd, Ecran, Prix)
Imprimante(Modele, Couleur, Type, Prix)
Fabricant(Nom, Adresse, NomPatron)
Client(Num, Nom, Prenom)
Achat(NumClient, NomFabricant, Modele, Quantite)
```

Chaque client possède un numéro unique connu de tous les fabricants. La relation `Production` donne pour chaque fabricant l'ensemble des modèles fabriqués par ce fabricant. Deux fabricants différents peuvent proposer le même matériel. La relation `Ordinateur` donne pour chaque modèle d'ordinateur la vitesse du processeur (en Hz), les tailles de la Ram et du disque dur (en Go) et le prix de l'ordinateur (en €). La relation `Portable`, en plus des attributs précendents, comporte la taille de l'écran (en pouces). La relation `Imprimante` indique pour chaque modèle d'imprimante si elle imprime en couleur (vrai/faux), le tye d'impression (laser ou jet d'encre) et le prix (en €). La relation `Fabricant` stocke les nom et adresse de chaque fabricant, ainsi que le nom de son patron. La relation `Client` stocke les noms et prénoms de tous les clients de tous les fabricants. Enfin, la relation `Achat` regroupe les quadruplets (client c, fabriquant f, modèle m, quantité q) tels que le client de numéro c a acheté q fois le modèle m au fabricant f. On suppose que l'attribut `Quantite` est toujours strictement positif.

1. Proposer une clé primaire pour la relation `Achat` et indiquer ses conséquences en terme de modélisation.
2. Identifier l'ensemble des clés étrangères éventuelles de chaque table.
3. Donner en SQL des requêtes répondant aux question suivantes :
   (a) Quels sont les numéros des modèles des matériels (ordinateur, portable ou imprimante) fabriqués par l'entreprise du nom de Durand ?
   (b) Quels sont les noms et adresses des fabricants produisant des portables dont le disque dur a une capacité d'au moins 500 Go ?
   (c) Quels sont les noms des fabricants qui produisent au moins 10 modèles différents d'imprimantes ?
   (d) Quels sont les numéros des clients n'ayant acheté aucune imprimante ?

correction

Corrigé de J.B.Bianquis et M.Péchaud

1. A mon avis, la seule clé primaire pertinente pour `Achat` serait un nouvel attribut permettant d'identifier de manière unique chaque achat. En effet :
   - Aucun attribut seul ne peut être une clé primaire.
   - La couple (`NumClient`, `NomFabricant`) ne convient pas non plus puisqu'un client pourrait acheter plusieurs objets différents chez le même fabricant.
   - Le triplet (`NumClient`, `NomFabricant`, `Modele`) ne convient pas vraiment non plus car un même client pourrait acheter un même matériel au même fabricant plusieurs fois. Ou alors il faudrait qu'à chaque fois que cela arrive le champ `Quantite` soit modifié.
   - Prendre les quatre attributs comme clé primaire n'est pas très indiqué non plus : un client pourrait acheter

le même matériel au même fabricant dans les mêmes quantités plusieurs fois.

2.
- `Modele` est une clé étrangère dans `Production` référant à `Modele` dans les tables de matériels.
- `NomFabricant` est une clé étrangère dans `Production` référant à `Nom` dans la table `Fabricant`.
- `NumClient` est une clé étrangère dans `Achat` référant à `Num` dans la table `Client`.
- `NomFabricant` est une clé étrangère dans `Achat` référant à `Nom` dans la table `Fabricant`.
- `Modele` est une clé étrangère dans `Achat` référant à `Modele` dans les tables de matériels.
- (`NomFabricant`, `Modele`) est une clé étrangère dans `Achat` référant à la clé primaire du même nom dans la table `Production`.

3. **(a)**
```
SELECT Modele FROM Procuction WHERE Modele = 'Durand'
```

(b)
```
SELECT Nom, Adresse FROM Fabricant
     JOIN Production ON Nom = NomFabricant
     JOIN Portable ON Portable.Modele = Production.Modele
     WHERE Dd >= 500
```

(c)
```
SELECT NomFabricant FROM Production JOIN Imprimante USING (Modele) ↩
   GROUP BY Fabricant HAVING count(Modele) >= 10
```

(d) On calcule le numéro des clients qui ont acheté une imprimante puis on les supprime des numéros de l'ensemble des clients avec `EXCEPT` :

```
SELECT NumClient FROM Client
EXCEPT
SELECT NumClient FROM Achat JOIN Imprimante USING (Modele)
```

Chapitre 8

(CCINP) Arbres * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 247 lignes)

∗

Arbres, Ocaml,
sources : `ccinparbre.tex`

L'exercice suivant est à traiter dans le langage *OCaml*.

Dans cet exercice on s'interdit d'utiliser les traits impératifs du langage OCaml (références, tableaux, champs mutables, etc.).

On représente en *OCaml* une permutation σ de $[\![0, n-1]\!]$ par la liste d'entier $[\sigma_0; \sigma_1; \ldots; \sigma_{n-1}]$. Un arbre binaire étiqueté est soit un arbre vide, soit un nœud formé d'un sous-arbre gauche, d'une étiquette et d'un sous-arbre droit :

```
type arbre =
    | V
    | N of arbre * int * arbre
```

On représente un arbre binaire non étiqueté par un arbre binaire étiqueté en ignorant simplement les étiquettes. On étiquette un arbre binaire non étiqueté à n nœuds par $[\![0; n-1]\!]$ en suivant l'ordre infixe de son parcours en profondeur. La permutation associée à cet arbre est donnée par le parcours en profondeur par ordre préfixe. La figure 1 propose un exemple (on ne dessine pas les arbres vides).

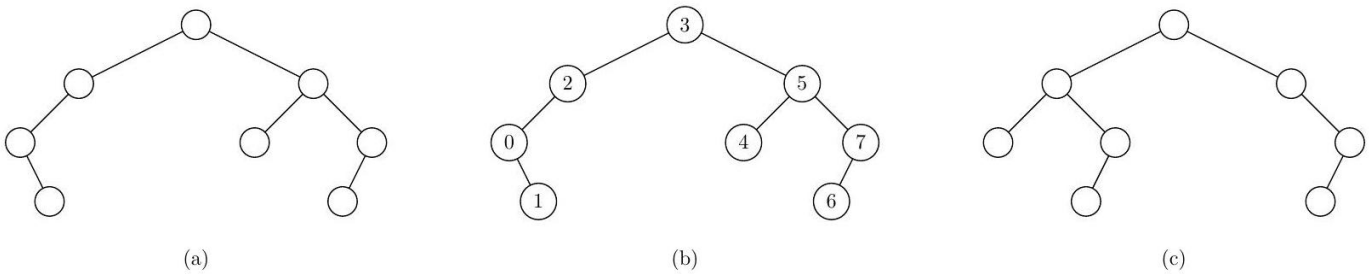


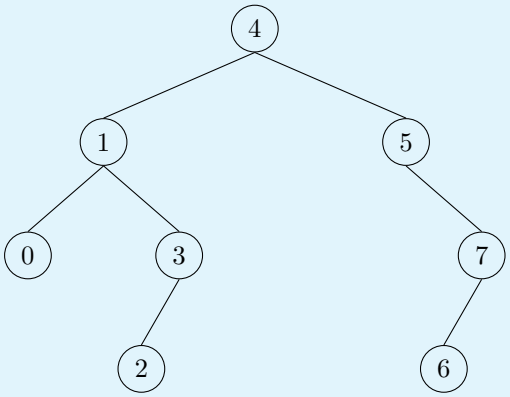
Figure 1 - (a) un arbre binaire non étiqueté ; (b) son étiquetage en suivant un ordre infixe, la permutation associée est $[3; 2; 0; 1; 5; 4; 7; 6]$; (c) un autre arbre binaire non étiqueté.

Un fichier source *OCaml* qui implémente ces exemples vous est fourni.

1. Étiqueter l'arbre (c) de la figure 1 et donner la permutation associée.

correction

Correction de M.Péchaud



La permutation associée est donc $[4;1;0;3;2;5;7;6]$.

2. Écrire une fonction `parcours_prefixe : arbre -> int list` qui renvoie la liste des étiquettes d'un arbre dans l'ordre préfixe de son parcours en profondeur. On pourra utiliser l'opérateur `@` et on ne cherchera pas nécessairement à proposer une solution linéaire en la taille de l'arbre.

correction

```
let rec parcours_prefixe a = match a with
  | V -> []
  | N(ag, e, ad) -> e::parcours_prefixe ag@parcours_prefixe ad
```

3. Écrire une fonction `etiquette : arbre -> arbre` qui prend en paramètre un arbre dont on ignore les étiquettes et qui renvoie un arbre identique mais étiqueté par les entiers de $[\![0, n-1]\!]$ en suivant l'ordre infixe d'un parcours en profondeur.
Indication : on pourra utiliser une fonction auxiliaire de type `arbre` $\to$ `int` $\to$ `arbre * int` qui prend en paramètres un arbre et la prochaine étiquette à mettre et qui renvoie le couple formé par l'arbre étiqueté et la nouvelle prochaine étiquette à mettre.

correction

```
let etiquette a =
  let rec aux a e =
    match a with
    | V -> V, e
    | N(ag, _, ad) -> let new_ag, eg = aux ag e in
                      let new_ad, ed = aux ad (eg+1) in
                      N(new_ag, eg, new_ad), ed
  in
  aux a 0
```

Une permutation σ de $[\![0, n-1]\!]$ est triable avec une pile s'il est possible de trier la liste $[\sigma_0;\sigma_1;\ldots;\sigma_{n-1}]$ en utilisant uniquement une structure de pile comme espace de stockage interne. On considère l'algorithme suivant, énoncé ici dans un style impératif :

```
Initialiser une pile vide ;
Pour chaque élément en entrée :
    ⋆ Tant que l'élément est plus grand que le sommet de la pile, dépiler le ↩
       sommet de la pile vers la sortie ;
    ⋆ Empiler l'élément en entrée dans la pile ;
Dépiler tous les éléments restant dans la pile vers la sortie.
```

Par exemple, pour la permutation $[3;2;0;1;5;4;7;6]$, on empile $3,2,0$, on dépile 0, on empile 1, on dépile $1,2,3$, on empile 5,4, on dépile 4,5, on empile 7,6, on dépile 6,7. On obtient la liste triée $[7;6;5;4;3;2;1;0]$ en supposant avoir ajouté en sortie les éléments dans une liste. On admet qu'une permutation est triable par pile si et seulement cet algorithme permet de la trier correctement.

4. Dérouler l'exécution de cet algorithme sur la permutation associée à l'arbre (c) de la figure 1 et vérifier qu'elle est bien triable par pile.

correction

La permutation est $[4;1;0;3;2;5;7;6]$.
- On empile 4, 1 et 0.
- On dépile 0 et 1.
- On empile 3 et 2.
- On dépile 2, 3 et 4.
- On empile 5.
- On dépile 5.
- On empile 7 et 6.
- On dépile 6 et 7.

Les sommets ont bien été dépilés dans l'ordre croissant, donc la permutation est triable par liste.

5. Écrire une fonction trier : `int list` → `int list` qui implémente cet algorithme dans un style fonctionnel. Par exemple, trier $[3;2;0;1;5;4;7;6]$ doit s'évaluer en la liste $[7;6;5;4;3;2;1;0]$. On utilisera directement une liste pour implémenter une pile.
Indication : écrire une fonction auxiliaire de type `int list -> int list -> int list -> int list` qui prend en paramètre une liste d'entrée, une pile et une liste de sortie, et qui, en fonction de la forme de la liste d'entrée et de la pile, applique une étape élémentaire avant de procèder récursivement.

correction

```
let trier l =
  let rec aux entree pile sortie =
    match entree, pile with
      [], [] -> sortie
    | [], tp::qp -> aux [] qp (tp::sortie)
    | te::qe, [] -> aux qe (te::pile) sortie
    | te::qe, tp::qp when te > tp -> aux entree qp (tp::sortie)
    | te::qe, _ -> aux qe (te::pile) sortie
  in
  aux l [] []
```

6. Montrer que s'il existe $0 \leqslant i < j < k \leqslant n-1$ tels que $\sigma_k < \sigma_i < \sigma_j$, alors σ n'est pas triable par une pile.

correction

Dans la situation donnée, σ_i finit par être empilé.
Comme $\sigma_j > \sigma_i$, au plus tard lorsque σ_j est étudié en tête d'entrée, σ_i est dépilé.
σ_k sera donc dépilé après σ_i – et comme $\sigma_k < \sigma_i$, la sortie ne sera pas triée.

7. On se propose de montrer que les permutations de $[\![0, n-1]\!]$ triables par une pile sont en bijection avec les arbres binaires non étiquetés à n nœuds.

(a) Montrer que la permutation associée à un arbre binaire est triable par pile. On pourra remarquer le lien entre le parcours préfixe et l'opération empiler d'une part et le parcours infixe et l'opération dépiler d'autre part.

correction

- Les sommets sont empilés dans l'ordre de parcours infixe de l'arbre (i.e. l'ordre dans lequel ils apparaissent dans la permutation donnée)
- et dépilés par ordre de parcours préfixe – car étant donné un nœud d'étiquette e avec des fils gauches et droits d'étiquettes e_g et e_d, e sera dépilé après le dépilement de e_g (qui a été empilé après), et e_d ne pourra être empilé que lorsque e aura été dépilé.

Or par définition, l'ordre de parcours préfixe est l'ordre croissant, donc le résultat renvoyé est bien correct, et la permutation est triable par pile.

(b) Montrer qu'une permutation triable par pile est une permutation associée à un arbre binaire.
Indication : on peut prendre σ_0 comme racine, puis procéder récursivement avec les $\sigma_0 - 1$ éléments pour construire le fils gauche et avec le reste pour le fils droit.

correction

Considérons une permutation σ triable par liste.
Procédons comme dans l'énoncé et construisons un arbre comme indiqué.

Montrons que l'arbre obtenu représente bien la permutation σ – i.e. que l'on obtient bien cette permutation en le parcourrant dans l'ordre infixe (plus précisément en considérant des permutations de *parties* de $[\![0, n-1]\!]$).
On peut procéder par induction sur l'arbre – le résultat étant évident pour un arbre réduit à la racine. Considérons alors un arbre de la forme `a = N(ag, e, ad)` – et supposons que la propriété est vraie pour ag et ad.
Si l'on effectue un parcours préfixe de l'arbre, on obtient successivement

- e est la racine – qui est bien le premier élément de la permutation ;
- ag est ensuite parcouru. Ces éléments sont par construction les e éléments suivants de la permutation, et par hypothèse d'induction, le parcours préfixe les voit dans l'ordre de la permutation.
- ad est ensuite parcouru. Ces éléments sont par construction les éléments restants de la permutation, et par hypothèse d'induction, le parcours préfixe les voit dans l'ordre de la permutation.

Le résultat est donc démontré.

Chapitre 9

(CCINP) Graphes * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 144 lignes)

$*$

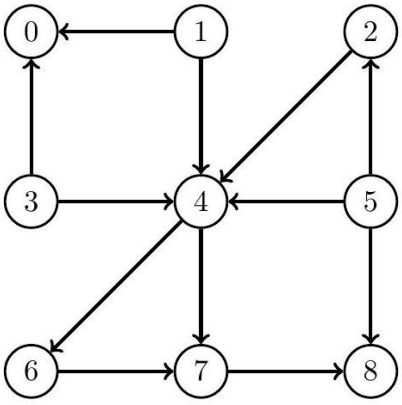
Graphes,
sources : `ccinpgraphe.tex`

L'exercice suivant est à traiter dans le langage C. Vous pourrez travailler dans le fichier *ccinpgraphe.c* fourni.

Dans cet exercice, tous les graphes seront orientés. On représente un graphe orienté $G = (S, A)$, avec $S = \{0, \dots, n-1\}$, en C par la structure suivante :

```
struct graph_s {
    int n;
    int degre[100];
    int voisins[100][10];
};
```

L'entier n correspond au nombre de sommets $|S|$ du graphe. On suppose que $n \leqslant 100$. Pour $0 \leqslant s < n$, la case `degre[s]` contient le degré sortant $d^+(s)$, c'est-à-dire le nombre de successeurs, appelés ici voisins, de s. On suppose que ce degré est toujours inférieur à 10. Pour $0 \leqslant s < n$, la case `voisins[s]` est un tableau contenant, aux indices $0 \leqslant i < d^+(s)$, les voisins du sommet s. Il s'agit donc d'une représentation par listes d'adjacences où les listes sont représentées par des tableaux en C.
Un programme en C vous est fourni dans lequel le graphe suivant est représenté par la variable `g_exemple`.



Pour $s \in S$ on note $\mathcal{A}(s)$ l'ensemble des sommets accessibles à partir de s. Pour $s \in S$, le maximum des degrés d'un sommet accessible à partir de s est noté $d^*(s) = \max\left\{d^+(s') \mid s' \in \mathcal{A}(s)\right\}$. Par exemple, pour le graphe ci-dessus, $\mathcal{A}(2) = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ et $d^*(2) = 2$ car $d^+(4) = 2$. Dans cet exercice, on cherche à calculer $d^*(s)$ pour chaque sommet $s \in S$.
On représente un sous-ensemble de sommets $S' \subseteq S$ par un tableau de booléens de taille n, contenant `true` à la case d'indice s' si $s' \in \mathcal{A}(s)$ et `false` sinon.

1. Écrire une fonction `int degre_max (graph* g, bool* partie)` qui calcule le degré maximal d'un sommet $s' \in S'$ dans un graphe $G = (S, A)$ pour une partie $S' \subseteq S$ représentée par S, c'est-à-dire qui calcule $\max\left\{d^+(s') \mid s' \in S'\right\}$.

correction

Correction de M.Péchaud

```c
int degre_max (graph* g, bool* partie) {
  int r = 0;
  for (int i = 0; i < g->n; i++) {
    if (partie[i] && g->degre[i] > r)
      r = g->degre[i];
  }
  return r;
}
```

2. Écrire une fonction `bool* accessibles (graph* g, int s)` qui prend en paramètre un graphe et un sommet s et qui renvoie un (pointeur sur un) tableau de booléens de taille n représentant $\mathcal{A}(s)$. Une fonction `nb_accessibles` qui utilise votre fonction et un test pour l'exemple ci-dessus vous sont donnés dans le fichier à compléter.

correction

```c
bool* accessibles (graph* g, int s) {
  int n = g->n;
  bool* r = malloc(n * sizeof(bool));
  for (int i = 0; i < n; i++)
    r[i] = false;
  parcours(g, s, r);
  return r;
}
```

3. Écrire une fonction `int degre_etoile(graph* g, int s)` qui calcule $d^*(s)$ pour un graphe et un sommet passé en paramètre. Quelle est la complexité de votre approche ?

correction

```c
int degre_etoile(graph* g, int s) {
  return degre_max(g, accessibles(g, s));
}
```

`accessibles` effectue un parcours du graphe (de complexité $O(|S| + |A|)$).
`degre_max` s'exécute en temps $O(|S|)$.
La complexité est donc $O(|S| + |A|) = O(n^2)$.

4. Linéariser le graphe donné en exemple ci-dessus, c'est-à-dire représenter ses sommets sur une même ligne dans l'ordre donné par un tri topologique, tous les arcs allant de gauche à droite.

correction

Un tri topologique possible est $5, 2, 3, 1, 0, 4, 6, 7, 8$.
Le tracé du graphe est laissé au lecteur ou à la lectrice.

5. Dans cette question, on suppose que le graphe $G = (S, A)$ est acyclique. Décrire un algorithme permettant de calculer tous les $d^*(s)$ pour $s \in S$ en $O(|S| + |A|)$.

correction

On effectue un tri topologique du graphe à l'aide d'un parcours en profondeur, qui a une complexité $O(|S| + |A|)$.
On créé un tableau pour mémoïser les résultats, et on parcourt alors les sommets par ordre inverse de ce tri topologique, en remarquant que le dernier élément n'a pas de successeur, et donc que son d^* vaut 0, et que pour chaque élément s voisins dans V_s, $d^*(s) = \max d^+(s), \max_{v \in V_s} d^*(v_s)$ (les $d^*(v_s)$ ont déjà été calculés et mémoïsés – donc on y accès en $O(1)$).
L'algorithme obtenu est donc bien de complexité $O(|S| + |A|)$ – chaque arc étant considéré exactement une fois dans le calcul de V_s.

6. On ne suppose plus le graphe acyclique. Décrire un algorithme permettant de calculer tous les $d^*(s)$ pour $s \in S$ en $O(|S| + |A|)$.

correction

On effectue le calcul des composantes fortement connexes du graphe à l'aide de l'algorithme de Kosaraju, qui a une complexité $O(|S| + |A|)$.
On utilise une stratégie de mémoïsation comme à la section précédente.
On parcours les composantes connexes par ordre inverse d'un tri topologique.

- Notons C la dernière composante connexe (donc la première considérée), et $s \in C$. On parcourt le graphe à partir de s pour calculer $d^*(s)$ – et l'on mémoïse le résultat.
  On remarque alors que tous les autres sommets de C ont la même image par d^* – on mémoïse ces résultats.
- Notons C' la seconde composante connexe considérée, et $s \in C$. On utilise la même méthode qu'au point précédent – en interrompant le parcours dès que l'on rencontre un sommet de C pour lequel d^* a déjà été calculé.
- ...

L'algorithme obtenu est donc bien de complexité $O(|S| + |A|)$.

Chapitre 10

(CCINP) SAT * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 148 lignes)

$*$

Logique propositionnelle, Algorithmes probabilistes,
sources : `ccinpsat.tex`

L'exercice suivant est à traiter dans le langage *OCaml*.

On s'intéresse au problème SAT pour une formule en forme normale conjonctive. On se fixe un ensemble fini $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de variables propositionnelles.
Un littéral ℓ_i est une variable propositionnelle v_i ou la négation d'une variable propositionnelle $\neg v_i$. On représente un littéral en *OCaml* par un type énuméré : le littéral v_i est représenté par `V i` et le littéral $\neg v_i$ par `NV i`. Une clause $c = \ell_0 \vee \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_{|c|-1}$ est une disjonction de littéraux, que l'on représente en *OCaml* par un tableau de littéraux. On ne considérera dans cet exercice que des formules sous forme normale conjonctive, c'est-à-dire sous forme de conjonctions de clauses $c_0 \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{m-1}$. On représente une telle formule en *OCaml* par une liste de clauses, soit une liste de tableaux de littéraux. On n'impose rien sur les clauses : une clause peut être vide et un même littéral peut s'y trouver plusieurs fois. De même une formule peut n'être formée d'aucune clause, elle est alors notée $\top$ et est considérée comme une tautologie.
Une valuation $v : \mathcal{V} \to \{V, F\}$ est représentée en *OCaml* par un tableau de booléens.

Un programme *OCaml* à compléter vous est fourni. La fonction `initialise : int → valuation` permet d'initialiser une valuation aléatoire.

1. Implémenter la fonction `evalue : clause -> valuation -> bool` qui vérifie si une clause est satisfaite par une valuation.

Étant donné une formule f constituée de m clauses $c_0 \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{m-1}$ définies sur un ensemble de n variables, la fonction `random_sat` a pour objectif de trouver une valuation qui satisfait la formule, s'il en existe une et qu'elle y arrive. Cette fonction doit effectuer au plus k tentatives et renvoyer un résultat de type `valuation option`, avec une valuation qui satisfait la formule passée en paramètre si elle en trouve une et la valeur `None` sinon.
L'idée de ce programme est d'effectuer une assignation aléatoire des variables puis de vérifier que chaque clause est satisfaite. Si une clause n'est pas satisfaite, on modifie aléatoirement la valeur associée à un littéral de cette clause, qui devient ainsi satisfaite, puis on recommence.

2. Si ce programme renvoie `None`, peut-on conclure que la formule f en entrée n'est pas satisfiable ? De quel type d'algorithme probabiliste s'agit-il ?

correction

Non.
Il s'agit d'un algorithme de Monte-Carlo (complexité fixée, mais pas de garantie que le résultat soit correct).

3. Proposer un jeu de 5 tests élémentaires permettant de tester la correction de ce programme.

correction

On propose le jeu de tests suivant, qui couvre les cas où
- la formule est vide,
- il y a une clause vide,
- la formule est satisfiable avec plusieurs solutions,
- la formule est satisfiable avec une unique solution,
- la formule n'est pas satisfiable.

```
random_sat [[|V(0) ; NV(1)|] ;[|V(0) ; V(1)|]] 2 3;;

random_sat [[|V(0) ; NV(1)|] ;[|V(0) ; V(1)|]] 2 1;;

random_sat [[|V(0) ; NV(1)|] ;[|V(0) ; V(1)|] ;[|NV(0) ; NV(1)|] ;[|NV(0) ; V(1)|]] 2 5;;

random_sat [[|V(0) ; NV(1)|] ;[|V(0) ; V(1)|] ;[||]] 2 5;;

random_sat [[|V(0) ; NV(1) ; V(2)|] ;[|V(0) ; NV(1) ; NV(2)|] ;[|NV(0)|] ;[|V(0) ; V(1) ; V(2)|]] 3 50;;
```

4. Compléter la fonction `random_sat`.

correction

```
(*Étant donné une formule, renvoie Some(une clause) non satisfaite par v, None si la formule est satisfaite*)
let rec clause_non_sat f v = match f with
    [] -> None
  | t::q -> if evalue t v
            then clause_non_sat q v
            else Some t
;;

let random_sat f n k =
  let v = initialise n in
  let rec aux num =
  if num = k then None
  else match clause_non_sat f v with
       | None -> Some v
       | Some c ->
          let na = Array.length c in
          if na = 0
          then None
          else let rand_index = Random.int na in
               match c.(rand_index) with
               | V(i) | NV(i) -> v.(i) <- not v.(i); aux (num + 1)
  in
  aux 0
;;
```

On s'intéresse maintenant au problème MAX-SAT qui consiste, toujours pour une formule en forme normale conjonctive comme ci-dessus, à trouver le plus grand nombre de clauses de cette formule simultanément satisfiables. Un algorithme d'approximation probabiliste naïf pour obtenir une solution approchée consiste à générer aléatoirement k valuations et retenir celle qui maximise le nombre de clauses satisfaites.

1. Implémenter cette approche en *OCaml* et vérifier sur quelques exemples. Quelle est sa complexité dans le meilleur et dans le pire cas ?

correction

```
(*nombre de clauses de f satisfaites par v*)
let rec nb_sat f v =
  match f with
    [] -> 0
  | t::q -> nb_sat q v + if evalue t v then 1 else 0
;;
```

```
let max_sat f n k =
  let r = ref 0 in
  for i = 0 to k-1 do
    let res = nb_sat f (initialise n) in
    if res > !r then r  := res
  done;
  !r
;;
```

La complexité temporelle est dans le pire des cas $O(k(n + |f|))$ – `nb_sat` s'exécutant en temps linéaire en la taille de la formule.
Dans le meilleur des cas, chaque clause va être immédiatement satisfaite, et l'on obtiendra une complexité $O(kc)$, où c est le nombre de clauses de la formule.

2. Sous l'hypothèse P $\neq$ NP, peut-il exister un algorithme de complexité polynomiale pour résoudre MAX-SAT ? Justifier.

correction

Non, car sinon, on pourrait résoudre SAT en temps polynomial en testant simplement si le résultat renvoyé par l'algorithme résolvant MAX-SAT renvoie le nombre de clauses.

Chapitre 11

(CCINP) Sac à dos * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 178 lignes)

$*$

Algorithmique, C, Algorithmes gloutons, Backtracking, Branch and bound,
sources : `ccinpsacados.tex`

L'exercice suivant est à traiter dans le langage C.

On dispose de $n \geqslant 1$ objets $\{o_0, \ldots, o_{n-1}\}$ de valeurs respectives $(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ et de poids respectifs $(p_0, \ldots, p_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$. On souhaite transporter dans un sac de poids maximum $p_{\max}$ un sous-ensemble d'objets ayant la plus grande valeur possible. Formellement, on souhaite donc maximiser

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$$

sous les contraintes

$$(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i p_i \leqslant p_{\max}$$

Intuitivement, la variable x_i vaut 1 si l'objet o_i est mis dans le sac et 0 sinon.
On propose d'utiliser un algorithme glouton dont le principe est de considèrer les objets $o_0, o_1, \ldots, o_{n-1}$ dans l'ordre et de choisir à l'étape i l'objet i (donc poser $x_i = 1$) si celui-ci rentre dans le sac avec la contrainte de poids maximal respectée et ne pas le choisir (donc poser $x_i = 0$) sinon. On remarque que les valeurs $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ ne sont pas directement utilisées par cet algorithme, elle le seront lors du tri éventuel des objets.

1. Proposer un type de données pour implémenter, pour n objets, leurs valeurs, leurs poids et les indicateurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

correction

Correction de M.Péchaud

Je trouve curieux de n'avoir qu'un type de données pour l'entrée et la sortie.
Je propose la structure suivante pour une instance du problème,

```c
struct sacados_t {
  int n;
  int* vals;
  int* poids;
};

typedef struct sacados_t sacados;
```

et de représenter les indicateurs par un `int*` (on pourrait penser à un `bool*`, mais cela ne respecterait pas la convention de l'énoncé).

2. Écrire une fonction qui implémente la méthode gloutonne décrite ci-dessus à partir de $n, p_{\max}$ et $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ et qui permet de renvoyer les indicateurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ pour le choix glouton.

correction

```c
int* naif(sacados* sac, int pmax) {
  int* ind = malloc(sac->n * sizeof(int));
  int poids_restant = pmax;
  for (int i = 0; i < sac->n; i++) {
    if (sac->poids[i] <= poids_restant) {
      ind[i] = 1;
      poids_restant -= sac->poids[i];
    }
    else {
      ind[i] = 0;
    }
  }
  return ind;
}
```

3. Écrire un programme complet qui permet de lire sur l'entrée standard (au clavier par défaut) un entier $n \geqslant 1$, puis un entier naturel $p_{\max}$, puis n entiers naturels correspondant aux valeurs $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, puis n entiers naturels correspondant aux poids $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ et qui affiche sur la sortie standard (l'écran par défaut) sous une forme de votre choix les indicateurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, la valeur de la solution $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$ et le poids utilisé $\sum_{i=0}^{n-1} x_i p_i$. On rappelle que le spécificateur de format pour lire ou écrire un entier est % d.

correction

```c
int main() {
  sacados s;
  printf("Entrez n svp\n");
  scanf("%d", &s.n);
  s.poids = malloc(s.n * sizeof(int));
  s.vals = malloc(s.n * sizeof(int));

  int pmax;

  printf("Entrez pmax\n");
  scanf("%d", &pmax);

  printf("Entrez les n poids\n");
  for (int i = 0; i < s.n; i++) {
    scanf("%d", &s.poids[i]);
  }
  printf("Entrez les n valeurs\n");
  for (int i = 0; i < s.n; i++) {
    scanf("%d", &s.vals[i]);
  }

  int* ind = naif(&s, pmax);

  printf("Indicateurs : ");
  for (int i = 0; i < s.n; i++)
    printf("%d", ind[i]);

  printf("\n");

  int val_tot = 0;
  int poids_tot = 0;

  for (int i = 0; i < s.n; i++)
    if (ind[i] == 1) {
      val_tot += s.vals[i];
      poids_tot += s.poids[i];
    }

  printf("valeur : %d\npoids : %d", val_tot, poids_tot);

}
```

4. L'algorithme glouton ci-dessus donne-t-il toujours une solution optimale ?

(a) si on ne suppose rien sur l'ordre des objets a priori ;
(b) si les objets sont triés par ordre de valeur décroissante ;
(c) si les objets sont triés par ordre de poids croissant ;
(d) si les objets sont triés par ordre décroissant des quotients $\frac{v_i}{p_i}$.

Justifier à chaque fois votre réponse à l'aide d'un contre-exemple ou d'une démonstration.

correction

(a) Non. Exemple : $p_{max} = 5$, $v = p = (4, 3, 2)$ (l'optimum est 5, l'algorithme glouton renvoie 4).
(b) Non, même exemple que précédemment.
(c) Non. Exemple : $p_{max} = 5$, $p = (1, 1, 1, 1, 1, 5)$, $v = (1, 1, 1, 1, 1, 10)$ (l'optimum est 10, l'algorithme glouton renvoie 5).
(d) Non. Exemple : $p_{max} = 3$, $p = (2, 3)$, $v = (3, 4)$ (l'optimum est 4, l'algoirhtme glouton renvoie 3).

5. Le problème du sac à dos étudié dans cet exercice est un problème d'optimisation. Donner le problème de décision associé en utilisant une valeur seuil v_{seuil} . Montrer que ce problème de décision est dans la classe NP.

correction

Il s'agit du problème consistant à déterminer – étant donnée une instance du problème – s'il existe des indicateurs respectant la contrainte de poids et donnant une valeur supérieure ou égale à v_{seuil}.
Ce problème est immédiatement dans NP en prenant comme certificat les indicateurs (on vérifie alors en temps linéaire que la contrainte de poids est satisfaite, et que la valeur dépasse le seuil donné).

6. Quelle serait la complexité d'une méthode qui examinerait tous les choix possibles pour retenir le meilleur ? Quelles stratégies d'élagage pourrait-on mettre en œuvre pour réduire l'espace de recherche ?

correction

Il y a 2^n choix pour les indicateurs, donc on obtiendrait naïvement une complexité $O(n2^n)$ pour trouver l'optimum.
Si l'on donne des valeurs 0 ou 1 séquentiellement à chaque objet, on peut couper une branche dès que l'on ne satisfait plus la contrainte de poids.
On peut également utiliser en plus une approche de type branch and bound en coupant une branche dès que le fait de prendre tous les objets restants ne permettrait plus de dépasser la valeur maximale trouvée jusqu'à présent.

On peut montrer que ce problème de décision est NP-complet.

Chapitre 12

(CCINP) Tableaux * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 149 lignes)

$*$

Algorithmique, C,

sources : `ccinptableau.tex`

L'exercice suivant est à traiter dans le langage C.

Dans tout l'exercice, on ne considère que des tableaux d'entiers de longueur $n \geqslant 0$.
Un squelette de programme C vous est donné, avec un jeu de tests qu'il ne faut pas modifier. Vous pouvez bien sûr ajouter vos propres tests à part.

1. Écrire une fonction de prototype `int nb_occurrences (int n, int* tab, int x )` qui renvoie le nombre d'occurrences de l'élément `x` dans le tableau `tab` de longueur `n`. Quelle est la complexité de cette fonction ?

correction

```c
int nb_occurrences(int n, int* tab, int x) {
  int r = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (tab[i] == x) r+=1;
  }
  return r;
}
```

La complexité temporelle de cette fonction est immédiatement $O(n)$.

Dans toute la suite, on suppose que les tableaux sont triés dans l'ordre croissant. On va chercher à écrire une version plus efficace de la fonction ci-dessus qui exploite cette propriété. On cherche tout d'abord à écrire une fonction
`int une_occurrence (int n, int* tab, int x)`
qui permet de renvoyer un indice d'une occurrence quelconque de l'élément x s'il est présent dans le tableau et -1 sinon. On procède par dichotomie.

2. Compléter le code de la fonction `int une_occurrence (int n , int* tab, int x)` qui vous est donnée dans le squelette. Cette fonction doit avoir une complexité en $O(\log n)$.

correction

```c
int une_occurrence (int n , int* tab, int x) {
  int d = 0;
  int f = n-1;
  while (d <= f) {
    int m = (d + f)/2;
    if (tab[m] == x) return m;
    if (tab[m] < x) d = m + 1;
    else f = m - 1;
  }
  return -1
}
```

3. Écrire une fonction `int premiere_occurrence (int n, int* tab, int x)` qui renvoie l'indice de la première occurrence d'un élément x dans un tableau tab de longueur n si cet élément est présent et -1 sinon. Cette fonction doit avoir une complexité en $O(\log n)$.

correction

On prend pour invariant «si l'élément apparaît dans le tableau, sa première occurrence est entre les indices d et f inclus».

```c
int premiere_occurrence(int n, int *tab, int x) {
  int d = 0;
  int f = n-1;
  while (d <= f) {
    if (d == f && tab[d] == x) return d;
    int m = (d + f)/2;
    if (tab[m] == x) f = m; // diminue strictement dès lors que d != f
    if (tab[m] > x) f = m - 1;
    if (tab[m] < x) d = m + 1;
  }
  return -1;
}
```

4. Écrire une fonction `int nombre_occurrences (int n, int* tab, int x )` qui renvoie le nombre d'occurrences de l'élément x dans le tableau tab de longueur n. Cette fonction devra avoir une complexité en $O(\log n)$.

correction

On commence par écrire une fonction `derniere_occurrence` en adaptant la fonction précédente, mais il faut être attenti·v·e à la terminaison : si l'on écrit `d = m`, d peut ne pas être modifié dans le cas où $f = d + 1$.

```c
int derniere_occurrence(int n, int *tab, int x) {
  int d = 0;
  int f = n-1;
  while (d <= f) {
    if (d + 1 >= f) {
      if (tab[f] == x) return f;
      else if (tab[d] == x) return d;
    }
    int m = (d + f)/2;
    if (tab[m] == x) d = m;
    if (tab[m] > x) f = m - 1;
    if (tab[m] < x) d = m + 1;
  }
  return -1;
}
```

5. Justifier que la fonction `une_occurrence` termine et est correcte. On donnera un variant et un invariant de boucle que l'on justifiera.

correction

Un invariant est ici : «si l'élément apparaît dans le tableau, il apparaît entre les indices d et f inclus, et si $f < d$, il n'apparaît pas».
- si un résultat autre que -1 est renvoyé, c'est un m tel que $tab[m] = x$, ce qui est correct.
- si -1 est renvoyé, c'est que l'on est sortie de la boucle, donc que $d > f$ – ce qui d'après l'invariant ci-dessus signifie que l'élément n'apparaît pas.

Un variant possible est $f - d$, qui par construction décroit strictement à chaque passage dans la boucle qui ne termine pas la fonction.

6. Montrer que la complexité de la fonction `une_occurrence` est bien en $O(\log n)$.

correction

$f - d + 1$ (la taille du sous-tableau sur laquelle on travaille) est au moins divisé par 2 à chaque passage dans la boucle qui ne termine pas la fonction.
Cette longueur est donc inférieure à $n/2^i$ après i itérations.
La fonction termine au plus tard lorsque $n/2^i \leqslant 1$, ce qui équivaut à $i \geqslant \log_2(n)$ – qui est vrai dès que $i = \lceil \log_2(n) \rceil$.
La complexité est donc $O(\log_2(n))$.

Chapitre 13

(CCINP) Tableaux autoréférents * (CCINP 0, ex B, corrigé — oral - 195 lignes)

$*$

Algorithmique, Backtracking, Ocaml,
sources : `ccinpautoreferent.tex`

L'exercice suivant est à traiter dans le langage *OCaml*.

1. Écrire une fonction `somme : int array → int → int` telle que l'appel `somme t i` calcule la somme partielle $\sum_{k=0}^{i} t.(k)$ des valeurs du tableau t entre les indices 0 et i inclus.

correction

```
let rec somme t i =
  if i = -1 then 0
  else t.(i) + somme t (i-1)
```

Un tableau t de $n > 0$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$ est dit autoréférent si pour tout indice $0 \leqslant i < n, t.(i)$ est exactement le nombre d'occurrences de i dans t, c'est-à-dire que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad t.(i) = \text{card}(\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid t.(k) = i\})$$

Ainsi, par exemple, pour $n = 4$, le tableau suivant est autoréférent :

i	0	1	2	3
$t.(i)$	1	2	1	0

En effet, la valeur 0 existe en une occurrence, la valeur 1 en deux occurrences, la valeur 2 en une occurrence et la valeur 3 n'apparait pas dans t.

2. Justifier rapidement qu'il n'existe aucun tableau autoréférent pour $n \in [\![1; 3]\!]$ et trouver un autre tableau autoréférent pour $n = 4$.

correction

- Pour $n = 3$,
  - $T[0]$ ne peut contenir 0 pour la même raison que précédemment.
  - Si $T[0] = 1$, T est de la forme $[1, 0, ?]$ ou $[1, ?, 0]$. Le premier cas est impossible car 1 apparaît au moins une fois. Pour le second cas, $T[1] = 1$ est impossible car 1 apparaît au moins deux fois. $T[1] = 2$ ne convient pas non plus.
  - Si $T[0] = 2$, la seule possibilité est $[2, 0, 0]$, qui ne convient pas car 2 apparaît une fois.
- Pour $n = 4$, $[2; 0; 2; 0]$ convient.

3. Écrire une fonction `est_auto : int array → bool` qui vérifie si un tableau de taille $n > 0$ est autoréférent. On attend une complexité en $O(n)$.

correction

```
let est_auto t =
   let n = Array.length t in
   let cnt = Array.make n 0 in
   for i = 0 to n-1 do
      cnt.(t.(i)) <- cnt.(t.(i)) + 1
   done;
   t = cnt
```

La complexité est bien linéaire en la taille du tableau.

On propose d'utiliser une méthode de retour sur trace (backtracking) pour trouver tous les tableaux autoréferents pour un $n > 0$ donné. Une fonction `gen_auto` qui affiche tous les tableaux autoréférents pour une taille donnée vous est proposée. Cette version ne fonctionne cependant que pour de toutes petites valeurs de n (instantané pour $n = 5$, un peu long pour $n = 8$, sans espoir pour $n = 15$). On pourra vérifier qu'il existe exactement deux tableaux autoréférents pour $n = 4$, un seul pour $n \in \{5, 7, 8\}$ et aucun pour $n = 6$.
Pour accélérer la recherche, il faut élaguer l'arbre (repérer le plus rapidement possible qu'on se trouve dans une branche ne pouvant pas donner de solution).

4. Que peut-on dire de la somme des éléments d'un tableau autoréférent ? En déduire une stratégie d'élagage pour accélérer la recherche.
Indication : utiliser la fonction somme de la première question pour interrompre par un échec l'exploration lorsque `somme t i` dépasse déjà la valeur maximale possible.

correction

La somme des éléments d'un tableau autoréférent est la longueur du tableau – chaque élément indiquant combien de fois l'un des indices y apparaît.
Donc on peut arrêter l'exploration d'une branche à partir du moment où la somme partielle des éléments alloués jusqu'à présent dépasse la longueur totale du tableau.

```
let gen_auto_opt n =
  let t = Array.make n 0 in
  let rec explore i = (*explore tous les tableaux où les i premières ↩
     cases sont celles de t*)
    if i = n then (
      if est_auto t
      then print_array t
    )
    else if somme t (i-1) <= n then
      for j = 0 to n - 1 do
        t.(i) <- j;
        explore (i+1)
      done;
  in
  explore 0
```

Il serait préférable de ne pas recalculer la somme partielle à chaque fois.

5. Que peut-on dire si juste après avoir affecté la case $t.(i)$, il y a déjà strictement plus d'occurrences d'une valeur $0 \leqslant k \leqslant i$ que la valeur de $t.(k)$? En déduire une stratégie d'élagage supplémentaire et la mettre en œuvre. Combien de temps faut-il pour résoudre le problème pour $n = 15$?

correction

Dans cette condition, le tableau ne pourra pas être autoréférent, et on peut donc élaguer.

```
let gen_auto_opt2 n =
  let t = Array.make n 0 in
  let rec explore i = (*explore tous les tableaux où les i premières ↩
     cases sont celles de t*)
    if i = n then (
      if est_auto t
      then print_array t
    )
    else if somme t (i-1) <= n then
      for j = 0 to n - 1 do
        t.(i) <- j;
```

```
        if count t i i <= j then
          explore (i+1)
      done;
  in
  explore 0
```

6. Après avoir affecté la case $t.(i)$, combien de cases reste-t-il à remplir ? Combien de ces cases seront complétées par une valeur non nulle ? À quelle condition est-on alors certain que la somme dépassera la valeur maximale possible à la fin ? En déduire une stratégie d'élagage supplémentaire et la mettre en œuvre. Combien de temps faut-il pour résoudre le problème pour $n = 30$?

correction

Il reste $n-1-i$ cases à remplir, dont $t.(0)$ seront seront mises à 0, donc $n-1-i-t.(0)$ à une valeur au moins 1.
Donc la somme totale sera au moins égale à $n-1-i-t.(0)+s_i$ – où s_i est la somme partielle de 0 à i.
Cette somme dépasse n ssi $n-1-i-t.(0)+s_i > n$ ssi $s_i > 1+i+t.(0)$.

```
let gen_auto_opt3 n =
  let t = Array.make n 0 in
  let rec explore i = (*explore tous les tableaux où les i premières ↩
     cases sont celles de t*)
    if i = n then (
      if est_auto t
      then print_array t
    )
    else let s = somme t (i-1) in
         if s <= n then
           for j = 0 to n - 1 do
             t.(i) <- j;
             if count t i i <= j && s + t.(i) <= 1 + i + t.(0) then
               explore (i+1)
           done;
  in
  explore 0
```

Pour $n = 30$, je n'obtiens pas un temps d'exécution raisonnable, mais le code doit pouvoir être largement optimisé.

7. Montrer qu'il existe un tableau autoréférent pour tout $n \geqslant 7$. On pourra conjecturer la forme de ce tableau en testant empiriquement pour différentes valeurs de $n \geqslant 7$. On ne demande pas de montrer que cette solution est unique.

correction

Pour $n \geqslant 7$, le tableau suivant est autoréférent :
`[|n-4, 2, 1, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0|]`

Chapitre 14

(CCINP) Activation de processus * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 156 lignes)

$*$

Complexité, Réduction,
sources : `procesCCINP23.tex`

Activation de processus (exn 2023) :

Soit un système temps réel à n processus asynchrones $i \in [\![1, n]\!]$ et m ressources r_j. Quand un processus i est actif, il bloque un certain nombre de ressources listées dans un ensemble P_i et une ressource ne peut être utilisée que par un seul processus. On cherche à activer simultanément le plus de processus possible.

Le problème de décision `ACTIVATION` correspondant ajoute un entier k aux entrées et cherche à répondre à la question : "Est-il possible d'activer au moins k processus en même temps ?"

1. Soit $n = 4$ et $m = 5$. On suppose que $P_1 = \{r_1, r_2\}$, $P_2 = \{r_1, r_3\}$, $P_3 = \{r_2, r_4, r_5\}$ et $P_4 = \{r_1, r_2, r_4\}$. Est-il possible d'activer 2 processus en même temps ? Même question avec 3 processus.

correction

Correction fournie par le concours.
Oui pour $k = 2$ car on peut activer P_2 et P_3 en même temps. Non pour $k = 3$ car si on active trois processus, au moins deux utilisent la ressource r_1.

Jury : On attend du candidat une réponse en oui / non avec une précision de quels processus activer dans le cas où la réponse est oui et une très rapide justification dans le cas où la réponse est non. Une réponse orale suffit.

2. Dans le cas où chaque processus n'utilise qu'une seule ressource, proposer un algorithme résolvant le problème `ACTIVATION`. Évaluer la complexité de votre algorithme.

correction

On suppose que l'entrée de l'algorithme est un ensemble de n couples (numéro de la machine, numéro de la ressource qu'elle utilise). On peut alors proposer l'algorithme suivant :

```
1  Initialiser un tableau T à ↩
       m cases contenant faux
2  nb_machines = 0
3  Pour Chaque couple ↩
       (n_machine, n_ressource)
4      Si T[n_ressource] = faux
5          T[n_ressource] = vrai
6          Incrémenter ↩
               nb_machines
7  Renvoyer nb_machines
```

Le principe est que le tableau T indique en case i si la i-ème ressource est utilisée ou non. On pourrait même calculer sans surcoût les machines activées en plus de leur nombre avec cette méthode. La complexité de

cette méthode est en $O(n+m)$ (à cause de l'initialisation de T) mais on pourrait la faire passer à un $O(n)$ en stockant les informations de T dans un dictionnaire (les clés seraient les numéros des ressources, et les valeurs n'ont pas d'importance).

Jury : De multiples réponses sont possibles sur cette question et sont acceptées du moment qu'elles sont clairement décrites et correctement analysées. On n'attend pas une complexité optimale.

On souhaite montrer que `ACTIVATION` est NP-complet.

3. Donner un certificat pour ce problème.

correction

Un sous-ensemble de numéros de machines convient (et il est de taille au plus n donc polynomial en la taille de l'entrée de `ACTIVATION`).

Jury : Une courte phrase décrivant la nature d'un tel certificat et indiquant sa polynomialité en la taille de l'entrée suffit à obtenir tous les points.

4. Écrire en pseudo code un algorithme de vérification polynomial. On supposera disposer de trois primitives, toutes trois de complexité polynomiale :

(a) `appartient(c,i)` qui renvoie `Vrai` si le processus `i` est dans l'ensemble d'entiers `c`.

(b) `intersecte(P`$_i$`,R)` qui renvoie `Vrai` si le processus `i` utilise une ressource incluse dans un ensemble de ressources `R`.

(c) `ajoute(P`$_i$`,R)` qui ajoute les ressources `P`$_i$ dans l'ensemble `R` et renvoie ce nouvel ensemble.

correction

On propose le code de vérification suivant étant donné un certificat c :

```
1  Ressources_utilisées = ∅
2  Pour toute machine i
3  {
4      Si appartient(c,i)
5      {
6        Si intersecte(P_i, ↩
             Ressources_utilisées)
7        {
8            Renvoyer faux
9        }
10       Ressources_utilisées = ajoute(↩
             P_i, Ressources_utilisées)
11     }
12 }
13 Renvoyer vrai
```

Pour chaque machine, si elle appartient à l'ensemble des machines qu'on souhaite activer simultanément, on vérifie qu'elle n'entre pas en conflit sur les ressources avec une des machines qui la précède (ce qui suffit par symétrie de la relation "entrer en conflit"). La variable `Ressources_utilisées` représente l'ensemble des ressources utilisées par les machines considérées jusque là.

Jury : On attend un algorithme utilisant à bon escient les primitives proposées par le sujet.

En théorie des graphes, le problème `STABLE` se pose la question de l'existence dans un graphe non orienté $G=(S,A)$ d'un ensemble d'au moins k sommets ne contenant aucune paire de sommets voisins. En d'autres termes, existe-t-il $S' \subset S,\ |S'| \geqslant k$ tel que $s,p \in S' \Rightarrow (s,p) \notin A$?

5. En utilisant le fait que `STABLE` est NP-complet, montrer par réduction que le problème `ACTIVATION` est également NP-complet.

correction

Les questions 3 et 4 montrent déjà que `ACTIVATION` est dans NP puisque l'algorithme en Q4 est de complexité polynomiale en la taille de l'entrée du problème d'après l'énoncé

Soit $I_S = \{G=(S,A),k\}$ une instance de `STABLE`. Considérons alors l'instance suivante I_A de `ACTIVATION` : on créé une machine i par sommet de S, une ressource r par arête et la liste de ressources nécessaires à la machine i est $\{r \text{ ressource } | r \text{ correspond à une arête incidente à } i\}$; on conserve par ailleurs k. Elle est constructible à partir de I_S en temps $O(|S|+|A|)$. De plus S' est un stable de taille k dans G si et seulement si les k machines de

S' sont activables en même temps.
Ceci montre que `STABLE` $\leqslant$ `ACTIVATION` et comme le premier est NP-difficile, il en va de même pour le second, ce qui achève la preuve de NP-complétude de `ACTIVATION`.

Jury : Le jury est attentif au fait que tous les arguments soient bien présents : description de la réduction, preuve que c'en est une et justification de son caractère polynomial pour le caractère NP-difficile ; caractère NP pour pouvoir conclure quant à la NP-complétude.

Chapitre 15

(CCINP) Formules propositionnelles croissantes * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 142 lignes)

$*$

Logique propositionnelle,
sources : `logccinp1.tex`

Formules propositionnelles croissantes (exn 2023) :

On fixe un entier $n \geq 1$ et $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un ensemble de variables propositionnelles. Étant données deux applications $a : E \to \{V, F\}$ et $b : E \to \{V, F\}$ on dit que a est plus petite que b (que l'on note $a \leqslant b$) si :

$$\forall x \in E, a(x) = V \implies b(x) = V.$$

Dans un but de simplification des calculs, on pourra faire les abus de notation suivants : assimiler V à 1 et F à 0 et vice versa. Avec cet abus, la propriété $a \leqslant b$ se traduit par :

$$\forall x \in E, a(x) \leqslant b(x).$$

1. Étant donnée une valuation sur E, rappeler comment on l'étend naturellement en une valuation sur les formules propositionnelles.

correction

Corrigé fourni par le concours.
On fixe $a : E \to \{V, F\}$ une valuation. On étend a par induction comme suit

$$\text{Si } P \text{ et } Q \text{ sont des formules propositionnelles, alors } \begin{array}{l} a(\neg P) = \text{ Négation de } a(P). \\ a(P \wedge Q) = a(P) \text{ et } a(Q), \\ a(P \vee Q) = a(P) \text{ ou } a(Q). \end{array}$$

Jury : Le jury profite de cette question pour vérifier que le candidat sait faire la différence entre syntaxe et sémantique.

On dit qu'une formule propositionnelle P est *croissante* si pour tout a, b des valuations vérifiant $a \leqslant b$, on a :

$$a(P) = V \implies b(P) = V.$$

2. Montrer que si P, Q sont des formules croissantes, alors $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ sont des formules croissantes.

correction

Soient P, Q deux formules croissantes. Montrons que $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ sont croissantes.
Soient a, b deux valuations vérifiant $a \leqslant b$. En utilisant l'abus de notation, on a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} a(P \wedge Q) = \min(a(P), a(Q)), & a(P \vee Q) = \max(a(P), a(Q)), \\ b(P \wedge Q) = \min(b(P), b(Q)), & b(P \vee Q) = \max(b(P), b(Q)). \end{array}.$$

Sachant que $a \leqslant b$, on a donc $a(P) \leqslant b(P)$ et $a(Q) \leqslant b(Q)$. On en déduit :

$$\min(a(P), a(Q)) \leqslant \min(b(P), b(Q)) \text{ et } \max(a(P), a(Q)) \leqslant \max(b(P), b(Q))$$

Autrement dit $a(P \wedge Q) \leqslant b(P \wedge Q)$ et $a(P \vee Q) \leqslant b(P \vee Q)$.
$P \wedge Q$ et $P \vee Q$ sont bien croissantes.

Jury : Le candidat est autorisé à utiliser l'abus introduit par l'énoncé (assimiler V à 1 et F à 0) mais le jury se réserve le droit de vérifier que le candidat a bien compris en quoi c'est un abus. Un candidat qui prouve rigoureusement la propriété souhaitée pour un des connecteurs et indique ce qu'il suffirait d'y changer pour l'autre obtient tous les points.

3. Soit C une clause conjonctive satisfiable contenant au moins un littéral. Montrer qu'elle est croissante si et seulement si elle ne contient aucun littéral de la forme $\neg x$ avec $x \in E$.

correction

On montre par double implication.
- (Sens réciproque). Soit C une clause conjonctive satisfiable contenant au moins un littéral. Une clause contenant un unique littéral positif est clairement croissante. Par récurrence et par stabilité des formules croissantes par l'opération $\wedge$, on en déduit que tout clause conjonctive contenant uniquement des littéraux positifs est croissante.
- (Sens direct, par la contraposée). Considérons une clause conjonctive C satisfiable contenant au moins un littéral. Montrons que si celle-ci est croissante, alors tout littéral apparaissant dans C est positif. Supposons que C contient au moins un littéral négatif et quitte à réarranger les termes, on considère que $C = \neg x \wedge C'$ avec C' une clause conjonctive ne contenant pas x (possible car C est satisfiable).
  Considérons une valuation a vérifiant $a(C) = V$. On a alors $a(\neg x) = V$ et $a(C') = V$. Donc $a(x) = F$. On choisit b qui coïncide avec a sur toutes les variables propositionnelles exceptée sur x où on a $b(x) = V$. Par construction, $a \leqslant b$. Mais $b(C) = F$. Donc C n'est pas une formule croissante.

On a bien l'équivalence demandée.

Jury : Il ne faut pas oublier de traiter le caractère nécessaire et suffisant.

4. On considère une formule propositionnelle P qui n'est ni une tautologie, ni une antilogie.

(a) Montrer que si P est logiquement équivalente à une disjonction de clauses conjonctives dont aucune ne contient un littéral de la forme $\neg x$ avec $x \in E$, alors P est une formule propositionnelle croissante.

correction

Si P est logiquement équivalente à une disjonction de clauses conjonctives sans littéral négatif, par stabilité de la croissance par disjonction et les clauses conjonctives sans littéral négatif étant croissante, on en déduit que P est croissante.

(b) Réciproquement, montrer que si P est une formule propositionnelle croissante, alors elle est logiquement équivalente à une disjonction de clauses conjonctives dont aucune ne contient un littéral de la forme $\neg x$ avec $x \in E$.

correction

Récriproquement, soit P une formule croissante. On pose :

$$P' = \bigvee_{C \vDash P} C$$

où pour deux formules P, Q, on a $P \vDash Q$ si pour toute valuation a , $a(P) = V \implies a(Q) = V$.
Dans notre cas, C désigne une clause conjonctive croissante inférieure à P (Autrement dit, pour toute valuation a : $a(C) \leqslant a(P)$) qui ne contient aucun littéral négatif. Vérifions que P' est logiquement équivalente à P.
- soit a une valuation vérifiant $a(P') = V$. Il existe $C \leqslant P$ une clause telle que $a(C) = V$. On a bien $a(P) = V$.
- Réciproquement, si a est une valuation vérifiant $a(P) = V$, on pose :

$$C = \bigwedge_{x \text{ positif } a(x)=V} x$$

Remarquons que si C était indexé par l'ensemble vide, a enverrait tous les littéraux sur F et dans ce cas par croissance, P serait une tautologie ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :
— C n'est pas indexé par le vide (sinon, a enverrait tous les littéraux positifs sur F et par croissance, P serait une tautologie)
— C contient uniquement des littéraux positifs,
— on a $C \vDash P$ par croissance de P.

Donc C apparaît dans P'. D'où $a(P') = V$.
Ainsi, P et P' sont bien logiquement équivalentes.

Jury : Le jury peut donner une indication pour aider le candidat à trouver une formule permettant de répondre à cette question.

Chapitre 16

(CCINP) Grammaires algébriques * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 123 lignes)

$*$

Grammaires,
sources : `grammccinp1.tex`

On considère la grammaire algébrique G sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et d'axiome S dont les règles sont :

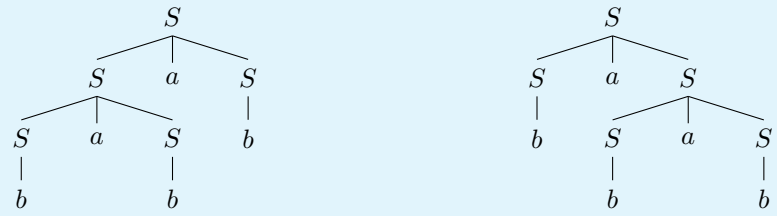
$$S \to SaS \,|\, b$$

1. Cette grammaire est-elle ambiguë ? Justifier.

correction

Correction de J.B.Bianquis

Cette grammaire est ambiguë car le mot $babab \in L(G)$ admet les deux arbres syntaxiques suivants :



Or ces derniers sont différents.

Jury : Le jury attend du candidat qu'il exhibe un mot montrant l'ambiguïté, en justifiant cette dernière via deux arbres syntaxiques différents ou bien deux dérivations gauches (ou droites) différentes.

2. Déterminer (sans preuve pour cette question) le langage L engendré par G. Quelle est la plus petite classe de langages à laquelle L appartient ?

correction

On constate que $L(G)$ est rationnel car dénoté par l'expression rationnelle $(ba)^\star b$.

Jury : Il est attendu que le candidat exhibe une expression régulière pour ce langage (qui est donc régulier). Plusieurs sont possibles et toutes sont acceptées. Aucune justification n'est nécessaire à ce stade, sauf si l'expression proposée est démesurément complexe, auquel cas le jury invite le candidat à lui expliquer. Certains candidats n'ont pas compris ce qui était attendu par «la plus petite classe de langages », le jury a alors précisé ses attentes sans pénaliser pour autant ces candidats.
Au moins un candidat a répondu à cette question en affirmant que $L(G)$ est en fait local. Il a été invité à poursuivre l'exercice avec cette réponse.

3. Prouver que $L = L(G)$.

correction

Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $H(n)$ suivante : si $u \in L$ est un mot de taille n alors u est engendré par la grammaire G. C'est bien sûr le cas pour $n = 1$ puisque le seul mot de L de cette taille est b, engendré par la deuxième règle de G.
Soit donc $n \in \mathbb{N}^\star$ et u un mot de L de taille $n+1$. Comme $|u| \geqslant 2$, ba est nécessairement préfixe de u et il existe donc $v \in (ba)^\star b = L$ tel que $u = bav$. Par hypothèse, ce mot v est engendré par G : il existe une dérivation telle que $S \Rightarrow^\star v$. On en déduit que

$$S \Rightarrow SaS \Rightarrow baS \Rightarrow^\star bav = u$$

est une dérivation licite et donc que $u \in L(G)$. Cette récurrence montre que $L \subset L(G)$.
Montrons réciproquement que $L(G) \subset L$ en montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $H(n)$ suivante : si $u \in \Sigma^\star$ se dérive de S en n dérivations alors $u \in L$. C'est acquis pour $n = 1$: le seul mot de $\Sigma^\star$ qu'on peut obtenir en une dérivation est $b \in L$.
Soit donc $n \in \mathbb{N}^\star$ et u un mot dans $L(G)$ tel que $S \Rightarrow^{n+1} u$. Comme ce mot est obtenu en au moins 2 dérivations, les règles de G nous informent que la première est nécessairement $S \to SaS$ (sans quoi ce serait $S \to b$ et dans ce cas u serait obtenu en une seule dérivation). Donc la dérivation permettant d'obtenir u se décompose en :

$$S \Rightarrow SaS \Rightarrow^n u$$

On en déduit qu'il existe $v, w \in \Sigma^\star$ et $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $u = vaw$, $S \Rightarrow^{k_1} v$, $S \Rightarrow^{k_2} w$ et $k1 + k2 = n$. L'hypothèse de récurrence (forte) s'applique à v et w et on en déduit que ces deux mots appartiennent au langage dénoté par $(ba)^\star b$ donc qu'il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tels que $v = (ba)^{r_1} b$ et $w = (ba)^{r_2} b$. Par conséquent, $u = (ba)^{r_1} ba (ba)^{r_2} b = (ba)^{r_1 + r_2 + 1} b \in L$.

Jury : On attend une preuve précise et rigoureuse, par exemple par double inclusion. Les explications vagues et les arguments d'évidence ne satisfont pas le jury sur cette question.

4. Décrire une grammaire qui engendre L de manière non ambiguë en justifiant de cette non ambiguité.

correction

On sait à présent que $L(G) = (ba)^\star b$; il s'agit donc de trouver une grammaire non ambiguë engendrant ce langage. On peut proposer par exemple la grammaire dont les règles sont :

$$S \to Tb \qquad T \to baT \,|\, \varepsilon$$

les règles sur T permettant de générer le facteur dans $(ba)^\star$ et la première de rajouter le b final.
Cette grammaire G' est non ambiguë car pour tout mot dans $L(G')$, il existe une unique dérivation permettant de le construire (donc évidemment un seul arbre syntaxique) ; cette unicité découlant du fait que dans cette grammaire un non terminal se dérive toujours en un mot qui contient au plus un seul non terminal.

Jury : Comme pour la deuxième question, plusieurs grammaires sont ici possibles. On n'attend pas une preuve rigoureuse de non ambiguïté.

5. Montrer que tout langage dans la même classe de langages que L peut être engendré par une grammaire algébrique non ambiguë.

correction

La question demande de montrer que tout langage rationnel peut être engendré par une grammaire non ambiguë.
Soit donc L un langage rationnel. Par le théorème de Kleene, il existe un automate fini $A = (\Sigma, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ qui reconnaît L qu'on peut loisiblement supposer déterministe.
Considérons alors la grammaire dont les non terminaux sont $\{V_q \,|\, q \in Q\}$, l'axiome est V_{q_0}, les terminaux sont les lettres de Σ et dont les règles sont données par :
- Pour toute transition $q \xrightarrow{a} q'$ dans A, on ajoute la règle $V_q \to aV_{q'}$.
- Pour tout $q \in F$, on ajoute la règle $V_q \to \varepsilon$.

Cette grammaire engendre L de manière non ambiguë grâce au déterminisme de A.

Jury : Proposer une construction correcte d'une grammaire non ambiguë pour un langage régulier (a priori à partir de l'automate associé) suffit à obtenir tous les points. Le jury n'hésitait pas à aiguiller le candidat si nécessaire pour cette question.

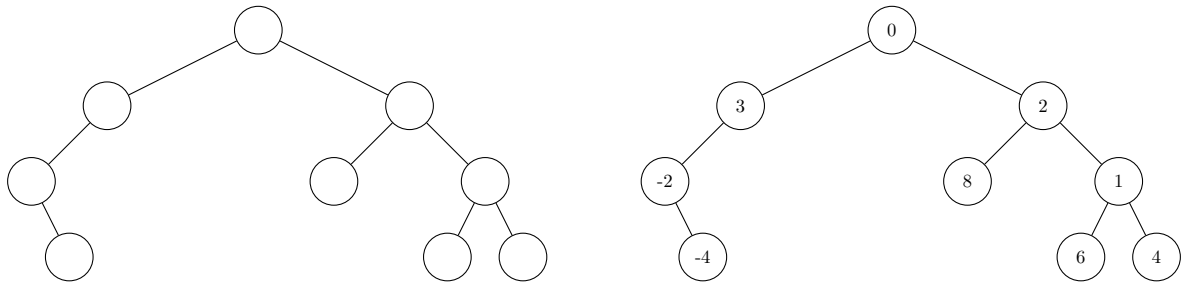
Chapitre 17

(CCINP) Minima locaux dans des arbres (Couverture dans des arbres) * (CCINP 23, ex A, corrigé — oral - 148 lignes)

$*$

Arbres, Complexité,
sources : `arbreCCINPA.tex`

Dans cet exercice, on considère des arbres binaires étiquetés par des entiers relatifs deux à deux distincts. Un nœud est un minimum local d'un arbre si son étiquette est plus petite que celle de son éventuel père et celles de ses éventuels fils. Considérons par exemple l'étiquetage (b) de l'arbre binaire non étiqueté (a) :



(a) (b)

1. Déterminer le ou les minima locaux de l'arbre (b).
2. Donner une définition inductive permettant de définir les arbres binaires ainsi que la définition de la hauteur d'un arbre. Quelle est la hauteur de l'arbre (b) ?
3. Montrer que tout arbre non vide possède un minimum local.
4. Proposer un algorithme permettant de trouver un minimum local d'un arbre non vide et déterminer sa complexité.

On considère un arbre binaire non étiqueté que l'on souhaite étiqueter par des entiers relatifs distincts deux à deux de manière à maximiser le nombre de minima locaux de cet arbre.

5. Proposer sans justifier un étiquetage de l'arbre (a) qui maximise le nombre de minima locaux.
6. Proposer un algorithme qui, étant donné un arbre binaire non étiqueté en entrée, permet de calculer le nombre maximal de minima locaux qu'il est possible d'obtenir pour cet arbre. Déterminer la complexité de votre algorithme.
7. Montrer que, pour un arbre de taille $n \in \mathbb{N}$, le nombre maximal de minima locaux est majoré par $\left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor$. *On pourra remarquer que les nœuds non minimaux couvrent l'ensemble des arêtes de l'arbre.*

correction

Corrigé de M.Péchaud

1. Les nœuds d'étiquettes -4, 0 et 1 sont les trois minima locaux.

   Jury : On attend simplement du candidat qu'il propose les minima trouvés sans justification. Une réponse orale suffit. En cas d'erreur, le candidat est invité à expliquer son raisonnement.
2. Un arbre est soit un arbre vide soit un nœud formé d'une étiquette et de deux sous-arbres. La hauteur est la profondeur maximale d'une feuille, c'est-à-dire la longueur maximale d'un chemin de la racine à une feuille. La hauteur de l'arbre (b) est 3.

   Jury : Dans le cas où le candidat propose une définition inductive des arbres avec une feuille pour cas de

base, il est guidé vers une définition dont le cas de base est l'arbre vide de sorte à rendre compte du fait que les arbres considérés ne sont pas binaires stricts.

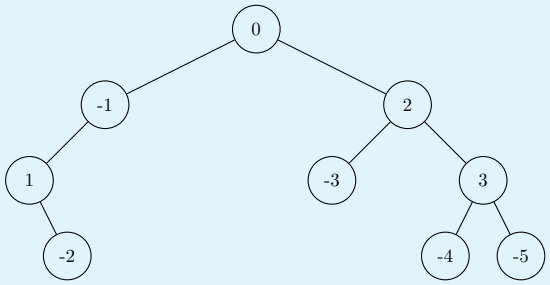
3. L'arbre possède un nombre fini non vide d'étiquettes et donc une étiquette de valeur minimale, qui est un minimum global et donc local.

Jury : Plusieurs stratégies sont ici acceptées (preuve par induction ou existence d'un minimum global qui est local par exemple).

4. Si la racine de l'arbre est un minimum local on a trouvé notre minimum local. Sinon, un des deux fils est non vide, avec une étiquette à sa racine plus petite que celle de la racine de l'arbre. Un appel récursif permet d'obtenir un minimum local de ce sous-arbre, qui est également un minimum local de l'arbre (que ce soit la racine du sous-arbre ou un descendant strict). La complexité est linéaire en la hauteur de l'arbre.

Jury : Si le candidat propose une solution linéaire en la taille de l'arbre, il est guidé vers une solution linéaire en la hauteur.

5. On propose l'étiquetage à la figure (c) dans lequels les 5 minima locaux sont étiquetés par des entiers strictement négatifs.



(c)

Proposer un étiquetage correct suffit à obtenir tous les points.

6. On propose une approche récursive qui pour un arbre a en entrée calcule $m(a)$ le nombre maximal de nœuds qui peuvent être des minima locaux dans un étiquetage de a, ainsi que, en même temps, la quantité $m_-(a)$ correspondant à cette même quantité mais en supposant de plus que la racine n'est pas un minimum local. Pour un arbre vide, ces deux valeurs valent 0. Pour un arbre a de fils gauche f_g et de fils droit f_d, on peut obtenir par appels récursifs les quantités $m(f_g)$, $m_-(f_g)$, $m(f_d)$ et $m_-(f_d)$. On a alors $m_-(a) = m(f_g)+m(f_d)$ et $m(a) = \max\{m_-(a), 1 + m_-(f_g) + m_-(f_d)\}$. La complexité est linéaire en la taille de l'arbre, chaque nœud est visité exactement une fois avec un nombre d'opérations constant.

Jury : Le jury attend une complexité linéaire. Des indications peuvent être apportées pour aiguiller le candidat vers une telle solution.

7. Le résultat est vrai pour $n = 0$ et on peut donc supposer que $n \geqslant 1$. Considérons un étiquetage et notons X l'ensemble des nœuds qui sont des minima locaux et Y ceux qui ne le sont pas. On remarque que deux nœuds adjacents ne peuvent pas être tous les deux des minima locaux, puisque toutes les étiquettes sont deux à deux distinctes. Ainsi toute arête de l'arbre est adjacente à au moins un nœud de Y et l'ensemble Y couvre donc toutes les arêtes. Comme chaque nœud de Y est incident à au plus 3 arêtes et qu'il y a exactement $n-1$ arêtes dans l'arbre, il faut au moins $\dfrac{n-1}{3}$ nœuds pour couvrir toutes les arêtes, c'est-à-dire $|Y| \geqslant \dfrac{n-1}{3}$. On a donc $|X| = n - |Y| \leqslant n - \dfrac{n-1}{3} = \dfrac{2n+1}{3}$ et donc $|X| \leqslant \left\lfloor \dfrac{2n+1}{3} \right\rfloor$.

Jury : Très peu de candidats ont pu aborder cette question.

Chapitre 18

(CCINP) Langages locaux * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 215 lignes)

*

Langages, Ocaml, Automates,
sources : `langlocccinp1.tex`

Consignes : Cet énoncé est accompagné d'un code compagnon en OCaml localite.ml *fournissant le type décrit par l'énoncé et quelques fonctions auxiliaires : il est à compléter en y implémentant les fonctions demandées. On privilégiera un style de programmation fonctionnel.*

On considère un alphabet Σ. Si L est un langage sur Σ, on note :
- $P(L) = \{a \in \Sigma \,|\, a\Sigma^\star \cap L \neq \varnothing\}$ l'ensemble des premières lettres des mots de L.
- $D(L) = \{a \in \Sigma \,|\, \Sigma^\star a \cap L \neq \varnothing\}$ l'ensemble des dernières lettres des mots de L.
- $F(L) = \{m \in \Sigma^2 \,|\, \Sigma^\star m \Sigma^\star \cap L \neq \varnothing\}$ l'ensemble des facteurs de longueur 2 des mots de L.
- $N(L) = \Sigma^2 \setminus F(L)$ l'ensemble des mots de taille 2 qui ne sont pas facteurs de mots de L.

On rappelle qu'un langage L est dit *local* si et seulement si l'égalité de langages suivantes est vérifiée :

$$L \setminus \{\varepsilon\} = (P(L)\Sigma^\star \cap \Sigma^\star D(L)) \setminus (\Sigma^\star N(L) \Sigma^\star)$$

1. Calculer les ensembles $P(L), D(L), F(L)$ et $N(L)$ dans le cas où L est le langage dénoté par l'expression régulière $a^\star(ab)^\star + aa$ sur l'alphabet $\{a, b\}$. Ce langage est-il local ? On vérifiera la cohérence entre les réponses à cette question et celles obtenues via les fonctions demandées dans la suite de l'énoncé.

correction

Correction fournie par le concours

On obtient $P(L) = \{a\}$, $D(L) = \{a, b\}$, $F(L) = \{aa, ab, ba\}$ et donc $N(L) = \{bb\}$. Le langage L n'est pas local : s'il l'était, il devrait contenir le mot aba ce qui n'est pas le cas.

On attend du candidat qu'il donne les ensembles demandés sans justification, possiblement à l'oral uniquement puis qu'il exhibe un mot montrant la non localité avec une brève justification.

On cherche dans la suite de l'exercice à concevoir un algorithme répondant à la spécification suivante :

$$\begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Une expression régulière } e \text{ sur un alphabet } \Sigma \text{ ne faisant pas intervenir le symbole } \varnothing. \\ \textbf{Sortie :} \text{ Vrai si le langage dénoté par } e \text{ est local, faux sinon.} \end{cases}$$

Par défaut, dans la suite de l'énoncé, "expression régulière" signifie "expression régulière ne faisant pas intervenir le symbole $\varnothing$". Les expressions régulières seront manipulées en OCaml via le type somme suivant :

```
type regexp =
  | Epsilon
  | Letter of string (*La chaîne en question sera toujours de longueur 1*)
  | Union of regexp * regexp
  | Concat of regexp * regexp
  | Star of regexp
```

On propose tout d'abord de calculer les ensembles $P(L)$, $D(L)$ et $F(L)$ à partir d'une expression régulière dénotant L. Ces ensembles seront représentés en OCaml par des listes de chaînes de caractères qui vérifieront les propriétés suivantes :
- Elles sont triées dans l'ordre croissant selon l'ordre lexicographique.

- Elles sont sans doublons.

L'énoncé fournit une fonction `union` permettant de calculer l'union sans doublons de deux listes triées. La définition inductive d'une expression régulière invite à calculer inductivement les ensembles $P(L)$, $D(L)$ et $F(L)$. C'est ce que propose la fonction `compute_P` fournie par l'énoncé.

2. En supposant que la fonction `contains_epsilon : regexp -> bool` renvoie `true` si et seulement si le langage dénoté par l'expression régulière en entrée contient le mot ε, justifier brièvement la correction de `compute_P`.

correction

La seule difficulté est de justifier la disjonction de cas pour les concaténations. Si $e = e_1e_2$ et $\varepsilon \notin L(e_1)$, une première lettre d'un mot de e est nécessairement une première lettre d'un mot de e_1 (la réciproque étant évidente). Sinon, un mot de $L(e)$ peut aussi commencer de la même façon qu'un mot de $L(e_2)$.

Le jury attend principalement deux arguments : le fait que l'on raisonne par induction et la justification de la disjonction de cas dans le cas d'une concaténation.

3. Implémenter la fonction `contains_epsilon`.

correction

On filtre sans grande difficulté.

```
let rec contains_epsilon (e :regexp) :bool = match e with
    |Epsilon -> true
    |Letter _ -> false
    |Union (e1, e2) -> (contains_epsilon e1) || (contains_epsilon e2)
    |Concat (e1, e2) -> (contains_epsilon e1) && (contains_epsilon e2)
    |Star _ -> true
```

4. Sur le modèle de `compute_P`, implémenter une fonction `compute_D : regexp -> string list` permettant le calcul de l'ensemble $D(L)$ étant donnée une expression régulière dénotant le langage L.

correction

Comme pour `compute_P`, la seule difficulté est le cas d'une concaténation.

```
let rec compute_D (e :regexp) :string list  = match e with
    |Epsilon -> []
    |Letter a -> [a]
    |Union (e1, e2) -> union (compute_D e1) (compute_D e2)
    |Concat (e1, e2) when contains_epsilon e2 -> union (compute_D e1) (↩
       compute_D e2)
    |Star e1 |Concat (_, e1) -> (compute_D e1)
```

5. Expliquer en langage naturel comment calculer récursivement l'ensemble $F(L)$ étant donnée une expression régulière e dénotant le langage L. Si $e = e_1e_2$ on pourra exprimer $F(L)$ en fonction notamment de $P(L_2)$ et $D(L_1)$ où L_1 (resp. L_2) est le langage dénoté par e_1 (resp. e_2).

correction

Soit e une expression régulière et L le langage qu'elle dénote. On calcule $F(L)$ inductivement :
- Si $e = \varepsilon$ ou $e = a$ avec $a \in \Sigma$, $F(L) = \varnothing$.
- Si $e = e_1 + e_2$, $F(L) = F(L_1) \cup F(L_2)$ où L_i est le langage dénoté par e_i.
- Si $e = e_1e_2$, un facteur de taille 2 d'un mot de L est : soit un facteur de taille 2 de L_1, soit un facteur de taille 2 de L_2, soit un facteur "à cheval entre L_1 et L_2" c'est-à-dire dont la première lettre est la fin d'un mot de L_1 et la deuxième est le début d'un mot de L_2. Autrement dit :

$$F(L) = F(L_1) \cup F(L_2) \cup D(L_1) \times P(L_2)$$

- Si $e = e_1^\star$, on obtient similairement au cas précédent $F(L) = F(L_1) \cup D(L_1) \times P(L_1)$.

Le jury attend un argument inductif et que le candidat précise les cas délicats (étoile et concaténation). Cette question peut être abordée en même temps que la question 7.

6. Écrire une fonction `prod : string list -> string list -> string list` calculant le produit cartésien des deux listes en entrée, qu'on pourra supposer triées dans l'ordre lexicographique croissant et sans doublons, puis qui pour chaque couple de chaînes dans la liste obtenue les concatène. Par exemple :

```
prod ["a";"c";"e"] ["b";"c"] = ["ab";"ac";"cb";"cc";"eb";"ec"]
```

correction

On peut remplacer le `List.map` par une petite fonction auxiliaire au besoin.

```
let rec prod (l1 :string list) (l2 :string list) = match l1, l2 with
   |[], _ |_, [] -> []
   |t ::q, l -> union (List.map (fun x -> t^x) l) (prod q l)
```

Le jury souhaite une fonction récursive et la demande si cette approche n'est pas proposée. Le candidat est libre de proposer une solution faisant intervenir les fonctions du module `List` ou de s'aider d'une fonction auxiliaire.

7. En déduire une fonction `compute_F : regexp -> string list` déterminant l'ensemble $F(L)$ étant donnée une expression régulière dénontant le langage L.

correction

C'est une traduction de la question 5.

```
let rec compute_F (e :regexp) :string list = match e with
   |Epsilon |Letter _ -> []
   |Union (e1, e2) -> union (compute_F e1) (compute_F e2)
   |Concat (e1, e2) ->
      let d_e1 = compute_D e1 and p_e2 = compute_P e2 in
      union (union (compute_F e1) (compute_F e2)) (prod d_e1 p_e2)
   |Star e1 ->
      let d_e1 = compute_D e1 and p_e1 = compute_P e1 in
      union (compute_F e1) (prod d_e1 p_e1)
```

Dans les questions qui suivent, on ne demande PAS d'implémenter les algorithmes décrits.

8. Décrire en pseudo-code ou en langage naturel un algorithme permettant de calculer un automate reconnaissant $(P(L)\Sigma^\star \cap \Sigma^\star D(L)) \setminus (\Sigma^\star N(L)\Sigma^\star)$ étant donnée une expression régulière dénotant L.

correction

On remarque qu'une fois calculé $F(L)$ on en déduit immédiatement $N(L)$ en calculant tous les facteurs de taille 2 de Σ et en éliminant ceux qui sont dans $F(L)$.
Il est ensuite très facile de concevoir un automate pour chacun des langages $P(L)\Sigma^\star$, $\Sigma^\star D(L)$ et $\Sigma^\star N(L)\Sigma^\star$; les ensembles $P(L)$, $D(L)$ et $N(L)$ étant finis. De plus, on sait algorithmiquement construire l'intersection (automate produit) et le complémentaire (déterminisation puis échange des états finaux et non finaux) d'automates donc on peut construire un automate reconnaissant

$$P(L)\Sigma^\star \cap \Sigma^\star D(L) \cap (\Sigma^\star N(L)\Sigma^\star)^c = (P(L)\Sigma^\star \cap \Sigma^\star D(L)) \setminus (\Sigma^\star N(L)\Sigma^\star)$$

Une description haut niveau de la construction de cet automate (exploitant par exemple les stabilités des langages rationnels) suffit.

9. Décrire un algorithme permettant de détecter si le langage dénoté par une expression régulière est local ou non.

correction

On propose la méthode suivante :
- Calculer un automate A reconnaissant $(P(L)\Sigma^\star \cap \Sigma^\star D(L)) \setminus (\Sigma^\star N(L)\Sigma^\star)$ via la question 8.
- Calculer un automate B reconnaissant $L \setminus \{\varepsilon\}$ à partir de l'expression régulière dénotant L, par exemple à l'aide de l'algorithme de Berry-Sethi.
- Calculer l'automate $A\Delta B$ reconnaissant la différence symétrique de ces deux langages (la différence symétrique se construisant à partir d'unions, intersections et complémentaires, opérations qu'on sait faire sur des automates finis).
- A l'aide d'un parcours, déterminer si un état final de $A\Delta B$ est accessible depuis un de ses états initiaux. Si non, le langage reconnu par $A\Delta B$ est vide donc les langages reconnus par A et B sont égaux donc L est local. Si oui, le langage reconnu par $A\Delta B$ n'est pas vide donc les langages reconnus par A et B son différents et L n'est pas local.

Le jury s'attend à ce que l'égalité de ces deux langages soit vérifiée par le biais d'automates les reconnaissant, à nouveau par une description de haut niveau.

10. Pourquoi est-il légitime de ne considérer que les expressions régulières ne faisant pas intervenir $\varnothing$? Comment modifier l'algorithme obtenu dans le cas où cette contrainte n'est plus vérifiée ?

correction

Si e est un expression régulière telle que $L(e) \neq \varnothing$, il existe une expression régulière e' ne contenant pas le symbole $\varnothing$ telle que $L(e') = L(e)$. Cela se montre aisément par induction sur e.
Si on autorise les expressions régulières contenant $\varnothing$, et qu'on souhaite à partir de e déterminer si $L(e)$ est local, on pourrait donc :
- Déterminer si $L(e)$ est vide à l'aide d'un automate reconnaissant ce langage.
- S'il est vide, il est local. Sinon, on peut inductivement transformer e en e' telle que $L(e) = L(e')$ et e' ne contient pas le symbole $\varnothing$ et on applique l'algorithme de la question 9 à e'.

Un code source localite_corrige.ml est aussi disponible.

Là encore une justification haut niveau du fait qu'on peut se ramener à une expression régulière ne contenant pas le symbole vide suffit (on ne demande par exemple pas une preuve par induction de ce fait, simplement le fait qu'on pourrait le faire).

Chapitre 19

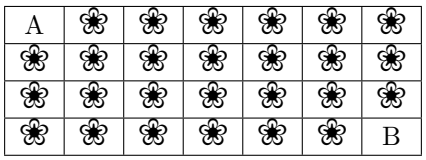
(CCINP) Programmation dynamique pour la récolte de fleurs * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 204 lignes)

∗

Programmation dynamique, C,
sources : `ccinprecoltefleurs.tex`

Consignes : Cet énoncé est accompagné d'un code compagnon en C bouquet_enonce.c *fournissant certaines des fonctions mentionnées dans l'énoncé : il est à compléter en y implémentant les fonctions demandées. La ligne de compilation* gcc -o main.exe *.c -lm *vous permet de créer un exécutable* main.exe *à partir du ou des fichiers C fournis. Vous pouvez également utiliser l'utilitaire* make. *En ligne de commande, il suffit de taper* make. *Dans les deux cas, si la compilation réussit, le programme peut être exécuté avec la commande* ./main.exe. *Si vous désirez forcer la compilation de tous les fichiers, vous pouvez au préalable nettoyer le répertoire en faisant* make clean *et relancer* make.

Une petite fille se trouve en haut à gauche (case A) d'un champ modélisé par un tableau rectangulaire de taille $m \times n$ et doit se rendre dans la case B en bas à droite du champ où réside sa grand-mère (figure ci-dessous).



Chaque case du tableau, *y compris les cases A et B*, contient un certain nombre de fleurs. La petite fille, qui connaît depuis sa position initiale le nombre de fleurs de chaque case, doit se déplacer vers B de case en case, les seuls mouvements autorisés étant vers le bas ou vers la droite. À chaque déplacement, elle récolte les fleurs de la case atteinte. L'objectif pour elle est alors de faire le bouquet avec le plus de fleurs possible lors de son déplacement pour l'offrir à sa grand-mère.

1. On considère le champ suivant :

0 (A)	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	0
3	4	0	1 (B)

Donner le nombre maximal de fleurs cueillies par la petite fille.

correction

Correction proposée par le jury
Un code source bouquet_corrige.c est aussi disponible.
On trouve 11 fleurs.

On attend une réponse orale ; si elle est correcte, le jury ne demande même pas de justification.

2. On note $n(i, j)$ le nombre maximum de fleurs que la petite fille peut récolter en se déplaçant de A à la case (i, j). Exprimer $n(i, j)$ en fonction de $n(i-1, j)$ et $n(i, j-1)$. En déduire une fonction récursive de prototype `int recolte(int champ[m][n], int i, int j)` qui, étant données les coordonnées `i`, `j` d'une case, calcule le nombre maximum de fleurs cueillies par la petite fille de A à la case (`i`, `j`).

correction

La récolte en une case dépend récursivement de celle de la case du haut et de celle de la case de gauche. La formule générique est donc à adapter lorsqu'on se trouve sur le bord gauche ou le bord haut du champ.

```
int recolte(int champ[m][n], int i, int j){
  /* Cas de base */
  if ( (i == 0) && (j == 0) )
    return champ[0][0] ;
  if (i == 0)
    return champ[0][j] + recolte(champ, 0, j-1) ;
  if (j == 0)
    return champ[i][0] + recolte(champ, i-1, 0) ;
  /* Cas général */
  return champ[i][j] + max(recolte(champ, i-1, j), recolte(champ, i, j↩
     -1)) ;
}
```

Il est attendu des candidats qu'ils soient attentifs aux cas de base. Ils peuvent factoriser la présentation de leur code et l'établissement de la relation de récurrence.

3. On suppose $m = n = 4$ et on effectue donc un appel à `recolte(champ,3,3)` pour résoudre le problème posé. Donner le nombre de fois où votre fonction calcule le nombre de fleurs maximum cueillies dans la case $(1, 1)$ (deuxième case de la diagonale).

correction

On trouve 6 appels à `recolte`.

Plusieurs méthodes sont acceptées pour répondre à cette question ; le candidat peut par exemple compter le nombre d'appels en modifiant la fonction précédente ou à la main en déployant l'arbre d'appels.

D'une manière générale, le nombre d'appels à la fonction récursive est important. On a donc intérêt à transformer l'algorithme récursif en algorithme dynamique. On propose de déclarer dans le programme principal un tableau `fleurs` dont la case (i, j) est destinée à contenir la récolte maximale que la petite fille peut obtenir en cheminant de A vers la case (i, j).

4. Dans quel ordre remplir le tableau `fleurs` de sorte à éviter de recalculer une valeur ?

correction

On calcule d'abord les valeurs des cases sur les bords haut et gauche puis on propage soit en remplissant les lignes de gauche à droite, soit en remplissant les colonnes de haut en bas.

Une réponse orale claire peut suffire. Le candidat peut aussi s'aider d'un schéma indiquant les dépendances entre les différents termes à calculer.

5. Écrire une fonction de prototype `int recolte_iterative(int champ[m][n], int i, int j, int fleurs↩[m][n])` qui calcule, stocke dans `fleurs[i][j]` et retourne la cueillette maximale obtenue en parcourant le champ de A à la case `(i, j)`.

correction

Il s'agit d'une traduction des questions 2 et 4. Le code ci-dessous corrige aussi la question 7.

```c

int recolte_iterative(int champ[m][n], int i, int j,int fleurs[m][n]){
  int x, y;
  fleurs[0][0] = champ[0][0];
  /* Bord haut */
  for (x = 1; x <= i; x++) {
    fleurs[x][0] = champ[x][0] + fleurs[x-1][0];
  }
  /* Bord gauche */
  for (y = 1; y <= j; y++) {
    fleurs[0][y] = champ[0][y] + fleurs[0][y-1];
  }
  /* Autres cases */
  for (y = 1; y <= j; y++) {
    for (x = 1; x <= i; x++) {
      fleurs[x][y] = champ[x][y] + max(fleurs[x-1][y], fleurs[x][y-1]);
    }
  }

  deplacements(fleurs,i, j);
  return fleurs[i][j];
}
```

La fonction `recolte_iterative` permet de déterminer la cueillette maximale en (`i`, `j`) mais ne précise pas le chemin parcouru pour l'obtenir.

6. Écrire la fonction de prototype `void deplacements(int fleurs[m][n], int i, int j)` qui affiche la suite des déplacements effectués par la petite fille sur un chemin permettant de récolter le nombre maximum de fleurs entre (0,0) et (`i`, `j`).

correction

On commence par distinguer les cas limites. Puis on appelle récursivement `deplacements` en observant quelle est la case voisine qui avait permi d'obtenir le plus de fleurs.

```c
void deplacements(int fleurs[m][n], int i, int j){
  if (i == 0 && j == 0) {
    printf("Case A, ");
    return;
  }
  if (i == 0) {
    deplacements(fleurs,0, j-1);
    printf("Aller à droite, ");
    return;
  }
  if (j == 0) {
    deplacements(fleurs,i-1, 0);
    printf("Descendre, ");
    return;
  }
  if (fleurs[i-1][j] > fleurs[i][j-1]) {
    deplacements(fleurs,i-1, j);
    printf("Descendre, ");
  }
  else {
    deplacements(fleurs,i, j-1);
    printf("Aller à droite, ");
  }
}
```

On attend bien l'affichage des déplacements, et pas uniquement leur calcul. La mise en forme de l'affichage (avec sauts de lignes, tabulations, ...) est en revanche libre.

7. Insérer un appel de `deplacements` dans la fonction `recolte_iterative` pour afficher le chemin parcouru.

correction

Voir le code proposé à la question 5.

Le jury est attentif à l'endroit où l'appel à cette fonction est effectué.

Chapitre 20

(CCINP) calculs avec les flottants * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 207 lignes)

$*$

Représentation des nombres, C,
sources : `ccinpflottants.tex`

Chemins simples sans issue (type B)

Consignes : Cet exercice est à traiter en C. Le fichier flottants.c est fourni avec ce sujet. Il est à compléter en y implémentant les fonctions demandées.

Un nombre réel x est représenté en machine en base 2 par un flottant qui a un signe s, une mantisse m et un exposant e tel que $x = s \times m \times 2^e$. Dans la norme IEEE 754, en convention normalisé la partie entière de la mantisse est 1 qui est un bit caché. En simple précision, le signe est codé sur 1 bit, la partie décimale de la mantisse sur 23 bits et l'exposant sur 8 bits. En double précision, le signe est codé sur 1 bit, la partie décimale de la mantisse sur 52 bits et l'exposant sur 11 bits.
Dans cet exercice, on observe le résultat de calculs obtenus par un programme. On pourra utiliser la fonction de signature : `double pow(double v, double p)` qui calcule v^p. On ajoutera alors l'option `-lm` à la fin de la ligne permettant de compiler le fichier.

1. Dans la fonction principale `main`, on a défini 3 variables a, b, c de type `double`. Compléter le code pour calculer et afficher le résultat des opérations $(a+b)+c$ et $a+(b+c)$. Que constatez-vous ?

correction

Correction de M.Péchaud

```
printf("(a+b)+c=%f\na+(b+c)=%f", (a+b)+c, a+(b+c));
```

Les résultats obtenus sont ≪très≫ différents : on obtient respectivement 1. et 0..

2. Compte tenu des approximations faites lors du codage, on peut trouver plusieurs nombres x tels que $1+x=1$ après un calcul fait par la machine. Le plus petit nombre représentable exactement en machine et supérieur à 1 s'écrit $1+\epsilon$, avec ϵ un réel appelé ϵ machine. On admet que ϵ s'écrit sous la forme 2^{-n} avec n un entier naturel strictement positif. Écrire une fonction de signature `double epsilon()` qui renvoie la valeur de n. Justifier cette valeur.

correction

```
int epsilon(){
  int n = 0;
  while (1 + pow(2, -n) != 1)
    n++;
  return n - 1;
}
```

Ce code part du principe que l'arrondi sera fait par troncature de la mantisse.

On obtient 52 – ce qui est cohérent avec la taille de la mantisse – le plus petit réel ¿ 1 représentable à pour représentation binaire $1.00\cdots1$ avec 51 «0», c'est donc bien $1+2^{-52}$.

Le jury attend une brève explication du comportement constaté.

3. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= -4 \\ u_n &= 111 - \dfrac{1130}{u_{n-1}} + \dfrac{3000}{u_{n-1}\times u_{n-2}} \text{ si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Écrire une fonction de signature `double u(int n)` qui renvoie la valeur du terme u_n.

Le jury attend une explication faisant le lien entre la valeur trouvée et le format de représentation des flottants rappelé dans l'énoncé.

correction

```c
double u(int n){
  if (n == 0) return 2;
  double uad = 2; //avant-dernier terme calculé
  double ud = -4; //dernier terme calculé
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    double tmp = 111 - 1130/ud + 3000/(ud * uad);
    uad = ud;
    ud = tmp;
  }
  return ud;
}
```

Une fonction récursive naïve suffit à obtenir tous les points à cette question mais le candidat est bien entendu libre de stocker les valeurs de la suite demandée pour éviter d'avoir à les recalculer.

4. La limite théorique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 6. Compléter la fonction `main` afin d'afficher les 22 premiers termes de la suite. Vers quelle valeur semble tendre la suite ?

correction

```c
    for (int i = 0; i <= 21; i++)
      printf("u%d = %f\n", i, u(i));
```

La suite semble tendre vers 100.

La question ne demande pas de justifier la limite théorique. Le jury doit voir apparaître les premiers termes correctement et clairement affichés.

5. On définit une liste chaînée de nombres à l'aide d'une structure `nb` comportant un double et un pointeur vers une structure `nb` définie ci-dessous

```c
struct nb {double x; struct nb* suivant;};
```

Écrire une fonction de signature `double somme(struct nb* tab)` qui calcule la somme des éléments de la liste `tab`.

correction

```c
double somme(struct nb* tab){
  if (tab->suivant == NULL) return tab->x;
  return tab->x + somme(tab->suivant);
}
```

6. L'algorithme suivant permet d'augmenter la précision du calcul lors du calcul d'une somme.

```
Entrées : Une liste l de réels triée dans l'ordre croissant
    de taille au moins 2.
Sorties : La somme des réels contenus dans la liste l.

TantQue la liste l contient strictement plus d'un élément
    Calculer la somme s = x + y des deux premiers éléments x
        et y de l
     Supprimer x et y de l
     Insérer s dans l de sorte à ce que l reste triée
Renvoyer l'unique élément de l
```

- Compléter la fonction `somme2` qui implémente cet algorithme.

correction

```
            struct nb* s;
            //Création du maillon s contenant la somme des 2 premiers é
                éléments
            s = malloc(sizeof(struct nb));
      s -> x = tab -> x + tab -> suivant -> x;
            s -> suivant = NULL;
            //temp pointe vers le 3e élément de la liste
            temp=(temp->suivant)->suivant;
            //recherche de l'emplacement de s

            struct nb* t=temp;
            struct nb* t2=temp;

            while(t !=NULL){
                /*si la valeur pointée par t
                est supérieure strictement à celle de s,
                t pointe sur l'élément suivant
                sinon on quitte la boucle
                */
        if (t -> x < s -> x)
    {
      t = t -> suivant;
      t2 = t;
    }
        else break;
            }
```

À cette question, un candidat qui aurait fait le choix d'implémenter `somme2` directment et sans utiliser le code déjà fourni et en expliquant sa démarche aurait eu tous les points.

- La fonction proposée ne prend pas en compte un cas d'insertion. Illustrer ce propos.

correction

Il y a un problème lorsque `t -> x`$\geqslant$`s -> x` à la première itération – i.e. lorsque l'insertion doit se faire au début – car alors $t = t2$.

Chapitre 21

(CCINP) chemins simples sans issue * (CCINP 23, ex B, corrigé — oral - 199 lignes)

∗

Graphes, Ocaml, Complexité, Backtracking,
sources : `ccinpchemins_simples.tex`

Consignes : Cet exercice est à traiter en OCaml. Le fichier chemins_simples.ml est fourni avec ce sujet. Il est à compléter en y implémentant les fonctions demandées.

L'objectif de cet exercice est de programmer une fonction générant la liste des chemins simples sans issue d'un graphe. On rappelle les définitions d'un graphe, d'un chemin, et on donne leur représentation en OCaml.
Un *graphe orienté* est un couple (V, E) où V est un ensemble fini (ensemble des sommets), E est un sous-ensemble de $V \times V$ où tout élément $(v_1, v_2) \in E$ vérifie $v_1 \neq v_2$ (ensemble des arcs).
Étant donné un graphe $G = (V, E)$ un *chemin non vide* de G est une suite finie $s_0, \cdots, s_n$ de sommets de V avec $n \geq 0$ et vérifiant $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, (s_i, s_{i+1}) \in E$. On dit que ce chemin est *simple* si $s_0, \cdots, s_n$ sont distincts deux à deux. On dit qu'il est *sans issue* si pour tout s_{n+1} sommet tel que $(s_n, s_{n+1}) \in E$, s_{n+1} appartient à $\{s_0, \cdots, s_n\}$.
Dans la suite, les graphes considérés sont définis sur un ensemble de sommets de la forme $\{0, 1, \cdots, n-1\}$. Pour représenter un graphe en OCaml, on utilise le type suivant :

```
type graphe = int list array
```

qui correspond à un encodage par un tableau de listes d'adjacence. Par exemple, le graphe

$$G_1 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (0, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\})$$

est représenté par le tableau `[|[1 ;3] ;[] ;[0 ;1 ;3] ;[1]|]`. L'ordre dans lequel sont écrits les éléments dans les listes importe peu. Par contre, l'emplacement des listes dans le tableau est important. Par exemple, `[|[] ;[0] ;[0 ;3 ;1] ;[1]|]` représente le graphe

$$G_2 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\}\})$$

On rappelle différentes fonctions pouvant être utiles :

- `List.filter : ('a -> bool)-> 'a list -> 'a list` où l'expression `List.filter f l` est la liste obtenue en gardant uniquement les éléments `x` de `l` vérifiant `f`.
- `List.iter :('a -> unit)-> 'a list -> unit` où `List.iter f l` correspond à `(f a0) ;(f a1) ;... ;(f an)` dans le cas où on a `l = a0 : :a1 : :... : :an : :[]`.
- `List.rev : 'a list -> 'a list` est une fonction qui renvoie le retourné d'une liste. Par exemple, `List.rev [3 ;1 ;2 ;2 ;4]` est égal à `[4 ;2 ;2 ;1 ;3]`.
- `Array.length : 'a array -> int` est une fonction qui renvoie la longueur d'un tableau.

Les questions de programmation sont à traiter dans le fichier chemins_simples.ml. L'utilisation d'autres fonctions de la bibliothèque que celles mentionnées sont à reprogrammer.

1. Écrire une fonction `est_sommet : graphe -> int -> bool` où `est_sommet g a` est égal à `true` si `a` est un sommet du graphe `g` et `false` sinon.

correction

Corrigé proposé par le jury

```
let est_sommet g a =  (0 <=a) && (a < Array.length g)
```

Le candidat ne doit pas oublier de tester la positivité de l'entier en entrée.

2. Écrire une fonction `appartient : 'a list -> 'a -> bool` où `appartient l x` est égal à `true` si `x` est un élément de `l` et `false` sinon.

correction

```
let rec appartient liste a = match liste with
| [] -> false
| b::suite -> (b = a) || (appartient suite a)
```

Le jury s'attend à une solution récursive. Dans cet exercice une approche impérative n'est néanmoins pas pénalisée.

3. Écrire une fonction `est_chemin : graphe -> int list -> bool` où `est_chemin g l` est égal à `true` si `l` est un chemin de `g` et `false` sinon. On suppose que la liste vide représente le chemin vide, qui est bien un chemin et que les éléments de `l` sont bien des sommets du graphe `g`.

correction

```
let rec est_chemin g liste = match liste with
| [] -> true
| [a] -> est_sommet g a
| a::b::suite -> (appartient (g.(a)) b) && (est_chemin g (b::
    suite))
```

Même remarque que pour la question précédente.

4. Compléter la fonction `est_chemin_simple_sans_issue : graphe -> int list -> bool`, où `est_chemin g l` est égal à `true` si `l` est un chemin simple sans issue de `g` et `false` sinon. On supposera que les éléments de `l` sont des sommets du graphe `g` et que le chemin vide n'est pas simple sans issue.

correction

```
let est_chemin_simple_sans_issue g liste =
let n = Array.length g in
let visites = Array.make n false in
let rec test_aux liste = match liste with
| [] -> false
| [a] -> [] = (List.filter (fun x -> not visites.(x)) (g.(a)))
| a::b::suite ->
begin
visites.(a) <- true ;
(appartient g.(a) b) && (not visites.(b))
&& (test_aux (b::suite))
end
in
test_aux liste
```

Plusieurs variantes de réponses à cette question sont possibles.

5. On cherche à écrire une fonction qui construit la liste des chemins simples sans issue d'un graphe. Pour cela, on procède à l'aide de parcours en profondeur et d'un algorithme de retour sur trace. Compléter le code de la fonction `genere_chemins_simples_sans_issue` présent dans le fichier `chemins_simples.ml` et qui permet de générer la liste des chemins simples sans issue d'un graphe.

correction

```
let genere_chemins_simples_sans_issue (g:graphe) =
let taille = Array.length g in
(*garde en mémoire les chemins déjà trouvés*)
let liste_chemins = ref [] in
(*garde en mémoire les sommets en cours de visite *)
let visites = Array.make taille false in
```

```
(*garde en mémoire le début d'un chemin*)
let chemin_courant_envers = ref [] in

(*trouve tous les chemins simples sans issue commençant par s*)
let rec profondeur s =
if not visites.(s) then begin
visites.(s) <- true ;
chemin_courant_envers := s : :(!chemin_courant_envers) ;
let voisins_libres =
List.filter (fun x -> not visites.(x)) g.(s)
in
if voisins_libres = [] then begin
liste_chemins := (List.rev !chemin_courant_envers) : :(!↩
   liste_chemins)
end else begin
List.iter profondeur voisins_libres
end;
(*pour revenir en arrière *)
visites.(s) <- false ;
chemin_courant_envers := List.tl !chemin_courant_envers ;
end
in
for i = 0 to (taille-1) do
profondeur i
done ;
!liste_chemins
```

Le jury s'attend à ce que les ajouts dans une liste soient faits en tête, quitte à renverser la liste à la fin.

6. Écrire des expressions donnant les listes des chemins simples pour les deux graphes G_1 et G_2.

correction

```
let liste1 = genere_chemins_simples_sans_issue g1
let liste2 = genere_chemins_simples_sans_issue g2
```

Le jury souhaite voir le résultat des tests demandés dans cette question : les candidats qui souhaitent compiler leur code doivent donc coder des fonctions d'affichage pertinentes pour obtenir tous les points ici.

7. Expliciter la complexité des fonctions `appartient` et `est_chemin_simple_sans_issue`.

correction

La complexité de `appartient` est en $O(|l|)$: en effet, on effectue un parcours de liste.
On note A l'ensemble des arêtes du graphe en argument. La complexité de `est_chemin_sans_issue` est en $O(|l| + |A|)$. En effet, pour chaque sommet s de la liste l, on effectue en terme de calcul de l'ordre de $1 + |g.(s)|$. En sommant sur tous les éléments de l (dans le cas où il serait tous distincts), on trouve une complexité en $O(|l| + |A|)$. Si un même sommet apparaît deux fois, le calcul est interrompu lors de la visite d'une première répétition et on retrouve la même complexité.

Le jury attend une borne précise sur ces complexités. Si le candidat propose une borne en $\mathcal{O}(|l||A|)$ pour `est_chemin_simple_sans_issue`, il est invité à l'affiner.

Chapitre 22

(CCINP) Grammaires pour des langages de programmation * (CCINP 24, ex A, corrigé, à débugguer — oral - 90 lignes)

$*$

Grammaires, Langages,
sources : `langccinp1.tex`

On considère l'alphabet $\Sigma_0 = \{a, b, c, \cdots z\}$ des lettres minuscules, et une grammaire ayant comme symbole initial S et les règles $S \to AS$ et $A \to \sigma A$ avec $a \in \Sigma_0$.

1. Quel est le langage engendré par cette grammaire ?

correction

Trivialement, $\varnothing \longrightarrow$ question bugguée.

On étudie le langage de programmation $\hat{c}$ (prononcé « c chapeau »), et on cherche à représenter les identificateurs (i.e. les noms de variables) valides dans ce langage. Un identificateur est valide lorsqu'il contient des caractères de $\Sigma_1 = \{a, b, c, \cdots z, A, B, \cdots Z, 0, 1, \cdots, 9, \_\}$ et qu'il ne commence pas par un chiffre.

2. Expliciter une grammaire qui engendre les identificateurs de $\hat{c}$.

correction

$S \longrightarrow PN$
$P \longrightarrow a|\cdots|Z|\_$
$N \longrightarrow aN|\cdots|zN|AN|\cdots|ZN|0N|\cdots|9N|\_N|\epsilon$

On note E le symbole initial d'une grammaire reconnaissant les expressions de $\hat{c}$ et on définit un non-terminal I engendrant les programmes de $\hat{c}$ avec les règles :

(1). $I \to E$;
(2). $I \to$;
(3). $I \to while(E)I$
(4). $I \to B$

B est un non-terminal permettant de représenter des blocs, c'est-à-dire une liste (potentiellement vide) de programmes délimitée par une accolade ouvrante et une accolade fermante. L'exemple suivant est un bloc :

```
{a !=4 ; {while(b) 3+5=t ; ; 5=2 ; {}} d=5-a ;}
```

3. Montrer que les mots engendrés par I finissent soit par un point-virgule, soit par une accolade fermante.

correction

Immédiat par induction sur les arbres de dérivation.

4. Ajouter aux règles (1) à (4) des règles permettant de décrire les blocs engendrés par B.

correction

$S \to I|IS$
$B \to \{S\}$

5. Le langage engendré par E est-il régulier ?

correction

E n'est pas défini précisément par l'énoncé ? !
$\mathcal{L}(E) \cap (^*)^* = \{(^n)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, qui est l'exemple le plus classique de langage non régulier.
Par contraposée, $\mathcal{L}(E)$ n'est pas régulier.

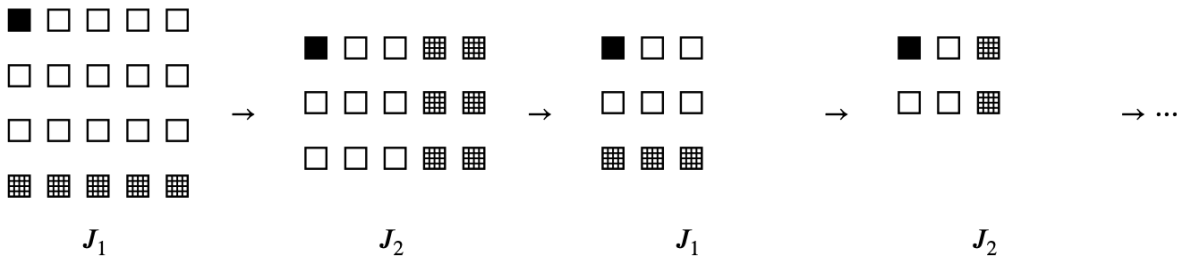
Chapitre 23

(CCINP) chomp * (CCINP 24, ex A, corrigé — oral - 228 lignes)

$*$

Jeux,
sources : `ccinpchomp.tex`

On considère une variante du jeu de Chomp : deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent autour d'une tablette de chocolat de taille $l \times c$, dont le carré en haut à gauche est empoisonné. Les joueurs choisissent chacun leur tour une ou plusieurs lignes (ou une ou plusieurs colonnes) partant du bas (respectivement de la droite) et mangent les carrés correspondants. Il est interdit de manger le carré empoisonné et le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer.
Dans la figure ci-dessous, matérialisant un début de partie sur une tablette de taille 4×5, le carré noir est le carré empoisonné, le choix du joueur J_i est d'abord matérialisé par des carrés hachurés, qui sont ensuite supprimés.

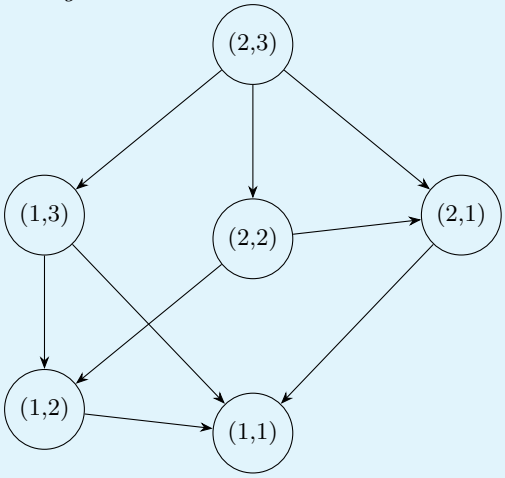


On associe à ce jeu un graphe orienté $G = (S, A)$. Les sommets S sont les états possibles de la tablette de chocolat, définis par un couple $s = (m, n), m \in [\![1, l]\!],\ n \in [\![1, c]\!]$. De plus, $(s_i, s_j) \in A$ si un des joueurs peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i à l'état s_j. On dit que s_j est un successeur de s_i et que s_i est un prédécesseur de s_j.

1. Dessiner le graphe G pour $l = 2$ et $c = 3$. Les états de G pourront être représentés par des dessins de tablettes plutôt que par des couples (m, n).

correction

Corrigé de M.Péchaud



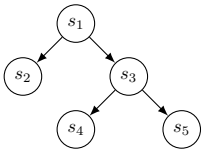
On va chercher à obtenir une stratégie gagnante pour le joueur J_1 par deux manières.

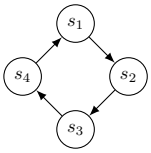
Utilisation des noyaux de graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que $N \subset S$ est un noyau de G si :

- pour tout sommet $s \in N$, les successeurs de s ne sont pas dans N,
- tout sommet $s \in S \setminus N$ possède au moins un successeur dans N

2. Donner tous les noyaux possibles pour les graphes suivants :





correction

Pour le premier, un seul noyau possible : $\{s_2, s_4, s_5\}$.
Pour le second, deux noyaux possibles : $\{s_1, s_3\}$ et $\{s_2, s_4\}$.

Dans la suite, on ne considère que des graphes acycliques.

3. Montrer que tout graphe acyclique admet un puits, c'est-à-dire un sommet sans successeur.

correction

On considère un chemin maximal. Son dernier sommet est nécessairement un puit, sans quoi on contredit la maximalité ou l'acyclicité.

Dans le cas général, le noyau d'un graphe $G = (S, A)$ est souvent difficile à calculer. Si la dimension du jeu n'est pas trop importante, on peut toutefois le faire en utilisant l'algorithme suivant :

```
1  N = ∅
2  TantQu'il reste des sommets à traiter
3      Chercher un sommet s ∈ S sans ↩
           successeur
4      N = N ∪ {s}
5      Supprimer s de G ainsi que ses préd↩
           écesseurs
```

4. Justifier que cet algorithme termine et renvoie un noyau.

correction

Supprimer des sommets d'un graphe acyclique le laisse acyclique donc la question 3 assure qu'on trouvera toujours un sommet s convenable en ligne 3. Par conséquent, le nombre de sommets dans G décroît strictement à chaque itération ce qui assure la terminaison de l'algorithme.
Par ailleurs, un sommet sans successeur doit être dans un noyau à cause de la deuxième propriété et donc tous ses prédécesseurs doivent être en dehors à cause de la première. Ces deux contraintes nécessaires sont garanties par l'algorithme. Elles sont suffisantes dans le cadre d'un graphe acyclique car tout sommet qui devrait nécessairement être dans un noyau et nécessairement ne pas y être ferait partie d'un cycle.

5. Démontrer que ce noyau est unique. Conclure que le graphe du jeu de Chomp possède un unique noyau N.

correction

Travaillons par récurrence forte sur le nombre n de sommets de G. Si $n = 1$ ce seul sommet (puits) constitue le noyau.
Sinon, soit s un puits de G (qui existe d'après la question 3). Ce sommet fait nécessairement partie de tous les noyaux de G. On note $P(s)$ l'ensemble des prédécesseurs de s. Le graphe G privé de s et des sommets de $P(s)$ reste acyclique et donc, par hypothèse de récurrence, a un noyau unique N. L'ensemble $N \bigcup \{s\}$ est un noyau de G et par unicité de N et nécessité du fait que s soit dans tout noyau, c'est le seul.
Le jeu de Chomp a un graphe acyclique car le nombre de carrés décroît strictement à chaque coup, il a donc un unique noyau.

6. Appliquer cet algorithme pour calculer le noyau du jeu de Chomp à 2 lignes et 3 colonnes. Que peut-on dire du sommet (1,1) pour le joueur qui doit jouer ? En déduire à quoi correspondent les éléments du noyau.

correction

Les sommets (2,2) et (1,1) constituent le noyau. La position (1,1) est perdante pour le joueur qui doit jouer (il mange le chocolat empoisonné), les éléments du noyau sont les sommets perdants et les autres sommets les positions gagnantes.

7. Montrer que, dans le cas d'un graphe acyclique, tout joueur dont la position initiale n'est pas dans le noyau a une stratégie gagnante. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante pour ce jeu dans le cas $l = 2$ et $c = 3$?

correction

On montre qu'un joueur qui peut choisir s_1 dans le noyau ne peut pas perdre. Si s_1 n'a pas de successeur, l'adversaire ne peut plus jouer, il a perdu. Sinon, l'adversaire va choisir s_2 dans les successeurs de s_1. On a donc $s_2 \in S \setminus N$ donc s_2 admet au moins un successeur dans N.

Utilisation des attracteurs

On modélise le jeu par un graphe biparti : pour ce faire, on dédouble les sommets du graphe précédent : un sommet s_i génère donc deux sommets s_i^1 et s_i^2, s_i^j étant le sommet i contrôlé par le joueur J_j. On forme alors deux ensembles de sommets $S_1 = \{s_i^1\}_i$ et $S_2 = \{s_i^2\}_i$, et on construit le graphe de jeu orienté $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \bigcup S_2$ et $S_1 \bigcap S_2 = \varnothing$. De plus, $(s_i^1, s_j^2) \in A$ si le joueur 1 peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i^1 à l'état s_j^2. On raisonne de même pour $(s_i^2, s_j^1) \in A$.
On rappelle la définition d'un attracteur : soit F_1 l'ensemble des positions finales gagnantes pour J_1. On définit alors la suite d'ensembles $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $\mathcal{A}_0 = F_1$ et

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ \mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cup \{s \in S_1 / \exists t \in \mathcal{A}_i, (s,t) \in A\} \cup \{s \in S_2 \text{ non terminal}, \forall t \in S, (s,t) \in A \Rightarrow t \in \mathcal{A}_i\}$$

et $\mathcal{A} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ est l'attracteur pour J_1.

8. Que représente l'ensemble $\mathcal{A}_i$?

correction

$\mathcal{A}_i$ est l'ensemble des sommets de S à partir desquels J_1 peut forcer la partie à arriver en F_1 en moins de i coups.

9. Dans le cas du jeu de Chomp à deux lignes et trois colonnes (question 1), calculer les ensembles $\mathcal{A}_i$. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante ? Comment le savoir à partir de $\mathcal{A}$?

correction

$\mathcal{A}_0 = \{S_6^2\}, \mathcal{A}_1 = \{S_6^2, S_2^1, S_4^1\} = \mathcal{A}$. L'attracteur contient exactement toutes les positions gagnantes pour J_1.

Chapitre 24

(CCINP) relation d'équivalence * (CCINP 24, ex A, corrigé — oral - 139 lignes)

$*$

Algorithmique, Graphes,
sources : `ccinpreleq.tex`

Une relation d'équivalence (type A)

On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$. Soient $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ et $\psi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$. Soit u et v deux éléments de $[\![1,n]\!]$. On dit que u et v sont (φ,ψ)-équivalents s'il existe $k \in \mathbb{N}$, un tuple $(w_0, w_1, \cdots, w_{k+1}) \in [\![1,n]\!]^{k+2}$ avec $w_0 = u, w_{k+1} = v$ et vérifiant :

$$\forall i \in [\![0,k]\!], \varphi(w_i) = \varphi(w_{i+1}) \text{ ou } \psi(w_i) = \psi(w_{i+1}).$$

L'objectif est d'écrire un algorithme en pseudo-code permettant de calculer les différentes classes d'équivalence engendrées par cette relation.

1. Justifier rapidement que "être (φ,ψ)-équivalent" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

2. Pour cette question, on considère les applications φ et ψ définies par :

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(i) =$	3	2	2	9	6	4	9	5	7
$\psi(i) =$	5	1	3	4	5	1	7	7	4

Calculer les différentes classes d'équivalence.

3. On revient au cas au général. On définit le graphe $G = (S, A)$ par :

$$S = [\![1,n]\!], A = \{(x,y) \in S^2 | x \neq y \text{ et } (\varphi(x) = \varphi(y) \text{ ou } \psi(x) = \psi(y))\}.$$

On fixe x et y deux sommets différents de S. Traduire sur le graphe G le fait que les sommets x et y sont (φ,ψ)-équivalents et en déduire que le calcul des classes d'équivalence de G se traduit en un problème classique sur les graphes que l'on précisera.

4. Donner en pseudo-code un algorithme permettant de résoudre le problème correspondant sur les graphes.

On fixe n un nombre pair. On considère deux applications φ et ψ de $[\![1,n]\!]$ où tout élément de l'image de φ admet exactement deux antécédents par φ et où tout élément de l'image de ψ admet exactement deux antécédents par ψ.

Pour $f \in \{\varphi,\psi\}$, on note G_f le graphe $(S, \{(x,y) \in S^2 | x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\})$.

5. Préciser la forme du graphe G_f pour $f \in \{\varphi,\psi\}$.

6. Expliciter la forme des différentes classes d'équivalence dans le graphe G correspondant.

correction

Corrigé proposé par le jury

Proposition de corrigé

1. La réflexivité correspond au cas $k = 0$, la symétrie consiste à réindexer à l'envers, la transitivité consiste à mettre bout à bout les deux séquences.

2. On trouve comme classes : $C_1 = \{1,5\}, C_2 = \{2,3,6\}, C_3 = \{4,7,8,9\}$.

3. Il existe alors un chemin commençant par x et terminant par y. Sachant que le graphe est en réalité symétrique, calculer les classes d'équivalence revient alors à calculer les composantes connexes du graphe correspondant (on peut aussi calculer les composantes fortement connexes si on n'a pas remarqué la symétrie).

4. Dans le cas où on remarque la symétrie : un parcours du graphe suffit (n'importe lequel).

```
\SetKwFunction{comp}{Composantes\_connexes}
\SetKwFunction{parcours}{parcours\_largeur}
Entrée: graphe G
Sortie: tableau numComp avec numComp[i] égal au numéro d'↩
    une composante connexe
numComp = [0, 0, ..., 0] (indexation de 1 à n inclus)
parcours(i,num)
file = [i]
TantQue file non vide
  a = defiler(file)
  Si numComp[a] vaut 0
    numComp[a] := num
    Pour tout x voisin de a
      enfiler(x)
num = 0
Pour i = 1 à n
   Si numComp[i] = 0
      num := num + 1
      parcours(i,num)

Renvoyer numComp
```

Dans le cas où la symétrie n'est pas remarquée, on peut utiliser un algorithme de calcul des composantes fortement connexes, comme l'algorithme de Kosaraju.

5. On reconnaît un graphe biparti où chaque sommet est de degré 1 (c'est le graphe induit par un couplage parfait).

6. On obtient deux types de composantes connexes :

- composantes à deux sommets (même image par φ et ψ)
- des cycles ayant un nombre pair de sommets (on peut remarquer qu'il y a alternance entre arêtes créees par φ et créees par ψ).

On pourra remarquer qu'un sommet est soit d'arité 1, soit d'arité 2. Lorsqu'il est d'arité 1, cela signifie que son voisin et lui ont même image par φ et ψ. Donc ces deux sommets constituent une composante connexe. Dans le cas où un sommet est d'arité 2, par la contraposition de la remarque précédente, tous les sommets dans sa composante connexe sont d'arité 2. Ainsi, on a uniquement des cycles ayant un nombre pair de sommets.

Chapitre 25

(CCINP) Fonctions pour la détection de motifs * (CCINP 24, ex B, corrigé — oral - 130 lignes)

$*$

Langages, Ocaml,
sources : `langccinp2.tex`

On cherche à déterminer lorsqu'une certaine chaîne de caractères respecte (on dira qu'elle est capturée) un certain motif. On représente les motifs sous forme de liste de caractères pouvant contenir les caractères a, b, $*$ et ?, et on cherche à déterminer si une chaîne de caractères de Σ^*, avec $\Sigma = \{a, b\}$ est capturée par un motif, avec les conditions suivantes :

- ? peut correspondre à un caractère quelconque
- $*$ peut représenter n'importe quel mot de σ^*, y compris le mot vide.

1. Déterminer lesquels de ces mots sont capturés par le motif $m_0 = *ab*a?$.
(a) *aabbaba*
(b) *aabbaab*
(c) *bbbaab*
(d) *bbabaab*
Décrire en français les mots capturé par ce motif.

correction

Corrigé de M.Péchaud
Les mots b et d.
Ce sont les mots contenant un facteur ab ailleurs qu'en dernière position, et dont l'avant-dernière lettre est un a.

On représente les chaînes par le type `type chaine = char list`.

2. Écrire une fonction `string_to_chaine : string -> chaine` prenant en entrée une chaîne de caractères et renvoyant la liste de caractères associée.

correction

```
let string_to_chaine s =
   let rec aux i =
      if i = String.length s then []
      else s.[i] :: aux (i+1)
   in aux 0
```

3. Expliquer pourquoi, dans notre étude, il est inutile d'avoir plusieurs caractères $*$ consécutifs.

correction

Le motif $**$ est équivalent au motif $*$.

4. Écrire une fonction `purge : chaine -> chaine` permettant de supprimer les $*$ en trop dans une chaîne.

correction

```
let rec purge l = match l with
    [] | [x] -> c
  | '*' :: '*' :: q -> purge ('*' :: q)
  | t :: q -> t :: (purge q)
```

On propose une approche récursive naïve afin de déterminer si un motif capture une chaîne, dont le code est partiellement comme tel :

```
let rec capture motif texte = match (motif, texte) with
  | [], [] -> true
  | ['*'], [] -> true
  | _, [] -> false
  | [], _ -> false
  | ...
```

5. Montrer que le code partiel de cette approche naïve est correct.

correction

Les lignes traduisent les faits que
- la chaîne vide est capturée par le motif vide
- la chaîne vide est capturée par le motif $*$
- aucun motif non vide autre que $*$ ne reconnaît la chaîne vide (car on a supprimé les $*$ multiples avec le `purge`)
- une chaîne non vide n'est pas capturée par le motif vide

6. Compléter la fonction `capture`.

correction

```
let rec capture motif texte = match (motif, texte) with
    | [], [] -> true
    | ['*'], [] -> true
    | _, [] -> false
    | [], _ -> false
    | '?' :: q, t' :: q' -> capture q q'
    | t :: q, t' :: q' -> t = t' && capture q q'
    | _ -> false
```

Chapitre 26

(CCINP) HORNSAT * (CCINP 24, ex B, corrigé — oral - 186 lignes)

$*$

Logique propositionnelle, Complexité, Réduction,
sources : `ccinphornsat.tex`

On attend un style de programmation fonctionnel. L'utilisation des fonctions du module `List` *est autorisée ; celle des fonctions du module* `Option` *est interdite.*

Une formule du calcul propositionnel est une *formule de Horn* s'il s'agit d'une formule sous forme normale conjonctive (FNC) dans laquelle chaque clause (éventuellement vide, auquel cas la clause en question est la disjonction d'un ensemble vide de littéraux et est donc sémantiquement équivalente à $\bot$) contient au plus un littéral positif. Dans la suite, on considère qu'une clause d'une telle formule contient au plus une occurrence de chaque variable (en particulier, les clauses sont sans doublons).

1. Les formules suivantes sont-elles des formules de Horn ?

a) $F_1 = (\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_0 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_0 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_3 \vee x_2) \wedge x_2 \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_2)$.

b) $F_2 = (x_0 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_0) \wedge \neg x_1 \wedge (x_1 \vee \neg x_1 \vee x_0) \wedge (\neg x_0 \vee x_2)$.

c) $F_3 = (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge x_1 \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_0 \vee \neg x_1) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_0 \vee \neg x_1)$.

correction

Corrigé proposé par le jury

F_1 et F_3 sont des formules de Horn mais pas F_2, ce qui est implicitement suggéré par le code.

On utilise le type suivant pour manipuler les formules de Horn : une formule de Horn est une liste de clauses de Horn ; une clause étant la donnée d'un `int option` valant `None` si la clause ne contient pas de littéral positif et `Some i` si x_i en est l'unique littéral positif et d'une liste d'entiers correspondants aux numéros des variables intervenant dans les littéraux négatifs.

```
type clause_horn = int option * int list
type formule_horn = clause_horn list
```

2. Écrire une fonction `avoir_clause_vide : formule_horn -> bool` qui renvoie `true` si et seulement si la formule en entrée contient une clause vide (donc ne contenant ni littéral positif, ni aucun littéral négatif).

correction

Avec notre modélisation, la clause vide est `(None, [])` d'où :

```
let avoir_clause_vide (f :formule_horn) :bool =
List.mem (None, []) f
```

On appelle *clause unitaire* une clause réduite à un littéral positif. Par ailleurs, *propager* une variable x_i dans une formule F sous FNC consiste à modifier F comme suit :

- Toute clause de F qui ne fait pas intervenir la variable x_i est conservée telle quelle.
- Toute clause de F qui fait intervenir le littéral x_i est supprimée entièrement.
- On supprime le littéral $\neg x_i$ de toutes les clauses de F qui font intervenir ce littéral.

On souligne que supprimer $\neg x$ d'une clause C qui ne fait intervenir que ce littéral ne revient pas à supprimer la clause C. On s'intéresse à l'algorithme $\mathcal{A}$ suivant dont on admet (pour le moment) qu'il permet de déterminer si une formule de Horn F est satisfiable :

```
TantQu'il y a une clause unitaire x_i dans F
    F ← propager x_i dans F \;
Si F contient une clause vide
    Renvoyer faux
Sinon
    Renvoyer vrai
```

3. À l'aide de cet algorithme déterminer si les formules de Horn de la question 1 sont satisfiables. On utilisera ces formules pour tester les fonctions implémentées aux questions suivantes.

correction

La formule F_1 est satisfiable d'après cet algorithme mais pas F_3.
Techniquement on peut arrêter les propagations dès qu'on produit une clause vide.

4. Écrire une fonction `trouver_clause_unitaire : formule_horn -> int option` renvoyant `None` si la formule en entrée n'a pas de clause unitaire et `Some i` où x_i est l'une des clauses unitaires sinon.

correction

```
let rec trouver_clause_unitaire (f :formule_horn) :int option = ↩
   match f with
|[] -> None
|(Some v,l)::q -> if l = [] then Some v else ↩
   trouver_clause_unitaire q
|_::q -> trouver_clause_unitaire q
```

5. Justifier que propager une variable dans une formule de Horn donne une formule de Horn. Écrire une fonction `propager : formule_horn -> int -> formule_horn` qui prend en entrée une formule de Horn F et un entier i et calcule la formule résultat de la propagation de x_i dans F.

correction

La fonction auxiliaire `enlever_neg` supprime si elle existe la seule occurrence d'un entier dans une liste d'entiers (on utilise ici l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de littéral en doublon dans nos clauses de Horn) puis on applique le principe décrit par l'énoncé.

```
let rec propager (f :formule_horn) (v :int) :formule_horn =
let rec enlever_neg (l :int list) :int list = match l with
|[] -> []
|t::q when t = v -> q
|t::q -> t::(enlever_neg q)
in
match f with
|[] -> []
|(i,l)::q -> match i with
|Some t when t = v -> propager q v
|_ -> (i, enlever_neg l)::(propager q v)
```

La formule résultant d'une propagation dans une formule de Horn reste une formule de Horn : c'est toujours une FNC et on ne fait que supprimer des clauses / littéraux (donc s'il y avait au plus un littéral positif par clause, en supprimant des choses cette propriété est conservée).

6. Déduire des questions précédentes une fonction `etre_satisfiable : formule_horn -> bool` renvoyant `true` si et seulement si la formule de Horn en entrée est satisfiable.

correction

On applique l'algorithme donné par l'énoncé en imbriquant les fonctions précédentes :

```
let rec etre_satisfiable (f :formule_horn) :bool =
match (trouver_clause_unitaire f) with
|None -> not (avoir_clause_vide f)
|Some v -> etre_satisfiable (propager f v)
```

7. Quelle est la complexité de votre algorithme en fonction de la taille de la formule en entrée ? Que peut-on dire des problèmes de décision `SAT` et `HORN-SAT` (dont la définition est la même que celle de `SAT` à ceci près que les formules considérées sont supposées être des formules de Horn) ?

correction

La fonction `trouver_clause_unitaire` est linéaire en n la taille de la formule en entrée. Une propagation se fait aussi linéairement en la taille de la formule dans laquelle on propage. Comme une propagation supprime au moins une clause de la formule (la clause unitaire responsable de la propagation), on fera au plus m étapes de "recherche de clause unitaire + propagation" où m est le nombre de clauses.
De plus, la recherche d'une clause vide dans une formule se fait linéairement en le nombre de clauses. On aboutit donc grossièrement (c'est-à-dire sans compter qu'au fil des propagations la taille de la formule réduit - de toutes façons ça ne changerait probablement pas grand chose) à une complexité pour `etre_satisfiable` en $O(mn+m) = O(n^2)$.
On en déduit que `HORN-SAT` $\in$ P alors qu'on sait que `SAT` est NP-complet. Sous réserve que P $\neq$ NP, étudier la satifiabilité de formules de Horn est donc un problème bien plus facile que lorsqu'il n'y a pas d'hypothèse sur les formules.

8. On s'intéresse à présent à la correction de l'algorithme $\mathcal{A}$.

a) Si F est une clause de Horn sans clause unitaire ni clause vide, donner une valuation simple qui satisfait F.

correction

La valuation qui assigne faux à toutes les variables convient. En effet, s'il n'y a ni clause unitaire ni clause vide, toutes les clauses contiennent au moins une variable niée.

b) On admet que si F est une formule de Horn faisant intervenir une clause unitaire x_i et F' est le résultat de la propagation de x_i dans F, alors que F est satisfiable si et seulement si F' est satisfiable. En déduire la correction de l'algorithme $\mathcal{A}$.

correction

Si F est une formule de Horn, notons $\Pi(F)$ la formule de Horn obtenue après toutes les propragations successives de la boucle tant que dans l'algorithme $\mathcal{A}$. La propriété de l'énoncé permet de montrer par récurrence que F et $\Pi(F)$ sont équisatisfiables.
Or $\Pi(F)$ est satisfiable si et seulement si cette formule de Horn ne contient pas la clause vide : le sens direct est immédiat puisque une FNC contenant une clause vide n'est jamais satisfiable (cette clause ne l'étant pas) ; le sens réciproque est fourni par la question 7a.

9. Expliquer comment on pourrait modifier les fonctions précédentes afin de déterminer une valuation satisfaisant une formule de Horn dans le cas où elle existe plutôt que de juste dire si elle est satisfiable ou non. On ne demande pas d'implémentation.

correction

Le principe est de garder trace des variables que l'on propage : on les assigne toutes à vrai. Toutes les variables non propagées sont quant à elles assignées à faux.

Chapitre 27

(CCINP) Mots de Dyck * (CCINP 24, ex B, corrigé — oral - 157 lignes)

∗

Langages, C, Complexité,
sources : `ccinpdyck.tex`

Mots de Dyck (type B)

La compilation du code compagnon initial avec `make safe` *provoque des warnings attendus qui seront résolus lors de l'implémentation des fonctions demandées par le sujet.*

On s'intéresse dans cet exercice aux mots de Dyck, c'est-à-dire aux mots bien parenthésés. Dans ce type de mots, toute parenthèse ouverte "(" est fermée ")" et une parenthèse ne peut être fermée si elle ne correspond pas à une parenthèse préalablement ouverte.

Par exemple pour deux couples de parenthèses, "(())" et "()()" sont des chaînes de parenthèses bien formées. "())(" et ")()(" ne le sont pas.

On admet que le nombre de mots bien parenthésés à n couples de parenthèses est donné par les nombres de Catalan définis par la formule suivante :

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ pour } n \geqslant 0$$

On rappelle que le type `uint64_t` est un type entier non signé codé sur 64 bits.

1. Complétez dans le code compagnon la fonction dont le prototype est `uint64_t catalan(int n)`. Vous pouvez utiliser une fonction auxiliaire si cela vous semble pertinent.
2. Que va-t-il se passer si on tente d'afficher `catalan(n)` pour `n` un peu grand ? Le constatez-vous ici ?

On cherche maintenant à afficher le nombre de mots (chaînes) bien parenthésés avec n fixé couples de parenthèses, ainsi que les mots eux-mêmes.

Un algorithme de force brute pour déterminer toutes les chaînes à n couples de parenthèses bien formées consiste à générer toutes les possibilités puis à ne garder que les chaînes bien formées.

3. Complétez dans le code compagnon la fonction dont le prototype est `bool verification(char * mot)`. Cette fonction renvoie `true` si le mot fourni en paramètre `mot` est bien parenthésé, `false` sinon.
4. Quelle est la complexité de cette vérification ?
5. Quelle est la complexité finale de l'algorithme de force brute ?

On appelle `n` le nombre de couples de parenthèses voulu. Dans le fichier compagnon fourni, le nombre de couples a été limité à 18.

On vous propose de coder l'énumération des chaînes de parenthèses bien formées en appliquant l'algorithme de backtracking suivant, dont on admet qu'il est correct : on compte le nombre de parenthèses ouvertes `o` et le nombre de parenthèses fermées `f` dans une chaîne de caractères courante (vide au départ).

- Si `o = f = n`, on a trouvé une chaîne bien formée.
- Si `o < n`, on ajoute une parenthèse ouvrante et on relance.
- Si `f < o`, on ajoute une parenthèse fermante et on relance.

Cet algorithme est à implémenter dans la fonction dont le prototype est `void dyck(char s[N], int o, int f, int n)` qui affiche sur la sortie standard les chaînes de parenthèses bien formées avec `n` couples de parenthèses lorsque `s` est la chaîne de caractère courante, `o` est son nombre de parenthèses ouvrantes et `f` est son nombre de parenthèses fermantes.

6. Compléter la fonction `dyck` pour afficher les chaînes bien parenthésées avec 5 couples de parenthèses.
7. Adapter la fonction `dyck` pour calculer le nombre de mots obtenus. Combien de mots trouvez-vous pour 16 couples de parenthèses ?
8. Adapter la fonction `dyck` pour stocker les mots bien parenthésés dans une liste chaînée et les afficher après l'appel à la fonction. Vous trouverez dans le code compagnon une structure qui peut vous aider.

correction

Correction proposée par le jury

Proposition de corrigé

1. Une solution et d'implémenter une factorielle. On peut aussi simplifier la formule donnée (ce qui permet de repousser un peu plus loin le dépassement).

```
uint64_t fact(int n) {
  uint64_t r = 1;
  for(int i = 2; i <= n; i = i + 1){
    r = r * i;
  }
  return r;
}

uint64_t catalan1(int n) {
  return fact(2*n)/fact(n+1)/fact(n);
}
```

2. On obtient un dépassement d'entier. Expérimentalement, si on utilise la fonction factorielle, le résultat devient faux pour $n = 11$. En simplifiant la formule en $2n \times ... \times (n+2)/n!$, c'est pour $n = 16$ que ça coince. Dans tous les cas, le dépassement finira par arriver provoquant un comportement indéfini.

3. On utilise un compteur qui indique le nombre de parenthèses ouvertes : on l'incrémente lorsqu'on rencontre une parenthèse ouvrante et on le décrémente lorsqu'on rencontre une parenthèse fermante. Si ce compteur devient négatif, le mot n'est pas bien parenthésé puisqu'il y a trop de parenthèses fermantes et on peut donc interrompre l'exécution (même si on peut se passer de cette subtilité). En fin de décompte, le compteur devrait être nul si le mot est bien parenthésé.

```
bool verification(char * mot) {
  int i = 0;
  bool fin = false;
  int compteur = 0;
  bool resultat = false;
  while (!fin && (mot[i] != '\0')) {
    if (mot[i]=='(') {
      compteur++;
    }
    else if (mot[i] == ')') {
      compteur = compteur - 1;
    }
    if (compteur<0) {
      fin = true;
    }
    i = i + 1;
  }
  if (compteur == 0) {
    resultat = true;
  }
  return resultat;
}
```

4. On obtient un algorithme linéaire en la taille du mot en entrée.

5. Il y a 4^n mots à générer (puisqu'un mot à n couples de parenthèses possède $2n$ lettres). Pour chacun, la vérification de s'il est bien formé se fait en $O(2n) = O(n)$. À supposer que la construction des mots ne soit pas coûteuse, on obtient une complexité pour l'algorithme naïf en $O(4^n \times n)$.

6. Voici une proposition qui répond aux questions 6, 7 et 8.

```c
void dyck(char s[N], int o, int f, int n, uint64_t* r,
struct liste_s ** liste) {
  if (f == n) {
    if (liste != NULL) {
      struct liste_s * c = malloc(sizeof(struct liste_s));
      strcpy(c->chaine, s);
      c->suivant = *liste;
      *liste = c;
    }
    else {
      printf("%s\n", s);
    }
    (*r) = (*r) + 1;
    return;
  }
  if (o<n) {
    // printf("on ajoute (\n");
    char res[N];
    strcpy(res, s);
    strcat(res, "(");
    dyck(res, o+1, f, n, r, liste);
  }
  if (f<o) {
    // printf("on ajoute )\n");
    char res[N];
    strcpy(res, s);
    strcat(res, ")");
    dyck(res, o, f+1, n, r, liste);
  }
}
```

7. Une façon de faire est d'ajouter un paramètre passé par pointeur pour compter ce nombre. On pourrait aussi utiliser une variable globale. On trouve 35357670 mots corrects pour $n = 16$.

8. Voir la proposition en question 6.

Chapitre 28

(ENS) Jeu des jetons *** (ENS 23 MP, corrigé — oral - 153 lignes)

***

Jeux, Graphes,
sources : `ensjeujeton.tex`

Jeu des jetons (info MP 2023) :

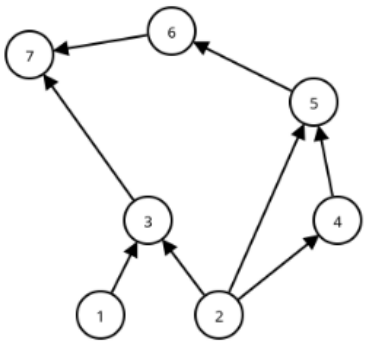
Définition 1

Un graphe orienté G est défini par un ensemble fini de sommets V et d'arêtes $E \subseteq V \times V$. Pour un sommet $x \in V$, ses *prédécesseurs* forment l'ensemble des sommets $y \in V$ tels que $(y, x) \in E$ et ses *successeurs* forment l'ensemble des sommets $z \in V$ tels que $(x, z) \in E$. On suppose de plus que le graphe ne contient pas de cycle, y compris des arêtes d'un sommet vers lui-même.
On s'intéresse au problème suivant : on fixe un sommet v du graphe, appelé *sommet distingué*. On dispose d'un ensemble de *jetons* qui peuvent être placés sur les sommets du graphe, de sorte que chaque sommet ne comporte que zéro ou un jeton. S'il a un jeton, le sommet est dit *marqué*. On peut placer les jetons selon les règles suivantes :

1. Si x n'a aucun prédécesseur, on peut placer un jeton sur x
2. Si tous les prédécesseurs de x sont marqués, on peut placer un jeton sur x
3. On peut toujours retirer un jeton

Une *étape* du jeu consiste à placer ou retirer un unique jeton en suivant ces règles. À la fin du jeu, on veut qu'il ne reste qu'un seul jeton placé sur le sommet distingué.

1. Soit le graphe représenté ci-dessous, où "7" est le sommet distingué. Montrer qu'il existe une stratégie utilisant 4 jetons.



2. Démontrer qu'un graphe orienté acyclique comporte au moins un sommet sans prédécesseur.
3. En déduire que pour tout graphe orienté acyclique à n sommets, il existe toujours une stratégie pour résoudre le jeu avec n jetons.
4. Soit un arbre binaire (chaque sommet non-feuille a deux enfants) à ℓ feuilles, dans lequel les prédécesseurs d'un sommet sont ses enfants, et le sommet distingué est la racine r. Montrer qu'il existe une stratégie utilisant $\lceil \log_2 \ell \rceil + 2$ jetons, où $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de x.

Définition 2

On remplace maintenant la règle 3. par les deux règles suivantes :

1. On peut toujours retirer un jeton d'un sommet sans prédécesseurs
2. On ne peut retirer un jeton d'un sommet que si ses prédécesseurs sont tous marqués

À partir de maintenant, on considère uniquement le graphe-ligne $L_n := x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n$, où x_n sera toujours le sommet distingué.

5. Montrer qu'avec ces nouvelles règles :
   (a) Il existe toujours une stratégie pour résoudre le jeu en utilisant n jetons et $O(n)$ étapes.
   (b) S'il existe une stratégie pour marquer x_n en k jetons et t étapes, alors il existe aussi une stratégie pour, en partant de la configuration finale (x_n est le seul sommet marqué), retrouver la configuration initiale (aucun sommet marqué) en k jetons et t étapes.
6. Montrer qu'on peut marquer x_n en $O(n)$ étapes et $O(\sqrt{n})$ jetons.
7. Montrer qu'on peut marquer x_n en utilisant au total $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ jetons. Combien d'étapes comporte cette stratégie ?
8. On cherche maintenant à obtenir un meilleur compromis entre le nombre de jetons utilisés et le nombre d'étapes. Montrer que pour tout ε, il existe une stratégie utilisant $O(\log n)$ jetons et $O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$ étapes.

correction

Ceci est une <u>ébauche</u> de solution, proposée par le jury du rapport X-ENS 2023.

1. Comme pour le moment on peut enlever un jeton n'importe quand, il suffit de s'assurer qu'on arrive à marquer 7. Les étapes du marquage sont les suivantes.

Placer jeton	2	1	3		4	5			6	7
Enlever jeton				1			2	4		
Nombre de jetons	1	2	3	2	3	4	3	2	3	4

2. On peut procéder par l'absurde. Si tous les sommets ont au moins un prédécesseur, on peut former un cycle de la manière suivante : on sélectionne un sommet, puis un prédécesseur de ce sommet, et ainsi de suite. On finit forcément par trouver un sommet déjà rencontré : cela créée un cycle.
3. Procéder par induction sur le nombre de sommets du graphe. Un graphe ne contenant aucun cycle contient toujours au moins un sommet qui n'a pas de prédécesseur. Placer un premier jeton sur ce sommet nous ramène au problème des jetons sur le graphe duquel on a enlevé ce sommet. Ce graphe est lui-même acyclique et de taille inférieure.
4. On montre par récurrence que : tout arbre ayant moins de ℓ feuilles a une stratégie avec $\lceil \log_2 \ell \rceil + 2$ jetons. Si l'arbre contient une seule feuille, il suffit d'un jeton (a fortiori 2). S'il en a 2, il faut 3 jetons. Si on prend maintenant un arbre à ℓ feuilles, la racine comporte deux sous-arbres, tous deux ayant $\ell - 1$ feuilles ou moins. L'un d'entre eux a plus de $\ell/2$ feuilles (disons ℓ'). On commence par celui-ci. On le marque en utilisant $\lceil \log_2 \ell' \rceil + 1 \leqslant \lceil \log_2 \ell \rceil + 1$ jetons (par hypothèse de récurrence). On laisse le jeton sur la racine de ce sous-arbre.
   Ensuite, on s'occupe de l'autre sous-arbre, qui a moins de $\ell/2$ feuilles. On peut donc marquer sa racine en utilisant $\lceil \log_2(\ell/2) \rceil + 1 \leqslant \lceil \log_2 \ell \rceil$ jetons. Enfin, on marque la racine de l'arbre (à cette étape il n'y a plus que 3 jetons sur l'arbre). Le nombre de jetons utilisés est donc bien $\lceil \log_2 \ell \rceil + 1$.
5. Pour la première question : on place des jetons sur tous les sommets x_1 jusqu'à x_n, et on les retire de x_{n-1} jusqu'à x_1 dans l'ordre inverse.
   Pour la deuxième, on peut remarquer que les conditions pour placer ou pour enlever un jeton sont les mêmes (tous les prédecesseurs marqués). Par conséquent le jeu est réversible : en partant de la configuration finale on peut ré-appliquer les mêmes étapes dans l'ordre inverse. On n'attendait pas forcément une démonstration très formelle pour cette sous-question, qui est principalement utile pour les questions suivantes.
6. Soit $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. La stratégie se découpe en plusieurs sous-étapes de la manière suivante :
   - pour tout j de 1 à $m-1$, marquer le sommet jm de sorte qu'aucun sommet entre $(j-1)m$ et jm n'est marqué : on utilise pour cela la stratégie naïve, qui utilise m jetons
   - marquer le sommet n à l'aide de la stratégie naïve (qui utilise donc $\leqslant m$ jetons)
   - pour tout j de $m-1$ à 1 , enlever le jeton placé sur le sommet jm. On utilise pour cela la stratégie naïve. En repartant du sommet $(j-1)m$, on marque tous les sommets jusqu'à jm. On retire le jeton du sommet jm, puis de $jm-1$, et ainsi de suite jusqu'à arriver au seul $(j-1)m$ marqué.

   La correction de cette stratégie est évidente : dans la configuration finale le sommet n est marqué et aucun sommet $1, \ldots, n-1$ ne l'est. Le nombre de jetons utilisés est de $O(\sqrt{n})$ pour les marquages intermédiaires et $O(\sqrt{n})$ pour les sous-chaînes. Le nombre d'étapes est $O(n)$.
7. On va décrire récursivement cette stratégie. Pour commencer, le sommet x_1 peut être marqué avec un seul jeton. Le sommet x_2 a besoin de deux jetons.
   Comme dans la question précédente, on a besoin du fait que les stratégies de marquage sont réversibles, i.e., si on est capable d'arriver à la configuration où seul x_{2^k} est marqué, alors on est également capable, en partant de cette configuration, de retirer un jeton placé sur ce sommet (de sorte que tous les sommets de 1 à 2^k sont non marqués).

On montre donc par induction que :
¡¡ Pour tout k, en partant d'une configuration où aucun sommet n'est marqué, on peut marquer tout sommet en position $\leqslant 2^k$ avec $k+1$ jetons et $T\left(2^k\right)$ étapes, de sorte qu'aucun autre sommet n'est marqué. ¿¿
Supposons la propriété vraie pour k. Pour tout sommet $2^k < i \leqslant 2^{k+1}$, on procède de la manière suivante :

- marquer le sommet numéro 2^k en utilisant un appel récursif. On utilise $k+1$ jetons ; à ce moment seul le sommet numéro 2^k est marqué
- marquer le sommet i. Pour ce faire, on considère la séquence d'étapes dans la stratégie de marquage du sommet $\left(i-2^k\right)$, et on répète ces étapes, décalées de 2^k positions. Au lieu de partir de la racine, on part du sommet 2^k+1 (puisque 2^k est marqué). Comme le sommet 2^k est marqué, cela revient au même (on peut partir du sommet 2^k+1 comme on partait précédemment de la racine).
  On utilise $k+1$ jetons d'après l'hypothèse de récurrence, et comme 2^k reste marqué durant ces étapes, on a au total $k+2$ jetons. À ce stade seuls les sommets 2^k et i sont marqués.
- on utilise une troisième fois l'hypothèse de récurrence et la réversibilité des stratégies pour enlever le jeton du sommet 2^k. On a donc bien que seul i est marqué.

Le nombre d'étapes nécessaires est : $T\left(2^{k+1}\right) = 3T\left(2^k\right)$. Comme on a $T(1)=1$ cela implique $\Longrightarrow T\left(2^k\right) = 3^k$ étapes. Pour un entier n donné, on utilise donc de l'ordre de $n^{\log_2 3}$ étapes.

8. On peut généraliser la construction précédente, qui consistait à faire une récursion en coupant le problème en deux.
On va couper en ℓ parties récursivement. Soient T_k et J_k le nombre d'étapes et de jetons pour marquer tous les sommets à distance ℓ^k : $T_k \leqslant 2\ell T_{k-1}$ et $J_k = J_{k-1} + \ell - 1$, donc $T_k = (2\ell-1)^k \leqslant \ell^k 2^k$ et $J_k = (\ell-1)k$. (Remarquer qu'on retrouve bien le cas $\ell = 2$).
En posant $n = \ell^k$ et en faisant varier k on a donc : $k = \log_\ell n$ et donc $T \leqslant n 2^{\log n/\log \ell} = n^{1+\log 2/\log \ell}$ et $J = (\ell-1)\log_\ell n = O(\log n)$.

Chapitre 29

(ENS) Monoïdes et Langages *** (ENS 23 MP, corrigé — oral - 238 lignes)

$***$

Langages,
sources : `ensmonoideslang.tex`

Monoïdes et Langages :

Définition 3

Un monoïde est un triplet $(M, \cdot_M, e_M)$ où $e_M \in M$ et $\cdot_M : (M \times M) \to M$ vérifie $\forall x \in M, x \cdot_M e_M = e_M \cdot_M x = x$ et $\forall x, y, z \in M, (x \cdot_M y) \cdot_M z = x \cdot_M (y \cdot_M z)$. (Informellement, un monoïde est un groupe sans garantie d'existence d'inverses.) On abrège souvent $x \cdot_M y$ en xy et $(xy)z$ ou $x(yz)$ en xyz. Fixons un monoïde $(M, \cdot_M, e_M)$ pour l'ensemble du sujet, avec M fini.

1. Soit $x \in M$.
- **(a)** Montrer que $j_x := \min E$, où $E := \left\{ j \in \mathbb{N} \mid \exists i \in [0, j-1], x^i = x^j \right\}$, est bien défini.
- **(b)** Montrer que les éléments $1, x, \ldots, x^{j_x - 1}$ sont distincts deux à deux.
- **(c)** Montrer qu'il existe un unique $i_x \in [0, j_x - 1]$ tel que $x^{i_x} = x^{j_x}$.
- **(d)** Soit $p_x := j_x - i_x$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x^{i_x + n} = x^{i_x + r}$, où $r := (n \bmod p_x)$ est le reste de la division euclidienne de n par p_x.

2. Qn ne demande pas de justification pour cette question. Soit $x \in M$. Trouver $e_x \in M$ tel que $(G_x, \cdot_M, e_x)$ soit un groupe, où $G_x := \left\{ x^{i_x}, \ldots, x^{i_x + p_x - 1} \right\}$. On ne demande pas de vérifier l'existence d'inverses.

Définition 4

Un groupe $(G, \cdot_G, e_G)$ est dit contenu dans $(M, \cdot_M, e_M)$ si $G \subseteq M$ et $\forall x, y \in G, x \cdot_G y = x \cdot_M y$. On n'exige pas $e_G = e_M$, donc pour tout $x \in M, (\{x\}, \cdot_x, x)$ est un groupe, où $\cdot_x$ est une restriction de $\cdot_M$. Un monoïde est dit apériodique s'il ne contient que des groupes réduits à un élément.

3. On rappelle que M est fini. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes, par exemple en montrant $1 \Rightarrow 2$ puis $2 \Rightarrow 3$ puis $3 \Rightarrow 1$.
- **(a)** M est un monoïde apériodique.
- **(b)** Pour tout $x \in M$, on a $p_x = 1$ (et donc $x^{i_x + 1} = x^{i_x}$)
- **(c)** $\exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in M, x^{k+1} = x^k$

Définition 5

On suppose dans la suite que $(M, \cdot_M, e_M)$ est apériodique et fini.

4. (Lemme de simplification). Soient $p, m, q \in M$.
- **(a)** Montrer que si $m = pmq$, alors $m = pm = mq$.
- **(b)** En déduire que si $pq = e_M$, alors $p = q = e_M$.

5. (Caractérisation de l'égalité). Soit $m, x \in M$. Montrer que $m = x$ ssi $x \in (mM \cap Mm)$ et $m \in MxM$. (Où $mM := \{my \mid y \in M\}$ et $MxM := \{yxz \mid y, z \in M\}$.)

Définition 6

Fixons un ensemble fini non vide Σ. Soit Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ, et ε le mot vide. Soit $\mu : \Sigma^* \to M$ un morphisme, i.e. $\mu(\varepsilon) = e_M$ et $\mu(uv) = \mu(u) \cdot_M \mu(v)$ pour tout $u, v \in \Sigma^*$, où uv est la concaténation des mots u et v.

6. Soient $m \in M$ et $w \in \Sigma^*$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- **(a)** $m \notin M\mu(w)M$
- **(b)** w se décompose soit en $w = uav$ où $m \notin M\mu(a)M$, soit en $w = uavbt$ où $m \in M\mu(av)M \cap M\mu(vb)M$ et $m \notin M\mu(avb)M$. (Où $u, v, t \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$.)

7. Soient $m \in M \setminus \{e_M\}$ et $w \in \Sigma^*$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- **(a)** $\mu(w) \in mM$
- **(b)** Il existe $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$ tels que $w = uav$ et $\mu(u) \notin mM$ et $\mu(ua)M \subseteq mM$.

8. Soit $m \in M \setminus \{e_M\}$. Montrer que $\mu^{-1}(m) = (U\Sigma^* \cap \Sigma^* V) \setminus (\Sigma^* Y \Sigma^*)$, où $\mu^{-1}(m) := \{w \in \Sigma^* \mid \mu(w) = m\}$ et

$$U := \bigcup_{\substack{a \in \Sigma \\ x \in M \setminus mM \\ x\mu(a)M \subseteq mM}} \mu^{-1}(x)a \qquad V := \bigcup_{\substack{a \in \Sigma \\ x \in M \setminus Mm \\ M\mu(a)x}} a\mu^{-1}(x) \subseteq Mm$$

$$Y := \{a \in \Sigma \mid m \notin M\mu(a)M\} \cup Z \qquad Z := \bigcup_{\substack{a,b \in \Sigma \\ m \in M\mu(a)xM \cap Mx\mu(b)M \\ m \notin M\mu(a)x\mu(b)M}} a\mu^{-1}(x)b$$

correction

Remarques
- Le sujet note 1 à la place de e_M.
- Il me semble qu'entre les questions **2.** et **3.**, le groupe à un élément devrait être $(\{e_x\}, \cdot_x, e_x)$ où $\cdot_x$ est **la** restriction de $\cdot_M$.

1. **(a)** On peut définir l'application φ_x de $\mathbb{N}$ dans M par $\varphi_x(k) = x^k$. Comme M est infini et M est fini, φ_x n'est pas injective donc l'ensemble $E = \{j \in \mathbb{N} \mid \exists i, 0 \leq i < j, x^i = x^j\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. E admet donc une minimum j_x.

(b) Si on avait $x^p = x^q$ avec $0 \leq p < q < j_x$ alors on aurait $q \in E$ avec $q < j_x$, ce qui est impossible : $1, x, x^2, \ldots, x^{j_x - 1}$ sont distincts deux-à-deux.

(c) Comme on a $j_x \in E$, il existe i_x tel que $x^{i_x} = x^{j_x}$ avec $0 \leq i_x < j_x$.
D'après la question ci-dessus, i_x est unique.

(d) On a $x^{i_x + p_x} = x^{j_x} = x^{i_x}$ donc, par récurrence $x^{i_x + kp_x} = x^{i_x}$ puis $x^{i_x + kp_x + r} = x^{i_x + kp_x} \cdot x^r = x^{i_x} \cdot x^r = x^{i_x + r}$. Ce résultat est valide en particulier si $r = n \bmod p_x$.

2. On considère la division euclidienne de i_x par p_x, $i_x = kp_x + r$.
Le produit de 2 éléments de G_x, $x^{i_x + a}$ et $x^{i_x + b}$ avec $0 \leq a, b < p_x$, peut s'écrire $x^{i_x + a} \cdot x^{i_x + b} = x^{i_x + a + i_x + b} = x^{i_x + a + kp_x + r + b} = x^{i_x + a + b + r}$.
Si $r = 0$, $\boxed{e_x = x^{i_x}}$ est élément neutre et le symétrique de $x^{i_x + a}$ est $x^{i_x + p_x - a}$ pour $1 \leq a < p_x$.
Pour $0 < r < p_x$, $\boxed{e_x = x^{i_x + p_x - r}}$ est élément neutre, le symétrique de $x^{i_x + a}$ est $x^{i_x + p_x - a - r}$ pour $0 \leq a \leq p_x - r$ et le symétrique de $x^{i_x + a}$ est $x^{i_x + 2p_x - a - r}$ pour $p_x - r < a < p_x - 1$. (Ceci marche donc aussi pour $r = 0$ avec l'abus $0 = p_x$.)

3. M contient les groupes G_x pour tout x avec G de cardinal p_x.
$1 \Rightarrow 2$: Si M est apériodique, G_x est de cardinal 1 donc $p_x = 1$ pour tout $x \in M$.
$2 \Rightarrow 3$: Si $p_x = 1$ pour tout $x \in M$ alors $x^{i_x + 1} = x^{i_x}$ pour tout x donc, pour $k = \max\{i_x \ ; \ x \in M\}$, on a $k - i_x \geq 0$ pour tout x puis (par récurrence immédiate) $x^k = x^{i_x + (k - i_x)} = x^{i_x} = x^{i_x + (k - i_x + 1)} = x^{k+1}$.
$3 \Rightarrow 1$: Si G est un groupe contenu dans M alors, pour $x \in G$ et $p \in \mathbb{N}$, x^p a la même valeur dans M et dans G. Ainsi, si $x^{k+1} = x^k$, on peut simplifier par x^k dans G donc $x = e_G$. Si la condition 3 est vérifiée les groupes contenu dans M sont réduits à leur élément neutre donc leur cardinal est 1 : M est apériodique.

4. **(a)** Si $m = pmq$ alors, par récurrence sur k, $m = p^r m q^r$ pour tout r. Si on choisit $r = k$ avec $x^k = x^{k+1}$ pour tout $x \in M$ alors $pm = p \cdot (p^k m q^k) = p^{k+1} m q^k = p^k m q^k = m$ et, de même, $mq = m$.

(b) Si on prend $m = e_M$, $e_M = pq = pe_M q$ donne $e_M = pe_M = p$ et $e_M = e_M q = q$.

5. Si $m = x$ alors $x = me_M \in mM$, $x = e_M m \in Mm$ et $m = e_M x e_M \in MxM$.
Inversement, si $x \in mM \cap Mm$ et $m \in MxM$, on peut écrire $x = mq = pm$ et $m = axb$ avec $a, b, p, q \in M$. $m = axb = apmb$ donc $m = apm = ax$ et $m = mp$; on en déduit $x = mq = axq$ d'où $x = ax = m$.

6. On appelle **facteur** d'un mot w, un mot w' tel qu'il existe $u, v \in \Sigma^*$ avec $m = uw'v$.
Sens direct On suppose que $m \notin M\mu(w)M$.
Si $m \in M\mu(a)M$ pour toute lettre de w, il existe des facteurs non vides w' de w tels que $m \in M\mu(w')M$, par exemple les facteurs de taille 1, et des facteurs w' de w tels que $m \notin M\mu(w')M$, par exemple $w = w'$. On considère un mot de longueur minimale w_0 tel que $m \notin M\mu(w_0)M$. w_0 est de longueur 2 au moins donc on peut l'écrire $w_0 = avb$ avec $a, b \in \Sigma$ et $v \in \Sigma^*$ donc $m = uavbt$. Comme av et vb sont de longueur strictement inférieure à celle de m', on a $m \in M\mu(av)M$ et $m \in M\mu(vb)M$.

Ainsi l'une des deux propriété du 2 est vérifiée.

Contraposée On suppose que $m \in M\mu(w)M$: $m = x\mu(w)y$ avec $x, y \in M$.

Pour $w = uav$ avec $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a $m = x\mu(u)\mu(a)\mu(v)y \in M\mu(a)M$.

Pour $w = uavbt$ avec $u, v, t \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$, on a $m = \big(x\mu(u)\big)\mu(av)\big(\mu(bt)y\big) \in M\mu(av)M$, $m = \big(x\mu(ua)\big)\mu(vb)\big(\mu(t)y\big) \in M\mu(vb)M$ et $m = \big(x\mu(u)\big)\mu(avb)\big(\mu(t)y\big)$.

Ainsi la propriété 2 n'est pas vérifiée.

On utilisera la propriété $x \in mM$ équivaut à $xM \subset mM$.

En effet si $x \in mM$ alors $x = mm'$ avec $m' \in M$ donc, pour tout $y \in M$, $xy = m(m'y) \in mM$ d'où $xM \subset mM$. Inversement, si $xM \subset mM$, alors $x = xe_M \in mM$.

7. On appelle **facteur** d'un mot w, un mot w' tel qu'il existe $u, v \in \Sigma^*$ avec $m = uw'v$.

Sens direct On suppose que $\mu(w)inmM$ avec $m \neq e_M$.

On remarque d'abord $e_M \notin mM$, car si on a $e_M = mx$, on a vu au **4. 2** qu'alors $m = x = e_M$.

Ainsi le préfixe ε de w vérifie $\mu(\varepsilon) = e_M \notin mM$ et le préfixe w vérifie $\mu(w) \in mM$. On considère le préfixe de w de longueur minimale w' tel que $\mu(w') \in mM$. w' est de longueur 1 au moins donc on peut l'écrire $w' = ua$ avec $u \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$ et $w = w'v = uav$. u est un préfixe de longueur strictement inférieure à celle de $w' = ua$ donc $\mu(u) \notin mM$.

On a alors $\mu(ua) \in mM$ donc, $\mu(ua)M \subset mM$: la propriété 2 est vérifiée.

Réciproque On suppose que $w = uav$ et $\mu(ua)M \subset mM$ avec $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$.

On a alors $\mu(w) = \mu(ua) \cdot \mu(v) \in \mu(ua)M$ donc $\mu(w) \in mM$.

8. Inclusion de $\mu^{-1}(m)$ Si $w \in \mu^{-1}(m)$ alors $\mu(w) = m \in mM$. D'après la question **7.**, on peut écrire $w = uav$ avec $\mu(u) \notin mM$ et $\mu(ua) \in mM$. Si on note $x = \mu(u)$ on a $x \in M \setminus mM$, $x\mu(a) = \mu(u)\mu(a) = \mu(ua) \in mM$ donc $x\mu(a)M \in mM$ et $u \in \mu^{-1}(x)$ donc $ua \in \mu^{-1}(x)$; ainsi $ua \in U$ puis $w = uav \in U\Sigma^*$.

On peut prouver une propriété analogue à celle du **7.** pour les préfixes : $\mu(w) \in Mm$ si et seulement si $w = uav$ avec $\mu(v) \notin Mm$ et $\mu(av)M \subset Mm$. On en déduit comme ci-dessus que $w \in \Sigma^*V$.

Si w appartenait à $\Sigma^*Y\Sigma^*$ alors

- soit $w = uaw$ avec $m \notin M\mu(a)M$, ce qui est impossible car $m = \mu(u)\mu(a)\mu(v)$
- soit $w = uw'v$ avec $w' \in Z$ c'est-à-dire $w' = atb$ avec $t \in \mu^{-1}(x)$, $m \in M\mu(a)xM$, $m \in Mx\mu(b)M$ et $m \notin M\mu(a)x\mu(b)M$. On a donc $w = uatbv$, $m \in M\mu(at)M \cap M\mu(tb)M$ et $m \notin M\mu(atb)$ ce qui donne, d'après la question **6.**, $m \notin M\mu(w)M$. On aboutit donc à la contradiction $m \notin MmM$.

Il est donc impossible d'avoir $w \in \Sigma^*Y\Sigma^*$: $w \in U\Sigma^* \cap \Sigma^*V \setminus \Sigma^*Y\Sigma^*$ d'où l'inclusion de $\mu^{-1}(m)$.

Caractérisation de $\mu^{-1}(m)$ Soit $w \in U\Sigma^* \cap \Sigma^*V \setminus \Sigma^*Y\Sigma^*$.

$w \in U\Sigma^*$ signifie qu'on peut écrire $w = uav$ avec $x = \mu(u) \notin mM$ et $x\mu(a) = \mu(ua) \in mM$. On en déduit que $\mu(w) = \mu(ua)\mu(v) \in \mu(ua)M \subset M$. De même $w \in \Sigma^*V$ donne $\mu(w) \in Mm$.

On va maintenant utiliser la question **6.** pour prouver qu'on a $m \in M\mu(w)M$.

Si on pouvait écrire $w = uav$ avec $m \notin M\mu(a)M$ alors a appartiendrait à Y d'où $w \in \Sigma^*Y\Sigma^*$, ce qui est exclu.

Si on pouvait écrire $w = uavbt$ avec $m \in M\mu(av)M$, $m \in M\mu(vb)M$ et $m \notin M\mu(avb)M$ alors, en posant $x = \mu(v)$, avb appartiendrait à $a\mu^{-1}xb$ donc à $Z \subset Y$ d'où $w \in \Sigma^*Y\Sigma^*$, ce qui est exclu.

Ainsi il n'est pas possible d'avoir $m \notin M\mu(w)M$. d'après la question **6.**

On a alors $\mu(w) \in mM \cap Mm$ et $m \in M\mu(w)M$ d'où $m = \mu(w)$ d'après la question **5.**

Chapitre 30

(ENS) Élimination des coupures dans MLL et MALL *** (ENS 23, corrigé partiellement — oral - 385 lignes)

$***$

Logique propositionnelle,
sources : `enseliminationcutmll.tex`

Elimination des coupures dans MLL et MALL

La logique linéaire additive-multiplicative $MALL$ a pour syntaxe :
$A, B ::= p \,|p^\perp|\, A \otimes B | A \parr B | A \oplus B \mid A \& B$
avec p appartenant à un ensemble infini de *formules atomiques*.
L'opération de *dualité* $\cdot^\perp$ est définie inductivement sur les formules :
$(A \otimes B)^\perp = A^\perp \parr B^\perp \quad (A \oplus B)^\perp = A^\perp \& B^\perp$
$(A \parr B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp \quad (A \& B)^\perp = A^\perp \oplus B^\perp \quad \left(p^\perp\right)^\perp = p$
On note Γ, Δ des multi-ensembles $A_1, \ldots, A_n$ de formules (c'est-à-dire que les A_i ne sont pas ordonnées, mais on tient compte de leur multiplicité). Un *séquent linéaire* (ou seulement *séquent*, dans ce sujet) $\vdash \Gamma$ est prouvable quand on peut le déduire des règles suivantes (c'est-à-dire construire avec ces règles une *preuve* dont $\vdash \Gamma$ est la conclusion) :
$$\frac{}{\vdash A, A^\perp}(\text{Ax}) \quad \frac{\vdash \Gamma, A^\perp \quad \vdash A, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}(\text{Cut}) \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}(\otimes) \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\,(\parr)$$
$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}(\&) \quad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\,(\oplus_1) \quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\,(\oplus_2)$$
Une occurence de (`Cut`) dans une preuve qui ajoute les formules A et $A^\perp$ dans ses séquents prémisses est appelée une *coupure sur* A.

Usuellement on appelle "tenseur" le connecteur $\otimes$, "par" le $\parr$, "plus" le $\oplus$ et "avec" le $\&$.
On définit la formule $A \multimap B$ comme $A^\perp \parr B$.

Question 1. Montrer que $\vdash A \otimes (B \oplus C) \multimap (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ est prouvable.

correction

Corrigé de M.Péchaud
On réécrit le membre de droite du séquent :
$A \otimes (B \oplus C) \multimap (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) = (A \otimes (B \oplus C))^\perp \parr ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))$
$= (A^\perp \parr (B^\perp \& C^\perp)) \parr ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))$.
On prouve alors le séquent demandé.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^\perp, A}\,\text{Ax} \quad \dfrac{}{\vdash B^\perp, B}\,\text{Ax}}{\vdash A^\perp, B^\perp, (A \otimes B)}\,\otimes}{\vdash A^\perp, B^\perp, ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))}\,\oplus \quad \dfrac{\text{de même}}{\vdash A^\perp, C^\perp, ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))}}{\dfrac{\dfrac{\vdash A^\perp, (B^\perp \& C^\perp), ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))}{\vdash (A^\perp \parr (B^\perp \& C^\perp)), ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))}\,\parr}{\vdash (A^\perp \parr (B^\perp \& C^\perp)) \parr ((A \otimes B) \oplus (A \otimes C))}\,\parr}\,\&$$

Question 2. Montrer qu'il n'existe pas de preuve de $\vdash A \multimap (A \otimes A)$ sans coupure.

correction

$A \multimap (A \otimes A) = A^\perp \parr (A \otimes A)$
L'arbre de preuve commence nécessairement de la façon suivante :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^\perp, A}\,\text{Ax} \quad \dfrac{}{\vdash A}}{\dfrac{\vdash A^\perp, A \otimes A}{\vdash A^\perp \parr (A \otimes A)}\,\parr}\,\otimes$$

Or $\vdash A$ ne peut pas être déduit sans coupure en général, car par induction immédiate sur l'arbre de preuve, tout séquent $\vdash \Gamma$ prouvable sans coupure contient au moins un connecteur logique, ce qui n'est pas le cas si A est une formule atomique.

Informellement, on interprète la formule A comme "un exemplaire de la ressource A.
Question 3. Question supprimée.

On dit qu'une règle *élimine la formule* A, si A est une formule qui apparaît dans le séquent conclusion de la règle mais dans aucun des séquents prémisses. Par exemple, la règle ($\otimes$) élimine la formule $A \otimes B$. Dans une preuve, on dit qu'une coupure sur la formule C est *principale* si $C^\perp$ et C sont toutes les deux éliminées par (respectivement) la première règle appliqué à la prémisse gauche et la première règle appliquée à la prémisse droite de la coupure.

Question 4. Soit Π une preuve de $\vdash \Gamma_0$ contenant une coupure principale sur la formule C.
Montrer qu'on peut supprimer la coupure sur C de Π, c'est-à-dire obtenir une preuve de $\vdash \Gamma_0$ sans cette coupure sur C.

correction

On omet les $\vdash$ pour alléger les notations.
L'arbre de preuve a nécessairement la forme suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma, C^\perp}\,\text{g} \quad \dfrac{\Delta'}{C, \Delta}\,\text{d}}{\Gamma, \Delta}\,\text{Cut}$$

où Γ' et Δ' ne contiennent pas respectivement $C^\perp$ et C.
Distinguons des cas – en remarquant que g et d ne peuvent pas être des règles de coupure.

- Si $g = Ax$, $\Gamma = C$, et l'arbre de preuve peut être réduit à
  $$\dfrac{\dfrac{\Delta'}{C(=\Gamma), \Delta}\,\text{d}}{\Gamma, \Delta}\,\text{Cut}$$
  où la coupure a été éliminée.
- Si $g = \otimes$, $C^\perp = A \otimes B$, d'où $C = A^\perp \parr B^\perp$.
  L'arbre est de la forme
  $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, A} \quad \dfrac{}{\Gamma_2, B}\,\otimes}{\Gamma, A \otimes B} \quad \dfrac{\dfrac{}{A^\perp, B^\perp, \Delta}\,\parr}{A^\perp \parr B^\perp, \Delta}}{\Gamma, \Delta}\,\text{Cut}$$
  où $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$
  On peut alors le remplacer par l'arbre suivant, où la coupure sur C a été éliminée :

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A^\perp, B^\perp, \Delta}\quad\overline{\Gamma_1, A}}{\Gamma_1, B^\perp, \Delta}\ \text{Cut}\qquad\overline{\Gamma_2, B}}{\Gamma, \Delta}\ \text{Cut}$$

- Si $g = \oplus$, $C^\perp = A \oplus B$, d'où $C = A^\perp \& B^\perp$.
  L'arbre est de la forme (à symétrie près)
  $$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, A}}{\Gamma, A \oplus B}\ \oplus\qquad\dfrac{\overline{A^\perp, \Delta}\quad\overline{B^\perp, \Delta}}{A^\perp \& B^\perp, \Delta}\ \&}{\Gamma, \Delta}\ \text{Cut}$$
  que l'on peut remplacer par
  $$\dfrac{\overline{\Gamma, A}\quad\overline{A^\perp, \Delta}}{\Gamma, \Delta}\ \text{Cut}$$
  qui ne contient plus de coupure sur C.
- Les dernier cas sont symétriques des précédents.

Question 5. Soit Π une preuve de $\vdash \Gamma_0$ contenant une coupure non-principale sur la formule C. Montrer qu'on peut supprimer cette coupure sur C de Π.

correction

L'arbre de preuve a nécessairement la forme suivante :
$$\dfrac{\dfrac{L}{\Gamma, C^\perp}\ \text{g}\qquad\dfrac{R}{C, \Delta}\ \text{d}}{\Gamma, \Delta}\ \text{Cut}$$
où L correspond à un ou plusieurs séquents dont l'un au moins contient $C^\perp$ (on procède de même s'il s'agit de R) :
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma', C^\perp\quad\cdots}{\Gamma, C^\perp}\ \text{g}\qquad\dfrac{R}{C, \Delta}\ \text{d}}{\Gamma, \Delta}\ \text{Cut}$$
On remplace cette portion d'arbre par
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma', C^\perp\quad\dfrac{R}{C, \Delta}\ \text{d}}{\Gamma', \Delta}\ \text{Cut}\qquad\cdots}{\Gamma, \Delta}\ \text{g}$$
(La règle g ne portant que sur des séquents de Γ' et Γ)
On a ainsi remonté la coupure sur C (dans le sens où le nombre de formules apparaissant dans la preuve au dessus du Cut a strictement décru). En itérant le procédé jusqu'à ce que la coupure devienne principale (le nombre d'itérations est fini car l'arbre de preuve est fini), on se ramène à la question précédente, et l'on peut donc bien éliminer la coupure sur C.

Le théorème d'*élimination des coupures* dans un système de preuve (un ensemble de règles) $\mathcal{L}$ contenant (`Cut`) est donné par :
Tout séquent $\vdash \Gamma$ *prouvable dans* $\mathcal{L}$ *est prouvable dans* $\mathcal{L}$ *privé de la règle* (`Cut`)

Question 6. Les transformations induites par les questions 4. et 5. forment-elle un bon algorithme pour prouver l'élimination des coupures dans MALL ?

correction

Oui. En appliquant les transformations ci-dessus, on élimine les coupures sur C en faisant éventuellement apparaître des coupures sur des sous-formules de C.
L'ordre lexicographique sur la liste par ordre décroissant des tailles des C apparaissant dans une coupure dans la formule étant bien fondé, on a donc bien un bon algorithme.

Dans la suite, nous allons donner une preuve plus graphique, permettant de s'abstraire du mécanisme de la question 5.

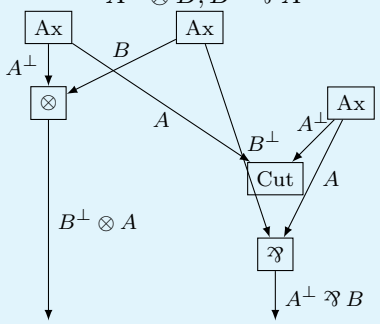
MLL est la logique obtenue à partir de MALL en n'utilisant que les formules atomiques, la dualité $^\perp$ et les connecteurs $\otimes$ et $\parr$, et seulement les règles (`Ax`), (`Cut`), ($\otimes$) et ($\parr$).
Un *réseau* de MLL (ou simplement *réseau*) est un graphe orienté avec arêtes pendantes (des arêtes sans destination dont la source est un sommet du graphe), dont les sommets (appelés *nœuds*) sont étiquetés par (`Ax`), (`Cut`), ($\parr$), ($\otimes$), et les arêtes par des formules. Chaque noeud étiqueté par ($\otimes$) ou ($\parr$) a deux arêtes entrantes (étiquetées par des formules A et B) et une arête sortante (étiquetée par la respectivement $A \otimes B$ et $A \parr B$). Les noeuds étiquetés par (`Ax`) n'ont pas d'arêtes entrante et deux arêtes sortantes, étiquetées par une variable et sa négation. Les noeuds étiquetés par (`Cut`) n'ont pas d'arête sortante et deux arêtes entrantes (étiquetées par C et $C^\perp$, où C est une variable).

Question 7. Donner un algorithme qui prend une preuve Π de MLL et la transforme en un réseau correspondant, de sorte que les arêtes pendantes correspondent aux conclusions de la preuve.

correction

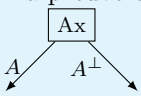
On commence par se donner un exemple de construction, pour la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A^\perp}\,\text{Ax} \quad \dfrac{}{B, B^\perp}\,\text{Ax}}{A, A^\perp \otimes B, B^\perp}\,\otimes \quad \dfrac{}{A, A^\perp}\,\text{Ax}}{\dfrac{A^\perp \otimes B, B^\perp, A}{A^\perp \otimes B, B^\perp \parr A}\,\parr}\,\text{Cut}$$



On donne alors une inductive d'un réseau pour une preuve, dont les arêtes pendantes correspondent aux conclusions de la preuve :

- Si la preuve est réduite à un axiome sur A, son réseau correspondant est



- Si la termine par une coupure de prémisses $\Gamma, A^\top$ et A, Δ, on construit inductivement les réseaux pour chacunes de ces prémisses. Les arêtes pendantes correspondant à $A^\top$ et A sont reliées à l'entrée d'un nouveau sommet Cut sans arête sortante.
- Si la preuve termine par un $\parr$ de prémisse Γ, A, B, on construit inductivement des réseaux pour Γ, A et B. Les arêtes pendantes correspondant à A et B sont reliées à l'entrée d'un nouveau sommet $\parr$, d'arête sortante $A \parr B$.
- De même pour $A \otimes B$.

Un *réseau de preuve* est un réseau dans l'image de l'algorithme précédent (obtenu à partir d'une preuve d'un séquent de MLL).
Un *interrupteur* d'un réseau $\mathcal{R}$ est un graphe non-orienté obtenu en supprimant les arêtes pendantes de $\mathcal{R}$, en supprimant, pour chaque noeud étiqueté par $\parr$ dans $\mathcal{R}$, une des deux arêtes entrantes dans ce noeud, et en désorientant les arêtes restantes.
On admet le *théorème de Danos-Régnier* :
Un réseau $\mathcal{R}$ est un réseau de preuve si et seulement si tout interrupteur de $\mathcal{R}$ est connexe et acyclique.

L'idée sous-jacente aux réseaux est que cette représentation permet de s'abstraire de l'endroit où les coupures s'effectuent dans une preuve.

Question 8.

1. Illustrer la remarque précédente en donnant deux preuves différentes d'un même séquent linéaire envoyées par l'algorithme de la question 7. sur le même réseau.

correction

On reprend le réseau précédent. Il correspond également à la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A^\perp}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{A, A^\perp}\,\text{Ax}}{A, A^\perp}\,\text{Cut} \qquad \dfrac{}{B, B^\perp}\,\text{Ax}}{\dfrac{A, A^\perp \otimes B, B^\perp}{A^\perp \otimes B, B^\perp \parr A}\,\parr}\,\otimes$$

2. Donner un réseau qui n'est pas un réseau de preuve.

correction

C'est par exemple le cas avec deux nœuds (Ax) reliés à deux nœuds ().

3. Donner un algorithme prend un réseau de preuve obtenu à partir d'une preuve prouvant le séquent $\vdash \Gamma$ et renvoie une preuve de $\vdash \Gamma$.

Question 9. Montrer le théorème d'élimination des coupures dans MLL.

Question 10. Peut-on appliquer cette technique à MALL ?

Chapitre 31

(ENS) Graphes parfaits *** (ENS 23, corrigé — oral - 251 lignes)

***

Graphes,
sources : `ensgraphesparfaits.tex`

Pour S un ensemble, on note $\mathcal{P}_2(S) = \{\{x, y\} : x, y \in S, x \neq y\}$ les sous-ensembles de S de cardinalité 2 . Dans tout le sujet, on considère des graphes non-orientés $G = (V, E)$, avec un ensemble fini de sommets V, et un ensemble d'arêtes $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$.
Coloriage. Un coloriage d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $V \to \mathbb{N}$. Dans ce contexte, on appelle les entiers des *couleurs*. Un coloriage est *valide* si toute paire de sommets reliés par une même arête a des couleurs différentes. Le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour créer un coloriage valide de G.
Sous-graphe induit. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$, le *sous-graphe induit* par W est le graphe $G[W] = (W, E \cap \mathcal{P}_2(W))$. On dit que c'est un sous-graphe induit *propre* si W est inclus strictement dans V.
Cliques. Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$ tel que le sous-graphe $G[W]$ induit par W est un graphe complet, c'est-à-dire : $G[W] = (W, \mathcal{P}_2(W))$. On note $\omega(G)$ la cardinalité de la plus grande clique de G.
Anticliques. Une *anticlique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$ tel que le sous-graphe $G[W]$ induit par W ne contient pas d'arête, c'est-à-dire : $G[W] = (W, \varnothing)$. On note $\alpha(G)$ la cardinalité de la plus grande anticlique de G.

Question 1. Soit G un graphe quelconque. Montrer $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

correction

Correction de L.Lanteri
Il faut au moins $\omega(G)$ couleurs pour colorier la plus grande clique. Formellement, si φ est un coloriage tel que $|\varphi(V)| < \omega(G)$ et si C est une clique de G de taille $\omega(G)$, alors il existe $v, v' \in C$ tels que $\varphi(v) = \varphi(v')$. Or, comme C est une clique, $\{v, v'\} \in E$, donc φ n'est pas un coloriage valide.

$$\boxed{\chi(G) \geq \omega(G)}$$

Question 2. Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque.

a. Montrer qu'un coloriage valide de G avec c couleurs existe si et seulement si il existe une partition $\{A_1, \ldots, A_c\}$ de V en c anticliques.

b. Montrer $\chi(G)\alpha(G) \geqslant |V|$.

correction

a. On remarque que pour un coloriage valide, l'ensemble des noeuds d'une même couleur forme une anticlique.

- Étant donné un coloriage valide φ, on partitionne $V = \bigsqcup_{c \in \varphi(V)} \{v \in V : \varphi(v) = c\}$
- Étant donnée une partition en anticliques $V = \bigsqcup_i A_i$, on colorie chaque noeud de A_i de la couleur i pour obtenir un coloriage valide.

b. Par la question précédente, il existe une partition de V en $\chi(G)$ anticliques :

$$V = \bigsqcup_{i=1}^{\chi(G)} A_i$$

Or, par définition de $\alpha(G)$, $|A_i| \leq \alpha(G)$ pour tout i :

$$|V| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |A_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G).$$

$$\boxed{\chi(G)\alpha(G) \geq |V|}$$

Graphe parfait. Un graphe G est dit *parfait* si tous ses sous-graphes induits $G[W]$ satisfont : $\chi(G[W]) = \omega(G[W])$.
Graphe imparfait minimal. Un graphe G est dit *imparfait minimal* s'il n'est pas parfait, et que tous ses sous-graphes induits propres sont parfaits.

Question 3. Donner un exemple de graphe parfait, et de graphe imparfait minimal.

correction

Le graphe vide, le graphe singleton, les graphes complets sont des exemples de graphes parfaits. Un cycle de longueur 4 est un exemple de graphe imparfait minimal.

Pour simplifier les notations, dans les questions 4 à 8 , on fixe G un graphe imparfait minimal quelconque. Sans perte de généralité, on pose $V = \{1, \dots, n\}$. On note $\alpha = \alpha(G), \omega = \omega(G), \chi = \chi(G)$.

Question 4. Soit A une anticlique de G. Montrer $\omega(G[V \backslash A]) = \omega$.

correction

Pour alléger les notations, on note $G' := G[V \backslash A]$.
On remarque que toute clique de G' est une clique de G, d'où $\omega(G') \leq \omega$. Il nous suffit donc de prouver que $\omega(G') \geq \omega$ pour conclure.
Si $A = \varnothing$, l'égalité est triviale : $\omega(G') = \omega(G) = \omega$.
Si $A \neq \varnothing$, alors G' est un sous-graphe induit propre de G, donc G' parfait puisque G est imparfait minimal. On en déduit donc que $\chi(G') = \omega(G')$.
De plus, $\omega \neq \chi$ puisque G n'est pas parfait et que $\omega(G[W]) = \chi(G[W])$ pour tout $W \subsetneq V$. D'après la question 1, on a donc $\omega + 1 \leqslant \chi$.
Si φ un coloriage valide de G' en $\chi(G') = \omega(G')$ couleurs, on peut prolonger φ en un coloriage valide de G en coloriant A d'une nouvelle couleur $c \notin \varphi(V \backslash A)$: on en déduit que $\chi \leq \omega(G') + 1$. On peut alors établir l'inégalité voulue :

$$\omega + 1 \leq \chi \leq \omega(G') + 1$$
$$\omega \leq \omega(G')$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\omega(G[V \backslash A]) = \omega}$$

Question 5. Soit A_0 une anticlique de G de cardinalité α. Montrer qu'il existe $\alpha\omega$ anticliques $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$, telles que pour chaque sommet $v \in V, v$ fait partie d'exactement α anticliques parmi $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$. (Formellement : $\forall v \in V, |\{i \in \{0, \dots, \alpha\omega\} : v \in A_i\}| = \alpha$.)

correction

Notons $A_0 = \{v_0, \dots, v_{\alpha-1}\}$.
Soit $v_i \in A_0$. On note $G_i := G[V \setminus \{v_i\}]$. G_i est ω-coloriable puisque G l'est. D'après la question 2.a, il existe donc une partition de $V \setminus \{v_i\}$ en ω anticliques, qu'on note $A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}$.

$$V \setminus \{v_i\} = \bigsqcup_{k=1}^{\omega} A_{i\omega+k}$$

Ainsi, on a construit α « paquets » de ω anticliques telles que :
- pour tout $v_i \in A_0$, v_i apparaît dans A_0 et une seule fois dans chaque « paquet » d'anticliques sauf dans le i-ème paquet $(A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega})$, donc v_i fait partie d'exactement α anticliques ;
- pour tout $v \notin A_0$, v apparaît une fois dans chaque « paquet » d'anticliques, donc exactement α fois.

On a donc bien construit une famille d'anticliques qui convient.

Question 6. On considère une suite d'anticliques $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$ définie comme dans la question précédente. Montrer que pour tout i dans $\{0, \dots, \alpha\omega\}$, il existe une clique C_i telle que $C_i \cap A_i = \varnothing$, et $\forall j \neq i, |C_i \cap A_j| = 1$.
Indication : utiliser la question 4

correction

Soit $i \in \{0, \dots, \alpha\omega\}$. D'après la question 4, $\omega(G[V \setminus A]) = \omega$, on peut donc prendre C_i une clique de $G[V \setminus A_i]$ de taille ω, de sorte que $\boxed{C_i \cap A_i = \varnothing}$.
On remarque que pour tout j, $|C_i \cap A_j| \leq 1$. En effet, si l'on avait $u, v \in C_i \cap A_j$ distincts, alors
- u serait voisin de v puisque C_i est une clique ;
- u ne serait pas voisin de v car A_j est une anticlique : contradiction.

Or, chacun des ω sommets de C_i apparaît α fois dans $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$:

$$\sum_{i \neq j} |C_i \cap A_j| = \sum_{j=0}^{\alpha\omega} |C_i \cap A_j| = \alpha\omega$$

d'où on déduit

$$\boxed{\forall j \neq i,\ |C_i \cap A_j| = 1}$$

Matrice d'incidence. Étant donné une suite $V_0, \dots, V_{\alpha\omega}$ de sous-ensembles de $V = \{1, \dots, n\}$, on définit la *matrice d'incidence* de la suite (V_i) comme la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant \alpha\omega} \in \{0,1\}^{n \times (\alpha\omega+1)}$ définie par $M_{i,j} = 1$ si $i \in V_j, 0$ sinon.

Question 7. Soit M_A la matrice d'incidence de la suite $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$ de la question 5 , et M_C la matrice d'incidence de la suite $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$ de la question 6. On note $M_A^\top$ la transposée de M_A.
Montrer que $M_A^\top M_C$ est de rang $\alpha\omega + 1$, où les matrices sont vues comme à coefficient dans $\mathbb{Q}$.

correction

Pour tous $i, j \in \{0, \dots, \alpha\omega\}$, on a

$$\left(M_A^\intercal M_C\right)_{i,j} = \sum_{v=1}^{n} (M_A)_{v,i} (M_C)_{v,j} = |A_i \cap C_j| = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$M_A^\intercal M_C = U_{\alpha\omega+1} - I_{\alpha\omega+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où U_n est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.
Un rapide argument d'algèbre linéaire nous permet de montrer que $M_A^\intercal M_C$ est inversible :
- $\operatorname{Sp} U_{\alpha\omega+1} = \{0, \alpha\omega + 1\}$
- $\operatorname{Ker}\left(M_A^\intercal M_C\right) = \operatorname{Ker}(U_{\alpha\omega+1} - I_{\alpha\omega+1}) = \{0\}$ car $1 \notin \operatorname{Sp}_{\mathbb{Q}} U_{\alpha\omega+1}$. (Note : $\alpha\omega \geq 1$ par leur définition.)

$$\boxed{\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}\left(M_A^{\intercal} M_C\right) = \alpha\omega + 1}$$

Question 8. Montrer $n \geqslant \alpha\omega + 1$.

correction

Encore un argument purement algébrique :

$$\alpha\omega + 1 = \mathrm{rg}\left(M_A^{\intercal} M_C\right) \leq \mathrm{rg}(M_C) \leq n$$

$$\boxed{n \geq \alpha\omega + 1}$$

Dans les questions suivantes, $G = (V, E)$ est un graphe quelconque.

Question 9. Montrer que G est parfait si et seulement si $\omega(G[W])\alpha(G[W]) \geqslant |W|$ pour tout sous-graphe induit $G[W]$ de G.

correction

Montrons par récurrence forte la propriété $\mathcal{P}(n)$: ¡¡ Pour tout graphe $G = (V, E)$ avec $|V| = n$, G est parfait si et seulement si $\omega(G[W])\alpha(G[W]) \geq |W|$ pour tout sous-graphe induit $G[W]$ de G ¿¿.
Initialisation : pour $n = 0$, le cas du graphe vide est trivial.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(0), \ldots, \mathcal{P}(n)$ vraies. Soit $G = (V, E)$ avec $|V| = n + 1$.
Supposons que pour tout sous-graphe induit $G[W]$ de G, $\omega(G[W])\alpha(G[W]) \geq |W|$. Par hypothèse de récurrence, tous les sous-graphes induits propres (avec $|W| \leq n$) sont parfaits. Si l'on suppose que G n'est pas parfait, il est donc imparfait minimal, ce qui implique d'après la question 8 que $|V| \geq \alpha(G)\omega(G) + 1$; or, $|V| \leq \alpha(G)\omega(G)$, contradiction. G est donc parfait.
Supposons maintenant que G soit parfait. Tous ses sous-graphes induits propres sont donc parfaits, ce qui par hypothèse de récurrence implique que pour tout sous-graphe induit propre $G[W]$, $\omega(G[W])\alpha(G[W]) \geq |W|$. Enfin, la question 2.b. nous permet de montrer que $\omega(G)\alpha(G) = \chi(G)\alpha(G) \geq |V|$.
On a donc bien la condition nécessaire et suffisante voulue pour tout graphe avec $|V| = n + 1$: $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : G est parfait si et seulement si $\omega(G[W])\alpha(G[W]) \geq |W|$ pour tout sous-graphe induit $G[W]$ de G.

Question 10. Soit $\bar{G} = (V, \mathcal{P}_2(V) \backslash E)$ le graphe complémentaire de G. Montrer que G est parfait si et seulement si $\bar{G}$ est parfait.

correction

Soit G un graphe parfait. Une clique de G est une anticlique de $\overline{G}$ et une anticlique de G est une clique de $\overline{G}$. On a donc :

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G})$$
$$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$$

Or, par la caractérisation de la question précédente, pour tout $W \subset V$,

$$|W| \leq \omega(G[W])\alpha(G[W]) = \alpha(\overline{G[W]})\omega(\overline{G[W]}) = \alpha(\overline{G}[W])\omega(\overline{G}[W])$$

donc $\overline{G}$ est un graphe parfait.
La réciproque suit trivialement : si $\overline{G}$ est parfait, $\overline{\overline{G}} = G$ est parfait.
Un graphe est donc parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.

Chapitre 32

(ENS) Inférence de type *** (ENS 23, corrigé — oral - 280 lignes)

***

Algorithmique, Langages fonctionnels, Pseudocode,
sources : `ensinferencetypes.tex`

Soit $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots\}$ un ensemble infini de *variables de types*.
On considère $\mathcal{T}$ l'ensemble des *types* définis inductivement par :

- $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$. ($\mathbb{N}$ est un type)
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$. (une variable de types est un type)
- si $T_1 \in \mathcal{T}$ et $T_2 \in \mathcal{T}$ alors $T_1 \to T_2 \in \mathcal{T}$. (la "flèche" de deux types est un type)

Une *substitution de types* $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{T}$ est une fonction qui vaut l'identité presque partout, c'est-à-dire telle que $\{A \in \mathcal{A} \mid \sigma(A) \neq A\}$ est fini.
Si σ est une substitution de types et $T \in \mathcal{T}$ un type, on note $\sigma_\uparrow(T)$ (par abus de notation, on s'autorisera à écrire $\sigma(T)$) le type obtenu inductivement par :

- $\sigma_\uparrow(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
- pour $\mathcal{A}, \sigma_\uparrow(A) = \sigma(A)$.
- pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^2, \sigma_\uparrow(T_1 \to T_2) = \sigma_\uparrow(T_1) \to \sigma_\uparrow(T_2)$

Un *système d'équations de types* (ou juste *système*) est un ensemble fini $\{(T_k, T'_k)\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de couples de types.
Un *unificateur* d'un système $\{(T_k, T'_k)\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une substitution de types σ telle que $\forall k, \sigma_\uparrow(T_k) = \sigma_\uparrow(T'_k)$.

Par exemple, on pose $S_0 = \{(B \to A, C), (\mathbb{N}, B)\}$
et σ_0 définie par $\begin{cases} \sigma_0(B) = \mathbb{N} \\ \sigma_0(C) = \mathbb{N} \to A \\ \sigma_0(X) = X \text{ pour tout } X \notin \{B, C\} \end{cases}$
Alors σ_0 est un unificateur de S_0 car :

1. $\sigma_0(B \to A) = \mathbb{N} \to A$ et $\sigma_0(C) = \mathbb{N} \to A$
2. $\sigma_0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ et $\sigma_0(B) = \mathbb{N}$

Question 1. Trouver si possible un unificateur des systèmes suivants :

1. $\{(\mathbb{N} \to A, B \to \mathbb{N})\}$

   correction

   Corrigé de M.Péchaud
   $\sigma_0(A) = \sigma_0(B) = \mathbb{N}$, et $\sigma_0(X) = X$ pour tout autre X.

2. $\{(\mathbb{N} \to A, B \to (C \to \mathbb{N})), (\mathbb{N} \to \mathbb{N}, C)\}$

   correction

   On pose $\sigma_0(C) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma_0(B) = \mathbb{N}$ et $\sigma_0(A) = ((\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to N)$ et $\sigma_0(X) = X$ pour tout autre X.

3. $\{(A \to B), (B \to A)\}$

correction

$\sigma_0(A) = \sigma_0(B) = C$, et $\sigma_0(X) = X$ pour tout autre X.

4. $\{(\mathbb{N} \to (A \to \mathbb{N}), \mathbb{N} \to B), (B, A)\}$

correction

Impossible car on devrait avoir
$\sigma_0(A) = \sigma_0(B)$
et $\mathbb{N} \longrightarrow (\sigma_0(A) \longrightarrow \mathbb{N}) = \mathbb{N} \longrightarrow \sigma_0(B)$, et le membre de droite à strictement moins de $\longrightarrow$ que celui de gauche.

Question 2. Un système S admet-il toujours un unificateur ?

correction

Non, cf question précédente.

Quand un unificateur pour S est-il unique ?

correction

Jamais : si on a un unificateur σ, on peut en construire un nouveau en choisissant deux variables V_1 et V_2 n'apparaissant nulle par dans la substitution de types ou dans l'unificateur et en posant $\sigma'(V_1) = V_2$, et $\sigma'(X) = \sigma(X)$ pour tout autre X.

Question 3. En considérant les différentes possibilités pour les formes des types T_1 et T_1', exprimer l'existence d'un unificateur pour $\{(T_k, T_k')\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ en fonction de l'existence d'un unificateur pour un autre système, bien choisi.

correction

- Si $T_1 = T_1'$, il y a un unificateur pour $\{(T_k, T_k')\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ si et seulement si il y a un unificateur pour $\{(T_k, T_k')\}_{2 \leqslant k \leqslant n}$.
- Si $T_1 = V_i$ est une variable et T_1' est quelconque, il y a un unificateur pour $\{(T_k, T_k')\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ si et seulement si il y a un unificateur pour $\{(T_k, T_k')\}_{2 \leqslant k \leqslant n}$ dans lequel toutes les occurrence de V_i ont été remplacées par T_1' (ce choix étant forcé).
  De même pour le cas réciproque.
- Si $T_1 = \mathbb{N}$ et $T_2 = U_2 \longrightarrow V_2$, l'unicateur n'existe pas.
  De même pour le cas symétrique.
- Reste le cas où $T_1 = U \longrightarrow V$ et $T_1' = U' \longrightarrow V'$.
  Dans ce cas, l'existence d'un unificateur pour le système de départ est équivalente à celle pour le système $\{(T_k, T_k')\}_{2 \leqslant k \leqslant n} \cup \{(U, U'), (V, V')\}$.

Question 4. Rédiger l'algorithme induit par la question précédente, étudier sa terminaison.

correction

```
Entrées : un système S
Sorties : un unificateur de S s'il existe, ⊥ sinon.

σ ← Id

Tant que S ≠ la liste vide :
    Extraire le premier couple (T1, T1')
    Si T1 = T1' :
        continuer
    Sinon si T1 est une variable :
        σ(T1) ← T1'
        Substituer toutes les occurrences de T1 par T1' dans S
    Sinon si T1' est une variable :
        // cas symétrique du précédent
    Sinon, si T1 = U ⟶ V et T1' = U' ⟶ V' :
        ajouter (U, V) et (U', V') à S
    Sinon :
        Renvoyer ⊥
Renvoyer σ
```

À chaque itération qui ne termine pas, l'ordre lexicographique sur «nombre de variables dans S» × «nombre total de "⟶" dans S» diminue strictement, ce qui garantit la terminaison.

Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z, \ldots\}$ un ensemble de variables de termes.
On considère un langage d'expressions fonctionnelles $\mathcal{E}$ défini inductivement par :

- $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{E}$, (les entiers sont des expressions)
- $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ (les variables de termes sont des expressions)
- Si $(E_1, E_2) \in \mathcal{E}^2, E_1 + E_2 \in \mathcal{E}$ (la somme de deux expressions est une expression)
- Si $(E_1, E_2) \in \mathcal{E}^2, E_1\,(E_2) \in \mathcal{E}$ (l'application d'une expression à une expression est une expression)
- Si $x \in \mathcal{X}$ et $E \in \mathcal{E}$ alors $(x \mapsto E) \in \mathcal{E}$ (si E est une expression et x une variable, l'expression fonctionnelle $x \mapsto E$ est une expression)

On supposera que les variables x apparaissant dans des sous-expressions $x \mapsto E'$ d'une expression E sont toutes distinctes et distinctes deux à deux des variables de E qui n'apparaissent jamais directement à gauche d'un $\mapsto$. On note $FV(E)$ ce dernier ensemble de variables.

Par exemple, $f_0 = (x \mapsto (y \mapsto x(y) + 1))$ est un élément de $\mathcal{E}$.

Les contextes de types sont des fonctions de $D \subseteq \mathcal{X}$ dans T.
On note $\varnothing$ le contexte de domaine vide et $(\Gamma, x : T)$, le contexte Γ' défini par $\Gamma'(x) = T$ et pour tout y dans le domaine de $\Gamma, y \neq x \Rightarrow \Gamma'(y) = \Gamma(y)$.

Dans la suite on s'intéresse au problème de donner un type de $\mathcal{T}$ à une expression de $E \in \mathcal{E}$ avec un contexte Γ qui sert d'oracle donnant le type des variables de $FV(E)$, quand c'est possible. On dit qu'on infère un type de E dans le contexte Γ.

Question 5. Donner deux types différents qu'il semble légitime de donner à f_0 dans le contexte $\varnothing$.

correction

$x(y)$ est nécessairement de type $\mathbb{N}$.
Notons T_y et T_x les types de y et x.
$y \mapsto x(y) + y$ est de type $T_y \longrightarrow \mathbb{N}$.
Donc f_0 est de type $T_x \longrightarrow (T_y \longrightarrow \mathbb{N})$.
Deux exemples de types légitimes :

- avec $T_x = A \longrightarrow \mathbb{N}$ et $T_y = A$,
  $f_0 : (A \longrightarrow \mathbb{N}) \longrightarrow (A \longrightarrow \mathbb{N})$
- avec $T_x = (A \longrightarrow B) \longrightarrow \mathbb{N}$ et $T_y = A \longrightarrow B$,

$f_0 : ((A \longrightarrow B) \longrightarrow \mathbb{N}) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow \mathbb{N})$

Question 6. Donner des règles qui formalisent quand il est légitime de donner un type T à E dans le contexte Γ.

correction

On créé une variable $V_{E'}$ pour chaque sous-expression de E autre qu'un entier ou qu'une variable.
On donne les règles directement sous forme d'équations de types – ce qui fait déjà un pas vers la question suivante.
On note alors $S_\Gamma(E)$ le système d'équations de type de E dans le contexte Γ, que l'on définit inductivement.
- Si $E \in \mathbb{N} : S_\Gamma(E) = \{(E, \mathbb{N})\}$.
- Si $E \in \mathcal{X} : S_\Gamma(E) = \{(E, \Gamma(E))\}$.
- Si $E = E_1 + E_2$, $S_\Gamma(E) = \{(V_E, V_{E_1}), (V_E, V_{E_2})\} \cup S_\Gamma(E_1) \cup S_\Gamma(E_2)$.
- Si $E = E_1(E_2)$, $S_\Gamma(E) = \{(V_{E_1}, V_{E_2} \longrightarrow V_E)\} \cup S_\Gamma(E_1) \cup S_\Gamma(E_2)$.
- Si $E = x \mapsto E'$, $S_\Gamma(E) = \{V_E, V_x \longrightarrow V_{E'}\} \cup S_{\Gamma,x:T}(V_{E'})$ où V_x est une nouvelle variable de type.

Question 7. En déduire un algorithme qui infère un type d'une expression E.

correction

On calcule le système donné à la question précédente, puis on en calcule une solution à l'aide de l'algorithme décrit à la question 4 (en gardant en mémoire les types donnés aux variables substituées). Le type donné à V_E est alors solution au problème.

Question 8. Utiliser cet algorithme pour trouver un type de $\mathbf{S} = x \mapsto (y \mapsto (z \mapsto x(z)(y(z))))$ dans le contexte $\varnothing$.

correction

On obtient successivement les équations suivantes en descendant dans la formule (en notant $E' : y \mapsto (z \mapsto x(z)(y(z)))$, $E'' : z \mapsto x(z)(y(z))$ et $E''' : x(z)(y(z))$:
$(V_E, V_x \mapsto V_{E'})$ (le contexte contient maintenant $\Gamma(x) = V_x$).
$(V'_E, V_y \mapsto V_{E''})$ (le contexte contient maintenant $\Gamma(y) = V_y$).
$(V''_E, V_z \mapsto V_{E'''})$ (le contexte contient maintenant $\Gamma(z) = V_z$).
$(V_{x(z)}, V_{y(z)} \longrightarrow V_{E'''})$
$(V_x, V_z \longrightarrow V_{x(z)})$
$(V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})$
On applique donc l'algorithme de la question 4 au système $S = \{(V_E, V_x \mapsto V_{E'}), (V'_E, V_y \mapsto V_{E''}), (V''_E, V_z \mapsto V_{E'''}), (V_{x(z)}, V_{y(z)} \longrightarrow V_{E'''}), (V_x, V_z \longrightarrow V_{x(z)}), (V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})\}$.
On obtient sucessivement
- $\{(V'_E, V_y \mapsto V_{E''}), (V''_E, V_z \mapsto V_{E'''}), (V_{x(z)}, V_{y(z)} \longrightarrow V_{E'''}), (V_x, V_z \longrightarrow V_{x(z)}), (V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})\}$ $(\sigma(V_E) = \sigma(V_x) \longrightarrow \sigma(V_{E'}))$
- $\{(V''_E, V_z \mapsto V_{E'''}), (V_{x(z)}, V_{y(z)} \longrightarrow V_{E'''}), (V_x, V_z \longrightarrow V_{x(z)}), (V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})\}$ $(\sigma(V_{E'}) = \sigma(V_y) \longrightarrow \sigma(V_{E''}))$
- $\{(V_{x(z)}, V_{y(z)} \longrightarrow V_{E'''}), (V_x, V_z \longrightarrow V_{x(z)}), (V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})\}$ $(\sigma(V_{E''}) = \sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{E'''}))$
- $\{(V_x, V_z \longrightarrow (V_{y(z)} \longrightarrow V_{E'''})), (V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})\}$ $(\sigma(V_{x(z)}) = \sigma(V_{y(z)}) \longrightarrow \sigma(V_{E'''}))$
- $\{(V_y, V_z \longrightarrow V_{y(z)})\}$ $(\sigma(V_x) = \sigma(V_z) \longrightarrow (\sigma(V_{y(z)}) \longrightarrow \sigma(V_{E'''})))$.
- $\varnothing$. $(\sigma(V_y) = \sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{y(z)}))$

En remontant, on obtient alors
- $\sigma(V_y) = \sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{y(z)})$
- $\sigma(V_x) = \sigma(V_z) \longrightarrow (\sigma(V_{y(z)}) \longrightarrow \sigma(V_{E'''}))$
- $\sigma(V_{x(z)}) = \sigma(V_{y(z)}) \longrightarrow \sigma(V_{E'''})$
- $\sigma(V_{E''}) = \sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{E'''})$
- $\sigma(V_{E'}) = (\sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{y(z)})) \longrightarrow \sigma(V_{E''}) = \sigma(V_y) \longrightarrow (\sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{E'''}))$
- $\sigma(V_E) = \sigma(V_x) \longrightarrow \sigma(V_{E'}) = (\sigma(V_z) \longrightarrow (\sigma(V_{y(z)}) \longrightarrow \sigma(V_{E'''}))) \longrightarrow ((\sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{y(z)})) \longrightarrow (\sigma(V_z) \longrightarrow \sigma(V_{E'''})))$

En renommant les variables de cette dernière expression pour y voir plus clair, on obtient comme type possible pour S :

$$\sigma(V_E) = (A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

ce qui a une bonne tête.

Chapitre 33

(ENS) Ordonnancement *** (ENS 23, corrigé — oral - 201 lignes)

***

Algorithmique, Complexité,
sources : `ensordo.tex`

Ordonnancement :

Définition 7

On cherche à ordonnancer n tâches indépendantes $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}$ sur un seul processeur, qui ne peut exécuter qu'une seule tâche à la fois. Chaque tâche T_i est décrite par deux entiers d_i et w_i représentant respectivement la date limite avant laquelle une tâche doit s'exécuter, et la pénalité à payer si la tâche est exécutée en retard. Le temps est représenté par des entiers naturels. Chaque tâche s'exécute en une unité de temps. Un ordonnancement est une fonction $\sigma : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ associant à chaque tâche sa date d'activation. La première tâche peut être activée à la date 0 . On dit qu'une tâche est ordonnancée à l'heure si elle finit son exécution avant ou à sa date limite, et qu'elle est en retard sinon.
Le but est de trouver un ordonnancement qui minimise la somme des pénalités de retard. Les ordonnancements qui minimisent la somme des pénalités de retard sont dits optimaux.

1. Quelle condition l'ordonnancement σ doit-il satisfaire pour être bien formé ?

Définition 8

Un ordonnancement est dit canonique si :
- Les tâches à l'heure sont exécutées avant les tâches en retard.
- Les tâches à l'heure sont ordonnées par date limite croissantes.

2. Montrer qu'il existe un ordonnancement optimal qui est canonique.
3. On suppose que les tâches sont ordonnées par pénalité décroissante. Écrire un algorithme glouton qui résout le problème. Quelle est sa complexité ? On ne cherchera pas à prouver l'optimalité de cet algorithme dans cette question.
4. Illustrer l'algorithme sur l'exemple suivant :

$$w_1 = 7, w_2 = 6, w_3 = 5, w_4 = 4, w_5 = 3, w_6 = 2, w_7 = 1$$
$$d_1 = 4, d_2 = 2, d_3 = 4, d_4 = 3, d_5 = 1, d_6 = 4, d_7 = 6$$

Définition 9

Soit S un ensemble à n éléments, $\mathcal{I} \in \mathcal{P}(S)$.$(S, \mathcal{I})$ est un matroïde s'il satisfait les propriétés suivantes :
1. Hérédité : $X \in \mathcal{I} \Longrightarrow (\forall Y \subset X, Y \in \mathcal{I})$
2. Échange : $(A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{I}, |A| < |B|) \Longrightarrow \exists x \in B \backslash A$ tel que $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.
Les $X \in \mathcal{I}$ sont appelés des indépendants.
On dit qu'un indépendant $F \in \mathcal{I}$ est maximal s'il n'existe pas de $x \in S \backslash F$ tel que $F \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Un matroïde pondéré est un matroïde enrichi d'une fonction de poids $w : S \to \mathbb{N}$. Le poids d'un sous-ensemble $X \subseteq S$ est la somme des poids des éléments : $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$.

On considère l'algorithme suivant, cherchant à trouver un indépendant de poids maximal :

```
fonction IndependantMax(M = (S,I), w : S → ℕ) ;
    S ← tri_décroissant (S, w)  ▷ Ainsi : w(S[0]) ⩾ ... ⩾ w(S[n−1]) ;
    A ← ∅ ;
    Pour i = 0 à n − 1 {
        Si A ∪ {S[i]} ∈ I {
            A ← A ∪ {S[i]} ;
        }
    }
    Renvoyer A
```

5. Soit x le premier élément de S (trié par ordre décroissant de poids) tel que $\{x\}$ est indépendant. Montrer que si x existe, alors il existe une solution optimale A qui contient x.

6. Montrer que l'algorithme retourne une réponse optimale, puis donner la complexité de cet algorithme.

7. Prouver l'optimalité de l'algorithme d'ordonnancement de la question 3.

correction

Ceci est une <u>ébauche</u> de solution, proposée par le jury du rapport X-ENS 2023.

1. Il n'y a qu'un seul processeur, deux tâches ne peuvent pas s'exécuter en même temps :

$$\forall i, j, i \neq j \Longrightarrow \sigma(T_i) \neq \sigma(T_j)$$

Dit autrement, σ doit être injective.

2. Soit σ un ordonnancement optimal.
- Supposons qu'une tâche à l'heure T_i ait lieu après une tâche en retard T_j. L'échange des deux tâches ne change rien (ou cela contredit l'optimalité).
- Supposons que l'on ait deux tâches à l'heure $\sigma(T_i) < \sigma(T_j)$ et $d_i > d_j$. On peut échanger ces deux tâches : T_j reste à l'heure car elle est exécutée avant, et T_i car T_j était à l'heure et $d_j < d_i$.

3. **(a)** Trier les tâches par pénalité décroissante.
(b) Itérer sur les tâches :
(a) Considérer un nouvel ordonnancement où la tâche courante est insérée dans l'ordonnancement en préservant l'ordre sur les dates limites.
(b) Si ce nouvel ordonnancement a des tâches en retard, on continue avec l'ancien ordonnancement.
(c) Ajouter toutes les tâches en retard dans un ordre arbitraire (il faudra de toute façon payer les pénalités).
Complexité $\mathcal{O}(n^2)$ (car il faut tester à chaque fois si toutes les tâches sont à l'heure.)

4. Itérations :
- 1
- 2, 1
- 2, 1, 3
- 2, 4, 1, 3
- On ne peut pas ajouter T_5 car dans l'ordre canonique $5, 2, 4, 1, 3$, T_3 est en retard
- On ne peut pas ajouter T_6, le résultat final est donc $2, 4, 1, 3, 7$, avec un coût de 5 .

Au final, l'ordonnancement des tâches à l'heure donne $2, 4, 1, 3, 7$. Il faut ensuite ajouter les tâches 5 et 6 dans n'importe quel ordre, cela ne change rien car elles seront en retard et qu'il faudra payer la pénalité.

5. Soit B une solution optimale. Si $x \in B$, c'est bon. On observe que $w(x) \geqslant w(y) \forall y \in B$, par tri de S et le fait que $\{y\}$ est indépendant (hérédité de B). On pose $A = \{x\}$ et on ajoute (par la propriété d'échange) des éléments de B vers A jusqu'à ce que $|A| = |B|$. On a alors $A = (B \backslash \{y\}) \cup \{x\}$. Ainsi $w(A) \geqslant w(B)$. Comme B est une solution optimale, $w(A) = w(B)$.

6. On prouve la propriété par récurrence sur la taille de S.
- Initialisation triviale.
- Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n. Soit $M = (S, I)$ un matroïde pondéré avec S de taille $n + 1$. Soit x le premier élément choisi par l'algorithme, on sait qu'il existe une solution optimale qui contient x. On applique l'hypothèse de récurrence sur $M' = (S \backslash \{x\}, \{X \subseteq S \backslash \{x\} \mid X \cup \{x\} \in I\})$ (qui est aussi un matroïde) pour obtenir A'. On note $A = A' \cup \{x\}$ est un indépendant. A' était une solution de poids maximal sur M', donc A est une solution de poids maximal sur M.

Complexité : $\mathcal{O}(n \log n + nf(n))$ où $f(n)$ est le temps pour tester si un ensemble d'au plus n éléments est indépendant.

7. S est l'ensemble des tâches, les indépendants sont les ensembles de tâches qui peuvent être exécutées à l'heure.
- Hérédité : immédiat.
- Échange : soient $(A, B) \in \mathcal{I}^2$ avec $|A| < |B|$. On cherche $T_i \in B$ telle que $A \cup \{T_i\}$ soit encore exécutable à l'heure.
  On note $N_t(A)$ le nombre de tâches de A avec une date limite <= à t.
  On montre le résultat intermédiaire suivant : A est indépendant ssi $\forall 0 \leqslant t \leqslant n, N_t(A) \leqslant t$
  — (1) -¿ (2) par contraposée on aura trop de tâches.
  — (2) -¿ (1) la ième plus grande date limite est au plus i, donc il n'y a pas de soucis d'ordonnancement
  On pose $k = \max_t N_t(A) \geqslant N_t(B)$ (ce maximum existe car $N_0(A) = N_0(B) = 0$). En particulier $N_{k+1}(B) >$

$N_{k+1}(A)$: il y a donc plus de tâches avec date limite $k+1$ dans B que dans A. On choisit donc $T_i \in B \backslash A$ avec $d_i = k+1$.
$A' := A \cup \{T_i\}$ est un indépendant, on le montre en prouvant que $\forall t, N_t(A') \leqslant t$ puis en utilisant le lemme ci-dessous. Pour $0 \leqslant i \leqslant t', N_t(A') = N_t(A) \leqslant t$ car A indep. Pour $t \leqslant i \leqslant n, N_t(A') \leqslant N_t(B) \leqslant t$.

Chapitre 34

(ENS) Permutations triables par pile *** (ENS 23, corrigé — oral - 184 lignes)

***

Algorithmique, Graphes, Complexité,
sources : `ensperm.tex`

Permutations triables par pile :

Définition 10

On s'intéresse aux permutations $\mathfrak{P}(n)$ de $\{1,\dots,n\}$. Une permutation $\pi \in \mathfrak{P}(n)$ est assimilée à la suite $(\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(n))$.

Machine à pile. Une *machine à pile* maintient en interne une structure de pile, initialement vide. Elle prend en entrée une permutation $(\pi(1),\dots,\pi(n))$, et effectue une suite fixée d'opérations `empile` et `dépile`.

- `empile` : lit le premier élément non encore lu de la permutation, et l'ajoute à la pile. La i-ième opération empile ajoute donc $\pi(i)$ à la pile.
- `dépile` : enlève le dernier élément ajouté à la pile, et le renvoie en sortie.

La sortie de la machine est une suite d'éléments de $\{1,\dots,n\}$ renvoyés par les opérations `dépile`, pris dans l'ordre où ils sont renvoyés. *Exemple :* la machine EEDEDD qui effectue (`empile, empile, dépile, empile, dépile, dépile`) avec en entrée la permutation $(3,1,2)$ renvoie $(1,2,3)$:

$$\text{EEDEDD}(3,1,2) = (1,2,3)$$

On remarque que le comportement d'une machine à pile est entièrement défini par la suite (fixe) d'opérations `empile` et `dépile` qu'elle effectue.

Suite valide. Une telle suite d'opérations est dite *valide* si elle contient exactement n opérations `empile` et n opérations `dépile`, et si à tout instant, le nombre d'opérations `dépile` effectuées est inférieur ou égal au nombre d'opérations empile effectuées. Dans tout le sujet, on ne considère que des machines effectuant des suites valides d'opération.

Permutation triable par pile. Une permutation $\pi \in \mathfrak{P}(n)$ est dite *triable par pile* s'il existe une machine à pile qui prend en entrée $(\pi(1),\dots,\pi(n))$, et qui renvoie $(1,\dots,n)$.
Exemple : l'égalité $\text{EEDEDD}(3,1,2) = (1,2,3)$ plus haut montre que $(3,1,2)$ est triable par pile.

1. Montrer que les permutations $(1,2,3,4),(4,3,2,1),(1,3,2,4)$ sont triables par pile.

Définition 11

Motif. On dit que $\pi \in \mathfrak{P}(n)$ *contient le motif* $\rho \in \mathfrak{P}(k)$ pour $k \leqslant n$ s'il existe $x_1 < \cdots < x_k$ dans $\{1,\dots,n\}$ tel que $(\pi(x_1),\dots,\pi(x_k)) = (x_{\rho(1)},\dots,x_{\rho(k)})$ (ou plus informellement : tel que $(\pi(x_1),\dots,\pi(x_k))$ et $(\rho(1),\dots,\rho(k))$ sont «dans le même ordre »).

2. Montrer que si π est triable par pile, alors elle ne contient pas le motif $(2,3,1)$.
3. Montrer que si π ne contient pas le motif $(2,3,1)$, alors elle est triable par pile.
4. L'ensemble des permutations triables par pile est-il clos par composition ? Par inverse ?
5. Proposer un algorithme qui détermine en temps linéaire en n si une permutation $\pi \in \mathfrak{P}(n)$ est triable par pile.
Indication : on peut utiliser les questions 2 et 3 , mais ce n'est pas obligatoire.

Définition 12

Graphe associé à une permutation. À une permutation $\pi \in \mathfrak{P}(n)$, on associe le graphe non-orienté $G(\pi) = (V, E)$ de sommets $V = \{1, \dots, n\}$, et d'arêtes $E = \{\{a, b\} \in V : a < b \text{ et } \pi(a) > \pi(b)\}$.
Graphe triable par pile. On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{1, \dots, n\}$ est *triable par pile* s'il existe $\pi \in \mathfrak{P}(n)$ tel que $G = G(\pi)$ et π est triable par pile.
Graphe réalisable. On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est réalisable s'il est possible de renommer ses sommets V avec les entiers $\{1, \dots, n\}$, de telle sorte que le graphe obtenu est triable par pile.

6. Montrer que $\pi \mapsto G(\pi)$ est une injection de $\mathfrak{P}(n)$ vers l'ensemble des graphes de sommets $\{1, \dots, n\}$. Est-ce une bijection ?
7. Donner un exemple de graphe qui n'est pas réalisable.
8. On considère l'ensemble des graphes formés en partant du graphe vide ($\varnothing, \varnothing$), et en utilisant uniquement les deux opérations suivantes : ajout d'un sommet universel à un graphe de l'ensemble (un sommet est dit universel s'il est relié à tous les autres sommets), union disjointe de deux graphes de l'ensemble. Montrer que l'ensemble obtenu est exactement l'ensemble des graphes réalisables.
9. En s'inspirant de la question précédente, proposer un algorithme qui détermine si un graphe $G = (V, E)$ est réalisable, en temps $O\left(|V|^3\right)$.

correction

Correction proposée par le jury

1. Elles sont triables par respectivement EDEDEDED, EEEEDDDD et EDEEDDED.
2. Par contraposée, supposons que π contient le motif $(2, 3, 1)$. Soient $x_1 < x_2 < x_3$ tels que $\pi(x_2) < \pi(x_3) < \pi(x_1)$. Pour faciliter le raisonnement, supposons sans perte de généralité que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$. Lors de l'exécution d'une machine qui trie π, 2 est empilé avant 3 qui est empilé avant 1. Nécessairement, 1 doit être le premier à être dépilé (sinon 2 ou 3 apparaît avant 1). Mais alors, 3 apparaîtra avant 2 en sortie, donc la machine ne trie pas π.
3. Soit π une permutation ne contenant pas le motif $(2, 3, 1)$. Alors la suite d'instructions construite de la manière suivante trie π :

```
Entrée : permutation π ∈ 𝔖_n
    x ← 1
    TantQue tous les éléments n'ont pas été empilés et dépilés
        Si x n'a pas encore été empilé
          Empiler.
        Sinon
          Dépiler.
          x ← x + 1
```

   Une telle suite d'instructions trie effectivement la pile, car si x (qui correspond à l'élément minimal qui n'a pas encore été dépilé) a déjà été empilé, il se trouve en haut de la pile. En effet, distinguons deux cas :
   - si x est le dernier élément à avoir été empilé, il est effectivement en haut de la pile ;
   - sinon, on a continué d'empiler après $x = x_2$ jusqu'à empiler un élément $x_1 < x_2$, dont on a dû attendre l'empilage avant de commencer à dépiler. Si on suppose qu'il existe un élément $x_3 > x_2$ qui se trouve sur la pile entre x_1 et x_2, alors π contiendrait le motif $(2, 3, 1)$, ce qui est absurde. Donc tous les éléments au dessus de x_2 sont inférieurs à x_2.
4. L'ensemble des permutations triables par pile n'est pas stable par inverse. En effet, $\pi = (3, 1, 2)$ est triable par EEDEDD, mais son inverse est $(2, 3, 1)$ qui n'est pas triable par pile. De même, il n'est pas stable par composition, car $\pi^2 = (2, 3, 1)$.
5. On peut appliquer l'algorithme décrit à la question 3 : si, au moment de dépiler, l'élément en haut de la pile n'est pas égal à x, alors la permutation n'est pas triable par pile. L'algorithme s'effectue bien en temps linéaire (la vérification de la boucle Tant Que peut se faire avec un compteur, le test du Si peut se faire en utilisant un tableau de booléens).
6. Supposons que $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$, avec $\pi \neq \rho$. Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices i tels que $\pi(i) \neq \rho(i)$. Nécessairement, $|I| \geqslant 2$. Posons $x = \max \pi(I) = \max \rho(I)$, et $i = \pi^{-1}(x)$, $j = \rho^{-1}(x)$. Sans perte de généralité, $i < j$. Dès lors, $\pi(j) < \pi(i) = x$, donc $\{i, j\}$ est une arête dans $G(\pi)$, et $\rho(i) < \rho(j)$, donc $\{i, j\}$ n'est pas une arête dans $G(\rho)$.
   La fonction est donc bien injective.
   Elle n'est pas bijective par un argument de cardinalité (fonction d'un ensemble de cardinal $n!$ dans un ensemble de cardinal $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$), sauf pour $n = 1$ et $n = 2$.
7. Le 4-cycle n'est pas réalisable. En effet, si le 4-cycle est réalisé par une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_4$, alors on a :
   - $\pi(1) = 3$, sinon le sommet 1 est de degré différent de 2,
   - $\pi(2) = 4$, sinon on aurait $\pi(4) = 4$ donc le sommet 4 est de degré 0
     ou $\pi(3) = 4$ donc le sommet 3 est de degré au plus 1,

- $\pi(3) = 1$, sinon le sommet 3 est de degré 3 car alors $\pi(3) = 2$ et $\pi(4) = 1$
- Et donc $\pi(4) = 2$

On a alors $\pi = (3, 4, 1, 2)$. Or $(3, 4, 1, 2)$ n'est pas triable par pile, car elle possède le motif $(2, 3, 1)$ (les 3 premiers éléments).

8. Montrons par induction que tous les graphes obtenus par cette construction sont réalisables :

- le graphe vide est réalisable par la permutation vide ;
- soit $G_1 = G(\pi)$ et $G_2 = G(\rho)$, avec $\pi \in \mathfrak{S}_k$ et $\rho \in \mathfrak{S}_\ell$ triables par pile par les machines M_π et M_ρ.
  - si on rajoute un sommet adjacent à tous les autres à G_1 pour obtenir le graphe G_1', alors ce graphe est réalisé par $(k+1, \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k))$. Cette permutation est triable par pile par la machine $\mathsf{E}M_\pi\mathsf{D}$;
  - si on fait l'union disjointe de G_1 et G_2 pour obtenir G_2', alors ce graphe est réalisé par $(\pi(1), \ldots, \pi(k), \rho(1) + k, \ldots \rho(\ell) + k)$. Cette permutation est triable par pile par la machine $M_\pi M_\rho$.

On conclut par induction que ces graphes sont réalisables.

Réciproquement, soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$ une permutation triable par pile. Posons $G = G(\pi) = (S, A)$.

- supposons qu'au cours de l'exécution de la machine sur π, la pile ne se vide qu'au dernier dépilage. Alors $\pi(1)$ est dépilé en dernier, donc $\pi(1) = n$. Par définition de $G(\pi)$, le sommet 1 est adjacent à tous les autres. De plus, $G[S \setminus \{1\}] = G(\pi(2) - 1, \ldots, \pi(n) - 1)$, qui est triable par pile ;
- sinon, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\{\pi(1), \ldots, \pi(k)\} = \{1, \ldots, k\}$. Dès lors, aucun sommet de $\{1, \ldots, k\}$ n'est adjacent à un sommet de $\{k+1, \ldots, n\}$. De plus, G est l'union disjointe (non numérotée) de $G(\pi_1)$ et $G(\pi_2)$, avec $\pi_1 = (\pi(1), \ldots, \pi(k))$ et $\pi_2 = (\pi(k+1) - k, \ldots, \pi(n) - k)$, qui sont tous les deux triables par pile.

On conclut par récurrence descendante sur le nombre de sommets des graphes.

9. On propose l'algorithme suivant, avec des graphes représentés par tableau de listes d'adjacence :

- si le graphe est réduit à 1 ou 2 (même 3) sommets, il est réalisable ;
- sinon, s'il n'est pas connexe (vérifiable en temps $\mathrm{O}(() |V|^2)$), on appelle récursivement l'algorithme sur chaque composante connexe (elles peuvent être construites en temps $\mathrm{O}(() |V|^2)$) ;
- sinon, s'il existe un sommet adjacent à tous les autres (trouvable en temps $\mathrm{O}(() |V|^2$), on le supprime et on appelle récursivement l'algorithme sur le graphe obtenu (constructible en temps $\mathrm{O}(() |V|^2)$) ;
- sinon, le graphe n'est pas réalisable.

La complexité totale est bien celle attendue (on aurait pu affiner la complexité en $\mathrm{O}(() |V|(|V| + |A|))$).

Chapitre 35

(ENS) Raisonnements ensemblistes *** (ENS 23, corrigé — oral - 234 lignes)

***

Graphes, Logique,
sources : `ensensembles.tex`

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, et l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble fini dont les éléments sont appelés des *variables ensemblistes*. Une *inclusion* est une formule s'écrivant : $(X \subseteq Y)$ où X (resp. Y) est une variable ensembliste, ou $\varnothing$, ou $\mathbb{N}$. Par abus de notation, $\varnothing$ et $\mathbb{N}$ représentent ici respectivement les ensembles vide et plein.

Attention : dans la suite, par convention, les lettres $A, B, C, D \ldots$ désigneront des éléments de $\mathcal{T}$, tandis que les lettres X, Y, Z désigneront des éléments de $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, \mathbb{N}\}$.

Une conjonction d'inclusions sur les variables de $\mathcal{T}$ est dite *satisfiable* s'il existe une *valuation* $f : \mathcal{T} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ des variables qui vérifie toutes les inclusions.

Pour deux formules Φ et Ψ, $\Phi \vDash \Psi$ signifie que toute valuation satisfaisant Φ satisfait également Ψ.

1. **(a)** Montrer que la conjonction d'inclusions : $(\mathbb{N} \subseteq A_1) \wedge (A_2 \subseteq A_3) \wedge (A_3 \subseteq \varnothing)$ est satisfiable.

correction

Correction proposée par le jury
Prendre $A_1 = \mathbb{N}, A_2 = A_3 = \varnothing$.

(b) Montrer qu'en ajoutant l'inclusion : $\mathbb{N} \subseteq A_2$, ce n'est plus satisfiable.

correction

On a une contradiction entre $A_3 = \mathbb{N}$ et $A_3 = \varnothing$.

2. Soit une conjonction d'inclusions ne contenant aucune inclusion de la forme $\mathbb{N} \subseteq X$. Montrer que cette conjonction est satisfiable.

correction

Il suffit d'évaluer toutes les variables à $\varnothing$.

Soit une conjonction d'inclusions $\Phi = (X_1 \subseteq Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_k \subseteq Y_k)$. On définit un graphe orienté G_Φ tel que :

- Les sommets de G_Φ sont les éléments de $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, \mathbb{N}\}$
- Pour toute inclusion $X_i \subseteq Y_i$ de Φ, on crée une arête $X_i \to Y_i$ dans G_Φ
- Pour tout sommet $A \neq \mathbb{N}$, on crée une arête $A \to \mathbb{N}$, et pour tout sommet $A \neq \varnothing$, une arête $\varnothing \to A$

Un *chemin* dans G_Φ est une séquence de sommets $Z_1, \ldots, Z_\ell$ reliés par des arêtes $Z_1 \to Z_2, Z_2 \to Z_3, \ldots, Z_{\ell-1} \to Z_\ell$. Par convention, on autorise des chemins ne comportant qu'un seul sommet (et aucune arête).

3. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
(a) Φ est satisfiable

(b) Il n'existe pas de chemin dans G_Φ menant de $\mathbb{N}$ à $\varnothing$
(c) Φ est satisfiable à valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$

correction

Pour $3 \implies 1$: si Φ est satisfiable à valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$, en particulier elle est satisfiable.

Pour $1 \implies 2$: tout chemin $Z_1 \to Z_2 \to \ldots \to Z_k$ dans G se traduit en une chaîne d'inclusions $Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_k$. Par conséquent, s'il existe un chemin de $\mathbb{N}$ à $\varnothing$, par transitivité de l'inclusion (et récurrence immédiate sur la longueur du chemin) Φ implique $\mathbb{N} \subseteq \varnothing$ ce qui est une contradiction, et elle n'est pas satisfiable.

Pour $2 \implies 3$: Pour un sommet X de G_Φ, soit $s(X)$ l'ensemble des sommets Y tels que $X \to^* Y$ (successeurs, par clôture transitive), et $p(X)$ l'ensemble des sommets Y tels que $X \to^* Y$ par des chemins dans le graphe (prédécesseurs).
Supposons qu'il n'existe pas de chemin de $\mathbb{N}$ à $\varnothing$. On montre qu'il existe une valuation qui fonctionne, qui sera à valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$. On propose d'évaluer à $\mathbb{N}$ pour $V_N = s(\mathbb{N})$ et $\varnothing$ pour $V_0 = p(\varnothing)$. Par hypothèse V_0 et V_N sont disjoints. Quant aux sommets restants, on les évalue tous à $\varnothing$. Pour vérifier que cette valuation fonctionne, il faut vérifier qu'elle satisfait toutes les inclusions de Φ.
Soit $X \subseteq Y$ une inclusion dans Φ. On étudie les cas possibles : si $X \in V_N$, alors $Y \in V_N$ et l'inclusion est satisfaite. Si $Y \in V_0$, alors $X \in V_0$ et de même. Si $X \in V_0$, alors $X \subseteq D$ sera toujours satisfait. Si $Y \in V_N$, de même. Reste le cas où : $X \notin (V_0 \cup V_N)$ et $Y \notin (V_0 \cup V_N)$. Comme on a évalué ces deux variables à $\varnothing$ cette inclusion est satisfaite.

Nd M.Péchaud : on peut également raisonner en terme de composantes fortements connexes du graphe et d'ordre topologique, ce qui facilite également la question suivante – je rédigerai ça plus tard.

4. Montrer que si Φ est satisfiable et X et Y sont des sommets de G_Φ, alors $\Phi \vDash (X \subseteq Y)$ si et seulement s'il existe un chemin dans G_Φ menant de X à Y.

correction

Une des deux implications est facile : s'il existe un chemin de X à Y, on a $X \subseteq Y$.
Supposons qu'il n'existe pas de chemin de X à Y (en particulier $X \neq Y$, car $X \to {}^*X$ est aussi un chemin). Par hypothèse Φ est satisfiable, donc il n'y a pas de chemin de $\mathbb{N}$ à $\varnothing$. Cette fois, on va trouver une valuation de Φ qui ne satisfait pas $X \subseteq Y$.
L'idée est d'assigner $\varnothing$ à Y et $\mathbb{N}$ à X, et de voir si on peut encore satisfaire toutes les inclusions de Φ. (Notons qu'on ne peut pas avoir $Y = \mathbb{N}$ ni $X = \varnothing$ ici puisque cela contredirait l'hypothèse selon laquelle il n'y a aucun chemin). On propose la valuation suivante : $\mathbb{N}$ pour $V_N = s(X)$ (qui contient aussi les successeurs de $\mathbb{N}$ puisque $\mathbb{N}$ est successeur de X) ; $\varnothing$ pour $V_0 = p(Y)$ (qui contient aussi les prédécesseurs de $\varnothing$) ; $\varnothing$ pour les sommets restants. Par hypothèse V_0 et V_N sont disjoints, sinon on aurait un chemin de X à Y. On réutilise le raisonnement ci-dessus pour montrer que toutes les inclusions de Φ sont satisfaites.
On peut remarquer que par exemple une formule Φ force $\varnothing \subseteq A$ pour toute variable A, même si A n'apparaît pas dans Φ.

Nd M.Péchaud : cf remarque précédente, il est beaucoup plus agréable de raisonner en terme d'ordre topologique – je rédigerai ça plus tard.

5. En déduire un algorithme `Résolution` qui prend en entrée une conjonction d'inclusions Φ et une inclusion $(X \subseteq Y)$, et détermine si $\Phi \vDash (X \subseteq Y)$. Montrer qu'avec la bonne structure de données, cet algorithme est de complexité linéaire en le nombre d'inclusions de Φ et de variables de $\mathcal{T}$.

correction

Il faut d'abord déterminer si Φ est satisfiable (dans ce cas on renvoie Vrai tout le temps).
Ensuite, il faut déterminer s'il existe un chemin entre X et Y dans le graphe G_Φ. On fait simplement un parcours en profondeur à partir de X (il n'est pas demandé de le détailler, puisqu'ils sont censés le connaître). Quand le graphe est représenté comme une liste d'adjacence, la complexité est linéaire en le nombre d'arêtes. Ce nombre d'arêtes dépend du nombre d'inclusions dans Φ et de variables dans $\mathcal{T}$.

On considère maintenant des formules logiques dont les littéraux sont des inclusions, par exemple :

$$(X_1 \subseteq X_2) \vee \neg (X_2 \subseteq X_3) \vee \neg (X_4 \subseteq X_3)$$

Ces formules sont écrites en forme normale conjonctive. On suppose que toutes les clauses sont *Horn*, c'est-à-dire qu'elles contiennent au plus un seul littéral positif (sans négation). On les interprète alors comme des implications. La formule ci-dessus devient ainsi :

$$((X_2 \subseteq X_3) \wedge (X_4 \subseteq X_3)) \Longrightarrow (X_1 \subseteq X_2)$$

On appelle une telle formule *inclusion-Horn* et on lui étend la notion de satisfiabilité ci-dessus.

6. Montrer que la formule inclusion-Horn avec les clauses suivantes :

$$\begin{array}{l} \neg\,(A_3 \subseteq \varnothing) \\ \neg\,(A_1 \subseteq A_3) \\ \neg\,(A_2 \subseteq A_3) \vee \neg\,(A_1 \subseteq A_2) \\ (\mathbb{N} \subseteq A_1) \\ (A_2 \subseteq \varnothing) \end{array}$$

est satisfiable, mais qu'aucune de ses valuations satisfaisantes n'est à valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$.

correction

On est obligé de prendre $A_1 = \mathbb{N}, A_2 = \varnothing$. Ensuite, comme $A_1 \subseteq A_2$ est faux, il ne reste plus que les contraintes : $\neg\,(A_1 \subseteq A_3) \Longrightarrow A_3 \neq \mathbb{N}$ et $\neg\,(A_3 \subseteq \varnothing) \Longrightarrow A_3 \neq \varnothing$. Pour A_3 on peut prendre tout ensemble non vide qui n'est ni $\varnothing$ ni $\mathbb{N}$.

On admet la propriété (P) :
« Soit Ψ une conjonction d'inclusions. Si Ψ est satisfiable, il existe une valuation f telle que pour tous sommets X, Y dans le graphe G_Ψ, s'il n'existe pas de chemin entre X et Y, alors $f(X)$ et $f(Y)$ sont incomparables (i.e., $f(X) \nsubseteq f(Y)$ et $f(Y) \nsubseteq f(X)$). »

7. Soit Φ une formule inclusion-Horn, et soit Ψ la conjonction de toutes les clauses de Φ ne contenant aucun littéral négatif. C'est donc une conjonction d'inclusions de la forme : $\Psi = (X_1 \subseteq Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_k \subseteq Y_k)$.

Montrer que si Ψ est satisfiable, et si pour tout littéral négatif $\neg(X \subseteq Y)$ dans les clauses de Φ, $\Psi \not\models (X \subseteq Y)$, alors Φ est satisfiable.

correction

Noter que, puisque le graphe G_Ψ contient toutes les variables de $\mathcal{T}$ (y compris les variables qui ne sont pas dans Ψ), la valuation donne bien des valeurs à toutes ces variables.
Supposons que Ψ est satisfiable. Utilisons la valuation ci-dessus. Pour toutes variables X, Y, si $\Psi \not\models (X \subseteq Y)$ alors il n'existe pas de chemin entre X et Y par la question 4. Donc $f(X)$ et $f(Y)$ sont incomparables, donc le terme $\neg(X \subseteq Y)$ est vrai.
Par conséquent cette valuation rend tous les termes négatifs dans les clauses de Φ vrais. Toutes les clauses sans termes négatifs étant vraies (puisque Ψ l'est), toutes les clauses de Φ sont vraies. Elle est donc satisfiable.

8. En déduire un algorithme déterminant, en temps polynomial, si une formule inclusion-Horn est satisfiable.

correction

On définit un algorithme récursif.
Soit Φ une formule inclusion-Horn et soit Ψ l'ensemble de ses clauses positives. On effectue une disjonction de cas. On voit avec la question 7 qu'on va avoir par exemple le cas où Ψ est satisfiable et n'implique aucun littéral négatif, dans ce cas on peut s'arrêter et la formule est satisfiable. Sinon il reste d'autres cas :

- **(a)** Si Φ contient une clause vide, on renvoie «Non satisfiable »
- **(b)** Si Ψ n'est pas satisfiable, on renvoie «Non satisfiable »
- **(c)** Sinon, il existe un littéral négatif $\neg(X \subseteq Y)$ dans une des clauses de Φ tel que $\Psi \vDash X \subseteq Y$. Il faut observer que la formule obtenue en enlevant $\neg(X \subseteq Y)$ de la clause correspondante est équivalente à Φ.

Cela nous donne un algorithme récursif qui transforme Φ, Ψ en Φ', Ψ' où Φ' est plus petite que Φ (quand on ne s'arrête pas) d'un littéral négatif. Chaque appel récursif réduit la taille de la formule, donc le temps est polynomial. La correction de l'algorithme découle des questions précédentes. On peut raffiner le temps d'exécution de quadratique à linéaire en utilisant des structures de données adaptées.

9. Prouver la propriété (P).

correction

La valuation se construit en résolvant d'abord les cycles de G_Ψ, de façon à enlever toutes les inclusions triviales. On enlève aussi les successeurs de $\mathbb{N}$ et les prédécesseurs de $\varnothing$ (dont les valuations sont évidentes). On fait ensuite un tri topologique sur les sommets restants, de façon à les parcourir dans l'ordre suivant : on doit s'assurer que pour chaque sommet, on a d'abord étudié tous ses prédécesseurs. On démarre de $\varnothing$. Soit $A_0, \ldots, A_k, \ldots$ la séquence des sommets rencontrés, alors l'ensemble $S(A_k)$ correspondant à A_k est calculé de la manière suivante :

$$S(A_k) = \{k\} \cup \bigcup_{X, X \to A_k} S(X)$$

Cette valuation satisfait bien toutes les inclusions, et de plus, elle a la propriété demandée par construction.

Chapitre 36

(ENS) Théorème des amis *** (ENS 23, corrigé — oral - 202 lignes)

***

Graphes,
sources : `enstheoremedesamis.tex`

Théorème des amis

L'objectif du sujet est de montrer que dans tout groupe de personnes, si chaque paire de personnes a exactement un ami en commun, alors il existe quelqu'un (le diplomate) qui est ami de tout le monde. Le problème est modélisé par des graphes.
Graphe. Pour S un ensemble, on note $\mathcal{P}_2(S) = \{\{x, y\} \subseteq S : x \neq y\}$ l'ensemble des paires d'éléments distincts de S. Dans tout le sujet, on considère des graphes non-orientés $G = (V, E)$, composés d'un ensemble fini de sommets V, et d'un ensemble d'arêtes $E \subseteq \mathcal{P}_2(S)$.
Voisins. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $x \in V$, l'ensemble des voisins de x est $N(x) = \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$. Le *degré* de x est le nombre de voisins de x.
Graphe d'amis. Un **graphe d'amis** est un graphe $G = (V, E)$ tel que $|V| \geqslant 2$ et pour tout $x, y \in V$ avec $x \neq y$, il existe un unique sommet, noté $x \star y$, tel que : $\{x, x \star y\} \in E$ et $\{y, x \star y\} \in E$.
Diplomate. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un diplomate est un sommet de degré $|V| - 1$.

Exemple. Le graphe complet à trois sommets $G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\})$ est un graphe d'amis contenant 3 diplomates.

Question 1.

a. Montrer qu'un graphe d'amis $G = (V, E)$ ne contient pas de 4-cycle, c'est-à-dire :

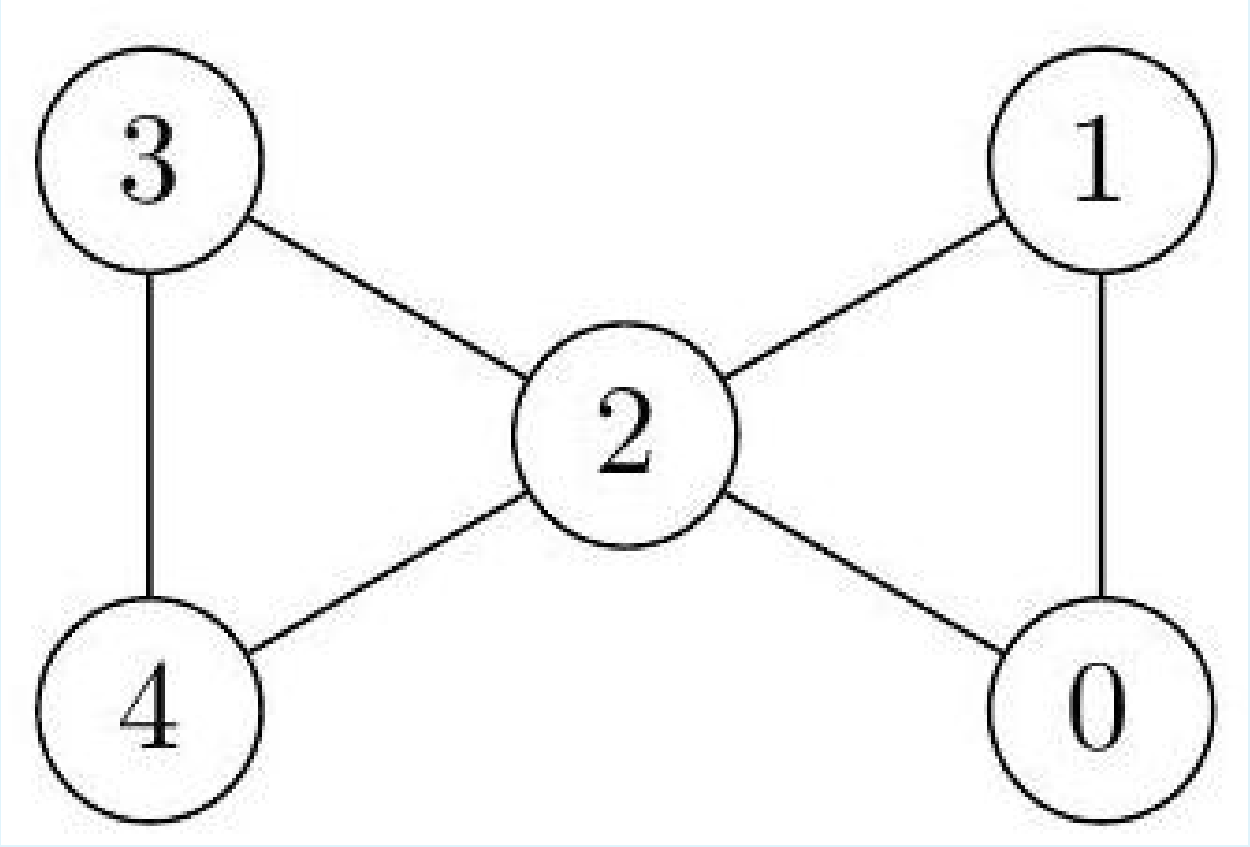
$$\neg\exists\{a, b, c, d\} \subseteq V, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\} \in E.$$

correction

(Auteur de la correction inconnu)
Si un graphe contient un 4 -cycle (a, b, c, d) alors b et d sont tous les deux voisins communs de a et c donc le graphe n'est pas un graphe d'amis. On en déduit le résultat par contraposition.

b. Donner un exemple de graphe d'amis à 5 sommets.

correction



Question 2. Dans cette question, on suppose que G est un graphe d'amis contenant un sommet x de degré 2 . On note y, z les deux voisins de x.

a. Montrer $\{y, z\} \in E$.

correction

$x * y$ doit être un voisin de x donc appartenir à $N(x) = \{y, z\}$ et un voisin de y donc $x * y \neq y$.
On a donc $x * y = z$ d'où $z \in N(y), \{y, z\} \in E$.

b. Montrer $V = N(y) \cup N(z)$.

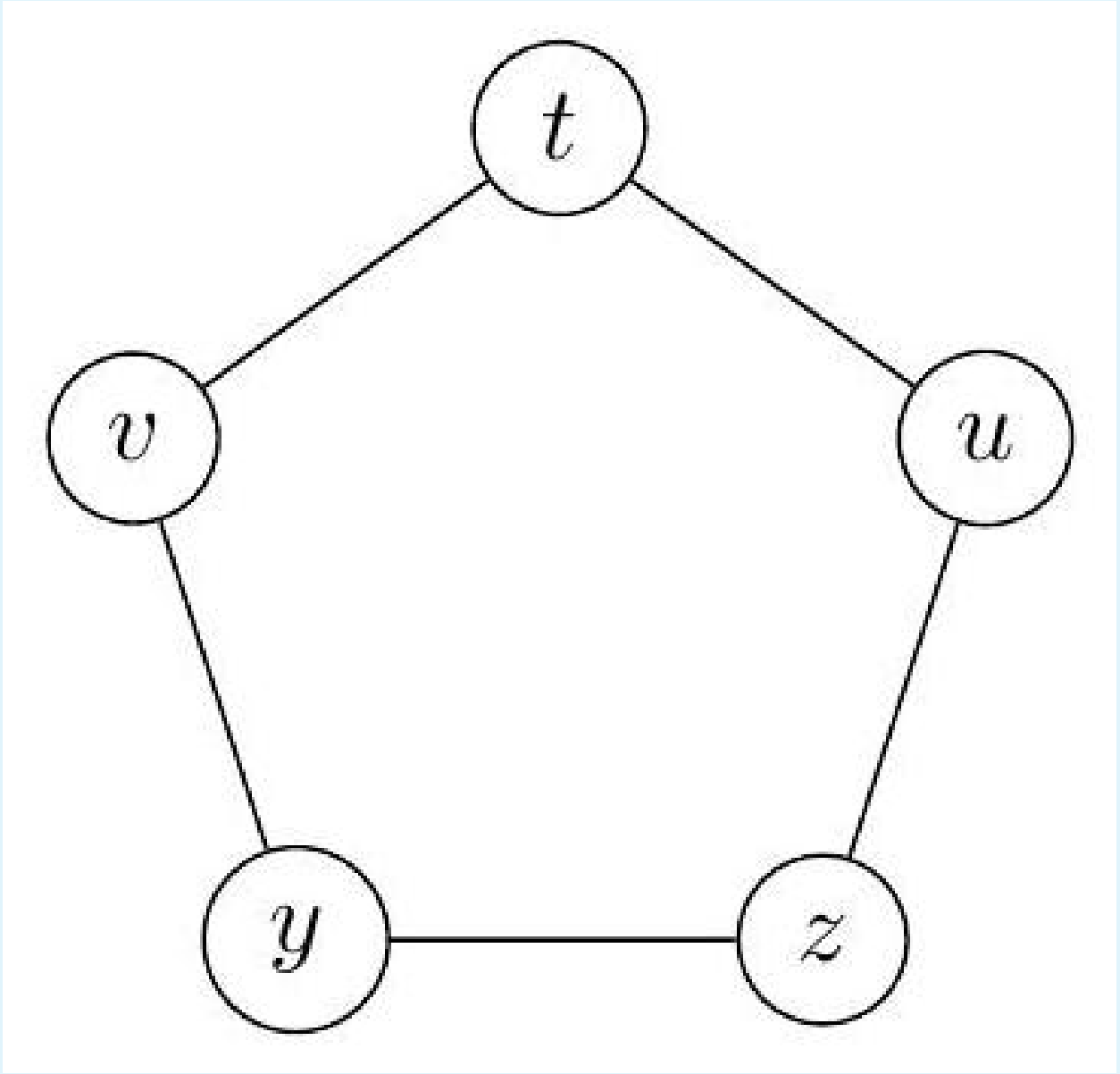
correction

On a $y \in N(y) \subset N(y) \cup N(z)$. Pour $t \neq z, t * z \in N(x) = \{y, z\}$ donc $z * t = y$ d'où $t \in N(y)$ ou $z * t = y$ d'où $t \in N(z)$, on a bien $t \in N(y) \cup N(z)$.

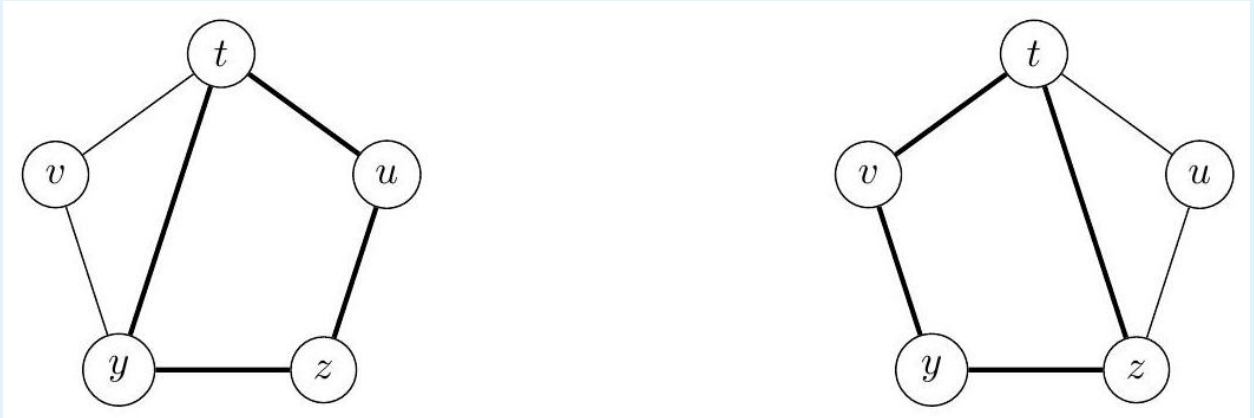
c. Montrer que y ou z est un diplomate.

correction

On suppose que ni y ni z ne sont des diplomates. Il existe donc un sommet u dans $V \backslash \{y\}$ non voisin de y. D'après la question précédente $u \in N(z)$. De même il existe $v \in N(y) \backslash N(z)$ avec $v \neq z$.
$u \neq z$ car $z \in N(y)$ et aussi $v \neq y$. Le sommet $t = u * v$ est distinct de u et v. De plus $t \neq y$ car y n'est pas voisin de u et $t \neq z$ pour la même raison. On a 5 sommets distincts y, z, u, v, t.



D'après la question précédente $t \in N(y) \cup N(z)$. Si on a $t \in N(y)$ alors on a un 4-cycle (y, z, u, t), ce qui est impossible pour un graphe d'ami. De même $t \in N(z)$ est impossible.
y ou z doit être un diplomate.



Dans les questions 3 à 5 , on fixe $G = (V, E)$ un graphe d'amis ne contenant pas de sommet de degré 2. (On suppose donc pour l'instant qu'un tel graphe existe ; on verra plus tard si cela amène une contradiction.) Soit $n = |V|$. Sans perte de généralité, on pose $V = \{1, \ldots, n\}$.

Question 3. Soit $\{x, y\}$ une arête de G et $z = x \star y$. Soit $X = N(x) \backslash \{y, z\}, Y = N(y) \backslash \{x, z\}, Z = N(z) \backslash \{x, y\}$, et

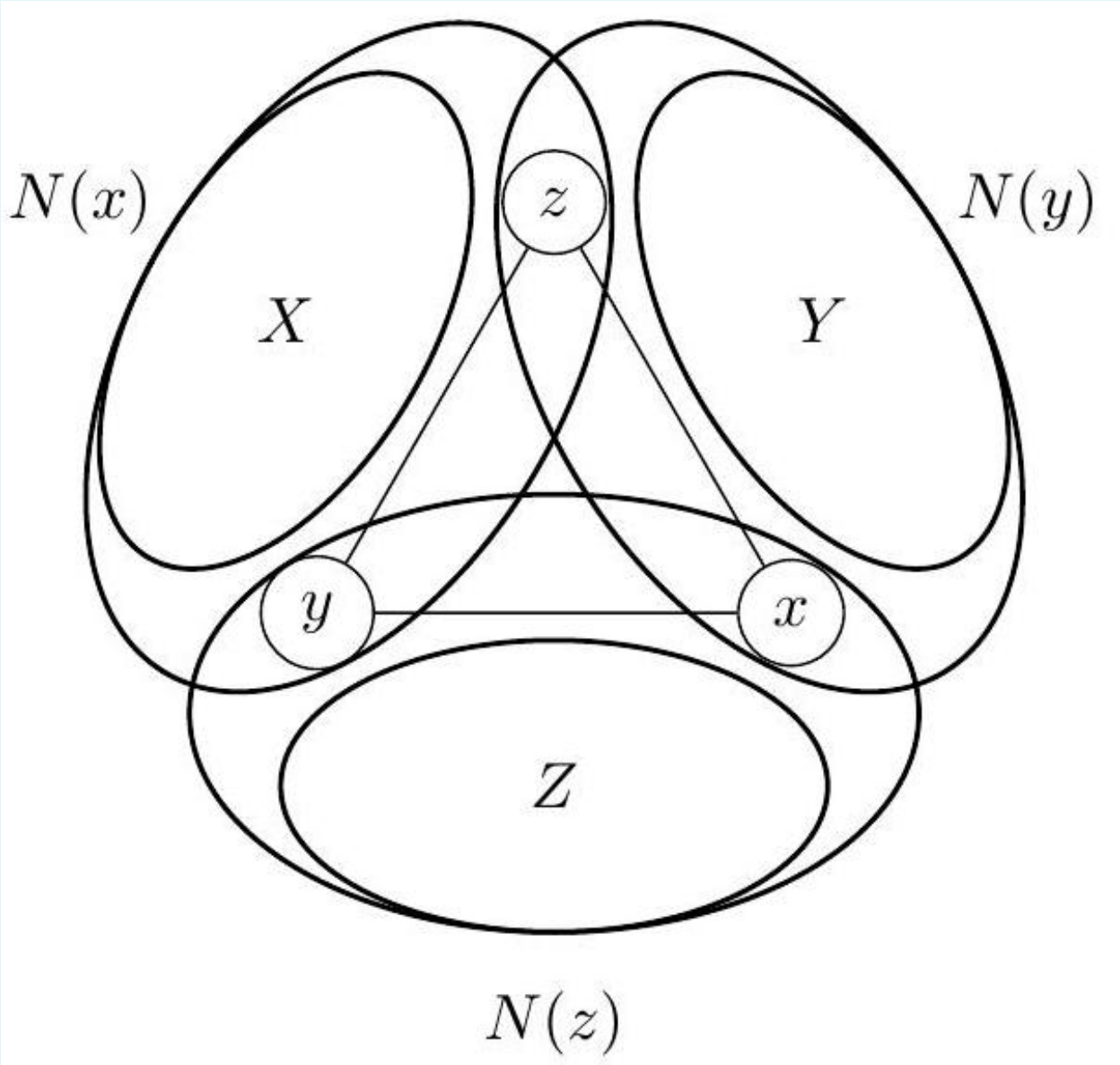
$W = V\backslash(X \cup Y \cup Z \cup \{x, y, z\})$.

a. Montrer que l'application suivante est bien définie et bijective :

$$f_\star : X \times Y \to W$$
$$(a, b) \mapsto a \star b.$$

correction

La définition d'un graphe d'ami signifie que, pour $x \neq y$, et $z = x * y$, $N(y) \cap N(y) = \{z\}$. On en déduit que $N(x)\backslash\{z\}$ et $N(y)\backslash\{z\}$ sont disjoints. Or $X \subset N(x)\backslash\{z\}$ et $Y \subset N(y)\backslash\{z\}$ donc X et Y sont disjoints. On a aussi $x * z = y$ et $y * z = x$ donc X et Z sont disjoints ainsi que Y et Z.



L'union des éléments est une partition : $V = W \sqcup X \sqcup Y \sqcup Z \sqcup \{x, y, z\}$.

Comme X et Y sont disjoints, $a * b$ est défini pour tous $a \in X$ et $b \in Y$.
$a \notin N(y)$ donc $a * b \neq y, a \notin N(z)$ donc $a * b \neq z, b \notin N(x)$ donc $a * b \neq x$.
On ne peut pas avoir $a * b \in X$ car sinon on aurait le 4-cycle ($x, a * b, b, t$).
On neut pas avoir $a * b \in Y$ car sinon on aurait le 4-cycle ($y, a * b, a, x$).
On ne peut pas avoir $a * b \in Z$ car sinon on aurait le 4-cycle ($z, a * b, a, x$).
Ainsi f_* est bien définie de $X \times Y$ vers W.
Si on avait $a * b = a' * b'$ avec $a, a' \in X$ et $b, b' \in Y$ alors ($)x, aa * b, a'$) serait un 4-cycle, ce qui est impossible : f_* est injective.
Pour $t \in W$, on a $t * x \in N(x)$. Comme t n'appartient ni à $N(y)$, ni à $N(z)$ on ne peut pas avoir $t * x = y$ ni $t * x = z$ donc $t * x \in X$. De même $t * y \in Y$.
Comme t est voisin de $t * x$ et de $t * z$, on a $t = f_*(t * x, t * y)$: f_* est surjective.

b. Montrer que tous les sommets de G on le même degré (on dit que G est régulier).

correction

Si on note $|E|$ le cardinal d'un ensemble E, la bijection précédente implique $|W| = |X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. Dans la question précédente x, y et z jouent des rôles symétriques donc on a aussi $|W| = |X| \cdot |Z| = |Y| \cdot |Z|$.
Comme on a supposé qu'aucun élément n'est de degré 2 , on a Z non vide d'où $|Z| > 0$. L'égalité $|X| \cdot |Z| = |Y| \cdot |Z|$ donne donc $|X| = |Y|$ dès que x et y sont voisins. Comme le degré de X est égal à $|X| + 2$, on ajoute y et z, deux sommets adjacents ont même degré.
Comme G est connexe, il existe un chemin entre x et tout sommet de G, le long de ce chemin le degré est conservé donc le degré de tout sommet est égal au degré de x, le degré est constant sur G.

c. On note δ le degré d'un sommet de G. Montrer $n = \delta^2 - \delta + 1$.

correction

On a $|X| = |Y| = |Z| = \delta - 2$ donc $|W| = (\delta - 2)^2$ et la partition de V donne $n = |V| = |W| + |X| + |Y| + |Z| + 3 = (\delta - 2)^2 + 3(\delta - 2) + 3 = \delta^2 - \delta + 1$.

Matrice d'adjacence. La *matrice d'adjacence* de G est la matrice $M_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par $M_{i,j} = 1$ si $\{i, j\} \in E, 0$ sinon.

Question 4. Soit M la matrice d'adjacence du graphe G. On a vu dans la question 3 que G est régulier ; et on note δ le degré d'un sommet de G. Montrer $M^2 = \mathbb{1}_n + (\delta - 1)\,\mathrm{Id}_n$, où $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice ne contenant que des 1, et $\mathrm{Id}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice identité.

correction

Si on note $m_{i,j}$ les coefficients de M, on a $m_{i,j} \in \{0, 1\}$ donc $m_{i,j}^2 = m_{i,j}$ et $m_{i,j} = m_{j,i}$.
Les coefficients de M^2 sont $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j}$.
Pour $i \neq j, m_{k,i} m_{k,j} = 0$ sauf si k est voisin de i et de j donc seulement pour $k = i * j$ donc $a_{i,j} = 1$.
Pour $i = j, a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}$, c'est le nombre de k voisins de i, c'est-à-dire le degré de i d'où $a_{i,j} = \delta$.
Ainsi $M^2 = \begin{pmatrix} \delta & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \delta \end{pmatrix} = (\delta - 1) I_n + \mathbb{1}_n$.

On admet (ou rappelle) les faits suivants.
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- La trace d'une matrice est invariante par changement de base.
- **Si $k \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ (lemme de Dirichlet).**
- Les valeurs propres de $M^2 = \mathbb{1}_n + (\delta - 1)\,\mathrm{Id}_n$ sont δ^2 (multiplicité 1) et $\delta - 1$ (multiplicité $n - 1$).

Question 5. Montrer que la trace de M doit être nulle, et aboutir à une contradiction.

correction

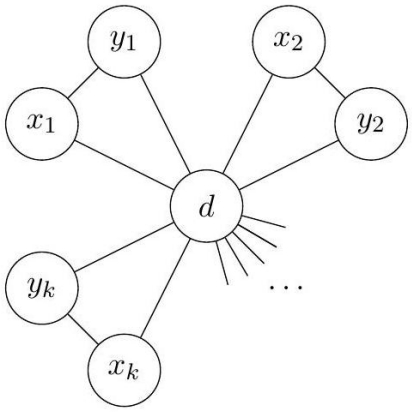
M est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ donc les valeurs propres de M^2 sont $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ et doivent être égales à δ^2 et $\delta - 1 n - 1$ fois.
Le vecteur propre de M^2 pour $\delta^2 = \delta - 1 + n$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^t$ qui est aussi vecteur propre de M pour la valeur propre δ car $\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \delta$; on retrouve $\delta^2 == \delta - 1 + n$.
Les autres valeurs propres de M sont $\sqrt{\delta - 1}$ d'ordre p et $-\sqrt{\delta - 1}$ d'ordre q avec $p + q = n - 1$.
La trace de M est donc $\delta + p \cdot \sqrt{\delta - 1} + q \cdot (-\sqrt{\delta - 1})$. Or les termes diagonaux de M sont nuls, i n'est pas voisin

de i d'où $\delta + (p-q)\cdot\sqrt{\delta-1} = 0$ et $\sqrt{\delta-1} = \dfrac{\delta}{q-p} \in \mathbb{Q}$.
D'après le théorème rappelé, on a $\sqrt{\delta-1} \in \mathbb{N}$.
Si on pose $\sqrt{\delta-1} = m$ alors $\delta = 1+m^2 = (q-p)\cdot m$ donc m divise $1+m^2$, ce qui impose $m=1$ puis $\delta = 2$ ce qui contredit l'inexistence de sommets de degré 2 .
Ainsi un graphe d'amis doit avoir au moins un sommet de degré 2 donc, d'après la question 2 , admet un diplomate.

Question 6. Montrer que pour tout graphe d'amis $G=(V,E)$, il existe un diplomate $d \in V$, et une partition de $V\backslash\{d\}$ en paires $\{\{x_1,y_1\},\ldots,\{x_k,y_k\}\}$, telle que $E = \bigcup_{i=1}^{k} \{\{x_i,y_i\},\{d,x_i\},\{d,y_i\}\}$.

correction

Si d est un diplomate du graphe d'amis G et si x est un sommet distinct de d alors d est un voisin de x et tous les autres voisins de x sont des voisins communs à d et à x. Comme G est un graphe d'amis, x a un unique voisin distinct de d, il est de degré 2 . Les voisins de x sont d et $x*d$. Dans ce cas les voisins de $y = x*d$ sont d et $y*d = x$.
On peut donc regrouper les sommets distincts de d par paires (x_i, y_i) avec $N(x_i) = \{y_i, d\}$ et $N(y_i) = \{y_i, d\}$ et G est l'union des 3-cycles (x_i, y_i, d).



Graphe moulin

Chapitre 37

(ENS) Structures pliables et traversables *** (ENS 23, partiellement corrigé — oral - 306 lignes)

***

Ocaml, Programmation fonctionnelle,
sources : `ensstructurespliables.tex`

Structures pliables et traversables

On se place dans un langage récursif, fonctionnel, avec des définitions de types inductifs et un système de types polymorphes similaire à OCaml. On pourra utiliser indifféremment du pseudocode fonctionnel ou la syntaxe OCaml. On suppose l'existence :

- d'une fonction identité id de type $A \to A$;
- d'un opérateur (o) : $(A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$ de composition de fonctions, noté o dans sa version infixe ; et
- de types de bases usuels, comme `int` le type des entiers et `unit` le type de l'unique élément `()`.

On donne la définition d'un type polymorphe `liste` A (où A est une variable de type) et, à titre d'exemple, de la fonction longueur de type `liste` $A \to$ `int` en pseudocode (par exemple) :

```
liste A = Nil | Cons A (liste A)

longueur : liste A → int
    longueur Nil = 0
    longueur (Cons _ qu) = 1+ (longueur qu)
```

et en OCaml :

```
type 'a liste = Nil | Cons of ('a * 'a liste)

let rec longueur : 'a liste → int = function
     Nil → 0
   | Cons (_, qu) → 1+ (longueur qu)
```

Un type T est un *monoïde*, s'il existe (c'est-à-dire, si on peut définir) ε de type T et ($\diamond$) de type $T \to T \to T$, noté $\diamond$ dans sa version infixe, tels que pour tous a, b, c de type T, $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ et $\varepsilon \diamond a = a \diamond \varepsilon = a$.

Question 1. Montrer que `liste` A est un monoïde pour tout A.

correction

Correction de M.Péchaud

$\diamond$ correspond à l'opérateur de concaténation.
On définit $\varepsilon = \text{Nil}$, et $\diamond$ inductivement par, pour toutes listes L, L' de type liste A et pour tout élément e de type A.

- $\text{Nil} \diamond L' = L'$
- $(Conse L) \diamond L' = Conse(L \diamond L')$.

On vérifie alors que $L \diamond \varepsilon = L$ par induction sur L :
Cas de base $\varepsilon \diamond \varepsilon = \text{Nil} \diamond \varepsilon = \varepsilon$ par définition.
Induction On suppose le résultat vrai pour L. Alors $(ConseL) \diamond \varepsilon = Conse(L \diamond \varepsilon) = ConseL$
On montre alors par une induction similaire que pour toutes listes L, L' et L'', $(L \diamond L') \diamond L'' = L \diamond (L' \diamond L'')$:
Cas de base $(\varepsilon \diamond L') \diamond L'' = L' \diamond L'' = \varepsilon \diamond (L' \diamond L'')$
Induction On suppose le résultat vrai pour L. Alors $((ConseL) \diamond L') \diamond L'' = (Conse(L \diamond L')) \diamond L'' = Conse((L \diamond L')) \diamond L'') = Conse(L \diamond (L' \diamond L''))$ par hypothèse d'induction
$= (ConseL) \diamond (L' \diamond L'')$).

Un *constructeur de type* est une fonction mathématique C qui associe à un type paramètre T un type résultat $C\ T$.
Par exemple `liste` est un constructeur de type.
On dit qu'un constructeur de type C est *pliable* quand il existe un `fold` de type

$$(A \to B \to B) \to B \to CA \to B$$

pour tous types A et B, tel que `fold` $f\ e\ t$ applique de manière répétée la fonction f à chacun des éléments de type A de la structure t (elle-même de type CA) pour produire une valeur de type B, en partant initialement de l'élément e de type B.

Question 2. Montrer que `liste` est pliable.
Un `fold` pour `liste` est-il unique ?

correction

On définit fold par induction sur t.

```
fold  : (A ⟶ B ⟶ B) ⟶ B ⟶ C  A ⟶ B
    fold f e Nil = e
    fold f e (Cons a L) = f a (fold f e L)
```

Il n'y a pas unicité (par analogie avec les `fold_left` et `fold_right` de *OCaml*) : on peut définir un `fold` traitant les éléments par ordre inverse – ce qui peut donner a priori un résultat différent :

```
fold_right  : (A ⟶ B ⟶ B) ⟶ B ⟶ C  A ⟶ B
    fold_right f e Nil = e
    fold_right f e (Cons a L) = fold_right f (f a e) L
```

Question 3.

1. Donner la définition d'un constructeur de type `barbre` tel que les éléments de `barbre` A sont des arbres binaires dont les nœuds sont des éléments de A.

   correction

   ```
   barbre A = Vide | Noeud A (barbre A) (barbre A)
   ```

2. Montrer que `barbre` est pliable.

   correction

   On définit par exemple

   ```
   fold  : (A ⟶ B ⟶ B) ⟶ B ⟶ C  A ⟶ B
       fold f e Vide = e
       fold f e (Noeud a T T') = fold f (f a (fold f e T)) T'
   ```

3. Expliquer comment différentes définitions de `fold` permettent de générer les parcours infixe et préfixe d'un arbre.

   correction

   Le `fold` donné précédemment correspond à un parcours infixe – car le premier calcul de f est effectué dans le sous-arbre gauche.
   Pour un parcours infixe, on donne la définition suivante, où la racine est traitée en premier :

   ```
   fold  : (A ⟶ B ⟶ B) ⟶ B ⟶ C  A ⟶ B
   ```

```
fold f e Vide = e
fold f e (Noeud a T T') = fold f (fold (f a e) T)) T'
```

Question 4. Utiliser `fold` pour écrire `arbreTaille : int → liste (barbre unit)`, la fonction générant une `liste` des arbres binaires de taille n (c'est-à-dire, à n nœuds) avec les nœuds prenant leur valeur dans `unit`.

correction

Une définition alternative d'un constructeur de type pliable est l'existence d'un `foldmap` de type

$$(A \to M) \to CA \to M$$

pour tout type A et pour tout monoïde M, tel que `foldmap` f t parcourt la structure t en accumulant une valeur de type M.

Question 5. Montrer que `liste` et `barbre` sont pliables pour cette définition.
Donner deux définitions de `foldmap` pour les `barbre` permettant de générer les parcours infixes et préfixes.

correction

Pour les listes :

```
foldmap : (A -> M) -> liste A -> M
   foldmap f Nil = ε
   foldmap f (Cons a l) -> (f a) ◇ (foldmap f l)
```

Pour les arbres par parcours préfixe

```
foldmap : (A -> M) -> barbre A -> M
   foldmap f Vide = ε
   foldmap f (Noeud a t t') -> (f a) ◇ (foldmap f t) ◇ (foldmap f t')
```

et par parcours infixe

```
foldmap : (A -> M) -> barbre A -> M
   foldmap f Vide = ε
   foldmap f (Noeud a t t') -> (foldmap f t) ◇ (f a) ◇ (foldmap f t')
```

Question 6. Montrer que les deux définitions de pliabilité sont équivalentes.

correction

⇒ Supposons disposer d'un `fold : (A -> B -> B)-> B -> C A -> B`, et donnons-nous un monoïde quelconque, muni d'un neutre ε et d'un opérateur $\diamond$.
On pose alors `foldmap f s = fold (fun a m -> (f a)◇ m)\ ε\ s`

⇐ Réciproquement, si l'on suppose disposer d'un `foldmap` pour un monoïde quelconque, et d'un type B, on remarque que l'ensemble des applications de B dans B est un monoïde (l'élément neutre est l'identité, et $\diamond$ la composition).
On se donne un `foldmap` agissant sur ce monoïde, et l'on définit alors
`fold f e t = (foldmap f t)e`

Un foncteur applicatif est un constructeur de type F pour lequel il existe pour tous types A, B :
1. `fmap` de type $(A \to B) \to FA \to FB$
2. `pure` de type $A \to FA$
3. $(\odot)$ de type $F(A \to B) \to FA \to FB$, noté $\odot$ dans sa version infixe.

qui vérifie les lois suivantes :
`fmap id = id` `fmap`$(f \circ g) =$ (`fmap` f) $\circ$ (`fmap` g)
`(pure id)` $\odot v = v$

Question 7. Sans vérifier formellement les lois, donner deux manières différentes de montrer que `liste` est un foncteur applicatif.

correction

On peut se donner `fmap = map` (le `map` de *OCaml*), `pure = fun a -> [a]`, et $\odot$ `= fun` $[f_1 \cdots f_n]$ `l ->` `fmap` f_1 `l @ ⋯ fmap` f_n `l` – où @ est l'opérateur de concaténation (on pourrait bien sûr définir cela plus formellement sans $\ll\cdots\gg$).
On peut également définir $\odot$ `= fun` $[f_1 \cdots f_n]$ $[l_1 \cdots l_p]$ `->` $[f_1 l_1; \cdots f_n l_1; f_2 l_1; \cdots f_n l_2; \cdots f_1 l_p; \cdots f_n l_p;]$.
L'idée est en quelque sorte que l'opérateur $\odot$ applique toutes les fonctions de son membre de gauche à tous les éléments de son membre de droite, de toutes les façons possibles.

Un constructeur de types C est *traversable* s'il existe `traverse` de type

$$(A \to FB) \to CA \to F(CB)$$

pour tout foncteur applicatif F et types A et B.

Question 8. Montrer que `barbre` est traversable.

correction

NDMP : le niveau déjà très élevé avant me paraît déraisonnable à partir de cette question.

Question 9. On dispose d'un arbre t de type `barbre` A et une fonction futurs qui à un élément A associe un une `liste` de type `liste` A qui correspond aux «futurs possibles» (dans un sens non-déterministe) d'un élément. À quoi correspond `traverse futurs` t ?

Chapitre 38

(ENS) Composition Monadique *** (ENS 24, corrigé très partiellement — oral - 191 lignes)

***

Ocaml, Programmation fonctionnelle,
sources : `enscompositionmonadique.tex`

Composition Monadique

On se place dans un langage récursif, purement fonctionnel, avec des définitions de types inductifs et un système de types polymorphes similaires à ceux d'*OCaml*. On pourra utiliser indifféremment du pseudocode fonctionnel ou de la syntaxe *OCaml*.
On suppose l'existence :

- d'une fonction identité id polymorphe de type $A \to A$;
- d'un opérateur (o) : $(A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$ de composition de fonctions, noté o dans sa version infixe ;
- d'un opérateur $\mapsto$ de définition de fonction anonyme (`fun` en *OCaml*) ;
- un opérateur de reconnaissance de motifs (`match... with` en *OCaml*) ; et
- de types de bases usuels, comme int le type des entiers, string le type des chaînes de caractères, et unit le type de l'unique élément ().

Un constructeur de type est une entité informatique qui prend un type et renvoie un type.
On définit par exemple le constructeur de type `liste` en définissant le type polymorphe `liste` A (où A est une variable de type). À titre d'exemple, on présente une définition de la fonction longueur de type `liste` $A \to$ int en pseudocode :

```
liste A=Nil | Cons A (liste A)
longueur : liste A-> int
longueur Nil = 0
longueur (Cons _ qu) = 1 + (longueur qu)
```

et en *OCaml* :

```
type 'a liste = Nil | Cons of ('a * 'a liste)
let rec longueur (l : 'a liste) : int = match l with
  Nil -> 0
  | Cons (_, qu)->1+(longueur qu)
```

Question 1. Définir un constructeur de type `option` tel qu'un élément de `option` A est soit vide, soit un élément de type A.

correction

Début de correction de M.Péchaud
NDMP : ce sujet ne me paraît pas raisonnable

```
option A = Vide | Some A
```

Un constructeur de types `F` est un *foncteur* quand il existe une fonction polymorphe
`fmap` : $(A \to B) \to (\mathtt{F}A) \to (\mathtt{F}B)$
qui vérifie les lois suivantes (pour tout f et g) :
`fmap id` $= \mathtt{id}$
`fmap` $(f \circ g) =$ (`fmap` f) $\circ$ (`fmap` g)

Attention : Dans ce sujet, on ne demande pas de preuves que les lois sont respectées.

Question 2. Montrer que `option` et `liste` sont des foncteurs.

correction

Pour `option`, on définit

```
let fmap f (a : 'a option) = match a with
  None -> None
  | Some a -> Some (f a)
```

Pour `list`, on utilise le `map` habituel :

```
let rec fmap f (l : 'a list) = match l with
  [] -> []
  | t ::q -> f t ::(fmap f q)
```

Un foncteur `M` est une *monade* quand il existe deux fonctions polymorphes
`return` : A $\to$ (M A)
`bind` : (M A) $\to$ (A $\to$ (M B)) $\to$ (M B)
qui vérifient les lois suivantes, pour tout f, g et x :
`bind` (`return` x) $f = f\ x$
`bind` x `return` $= x$
`bind` (`bind` x f) $g =$ `bind` $x(y \mapsto$(`bind` (f y) g))

Question 3. Montrer que `option` et `liste` sont des monades.

correction

Pour `option` :

```
let return a = Some a;;
let bind m f = match m with
  None -> None
  | Some a -> Some (f a)
```

Pour `liste` :

```
let return a = [a];;
let rec bind l f =
   match l with
   | [] -> []
   | t ::q -> f t @ bind q f
```

Pour tout type S, on définit (etat S) A comme étant le type polymorphe $S \to (S, A)$
On suppose l'existence d'un type abstrait memoire représentant une table d'association entre `string` et `int` avec les deux fonctions suivantes :

`trouve : string` $\to$ `memoire` $\to$ (`option int`)
`majour : string` $\to$ `int` $\to$ `memoire` $\to$ `memoire`

La première recherche la valeur associée à une clef, la seconde met-à-jour un couple clef-valeur.

Question 4. Montrer que `etat` S est une monade pour tout S.
En déduire l'écriture avec `bind` d'une *procédure* qui prend en entrée trois clefs, récupère successivement deux valeurs d'une mémoire à partir des deux premières clefs puis associe dans la mémoire la somme des deux valeurs récupérée à la troisième clef.

On donne une définition alternative des monades :
Un foncteur `M` est une *monade* quand il existe deux fonctions polymorphes

```
return : A -> (M A)
join : M (MA) ->MA
```

qui vérifient les lois suivantes, pour tout f,g et x :

```
join o return = id
join o (fmap return) = id
join o join = join o (fmap join)
```

Question 5. Montrer que les deux définitions sont équivalentes.

Si M_1 et M_2 sont deux constructeurs de types, on définit (`compose` $M_1 M_2$) A = $M_1\,(M_2 A)$.

Question 6. Donner une condition suffisante pour que (`compose` $M_1 M_2$) soit un foncteur.

Question 7. Donner une condition suffisante pour que (`compose` $M_1 M_2$) soit une monade.
En déduire une nouvelle écriture, plus simple, de la procédure de la question 4.

Chapitre 39

(ENS) Déduction de messages *** (ENS 24, corrigé — oral - 232 lignes)

***

Déduction naturelle, Réduction,
sources : `ensdeductiondemessages.tex`

Déduction de messages

Nous souhaitons nous intéresser au problème suivant appelé problème de déduction :

entrée un ensemble fini de termes clos T et un terme clos u
sortie est-ce que u est déductible depuis T, noté $T \vdash u$?

Terme et sous-terme Nous nous intéressons aux termes construits inductivement à partir du symbole binaire $f(\cdot,\cdot)$, d'un ensemble infini dénombrable de constantes $\mathcal{C}$, et d'un ensemble infini dénombrable de variables $\mathcal{V}$.
Un terme est donc généré par la grammaire : $t, t_1, t_2 := v \in \mathcal{C} | x \in \mathcal{V} | f(t_1, t_2)$.
Si un terme ne contient pas de variable, alors ce terme est dit clos.
Étant donné un terme t nous notons $st(t)$ l'ensemble des sous-termes de t, i.e., le plus petit ensemble S tel que $t \in S$, et si $f(t_1, t_2) \in S$ alors $t_1, \ldots, t_n \in S$.

Règle d'inférence Une règle d'inférence est une règle de déduction de la forme :

$$\frac{T \vdash t_1 \ldots \quad T \vdash t_n}{T \vdash t} \text{ REGLE}$$

où T est un ensemble fini de termes et $t_1, \ldots, t_n, t$ sont des termes.
Un système d'inférence $\mathcal{I}$ est un ensemble fini de règles d'inférence.

Preuve Une *preuve* (ou *arbre de preuve*) Π de $T \vdash u$ dans $\mathcal{I}$ est un arbre tel que :
- chaque feuille est étiquetée avec un terme $v \in T$;
- pour chaque noeud ayant pour étiquette v_0 et enfants $v_1, \ldots, v_n$ il existe une règle d'inférence dans $\mathcal{I}$ ayant pour conclusion v_0 et hypothèses $v_1, \ldots, v_n$ (à instanciation près des variables) ;
- la racine de l'arbre est étiquetée par u.

La taille d'une preuve Π, notée $size(\Pi)$, est son nombre de noeuds. $Termes(\Pi)$ dénote l'ensemble des étiquettes, i.e., termes, apparaissant dans Π.

Lorsque $T \vdash u$ nous disons que u est déductible à partir de l'ensemble de termes T.

$$\frac{\text{si } u \in T}{T \vdash u} \text{Ax}$$

$$\frac{T \vdash x \quad T \vdash y}{T \vdash f(x,y)} \text{ APP-F} \qquad \frac{T \vdash f(x,y) \quad T \vdash y}{T \vdash x} \text{ RED-F}$$

Figure 1 - Système d'inférence $\mathcal{I}_0$

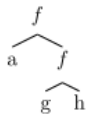


Figure 2 - Représentation sous forme d'arbre du terme $f(a, f(g, h))$

Question 1. Soit $T = \{f\left(f\left(a, k_1\right), k_2\right), k_2, f\left(k_1, k_2\right)\}$. Donner l'arbre de preuve de $T \vdash a$ dans $\mathcal{I}_0$.

correction

$$\dfrac{\dfrac{\overline{T \vdash f\left(f\left(a, k_1\right), k_2\right)}\text{Ax}}{T \vdash f\left(a, k_1\right)}\text{RED-F} \qquad \dfrac{\overline{T \vdash k_2}\texttt{Ax} \quad \dfrac{\overline{T \vdash f\left(k_1, k_2\right)}\text{Ax} \quad \overline{k_2}}{}Ax}{T \vdash k_1}}{T \vdash a}\ \text{REF-F}$$

Question 2. Soit T un ensemble de termes clos. Montrer que pour tout $T \vdash u$ dans $\mathcal{I}_0$, un arbre de preuve de taille minimale Π de $T \vdash u$ contient seulement des termes issus de $\texttt{st}(T \cup \{u\})$, i.e., $\texttt{Termes}(\Pi) \subseteq \texttt{st}(T \cup \{u\})$.
Montrer de plus que si Π est réduit à une feuille ou termine par une règle Ax ou RED-F alors il contient uniquement des termes issus de $st(T)$, i.e. $\texttt{Termes}(\Pi) \subseteq st(T)$.

correction

On fait une preuve par induction sur l'arbre de preuve.
Si l'arbre de preuve est réduit à la règle Ax alors la preuve est immédiate pour le cas général et le cas particulier.
Sinon, l'arbre de preuve se termine par une autre règle. Nous pouvons faire une étude de cas :

- `App-F` : par hypothèse d'induction, la propriété que nous souhaitons prouver est vraie.
- `Red-F` : par minimalité de l'arbre de preuve, nous savons que les sous-arbres Π_1 et Π_2 ne terminent pas par une règle `App-F`. En effet, si tel était le cas, alors nous pourrions construire un arbre plus petit en omettant les deux dernières étapes. Par conséquent, Π ne contient que des termes issus de $st(T)$.

Question 3. En déduire que le problème de déduction dans $\mathcal{I}_0$ est décidable en temps polynomial.
Nous considérerons que la taille du problème est : $\texttt{size}(T, u) = |st(u)| + \Sigma_{t \in T}|\texttt{st}(t)|$.

correction

- On calcule tous les sous-termes de $T \cup \{u\}$
- Tant qu'on n'a pas atteint un point fixe, on sature T avec les termes déductibles en une étape (si le terme déduit n'est pas dans $st(T) \cup \{u\}$, alors on ne l'ajoute pas). Le nombre maximal d'itérations est $|st(T) \cup \{u\}|$. On remarquera que $|st(T)|$ est au plus quadratique en la taille du problème car chaque sous terme d'un terme de T est plus petit que ce même terme.
- si u est dans l'ensemble saturé alors on retourne « oui», sinon on retourne «non ».

On définit le problème `HORN-SAT` :
entrée une formule Φ étant une conjonction finie de clauses de Horn
sortie est-ce que Φ satisfiable ?
Une clause de Horn est une formule du calcul propositionnel qui contient au plus un littéral positif. Une clause de Horn peut donc avoir trois formes :

- un littéral positif et aucun négatif : $C = (\texttt{true} \Rightarrow x)$
- un littéral positif et au moins un littéral négatif : $C = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \Rightarrow x)$
- aucun littéral positif : $C = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \Rightarrow \text{ false })$.

On admettra que `HORN-SAT` est P-complet, c'est-à-dire (intuitivement) que tout problème de décision dans P admet une réduction linéaire à `HORN-SAT`.

Question 4. Montrer que le problème de déduction dans $\mathcal{I}_0$ est P-complet.

correction

Le problème de déduction est clairement dans P avec la question précédente (la taille du problème est le nombre de sous-termes).

L'idée est la suivante :
- nous allons associer à chaque variable propositionnelle x, une constante $v_x \in \mathcal{C}$
- nous allons remarquer que le terme t est déductible depuis $f(\dots f(f(t,t_1),t_2),\dots,t_n)$ si et seulement si $t_1,\dots,t_n$ le sont aussi.

Pour montrer que le problème de déduction est P-complet, on peut utiliser `HORN-SAT`. Soit $\Phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_n$ une conjonction finie de clauses de Horn. Nous construisons :

1. Pour tout $x \in \mathcal{V}$, on associe une constante $v_x \in \mathcal{C}$. On définit également une constante $v_\perp$.

2. pour tout i, on définit

$$t_i = \begin{cases} f(\dots f(f(v_x, v_{x_1}), v_{x_2}), \dots, v_{x_n}) & \text{si } C_i = (x_1 \wedge \dots \wedge x_n \Rightarrow x) \\ f(\dots f(f(v_\perp, v_{x_1}), v_{x_2}), \dots, v_{x_n}) & \text{si } C_i = (x_1 \wedge \dots \wedge x_n \Rightarrow \text{ false }) \\ v_x \text{ si } C_i = (\text{ true } \Rightarrow x) \end{cases}$$

3. Soit $T = \{t_1,\dots,t_n\}$. Par construction, $T \vdash v_x$ implique $x =$ true (pour tout v_x apparaissant dans Φ) dans toute valuation satisfaisant Φ.
Par conséquent, $T \vdash v_\perp$ implique Φ est non-satisfiable. Réciproquement, si $T \nvdash v_\perp$ alors nous définissons la valuation $\{x \to 1 \mid T \vdash v_x\} \cup \{x \to 0 \mid T \nvdash v_x\}$ qui satisfait Φ.

Nous souhaiterions maintenant nous intéresser au même problème mais en ajoutant le ou-exclusif. Un terme est donc maintenant généré par la grammaire :

$$t, t_1, t_2 := v \in \mathcal{C} | x \in \mathcal{V} | f(t_1, t_2) \mid t_1 \oplus t_2$$

Nous ne prouverons pas ici que le problème de déduction est encore décidable en temps polynomial. Nous nous intéresserons à prouver une étape de la preuve : étant donné un ensemble de termes T et un terme t, est-ce que $T \vdash t$ en utilisant uniquement les règles GX et Ax' ?

$$\frac{T \vdash u_1 \dots \quad T \vdash u_n}{T \vdash u_1 \oplus \dots \oplus u_n}\text{GX} \qquad \frac{\text{si } u = ACv \text{ et } v \in T}{T \vdash u}\text{Ax}$$

On note $=_{AC}$ la plus petite relation telle que :

$$\begin{array}{lll} \text{(refl.) } x = x & \text{(sym.) } (x=y) \Rightarrow (y=x) & \text{(trans.) } (x=y) \wedge (y=z) \Rightarrow (x=z) \\ \text{(comm.) } x \oplus y = x \oplus y & \text{(assoc.) } x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z & \end{array}$$

$$\text{(congr.) } (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \Rightarrow f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$$

Question 5. Soit u et v deux termes clos. Donner un algorithme en temps polynomial qui décide si $u =_{AC} v$.

correction

Deux remarques ici :
- On peut se restreindre à une terme de la forme $u_1 \oplus \dots \oplus u_n$ avec u_i ne contenant pas de $\oplus$.
- On peut simplifier le multi-ensemble obtenu en fonction du nombre d'occurrences de chaque facteur. On garde le facteur si son nombre d'occurrences est impair, on l'enlève s'il est pair. Le facteur 0 peut être retiré du multi-ensemble. On note cette procédure de simplification Simplify $(\cdot)$.
  Étant donné que l'on raisonne modulo AC, on peut remarquer que sans perte de généralité, on peut aplatir tous les $\oplus$, i.e., considérer $\oplus$ comme un opérateur n-aire.
  Étant donné que u et v sont clos, il suffit de calculer le multi-ensemble des facteurs de u et v en se donnant pour définition : $\text{Facteurs}(t) = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} \texttt{Facteurs}(t_i) & \text{si } t = t_1 \oplus \dots \oplus t_n \\ \{t\} & \text{sinon} \end{cases}$
  L'algorithme est comme suit :
  $$\texttt{Egal}(u,v) = \begin{cases} \perp & \text{si } u = f(t_1,t_2) \text{ and } v \neq f(t_1',t_2') \\ \texttt{Egal}(t_1,t_1') \wedge \texttt{Egal}(t_2,t_2') & \text{si } u = f(t_1,t_2) \text{ and } v = f(t_1',t_2') \\ \texttt{Simplify}(\texttt{Facteurs}(u)) == \texttt{Simplify}(\texttt{Facteurs}(v)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 6. Soit T un ensemble de termes clos. Soit t un terme clos.
Montrer que $T \vdash t$ dans $\{\text{GX}, \text{Ax }'\}$ est décidable en temps polynomial.

correction

On peut commencer par remarquer que sans perte de généralité, on peut supposer que notre arbre est de hauteur 2 : une unique application de GX et ensuite uniquement des applications de Ax'. En effet, si on a deux étages, on peut juste les « aplatir » et on obtient toujours un arbre de preuve valide.
On définit `Facteurs`(t) et `Simplify`(S) comme dans la réponse à la question précédente.
Voici l'algorithme :

1. On calcule $S_t =$ `Simplify`(`Facteurs`(t)) et $S_T =$ `Simplify`(`Facteurs`(T)) (temps polynomial)
2. Si $S_t \not\subseteq S_T$ alors t n'est pas déductible à partir de T. En effet, il existe un sous-terme de t que nous ne pourrons jamais construire à partir de T (temps polynomial)
3. Sinon on représente S_t comme un vecteur de taille $|S_T|$ avec pour valeurs 0/1. Le vecteur a un 1 en position i si le i-ème facteur de S_T est aussi présent dans S_t. Sinon, on affecte la valeur 0 . Notons ce vecteur V^t.
4. On peut définir les mêmes vecteurs pour les différents termes de T pris individuellement, notons les V_i^T
5. la déductibilité de t est maintenant réduite à l'existence d'une combinaison linéaire dans $\mathbb{F}_2^p$ des vecteurs V_i^T telle que $\Sigma_i \alpha_i V_i^T = V^t$. Cette étape se calcule en temps polynomial à l'aide d'un pivot de Gauss.

Chapitre 40

(ENS) Filtrage par motif en OCaml *** (ENS 24, corrigé — oral - 323 lignes)

$***$

Ocaml,
sources : `ensfiltrageOcaml.tex`

Filtrage par motif en OCaml

Ce sujet s'intéresse à modéliser le comportement du filtrage par motif utilisé dans la construction `match ... with ...` d'OCaml.

On s'intéresse à un sous-ensemble d'OCaml. Les constructeurs des types algébriques sont notés $C\,(e_1, \ldots, e_k)$, où k est l'arité du constructeur C. Dans l'exemple des listes ci-dessous, le premier constructeur de liste (`Empty`) est d'arité 0, le second (`Cons`) est d'arité 2.

```
type 'a list = Empty | Cons of 'a * 'a list
```

Dans la suite, on considère que toutes les valeurs OCaml sont des constructeurs $v ::= C\,(v_1, \ldots, v_k)$. En particulier, les constantes `true` et `false` sont des valeurs du `type bool = true | false`.

Les motifs sont $m ::= \mathrm{v} \,|\_\, |C\,(m_1, \ldots, m_k)|\,(m_1 \mid m_2)$, i.e :
- Des identifiants de variables (cas v).
- Le motif joker _ .
- Un constructeur appliqué à k motifs.
- La disjonction de deux motifs.

On introduit une notion de matrice de filtrage, selon la transformation illustrée ci-dessous. Les expressions à droite des motifs (a_i) sont appelées des actions.

$$\texttt{match}\ (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m\ )\ \texttt{with} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_m & & \\ m_{1,1} & \ldots & m_{1,m} & \rightarrow & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \rightarrow & \ldots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,m} & \rightarrow & a_n \end{pmatrix}$$

$$\mid \mathrm{m}_{1,1}, \ldots,\ \mathrm{m}_{1,m} \rightarrow \mathrm{a}_1$$
$$\mid \ldots$$
$$\mid \mathrm{m}_{n,1}, \ldots,\ \mathrm{m}_{n,m} \rightarrow \mathrm{a}_n$$

Étant donné une expression $e = C\,(e_1, \ldots, e_k)$, on définit des opérateurs d'accès au constructeur : $\texttt{constr}(e) = C$ et d'accès au i-ème champ : $\#i(e) = e_i($ si $1 \leqslant i \leqslant k)$.
Un *environnement* est une fonction partielle des variables aux valeurs.

Question 1. Définir une relation $m \leqslant_\sigma v$ établissant la compatibilité entre un motif m et une valeur v, étant donné un environnement σ.
À titre d'exemple, `Cons` $(1, x) \leqslant_\sigma$ `Cons`$(1,$ `Cons`$(2,$ `Empty` $))$ lorsque $\sigma(x) =$ `Cons`$(2,$ `Empty` $)$.

Dans la suite, on note $m \leqslant v$ si et seulement si $\exists \sigma, m \leqslant_\sigma v$.

correction

Ébauche de solution proposée par le rapport du Jury.
- $x \leqslant_\sigma v \Leftrightarrow \sigma(x) = v$
- $\leqslant_\sigma v$
- $C\,(m_1, \ldots, m_n) \leqslant_\sigma C'\,(v_1, \ldots, v_o) \Leftrightarrow C = C' \wedge n = o \wedge \forall i, m_i \leqslant_\sigma v_i$
- $(m_1 \mid m_2) \leqslant_\sigma v \Leftrightarrow m_1 \leqslant_\sigma v \vee m_2 \leqslant_\sigma v$

Question 2. On note $Match\,((v_1, \ldots, v_m), M)$ le résultat du filtrage de la matrice M sur le vecteur de valeurs $(v_1, \ldots, v_m)$.

(a) Soit a_i une action et σ un environnement. Sous quelle(s) condition(s) $Match\,((v_1, \ldots, v_m), M) = (a_i, \sigma)$?

(b) Y a-t-il d'autres cas de définition de Match ?

correction

Il faut que $\forall 1 \leqslant j < i, (v_1, \ldots, v_m) \not\sqsubseteq (m_{j,1}, \ldots, m_{j,m})$, et que $(v_1, \ldots, v_m) \sqsubseteq_\sigma (m_{i,1}, \ldots, m_{i,m})$.
Ne pas oublier le cas où $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, (v_1, \ldots, v_m) \not\sqsubseteq (m_{i,1}, \ldots, m_{i,m})$, dans ce cas une exception est levée (Matching_failure en OCaml).

Question 3.

(a) Décrire informellement comment éliminer le motif joker _ sans ajouter de cas, sur l'exemple de len cidessous.

```
let rec len l =
    match l with
    | Empty -> 0
    | Cons(_, tl) -> 1 + (len tl)
```

(b) Définir cette transformation sur les matrices de filtrage.

(c) Donner un critère justifiant de la correction de la transformation.

correction

(a) Il faut juste ajouter des variables fraîches, c'est à dire des variables qui ne sont pas les variables libres de l'action à droite de $\rightarrow$ (la notion de variable libre est au programme, mais du côté logique), ou les variables liées par le motif de la ligne.
Dans l'exemple, il faut donc choisir une variable qui n'est ni l ni tl.

```
let rec len l =
match l with
| Empty -> 0
| Cons(w, tl) -> 1 + (len tl)
```

(b) On note $NJ(M)$ cette transformation. variables est définie récursivement pour extraire les variables définies dans un motif.

$$NJ(M)_{i,j} = \begin{cases} M_{i,j} \text{ si } M_{i,j} \neq - \\ v \text{ tel que } v \notin \texttt{variables\_libres}\ (a_i) \text{ et } v \notin \{\texttt{variables}\,(m_{i,k}) \mid k \neq j\} \end{cases}$$

(c) Il faut prouver que $\texttt{Match}\,((v_1, \ldots, v_m), M) = \texttt{Match}\,((v_1, \ldots, v_m), NJ(M))$. On n'exigeait pas une preuve détaillée ici.

Question 4. Soit F une matrice de filtrage. On note $S(c, F)$ l'opérateur qui transforme la matrice de filtrage en supposant que e_1 (la première expression filtrée par F) commence par un constructeur c d'arité a.

(a) Illustrer le résultat de S (Cons, F) sur la matrice de filtrage induite par le code ci-dessous.

```
let rec merge l1 l2 = match l1, l2 with
| Empty, l | l, Empty -> l
| Cons(h1, t1), Cons(h2, t2) ->
    if h1 < h2 then Cons(h1, merge t1 l2)
    else Cons(h2, merge l1 t2)
```

(b) Décrire la transformation opérée par $S(c, F)$.

(c) Donner un critère justifiant de la correction de la transformation.

correction

(a) Petit piège, ce n'est pas un cas de — dans les motifs ici, la matrice de filtrage initiale est donc

$$F = \begin{pmatrix} l1 & l2 & & \\ \text{Empty} & l & \to & l \\ l & \text{Empty} & \to & l \\ \texttt{Cons}(h1, t1) & \texttt{Cons}(h2, t2) & \to & \dots \end{pmatrix} \quad S(\texttt{Cons}, F) = \begin{pmatrix} \#1(l1) & \#2(l1) & l2 & \\ \overline{h1} & \overline{t1} & \texttt{Cons}(h2, t2) & \to \end{bmatrix} \dots \end{pmatrix}$$

(b) N.B : formaliser la transformation sur les indices des matrices n'est pas pratique ici, les candidat.e.s ont été évalués sur leurs choix de présentation pédagogique de cette étape.
On commence par changer $(e_1, \dots, e_m)$ en $\#1(e_1), \dots, \#a(e_1), e_2, \dots, e_m$.
On raisonne par cas sur $m_{i,1}$ pour donner $M' \to A'$. Chaque ligne peut donner au plus deux lignes correspondantes dans la matrice de filtrage de $S(c, F)$.

- Si $m_{i,1} = c(q_1, \dots, q_a)$, la ligne conservée est étendue à gauche pour donner

$$q_1, \dots, q_a, m_{i,2}, \dots, m_{i,m} \to a_i$$

- Si $m_{i,1} = c'(q_1, \dots q_b)$ avec $c \neq c'$, la ligne est supprimée
- Si $m_{i,1} = v$ (une variable), il n'y a rien à matcher dans l'extension à gauche, et il faut étendre l'action pour lier la variable

$$\dots, \dots, \dots, m_{i,2}, \dots, m_{i,m} \to \text{ let } v = e_1 \text{ in } a_i$$

- Le cas est similaire, mais il n'y a même pas besoin de faire de liaison.
- Si$m_{i,1} = q_1 \mid q_2$, on génère deux lignes :

$$S(c, (q_1, m_{i,2}, \dots, m_{i,m} \to a_i))$$
$$S(c, (q_2, m_{i,2}, \dots, m_{i,m} \to a_i))$$

(c)

$$\texttt{Match}((c(w_1, \dots, w_a), v_2, \dots, v_m), F) = \texttt{Match}((w_1, \dots, w_a, v_2, \dots, v_m), S(c, F))$$

Question 5. Donner une fonction C permettant de transformer ces matrices de filtrage vers un langage OCaml modifié, où les filtrages match ... with ... sont supprimés au profit de switches sur le constructeur d'une expression :

```
switch constr(e) with
    case ...  -> ...
    ...
    default -> ...
```

correction

- Si $n = 0$,

$$C(F) = C\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_m \end{pmatrix} = \text{ failwith Matching\_failure}$$

- Si $m = 0$,

$$C(F) = C\begin{pmatrix} \to & a_1 \\ \to & \dots \\ \to & a_n \end{pmatrix} = a_1$$

- Ce cas peut être inclus dans le suivant, mais avoir un cas particulier permet d'éviter un switch inutile. Si la première colonne ne contient que des variables ou des (pour simplifier, on suppose que ce sont des variables, cf. question 1), ie $m_{\cdot,1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$:

$$C\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_m & & \\ x_1 & \dots & m_{1,m} & \to & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \to & \dots \\ x_n & \dots & m_{n,m} & \to & a_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} e_2 & \dots & e_m & & & \\ m_{1,2} & \dots & m_{1,m} & \to & \text{let } x\_1 = e\_1 & \\ \text{in} & a_1 & & & & \text{in } a_n. \\ \dots & \dots & \dots & \to & \dots & \\ m_{n,2} & \dots & m_{n,m} & \to & \text{let } x\_n = e\_1 & \end{pmatrix}$$

- sinon, on note Constrs $= \{c \mid m_{i,1} = c(\dots)\}$ l'ensemble des constructeurs apparaissant dans les motifs de la première colonne.

$$C(F) = \begin{array}{c} \text{switch constr } (e_1) \text{ with} \\ \text{case } c_1 \to C\left(S\left(c_1, F\right)\right) \\ \dots \\ \text{case } c_l \to C\left(S\left(c_l, F\right)\right) \\ \text{default } \to C(D(F)) \end{array}$$

L'opérateur de défaut est conceptuellement similaire à celui de spécialisation. Les lignes avec constructeurs sont supprimées. Les lignes avec variables ou wildcard sont laissées, et les — sont déroulés. La propriété est que pour tout constructeur c qui n'apparait pas en tête d'un motif dans la première colonne, alors

$$\texttt{Match}\left(\left(c\left(w_1, \dots, w_a\right), v_2, \dots, v_m\right), F\right) = \texttt{Match}\left(\left(v_2, \dots, v_m\right), D(F)\right)$$

Question 6.
(a) Cette transformation a-t-elle un intérêt ?
(b) L'algorithme de transformation peut-il être amélioré ?

correction

(a) Oui pour compiler OCaml.
(b) Dans le cadre d'OCaml, il est intéressant de s'intéresser aux gains qu'apportent les informations de type. Cela peut être une passe faite sur le switch, après sa génération.
Un seul constructeur : pas besoin de faire de test via un switch
Suppression du otherwise : lorsque tous les constructeurs sont déjà couverts
Chaînes de caractères : ce cas est très à la marge, mais il peut y avoir une compilation vers des arbres de switches sur les caractères.

Question 7. Prouver la terminaison et la correction de l'algorithme en question 5.

correction

Mesure de terminaison : $\sum_{i,j} \texttt{taille}\left(m_{i,j}\right)$

$$\begin{aligned} \texttt{taille}(v) &= \texttt{taille}\left(\_\right) = 1 \\ \texttt{taille}\left(q_1 \mid q_2\right) &= \texttt{taille}\left(q_1\right) + \texttt{taille}\left(q_2\right) \\ \texttt{taille}\left(C\left(m_1, \dots, m_n\right)\right) &= 1 + \sum_i \texttt{taille}\left(m_i\right) \end{aligned}$$

La définition de la sémantique de switch est immédiate. On note
" H(s) : si C(F) = s alors
• $\texttt{siMatch}\left(\left(v_1, \dots, v_m\right), F\right) = \left(a_i, \sigma\right)$ alors let $\mathrm{x}_i = \mathrm{w}_i$ in a_i = let $\mathrm{e}_i = \mathrm{v}_i$ in s
• sinon les deux cas s'évaluent en Matching_failure."
Le plus simple est de faire la preuve par induction sur F (vu comme l'expression match, sinon il n'y a pas de structure pour faire l'induction).

Chapitre 41

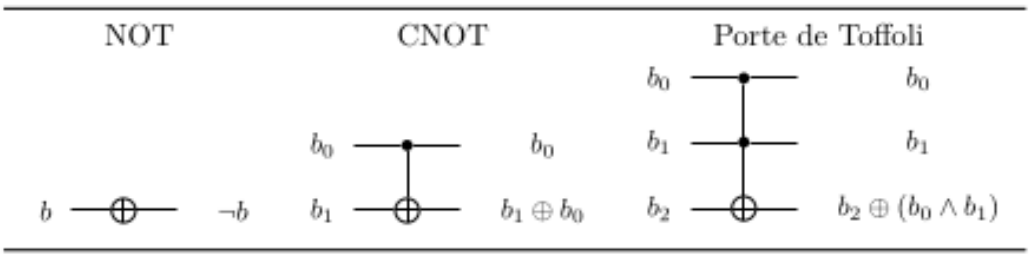
(ENS) Implémentation des circuits réversibles *** (ENS 24, corrigé — oral - 218 lignes)

***

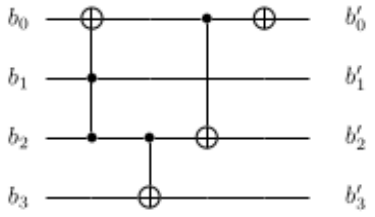
Circuits,
sources : `enscircuitsreversibles.tex`

Implémentation des circuits réversibles

On rappelle que l'opération de OU exclusif (XOR) est définie par : $a \oplus b = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$, et qu'on a la propriété de distributivité suivante : $(a \oplus b) \wedge c = (a \wedge c) \oplus (b \wedge c)$. On définit les *portes logiques réversibles* suivantes.



Soit $n \in \mathbb{N}$. Un *circuit logique réversible* sur n bits est une séquence de portes logiques réversibles appliquées sur n entrées booléennes, qui seront numérotées de 0 à $n-1$. À toute porte logique du circuit correspond une fonction de $\{0,1\}^n$ vers $\{0,1\}^n$ qui modifie la valeur des entrées booléennes auxquelles elle est appliquée, selon sa définition donnée ci-dessus. Ici b_0 (porte CNOT) et respectivement b_0, b_1 (porte de Toffoli) sont nommés les *bits de contrôle*. À tout circuit réversible $\mathcal{C}$ correspond une fonction $f_{\mathcal{C}} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, obtenue en composant les fonctions de chaque porte logique, dans l'ordre de lecture de gauche à droite. On dit que $\mathcal{C}$ implémente la fonction $f_{\mathcal{C}}$. Ainsi, le circuit suivant :



implémente la fonction :

$$(b_0, b_1, b_2, b_3) \mapsto (\neg(b_0 \oplus (b_1 \wedge b_2)), b_1, b_2 \oplus b_0 \oplus (b_1 \wedge b_2), b_3 \oplus b_2)$$

Deux circuits réversibles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sur n bits peuvent être composés en écrivant les portes de $\mathcal{C}_2$ suivies des portes de $\mathcal{C}_1$; on implémente alors la fonction $f_{\mathcal{C}_2} \circ f_{\mathcal{C}_1}$.

Question 1.

1. Montrer que tout circuit réversible $\mathcal{C}$ constitué d'une seule porte (NOT, CNOT ou Toffoli) implémente une permutation. Quel est son inverse ?

2. Comment implémenter l'inverse d'un circuit réversible quelconque ?

correction

1. Les circuits sont réversibles, c'est dans le titre. Une manière simple de résoudre cette question est donc d'exhiber l'inverse du circuit : pour un circuit $\mathcal{C}$ constitué d'une seule porte, $f_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = f_{\mathcal{C}} \circ f_{\mathcal{C}}$ est l'identité. Par conséquent $f_{\mathcal{C}}$ est son propre inverse.

2. Comme les portes individuelles sont involutives, on peut inverser le circuit en écrivant ses portes dans l'ordre inverse.

Une *porte de Toffoli à k contrôles* implémente la fonction :

$$(b_0, \ldots, b_{k-1}, b_k) \mapsto \left(b_0, \ldots, b_{k-1}, b_k \oplus \bigwedge_{i=0}^{k-1} b_i\right)$$

Question 2. Montrer que dans un circuit sur n bits, une porte de Toffoli à $n-2$ contrôles peut être implémentée à l'aide de 2 portes de Toffoli à $n-3$ contrôles, et deux portes de Toffoli.

correction

Cette question a posé problème à beaucoup de candidat(e)s.
L'idée principale est de séparer le AND des $n-2$ contrôles en un premier AND de $n-3$ contrôles, suivi d'une autre opération AND calculée avec une porte de Toffoli. Il faut ensuite «corriger » les valeurs contenues dans les bits de sortie afin d'implémenter exactement la porte voulue, en utilisant la distributivité du AND sur le XOR.
Soient $x_0, \ldots, x_{n-3}$ les contrôles, x_{n-2} le bit résultat, x_{n-1} le dernier bit du circuit.
On effectue les opérations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n-1} \leftarrow x_{n-1} \oplus (x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-4}) \\ x_{n-2} \leftarrow x_{n-2} \oplus (x_{n-1} \wedge x_{n-3}) \\ x_{n-1} \leftarrow x_{n-1} \oplus (x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-4}) \\ x_{n-2} \leftarrow x_{n-2} \oplus (x_{n-1} \wedge x_{n-3}) \end{cases} \tag{1}$$

On vérifie que cette implémentation donne le résultat escompté. En effet :

1. Après les deux premières opérations, le bit à position $n-2$ contient $(x_{n-1} \oplus (x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-4})) \wedge x_{n-3} \oplus x_{n-2}$. (Ensuite, développer).
2. Après la troisième opération, le bit à position $n-1$ contient de nouveau x_{n-1}
3. La dernière opération permet d'enlever le terme $x_{n-1} \wedge x_{n-3}$ dans le bit à position $n-2$, ce qui donne le résultat.

Dans la suite de cet exercice, on va démontrer le théorème suivant :

Pour tout $n \geqslant 7$, une permutation Π de $\{0,1\}^n$ est paire si et seulement s'il existe un circuit réversible $\mathcal{C}$ sur n bits tel que $\Pi = f_{\mathcal{C}}$.

On rappelle qu'une permutation est paire (de signature 1) si et seulement si toutes ses décompositions en transpositions ont un nombre de transpositions pair.

Question 3. Trouver des contre-exemples simples pour $n = 2$ et $n = 3$.

correction

Une seule porte suffit. Dans le cas $n = 2$ on considère la porte CNOT définie plus haut : la permutation envoie (00) vers (00), (01) vers (01), (10) vers (11) et (11) vers (10). C'est donc une transposition, qui est impaire. Dans le cas $n = 3$ on considère une porte de Toffoli. Toutes les entrées sont laissées invariantes hormis (110) et (111) qui sont interverties. La permutation est donc également une transposition.

Question 4. Soit $\mathcal{C}$ un circuit réversible sur $n \geqslant 4$ bits ne comportant qu'une seule porte logique. Soit S l'ensemble des cycles de $f_{\mathcal{C}}$.

1. Montrer qu'il existe une partition $S = S_0 \cup S_1$ et une bijection $S_0 \to S_1$ préservant la longueur des cycles.
2. En déduire une implication du théorème.

correction

1. Considérons le bit sur lequel la porte ne s'applique pas, sans perte de généralité plaçons-le à la position 0 . Considérons un cycle de $f_{\mathcal{C}}$ de longueur ℓ : $(t_0 t_1 \dots t_{\ell-1})$ où $t_0, \dots, t_{\ell-1}$ sont des n-uplets.
   Comme $f_{\mathcal{C}}$ n'agit pas sur le bit à position 0 , tous les t_i ont la même valeur pour ce bit. On peut donc partitionner les cycles selon que le bit à position 0 vaut 0 (S_0) ou 1 (S_1).
   Pour tout t_i ci-dessus, soit t'_i la valeur obtenue en modifiant le bit 0 . Alors $f_{\mathcal{C}}(t_i) = t_{i+1} \implies f_{\mathcal{C}}(t'_i) = t'_{i+1}$, car $f_{\mathcal{C}}$ laisse le bit 0 invariant. Par conséquent $\left(t'_0 t'_1 \dots t'_{\ell-1}\right)$ est un cycle de même longueur. Ce qui définit la bijection.

2. En décomposant les cycles de S_0 et S_1 on obtient le même nombre de transpositions, donc $f_{\mathcal{C}}$ est paire. Une composition de permutations paires est paire, donc par induction triviale les permutations issues des circuits réversibles sont paires.

Question 5.

1. Soit $n \geqslant 4$. Soit $a, b \in \{0,1\}^n, a \neq b$. Montrer qu'il existe un circuit $\mathcal{C}$ n'utilisant que des portes NOT et CNOT tel que $f_{\mathcal{C}}(a) = (1, 1, \dots, 1)$ et $f_{\mathcal{C}}(b) = (0, 1, \dots, 1)$.

2. Soit $c, d \in \{0,1\}^{n-1}, c \neq d$. Montrer qu'il existe un circuit $\mathcal{C}$ tel que $f_{\mathcal{C}}$ est la paire de transpositions $((0,c)(0,d))((1,c)(1,d))$.

3. En déduire que si Π est une permutation de $\{0,1\}^n$ laissant au moins un bit invariant, il existe un circuit réversible $\mathcal{C}$ tel que $\Pi = f_{\mathcal{C}}$.

correction

1. L'objectif du circuit est d'« envoyer » a sur $(1, 1 \dots, 1)$ (tous les bits à 1) et b sur $(0, 1 \dots, 1)$ (tous les bits à 1 sauf le premier). Notre seule hypothèse est que $a \neq b$. Il existe différentes manières, plus ou moins efficaces, d'implémenter une telle opération. Nous ne présentons ici qu'une possibilité.
   Écrivons les bits de a et de b : $a_0 \cdots a_{n-1}$ et $b_0 \cdots b_{n-1}$. Sans perte de généralité supposons que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ (ce pourrait être l'inverse, ou ce pourrait être une position différente, mais dans ce cas on modifierait simplement les indices dans ce qui suit).
   (a) On applique des CNOTs dont le bit de contrôle est le numéro 0 et la cible les bits qui sont non nuls dans a : ainsi, si l'entrée du circuit est a, on obtient bien $(1, \dots, 1)$ à ce stade. Si l'entrée est b, on obtient b.
   (b) On applique un NOT sur le bit numéro 0 . Si l'entrée est b, le premier bit devient 1 .
   (c) On applique des CNOTs dont le bit de contrôle est le numéro 0 et la cible les bits qui sont non nuls dans b.
   (d) On applique un NOT sur le bit numéro 0 .
   Concrètement, on a utilisé le bit 0 comme contrôle intermédiaire pour transformer la sortie : en partant de a, l'étape 3 ne s'applique pas et on obtient $(1, \dots, 1)$. En partant de b, l'étape 1 ne s'applique pas et on obtient $(0, 1, \dots, 1)$.

2. On va utiliser le circuit $\mathcal{C}'$ précédemment construit. D'abord, on envoie c et d sur $(1, 1, \dots, 1)$ et $(0, 1, \dots, 1)$ respectivement (indépendamment du premier bit), ce qui signifie qu'on envoie :

$$\begin{cases} (0,c) \to (0,1,1,\dots,1) \\ (1,c) \to (1,1,1,\dots,1) \\ (0,d) \to (0,0,1,\dots,1) \\ (1,d) \to (1,0,1,\dots,1) \end{cases} \tag{2}$$

   On applique ensuite une Toffoli contrôlée par les $n-2$ derniers bits (c'est possible car on l'a construite à la question 2) où la cible est le bit 1 . Cela intervertit les paires $(0,1,1,\dots,1)$ et $(0,0,1,\dots,1)$, et aussi $(1,1,1,\dots,1)$ et $(1,0,1,\dots,1)$. On applique ensuite l'inverse de $\mathcal{C}'$.
   Le circuit envoie donc $(0,c)$ sur $(0,d)$ et $(1,c)$ sur $(1,d)$, et inversement. Il est important de vérifier que les autres entrées sont inchangées : c'est le cas car en arrivant au niveau de la Toffoli on aura autre chose que $(1, \dots, 1)$ pour les contrôles (il ne se passera donc rien).

3. Si une permutation laisse un bit invariant, on peut suivre le raisonnement de la **Question 4 pour séparer ses cycles en deux ensembles disjoints, et ensuite ses transpositions en paires disjointes.** On obtient des paires de transpositions telles que vues en **Question 5.**2, et donc une implémentation.

Question 6. Montrer que pour $n \geqslant 6$, toute permutation paire de $\{0,1\}^n$ peut s'écrire comme une composition de paires

de transpositions disjointes, c'est-à-dire :

$$\Pi = (x_0 y_0)\,(z_0 t_0)\,(x_1 y_1)\,(z_1 t_1)\dots(x_k y_k)\,(z_k t_k)$$

où pour tout i, x_i, y_i, z_i, t_i sont distincts deux à deux (mais on peut avoir par exemple $x_0 = y_1$).

correction

C'est une question préparatoire pour la question suivante. Il existe une version plus compliquée de ce résultat, qui optimise le nombre de transpositions ; ce n'est pas l'objectif ici.
Il suffit de décomposer la permutation en produit de transpositions :

$$\Pi = (x_0 y_0)\cdots(x_{2k-1} y_{2k-1})$$

(Qui sont en nombre pair, par hypothèse). Entre chaque paire de transpositions $(\ x_{2i}y_{2i})\,(x_{2i+1}y_{2i+1})$ on insère $(z_i t_i)^2$ (qui est l'identité), où on choisit z_i et t_i différents de $x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}$. C'est possible car $n \geqslant 6$.

Question 7. Soit $n \geqslant 7$ et soit x, y, z, t des éléments de $\{0,1\}^n$ distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un circuit réversible $\mathcal{C}$ implémentant une permutation P telle que :

$$P(x) = (0,0,1,\dots,1), \quad P(y) = (0,1,1,\dots,1), \quad P(z) = (1,0,1,\dots,1), \quad P(t) = (1,1,1,\dots,1)$$

En déduire un circuit réversible qui implémente la paire de transpositions $(xy)(zt)$.

correction

Nous allons commencer par implémenter une permutation Q qui va nous aider, en envoyant x, y, z, t sur des sorties $Q(x), Q(y), Q(z), Q(t)$ telles que le bit à position $n-1$ vaut 1 . Pour ce faire, il suffit de sélectionner un sous-ensemble de $\leqslant n-1$ positions telles que les restrictions de x, y, z, t à ces positions sont toujours distinctes deux à deux.
Existe-t-il un tel ensemble ? Oui car $n \geqslant 7$, grâce à un raisonnement par l'absurde et au principe des tiroirs (c'est ici que le choix $n \geqslant 7$ devient pertinent). Il n'y a que $\binom{4}{2} = 6$ paires possibles parmi (x, y, z, t), et il y a $\binom{7}{6} = 7$ choix de 6 positions parmi les 7 . Par conséquent, si chaque choix de 6 positions provoque une collision sur une paire, il existe une paire pour laquelle deux choix collisionnent. Or, ce sont deux choix différents de 6 positions parmi 7 , donc leur union contient toutes les positions : tous les bits sont égaux (ce qui est impossible).
L'échange de bits dans le circuit est implémentable (également grâce à la Question 5 ; plus simplement le SWAP de deux bits s'implémente à l'aide de 3 CNOTs). Sans perte de généralité, réécrivons donc x, y, z, t sous la forme : $(b_x, x')\,, (b_y, y')\,, (b_z, z')\,, (b_t, t')$ où x', y', z', t' sont distincts deux à deux. On utilise la question 5 pour implémenter une permutation Q qui laisse le premier bit invariant, et fixe le dernier bit à 1 :

$$\begin{cases} (b_x, x') \to (b_x, x'', 1) \\ (b_y, y') \to (b_y, y'', 1) \\ (b_z, z') \to (b_z, z'', 1) \\ (b_t, t') \to (b_t, t'', 1) \end{cases} \tag{3}$$

On remarque que $(b_x, x'')\,, (b_y, y'')\,, (b_z, z'')\,, (b_t, t'')$ sont des valeurs distinctes deux à deux (sinon, on n'aurait pas implémenté une permutation). On utilise la Question 5 une nouvelle fois pour les envoyer respectivement sur $(0,0,1,\dots,1), (0,1,1,\dots,1), (1,0,1,\dots,1), (1,1,1,\dots,1)$, en laissant le dernier bit invariant (qui de toute façon vaut 1 dans tous les cas).
La composition de toutes ces permutations nous donne P.
Pour terminer la question (et donc le théorème), on applique une porte de Toffoli à $n-2$ contrôles, dont la sortie est le bit numéro 1 et les contrôles les $n-2$ derniers bits. Cette porte échange $(0,0,1,\dots,1), (0,1,1,\dots,1)$ et $(1,0,1,\dots,1), (1,1,1,\dots,1)$.
En appliquant ensuite l'inverse de P, on obtient bien $(xy)(zt)$.

Chapitre 42

(ENS) Résolution d'inéquations linéaires *** (ENS 24, corrigé — oral - 195 lignes)

***

Ocaml, Algorithmique, Complexité,
sources : `ensresolutioninequationslineaires.tex`

Résolution d'inéquations linéaires

Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de variables et $S = \{L_1, \ldots, L_m\}$ un ensemble de fonctions linéaires en les variables de X à coefficients rationnels, assimilé à un système d'inéquations :

$$\forall i, L_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$$

Si deux équations peuvent se réécrire sous la forme : $L \leqslant x$ et $x \leqslant U$ pour $x \in X$, où les expressions L et U ne contiennent pas x, on définit le «x-résultant» de L et U comme l'inéquation : $L \leqslant U$ (ou de manière équivalente : $L - U \leqslant 0$).
Les nombres rationnels manipulés dans cet exercice n'étant a priori pas de taille constante, la complexité en temps des algorithmes sera comptée uniquement en opérations rationnelles (additions, multiplications, divisions, etc.)
Notre objectif est de résoudre le problème suivant de *satisfiabilité des inéquations rationnelles* :
Soit S un ensemble d'inéquations à au plus deux variables, déterminer si S est satisfiable, i.e., s'il existe une valuation $X \to \mathbb{Q}$ satisfaisant toutes les inéquations de S.

Question 1. Le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 \leqslant 0 \\ 2x_2 \leqslant 0 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

est-il satisfiable ?

correction

Corrigé proposé par le jury
Non, car on peut en déduire l'inéquation $x_2 \leqslant -1$ et $-x_2 \leqslant 0$ ce qui forme une contradiction. Informellement, il est possible de déduire « $-1 \leqslant 0$ » uniquement à l'aide de combinaisons linéaires des équations de départ.

Soit S un système d'inéquations linéaires, x une variable de S, et $T \subseteq S$ l'ensemble des inéquations ne contenant pas x. Soit S' l'ensemble des x-résultants de paires d'inéquations dans $S \backslash T$. On définit un nouveau système $FM(S, x) := T \cup S'$. L'opération FM est appelée l'*élimination de Fourier-Motzkin.*

Question 2. Soit S un système d'inéquations linéaires et x une variable de S. Montrer que S est satisfiable si et seulement si $FM(S, x)$ l'est.

correction

Soit S' l'ensemble des x-résultants.
Une des deux implications est facile : si S admet une solution, alors cette solution satisfait toutes les inégalités dans S, et également les x-résultants. Par conséquent elle satisfait aussi le système $S' \cup T$.
Inversement, soit $y_1, \dots, y_{n-1}$ une solution de $S' \cup T$, on veut montrer qu'on peut l'étendre en une solution $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ de S. Cela revient à choisir la valeur y telle que $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ satisfera toutes les inéquations de S.
Par hypothèse, toutes les inéquations de T sont satisfaites. Notons les autres de la manière suivante : $L_i \leqslant x$ et $x \leqslant U_j$ (en supposant que les ensembles des L_i et U_j sont tous deux non vides). Leurs x-résultants sont toutes les inéquations de la forme $L_i \leqslant U_j$.

Posons maintenant : $y := \max_i L_i(y_1, \dots, y_{n-1})$. Alors toutes les inéquations $L_i \leqslant x$ sont satisfaites par $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ par définition de y. De plus pour tout $j, y \leqslant U_j(y_1, \dots, y_{n-1})$. En effet, sinon il existerait i et j tels que $L_i(y_1, \dots, y_{n-1}) > U_j(y_1, \dots, y_{n-1})$ ce qui contredirait l'hypothèse.
S'il n'existe pas d'inéquation de la forme $L_i \leqslant x$ (respectivement, de la forme $x \leqslant U_j$) alors on choisit $y := \min_j U_j(y_1, \dots, y_{n-1})$ (respectivement, le même y que précédemment).

Question 3. En déduire un algorithme pour la satisfiabilité des inéquations rationnelles (il n'est pas nécessaire d'en faire une description détaillée). Donner une borne simple sur sa complexité en temps.

correction

C'est un algorithme récursif qui détermine si le système est satisfiable, et renvoie une solution s'il l'est. Le cas terminal est celui dans lequel un x-résultant fait apparaître une inéquation de la forme $a \leqslant 0$ où $a > 0$, qui est trivialement fausse. Tant qu'aucune inéquation de cette forme n'apparaît, on sélectionne une nouvelle variable et on applique $FM(S, x)$. À la fin on aura éliminé toutes les variables.
La correction de l'algorithme est évidente grâce à la question précédente.
En partant de m inéquations, on considère toutes celles qui contiennent la variable x avec un coefficient négatif (de la forme $L \leqslant x$) et un coefficient positif (de la forme $x \leqslant U$). Si k est le nombre d'inéquations du premier type on a au plus $k(m-k) \leqslant (m/2)^2$ résultants à calculer. Le plus simple est de borner ceci par m^2, et d'en déduire que la complexité est doublement exponentielle.

Dans la suite de l'exercice, on considère des inéquations à au plus deux variables. On s'intéresse à l'algorithme suivant.

```
Entrée : S un système de m inéquations, contenant n variables au total
pour i=1 à ⌈log_2 n⌉ + 2 faire
    Soit S' := ∪_{x∈X} FM(S, x) (si des inéquations apparaissent en double, on les ↩
        simplifie)
    S ← S ∪ S'
    Si une inéquation de S est insatisfiable, renvoyer "insatisfiable"
fin pour
Renvoyer "satisfiable"
```

Nous admettrons la propriété (P) suivante :

(P) Soit S un système d'inéquations en k variables. Si tout sous-ensemble de S avec $k+1$ inéquations est satisfiable, alors S est satisfiable.

Si $V \subseteq X$, nous noterons également S_V la restriction de S aux inéquations ne contenant que des variables de V.

Question 4. Soit S un système insatisfiable minimal, c'est-à-dire tel que tout sous-système $S' \subsetneq S$ est satisfiable.
1. Montrer qu'aucune variable n'apparaît que dans une seule inéquation.
2. Montrer qu'au plus deux variables apparaissent dans trois inéquations ou plus.

correction

Solution : Soit k_i le nombre de variables de X qui apparaissent dans exactement i inéquations. Soit k le nombre de variables de S.
1. On a $k_1 = 0$. En effet, si x est une variable qui n'apparaît que dans une seule inéquation, alors on peut d'abord résoudre le système en enlevant cette inéquation (par minimalité de S, il devient satisfiable), puis en déduire une valeur admissible pour x, ce qui contredirait le fait que S est insatisfiable. Ce cas est donc impossible.

2. Par la propriété (P), S contient au plus $k+1$ contraintes (en effet, s'il contenait $k+2$ contraintes, on pourrait en déduire sa satisfiabilité). Par hypothèse, il y a deux variables par contrainte au plus. On a donc : $\sum_{i \geqslant 1} (ik_i) \leqslant 2k+2$.

De plus $\sum k_i = k$ par définition des k_i et $k_1 = 0$. On a donc :

$$\sum_{i \geqslant 1} (ik_i) = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots \geqslant 2k_2 + 3(k - k_2)$$

donc : $2k_2 + 3(k-k_2) \leqslant 2k+2 \Longrightarrow k_2 \geqslant k-2$ ce qui donne bien $(k-k_2) \leqslant 2$. Autrement dit, il y a au plus deux variables qui apparaissent dans trois inéquations ou plus.

Question 5. Soit S un système insatisfiable minimal sur un ensemble de $k > 3$ variables X, et soit $S' := \cup_{x \in X} FM(S, x)$.

1. Montrer qu'il existe un ensemble $X' \subseteq X$ de $\lceil k/2 \rceil - 1$ variables telles qu'aucune paire $\{x_1, x_2\}$ de X' n'apparaît dans une inéquation de S.
2. Montrer que $(S \cup S')_{X \setminus X'}$ est insatisfiable.

correction

1. Construisons un graphe non dirigé $G = (X, E)$ où les sommets sont les variables et il existe une arête entre x_1 et x_2 s'ils apparaissent ensemble dans une inéquation. Par le résultat de la question précédente, tous les sommets du graphe, sauf au plus deux, sont de degré inférieur ou égal à 2 . Enlevons ces deux sommets.
Il nous reste un graphe dirigé de degré 2 à $k-2$ sommets. Un tel graphe est un ensemble de chaînes disjointes (on peut l'affirmer ici sans preuve). On peut donc choisir $\lceil (k-2)/2 \rceil$ sommets dans ce graphe tels que deux sommets ne sont pas côte à côte (chaque chaîne de longueur ℓ nous donne $\lceil \ell/2 \rceil$ sommets).
On prend pour X' l'ensemble de ces $\lceil (k-2)/2 \rceil$ variables.

2. Soit $X'' := X \setminus X'$. Quand on utilise l'élimination FM sur une des variables de X' on obtient une seule nouvelle inéquation, qui ne fait pas intervenir de variable de X', et n'intervient donc pas dans de futures éliminations. Donc le système obtenu en éliminant toutes les variables de X' est contenu dans $(S \cup S')_{X''}$.
Or S est insatisfiable, donc d'après la question 2 l'élimination des variables de X' produit un nouveau système insatisfiable. Ce système est contenu dans $(S \cup S')_{X''}$, qui par conséquent est également insatisfiable.

Question 6. Soit $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor + 1$. On pose $f^0(n) = n$ et on admet que pour tout entier naturel n, $f^{\lceil \log_2 n \rceil}(n) = 2$.

1. Soit S un système insatisfiable en entrée de l'algorithme. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, à la sortie de la k-ième itération de la boucle, il existe un sous-ensemble $X_k \subseteq X$ de taille $\leqslant f^k(n)$ tel que S_{X_k} est insatisfiable.
2. En déduire que l'algorithme est correct.
3. Donner une borne simple sur sa complexité (à facteur polynomial près).

correction

1. Soit S insatisfiable en entrée de la boucle. On démontre cette propriété par récurrence sur k ; si $k = 0$ on est à l'entrée de l'algorithme et elle est donc vraie.
Soit $k > 0$ et considérons le système $S_{X_k} \subseteq S$ insatisfiable. Il existe un sous-système $T \subseteq S_{X_k}$ qui est insatisfiable et minimal (on peut le construire itérativement en enlevant des inéquations de S_{X_k}), et contient $\leqslant f^k(n)$ variables.
On calcule S' l'ensemble des résultants de S, et $S \cup S'$ contient donc $T \cup T'$ où T' est l'ensemble des résultants de T. En utilisant la question 5 , on sait qu'il existe un sous-ensemble $X_{k+1} \subseteq X_k$ contenant $\leqslant f^{k+1}(n)$ variables tel que $(T \cup T')_{X_{k+1}}$ est insatisfiable, mais aussi $\left(S_{X_k} \cup S'_{X_k}\right)_{X_{k+1}}$ et enfin $(S \cup S')_{X_{k+1}}$; en effet on n'a fait ici que (potentiellement) remettre des inéquations dans le système.

2. Les itérations de f convergent vers 2 . Si le système S initial est insatisfiable, on obtient un ensemble de deux variables (x, y) tel que $S_{(x,y)}$ est insatisfiable. Pour conclure, il suffit de remarquer que les deux dernières itérations sur $S_{(x,y)}$ vont contenir la résolution FM par x suivi de y. Par conséquent on obtiendra une contradiction immédiate.
Si le système S est satisfiable, on ne trouvera pas de contradiction et l'algorithme renverra donc le bon résultat.
3. On n'a que $\lceil \log_2 n \rceil + 2$ étapes dans l'algorithme, et à chaque étape le nombre d'inéquations grandit comme : $T_{i+1} \leqslant T_i + \dfrac{T_i(T_i-1)}{2} = \dfrac{T_i(T_i+1)}{2} \leqslant T_i^2$. Par conséquent $\log_2 T_i = 2^i \log_2 m$ et le nombre d'inéquations à la dernière étape est borné par : $2^{\log_2 m 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 2}} = \widetilde{\mathcal{O}}(m^n)$.

On s'autorise à modifier l'algorithme en ajoutant entre l'étape 4 et 5 : $S \leftarrow \texttt{Simplifie}(S)$, où Simplifie est une opération transformant S en un système équivalent avec moins d'inéquations.

Question 7. On considère maintenant le cas particulier où les coefficients des équations sont $+1, -1$ ou 0 . En utilisant un choix opportun pour Simplifie, proposer un algorithme en temps polynomial en n.

correction

On commence par démontrer par induction que toutes les nouvelles inéquations produites par l'algorithme sont aussi à coefficients dans $\{0, -1, 1\}$. En effet le x-résultant entre deux inéquations à coefficients dans $\{0, -1, 1\}$ est aussi à coefficients dans $\{0, -1, 1\}$.
Pour chaque paire de variables (x, y), il n'y a donc que 3×3 choix possibles pour les coefficients de x et y (sachant que dans le cas $(0, 0)$ on tombe sur une inéquation triviale). Cela fait donc $n(n-1)/2 \times 9$ configurations possibles de la forme $b_1 x_1 + b_2 x_2 \leqslant a$.
La procédure Simplifie va classer les inéquations en fonction de leur configuration et sélectionne le coefficient a minimal pour chacune d'entre elles : les autres inéquations ainsi enlevées sont évidemment redondantes. Concrètement, à chaque étape de la boucle, Simplifie ramène le nombre d'inéquations en-dessous de $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.
Après application de Simplifie, chaque variable x apparaît au plus dans $9n$ équations (c'est une borne très large) : on ne peut donc ajouter qu'au maximum $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ x-résultants, soit $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ nouvelles équations au total. Simplifie peut être implémentée en temps $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ à l'aide d'une table de hachage. Par conséquent l'algorithme demande $\widetilde{\mathcal{O}}\left(n^3\right)$ temps et $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ mémoire.

Chapitre 43

(ENS) Mots partiels et Théorème de Dilworth *** (ENS 24, partiellement corrigé, niveau inapproprié, à débugguer — oral - 184 lignes)

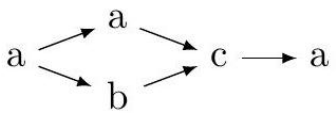
***

Graphes, Réduction, Langages,
sources : `ensmotspartiels.tex`

Mots partiels et Théorème de Dilworth

Soit Σ un ensemble fini de lettres, et Σ^* l'ensemble des mots de Σ, qui sont des séquences finies de lettres. Nous généralisons la notion de mots à des structures partiellement ordonnées.
Soit $G = (E, R)$ un graphe dirigé fini : E est un ensemble fini et R un sous ensemble de $E \times E$. Un *chemin* de G est une séquence $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de sommets tels que pour tout $0 \leqslant i < n$, $(x_i, x_{i+1}) \in R$. Le graphe G est dit *acyclique* s'il n'existe pas de chemin non réduit à un seul sommet tel que $x_n = x_0$.
Un *mot partiel* sur Σ est un triplet (E, R, μ) avec (E, R) un graphe fini acyclique et $\mu : E \to \Sigma$. La *taille* d'un mot partiel est le nombre d'éléments de E.
Soit $p = (E, R, \mu)$ un mot partiel de taille n. Un mot $u_1 \cdots u_n \in \Sigma^*$ *généralise* p s'il existe $\psi : E \to \{0, \ldots, n-1\}$, bijective , tel que pour tout $(x, y) \in R, \psi(x) < \psi(y)$ et si pour tout $e \in E$, on a $u_{\psi(e)} = \mu(e)$. Dans la suite on note `Total`(p) l'ensemble des mots qui généralisent p.

Question 1. Que vaut `Total`(p) pour p dessiné ci-dessous, où chaque sommet est résumé par son image par μ.



Comment caractériser sur le graphe l'ordre dans lequel les lettres d'un mot u généralisant p est lu ?

correction

En notant $s_0 \cdots s_3$ les sommets du chemin supérieur du graphe, et s_4 le sommet du bas. On peut poser $\psi(s_0) = 0$, $\psi(s_1) = 1$, $\psi(s_4) = 2$, $\psi(s_2) = 3$, $\psi(s_3) = 4$ (il s'agit donc d'indicer les sommets de façon injective avec des entiers dans $[\![0, n-1]\!]$ de sorte que l'indice ne puisse que croître en suivant un arc).
On a donc $u_0 = a$, $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_3 = c$ et $u_4 = a$.
Le mot u est donc $aabca$.

La seule autre possibilité étant d'intervertir $\psi(s_1)$ et $\psi(s_4)$, on a Total$(p) = \{aabca, abaca\}$.

u généralise p si et seulement si c'est un mot obtenu à partir du graphe en lisant les lettres dans un ordre topologique.

Question 2. Donnez une borne supérieure sur la taille de $\texttt{Total}(p)$ en fonction de la taille de Σ.

correction

Dans le pire des cas, le graphe est entièrement déconecté (i.e. il n'y a aucune contrainte sur la permutation choisie) et μ est injective (toutes les lettres du graphes sont différentes).
Dans ce cas, $|\operatorname{Total}(p)| = n!$.

Soit L un langage de Σ^*. Un mot partiel p sur Σ *appartient* à $\texttt{Partiel}(L)$ s'il existe $v \in \texttt{Total}(p)$ qui appartient à L.

Question 3. Montrez que si L est dans **P** [1], alors $\texttt{Partiel}(L)$ appartient à **NP** [2].

correction

On se donne comme certificat une application ψ sur les sommets du mot partiel p vérifiant les propriétés ci-dessus. Cette application définit un mot u de $\operatorname{Total}(p)$ – dont on peut vérifier l'appartenance à L en temps polynomial par hypothèse.

(Unary) 3-partition est un problème qui prend en entrée une suite finie de $3n$ entiers écrits **en unaire** [3] $x_1, \ldots, x_{3n}$ et vérifie s'il existe une partition en n triplets dont les sommes deux à deux sont égales. On admet dans la suite que ce problème est **NP**-complet.

Question 4. Montrez par une réduction depuis 3-partition qu'il existe un langage L dans **P** tel que $\operatorname{Partiel}(L)$ est **NP**-complet [4].

correction

ND M.Péchaud : l'énoncé disait ≪réduction à≫ au lieu de ≪réduction depuis≫.
TODO.

Question 5. Montrez que $\texttt{Partiel}\,(\Sigma^* a b^* a \Sigma^*)$ est vérifiable en temps polynomial.

correction

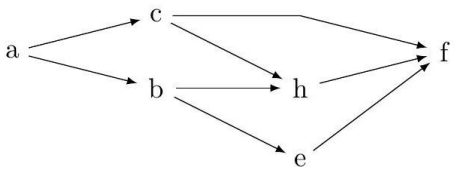
Étant donné un mot partiel p – vu comme un graphe – il s'agit de déterminer s'il existe un ordonnancement strictement croissant (au sens précédent) des sommets tels qu'un motif ab^*a y apparaisse.
Si l'on supprime les b du graphe (en re-flêchant en conséquence), c'est équivalent au fait de chercher si l'on peut obtenir un ordonnancement tel qu'un motif aa y apparaisse.
Pour ce faire, on peut considérer tous les couples de sommets (a, a) dans ce graphe, et vérifier
- s'ils sont voisins
- ou si aucun des deux n'est descendant de l'autre

ce qui s'effectue bien en temps polynomial.

Soit $p = (E, R, \mu)$ un mot partiel sur Σ. Une *décomposition en chemins* de p est un ensemble X de chemins tel que tout sommet de E appartient à exactement un chemin.

Question 6. Donnez une décomposition en chemins avec le moins de chemins possibles pour le mot partiel suivant :

1. *ND M.Péchaud* i.e. s'il existe un algorithme en temps polynomial déterminant si un mot est dans L
2. *ND M.Péchaud* i.e. s'il existe un certificat de taille polynomiale en un mot partiel p et un vérifieur en temps polynomial prenant en argument ce certificat et p et vérifiant si p est dans $\texttt{Partiel}(L)$
4. i.e. $\operatorname{Partiel}(L)$ est dans la classe **NP**, et tout problème **NP** peut se réduire en temps polynomial au fait de tester si un mot partiel appartient à $\operatorname{Partiel}(L)$.



correction

On propose (a, c, h, f) et (b, e).
Il n'est pas possible de faire mieux, car par exemple b et c ne peuvent pas appartenir à un même chemin.

Question 7. Soit L un langage régulier (reconnu par un automate déterministe). Montrez que Partiel (L) est vérifiable en temps $O(n^w)$ avec n la taille du mot partiel et w la taille de sa plus petite décomposition en chemins.

correction

Soit p un mot partiel, et u un mot de Total(p).
Pour tout chemin c de p, les lettres de c apparaissent dans l'ordre dans u.

Notons w la taille de sa plus petite décomposition en chemin.
Si $w = 1$, le graphe est réduit à un chemin. On parcourt simplement ce chemin pour obtenir l'unique mot possiblé généralisant p – et l'on vérifie grâce à l'automate que ce mot est dans L.
Si $w = 2$,

Soit $p = (E, R, \mu)$ un mot partiel sur Σ. Une anti-chaîne de p est un ensemble X tel qu'il n'existe pas de chemin entre deux éléments de X. On appelle largeur de p la taille de la plus grosse anti-chaîne de p.
On admet le théorème suivant :
Théorème 1 (Dilworth). Soit p un mot partiel. La largeur de p est égale à la taille de sa plus petite décomposition en chemins. Cette dernière est calculable en temps polynomial.

Question 8. En déduire que pour les mots partiels de largeur fixée, le problème Partiel(L) pour L un langage régulier est calculable en temps polynomial. Peut-on en déduire que le problème est calculable en temps polynomial, sans la contrainte que la largeur est fixée ?

Chapitre 44

(ENS) Terminaison de lambda ref *** (ENS 24, partiellement corrigé, niveau surréaliste — oral - 238 lignes)

***

Ocaml,
sources : `ensterminaison_lambda_ref.tex`

Terminaison de $\lambda_{\mathbf{ref}}$

Le λ-calcul, langage formel modélisant la programmation fonctionnelle, est défini par la syntaxe : $M, N ::= x \mid MN \mid \lambda x.M \mid ()$
où x est issu d'un ensemble infini de variables de termes.
Ainsi, un terme M est :
- soit une *variable* x,
- soit une *abstraction* $\lambda x.M$ (qu'il faut comprendre comme la fonction qui au paramètre x associe le terme M), on dit dans ce cas que la variable x est *liée* dans M,
- soit une *application* MN (qu'il faut comprendre comme le terme - fonction - M appliqué au terme - argument - N)
- soit l'*unité* (), un terme de base.

Ces termes correspondent respectivement aux expressions OCaml suivantes : `x` un nom, `fun x -> e` une fonction anonyme, `e1 e2` une application et `()`, l'unité.
On note $M\{N/x\}$ le terme obtenu en remplaçant toutes les occurrences (non-liées) de la variable x dans M par le terme N.
Une relation d' *α-conversion* $\equiv_\alpha$ autorise le renommage des variables liées : si $y \notin M$, alors $\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.(M\{x/y\})$.
Dans la suite, on considèrera les termes *modulo α-conversion* (on s'autorisera à renommer les variables liées dans les sous-termes), et on utilisera cette opération pour présenter des termes dans lesquels les variables liées sont distinctes deux à deux, et distinctes des variables non-liées.
Les *contextes d'évaluation* sont définis par : $\mathbf{E} ::= [] \mid M\mathbf{E} \mid \mathbf{E}M$
Si M est un terme et $\mathbf{E}$ un contexte, on note $\mathbf{E}[M]$ le terme obtenu en remplaçant [] dans $\mathbf{E}$ par M.
La sémantique (le comportement d'un terme) est donnée par une relation de réduction $\longrightarrow$ donnée par :

1. $(\lambda x \cdot M)N \longrightarrow M\{N/x\}$ (on applique la fonction qui à x associe M à N, et on récupère le corps de la fonction M dans lequel l'argument N remplace le paramètre x.)
2. si $M \longrightarrow M'$ alors $\mathbf{E}[M] \longrightarrow \mathbf{E}[M']$ (on peut réduire dans un contexte).

Comme en *OCaml*, l'application est parenthésée à gauche, ainsi $M_1M_2M_3$ désigne $(M_1M_2)M_3$ et on écrit $\lambda xy.\ M$ pour $\lambda x.(\lambda y \cdot M)$
$\longrightarrow^*$ désigne la clôture réflexive et transitive de $\longrightarrow$. Les *réduits* d'un terme M sont les éléments de l'ensemble $\{M' \mid M \longrightarrow^* M'\}$.

Question 1. Soit $\delta = \lambda x.(xx)$ et $I = \lambda x.x$. Expliciter les réduits du terme $A = (\lambda x.I)(\delta\delta)$.

correction

Corrigé de M.Péchaud. NB : ce sujet me paraît d'un niveau stratosphérique – il faut digérer 1 mois de cours de $\lambda-$calcul présenté en 2 encadrés en quelques minutes...

- Si l'on réduit l'expression extérieure, $A = (\lambda x.I)(\delta\delta) \longrightarrow I\{x/\delta\delta\} = I$ (car x est muette dans I).
  On ne peut appliquer aucune réduction à I.
- Si l'on réduit $\delta\delta$ (dans le contexte $(\lambda x.I)[]$), comme $\delta\delta \longrightarrow \delta\delta$, on obtient $A \longrightarrow A$ – on n'a pas modifié l'expression.

Les réduits de A sont donc A lui-même, et I.

On donne un système de *types simples* au λ-calcul. Les types sont donnés par :
$S, T ::= S \to T \mid \texttt{unit}$
Ainsi un type est soit le type fonctionnel $S \to T$ des fonctions de S dans T soit `unit` le type de base.
Une *hypothèse* $x : T$ associe une variable de terme à un type. Un *contexte de typage* Γ est un ensemble d'hypothèses et on note $\Gamma, x : T$ le contexte $\Gamma \cup \{x : T\}$ quand x n'est pas dans Γ. Un *jugement* de typage $\Gamma \vdash M : T$ indique que le terme M a le type T dans le contexte Γ (on dit qu'un terme est *typable* s'il existe Γ, T tel que $\Gamma \vdash M : T$).

Les règles de typage permettant de déduire un jugement sont données par :

1. $\Gamma \vdash () : \texttt{unit}$
2. $\Gamma, x : T \vdash x : T$
3. si $\Gamma, x : T_1 \vdash M : T_2$ alors $\Gamma \vdash \lambda x.M : T_1 \to T_2$
4. si $\Gamma \vdash M : T_1 \to T_2$ et $\Gamma \vdash N : T_1$, alors $\Gamma \vdash MN : T_2$

On note λ_{ST} l'ensemble des termes typables.

Question 2. Montrer que si M est typable et $M = \mathbf{E}[N]$, alors N est typable, puis expliquer pourquoi A n'est pas typable.

correction

Supposons M typable, et $M = E[N]$ – obtenu en remplaçant [] dans E par N.
Montrons par induction sur E que N est typable.
Cas de base : si $E = []$, $M = N$, donc N est typable.
Induction : • Si $E = UE'$, où E' vérifie la propriété et U est un terme, alors $M = E[N] = UE'[N]$.
M étant typable, on a $\Gamma \vdash UE'[N] : T$ pour un certain type T.
Seule la règle 4 peut expliquer cela : il existe un type T' tel que $\Gamma \vdash U : T' \to T$ et $\Gamma \vdash E'[N] : T$.
Donc $E'[N]$ est typable, et par hypothèse d'induction N également.
• De même si $E = E'U$.

$A = E[N]$, où $E = (\lambda x.I)[]$ et $N = \delta\delta$.
Si A était typable, N le serait aussi.
Par le même raisonnement appliqué à N, $\delta = \lambda x.(xx)$ est également typable.
Son type ne peut provenir que de la règle 3.
On devrait donc avoir pour un certain contexte Γ et un certain type T la relation suivante :
$\Gamma, x : T \vdash xx : T'$.
La règle 4 est la seule pouvant expliquer cela. On a donc
$\Gamma, x : T \vdash x : T'' -> T'$ et $\Gamma, x : T \vdash x : T''$.
Or x ne peut avoir qu'un seul type dans un contexte donné, donc c'est impossible.

On dispose d'un ensemble infini d'adresses $\mathcal{A}$. Une mémoire σ est une fonction qui a chaque élément d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ (appelé son support) associe un λ-terme.
On définit un λ-calcul appelé λ_{ref} contenant une valeur () de type `unit` et trois opérateurs qui permettent de manipuler une mémoire, inspirés de leurs homologues en OCaml :

1. une opération `ref` de référencement qui prend un λ-terme, le stocke en mémoire à une nouvelle adresse α et renvoie α.
2. une opération `deref` (! en OCaml) de déréférencement qui prend une adresse et renvoie le terme contenu à cette adresse en mémoire.
3. une opération `assig` (:= en OCaml) d'assignation qui prend une adresse α et un terme M, modifie la mémoire pour remplacer la valeur en α par M, et renvoie `unit`.

Question 3. Donner des règles de typage pour les termes de λ_{ref} et les mémoires.

correction

On créé un type T `mem` pour une adresse contenant un terme de type T (calquant le type α-`ref` de *OCaml*).
- $\Gamma, x : T \vdash$ `ref` $x : T$ `mem`
- $\Gamma, \alpha : T$ `mem` $\vdash$ `deref` $\alpha : T$
- $\Gamma \vdash$ `assig` $: T$ `mem` $\to T \to$ `unit`

Question 4. Donner une sémantique pour λ_{ref} explicitant comment réduire un couple composé d'un terme typable et d'une mémoire.

correction

- (`ref` $M, \sigma) \longrightarrow (\alpha, \sigma')$, où α est une adresse n'apparaissant pas dans σ, et σ' prolonge σ par $\sigma'(\alpha) = M$.
- (`deref` $\alpha, \sigma) \longrightarrow (\sigma(\alpha), \sigma)$, où α dans le support de σ.
- (`assig` α $M, \sigma) \longrightarrow ((), \sigma')$, où $\sigma' \equiv \sigma$ sauf pour $\sigma'(\alpha) = M$.

Les réductions qui consomment un opérateur `ref`, `deref` ou `assig` sont appelée *impures*, les autres *pures*.

Question 5. Définir une fonction d'élagage p qui associe à chaque terme typable de λ_{ref} un terme typable de λ_{ST} telle que si $(M, \sigma) \longrightarrow (M', \sigma)$ avec une réduction pure, alors $\mathbf{p}(M) \longrightarrow \mathbf{p}\,(M')$.

correction

L'idée est d'«oublier» toutes les actions sur la mémoire.
On définit donc $\mathbf{p}$ inductivement comme la fonction qui vaut l'identité sur les termes de λ_{ST}, et telle que :
- $\mathbf{p}$(`ref` $M, \sigma) = (\lambda y.())\mathbf{p}(M)$ (on consomme M et l'on n'en fait rien – mais M doit continuer à apparaître pour permettre une réduction pure dans M).
- $\mathbf{p}$(`deref` $\alpha, \sigma) = \mathbf{p}(\sigma(\alpha))$ (pour avoir un type correct).
- $\mathbf{p}$(`assig` α $M, \sigma) = ()$ (de type `unit`).

Un terme M est *terminant* quand il n'existe pas de suite infinie $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = M$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_n \longrightarrow M_{n+1}$. On admettra le résultat suivant :
Si M est un terme de λ_{ST}, alors M est terminant.

Question 6. Montrer que toute chaîne de réduction infinie de termes typables dans λ_{ref} contient une infinité de réductions impures. Proposer un terme de λ_{ref} typable et non-terminant.

correction

ND MP : l'énoncé original n'indiquait pas «de termes typables»

Par l'absurde, s'il y a un nombre fini de réductions impures, on considère le terme M de λ_{ref} consécutif à la dernière réduction impure. On note $M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \dots$ la suite des réductions.
Alors, par la question précédente, $\mathbf{p}(M) \longrightarrow \mathbf{p}(M') \longrightarrow \mathbf{p}(M'') \dots$ est une suite infinie de réductions λ_{ST}, ce qui est impossible.

Pour le terme demandé, il doit donc engendré une chaîne de réductions contenant une infinité de réductions impures. Une façon de penser cette question est de chercher à construire une fonction *OCaml* typable, utilisant des références, et dont l'exécution ne termine pas. On peut proposer le code suivant :

```
let rec r = ref (fun () -> !r ()) in !r ()
```

à traduire en $\lambda_{ref}\dots$

On divise la mémoire en *régions* identifiée par des entiers naturels. Les opérateurs `ref`$_n$, `deref`$_n$ et `assign`$_n$ sont maintenant indexés par la région qu'ils manipulent.

Question 7. Modifier le système de types pour qu'il associe à un terme typable son *effet* c'est à dire la région la plus haute qu'une réduction de ce terme peut manipuler (en effectuant une réduction d'un des trois opérateurs impurs).

Question 8. En contraignant les types par les régions, délimiter un sous-ensemble de λ_{ref} terminant.

Chapitre 45

(MT) Déduction Naturelle * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 200 lignes)

$*$

Déduction naturelle,
sources : `mtlog1.tex`

cf annexe pour un rappel des règles de la déduction naturelle

1. Prouver le séquent $A \wedge B \vdash B \wedge A$

2. Prouver le séquent $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Soit $\Gamma \vdash C$ un séquent prouvable à l'aide d'un arbre de preuve Π.

3. Montrer qu'il existe un arbre de preuve de $\Gamma \vdash C$ tel que cet arbre ne possède pas la succession de la règle élimination de la conjonction puis introduction de la conjonction.

4. Que peut-on dire pour les successions de règles de disjonction ?

5. Prouver le séquent $\vdash A \vee \neg A$.

correction

Correction de J.B.Bianquis

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,(\mathrm{Ax})}{A \wedge B \vdash B}\,(\wedge_e^d) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,(\mathrm{Ax})}{A \wedge B \vdash A}\,(\wedge_e^g)}{A \wedge B \vdash B \wedge A}\,\wedge_i$$

2. Posons $P = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{ax})}{A \wedge (B \vee C) \vdash B \vee C}\,\wedge_e^d \qquad \dfrac{}{A \wedge (B \vee C), B \vdash P}\,(\text{lemme}) \qquad \dfrac{}{A \wedge (B \vee C), C \vdash P}\,(\text{lemme})}{A \wedge (B \vee C) \vdash P = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,\vee_e$$

Où le lemme est le suivant (symétrique pour B et C, je donne les deux ci-dessous) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{ax})}{A \wedge (B \vee C), B \vdash A}\,\wedge_e^g \qquad \dfrac{}{A \wedge (B \vee C), B \vdash B}\,(\mathrm{ax})}{A \wedge (B \vee C), B \vdash (A \wedge B)}\,\wedge_i}{A \wedge (B \vee C), B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,\vee_i^g$$

et

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge (B \vee C), C \vdash A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{ax})}{A \wedge (B \vee C), C \vdash A}\,\wedge_e^g \qquad \dfrac{}{A \wedge (B \vee C), C \vdash C}\,(\mathrm{ax})}{A \wedge (B \vee C), C \vdash (A \wedge C)}\,\wedge_i}{A \wedge (B \vee C), C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,\vee_i^d$$

3. Si l'arbre de preuve Π contient la succession de règle donnée, alors Π contient par exemple (on raisonnerait de même avec l'élimination droite) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Pi_A}}{\Gamma' \vdash A} \quad \dfrac{\overline{\Pi_B}}{\Gamma' \vdash B}}{\Gamma' \vdash A \wedge B}\wedge_i}{\Gamma' \vdash A}\wedge_e^g$$

Dans ce cas, on peut remplacer cette portion de l'arbre par la simple preuve suivante :

$$\dfrac{\overline{\Pi_A}}{\Gamma' \vdash A}$$

4. On peut aussi dire qu'on n'aura pas une succession d'élimination et d'introduction de la conjonction (de bas en haut dans l'arbre), mais le raisonnement est un peu plus complexe :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Pi_A}}{\Gamma' \vdash A}}{\Gamma' \vdash A \vee B}\vee_i^g \quad \dfrac{\overline{\Pi'}}{\Gamma', A \vdash C} \quad \dfrac{}{\Gamma', B \vdash C}}{\Gamma' \vdash C}\vee_e$$

Et on peut remplacer cet arbre par le suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Pi'}}{\Gamma', A \vdash C}}{\Gamma' \vdash A \to C}\to_i \quad \dfrac{\overline{\Pi_A}}{\Gamma' \vdash A}}{\Gamma' \vdash C}\to_e$$

Mais cela n'a que peu d'intérêt, on retrouve une succession d'élimination et d'introduction, mais pour l'implication à la place.

5. Dérivons le séquent suivant : $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{Ax})}{A \vdash A \vee \neg A}\,(\vee_i) \quad \dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}\,(\text{Ax})}{\dfrac{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\,(\neg_i)}\,(\neg_e)$$

En utilisant exactement la même méthode, on pourrait obtenir $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A$. Cependant, en remplaçant la dernière règle par un (RAA), on peut obtenir $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\,(\text{Ax})}{\neg A \vdash A \vee \neg A}\,(\vee_i) \quad \dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}\,(\text{Ax})}{\dfrac{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \bot}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A}\,(\text{RAA})}\,(\neg_e)$$

On combine ensuite les deux résultats :

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\,\text{Lemme 1} \quad \dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A}\,\text{Lemme 2}}{\dfrac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}{\vdash A \vee \neg A}\,(\text{RAA})}\,(\neg_e)$$

Annexe 1

Rappel des règles de la déduction naturelle

Les arbres de preuves doivent être effectués à partir de l'ensemble de règles fourni ci-dessous.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \text{aff} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{RAA}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$$

Chapitre 46

(MT) Relations entre les nombres de sommets et d'arêtes de grphes * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 102 lignes)

$*$

Graphes,
sources : `mtgraph1.tex`

Exercice 1

Soit G un graphe non-orienté à $n \geqslant 1$ sommets et p arêtes.

1. Montrer que si G est connexe alors $p \geqslant n-1$.
2. Montrer que si G est acyclique alors il possède un sommet de degré au plus 1.
3. Montrer que si G est acyclique alors $p \leqslant n-1$.
4. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) G est connexe et acyclique.
(ii) G est connexe et $p = n-1$.
(iii) G est acyclique et $p = n-1$.

correction

Correction de J.B.Bianquis Toutes ces questions sont des preuves du cours de 1ère année.

1. Par récurrence sur l'ordre n du graphe.
- **Initialisation :** Pour $n = 1$, le graphe est réduit à un sommet. Il a donc bien au moins $1 - 1 = 0$ arêtes.
- **Hérédité :** Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, montrons-la vraie au rang $n+1$. On distingue deux cas :
  — S'il existe un sommet de degré 1 : nommons-le u et nommons v son unique voisin. Notons $S' = S \backslash \{u\}$ et $A' = A \backslash \{uv\}$. Le graphe G' induit par S' est connexe.
  [FAIRE UN SCHÉMA.]
  ((Preuve : Soient x et y dans G' (donc distincts de u). Par connexité de G, il existe un chemin élémentaire de x à y dans G. Ce chemin étant élémentaire, il ne peut pas passer par u : en effet, u ayant un seul voisin v, si le chemin passait par u il serait de la forme $x, ..., v, u, v, ..., y$ et ne serait pas élémentaire. Mais donc ce chemin élémentaire n'emprunte jamais une arête dont u est une extrémité, c'est à dire qu'il n'utilise que des arêtes de G'. Donc il existe un chemin de x à y dans G', donc G' est connexe.))
  Remarque : Dans un oral, on peut sans doute se contenter d'affirmer que G' est connexe à partir du dessin.

  Enfin, $|S'| = n < n+1$ donc par hypothèse de récurrence $|A'| \geqslant n-1$. Or $|A| = |A'| + 1$, donc $|A| \geqslant n = (n+1) - 1$. D'où l'hérédité dans ce premier cas.
  — Sinon il n'y a pas de sommets de degré 1. Puisque le graphe est connexe il n'y a pas de sommets de degré 0 : donc le degré minimal est 2.
  Or, on sait que dans un graphe non-orienté :

$$\sum_{s \in S} deg(s) = 2|A|$$

  Donc :

$$|A| = \frac{1}{2}\sum_{s\in S} deg(s) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{s\in S} 2 \geqslant |S|$$

On a bien au moins $n-1$ arêtes. D'où l'hérédité dans ce second cas.

- **Conclusion :** On a prouvé par récurrence sur n qu'un graphe connexe à n sommets a au moins $n-1$ arêtes.

2. On raisonne par contraposée. Montrons que si tous les sommets de G sont de degré au moins 2, alors il existe un cycle dans G.
Notons $G = (S, A)$, on suppose donc que $\forall s \in S, deg(s) \geqslant 2$. On définit une suite $(s_i)_i \in S^{\mathbb{N}}$ de sommets du graphe de la manière suivante :

- $s_0 \in S$ (existe car $n \geqslant 1$). s_1 est un voisin de s_0 (quelconque).
- $foralli \geqslant 2$, on pose s_{i+1} un voisin de s_i différent de s_{i-1} (possible car $\deg(s_i) \geqslant 2$).

Comme S est fini, il existe des sommets qui se répètent dans la suite. Soit s_j le premier sommet apparaissant une deuxième fois dans la suite, et $j' < j$ son premier indice d'apparition (faire un schéma). Alors $s_{j'}, s_{j'+1}, ..., s_j = s_{j'}$ est un cycle. Montrons en effet que ce chemin est un chemin simple. Notons que $s_{j'}, s_{j'+1}, ..., s_{j-1}$ est un chemin élémentaire, donc simple (par minimalité de j). Donc si une arête est parcourue deux fois dans ce chemin, ça ne peut être que l'arête $s_{j-1} - s_j$. Or par minimalité de j, s_{j-1} n'apparaît qu'une seule fois, donc le chemin considéré est exactement $s_{j'} - s_{j'+1} - s_{j'+2}$, ce qui contredit la définition de $s_{j'+2}$.

3. Par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ du graphe.

- **Initialisation (n=1) :** 1 sommet et 0 arêtes : ok.
- **Hérédité :** Par la question précédente, il existe $s_0 \in S$ tel que $\deg(s_0) \leqslant 1$. Le sous-graphe de G induit par $S\backslash\{s_0\}$ est acyclique d'ordre $n-1$ (un cycle dans ce sous-graphe serait un cycle dans G), donc par HR il possède au plus $n-2$ arêtes.
  Comme $\deg(s_0) \leqslant 1$, on a supprimé au plus une arête en passant au sous-graphe induit. Donc G possède au plus $n-1$ arêtes.

4. On montre les implications suivantes :

- **(i) =¿ (ii)** et **(i) =¿ (iii)** : Si G est connexe acyclique, alors par les questions précédentes, il vérifie à la fois $p \leqslant n-1$ et $p \geqslant n-1$, donc $p = n-1$. D'où (ii) et (iii).
- **(ii) =¿ (i)** : Supposons G connexe à $p = n-1$ arêtes. Supposons par l'absurde que G possède un cycle $s_0, s_1, ..., s_k = s_0$. Alors supprimer l'arête s_0s_1 ne déconnecte pas le graphe, car on peut la remplacer par $s_0 = s_k, s_{k-1}, ..., s_1$ dans un chemin.
  Donc $G' = (S, A\backslash s_0s_1)$ est un graphe connexe d'ordre n possédant $p = n-2 < n-1$ arêtes : absurde d'après les questions précédentes. Donc G est acyclique.
- **(iii) =¿ (i)** : Supposons G acyclique à $n-1$ arêtes. Notons r le nombre de composantes connexes de G, et $n_1, ..., n_r$ leurs nombres de sommets respectifs. On a $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ car les composantes connexes partitionnent les sommets du graphe.
  Chaque composante connexe est acyclique (car G est acyclique) donc chacune possède $n_i - 1$ arêtes d'après le premier point de cette preuve. Ainsi G possède $\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} n_i - r = n - r$ arêtes. Or G possède $n-1$ arêtes donc G possède exactement 1 composante connexe, i.e. G est connexe.

Chapitre 47

(MT) bdd pour livraison * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 78 lignes)

$*$

Sql,
sources : `mtsql1.tex`

Une entreprise de livraison de nourriture dispose d'une base de donnée pour représenter ses clients et les commandes passées. On présente le schéma relationnel correspondant.

Clients(id : `int`, id_addresse : `int`, nom : `text`, prenom : `text`)
Adresses(id : `int`, ville : `text`, nom_rue : `text`, numero : `int`)
Commandes(id_client : `int`, plat : `text`, prix : `int`, date : `date`)

L'entreprise souhaite ajouter une fonctionnalité pour vérifier qu'un client n'est pas allergique à un plat qu'il commande. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir enregistrer les allergènes présents dans chaque plat ainsi que les allergies de chaque client.

1. Proposer des modifications à notre schéma de relation pour pouvoir ajouter ces informations. Justifier pourquoi votre choix convient.

Dans la suite, on se base dans le modèle tel que vous l'avez modifié.

2. Écrire une requête pour trouver les noms et prénoms des clients étant allergiques à au moins un ingrédient d'une pizza.
3. Écrire une requête pour trouver les trois villes où le plus d'argent est dépensé, ainsi que cette somme totale.
4. Écrire une requête pour effectuer la moyenne d'argent dépensé en fonction des prénoms des clients.

correction

Correction de J.B.Bianquis

1. On propose de rajouter deux tables représentant respectivement les allergies des clients et les allergènes des plats :

   Allergies(id_client : `int`, aliment : `text`)
   Allergenes(plat : `text`, aliment : `text`)

   On pourrait plutôt vouloir ajouter des attributs aux tables existantes, mais il faudrait une nouvelle ligne par allergie différente de chaque client, ce qui dupliquerait les adresses, noms et prénoms.
2. On propose :

Pseudo-code
```
SELECT DISTINCT noms, prenoms FROM Clients AS C
    JOIN Allergie AS A1 ON C.id = A1.id_client
    JOIN Allergene AS A2 ON A1.aliment = A2.aliment
WHERE plat = 'pizza'
```

3. On propose :

Pseudo-code
```
SELECT ville, SUM(prix) FROM Adresse AS Ad
    JOIN Clients As Cl ON Cl.id_addresse = Ad.id
    JOIN Commandes AS C ON Cl.id = C.id_client
GROUP BY ville
ORDER BY SUM(prix) DESC LIMIT 3
```

4. On propose :

Pseudo-code

```
SELECT prenom, AVG(S) FROM
    (SELECT id_client, prenom, SUM(prix) AS S FROM Adresse AS Ad
        JOIN Clients As Cl ON Cl.id_addresse = Ad.id
        JOIN Commandes AS C ON Cl.id = C.id_client
    GROUP BY id_client)
GROUP BY prenom
```

Attention à ne pas faire directement la moyenne sur les prénoms, où vous autre un montant moyen de commande par prénom, et non un montant moyen de **somme** dépensée, par prénom.

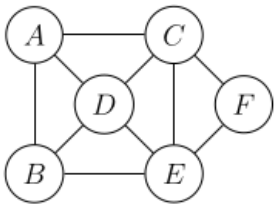
Chapitre 48

(MT) couplages * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 64 lignes)

$*$

Graphes,
sources : `mtgraph3.tex`

1. Rappeler la définition de couplage dans un graphe non orienté. Quand peut-on qualifier un couplage de maximal ? maximum ? parfait ?
2. Donner un couplage maximum dans le graphe suivant. Donner un couplage maximal qui n'est pas maximum.



3. Qu'est ce qu'un chemin augmentant alternant pour un graphe $G = (S, A)$ et un couplage $C \subset A$ sur ce graphe ?
4. Soit $G = (S, A)$ un graphe. Montrer qu'un couplage est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chemin augmentant alternant pour ce couplage dans le graphe G.

correction

Correction de J.B.Bianquis Cet exercice est constitué d'une portion du cours sur les couplages (cf cours !!!).

1. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Un couplage de G est un ensemble d'arêtes $C \subseteq A$ tel que tout sommet de G est incident à au plus une arête de C ($\forall e = (x, y), e' = (x', y') \in C, \{x, y, x, y'\}$ sont deux à deux disjoints).

   Un couplage C est dit :
   - **maximal** si il n'est pas strictement inclus dans un autre couplage ($\forall C'$ couplage, $C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$).
   - **maximum** ou **de cardinalité maximale** si sa cardinalité (son nombre d'arêtes) est maximale parmi tous les couplages de G ($\forall C'$ couplage, $|C'| \leqslant |C|$).
   - **parfait** si tout sommet de G est incident à une arête de G ($\forall s \in S, \exists e \in C, \exists y \in S, e = (x, y)$ ou encore $|C| = |S|/2$)
2. $C = \{(A, B), (C, D), (E, F)\}$ est un couplage parfait, donc maximum. Le couplage $C' = \{(A, C), (B, E)\}$ est maximal (on ne peut lui ajouter aucune arête), mais il n'est pas maximum car C contient strictement plus d'arêtes.
3. Un chemin alternant pour C dans G est un chemin élémentaire dont les arêtes sont alternativement dans C et dans $A \backslash C$. Un chemin augmentant est un chemin alternant dont les deux extrémités sont libres (i.e. ne sont incidentes à aucune arête du couplage C).
4. Il s'agit du lemme de Berge du cours. Redémontrons-le ici.

$\Rightarrow$: Par contraposée. Si C possède un chemin augmentant c, alors $C \Delta c$ (la différence symétrique) est un couplage de cardinalité $|C| + 1 > |C|$, donc $|C|$ n'est pas maximum. (cf schéma du cours de $C \Delta c$.)

$\Leftarrow$: Par contraposée. Supposons que C n'est pas maximal et soit C' un couplage tel que $|C'| > |C|$. Montrons que C possède alors un chemin augmentant. On considère $D = (S, C \Delta C')$. Chaque sommet de G est incident à au plus une arête de C et une arête de C', donc le degré maximal de D est au plus 2. Donc chaque composante connexe de D est :
— soit réduite à un sommet

— soit un chemin élémentaire dont les arêtes sont alternativement dans C et dans C'
— soit un cycle élémentaire dont les arêtes sont alternativement dans C et dans C'. Notons que cela implique que le cycle est de longueur paire et contient autant d'arêtes de C que de C'.

(proposition précédente du cours, qui se prouve en considérant un chemin élémentaire de longueur maximale dans G et en regardant s'il est de longueur 0 et s'il est "fermable".)
Chaque composante cycle (et sommet) possède autant d'arête de C que de C', or $|C'| > |C|$ donc $D = C\Delta C'$ possède au moins une arête de plus dans C' que dans C. Donc il existe au moins une composante chemin avec une arête de plus dans C' que dans C. Cette composante fournit un chemin augmentant pour C.

Chapitre 49

(MT) logique, cours * (MT 0, ex 1, corrigé — oral - 100 lignes)

$*$

Logique propositionnelle,

sources : `mtlog2.tex`

Soit $F = ((a \wedge b) \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b)$

1. F est-elle satisfiable ? $\neg F$ est-elle satisfiable ?

correction

Correction de J.B.Bianquis

F est satisfiable, par exemple une valuation $v : \begin{cases} a \mapsto V \\ b \mapsto V \end{cases}$ la satisfait (peu importe la valeur de c).

$\neg F$ est satisfiable, par exemple la valuation $v : \begin{cases} a \mapsto F \\ b \mapsto V \\ c \mapsto V \end{cases}$ évalue F à Faux, donc $\neg F$ à Vrai.

2. Mettre F en forme normale conjonctive.

correction

Il y a deux façons de faire, la table de vérité a l'avantage de donner des formes canoniques et de répondre aux deux questions suivantes rapidement une fois qu'elle est remplie, mais la résolution par distributivités me semble plus rapide au total que le remplissage d'une table, même s'il faut la faire deux fois. Donnons d'abord cette deuxième solution.
On identifie $\wedge$ à $+$ et $\vee$ à $\times$ pour obtenir en distribuant une conjonction. On calcule alors aisément :
$F = ((a+b).\neg c) + (a.\neg b) = a.\neg c + b.\neg c + a.\neg b$, d'où
$\boxed{F \equiv (a \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg b)}$

3. Mettre F en forme normale disjonctive.

correction

De même, cette fois on identifie $\vee$ à $+$ et $\wedge$ à $\times$. On distribue :
$F = ((a.b) + \neg c).(a + \neg b) = a.b.a + a.b.\neg b + \neg c.a + \neg c.\neg b$, d'où
$F \equiv (a \wedge b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge a) \vee (\neg c \wedge \neg b) \equiv \boxed{(a \wedge b) \vee (\neg c \wedge a) \vee (\neg c \wedge \neg b)}$.

$***$

Version avec table de vérité :

a	b	c	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee \neg c$	$(a \vee \neg b)$	F
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Remarque : on peut se permettre de ne pas remplir tous les colonnes et conclure directement pour F dans certains cas, pour gagner du temps.
On lit alors la table pour trouver les CNF et DNF canoniques (let "et" des non-lignes à 0, le "ou" des lignes à 1) :
(CNF :) $F \equiv (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$
(DNF :) $F \equiv (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

4. Rappeler le théorème de Cook-Levin.

correction

SAT est **NP**-complet.

Chapitre 50

(MT) Arbres Binaires de Recherche * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 159 lignes)

∗

Arbres, Complexité, Programmation dynamique,
sources : `mtarbres1.tex`

On considère un ensemble de clés $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ fini de taille m. On note $\mathcal{A}_\mathcal{K}$ l'ensemble des arbres binaires dont les noeuds sont étiquetés par des éléments *distincts* de $\mathcal{K}$. Pour $A \in \mathcal{A}_\mathcal{K}$, on notera $\kappa(A)$ l'ensemble des étiquettes des nœuds de A. Par convention, on dira que la racine de A est de profondeur 0.

1. Rappeler la définition inductive d'un *arbre binaire de recherche* (ABR).

correction

Correction de J.B.Bianquis
(Comme un air de déjà-vu... CCINP a posé la même question en début d'un de ses exercices de Type A...).
Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire dont les clés sont à valeurs dans un ensemble totalement ordonné. De plus, pour chaque noeud de cet arbre, son étiquette x est strictement supérieure aux étiquettes dans son fils gauche et strictement inférieure aux étiquettes dans son fils droit (des variantes autorisent une inégalité large d'un des deux côtés).

2. Rappeler la complexité dans le pire des cas de la recherche dans un ABR ayant n nœuds.

correction

La complexité de la recherche dans un ABR de hauteur h est $O(h)$, dans le pire cas cette hauteur vaut n ou $\Theta(n)$ (par exemple si on a un graphe ligne ou un peigne). Donc la complexité pire cas est $O(n)$.

Soit $A \in \mathcal{A}_\mathcal{K}$ tel que $\kappa(A) = \mathcal{K}$. Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité quelconque, sur les clés de $\mathcal{K}$. On définit H_A la variable aléatoire qui, à une clé de $\mathcal{K}$, associe sa profondeur dans A. Ainsi $H_A(k)$ est la profondeur de k pour une clé k.

3. Soit un ABR fixé $A \in \mathcal{A}_\mathcal{K}$. Rappeler l'expression de la complexité en moyenne de la recherche d'une clé dans A.

correction

Pour une clé k fixée, la recherche de k dans A se fait en temps $O(H_A(k))$. La clé k a une probabilité d'apparition donnée par $\mathbb{P}$. Donc la complexité en moyenne (espérance) sur les entrées de la recherche d'une clé dans A est :

$$O(\mathbb{E}(H_A))$$

4. On suppose ici que $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur les clés de $\mathcal{K}$. Quelles sont les particularités des ABR $A \in \mathcal{A}_\mathcal{K}$ pour lesquels $\mathbb{E}(H_A)$ est minimale. Montrer que $\mathbb{E}(H_A) = \mathrm{O}(\log(m))$.

correction

L'espérance est alors la moyenne (classique) des hauteurs des noeuds de l'arbre. Les ABR pour lesquels $\mathbb{E}(H_A)$ est minimale sont les arbres les plus équilibrés possibles (ils minimisent la somme des hauteurs de leurs noeuds, car on remplit d'abord entièrement les étages de plus petite profondeur), c'est à dire les arbres complets (à remplissage du dernier étage près, qui est rempli comme on veut).
Pour montrer que $\mathbb{E}(H_A) = O(\log(m))$, il suffit de montrer que la profondeur maximale d'un noeud de l'arbre (i.e.

sa hauteur) est un $O(\log(m))$, car l'espérance est plus petite que la valeur maximale avec une probabilité uniforme (c'est la moyenne).
On a montré dans le cours de 1ère année que pour un arbre complet à m noeuds, on a $h = \lfloor \log m \rfloor$. Redémontrons ce résultat. On montre d'abord que $2^h \leqslant m < 2^{h+1}$.
Preuve : Notons m_k le nombre de noeuds à la profondeur k dans l'arbre. Comme l'arbre est complet, on a $m_k = 2^k$ pour tout $k \in [\![0, h[\![$ et on a $1 \leqslant m_h \leqslant 2^h$.
Donc comme $m = \sum_{k=0}^{h} m_k$, on a :

$$1 + \sum_{k=0}^{h-1} 2^k \leqslant m \leqslant \sum_{k=0}^{h} 2^k$$

D'où $2^h \leqslant m \leqslant 2^{h+1} - 1$. On conclut :
$h \leqslant \log m < h + 1$, c'est à dire par définition de la partie entière $\boxed{h = \lfloor \log m \rfloor = O(\log m)}$.

On dit que $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ est optimal pour $\mathcal{K}$ et $\mathbb{P}$ si et seulement si $\kappa(A) = \mathcal{K}$ et il minimise $\mathbb{E}(H_A)$.

On cherche un algorithme calculant un ABR optimal étant donné un ensemble de clés fini et une loi de probabilité sur ces clés.

5. De quel type de problème algorithmique s'agit-il ?

correction

Il s'agit d'un problème d'optimisation. *Je ne suis pas sure de ce que la question attendait de plus spécifique ici ?*

6. Pour cette question, on suppose $\mathcal{K} = \{1, 2, 3\}, \mathbb{P}(1) = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \frac{1}{6}$. Dessiner un ABR optimal pour $\mathcal{K}$ et $\mathbb{P}$

correction

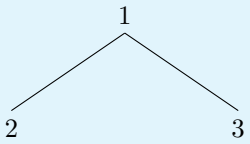


FIGURE 50.1 – Arbre pour les probabilités $\mathbb{P}(1) = 2/3, \mathbb{P}(2) = 1/6, \mathbb{P}(3) = 1/6$.

7. Soit $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ un ABR optimal non vide. A possède donc un sous-arbre gauche A_g. On se place dans le cas où A_g est non vide. On note $S_g = \sum_{k \in \kappa(A_g)} \mathbb{P}(k)$ et $\mathbb{P}_g = \frac{1}{S_g}\mathbb{P}$. Montrer que A_g est optimal pour $\kappa(A_g)$ et $\mathbb{P}_g$. Montrer le résultat analogue pour le sous-arbre droit.

correction

L'idée est toute simple : si ce n'était pas le cas, il existerait un meilleur arbre A'_g pour les noeuds à gauche, et il suffirait de remplacer A_g par A'_g dans A pour obtenir un arbre strictement meilleur que A, ce qui contredirait l'optimalité de A. Rédigeons cela rigoureusement.
On sait que A est optimal, i.e. qu'il minimise $\mathbb{E}(H_A)$. Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_A) &= \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbb{P}(k) H_A(k) \\ &= \sum_{k \in \kappa(A_g)} \mathbb{P}(k) H_A(k) + \sum_{k \in \mathcal{K} \setminus \kappa(A_g)} \mathbb{P}(k) H_A(k)\end{aligned}$$

Or $\sum_{k \in \kappa(A_g)} \mathbb{P}(k) H_A(k) = \sum_{k \in \kappa(A_g)} S_g \mathbb{P}_g(k)(H_{A_g}(k) + 1) = S_g \sum_{k \in \kappa(A_g)} \mathbb{P}_g(k) H_{A_g}(k) + \sum_{k \in \kappa(A_g)} S_g \mathbb{P}_g(k)$.

Résumons : $\boxed{\mathbb{E}(H_A) = \boxed{S_g \sum_{k \in \kappa(A_g)} \mathbb{P}_g(k) H_{A_g}(k)} + \sum_{k \in \kappa(A_g)} S_g \mathbb{P}_g(k) + \sum_{k \in \mathcal{K} \setminus \kappa(A_g)} \mathbb{P}(k) H_A(k)}$

Supposons maintenant par l'absurde que A_g n'est pas optimal pour $\kappa(A_g)$ et $\mathbb{P}_g$. Alors il ne minimise pas $\mathbb{E}(H_{A_g})$, donc il existe un arbre A'_g de même noeuds ($\kappa(A_g) = \kappa(A'_g)$) tel que $\mathbb{E}(H_{A'_g}) < \mathbb{E}(H_{A_g})$ (espérance

pour $\mathbb{P}_g$), i.e. :

$$\sum_{k\in\kappa(A_g)} \mathbb{P}_g(k)H_{A'_g}(k) < \sum_{k\in\kappa(A_g)} \mathbb{P}_g(k)H_{A_g}(k)$$

En remplaçant A_g par A'_g dans A, on a les mêmes ensembles de clés et on obtient donc la nouvelle espérance consistant à échanger ces deux termes dans l'expression précédente (tous les autres termes restant égaux). Cette espérance est strictement plus faible, ce qui contredit l'optimalité de A, absurde.
De même pour le sous-arbre droit.

8. Proposer un algorithme de programmation dynamique pour trouver un ABR optimal.

correction

On remarque que dans un ABR, une fois qu'on a choisi une racine $r \in \mathcal{K}$, cela fixe les clés des sous-arbres gauche et droit. Notons $=\{k_1, \cdots, k_m\}$ les clés énumérées dans l'ordre croissant. Si k_i est la racine de l'arbre, alors le sous-arbre gauche contient les clés $k_1, \cdots, k_{i-1}$ et le sous-arbre droit contient les clés $k_{i+1}, \cdots, k_m$. Notons alors $E_{i,j}$ la meilleure espérance qu'on puisse obtenir pour un ABR optimal sur les clés $k_i, \cdots, k_j$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{i,j} = \dfrac{1}{S_{i,j}}\mathbb{P}$, avec $S_{i,j} = \displaystyle\sum_{l=i}^{j} \mathbb{P}(k_l)$. On peut calculer les $E_{i,j}$ via les formules de récurrence :

$$E_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geqslant j \\ \min\limits_{r\in[\![i,j]\!]} \left(S_{i,r-1}(1+E_{i,r-1}) + S_{r+1,j}(1+E_{r+1,j})\right) & \text{sinon}(i<j) \end{cases}$$

On calcule alors $E_{1,m}$, le résultat recherché, par programmation dynamique, par exemple de manière récursive en mémoïsant les $E_{i,j}$ calculés dans un tableau de taille $m \times m$ ou par une table de hachage, par exemple.

9. Quel est sa complexité ?

correction

On calcule $O(n^2)$ valeurs $E_{i,j}$ au plus, toutes celles pour $i < j$, et chacune d'entre elle peut se calculer en temps $O(n)$ en utilisant les autres valeurs. En effet, on peut commencer par pré-calculer toutes les sommes partielles $S_{i,r-1}$ et $S_{r+1,j}$ en temps $O(n)$ (par simples passes dans deux tableaux pour les stocker). Puis, on calcule le min sur r en $O(n)$.
On obtient donc une complexité totale en $\boxed{O(n^3)}$.

Chapitre 51

(MT) entrelacements de mots * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 109 lignes)

$*$

Langages, Automates, Programmation dynamique,
sources : `mtlang.tex`

Soit Σ un alphabet.
Pour deux mots u, v dans Σ^*, on appelle entrelacement de u et v, un mot w qui utilise exactement les lettres de u et de v dans leur ordre dans chaque mot.
Par exemple *babaa* est un entrelacement de *bb* et *aaa* ou encore *abcabc* est un entrelacement de *aba* et *cbc*. Mais *bacb* n'est pas un entrelacement de *ab* et *cb* car l'ordre n'est pas respecté.
On peut voir le lien avec les entrelacements des tâches de plusieurs fils d'exécution.

On note $\mathcal{E}(u, v)$ l'ensemble des entrelacements de u et v pour deux mots u, v.

1. Donner les entrelacements de ab et cb.
2. Soit u, v deux mots.
   (a) Majorer grossièrement le cardinal de $\mathcal{E}(u, v)$.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}(u, v)$ est un langage régulier.
3. Soit L_1, L_2 deux langages réguliers. Montrer que $\mathcal{E}(L_1, L_2) = \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} \mathcal{E}(u, v)$ est un langage régulier.
4. Soit u, v, w trois mots dans Σ^*, proposer un algorithme de programmation dynamique permettant de savoir si $w \in \mathcal{E}(u, v)$. Préciser la complexité.

correction

Correction de J.B.Bianquis

1. $\mathcal{E}(u, v) = \{abcb, acbb, cbab, cabb\}$.
2. (a) On aura le plus grand nombre de mots possible dans le cas où les lettres sont deux à deux distinctes (il n'y a aucun doublon). Dans ce cas, toutes les combinaisons sont différentes. On compte le nombre de façon d'insérer les lettres du mot v dans le mot u.
   Cela revient à choisir les $|v|$ positions des lettres de v dans le mot mélange, les autres positions étant celles de u. Une fois ce choix effectué, on doit mettre les lettres de u et de v dans l'ordre et on n'a plus de choix à faire. Il y a donc $\binom{|u|+|v|}{|v|}$ éléments dans $u \star v = \mathcal{E}(u, v)$.

   $$\boxed{\mathcal{E}(u, v) \leqslant \binom{|u|+|v|}{|v|}}$$

   (b) On s'inspire du produit de deux automates. Sauf qu'au lieu d'avancer dans les deux automates en parallèle en suivant une transition (en lisant une lettre), on ne va avancer que dans un automate à la fois (deux transitions possibles, de manière non déterministe). Formalisons cette idée :

   (2.3) Soient $A = (\Sigma, Q, q_I, F, \delta)$ et $A = (\Sigma', Q', q'_I, F', \delta')$ deux automates finis déterministes (AFD) acceptant respectivement les langages L et L'. On construit l'automate (non déterministe) sur $\Sigma \cup \Sigma'$ dont l'ensemble d'états est $Q \times Q'$, les ensembles d'états initiaux et finaux sont (q_I, q'_I) et $F \times F'$ et dont l'ensemble des transitions est :

   $$\{(p, p') \xrightarrow{a} (q, p') \mid \delta(p, a) = q\} \bigcup \{(p, p') \xrightarrow{a} (q, p') \mid \delta'(p', a) = q'\}.$$

   On vérifie sans difficulté que cet automate accepte $L \star L' = (L, L')$. Ceci répond à la question pour $L = \{u\}$ et $L' = \{v\}$.

***

(2.2 2.) Pour une preuve plus simple, utilisant directement les mots (u, v), on peut donner l'automate ci-dessus directement. Notons $u = u_1...u_n$ et $v = v_1...v_m$. On construit l'automate contenant $(n+1)\times(m+1)$ états notés $(i,j)_{i,j\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]}$ où l'état (i,j) représente le fait qu'on a lu les i premières lettres du mot u et les j premières lettres du mot v.
L'état initial est alors $(0,0)$, l'état final (unique) est (n,m) et on a les transitions suivantes pour tout i,j :
$\begin{cases}(i,j) \overset{u_{i+1}}{\to} (i+1,j) & \text{si } \ i<n \\ (i,j) \overset{v_{j+1}}{\to} (i,j+1) & \text{si } \ j<m\end{cases}$

3. C'est la première preuve donnée dans la réponse précédente (la plus générale des deux).

4. Posons $w = w_1w_2...w_{n+m}$ en gardant les notations précédentes. Si la longueur de w n'est pas égale à $n+m$, on peut directement conclure que $w \notin \mathcal{E}(u,v)$. On note $e_{i,j} = \begin{cases}1 & \text{si } \ w_1...w_i \in \mathcal{E}(u_1...u_j, v_1...v_{i-j}) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
On cherche à renvoyer $e_{n+m,n}$, et on peut calculer récursivement les $e_{i,j}$ à l'aide des formules suivantes (notons qu'on a toujours $i,j \geqslant 0$ et $j-i \geqslant 0$) :

$$e_{i,j} = \begin{cases}1 & \text{si } \ i=j=0 \\ \mathbb{1}_{(w_i=v_{i-j} \text{ et } e_{i-1,j}=1)} & \text{sinon si j = 0 (plus de lettre dans } u) \\ \mathbb{1}_{(w_i=u_j \text{ et } e_{i-1,j-1}=1)} & \text{sinon si j = i (plus de lettre dans } v) \\ \mathbb{1}_{(w_i=u_j \text{ et } e_{i-1,j-1}=1) \text{ ou } (w_i=v_{i-j} \text{ et } e_{i-1,j}=1)} & \text{sinon.}\end{cases}$$

On calcule $e_{n+m,n}$ par programmation dynamique, par exemple en version récursive mémoïsée dans un tableau de taille $(n+1)\times(n+m+1)$ en temps $O(n.(n+m))$ car chaque case se calcule en temps constant (en fonction d'au plus deux autres cases, et moins quand les lettres sont distinctes). De manière itérative, on peut remplir le tableau de haut en bas et de gauche à droite (pour (i,j) croissant lexicographiquement), puisque la case (i,j) dépend au plus de la case d'au dessus et de la case de gauche.

Chapitre 52

(MT) graphes * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 121 lignes)

$*$

Graphes,
sources : `mtgraph2.tex`

Dans cet exercice, on ne considère que des graphes orientés. Soit $G = (S, A)$ un graphe, on appelle clôture transitive d'un graphe, qu'on note $G^* = (S, A^*)$, le graphe ayant les mêmes sommets que S et tel que (x, y) soit une arête de G^* si et seulement si il existe un chemin de x à y dans G. On note $|S| = n$.

1. Justifier que la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si (x, y) appartient à A^* est transitive.

2. On suppose que A est donné sous la forme d'une matrice d'adjacence. Donner un algorithme pour calculer A^* en $O\left(n^3\right)$ opérations.

Une réduction transitive d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-graphe $G_R = (S, A_R)$ avec un nombre minimum d'arêtes tel que $G^* = G_R^*$.

3. Montrer que dans le cas général, une réduction transitive n'est pas unique.

Dans toute la suite, on ne considérera plus que des graphes acyclique.

Considérons pour tout x, y dans S $A_{x,y}$ définie par :

$$A_{x,y} = \{e \in A \mid e \text{ appartient à un chemin de longueur maximal entre } x \text{ et } y\}$$

De plus on considère

$$A' = \bigcup_{x,y \in S} A_{x,y}$$

4. Montrer l'égalité suivante :

$$A' = \{(x, y) \in A \mid \text{ la longueur du plus long chemin entre } x \text{ et } y \text{ est } 1\}$$

5. En déduire que $G' = (S, A')$ est l'unique réduction transitive de G.

6. Donner un algorithme pour calculer l'unique réduction transitive d'un graphe acyclique.

correction

Correction de J.B.Bianquis

1. Soient $x, y, z \in S$ tels que $S\mathcal{R}y$ et $y‡$. Alors par définition (comme $(x, y) \in A^*$), il existe un chemin de x à y dans G. Notons le $x = s_0, ..., s_k = y$. De même, il existe un chemin de y à z dans G. Notons le $y = s'_0, ..., s'_l = z$.
Donc il existe un chemin de x à z dans G, obtenu en concaténant ces deux chemins : $x = s_0, ..., s_k, s'_1, ..., s'_l = z$ (si $s'_0 = s'_l = z$, on s'arrête à $s_k = y = s'_0 = z$).

2. On peut simplement adapter l'algorithme de Floyd-Warshall. Au lieu de chercher des distances minimales, on cherche simplement à vérifier l'accessibilité. La matrice k représente par un coef 1 les paires de sommets accessibles par un chemin utilisant les sommets intermédiaires 1 à k (et 0 sinon). Donc on calcule les matrices successives (M_k) définies par :

$$\begin{cases} M_0 = A \text{ matrice d'adjacence} \\ M_{k+1} \text{ est définie par ses coefficients } m_{i,j}^{k+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } m_{i,j} = 1 \text{ ou } m_{i,k} = m_{k,j} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Chaque matrice M_i se calcule en temps $O(n^2)$ (temps constant pour chaque coefficient), et on cherche à renvoyer la matrice $M_n = A^*$ (sous forme de matrice d'adjacence). Le temps total est donc en $O(n^3)$ comme demandé.

Remarque : on peut aussi lancer un parcours depuis chaque sommet, chaque parcours est en $O(n^2)$ par matrice d'adjacence et on en fait n, on met à jour les voisins de s au fur et à mesure : sommet visités lors du parcours depuis s. Mais le Floyd-Warshall me semble plus simple à coder.

3. Il suffit de donner un exemple. Prenons par exemple le graphe constitué de 3 sommets x_1, x_2, x_3 et possédant toutes les arêtes possibles (dans les deux sens possibles). On peut prendre comme réduction transitive les cycles $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$ ou $x_1 \to x_3 \to x_2 \to x_1$ qui contiennent chacune trois arêtes différentes de A. Ce nombre d'arêtes est bien minimal car le graphe doit rester fortement connexe, sinon certains sommets ne seront plus accessibles et on n'aura plus G^* le graphe contenant toutes les arêtes.

4. Raisonnons par double inclusion :

$\subseteq$: Soit $e = (x, y) \in A'$, alors il existe $z, t \in S$ tels que $e \in A_{z,t}$. Donc $e \in A$ et e appartient à un chemin de longueur maximale entre z et t, notons c un tel chemin. Montrons alors que la longueur du plus long chemin entre x et y est 1. En effet, si ce n'était pas le cas, comme on sait qu'il existe un chemin de longueur 1 (donné par e), cela signifie que la longueur d'un plus long chemin entre x et y est > 1 (notons c' un tel chemin). Mais alors en remplaçant e par ce chemin c' dans c, on obtient un chemin strictement plus long entre z et t, ce qui contredit la maximalité du chemin c.

$\supseteq$: Réciproquement, soit $e = (x, y) \in A$ tel que le chemin de longueur maximal entre x et y est e (de longueur 1). Alors on a $e \in A_{x,y}$ donc $e \in A$'.

5. Soit $G_R = (S, A_R)$ une réduction transitive (quelconque) de G. Montrons que $G_R = G'$, i.e. que $A_R = A'$. Par double inclusion à nouveau :

$A_R \subseteq A'$: Soit $(x, y) \in A$ une arête de G_R (sous-graphe de G). Alors il existe un chemin de longueur 1 entre x et y, donné par (x, y). S'il existait un chemin de longueur > 1 entre x et y, alors on pourrait enlever l'arête (x, y) dans A_R et obtenir une nouvelle réduction transitive (on ne casse aucune accessibilité, on peut remplacer cette arête par l'autre chemin), ce qui contredit la minimalité de A_R. En effet, cet autre chemin ne contient pas l'arête (x, y), sinon on aurait un cycle contenant x ou y. Donc par la question précédente, $(x, y) \in A'$.

$A' \subseteq A_R$: Soit $(x, y) \in A'$. Alors le seul chemin entre x et y est celui passant par (x, y), sinon on obtient un chemin de longueur au moins 2 entre x et y. Or il existe un chemin entre x et y dans G et $G^* = G_R^*$ donc il existe un chemin entre x et y dans G_R. Donc G_R contient l'arête $(x, y) \in A_R$.

6. On donne un algorithme pour calculer G'.

On peut par exemple de manière naïve, pour chaque arête (x, y) on l'enlève et on teste l'accessibilité de y depuis x, ceci se fait en temps $O(n^4)$ (on parcourt les arêtes en temps $O(n^2)$ et chacune d'entre elle nécessite un parcours en temps $O(n^2)$ via matrice d'adjacence).

On peut proposer un meilleur algorithme en $O(n^3)$ grâce aux résultats précédents de l'exercice. On calcule A^* la matrice dont le coefficient (i, j) vaut 1 si j est accessible depuis i, en temps $O(n^3)$. Ensuite, la multiplication de matrice $M = A.A^*$, calculée en temps $O(n^3)$, vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} m_{i,j} > 0 \text{ s'il existe un chemin entre i et j de longueur au moins 2} \\ 0 \text{ sinon (il n'existe qu'une arête ou aucun chemin entre i et j)} \end{cases}$$

En effet, $m_{i,j} > 0$ si et seulement si il existe k tel que $A_{i,k} = 1$ et $A^*_{k,j} = 1$, i.e. il existe une arête de i à k et un chemin de k à j dans G, c'est à dire qu'il existe un chemin passant par un sommet tiers k, donc de longueur au moins 2 entre i et j.

On calcule alors A' en vérifiant, pour chaque paire (i, j) de sommets, s'il existe une arête entre i et j ($A_{i,j} = 1$) et il n'existe pas de chemin entre i et j de longueur au moins 2 ($M_{i,j} = 0$).

Chapitre 53

(MT) montée et descente d'un bus * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 104 lignes)

$*$

Concurrence,
sources : `mtprocess.tex`

On s'intéresse à un bus touristique pouvant contenir C passagers.
On suppose que l'on a $n > C$ passagers qui attendent leur tour, puis se remettent en attente à l'arrêt du bus dès qu'ils ont fini pour le revoir.
Le bus ne démarre que lorsqu'il est plein.
Pour formaliser ce problème, on utilise des fonctions fictives :

- `board` et `unboard` permettent au passager de monter et de descendre ;
- le bus doit appeler les fonctions `load` lorsqu'il se remplit, `run` lorsqu'il démarre son tour et `unload` lorsqu'il se vide.

Attention, les passagers ne peuvent pas descendre avant que le bus ait ouvert ses portes pour une fin de tour avec `unload` et ne peuvent pas monter avant que le bus ait ouvert ses portes pour un nouveau tour avec `load`.

1. Écrire les fonctions en pseudo-code correspondant au bus et aux passagers **sans** prendre en compte les problèmes de synchronisation dans un premier temps.
2. Proposer une solution en pseudo-code utilisant deux compteurs protégés par des mutexs et quatre sémaphores.
3. Votre solution peut-elle être utilisée dans le cas où l'on a plusieurs bus ? Justifier.
4. Proposer une nouvelle solution pour le pseudo-code du bus dans le cas où il y a m bus numérotés en respectant les règles suivantes :
   - un seul bus peut ouvrir ses portes aux passagers à la fois ;
   - plusieurs bus peuvent faire un tour en même temps ;
   - les bus ne peuvent pas se doubler donc ils se chargent et se déchargent toujours dans le même ordre
   - un bus doit avoir fini de décharger avant qu'un autre bus vienne décharger.

   La solution doit utiliser deux tableaux de sémaphores en plus des sémaphores utilisés dans la solution précédente, permettant de gérer la coordination entre les bus.

correction

Correction de J.B.Bianquis

1. Je ne suis pas sure de comprendre ce que les passagers sont censés faire sans synchronisation. J'imagine que c'est le bus qui appellera les fonctions des passagers ? En tout cas, si on ne fait aucun effort de synchronisation, on propose le code suivant :

Pseudo-code

```
1  PASSAGER() :
2      Tantque true Faire :
3          load()
4          run()
5          unload()
6
7  BUS() :
8      Tantque true Faire :
9          board()
10         unboard()
```

2. On propose une solution avec 4 sémaphores et un compteur. Il n'est pas nécessaire de protéger le compteur par un mutex, car un seul passager peut acquérir un sémaphore loading ou unloading à la fois.

Pseudo-code
```
loading = semaphore(0)
loaded = semaphore(0)
unloading = semaphore(0)
unloaded = semaphore(0)
cnt = 0
```

On obtient alors pour le bus :

Pseudo-code
```
LOAD() :
    signal(loading)
    wait(loaded)

UNLOAD() :
    signal(unloading)
    wait(unloaded)
```

Et pour un passager :

Pseudo-code
```
BOARD() :
    wait(loading)
    cnt = cnt + 1
    Si cnt == C Alors :
        signal(loaded)
    Sinon :
        signal(loading)

UNBOARD() :
    wait(unloading)
    cnt = cnt - 1
    Si cnt == 0 Alors :
        signal(unloaded)
    Sinon :
        signal(unloading)
```

3. On ne peut pas directement utiliser cette solution pour plusieurs bus, car on n'aurait aucune maîtrise du bus dans lequel un passager monte, plusieurs bus pourraient charger et décharger en même temps.
4. **Remarque :** Sans la contrainte $m \times C \leqslant n$, il peut y avoir interblocage. En effet, il y a moins de passagers que de places dans les bus. Ainsi, une fois tous les passagers chargés, le dernier bus bloque l'arrêt de bus parce qu'il n'est pas plein, et aucun autre ne peut décharger tant qu'il n'a pas terminé.

   L'idée est que chaque bus doit attendre que le précédent ait terminé une action avant de pouvoir la faire à son tour. On utilise des tableaux de sémaphores au lieu des sémaphores précédents (sauf loading, pour qu'un passager puisse être au courant qu'un bus charge, quel que soit son numéro).
   Par ailleurs, chaque passager dispose d'un numéro de bus, pour savoir dans quel bus il est monté. En effet, un passager peut monter dans n'importe quel bus, mais il ne peut descendre que du bus dans lequel il est monté.
   Enfin, on garde en mémoire un numéro global de bus permettant de savoir quel est le bus courant autorisé à l'arrêt de bus, ainsi qu'un tableau de sémaphores permettant de gérer l'accès des bus à l'arrêt.

Pseudo-code
```
loading = semaphore(0)
loaded[m] = [semaphore(0), ...]
unloading[m] = [semaphore(0), ...]
unloaded[m] = [semaphore(0), ...]
stop[m] = [semaphore(0), ...]
signal(stop[0])
cnt = 0
current_bus = 0

BUS(i):
    wait(stop[i])
    Tantque true Faire :
        load(i)
        current_bus = (i + 1) modulo m
        signal(stop[current_bus])
        run()
        wait(stop[i])
        unload(i)

LOAD(i):
    signal(loading)
    wait(loaded[i])

UNLOAD(i):
    signal(unloading[i])
    wait(unloaded[i])
```

Pour un passager :

Pseudo-code

```
PASSENGER() :
    Tantque true Faire :
        b = board()
        unboard(b)

BOARD() :
    wait(loading)
    b = current_bus
    cnt = cnt + 1
    Si cnt modulo C == 0 Alors :
        signal(loaded[b])
    Sinon :
        signal(loading)
    Renvoyer(b)

UNBOARD(b) :
    wait(unloading[b])
    cnt = cnt - 1
    Si cnt modulo C == 0 Alors :
        signal(unloaded[b])
    Sinon :
        signal(unloading[b])
```

L'utilisation du modulo facilite l'écriture, car les chargements et déchargements se font par vagues de C passagers de toute façon.

Chapitre 54

(MT) subset-sum * (MT 0, ex 2, corrigé — oral - 143 lignes)

$*$

Complexité, Algorithmes d'approximation, Algorithmes gloutons,
sources : `mtsubsum.tex`

On considère le problème suivant :

SUBSET-SUM :
Entrée : Un tableau $T = [t_1, \dots, t_n]$ de n entiers positifs et un entier c.
Sortie : La valeur maximum de $\sum_{i \in I} t_i$ où $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ et $\sum_{i \in I} t_i \leqslant c$.

1. Décrire un algorithme naïf qui résout ce problème et préciser sa complexité.

correction

Correction de J.B.Bianquis
Pour un algorithme complètement naïf, on propose :

Pseudo-code

```
SUBSET-SUM(T, c) :
    maxi ← 0 //ensemble vide
    Pour chaque sous-ensemble I ⊆ {1,...,n} Faire :
        Si Σ_{i∈I} t_i < maxi alors :
            maxi ← Σ_{i∈I} t_i
    Renvoyer maxi
```

où on peut implémenter le parcours sur les sous-ensemble par un compteur binaire, par exemple.

On effectue 2^n itérations de la boucle Pour, et pour chaque itération on calcule une somme de n élément en temps $O(n)$. La mise à jour de l'ensemble I peut se faire en temps constant amorti par un compteur binaire (et ne dépassera pas $O(n)$). On obtient donc une complexité temporelle totale en $O(n.2^n)$.

2. On note $s_{i,j}$ la plus grande somme inférieure à j que l'on peut obtenir avec des éléments $t_1, \dots, t_i$.
Donner une équation de récurrence pour $s_{i,j}$ et en déduire un algorithme pour SUBSET-SUM. Comparer sa complexité avec l'algorithme précédent.

correction

On suppose qu'on a bien $i, j \geqslant 0$. On a :

$$s_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si i} = 0 \text{ (et } j \geqslant 0) \\ \max(s_{i-1,j-t_i} + t_i, s_{i-1,j}) & \text{si } t_i \leqslant j \\ s_{i-1,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

On cherche alors à calculer $s_{n,c}$.
Si on se contente d'un algorithme récursif naïf, on a toujours une complexité exponentielle, en $O(2^n)$, même si on gagne un facteur n. Cependant, on peut mémoïser les résultats (programmation dynamique) pour améliorer ce coût.

Avec l'approche ascendante, par exemple, on remplit un tableau de dimensions $n \times c$, et chaque case se calcule en temps constant $O(1)$, donc on obtient une complexité $O(nc)$.
Remarque : SUBSET-SUM est NP-complet, et cette complexité ne vient pas contredire ce résultat. En effet, la taille de l'entier c (qui fait partie des entrées) est $\log(c)$, la complexité ci-dessus est donc toujours une complexité exponentielle.

On considère l'algorithme glouton suivant :

```
Trier les éléments de T par ordre décroissant.
S ← 0
Pour i de 1 à n :
    Si S + t_i ≤ c :
        S ← S + t_i
Renvoyer S
```

3. Donner la complexité de cet algorithme.

correction

Trier les éléments se fait en temps $O(n \log n)$ par un tri par comparaison (par exemple, tri par tas).
Le reste est en $O(n)$, on a n itérations qui se font chacune en temps constant. La complexité totale de cet algorithme est donc $O(n)$.

4. Montrer que l'algorithme glouton donne une $\frac{1}{2}$-approximation de la solution optimale.

correction

On suppose que tous les éléments de T sont plus petits que c, sinon on les retire (ils ne participent ni à la somme du glouton, ni à l'optimal). On suppose de plus qu'il reste au moins deux éléments dans T sinon l'optimal et glouton coïncident, soit sur l'ensemble vide, soit sur l'unique élément restant.

Soit $T_{opt} \subset T$ réalisant la somme optimale $S_{opt} = \sum_{t \in T_{opt}} t \leqslant c$. Montrons que l'algorithme glouton renvoie une somme $S \geqslant \frac{1}{2} S_{opt}$.

- Si $\sum_{t \ni T} t \leqslant c$ alors l'algorithme glouton ajoute successivement tous les éléments (aucun ne fait dépasser), et on renvoie l'optimal, à savoir $\sum_{t \in T} t$.
- Sinon, montrons que la somme S renvoyée par le glouton vérifie $S \geqslant \frac{c}{2}$, et donc $S \geqslant \frac{S_{opt}}{2}$ (car $S_{opt} \leqslant c$).
  Notons i_0 l'indice du premier élément qui nous fait dépasser c, en les sommant dans l'ordre décroissant. Un tel élément existe car $\sum_{t \in T} t > c$. Plus formellement, $i_0 = \min\{i \mid \sum_{k=0}^{i} t_k > c\}$.
  En particulier, le glouton prend tous les t_i dans sa somme S jusqu'à atteindre i_0 et il en prend au moins 1 ($i_0 > 1$ car $t_1 \leqslant c$, hypothèse de départ). L'idée est alors que le t_{i_0} qui nous fait dépasser c est moins grand que ce qu'on a déjà pris, et donc on a déjà pris au moins $\frac{c}{2}$.
  Formalisons ça :
  $S \geqslant \sum_{i=1}^{i_0-1} t_i$
  d'où $2S \geqslant \sum_{i=1}^{i_0-1} t_i + t_1 \geqslant \sum_{i=1}^{i_0-1} t_i + t_{i_0}$ par décroissance des t_i $= \sum_{i=0}^{i_0} > c$.
  Donc $2S > c$ d'où $S > \frac{c}{2}$.

5. Soit $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Donner une instance de SUBSET-SUM telle que la somme S renvoyée par l'algorithme glouton vérifie $S \leqslant \alpha S^*$ où S^* est la solution optimale.

correction

Soit $c > 2$. On prend $T = \{\frac{c}{2} + 1, \frac{c}{2}, \frac{c}{2}\}$. L'optimal est vérifié en prenant les deux derniers éléments et $S^* = c$. L'algorithme glouton prend uniquement le premier, et on a $S = \frac{c}{2} + 1$.
Donc

$$\frac{S}{S^*} = \frac{\frac{c}{2} + 1}{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \underset{c \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Donc, à partir d'une certaine valeur de c, on a bien $\frac{S}{S^*} \leqslant \alpha$, i.e. $S \leqslant \alpha S^*$, car $\alpha > \frac{1}{2}$ (on pourrait même calculer cette valeur, mais c'est inutile).

Chapitre 55

(MT) Classification hiérarchique ascendante * (MT 24, ex 1, corrigé, le graphique n'est pas l'original — oral - 44 lignes)

$*$

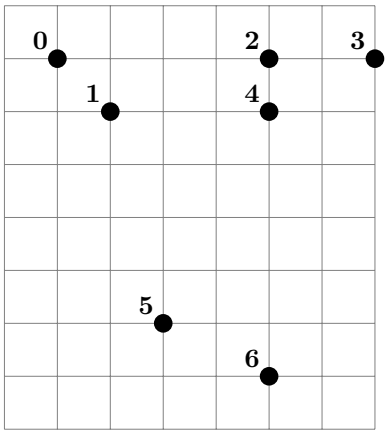
Ia, Classification hiérarchique ascendante, Cours,
sources : `mtia.tex`

1. Rappeler l'intêret et le fonctionnement de l'algorithme de classification hiérarchique ascendante.

correction

Corrigé de M.Péchaud
Cf cours.

2. L'effectuer sur un ensemble de 7 points répartis sur une grille 7×8 (donné en sujet) en utilisant la distance euclidienne pour deux points et $d(C_1, C_2) = \min_{x \in C_1, y \in C_2} d(x, y)$ pour la distance entre deux classes.



correction

```
[[[0,1],[[2,4],3]],[5,6]]
```

Chapitre 56

(MT) Graphes bipartis * (MT 24, ex 1, corrigé — oral - 88 lignes)

$*$

Graphes, Logique propositionnelle, Parcours de graphes, Complexité,
sources : `mtgraph5.tex`

1. Donner le nombre minimal et maximal d'arêtes dans un graphe biparti.

correction

Corrigé de M.Péchaud
On note n_1 et n_2 les cardinaux respectifs des deux ensembles U et V de sommets partitionnant les sommets du graphe.
Le nombre minimal d'arêtes est 0, et le nombre maximal $n_1 n_2$ (que l'on peut également maximiser sous la contrainte $n_1 + n_2 = n$ – auquel cas on obtient $\lceil n/2 \rceil \lfloor n/2 \rfloor$).

2. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

correction

Par double implication.
$\Rightarrow$ par l'absurde. Supposons avoir un graphe qui contient un cycle de longueur impaire, dont on note les sommets $s_1 \cdots s_n$ – s_n étant relié à s_1– et biparti avec une partition (U, V) des sommets.
Supposons arbitrairement que $s_1 \in U$. Alors une récurrence facile montre que pour tout i pair, $s_i \in V$ et pour tout i impair, $s_i \in U$: contradiction, car n est impair, d'où $s_n \in U$ et $s_1 \in U$ alors que (s_1, s_n) est une arête.
$\Leftarrow$ Soit H une composante connexe de G. Soit x un sommet de H. Pour tout y sommet de H, tous les chemins de x à y ont la même parité de longueur.
On note U l'ensemble des sommets qui sont atteints par un chemin de longueur paire depuis x, et l'on définit de même V pour des longueurs impaires.
On montre alors par l'absurde qu'il n'y a aucune arête entre un sommet de U et un sommet de V.
Sinon, soit $(u, v) \in A$. Alors on construit un cycle de longueur impaire en concaténant :
- un chemin de x à u
- (u, v)
- un chemin de v à x

Le résultat étant vrai sur chaque composante connexe de G, il est vrai pour G.

3. Donner un algorithme qui permet de déterminer si un graphe est biparti. Donner sa complexité.

correction

On effectue un parcours (quelconque) du graphe en coloriant le premier sommet en blanc, et ses voisins en noir, et en poursuivant l'alternance.
On vérifie que chaque voisin déjà colorié du sommet courant a bien la couleur opposée.
On obtient donc un algorithme en $O(|S| + |A|)$.

4. Donner une formule de logique propositionnelle telle qu'une valuation de cette formule permette de déterminer si un graphe est biparti. En déduire un autre algorithme ainsi que sa complexité permettant de déterminer si un graphe est biparti.

correction

On définit une variable propositionnelle v_s pour chaque sommet s du graphe.
La formule suivante – exprimant que deux sommets voisins doivent avoir une valeur de vérité différente – convient.

$$\bigwedge_{\{s,s'\}\in A} v_s \leftrightarrow \neg v_{s'}.$$

Pas certain de savoir quelle est la réponse attendue pour l'algorithme – on peut penser à un algorithme naïf testant toutes les valuations en $|A|2^{|S|}$ – l'autre possibilité à laquelle je pense revenant au parcours de graphe ci-dessus.

Chapitre 57

(MT) Tas binaires * (MT 24, ex 1, corrigé — oral - 129 lignes)

$*$

Arbres, Tri, Structures de données, Cours, Complexité,
sources : `mttas.tex`

1. Donner la définition d'un tas binaire

correction

Corrigé de M.Péchaud
cf cours.

2. Donner 2 représentation d'un tas binaire

correction

Par arbre ou par tableau.

3. Effectuer un tri par tas sur l'exemple suivant :

5	4	0	2	1	3

correction

Je donne une représentation par tableau – la représentation par arbre serait plus adaptée.
Insertions successives dans le tas (min)

5					

4	5				

0	5	4			

0	2	4	5		

0	1	4	5	2	

0	1	3	5	2	4

Extractions successives

1	2	3	5	4		$\longrightarrow 0$
2	4	3	5			$\longrightarrow 1$
3	4	5				$\longrightarrow 2$
4	5					$\longrightarrow 3$
5						$\longrightarrow 4$
						$\longrightarrow 5$

4. Donner la complexité du tri par tas et le prouver.

correction

On note n le nombre d'éléments du tableau de départ.
Complexité spatiale : $O(n)$.
Complexité temporelle dans le pire des cas : $O(n\log(n))$, car l'insertion et la suppression du min dans un tas sont de complexité $O(\log(n))$, et chacune de ces opérations est effectuée n fois.

Chapitre 58

(MT) logique * (MT 24, ex 1, corrigé — oral - 141 lignes)

$*$

Logique propositionnelle,
sources : `mtlog3.tex`

1. Prouver le séquent $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$.

correction

Corrigé de M.Péchaud

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A\vee\neg A), A\vdash A}\,Ax}{\neg(A\vee\neg A), A\vdash A\vee\neg A}\,\vee_i \qquad \dfrac{}{\neg(A\vee\neg A), A\vdash \neg(A\vee\neg A)}\,Ax}{\dfrac{\neg(A\vee\neg A), A\vdash \bot}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg A}\,\neg_i}\,\neg_e$$

2. Prouver le séquent $\vdash A \vee \neg A$.

correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots}}{\neg A\vee\neg A, \neg A\vdash\bot}\,\neg_e}{\neg A\vee\neg A\vdash A}\,RAA \qquad \dfrac{\dfrac{}{\ldots}}{\neg A\vee\neg A\vdash\neg A}\,\neg_e}{\dfrac{\neg A\vee\neg A\vdash\bot}{\vdash A\vee\neg A}\,RAA}$$

Annexe : règles de déduction utilisables.

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi\vdash\varphi}\ \text{HYP}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\varphi\vee\psi}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\varphi\vee\psi}\,\vee_i^d \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\varphi\vee\psi \quad \Gamma\vdash\varphi\to\chi \quad \Gamma\vdash\psi\to\chi}{\Gamma\vdash\chi}\,\vee_e$$

$$\dfrac{\Gamma,\varphi\vdash\bot}{\Gamma\vdash\neg\varphi}\,\neg_i \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\varphi \quad \Gamma\vdash\neg\varphi}{\Gamma\vdash\bot}\,\neg_e$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash\bot}{\Gamma\vdash\varphi}\,\bot_e$$

$$\boxed{\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{RAA}}$$

Chapitre 59

(MT) Automates de Büchi *** (MT 24, ex 2, corrigé, (1 question ajoutée) — oral - 117 lignes)

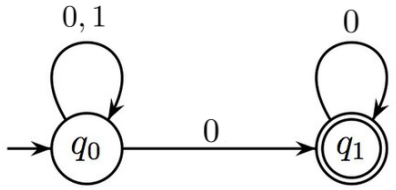
***

Langages, Automates,
sources : `mtbuchi.tex`

Un automate de Büchi est un automate (Q, Σ, T, I, F) permettant de reconnaitre des mots infinis, avec $I \subset Q$, $F \subset Q$ et $T \subset Q \times \Sigma \times Q$.

Soit X un ensemble de mots. On note X^ω l'ensemble des mots infinis de X : x est dans X^ω s'il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $x = x_0x_1x_2\ldots$. Un mot infini x de Σ^ω est reconnu par un automate de Büchi lorsqu'il existe un chemin infini dans cet automate étiqueté par x, commençant par un état initial et passant une infinité de fois par un état final.

1. Déterminer le langage reconnu par l'automate de Büchi ci-dessous.

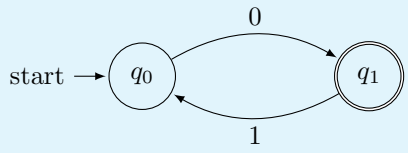


correction

Corrigé de M.Péchaud
C'est l'ensemble des mots terminant par une suite infinie de 0, i.e. $\{0,1\}^* \{0\}^\omega$.

2. Proposer un automate de Büchi reconnaissant $(01)^\omega$.

correction



Soient A et B deux automates de Büchi.

3. Montrer que $L(A) \cup L(B)$ est reconnu par un automate de Büchi.

correction

On utilise la même construction que pour les automates finis, en considérant $(Q_1 \cup Q_2, \Sigma, T_1 \cup T_2, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2)$ (en supposant $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$).

4. Soit K un langage régulier. Montrer que $K.L(A) = \{u.v,\ u \in K,\ v \in L(A)\}$ est reconnu par un automate de Büchi.

correction

On commence par supposer que $\epsilon \notin K$.
On se donne un automate avec un unique état acceptant sans transition sortante reconnaissant K (ce qui est possible en partant d'un automate fini, créant un nouvel état acceptant q_f, et dupliquant toutes les transitions qui arrivaient dans un état acceptant vers ce nouvel état).
De même, on se donne un automate de Büchi reconnaissant $L(A)$ avec un unique état entrant q_i sans transition entrante.
On ≪concatène≫ les automates en fusionnant q_i et q_f, et on obtient un automate reconnaissant $K.L(A)$.

Si $\epsilon \in K$, on remarque que $KL(A) = L(A) \cup (K - \{\epsilon\})L(A)$, et on applique ce qui précède ainsi que la question précédente pour conclure.

5. Si K est un langage régulier, montrer que K^ω est reconnu par un automate de Büchi.

correction

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\epsilon \notin K$, car $K^\omega = \{K - \epsilon\}^\omega$.
On utilise alors la construction de la question précédente, en fusionnant l'état initial et l'état acceptant de l'automate reconnaissant K.

6. Montrer que $L(A) \cap L(B)$ est reconnu par un automate de Büchi.

correction

On construit $(Q_1 \times Q_2 \times \{0,1,2\}, \Sigma, T, I_1 \times I_2, F)$ où
- T duplique les transitions de T_1 et T_2 sur les deux premières composantes et
  - la troisième composante passe de 0 à 1 si la transition démarre d'un état ayant sa première composante dans F_1 (1 est à comprendre comme ≪on est passé par un état acceptant du premier automate≫)
  - la troisième composante passe de 1 à 2 si la transition démarre d'un état ayant sa seconde composante dans F_2 (≪on est passé par un état acceptant du premier automate puis par un état terminal du second≫)
  - la troisième composante passe de 0 à 2 si la transition démarre d'un état ayant ses deux premières composantes respectivement dans F_1 et F_2 (passage simultané par des états acceptants dans les deux automates)
  - les troisièmes composantes sont maintenues à 0 et à 1 dans les autres cas
  - et passent immédiatement de 2 à 0
- $F = Q_1 \times Q_2 \times \{2\}$

Alors un calcul passe une infinité de fois par un état de F (i.e. de troisième composante 2) si et seulement si les calculs projetés sur les automates de départ passent chacun une infinité de fois par des états de F_1 (resp. F_2).

Chapitre 60

(MT) Automates, langages à saut * (MT 24, ex 2, corrigé, complété au jugé pour les dernières questions — oral - 85 lignes)

$*$

Langages, Automates,
sources : `mtlang2.tex`

Soit A un automate à un seul état initial q_{init}. On note Q l'ensemble des sommets, $R = Q \times \Sigma^* \times Q$ les transitions, F les états finaux.
Soient u, v, u', v' dans Σ^*, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ et $q_1, q_2 \in Q^2$. On pose la relation $(u, q_1, av) \curvearrowright (u', q_2, v')$ valable uniquement si $(q_1, a, q_2) \in R \ \wedge \ uv = u'v'$.
On a $(u, q_1, av) \curvearrowright^* (u', q_2, v')$ si un nombre fini de $\curvearrowright$ permettent de passer de (u, q_1, av) à (u', q_2, v')
On définit le langage à saut de l'automate comme suit :
$L_\ddagger(A) = \{uv \in \Sigma^* \mid \exists f \in F, (u, q_{\text{init}}, v) \curvearrowright^* (\varepsilon, f, \varepsilon)\}$
On note $L_{ab} = \{u \in \Sigma^* \mid u$ contienne autant de a que de $b\}$

1. Montrer que L_{ab} n'est pas régulier.

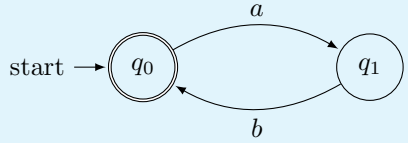
correction

Correction de M.Péchaud
Cf cours, c'est extrèmement classique – on applique le lemme de l'étoile et on considère $a^N b^N$.

2. Montrer que L_{ab} est le langage à saut d'un certain automate.

correction

Concrètement, $\curvearrowright$ permet d'«effacer» une occurrence de la lettre étiquetant la transition de q_1 à q_2 suivie du mot issu de la concaténation de la 1ère et 3ème composante du triplet.
On considère l'automate suivant :



Un calcul dans cet automate est réussi si et seulement si il emprunte autant de transitions étiquetées que par a que par b si et seulement si autant de a que de b sont effacés dans le mot de départ pour arriver à ϵ si et seulement si le mot de départ est dans L_{ab}.

3. On note Perm(L) $= \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L, u$ soit une permutation de $v\}$.
Si L est régulier, Perm(L) l'est-il ?

correction

Non : on considère par exemple $L = (ab)^*$ qui est bien régulier.
Perm(L) $= L_{ab}$ dont on n'a vu qu'il n'est pas régulier.

4. Montrer que si L est fini, alors Perm(L) est régulier.

correction

Trivial, car dans ce cas, Perm(L) est également fini.

5. Donner un exemple de langage L infini tel que Perm(L) soit régulier.

correction

$L = \{a, b\}^*$ convient (car $\text{Perm}(L) = L$).

6. On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L un langage régulier tel que $L \subset a^*b^*$. Montrer que Perm(L) est régulier.

correction

Non trivial, pour occuper les plus rapides !

Chapitre 61

(MT) plus courts chemins dans des graphes * (MT 24, ex 2, corrigé, retour d'oral — oral - 117 lignes)

$*$

Graphes, Complexité, Programmation dynamique,
sources : `mtgraph4.tex`

On considère $G = (S, A)$ un graphe orienté pondéré par la fonction $w : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ pouvant être à poids négatifs. On note $n = |S|$ et $p = |A|$. On étudiera ici un algorithme de calcul des plus courts chemins nommé *algorithme de Johnson*.

1. Donner la complexité de l'algorithme de Dijkstra.

correction

Correction de M.Péchaud

Avec une file de priorité implémentée par tas, $O((|A| + |S|)\log(|S|)) = (n + p)\log(n)$.

2. Soit $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ et $w_h(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$. Montrer que les plus courts chemins pour w sont les même que ceux pour w_h, et qu'il existe un cycle de poids strictement négatif pour w si et seulement si il en existe aussi un pour w_h.

correction

Soit C un chemin, d'extrémités u et v. On note $w_h(C)$ et $w(C)$ ses longueurs pour w_h et w. Par telescopage, $w_h(C) = h(u) - h(v) + w(C) = c + w(C)$ – où c est une constante si u et v sont fixés. Les plus courts chemins sont donc les mêmes.

Si le chemin C est un cycle, on reprend ce qui précède avec $u = v$, et l'on obtient $w(C) = w_h(C)$, d'où le résultat.

On considère maintenant un graphe G ne contenant aucun cycle de poids strictement négatif.

3. Trouver h tel que w_h soit à valeurs positives ou nulles.
On pourra dans un premier temps supposer qu'il existe un sommet r depuis lequel tous les autres sommets sont accessibles.

correction

Pour tout sommet u, on note $h(u)$ la longueur d'un plus court chemin entre r et u (qui existe car il n'y a pas de cycle de poids strictement négatif dans le graphe).
Montrons alors que w_h est à valeurs positives.
Soient u et v deux sommets du graphe. Par définition de h, $h(v) \leqslant h(u) + w(u, v)$, d'où $w_h(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v) \geqslant 0$.

Si le graphe a plusieurs composantes connexes, on procède de même en choisissant un sommet r arbitraire dans chaque composante connexe.

4. On suppose que l'on peut calculer toutes les distances entre un sommet fixé et les autres sommets de G en $O(np)$. Proposer un algorithme permettant de calculer tous les plus courts chemins entre tous les sommets en $O(np\log(n) + n^2\log(n))$. Comparer avec l'algorithme de Floyd-Warshall.

correction

On commence par calculer les h en temps $O(np)$.
Le nouveau graphe étant à poids positifs, on peut alors utiliser l'algorithme de Dijkstra pour calculer les plus courts chemins entre tous les couples de sommets.
On obtient bien une complexité $n(n+p)\log(n)$.

L'algorithme de Floyd-Warshall est de complexité $O(n^3)$. En présence d'un graphe creux où $p\log(n) < n^2$, l'algorithme de Johnson est donc asymptotiquement meilleur.

5. Afin de calculer les distances entre un sommet s fixé et tous les autres sommets en temps $O(np)$, on propose une approche par programmation dynamique. On note $d(t,k)$ la longueur d'un plus court chemin de s à t empruntant au plus k arcs.

(a) Établir une relation de récurrence vérifiée par les $d(t,k)$.

correction

$d(s,k) = 0$ pour tout $k \in N$.
Pour tout sommet t et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d(t,k) = \min(d(t,k-1), \min\limits_{(t',t)\in A} d(t',k-1) + w(t',t))$.

(b) En déduire le preudocode d'un algorithme de complexité spatiale $O(np)$ répondant au problème posé.

correction

On utilise une implémentation ascendante par poids croissants pour calculer les $d(t,n-1)$ (car en l'absence de cycle de poids strictement négatif, il existe un plus court chemin entre deux sommets quelconques ne passant pas deux fois par le même sommet du graphe) :

```
1 fonction Distance(G = (S, A), w, s)
2   pour tout u dans S :
3       d[u] = +∞
4   d[s] = 0
5   pour k = 1 jusqu'à |S| − 1 faire
6       pour chaque arc (u, v) ∈ A :
7           si d[u] + poids(u, v) < d[v] :
8               d[v] := d[u] + poids(u, v)
9   renvoyer d
```

La complexité est bien $O(np)$.
NB : il s'agit de l'algorithme de Bellman-Ford.

Chapitre 62

(MT) Décidabilité de programmes engendrés par une grammaire * (MT 24, ex 2, corrigé — oral - 127 lignes)

$*$

Grammaire, Décidabilité, C, Logique propositionnelle,
sources : `mthaltbool.tex`

1. $HALT\_BOOL\_BOOL\_C$ est-il décidable ?

correction

Corrigé de M.Péchaud
Dans `bool_bool_c`, il n'y a pas de boucle `while`, ni de possibilité d'appel récursif.
Donc tout programme de `bool_bool_c` termine, et ce problème est donc décidable.

2. Soit $\eta \in ASCII^*$ un code sur `bool_bool_c` à partir d'une dérivation de symbole initial **S**. Montrer qu'il existe une formule φ_η tel que pour ν_i, une valuation, $\varphi_\eta(\nu_i)$ correspond à la valeur de sortie de η en identifiant x_i et ν_i.

correction

On procède par induction sur l'arbre syntaxique pour construire une formule à partir du I situé immédiatement sous le S.
La notation de l'énoncé est pénible car portant sur les chaînes, on note plutôt ψ_a la formule correspondant à un sous-arbre enraciné en a. On définit alors
- $\psi_{true} = \top$ (ou $(\nu_i \vee \neg\nu_i)$ si l'on n'autorise pas $\top$)
- $\psi_{false} = \bot$.
- $\psi_V = \psi_{x_i}$ si x_i est le fils de V
- $\psi_{x[i]} = \nu_i$
- Si a étiqueté par E dérive en $b == c$, $\psi_a = (\psi_b \wedge \psi_c) \vee (\neg\psi_b \wedge \neg\psi_c)$
- Si a étiqueté par I dérive en return(b) ; $\psi_a = \psi_b$.
- Si a étiqueté par I dérive en b (étiqueté par C) $\psi_a = \psi_b$.
- Si d est étiqueté par C et dérive en $if(a)\{b\}else\{c\}$, $\psi_d = (\psi_a \wedge \psi_b) \vee (\neg\psi_a \wedge \psi_c)$

Par induction, on a alors le résultat voulu.

3. Donner la formule associé au code suivant :

```
if(x[0]){
    if (x[0] == x[1]) {return false;}
    else {return true;}
}
else {return x[1] == x[2];}
```

correction

$(\nu_0 \wedge ((((\nu_1 \wedge \nu_2) \vee (\neg\nu_1 \wedge \neg\nu_2)) \wedge \bot) \vee (\neg(\nu_1 \wedge \nu_2) \vee (\neg\nu_1 \wedge \neg\nu_2) \wedge \top))) \wedge (\neg\nu_0 \wedge ((\nu_1 \wedge \nu_2) \vee (\neg\nu_1 \wedge \neg\nu_2)))$

4. $HALT\_BOOL\_C$ est-il décidable ?

correction

Oui : il n'y a pas d'affectation dans le langage, donc soit on n'entre pas dans une boucle, soit celle-ci ne terminera jamais – en fonction de la valeur de vérité du booléen calculé.
On décide donc de la terminaison en exécutant le programme sur l'entrée, en renvoyant vrai si cela termine, et faux dès que l'on entre dans le code à l'interieur d'une boucle.

5. *HALT_ALL_BOOL_C* est-il décidable ?

correction

Même chose qu'à la question précédente, en testant pour toutes les valeurs possibles de l'entrée, en nombre fini (2^n en notant n le plus grand entier tel que $x[n-1]$ apparaisse dans le code, valeur que l'on calcul facilement à partir du programme).

Annexe :

On définit la grammaire hors-contexte $\mathcal{C}$ avec les règles de dérivation suivantes :

$$\begin{array}{l}\mathbf{S} \to \texttt{bool f (bool x[])}\ \{\mathbf{I}\}\\ \mathbf{E} \to \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid \mathbf{V} \mid (\mathbf{E} == \mathbf{E})\mathbf{V} \to \texttt{x[i]},\ i \in \mathbb{N}\\ \mathbf{I} \to \texttt{return}\ \mathbf{E};\ \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C}\\ \mathbf{B} \to \texttt{While(}\mathbf{E}\texttt{)}\ \{\mathbf{I}\}\\ \mathbf{C} \to \texttt{if(}\mathbf{E}\texttt{)}\{\mathbf{I}\}\ \texttt{else}\ \{\mathbf{I}\}\end{array}$$

`bool_c` est obtenue à partir de la grammaire $\mathcal{C}$.
`bool_bool_c` est obtenue à partir de la grammaire $\mathcal{C}$ sans dérivation **B**.

On définit les problèmes suivants :

HALT_BOOL_C :
Entrée $\kappa \in$ `bool_c`
Sortie κ termine-t-il sur une entrée x ?

HALT_ALL_BOOL_C :
Entrée $\kappa \in$ `bool_c`
Sortie κ termine-t-il sur toute entrée ?

HALT_BOOL_BOOL_C :
Entrée $\kappa \in$ `bool_bool_c`
Sortie κ termine-t-il sur toute entrée

Chapitre 63

(X) Algorithme Union-Find *** (X 23, corrigé — oral - 151 lignes)

***

Algorithmique, Complexité, Structures de données,
sources : `xunionfind.tex`

Algorithme Union-Find

L'algorithme Union-Find a pour but de gérer dynamiquement une partition d'un ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ fixé. Initialement, on part de la partition maximale $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$. En pratique, on représente les partitions de $\{1, \dots, n\}$ comme suit :
▷ chaque entier k possède un (seul) père $\mathrm{p}_k \leqslant n$, ce que l'on notera $k \to \mathrm{p}_k$; on peut avoir $k = \mathrm{p}_k$;
▷ chaque entier k possède un poids $\mathrm{w}_k \in \mathbb{N}$;
▷ deux entiers distincts k et ℓ ne peuvent être ancêtres l'un de l'autre, et appartiennent au même sous-ensemble si et seulement s'ils ont un ancêtre commun ;
▷ si l'entier k appartient à un singleton, $w_k = 0$.

Question 1. On dit que m est le chef de k si m est un ancêtre de k tel que $m = \mathrm{p}_m$. Démontrer que tout entier a un unique chef, et deux entiers k et ℓ appartiennent au même sous-ensemble si et seulement s'ils ont le même chef.

correction

Corrigé proposé par le jury
On se place dans le graphe dont les sommets sont les entiers de 1 à n et les arêtes sont les couples $(\ k, \mathrm{p}_k\ )$. Par hypothèse, tout sommet y est de degré sortant 1, et les seuls cycles du graphe sont des boucles, c'est-à-dire des cycles de longueur 1. Puisque le chemin obtenu en partant d'un entier m et en remontant la liste de ses ancêtres se termine par un cycle, il contient nécessairement une boucle, centrée sur un chef de m.
En particulier, ce chef est un ancêtre de tous les ancêtres de m, donc m ne peut pas avoir deux chefs, qui seraient ancêtres l'un de l'autre. En outre, deux entiers k et ℓ ont un ancêtre commun si et seulement s'ils ont le même chef, qui sera le chef de cet ancêtre commun.
Cette question a pour but de mettre le candidat en confiance et de lui permettre de s'approprier la représentation de l'algorithme `Union`-Find qu'il devra manipuler au cours de l'épreuve. Elle vise également à évaluer sa capacité à introduire des graphes de manière pertinente, puis à raisonner rigoureusement sur ces graphes.

L'algorithme est censé gérer trois types de requêtes, en procédant comme suit :

1. La requête auxiliaire `Chef`(k) : on recherche le chef de k. Si $k = \mathrm{p}_k$, il s'agit de k lui-même. Sinon, il s'agit du chef de p_k, et ce chef devient le nouveau parent de k.
2. La requête `Test`(k, ℓ) : on se demande si k et ℓ appartiennent au même sous-ensemble. Cela revient à identifier les entiers $k' =$ `Chef`(k) et $\ell' =$ `Chef`(ℓ) puis à vérifier si $k' = \ell'$.
3. La requête `Union` (k, ℓ) : on souhaite réunir les sous-ensembles auxquels appartiennent k et ℓ. Cela revient à identifier les entiers $k' =$ `Chef`(k) et $\ell' =$ `Chef`(ℓ), puis :
   ▷ si $\mathrm{w}_{k'} > \mathrm{w}_{\ell'}$, l'entier k' devient le nouveau parent de ℓ' ;
   ▷ si $\mathrm{w}_{\ell'} > \mathrm{w}_{k'}$, l'entier ℓ' devient le nouveau parent de k' ;

▷ si $k' \neq \ell'$ et $\mathrm{w}_{k'} = \mathrm{w}_{\ell'}$, l'entier k' devient le nouveau parent de ℓ' et son poids augmente de 1.
On souhaite démontrer que répondre à m de ces requêtes peut se faire en temps $\mathcal{O}(m \log^\star(m))$, où $\log^\star$ est la fonction définie par $\log^\star(m) = 1$ lorsque $m \leqslant 1$ et $\log^\star(m) = 1 + \log^\star(\log_2(m))$ lorsque $m > 1$.

Question 2. En partant de l'ensemble $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$, on effectue successivement les requêtes `Union` $(1,2)$, `Union` $(3,4)$, `Union` $(2,4)$ et `Test`$(2,4)$. Indiquer le père et le poids de chaque entier $k \leqslant 4$.

correction

Voici un tableau où l'on a recensé, après chaque étape de l'algorithme, le parent et le poids de chaque nœud ; la situation initiale est indiquée à l'étape « 0 ».

Étape	p_1	w_1	p_2	w_2	p_3	w_3	p_4	w_4
0	1	0	2	0	3	0	4	0
1	1	1	1	0	3	0	4	0
2	1	1	1	0	3	1	3	0
3	1	2	1	0	1	1	3	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0

La seule difficulté est ici de ne pas oublier que la requête `Test` $(2,4)$ entraîne une compression du chemin liant le sommet 4 à son chef 1 , qui devient désormais son parent.
Cette question vise donc à s'assurer que les élèves ont bien retenu que compresser les chemins dans l'algorithme `Union`-Find était indispensable ou, le cas échéant, à le leur rappeler.

Question 3. On note w_k^∞ le poids d'un entier k à la fin de l'algorithme. Démontrer que $\mathrm{w}_u^\infty < \mathrm{w}_v^\infty$ pour tous les entiers $u \neq v$ tels que v a été le parent de u.

correction

Au cours de l'algorithme, et tant qu'il est chef, un entier peut d'abord voir son poids augmenter (de 1 à chaque fois), au cours de fusions à l'occasion desquelles on lui assigne de nouveaux descendants ; puis, si un jour il cesse d'être chef, son poids ne changera plus jamais. Par conséquent, si un entier v est un jour le parent d'un entier u, soit w_v et w_u leurs poids à ce moment-là. Puisque u n'est plus chef, il ne le sera plus jamais, donc $\mathrm{w}_u^\infty = \mathrm{w}_u$; par ailleurs, le poids de v ne pourra qu'augmenter, donc $\mathbf{w}_v^\infty \geqslant \mathrm{w}_v > \mathbf{w}_u = \mathbf{w}_u^\infty$.
Cette question est la première question délicate du sujet. Elle a pour but de vérifier si le candidat maîtrise la dynamique des liens de parenté et des poids au cours de l'algorithme, et s'il est capable de jouer à la fois sur l'état du système à un moment de l'exécution de l'algorithme et une fois cette exécution achevée. Par ailleurs, cette question et chacune des questions suivantes a pour but de préparer les questions ultérieures, notamment le résultat final que l'on souhaite démontrer.

Question 4. Démontrer, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, qu'il y a au plus $m/2^{\ell-1}$ entiers $k \leqslant n$ pour lesquels $\mathbf{w}_k^\infty = \ell$.

correction

On note Γ le graphe étiqueté dont les sommets sont les entiers de 1 à n et les arêtes sont les couples (u,v) pour lesquels $u \neq v$ et v a été parent de u au cours de l'algorithme ; chaque sommet k est étiqueté par l'entier w_k^∞. On dit alors que v est un Γ-descendant de u (qui est un Γ-ancêtre de v) si Γ contient un chemin allant de u à v.
Chaque entier k gagne ses ancêtres un par un, au cours de requêtes `Union` ; chaque nouvel ancêtre de k devenant un ancêtre de tous les anciens ancêtres de k. Par conséquent, Γ contient un chemin partant de k et passant par tous ses Γ-ancêtres, dont les poids ne font qu'augmenter le long du chemin. En particulier, deux sommets de même étiquette n'ont aucun Γ-descendant commun.
Or, une récurrence sur windique que, à tout moment au cours de l'algorithme, chaque sommet de poids $\mathrm{w} \geqslant 0$ possède au moins 2^{w} descendants. Les s entiers k pour lesquels $\mathrm{w}_k^\infty = \ell$, ces s entiers ont donc, à eux tous, un total d'au moins $2^\ell s$ ou plus Γ-descendants.
En outre, tout sommet qui Γ-descend d'un entier de poids non nul a dû être un des arguments d'une requête `Union`. Il y a eu au plus m requêtes `Union`, donc au plus $2m$ entiers utilisés comme arguments de telles requêtes. On en conclut que $s \geqslant 2m/2^\ell$.
Dans la continuité de la question précédente, cette question a pour but d'affiner la compréhension de la dynamique du système étudié par le candidat. Sa difficulté principale consiste à introduire une structure de données simple mais qui contiendra des informations valides à différentes phases de l'algorithme. Elle vise également à s'assurer que le candidat est à même de naviguer entre des échelles locale et globale, ce genre d'approches étant crucial en informatique.

Question 5. Démontrer que toute requête `Test` ou `Union` effectuée au cours de l'algorithme a une complexité majorée par $\mathcal{O}(\log_2(\min\{m,n\}))$.

correction

En question précédente, les s entiers k pour lesquels $\mathrm{w}_k^\infty = \ell$ ont cumulé au plus min $\{n, 2m\}$ Γ-descendants, ce qui nous fournit l'inégalité $s \leqslant \min\{n,2m\}/2^\ell$, légèrement meilleure que l'inégalité précédente. En particulier, le plus grand des entiers w_k^∞ est un entier ℓ pour lequel $1 \leqslant s \leqslant \min\{n,2m\}/2^\ell$, de sorte que $\ell \leqslant \log_2(\min\{m,n\})+1$. En outre, toute requête portant sur deux entiers dont les chefs sont de poids w et w' a une complexité $\mathcal{O}(w+w')$. On conclut en remarquant que w et w' sont majorés par $\mathcal{O}(\ell) \subseteq \mathcal{O}(\log_2(\min\{m,n\}))$.
Cette question a pour but de vérifier si le candidat a le réflexe d'affiner de lui-même la borne qui lui avait été proposée en question précédente, et s'il est capable d'utiliser des arguments simples pour trouver des bornes supérieures sur la complexité de telle opération.

Question 6. Soit $\mathcal{G} = (V,E)$ le graphe dont les sommets sont les entiers de 1 à n et les arêtes sont les paires (u,v) pour lesquelles $u \neq v$ et v a été le parent de u au cours de l'algorithme, mais pas quand celui-ci se termine. Démontrer que la complexité totale de nos m requêtes est majorée par $\mathcal{O}(m+|E|)$.

correction

Considérons une requête `Union` ou `Test` d'arguments a et b, et soit ω_a et ω_b le nombre de liens de parentés que cette requête remonte en partant de a et de b. La complexité de cette requête est majorée par $\mathcal{O}(\omega_a+\omega_b+1)$, et celle-ci résulte en l'introduction d'au moins $(\omega_1-1)+(\omega_b-1)$ arêtes dans E : il s'agit des les liens de parentés détruits par notre requête, et ceux-ci ne seront jamais recréés. Ainsi, si notre requête résulte en l'ajout de e arêtes dans E, sa complexité est majorée par $\mathcal{O}(e+1)$. Puisque l'on a m requêtes en tout et que la somme des entiers e ainsi définis est égale à $|E|$, le résultat désiré s'ensuit.
De nouveau, cette question a pour but de vérifier que le candidat est capable d'estimer la complexité d'un algorithme en fonction de paramètres auxquels il n'est pas habitué.

Question 7. Soit $(a_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{\ell+1} = 2^{a_\ell}$. Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, on note V_ℓ l'ensemble des entiers k tels que $a_\ell \leqslant \mathrm{w}_k^\infty < a_{\ell+1}$. Démontrer que $\mathcal{G}$ contient au plus $4m$ arêtes reliant deux sommets de V_ℓ, et au plus $2m$ arêtes allant d'un sommet de V_ℓ à un sommet en dehors de V_ℓ.

correction

Soit u un élément de V_ℓ. Les sommets accessibles par une arête de $\mathcal{G}$ partant de u sont des Γ-ancêtres de u. Ils sont donc d'étiquettes différentes, et au plus $a_{\ell+1}-a_\ell$ d'entre eux appartiennent à V_ℓ. Or, le nombre de sommets de Γ d'étiquette w est un entier $s_\mathrm{w} \leqslant m/2^{\mathrm{w}-1}$. Le nombre total d'arêtes internes de $\mathcal{G}$ internes à V_ℓ est donc majoré par

$$a_{\ell+1}\,|V_\ell| \leqslant a_{\ell+1} \sum_{w\geqslant a_\ell} m/2^{w-1} = a_{\ell+1}m/2^{a_\ell-2} = 4m$$

Par ailleurs, chaque requête d'arguments a et b résulte en l'ajout dans $\mathcal{G}$ d'au plus deux arêtes quittant V_ℓ : il s'agit, sur chacun des deux chemins allant de a et b à leurs chefs et que l'on explore avec cette requête, de la dernière arête partant d'un sommet de V_ℓ. Par conséquent, au plus $2m$ arêtes sortent de V_ℓ.
Il s'agit là de la question la plus difficile du sujet, censée résister même aux élèves les plus brillants.

Question 8. Que conclure sur la complexité de l'algorithme `Union`-Find ?

correction

Puisque $\mathrm{w}_k^\infty \leqslant \log_2(m)+1$ pour tout entier k, on sait que $V_\ell = \varnothing$ dès lors que $a_\ell > \log_2(m)+1$. Or, la fonction $\log^\star$ est croissante, et $\log^\star(a_\ell) = \ell$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$. Ainsi, lorsque $m \geqslant 2$ et $\ell > \log^\star(m)$, on sait que $\log^\star(a_\ell) = \ell > \log^\star(m) \geqslant \log^\star(\log_2(m)+1)$, de sorte que $a_\ell > \log_2(m)+1$ et $V_\ell = \varnothing$.
En particulier, $\mathcal{G}$ contient au plus $6m$ arêtes issues de chacun des $\lfloor\log^\star(m)\rfloor+1$ ensembles V_ℓ susceptibles d'être non vides, et aucune arête issue des autres ensembles V_ℓ, nécessairement vides. Il contient donc $\mathcal{O}(m\log^\star(m))$ arêtes, ce qui conclut.
Cette question vise non seulement à obtenir explicitement le résultat espéré depuis le début du sujet, mais aussi à vérifier que le candidat est à même de prendre du recul sur les calculs de plus en plus compliqués qu'il a dû mener au cours des questions précédentes.
On pourrait s'étonner qu'elle soit substantiellement plus abordable que la question 7 . Néanmoins, les candidats auraient tout à fait eu le droit de demander à traiter cette question en admettant la question 7 , avant de revenir sur celle-ci ensuite. Dans ce genre de cas, il ne faut pas s'auto-censurer, et ne pas hésiter à proposer à l'examinateur pareille démarche ; ici, la réponse aurait été positive, même s'il faut bien sûr que le candidat soit prêt à renoncer à son idée si jamais l'examinateur lui répond de manière négative.

Chapitre 64

(X) Bob l'écureuil *** (X 23, corrigé — oral - 141 lignes)

***

Algorithmique,
sources : `xbobecureuil.tex`

Bob est un écureuil qui vit le long d'une ligne de chemin de fer. Il a caché ses réserves de noisettes dans les différentes gares, et cherche maintenant à établir son nid dans l'une de ces gares. Pour des raisons pratiques, il souhaite construire son nid dans une gare où il a déjà caché des noisettes, tout en minimisant la durée moyenne entre son nid et ses réserves de noisettes. Comment choisir dans quelle gare établir son nid ?

Question 1. La ligne est composée de 9 gares, numérotées de 0 à 8 ; Bob a mis une cachette dans chacune de ces gares. On met k minutes pour aller de la gare ℓ à la gare $k+\ell$. Quelle gare Bob choisira-t-il d'établir son nid ?

correction

Corrigé proposé par le jury
On se laisse facilement convaincre, par exemple pour des raisons de symétrie, que la meilleure gare est la gare de numéro 4. Une manière simple de démontrer proprement ce résultat consiste à s'intéresser à la somme des durées plutôt qu'à leur moyenne, puis à remarquer que, lorsque $0 \leqslant \ell \leqslant 4$, les distances de la gare k aux gares ℓ et $8-\ell$ sont de somme minimale si et seulement si $\ell \leqslant k \leqslant 8-\ell$. La gare 4 est donc la seule à être optimale vis-à-vis de l'ensemble de ces paires (dont la paire obtenue pour $\ell = 4$ est dégénérée).
Cette question a pour but de mettre le candidat en confiance et de lui permettre de s'approprier l'énoncé, tout en évaluant sa capacité à être rigoureux dès que c'est nécessaire, par exemple pour justifier que la gare 4 est optimale.

Question 2. On suppose maintenant que les gares ne sont plus régulièrement espacées. Désormais, il y a n gares, toujours numérotées de 0 à $n-1$, toujours en ligne droite. Bob connaît des entiers $t_0, t_1, \ldots, t_{n-2}$ pour lesquels aller de la gare ℓ à la gare $\ell+1$ requiert t_ℓ minutes ; ainsi, aller de la gare ℓ à la gare $\ell+2$ requiert $t_\ell + t_{\ell+1}$ minutes. Donner un algorithme qui permettra à Bob de choisir, en temps $\mathcal{O}(n)$, dans quelle gare installer son nid.

correction

Le raisonnement invoqué pour la question précédente fonctionne toujours : lorsque $0 \leqslant \ell \leqslant (n-1)/2$, les distances de la gare k aux gares ℓ et $(n-1)-\ell$ sont de somme minimale si et seulement si $\ell \leqslant k \leqslant (n-1)-\ell$. Par conséquent, les gares optimales sont celles de numéros $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ et $\lceil (n-1)/2 \rceil$; elles sont confondues lorsque n est impaire.
Cependant, obtenir un tel résultat n'est pas nécessairement pertinent au vu des questions qui suivent et de la contrainte consistant à fournir un algorithme en temps $\mathcal{O}(n)$. Une alternative est d'améliorer l'algorithme naïf consistant à calculer chaque somme de distances en temps $\Theta(n)$, ce qui requiert un temps total $\Theta\left(n^2\right)$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que la somme, disons s_ℓ, des distances entre chaque gare ℓ et les gares $k \leqslant \ell$ est soumise à la relation $s_{\ell+1} = s_\ell + (\ell+1)t_\ell$. Celle-ci permet de calculer les nombres s_ℓ de proche en proche ; on peut ensuite procéder de même pour calculer la somme des distances entre chaque gare ℓ et les gares $k \geqslant \ell$, ce qui permet de conclure.
Cette question, nettement plus difficile, a pour but de forcer le candidat à être inventif, puis à réagir face aux indications de l'examinateur ; il n'est pas attendu du candidat qu'il résolve cette question en direct et sans indication.

Question 3. Désormais, le réseau prend la forme d'un graphe connexe acyclique. Bob dispose, pour chaque gare k, d'une liste des gares ℓ auxquelles la gare k est reliée directement, ainsi que de la durée $\mathrm{d}_{k,\ell}$, en nombre de minutes, du trajet entre les gares k et ℓ.
Donner un algorithme qui permettra à Bob de choisir, en temps $\mathcal{O}(n)$, dans quelle gare installer son nid.

correction

Là encore, les valeurs des durées $\mathrm{d}_{k,\ell}$ sont sans importance, et les gares optimales sont les gares « médianes » du réseau arborescent. Pour les identifier, on enracine notre arbre en un nœud arbitraire, puis on calcule récursivement, depuis les feuilles vers la racine, le nombre de descendants de chaque gare, puis la somme des distances de chaque gare à ses descendantes. Plus précisément, si une gare k possède a_k descendantes, dont ℓ enfants de numéros 0 à $\ell-1$, et si l'on note s_k la somme des durées des trajets de la gare k avec ses descendantes, alors

$$a_k = 1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_{\ell-1} \text{ et } s_k = a_0 d_{0,k} + a_1 d_{1,k} + \cdots + a_{\ell-1} d_{\ell-1,k} + s_0 + s_1 + \cdots + s_{\ell-1}$$

Dans une deuxième phase, on calcule depuis la racine vers les feuilles la somme S_k des distances de chaque gare k à l'ensemble des gares du réseau. En effet, si la gare k est le parent de la gare ℓ, une durée totale $S_k - a_\ell d_{k,\ell} - s_\ell$ est nécessaire pour aller de la gare k aux gares qui ne descendent pas de ℓ, et on en déduit que

$$S_\ell = (S_k - a_\ell d_{k,\ell} - s_\ell) + (n - a_\ell)\, d_{k,\ell} + s_\ell$$

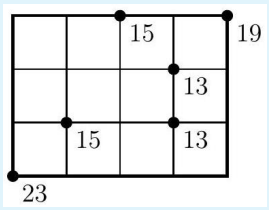
Cette question a pour but de vérifier si le candidat a bien digéré les méthodes qu'il a dû mettre en œuvre à la question précédentes et qu'il est à même de développer peu à peu des algorithmes récursifs sur les arbres.

Bob déménage à Manhattan, là où toutes les rues sont orientées selon un axe Nord-Sud ou Est-Ouest, et espacées de 100 mètres l'une de l'autre. Il a caché ses n réserves de noisettes à n croisements de rue, chaque croisement étant identifié par des coordonnées entières. Par exemple, le croisement $(2,3)$ se trouve 400 mètres à l'Ouest et 500 mètres au Sud du croisement $(6,8)$, donc Bob doit marcher au minimum 900 mètres pour aller d'un croisement à l'autre.
Bob souhaite maintenant établir son nid à l'un des n croisements de rue où se trouve déjà une réserve de noisettes, mais tout en minimisant la distance moyenne entre son nid et des réserves de noisettes. À quel croisement établir son nid ?

Question 4. Bob a disposé ses 6 réserves aux points de coordonnées $(0,0), (1,1), (2,3), (3,1), (3,2)$ et $(4,3)$. Auquel de ces six endroits choisira-t-il d'établir son nid ?

correction

Dans un premier temps, on peut se contenter de calculer brutalement la somme des distances L^1 de chaque point aux autres ; ici, on a écrit cette somme à côté de chacun des points concerné. Bob élit donc domicile en l'un des points $(3,1)$ ou $(3,2)$.



Cette question a plusieurs buts : préparer le candidat aux questions qui suivent ; vérifier qu'il reconnaît des distances L^1, dites « de Manhattan » ; s'assurer que, dans le cadre d'un problème de géométrie, il aura le réflexe indispensable de faire un dessin au tableau.

Question 5. Bob a simplement noté les coordonnées entières $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ des n réserves qu'il a choisies pour entreposer ses noisettes.
Donner un algorithme qui permettra à Bob de choisir, en temps $\mathcal{O}(n \log(n))$, à quelle intersection installer son nid.

correction

La distance L^1 se décompose naturellement en la somme de deux composantes horizontale et verticale. Or, la démarche utilisée en question 2 nous permet justement, dans un cadre unidimensionnel, de calculer en temps $\mathcal{O}(n)$ la somme des distances de chaque point aux autres, pourvu qu'ils soient triés. On peut donc trier nos n points par x_i croissants, en temps $\mathcal{O}(n \log(n))$, avant de calculer la somme des composantes horizontales des distances de

chaque point aux $n-1$ autres ; on procède ensuite de même avec les composantes verticales.
Cette question difficile a pour but de vérifier dans quelle mesure le candidat perçoit le fait qu'une distance L^1 est une somme de deux distances unidimensionnelles, puis qu'il est capable d'utiliser un calcul de sommes pour calculer des sommes de combinaisons linéaires.

Question 6. On suppose désormais que chacune des coordonnées x_i et y_i est comprise entre 0 et n^2-1. Comment adapter l'algorithme précédent pour s'assurer qu'il fonctionne désormais en temps $\mathcal{O}(n)$?

correction

L'enjeu est ici de trier n entiers compris entre 0 et n^2-1 en temps $\mathcal{O}(n)$. Pour ce faire, on peut s'inspirer du tri par paquets, qui permet de trier n entiers compris entre 0 et $n-1$ en s'aidant d'un tableau de taille n ; ici, on va écrire nos entiers en base n (sur deux chiffres, donc), puis les trier par unités et ensuite par n-aines.
Plus précisément, on utilise un tableau $\mathbf{T}$ de taille n, contenant n listes chaînées, et on commence par insérer chaque entier k dans la liste $\mathbf{T}[k \bmod n]$. En réunissant ces listes, on a trié les entiers par chiffres d es unités. On peut refaire la même opération pour les chiffres des n-aines ; la liste $\mathbf{T}[\ell]$ contient ainsi les entiers k tels que $\ell < k < (\ell+1)n$, eux-mêmes triés par chiffre des unités. En réunissant ces nouvelles listes, on a trié nos n entiers.
Cette question difficile a plusieurs buts : vérifier que le candidat saisit bien l'enjeu de la question, qui est de trier rapidement des entiers évoluant dans un intervalle entier de taille $n^{\mathcal{O}(1)}$; s'assurer qu'il connaît le tri par paquets ; le pousser à s'interroger sur la notion de tri stable que l'on a utilisée ici de manière sous-jacente, en re-triant des données pré-triées.

Question 7. Pour fluidifier le trafic, des urbanistes ont ajouté des routes orientées du Nord-Est vers le SudOuest, et du Nord-Ouest vers le Sud-Est. Ainsi, le croisement $(2,3)$ se désormais à $400\sqrt{2}+100 \approx 666$ mètres du croisement $(6,8)$: il suffit d'aller quatre fois vers le Nord-Est puis une fois vers le Nord. On suppose toujours que chacune des coordonnées x_i et y_i est comprise entre 0 et n^2-1, et que Bob veut installer son nid en l'une des n intersections (x_i, y_i).
Donner un algorithme qui permettra à Bob de choisir, en temps $\mathcal{O}(n)$, à quelle intersection installer son nid.

correction

On n'utilise plus la distance L^1, mais une nouvelle distance ad hoc, disons d, que l'on peut obtenir comme suit : si l'on note $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ les composantes horizontale et verticale de la distance entre deux points,

$$\mathrm{d} = \sqrt{2}\min(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + (\max(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) - \min(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y))$$

Or, si l'on pose $u = x+y$ et $v = x-y$, on constate que

$$\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 2\max(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \text{ et } \min(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \max(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$$

On en conclut que

$$\mathrm{d} = (s-1)\left(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u + \mathrm{d}v}{\sqrt{2}}\right)$$

Calculer les sommes de chacune des composantes en x, y, u et v des distances entre points, ce que l'on peut faire en temps $\mathcal{O}(n)$ opérations, permet donc de calculer la distance de chaque point au $n-1$ autres points.
Cette question, conçue pour être à peu près infaisable dans les conditions de l'épreuve, a pour but de distinguer les tous meilleurs candidats. Par conséquent, et contrairement aux précédentes questions difficiles, toute latitude est ici laissée au candidat, que l'examinateur pourra remettre sur les rails s'il écrit quelque chose de faux, mais sera livré à lui-même pour trouver les idées permettant la résolution de cette question.

Chapitre 65

(X) Langages rationnels et lemme de l'étoile *** (X 23, corrigé — oral - 118 lignes)

***

Langages,
sources : `xlangrat.tex`

Langages rationnels et lemme de l'étoile

On recherche un langage $\mathcal{L}$ non rationnel mais pour lequel $\mathcal{L}$ et son complémentaire satisfont le lemme de l'étoile.

Question 1. Soit Σ un alphabet fini. Le langage $\mathcal{L}_1$ formé des mots $w \in \Sigma^*$ dont la longueur est paire est-il rationnel ?

correction

Corrigé proposé par le jury
L'ensemble $\mathcal{L}_1$ est défini par l'expression rationnelle $\left(\Sigma^2\right)^*$. Il est donc rationnel.
Cette question a pour but de mettre le candidat en confiance, et de vérifier qu'il est à même de reconnaître des langages rationnels simples.

Question 2. Le langage $\mathcal{L}_2$ formé des mots $w \in \Sigma^*$ dont la longueur est le carré d'un entier est-il rationnel ?

Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages sur un alphabet Σ. On dit que $\mathcal{L}$ est $\mathcal{L}'$-*étoilé* s'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que tout mot $w \in \mathcal{L}'$ de longueur $|w| \geqslant n$ admet une factorisation $w = s \cdot t \cdot u$ pour laquelle $|s| \leqslant n, 1 \leqslant |t| \leqslant n$ et $s \cdot t^* \cdot u \subseteq \mathcal{L} \cup \{w\}$. Si $\mathcal{L}$ est $\mathcal{L}$-étoilé, on dit même que $\mathcal{L}$ satisfait le lemme de l'étoile.

correction

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout découpage du mot $w = a^{n^2} \in \mathcal{L}_2$ en trois facteurs $p = a^k$, $q = a^\ell$ et $r = a^{n^2-k-\ell}$ tels que $w = p \cdot q \cdot r$, on sait que $p \cdot q^* \cdot r \nsubseteq \mathcal{L}_2$, par exemple parce que $n + (\ell n)^2$ est compris strictement entre $(\ell n)^2$ et $(\ell n + 1)^2$, de sorte que $p \cdot q^{(\ell n)^2+1} \cdot r \notin \mathcal{L}_2$. L'ensemble $\mathcal{L}_2$ ne satisfait donc pas le lemme de l'étoile, ce qui lui interdit d'être rationnel.
Cette question a pour but de rassurer le candidat sur sa maîtrise du lemme de l'étoile, et de s'assurer de cette maîtrise. Elle vise également à étudier l'attitude du candidat face à une question dont la réponse n'est pas évidente. Par ailleurs, le fait qu'un candidat n'aie pas l'intuition du résultat, par opposition à un autre qui serait tout de suite allé dans la bonne direction, a été volontairement peu pénalisé ; en effet, il est raisonnable d'imaginer que certains candidats, mais pas tous, auront déjà démontré pendant l'année l'irrationalité du langage $\mathcal{L}_2$, qui figure parmi les exemples les plus usuels de langages irrationnels.

Question 3. Démontrer que tout langage rationnel satisfait le lemme de l'étoile.

correction

Soit n le nombre d'états d'un automate fini A reconnaissant $\mathcal{L}$, puis $w \in \mathcal{L}$ un mot de longueur $|w| = n+k \geqslant n$, et $s_0, \dots, s_{k+n}$ un chemin acceptant de w dans A. Deux des états $s_0, \dots, s_n$, disons s_i et s_j, coïncident, de sorte que $w_1 \cdots w_i \cdot (w_{i+1} \cdots w_j)^* \cdot w_{i+1} \cdots w_{k+n} \subseteq \mathcal{L}$.
Il s'agit là quasiment d'une question de cours. Cette question a pour buts de vérifier que le candidat est capable d'utiliser une définition précise d'une notion, susceptible de différer marginalement de l'idée qu'il en avait conçue ; qu'il a compris la démonstration du lemme de l'étoile ; qu'il est à l'aise tant avec la manipulation de quantificateurs qu'avec le fait de jongler entre états d'un automate, chemins dans cet automate, et mots associés.
L'autre finalité de cette question est d'établir explicitement le fait que, pour qu'un langage $\mathcal{L}$ soit rationnel, il est nécessaire que $\mathcal{L}$ et son complémentaire satisfassent tous deux le lemme de l'étoile ; le but du sujet étant précisément de démontrer que ce critère nécessaire n'est pas suffisant.

Question 4. Démontrer que, si $|\Sigma| = 1$, les langages qui satisfont le lemme de l'étoile sont les langages rationnels.

Soit $\mathcal{S}$ une partie finie de Σ^*. On note $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ l'ensemble des mots $s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$ que l'on peut factoriser en n éléments de $\mathcal{S}$ et pour lesquels il existe deux entiers i et $j = i+1$ ou $j = i+2$ tels que $s_i = s_j$.

correction

Soit $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ un langage satisfaisant le lemme de l'étoile, et n l'entier mentionné par le lemme. Pour tout entier $k \geqslant n$, le mot a^k admet une factorisation $a^k = a^i a^\ell a^j$ pour laquelle $1 \leqslant \ell \leqslant j$ et chaque mot $a^{i+z\ell+j} = a^{(k-\ell)+z\ell}$ obtenu lorsque $z \geqslant 0$ appartient à $\mathcal{L}$. Puisque ℓ divise n !, le langage $\mathcal{L}$ est donc une réunion d'ensembles singletons ou de la forme $a^{x+n!\mathbb{N}}$. Or, une telle réunion est nécessairement finie car, lorsque $x \equiv y \pmod{n!}$, l'un des deux ensembles $a^{x+n!\mathbb{N}}$ et $a^{x+n!\mathbb{N}}$ est inclus dans l'autre. En outre, chacun des ensembles que l'on réunit est rationnel. Le langage $\mathcal{L}$ est donc lui aussi rationnel.
Cette question a pour but d'évaluer la façon dont le candidat appréhende une question qui pourra le déstabiliser, puisqu'il est peu habituel d'utiliser le lemme de l'étoile comme critère suffisant pour être rationnel, ainsi que sa réaction face aux indications de l'examinateur. L'enjeu est ici multiple : il faut comprendre que chaque mot se caractérise par sa longueur, puis se figurer le rôle crucial que jouent ici les réunions finies de progressions arithmétiques, et enfin imaginer comment se ramener à manipuler de telles réunions.

Question 5. Démontrer que tout ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ est rationnel.

correction

L'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ est défini par l'expression rationnelle $\mathcal{S}^* \cdot \bigcup_{s \in \mathcal{S}} (s \cdot (\varepsilon + \mathcal{S}) \cdot s) \cdot \mathcal{S}^*$. Il est donc rationnel.
Cette question, beaucoup plus simple que la précédente et qui rappelle la question 1, a pour buts d'aider le candidat à s'approprier la définition des ensembles $\mathcal{M}(\mathcal{S})$, ainsi que de s'assurer qu'il est à l'aise avec la représentation d'ensembles par des expressions rationnelles.

Question 6. Démontrer que, si $|\mathcal{S}| \leqslant 4$, le langage $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ est $\mathcal{S}^*$-étoilé.

correction

Soit m la longueur maximale des mots de $\mathcal{S}$, et $w = s_1 \cdot s_2 \cdots s_k$ un mot de $\mathcal{S}^*$ de longueur au moins 5 m . Puisque $k \geqslant 5$, on considère un préfixe $x = s_1 \cdot s_2 \cdots s_5$ de w, de longueur au plus 5 m , puis un mot $\sigma \in \mathcal{S}$ dont la suite s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 contient deux occurrences, disons s_i et s_j.
Si $j = i+1$ ou $j = i+2$, on décide de pomper sur s_1 (c'est-à-dire de factoriser w comme $w = \varepsilon \cdot s_1 \cdot (s_2 \cdots s_k)$) si $i \geqslant 2$, et sur s_5 (c'est-à-dire de factoriser w comme $w = \varepsilon \cdot (s_1 \dots s_4) \cdot s_5 \cdot (s_6 \cdots s_k)$) si $i = 1$ (donc $j \leqslant 3$). De la sorte, quelle que soit la puissance à laquelle on élève notre pompe (le facteur s_1 ou s_5), on reste dans $\mathcal{S}^*$, et les deux facteurs s_i et s_j restent à distance 1 ou 2 de l'autre.
Si $j \geqslant i+3$, on décide cette fois de pomper sur $s_{i+1} \cdot s_{i+2}$. En effet, si l'on élève cette pompe à la puissance 0 , nos facteurs s_i et s_j se retrouvent à distance $j - i - 2 \leqslant 2$ l'un de l'autre ; si on l'élève à la puissance 1 , on obtient le mot w ; si on l'élève à une puissance supérieure ou égale à 2 , on récupère un facteur de la forme $s_{i+1} \cdot s_{i+2} \cdot s_{i+1}$.
Dans les trois cas, les mots obtenus appartiennent à $\mathcal{M}(\mathcal{S}) \cup \{w\}$.
Cette question manifestement difficile a pour but d'évaluer quelles idées intermédiaires le candidat peut mettre en œuvre, soit parce qu'il en a eu l'intuition, soit parce que l'examinateur les lui a suggérées. Ici, l'idée clé consiste à

décider de ne manipuler que des facteurs s_i, de manière à faire comme si l'on travaillait sur les lettres d'un alphabet de cardinal au plus 4, puis à épuiser les uns après les autres les différents cas possibles, en s'attachant à chaque fois à obtenir deux facteurs s_i proches l'un de l'autre.

Question 7. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Pour tout entier $k \leqslant 3$, on note σ_k le mot $(abc)^k \cdot (abd)^{3-k}$. Les langages $\mathcal{L}_3 = \left\{(\sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)^\ell \cdot (\sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3)^\ell : \ell \geqslant 0\right\}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{M}(\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}) \cup \mathcal{L}_3$ sont-ils rationnels ?

correction

Le langage $\mathcal{L}_3$ ne satisfait pas le lemme de l'étoile. En effet, si ℓ est assez grand, on devra choisir notre mot de pompage t au sein du préfixe $(\sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)^\ell$, et soit sortir du langage rationnel $(\sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)^* \cdot (\sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3)^*$, soit augmenter le nombre d'occurrences du facteur σ_2. Puisque $\mathcal{L}$ est la réunion disjointe du langage rationnel $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ et de $\mathcal{L}_3$, où l'on a posé $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, il n'est alors pas rationnel non plus, ce sans quoi le langage $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L} \backslash \mathcal{L}(\mathcal{S})$ serait rationnel lui aussi.
Cette question a pour but premier d'évaluer la familiarité du candidat avec les langages de la forme $L_\ell = \left\{x^\ell y^\ell : \ell \geqslant 0\right\}$, connus pour être algébriques mais pas rationnels. Ici, $\mathcal{L}_3$ est l'image d'un tel langage par un morphisme, et il revient alors d'adapter avec rigueur à $\mathcal{L}_3$ la preuve d'irrationalité de L_ℓ. L'étude du langage $\mathcal{L}$ est ensuite censée être une simple formalité, qui vise simplement à s'assurer de la rigueur du candidat, amené à vérifier que $\mathcal{L}_3$ s'exprime de manière simple à partir de deux langages dont l'un est déjà connu pour être rationnel.
Par ailleurs, le caractère ouvert de la question est de toute évidence factice, au vu de la question 8 et de l'ambition que l'on a mise en avant en tout début de sujet. Cette question a donc aussi pour but secondaire de s'assurer que le candidat est à même de prendre du recul sur son sujet et d'avoir saisi la progression des questions qu'il est amené à traiter.

Question 8. Démontrer que les ensembles $\mathcal{L}$ et $\Sigma^* \backslash \mathcal{L}$ satisfont le lemme de l'étoile.

correction

Puisque $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{M}(\mathcal{S})$, qui est $\mathcal{S}^*$-étoilé, $\mathcal{L}$ est également $\mathcal{S}^*$-étoilé, et il est même $\mathcal{L}'$-étoilé pour tout langage $\mathcal{L}'$ inclus dans $\mathcal{S}^*$, par exemple $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ lui-même. Par ailleurs, $\mathcal{S}^*$ ne contient aucun mot de $\mathcal{M}(\Sigma)$, donc $\Sigma^* \backslash \mathcal{L}$ contient $\mathcal{M}(\Sigma)$, qui est Σ^*-étoilé. Pour les mêmes raisons que précédemment, $\Sigma^* \backslash \mathcal{L}$ est donc Σ^*-étoilé, et même $\Sigma^* \backslash \mathcal{L}$-étoilé. Ainsi, $\mathcal{L}$ et $\Sigma^* \backslash \mathcal{L}$ satisfont tous deux le lemme de l'étoile.
Cette question assez difficile a pour but d'évaluer dans quelle mesure le candidat a compris les différents types de raisonnement mis en œuvre lors des questions précédentes. Les deux idées principales sont ici de comprendre les liens entre caractère $\mathcal{L}'$-étoilé et inclusion, ainsi que d'observer que $\mathcal{S}^*$ ne contient aucun mot de $\mathcal{M}(\Sigma)$. S'agissant de la dernière question du sujet, aucune indication n'était ici fournie aux candidats, qui devaient donc obtenir par eux-mêmes ces idées.

Chapitre 66

(X) Rationnalité de langages *** (X 24, corrigé, complété au jugé pour les trois dernières questions — oral - 213 lignes)

***

Langages, Lemme de l'étoile,
sources : `xlangrat2.tex`

1. Pour les langages suivants, établir s'ils sont rationnels ou non :

(a) Les mots de $\{0,1\}^*$ dont la somme des chiffres est paire.

correction

Corrigé de M.Péchaud
Oui : on considère l'automate à deux états, le premier étant acceptant et terminal où
- chaque état a une boucle étiquetée par 0
- de chaque état part une transition vers l'autre étiquetée par 1.

On vérifie que cet automate reconnaît bien le langage voulu.

(b) Les mots de la forme 0^k1^ℓ, où $k \wedge \ell = 1$.

correction

NDMP : à voir : je vois des arguments par des langages résiduels – donc plutôt hors programme – rien de plus au programme pour l'instant.

2. Soit Σ un alphabet. Pour un mot $w \in \Sigma^*$, on définit Pompe(w) comme le plus petit langage sur Σ contenant w et tel que $\forall (x,y,z) \in \Sigma^+ \times \Sigma^* \times \Sigma^+ \ xyz \in L \ \Rightarrow \ xyyz \in L$. Que dire de Pompe$(ab)$, où $\Sigma = \{a,b\}$?

correction

C'est $a\Sigma^*b$:
- $a\Sigma^*b$ vérifie clairement la propriété voulue.
- Montrons que c'est le plus petit langage les vérifiant. Soit L un langage vérifiant la propriété.
  Soit $u \in a\Sigma^*b$.
  On note u' le mot obtenu à partir de u en remplaçant toutes les séquences de a par un seul a, et de même pour les b.
  u' est donc de la forme $u = (ab)^n \in L$ (en itérant $n-1$ fois le facteur $y = ab$).
  On itère alors chacune des lettres pour reconstituer u. Donc $u \in L$, ce qui prouve bien que $a\Sigma^*b \subset L$.

3. On définit Cycle$(L) = \{vu \mid uv \in L\}$. Si L est rationnel, Cycle(L) l'est-il ? Que pensez vous de la réciproque ?

correction

Le résultat est vrai. Quitte à traiter séparément le cas de ϵ, on considère que ce mot n'est pas dans L.
On considère un AFD standardisé $\mathcal{A}$ reconnaissant L. Pour chaque état q, on créé un automate obtenu en
- créant deux copies de q : q' et q'' qui sont respectivement le seul état initial et le seul état acceptant du nouvel automate ;
- on fusionne l'état initial et l'état acceptant de l'automate de départ.

Cet automate reconnaît l'ensemble des mots vu tels que $uv \in L$, et la lecture de u amène dans $\mathcal{A}$ dans l'état q. L'union (finie) de ces langages pour tous les états q (autres que l'état initial ou acceptant) de $\mathcal{A}$ est le langage recherché, qui est donc rationnel.

La réciproque est fausse : considérer $\{a^n b a^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, qui n'est pas rationnel, alors que Cycle(L) est l'ensemble des mots contenant un seul b et un nombre pair de a est rationnel.

On définit le *mélange* $\wr$ de deux mots u et v par

$$\epsilon \wr u = \{u\} \quad v \wr \epsilon = \{v\}$$

$$u_1 u_{\geqslant 2} \wr v_1 v_{\geqslant 2} = \{u_1 x,\ x \in u_{\geqslant 2} \wr v_1 v_{\geqslant 2}\} \cup \{v_1 x,\ x \in u_1 u_{\geqslant 2} \wr v_{\geqslant 2}\}$$

4. Si L et L' sont rationnels, est-ce-que $L \wr L'$ l'est ?

correction

Soient $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Delta)$ et $\mathcal{A}' = (Q', q_0', F', \Delta')$ deux AFD reconnaissant respectivement L et L'.
On définit un nouvel automate $\mathcal{A}'' = (Q'', (q_0, q_0'), F \times F', \Delta'')$
- $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$
- $(p, p') \to (q, q') \in \Delta''$ ssi ($p = q$ et $p' \to q' \in \Delta'$) ou ($p \to q \in \Delta$ et $p' = q'$)

l'idée étant qu'en lisant une lettre, on avance dans l'un des automates de départ, tout en ne bougeant pas dans l'autre.
Le langage reconnu par $\mathcal{A}''$ est $L \wr L'$, qui est donc bien rationnel.

5. Soit L rationnel. On définit

$$L_0 = L$$
$$L_{n+1} = L \wr L_n$$
$$L_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$$

L_∞ est-il rationnel ?

correction

Non. Soit $L = \{a, b\}$. On montre par récurrence immédiate sur n que tout mot de L_n a autant de a que de b $(n-1)$. C'est donc vrai aussi pour les mots de L_∞.
On montre également facilement que $a^n b^n \in L_\infty$ pour tout $n \in Ne$.
Donc $L_\infty \cap a^* b^* = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, qui n'est pas rationnel.
Donc par contraposée, L_∞ non plus.

Soit $\sigma = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ un alphabet. Le *vecteur de Parikh* d'un mot w est le vecteur $p(w) \in \mathbb{N}^k$ donné par

$$p(w) = (|w|_{a_1}, |w|_{a_2}, \ldots, |w|_{a_k}),$$

où $|w|_{a_i}$ dénote le nombre d'occurrences de la lettre a_i dans le mot w.

Un sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$ est dit *linéaire* s'il est de la forme
$u_0 + u_1\mathbb{N} + \cdots + u_k\mathbb{N} = \{u_0 + t_1 u_1 + \ldots + t_m u_m \mid t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{N}\}$
pour des vecteurs $u_0, \ldots, u_m \in \mathbb{N}^k$.

Un sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$ est dit *semi-linéaire* s'il est une union finie de parties linéaires.

6. Montrer que pour tout ensemble semi-linéaire E, il existe un langage régulier L tel que l'ensemble $P(L)$ des vecteurs de Parikh des mots de L est égal à E.

correction

On remarque qu'il suffit de montrer le résultat pour les sous-ensembles linéaires, par stabilité par union des langages rationnels.
On considère donc $u_0 + u_1\mathbb{N} + \cdots + u_k\mathbb{N}$.
On remarque que si L et L' sont deux langages, alors, $P(L.L') = \{v + v',\ v \in P(L), v' \in P(L')\} = P(L) + P(L')$ (essentiellement car $|L.L'|_a = |L|_a + |L'|_a$).
Donc il suffit de montrer le résultat sur chacun des termes – par stabilité par concaténation des langages réguliers.
- Il existe un langage L tel que $P(L) = u_0 = (n_1, \cdots n_k)$ (par exemple le langage réduit au mot $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$).

- Il existe un langage L tel que $P(L) = u_1\mathbb{N}$ où $u_1 = (n_1, \cdots n_k)$ (par exemple $L = (a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k})^*$), et de même pour $u_2, \cdots u_k$.

On a donc bien le résultat voulu.

7. Démontrer la réciproque.

8. Prouver que le résultat de la question précédente reste vrai pour tout langage hors-contexte.

Chapitre 67

(X) Algorithme du tri lent *** (X 24, corrigé — oral - 147 lignes)

***

Algorithmique, Tri, Complexité, Preuve,
sources : `xtrilent.tex`

Algorithme du tri lent

On souhaite trier un tableau A de longueur n en utilisant l'algorithme de TriLent présenté ci-dessous. L'objectif de ce problème est de démontrer que l'algorithme est correct et d'évaluer certaines statistiques liées à sa complexité.

```
Fonction TriLent(A_{1...n}) :
   pour i=1,2,...,n
        pour j=1,2,...,n :
             si A_i < A_j : échanger A_i et A_j
```

Question 1. Quelle est, en fonction de n, la complexité de l'algorithme de TriLent, en nombre de comparaisons, dans le pire cas ? dans le meilleur cas ?

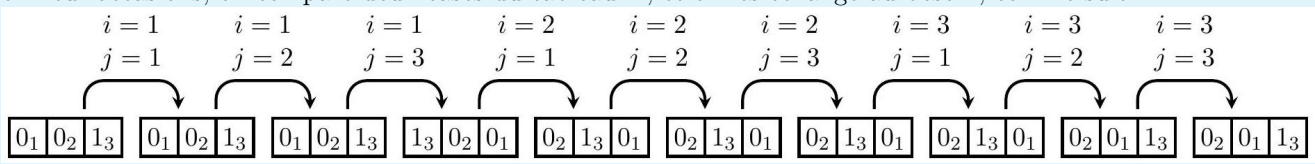
correction

Corrigé proposé par le jury
On a deux boucles imbriquées, chacune faisant prendre à sa variable (i ou j) n valeurs distinctes. À chaque fois, on effectue une comparaison. Cela fait donc n^2 comparaisons en tout, et ce quel que soit le tableau proposé en entrée.
Cette question a pour but de mettre le candidat en confiance et de lui donner une première occasion de s'approprier les notations : A_i désigne, au moment où est effectuée la comparaison $A_i < A_j$, le $i^{\text{ème}}$ élément du tableau. Elle permet aussi de vérifier que le candidat ne va pas annoncer sans avoir réfléchi au préalable que ≪le meilleur cas est celui où A est trié ≫, phrase certes vraie mais qui suggère une incompréhension.

Question 2. Un algorithme de tri est stable si deux objets A_i et A_j égaux pour notre fonction de comparaison et pour lesquels $i < j$ sont envoyés en deux positions u et v telles que $u < v$. Le TriLent est-il stable ?

correction

Imaginons un tableau à trois éléments, dont deux sont égaux pour notre fonction de comparaison : il s'agit, par exemple, du tableau $0_1, 0_2, 1_3$, où l'on a indiqué à côté de chaque objet sa position initiale. Au cours de l'algorithme, en neuf occasions, on compare deux cases du tableau A, et on les échange au besoin, comme suit :

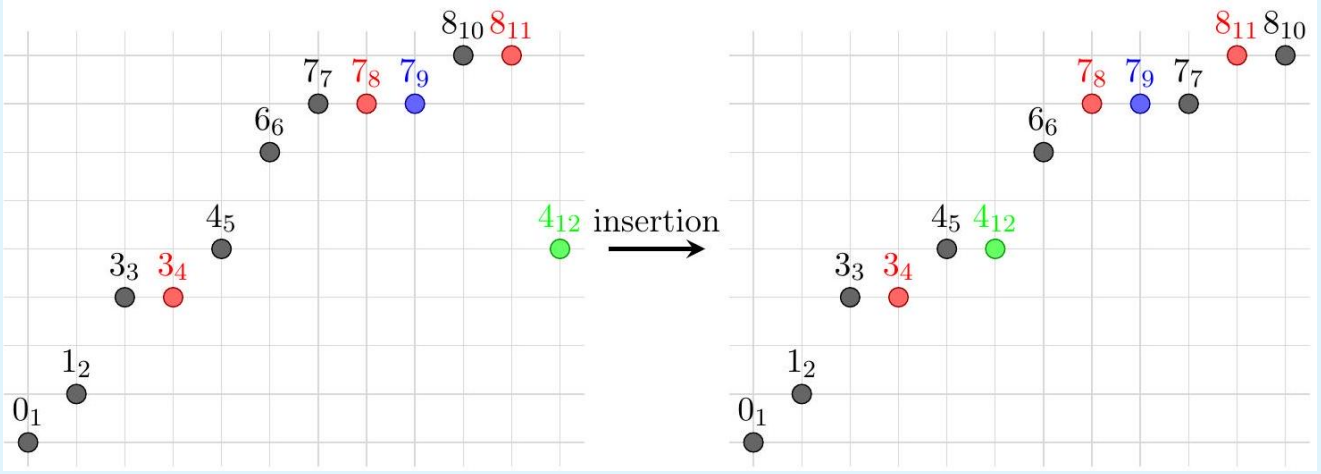


L'élément 0_2, initialement en deuxième position, est passé à gauche de l'élément 0_1, qui lui est égal pour notre fonction de comparaison mais était initialement situé en première position. Le TriLent n'est donc pas stable. [1]
Cette question a trois objectifs : tout d'abord, aider le candidat à se familiariser avec l'algorithme qu'ils devra ensuite étudier ; ensuite, s'assurer qu'il est capable d'exécuter calmement mais précisément un algorithme sur une entrée simple qu'il aura lui-même choisie ; enfin, vérifier qu'il est capable de représenter clairement les objets qu'il manipule, tels que des quantités censées être égales pour notre fonction de comparaison mais distinctes en pratique.

Question 3. Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$. Démontrer que, juste après avoir effectué i fois la boucle pour des lignes 3 et 4 , l'élément A_i est l'élément maximal du tableau, et le sous-tableau formé des entrées $A_1, A_2, \ldots, A_i$ est trié dans l'ordre croissant.

correction

Lors du premier passage dans la boucle de la ligne 2 , alors que i vaut 1 , on compare successivement A_1 avec toutes les cases du tableau, de manière à faire croître A_1 dès que l'on rencontre un nouveau maximum. Après ce premier passage, lors duquel on a effectué une fois la boucle pour des lignes 3 et 4, l'objet A_1 est bien maximal, et le tableau $A_1, \ldots, A_1$, formé d'un seul élément, est nécessairement trié dans l'ordre croissant. On dira qu'il s'agit là de la phase 1 de l'algorithme ; toutes les opérations effectuées ensuite formeront la phase 2.
Par la suite, après que l'on a effectué i fois cette boucle, l'algorithme consiste à comparer chaque case du tableau avec la $i+1^{\text{ème}}$ case. Ainsi, lorsque j varie de 1 à $i+1$, on effectue en fait l'insertion de la valeur A_{i+1} dans le sous-tableau trié $A_1, A_2, \ldots, A_i$: dès que l'on repère une case du tableau, disons A_j, telle que $A_j > A_{i+1}$, on échange A_j et A_{i+1}, de sorte que la $i+1^{\text{ème}}$ case nous sert en fait de mémoire tampon pour ensuite décaler d'une case vers la droite le sous-tableau $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i$. Ces cases seront décalées dans leur ensemble, mais pas forcément individuellement, dans le cas où le tableau contient des doublons : quand plusieurs cases consécutives étaient égales et dépassaient la valeur à insérer, c'est la plus à gauche d'entre elles qui est passée à droite, comme illustré ci-dessous ; chaque objet est représenté par sa valeur et, en indice, sa position d'origine.



Une fois cette étape franchie, A_{i+1} est la valeur maximale d'un sous-tableau trié qui contenait le maximum de A, donc on ne l'échangera plus jamais lorsque $j \geqslant i+2$. Par conséquent, une fois notre $i+1$ ème exécution de la boucle pour effectuée, le sous-tableau $A_1, A_2, \ldots, A_{i+1}$ est bien trié dans l'ordre croissant, et se termine avec la valeur maximale du tableau A.
Cette question vise à affiner la compréhension qu'a le candidat de l'algorithme de TriLent et de vérifier comment il entreprend de se forger des intuitions qui mèneront à cette compréhension, en particulier la disjonction entre phases 1 et 2 .
À défaut de la description donnée ci-dessus, il était aussi possible d'exhiber directement puis de démontrer un invariant de boucle, ce qui pouvait néanmoins s'avérer piégeux : on a tôt fait de proposer un invariant presque correct mais qui sera difficile à corriger, ou bien de répondre à la question mais sans avoir acquis de compréhension globale sur le fonctionnement de l'algorithme.

1. On aurait pu aller plus vite en s'arrêtant sitôt le tableau $0_2, 1_3, 0_1$ obtenu, après avoir comparé A_i et A_j lorsque $(i,j) = (2,1)$, car alors $A_1 = 0_2$ ne sera plus jamais déplacé.

Question 4. Démontrer que le TriLent permet effectivement de trier le tableau fourni en entrée.

correction

Il suffit d'appliquer la question précédente au cas où $i = n$: une fois l'algorithme terminé, le tableau est trié.
Cette question a pour seuls buts d'aboutir à une conclusion intermédiaire raisonnable, ici la correction de l'algorithme de TriLent, et de redonner un coup de fouet aux candidats, tout heureux d'avoir résolu une question en cent fois moins de temps que la précédente.

Question 5. On suppose que les n éléments du tableau fourni en entrée sont deux à deux distincts. Donner le plus petit nombre possible d'échanges que le TriLent peut être amené à effectuer.

correction

Sans perte de généralité, le tableau à trier est une permutation des entiers $1, 2, \ldots, n$. Juste après que la boucle pour des lignes 3 et 4 a été exécutée i fois, l'entier n se trouve donc en case i du tableau. En particulier, il a changé au moins $n-1$ fois de case.
Réciproquement, si l'on est parti du tableau $n, 1, 2, \ldots, n-1$, notre étude effectuée en question 3 indique qu'aucun échange n'est effectué lors de la phase 1, tandis que tous les échanges ultérieurs ont lieu juste après que l'on a comparé A_{i-1} et A_i. Ainsi, l'algorithme de TriLent s'est effectivement contenté de $n-1$ échanges pour trier notre tableau.
Il s'agit là de la première question manifestement ouverte, pour laquelle le candidat n'a, a priori, aucune idée de la réponse, si ce n'est qu'elle sera comprise entre 0 et n^2. Y répondre nécessite non seulement d'avoir compris comment l'élément maximal du tableau se déplacerait, mais aussi de regarder des exemples de tableaux susceptibles d'être simples, tels que le tableau déjà trié dans l'ordre croissant. De manière peut-être surprenante, celui-ci n'est pas le tableau optimal, car on effectue $n-1$ échanges inutiles lors de la phase 1 , même si la phase 2 est ensuite très économe. C'est alors que le candidat doit être amené à remplacer le tableau trié par le tableau obtenu à l'issue de la phase 1.

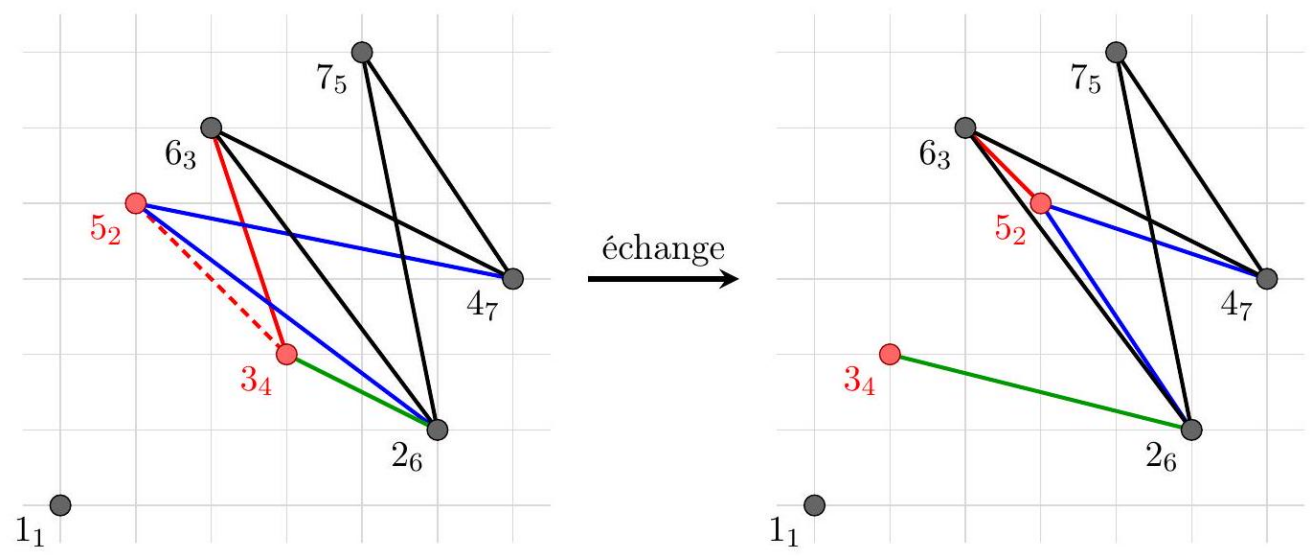
Question 6. Le tableau fourni en entrée est une permutation des entiers $1, 2, \ldots, n$ choisie uniformément au hasard. Démontrer que le nombre moyen d'échanges qu'effectuera le TriLent est égal à $n(n-1)/4 + 2H_n - 2$, où

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

est le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique.

correction

Il convient ici de considérer séparément les phases 1 et 2, puis de trouver un invariant qui nous permettra d'estimer le nombre d'échanges effectués ; on va en fait démontrer que le nombre d'inversions du tableau A, c'est-à-dire le nombre de couples (k, ℓ) tels que $k < \ell$ et $A_k > A_\ell$, augmente de 1 à chaque échange de la phase 1 , et diminue de 1 à chaque échange de la phase 2 .
Regardons, par exemple, ce qui se passe en phase 2. Lorsque l'on échange deux cases A_i et A_j et que $i \geqslant 2$, on insère en fait la case A_i au sein du sous-tableau trié $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$. Par conséquent, si l'on note A le tableau avant l'échange et A' le tableau après l'échange, les inversions de A' sont :
▷ les couples (u, i) tels que $j < u < i$; il y en a a ;
▷ les couples (i, v) tels que $i < v$ et $A_j = A'_i > A'_v = A_v$; il y en a b ;
▷ les couples (j, v) tels que $i < v$ et $A_i = A'_j > A'_v = A_v$; il y en a c ;
▷ les couples (u, v) tels que $\{u, v\} \cap \{i, j\} = \varnothing, u < v$ et $A_u > A_v$; il y en a d.
Par ailleurs, les inversions de A sont :
▷ les couples (u, i) tels que $j \leqslant u < i$; il y en a $a + 1$;
▷ les couples (i, v) tels que $i < v$ et $A_i > A_v$; il y en a c ;
▷ les couples (j, v) tels que $i < v$ et $A_j > A_v$; il y en a b ;
▷ les couples (u, v) tels que $\{u, v\} \cap \{i, j\} = \varnothing, u < v$ et $A_u > A_v$; il y en a d.
Comme annoncé, échanger A_i et A_j a donc permis de baisser de 1 le nombre d'inversions du tableau considéré ; cette situation est illustrée ci-après : les deux points échangés sont dessinés en rouge, et l'inversion qu'ils formaient, représentée par une ligne rouge hachurée, a disparu. Les autres inversions ont subsisté, parfois en changeant de point d'accroche ; les quatre différents types d'inversions énumérés ci-dessus (il y en a respectivement a ou $a+1, b, c$ et d) sont représentés en rouge, bleu, vert et noir ; chaque objet est représenté par sa valeur et, en indice, sa position d'origine.



Or, le nombre moyen d'inversions d'une permutation choisie uniformément au hasard est $n(n-1)/4$. En effet, pour toute paire (i,j) telle que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, si l'on note $\sigma_{i,j}$ la transposition qui échange i et j, on remarque que la fonction $\pi \mapsto \pi \circ \sigma_{i,j}$ est une involution de $\mathfrak{S}_n$, qui partitionne $\mathfrak{S}_n$ en orbites de taille 2 . De surcroît, $\pi(i) < \pi(j)$ si et seulement si $\pi\left(\sigma_{i,j}(i)\right) > \pi\left(\sigma_{i,j}(j)\right)$. Ainsi, le couple (i,j) est une inversion pour une des deux permutations de chaque orbite $\{\pi, \pi \circ \sigma_{i,j}\}$: au total, les $n!$ permutations ont donc $n! \times \binom{n}{2}/2 = n! \times n(n-1)/4$ inversions, ce qui nous fait bien une moyenne de $n(n-1)/4$ inversions par permutation.
On étudie ensuite la phase 1 ; notre invariant se montre en utilisant un raisonnement analogue à celui utilisé en phase 2 : si on annulait notre échange, on supprimerait une inversion, donc l'échange a bien créé une inversion. Ensuite, lorsque $i = 1$ et $2 \leqslant j \leqslant n$ et que l'on compare A_1 et A_j, on sait déjà que A_1 a été redéfini comme $\max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(j-1)\}$, tandis que $A_j = \pi(j)$. On procède donc à un échange lorsque $\pi(j) = \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(j)\}$, ce qui arrive avec probabilité $1/j$. Au total, lors de la phase 1 , on effectue donc $1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n = H_n - 1$ échanges en moyenne ; on devra ensuite effectuer un échange supplémentaire pour se débarrasser de l'inversion que notre échange vient de créer.
En conclusion, l'algorithme de TriLent requiert bien $n(n-1)/4 + 2\left(H_n - 1\right)$ échanges en moyenne.
Cette question n'est manifestement guère faisable sans indication de la part de l'examinateur. Elle a pour but de tester le candidat sur des questions de nature probabiliste, qui forment un pan important de l'informatique, et de voir, dans un premier temps, comment il tente de se débrouiller face à une question fort ardue en apparence (et en réalité).
En particulier, une fois donnée l'indication, en pratique indispensable, selon laquelle il fallait vérifier que chaque échange ajoutait ou supprimait une inversion du tableau à trier, il fallait ensuite modéliser aussi simplement que possible les différents phénomènes observés. Ici, avoir compris que les phases 1 et 2 différaient radicalement, mais aussi savoir utiliser simplement des bijections et la linéarité de l'espérance était nécessaire pour espérer répondre à la question. De même, pour démontrer la véracité de l'indication donnée par l'examinateur, il était beaucoup plus simple de dessiner la permutation modifiée et d'en représenter graphiquement les inversions susceptibles de disparaître ou d'apparaître, plutôt que de tenter une disjonction de cas sans aucun apport de l'intuition. Procéder ainsi permettait notamment de traiter un seul des cas, disons celui de la suppression d'une inversion, pour ensuite convaincre à l'oral l'examinateur que l'autre cas se traiterait de même.

Question 7. Donner le nombre maximal d'échanges que l'algorithme de TriLent peut être amené à effectuer.

correction

Sans perte de généralité, on peut toujours supposer que le tableau à trier contient des valeurs deux à deux distinctes ; si tel n'était pas le cas, et quitte à séparer artificiellement deux valeurs considérées comme égales, on ne diminuerait pas le nombre d'échanges effectués.
Une fois ce cadre posé, on aimerait bien pouvoir maximiser simultanément le nombre d'échanges effectués lors des phases 1 et 2 ; c'est impossible. En effet, réaliser les $n-1$ échanges possibles lors de la phase 1 nécessite de partir du tableau trié. Notre idéal étant inatteignable, on note donc k le nombre d'échanges effectués en
phase 1 puis on s'intéresse, l'entier k étant fixé, au nombre maximal d'inversions, disons inv k, que notre tableau obtenu en fin de phase 1 a pu avoir : le nombre maximal d'échanges effectués dans l'ensemble des phases 1 et 2 sera $\max\left\{k + \mathrm{inv}_k : 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$.
Les k valeurs qu'a prises la case A_1 du tableau au cours de la phase 1 avant que cette case ne prenne la valeur maximale se retrouvent à former une sous-suite croissante au sein du tableau obtenu en fin de phase 1 , et que l'on notera B. Si l'on note I l'ensemble des numéros de cases occupés par ces valeurs au sein du tableau B, aucun couple $(i,j) \in I^2$ ne forme une inversion de B. Ainsi, le tableau B compte au plus $n(n-1)/2 - k(k-1)/2$ inversions, et l'algorithme de TriLent a effectué au plus

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{n(n-1) - k(k-3)}{2} \leqslant \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

échanges.

Réciproquement, si l'on choisit $k = 1$, on souhaite précisément que B soit le tableau trié dans l'ordre décroissant, que l'on a pu obtenir en partant du tableau $n-1, n, n-2, n-3, \ldots, 2, 1$. En conclusion, le nombre maximal d'échanges auquel procède l'algorithme de TriLent est $\left(n^2 - n + 2\right)/2$.

Cette question a pour but de résister même aux candidats les plus aguerris ; aucune indication n'était donc prévue pour les guider vers la solution. Elle nécessite tout d'abord de se rendre compte que l'on peut légitimement supposer que l'on travaille sur une permutation, puis d'avoir bien compris que compter les inversions était la bonne manière de compter les échanges effectués par le TriLent, et enfin de renoncer à maximiser simultanément deux quantités liées, pour fixer l'une et maximiser l'autre.

Chapitre 68

(X) Codage par couleur *** (X 24, corrigé — oral - 154 lignes)

***

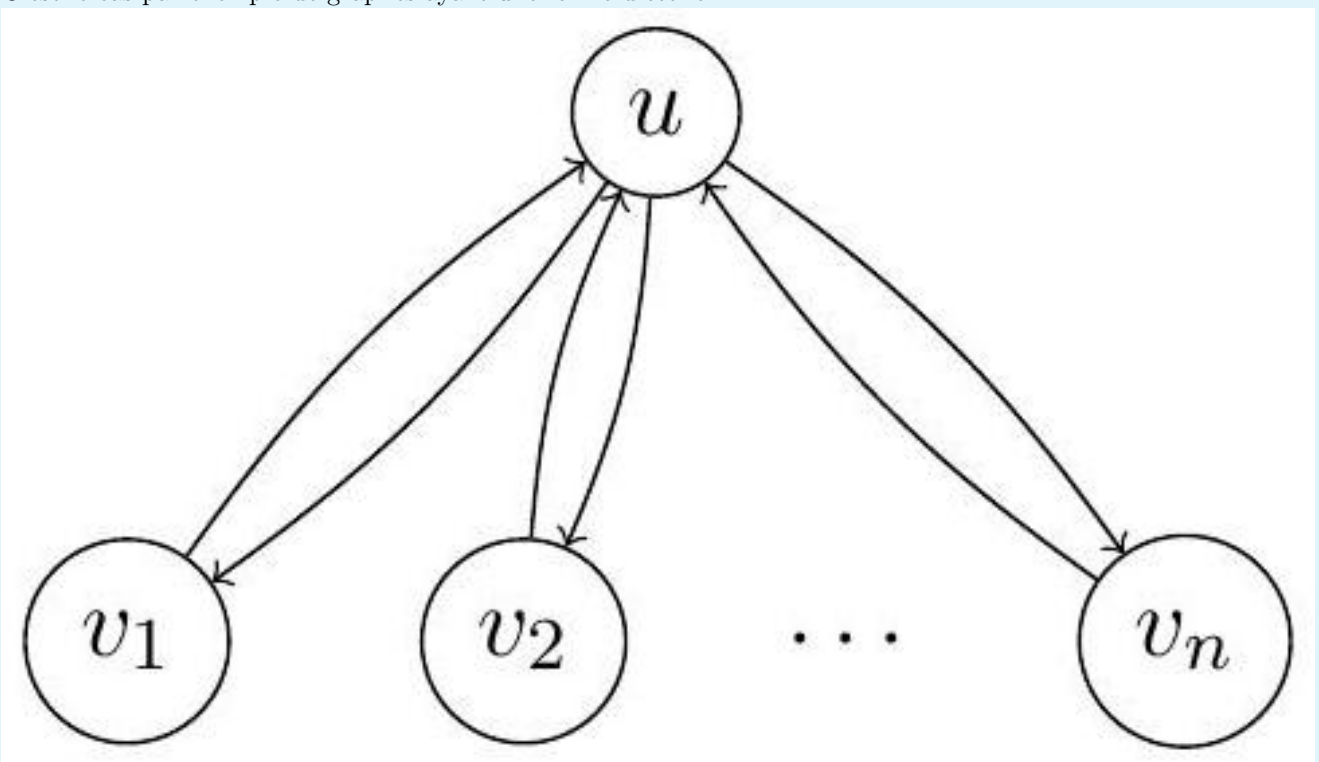
Algorithmique, Complexité, Graphes, Backtracking,
sources : `xcodagecouleur.tex`

On considère des graphes orientés, supposés sans boucle. On cherchera dans ces graphes un chemin d'une longueur spécifique (sans imposer de point de départ et d'arrivée), où la longueur d'un chemin est le nombre de sommets qui apparaissent dans le chemin. Sauf mention explicite du contraire, on considère toujours des chemins simples, c'est-à-dire qui ne passent pas deux fois par le même sommet.

Question 1. Y a-t-il des graphes fortement connexes arbitrairement grands sans chemin de longueur 4 ?

correction

Corrigé proposé par le jury
La réponse à cette question est positive, comme l'ont déterminé tous les candidats (plus ou moins rapidement). C'est le cas par exemple de graphes ayant une forme d'étoile :



Le but de cette question est de rappeler la notion de graphes orientés fortement connexes en lien avec le sujet, et d'attirer l'attention sur la définition peu standard de la longueur des chemins que le sujet adopte (afin de simplifier certains calculs par la suite). La question permet aussi de remarquer que ce qui est étudié dans le sujet ensuite, à

savoir la recherche de chemins, n'est pas une tâche triviale : les chemins tels que définis dans le sujet n'existent pas forcément, même quand le graphe est grand, et même en imposant qu'il soit fortement connexe.

Question 2. Proposer un algorithme naïf pour déterminer, étant donné un graphe G et un entier $k \in \mathbb{N}$, si G contient un chemin de longueur k. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

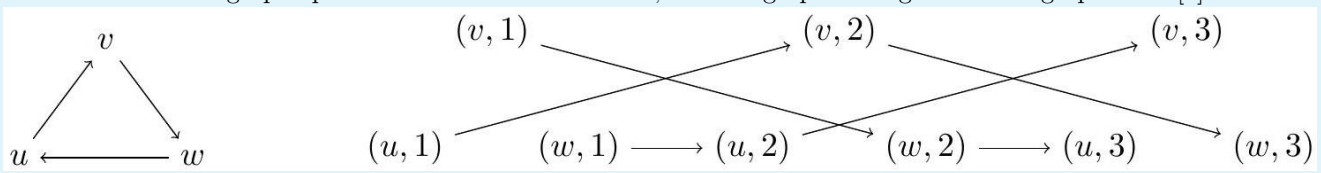
correction

La réponse attendue est simplement de dire que l'on teste toutes les combinaisons possibles : pour n sommets et m arêtes, il y a n^k combinaisons de k sommets à tester, pour lesquelles il faut vérifier qu'il y a bien l'arête demandée. Si on suppose que le graphe est représenté par des listes d'adjacence, alors on obtient une complexité de $O\left(n^k \times m\right)$. Une autre façon de répondre à cette question est d'utiliser une approche de type retour sur trace, ou bien une exploration en largeur qui marque les sommets en cours de visite et s'interdit de les réutiliser (mais ne marque pas les sommets où la visite est finie, ceux-ci pouvant être visités à nouveau). La complexité asymptotique sera alors similaire, même si en pratique le retour sur trace est bien sûr préférable à l'énumération naïve des combinaisons : en effet il n'explore que les successeurs de chaque sommet, et il abandonne quand une solution partielle ne peut pas être étendue.
Cette question vise à vérifier que le candidat est capable de proposer rapidement un algorithme naïf pour un problème, ce qui doit être un préalable à toute tentative d'optimisation. En effet, si le graphe d'entrée est très petit, un algorithme naïf sera suffisant et sera bien plus facile à implémenter. Les candidats ne doivent pas hésiter, quand une approche naïve est demandée, à proposer des algorithmes peu efficaces : les examinateurs sauront leur préciser si c'est quelque chose de plus efficace qui est attendu.

Question 3. Dans cette question seulement, on s'intéresse à des chemins non nécessairement simples. Proposer un algorithme efficace pour déterminer, étant donné un graphe G et un entier $k \in \mathbb{N}$, si G contient un tel chemin de longueur k.

correction

Cette question, qui se voulait facile, s'est avérée en réalité être très classante. L'argument que nous attendions consistait à construire une sorte de produit cartésien. Étant donné le graphe $G = (V, E)$, on crée le graphe $G \times [k]$ dont les sommets sont $V \times \{1, \ldots, k\}$ et les arêtes sont $\{((u, i), (v, i+1)) \mid (u, v) \in E, 1 \leqslant i < k\}$. On teste ensuite simplement s'il existe un chemin de la première copie à la dernière. Autrement dit, on cherche à tester s'il y a un chemin d'un sommet de la forme $\{(u, 1) \mid u \in V\}$ à un sommet de la forme $\{(u, k) \mid u \in V\}$. Ceci peut se faire avec un parcours en largeur par exemple. La complexité est en $O((n+m) \times k)$ si on suppose à nouveau que le graphe est représenté avec des listes d'adjacence.
La construction du graphe produit est illustrée ci-dessous, avec un graphe G à gauche et le graphe $G \times [3]$ à droite :



D'autres approches sont possibles en ne construisant le graphe produit qu'implicitement. Enfin, il est possible d'adopter une approche en complexité linéaire (c'est-à-dire $O(n+m)$) en distinguant deux cas : soit le graphe contient un cycle orienté (ce qui peut se vérifier en temps linéaire) et alors il y a toujours un chemin non-simple de longueur k pour n'importe quel k, soit le graphe est acyclique et on peut utiliser l'algorithme pour les graphes acycliques qui est l'objet de la question 9 .

Question 4. Dans cette question seulement, on suppose que les sommets du graphe d'entrée G portent chacun une couleur parmi l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$, et on souhaite savoir si G admet un chemin multicolore de longueur k, c'est-à-dire un chemin $v_1, \ldots, v_k$ où les couleurs des sommets sont deux à deux distinctes.
Proposer un algorithme pour résoudre ce problème, et en expliciter la complexité.

correction

Les candidats ont tous compris (spontanément, ou avec indication) qu'un chemin multicolore est nécessairement simple, par application du principe des tiroirs. L'objectif était alors de se rendre compte que, grâce à ce fait, on pouvait utiliser une variante de la question précédente. Là encore, cette question était finalement plus classante que prévu.
Pour répondre à la question, on crée 2^k copies du graphe $G = (V, E)$, c'est-à-dire qu'on considère le graphe $\left(V \times 2^k, E'\right)$ avec E' défini comme suit : pour chaque arête $(u, v) \in E$, en notant c la couleur de v, pour chaque $S \subseteq 2^k$, on crée $((u, S), (v, S \cup \{c\}))$.

On cherche ensuite à savoir s'il existe un chemin depuis un sommet de la forme $(u, \{c\})$ pour c la couleur de u à un sommet de la forme $\left(v, 2^k\right)$. Si un tel chemin existe, c'est forcément un chemin dans G (par projection sur la première composante), et par définition des arêtes il a forcément visité un sommet de chaque couleur. En particulier le chemin est forcément simple. Donc cet algorithme identifie bien correctement si G contient un chemin multicolore.
La complexité est linéaire en la taille du graphe produit c'est-à-dire $O\left((n+m)2^k\right)$.

Pour améliorer le temps d'exécution de l'algorithme de la question 2, on va concevoir un algorithme probabiliste. Un tel algorithme a la possibilité de tirer au hasard certaines valeurs au cours de son exécution ; et on regarde, sur chaque entrée, quelle est la probabilité que l'algorithme réponde correctement, en fonction de ces tirages aléatoires.
On veut résoudre le problème suivant : étant donné un graphe G et un entier k, on veut savoir si G a un chemin de longueur k. On considère d'abord l'algorithme (1) que voici. On répète M fois l'opération suivante (où M sera déterminé ensuite) : tirer k sommets au hasard et vérifier si ces sommets forment un chemin. On répond OUI si l'un de ces tirages est réussi et NON dans le cas contraire.

Question 5. On suppose que le graphe G a n sommets et contient précisément $1 \leqslant c \leqslant n^k$ chemins de longueur k. Exprimer la probabilité que l'algorithme (1) réponde OUI, en fonction de M, de k, de n, et de c.

correction

Pour les candidats qui ont pu l'atteindre, cette question n'a guère posé de difficulté. Il y a n^k tirages possibles et c de ces tirages réussissent. Donc chaque tirage a une probabilité de c/n^k de réussir, et une probabilité de $1 - c/n^k$ d'échouer. On effectue M tirages indépendants, donc avec probabilité $\left(1 - c/n^k\right)^M$ aucun tirage ne réussit et l'algorithme répond NON (la réponse incorrecte) ; et avec probabilité $1 - \left(1 - 1/c^k\right)^M$ un tirage au moins réussit et l'algorithme répond OUI (la réponse correcte).

Question 6. Si on suppose que G n'a pas de chemin de longueur k, que répond l'algorithme (1) ?

correction

Quand le graphe n'a pas de chemin, l'algorithme répond toujours NON (et c'est la réponse correcte).
Cette question est sans difficulté et sert juste à vérifier la compréhension du comportement de cet algorithme probabiliste.

Question 7. Pour $M = n^k$, montrer que l'algorithme répond correctement dans les deux cas avec probabilité au moins $1/2$.

correction

Si le graphe d'entrée n'a pas de chemin, il n'y a rien à montrer par la question précédente. S'il y en a un, il faut montrer que la probabilité d'échec est d'au plus $1/2$. C'est-à-dire montrer que $\left(1 - 1/n^k\right)^{n^k} \leqslant 1/2$. Excluons le cas trivial où $n^k = 1$. Le logarithme du membre gauche vaut $n^k \ln\left(1 - 1/n^k\right)$, ce qui par concavité du logarithme est plus petit que $n^k \times \left(-1/n^k\right)$, donc plus petit que -1 . Or le logarithme du membre droit vaut $-\ln 2$. Comme $e > 2$ on a bien $-\ln 2 \geqslant -1$. On en déduit donc que la probabilité d'échec est au plus $1/2$.

Question 8. Quel est le temps d'exécution de l'algorithme (1) pour ce choix de M ? Commenter.

correction

L'algorithme (1) s'exécute en $O(M \times m)$. Donc pour le M indiqué on retrouve la même complexité qu'en question 2. On attend du candidat qu'il remarque que l'algorithme (1) n'est donc pas très intéressant en tant que tel.

On considère à présent l'algorithme (2) dont le principe est le suivant. On répète M fois l'opération suivante (où M sera déterminé ensuite) : tirer un ordre total aléatoire $v_1 < \cdots < v_n$ sur les sommets de G, retirer les arêtes (u, v) où on a $u > v$, et vérifier si le graphe résultant $G_<$a un chemin de longueur k (d'une manière qui reste à déterminer).

Question 9. Quelle propriété ont les graphes $G_<$construits par cet algorithme ? Comment exploiter cette propriété pour trouver efficacement les chemins de longueur k ?

correction

Cette question commence à nécessiter de l'initiative de la part du candidat. Il faut en effet remarquer que les graphes $G_<$sont toujours acycliques. En effet, l'ordre ¡ peut servir de tri topologique ; autrement dit un cycle donnerait un cycle dans l'ordre total ce qui par transitivité impliquerait qu'il n'est pas asymmétrique.
Or, on peut résoudre efficacement sur des graphes acycliques le problème de savoir s'ils admettent un chemin de longueur k. En effet, on considère les sommets de $G_<$dans l'ordre inverse de $<$, et on calcule pour chaque sommet v la longueur $l(v)$ du plus long chemin qui part de v. Si v n'a aucune arête sortante, cette longueur est de 0 . Si v a des arêtes sortantes vers $w_1, \ldots, w_k$, les valeurs $l(w_1), \ldots, l(w_k)$ étant déjà calculées car $v < w_i$ pour tout i, on pose $l(v) = 1 + \max_i l(w_i)$.
Cet algorithme s'exécute en temps linéaire, c'est-à-dire en $O(n+m)$ sur un graphe à n sommets et m arêtes. On note en particulier que cette complexité ne dépend pas de k.

Question 10. Proposer un M qui garantisse que cet algorithme réponde correctement avec une probabilité $\geqslant 1/2$. Quelle complexité obtient-on ? Commenter.

correction

Encore une fois, l'algorithme est biaisé vers le faux : si le graphe d'entrée n'a pas de chemin il répond toujours NON (correctement). Donc il suffit de majorer la probabilité que l'algorithme réponde NON alors que le graphe contient un chemin de longueur k. Or, si le graphe d'entrée a un chemin de longueur k, alors il est identifié si chacune de ses $k-1$ arêtes sont conservées, et c'est le cas si et seulement si les sommets sont triés dans le bon ordre par l'ordre total qu'on a tiré. Ainsi chaque tirage a une probabilité de $1/k$! d'identifier le chemin, et la probabilité d'échec est d'au plus $(1-1/k!)^M$.
On peut donc prendre $M = k$! pour obtenir une probabilité d'échec constante, pour la même raison que pour l'algorithme (1). La complexité de l'algorithme est alors de $O(k! \times (n+m))$ si on suppose qu'on peut tirer un ordre aléatoire en temps $O(m)$. C'est le cas, par exemple en $O(n)$ avec l'algorithme de Fisher-Yates pour tirer une permutation aléatoire, mais ces détails n'étaient pas demandés au candidat.
On remarque que la complexité obtenue, qui est de $O(k! \times (n+m))$ est bien meilleure que $O\left(n^k\right)$ du moment que k n'est pas trop grand.

Question 11. En utilisant les chemins multicolores, proposer un algorithme probabiliste qui répond correctement avec probabilité au moins $1/2$ et s'exécute en $O\left((2e)^k \times (n+m)\right)$ sur un graphe à n sommets et m arêtes.

correction

Dans cette dernière question, il faut davantage de créativité pour espérer répondre. L'idée est de répéter M fois l'opération suivante : tirer un k-coloriage aléatoire du graphe, et vérifier si on trouve un chemin multicolore de longueur k avec l'algorithme de la question 4, en temps $O\left(2^k(n+m)\right)$.
Quand il n'y a pas de chemin de longueur k, alors il n'y a pas de tel chemin qui soit multicolore et l'algorithme répond correctement NON.
Quand il y a un tel chemin, la probabilité de le trouver est la probabilité que ce chemin soit effectivement multicolore dans le coloriage tiré. Il y a k^k coloriages possibles dont k ! sont corrects. Or, on sait par la formule de Stirling que $k! = \Omega\left((k/e)^k\right)$. Donc la probabilité qu'un chemin de longueur k donné soit multicolore est de $\Omega\left(1/e^k\right)$.
Ainsi, si on tire $M = e^k$ coloriages aléatoires et qu'on cherche à chaque fois un chemin multicolore, on aura à nouveau une probabilité constante de succès si le graphe contient un chemin de longueur k. On peut plus précisément garantir une probabilité de $1/2$ au moins, en multipliant par une constante le nombre de tirages. Le temps d'exécution sera alors bien de $O\left(e^k 2^k(n+m)\right)$, à savoir $M = e^k$ tirages aléatoires (à une constante multiplicative près) puis $O\left(2^k(n+m)\right)$ pour chaque tirage.
Cette technique du codage par couleur, introduite par Alon, Yuster, et Zwick, est utilisable pour d'autres problèmes : voir par exemple https ://en.wikipedia.org/wiki/Color-coding.

THE END