

1. Rappels sur les graphes

Aspect historique

• C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui est à l'origine de la création de la théorie des graphes.

Définition



1. Rappels sur les graphes

Aspect historique

- C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui est à l'origine de la création de la théorie des graphes.
- Il en pose les bases en résolvant le problème des 7 ponts de Königsberg en 1740.

Définition



1. Rappels sur les graphes

Aspect historique

- C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui est à l'origine de la création de la théorie des graphes.
- Il en pose les bases en résolvant le problème des 7 ponts de Königsberg en 1740.
- Les graphes interviennent à présent dans de nombreux problèmes (recherche de chemins, réseau, ...) en informatique comme en mathématiques.

Définition



1. Rappels sur les graphes

Aspect historique

- C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui est à l'origine de la création de la théorie des graphes.
- Il en pose les bases en résolvant le problème des 7 ponts de Königsberg en 1740.
- Les graphes interviennent à présent dans de nombreux problèmes (recherche de chemins, réseau, ...) en informatique comme en mathématiques.

Définition

Un graphe orienté est la donnée :



1. Rappels sur les graphes

Aspect historique

- C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui est à l'origine de la création de la théorie des graphes.
- Il en pose les bases en résolvant le problème des 7 ponts de Königsberg en 1740.
- Les graphes interviennent à présent dans de nombreux problèmes (recherche de chemins, réseau, ...) en informatique comme en mathématiques.

Définition

Un graphe orienté est la donnée :

ullet D'un ensemble de sommets S (V pour *vertice* en anglais.).



1. Rappels sur les graphes

Aspect historique

- C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui est à l'origine de la création de la théorie des graphes.
- Il en pose les bases en résolvant le problème des 7 ponts de Königsberg en 1740.
- Les graphes interviennent à présent dans de nombreux problèmes (recherche de chemins, réseau, ...) en informatique comme en mathématiques.

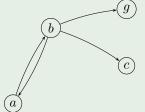
Définition

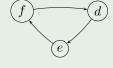
Un graphe orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets S (V pour vertice en anglais.).
- D'un ensemble de couples de sommets $A \subseteq S \times S$ appelés arc (notés $x \to y$).(E pour *edges* en anglais).



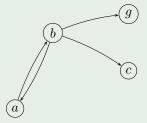
1. Rappels sur les graphes

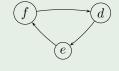






1. Rappels sur les graphes

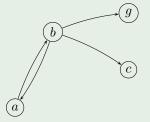


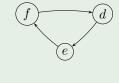


$$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$



1. Rappels sur les graphes





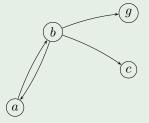
$$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

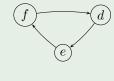
$$A = \{(e, f), (d, e), (f, d), (a, b), (b, a), (b, c), (b, g)\}$$



1. Rappels sur les graphes

Exemple





$$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$A = \{(e, f), (d, e), (f, d), (a, b), (b, a), (b, c), (b, g)\}$$

 \triangle Seule la données de S et A défini le graphe et pas les positions des sommets sur le schéma.



1. Rappels sur les graphes

Vocabulaire

• Le degré d'un graphe est son nombre de sommets.



1. Rappels sur les graphes

- Le degré d'un graphe est son nombre de sommets.
- Un arc de la forme (x, x) est une boucle.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (s,x).



1. Rappels sur les graphes

- Le degré d'un graphe est son nombre de sommets.
- Un arc de la forme (x, x) est une boucle.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (s,x).
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_{-}(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (x,s).



1. Rappels sur les graphes

- Le degré d'un graphe est son nombre de sommets.
- Un arc de la forme (x, x) est une boucle.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (s,x).
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_{-}(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (x,s).
- Un cheminde longueur n du sommet s au sommet t dans un graphe (S,A) est une séquence x_0,\ldots,x_n de sommets tels que $x_0=s,\ x_n=t$ et $(x_i,x_{i+1})\in A$ pour $i\in [\![0;n-1]\!].$



1. Rappels sur les graphes

- Le degré d'un graphe est son nombre de sommets.
- Un arc de la forme (x, x) est une boucle.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (s,x).
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_{-}(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (x,s).
- Un cheminde longueur n du sommet s au sommet t dans un graphe (S,A) est une séquence x_0,\ldots,x_n de sommets tels que $x_0=s$, $x_n=t$ et $(x_i,x_{i+1})\in A$ pour $i\in \llbracket 0;n-1 \rrbracket.$
- Un chemin est simple lorsqu'il est sans répétition d'arcs.



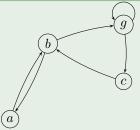
1. Rappels sur les graphes

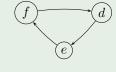
- Le degré d'un graphe est son nombre de sommets.
- Un arc de la forme (x, x) est une boucle.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (s,x).
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_-(s)$ est le nombre d'arcs de la forme (x,s).
- Un cheminde longueur n du sommet s au sommet t dans un graphe (S,A) est une séquence x_0,\ldots,x_n de sommets tels que $x_0=s$, $x_n=t$ et $(x_i,x_{i+1})\in A$ pour $i\in \llbracket 0;n-1 \rrbracket.$
- Un chemin est simple lorsqu'il est sans répétition d'arcs.
- Un cycle est un chemin simple d'un sommet à lui même.



1. Rappels sur les graphes

Exemple

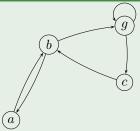


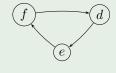


• Donner $d_+(b)$.



1. Rappels sur les graphes

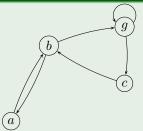


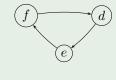


- Donner $d_+(b)$.
- Donner $d_{-}(g)$.



1. Rappels sur les graphes





- Donner $d_+(b)$.
- Donner $d_{-}(g)$.
- Donner un chemin sans cycle de q à a.



1. Rappels sur les graphes

Définition

Un graphe non orienté est la donnée :



1. Rappels sur les graphes

Définition

Un graphe non orienté est la donnée :

ullet D'un ensemble de sommets ou noeuds S.



1. Rappels sur les graphes

Définition

Un graphe non orienté est la donnée :

- \bullet D'un ensemble de sommets ou noeuds S.
- D'un ensemble de **paires** de sommets A appelés arcs ou arêtes notés x-y.



1. Rappels sur les graphes

Définition

Un graphe non orienté est la donnée :

- \bullet D'un ensemble de sommets ou noeuds S.
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arcs ou arêtes notés x y.

Vocabulaire

• Dans le contexte des graphes orientés cela revient à $(x,y) \in A$ ssi $(y,x) \in A$.



1. Rappels sur les graphes

Définition

Un graphe non orienté est la donnée :

- \bullet D'un ensemble de sommets ou noeuds S.
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arcs ou arêtes notés x-y.

- Dans le contexte des graphes orientés cela revient à $(x,y) \in A$ ssi $(y,x) \in A$.
- Les définitions de chemin, degrés, ...des graphes orientés s'étendent naturellement aux graphes non orientés.



1. Rappels sur les graphes

Définition

Un graphe non orienté est la donnée :

- \bullet D'un ensemble de sommets ou noeuds S.
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arcs ou arêtes notés x-y.

- Dans le contexte des graphes orientés cela revient à $(x,y) \in A$ ssi $(y,x) \in A$.
- Les définitions de chemin, degrés, ...des graphes orientés s'étendent naturellement aux graphes non orientés.
- \bullet On dit qu'un graphe non orienté (S,A) est connexe lorsqu'il existe un chemin entre toute paire de sommets.



1. Rappels sur les graphes

Graphes pondérés

• Dans de nombreuses situations, on est amené à attacher une information aux arcs d'un graphe (ex : distance entre deux villes, coût d'une liaison dans un réseau informatique, ...), on parle alors de graphe pondéré.



1. Rappels sur les graphes

Graphes pondérés

- Dans de nombreuses situations, on est amené à attacher une information aux arcs d'un graphe (ex : distance entre deux villes, coût d'une liaison dans un réseau informatique, ...), on parle alors de graphe pondéré.
- L'information, ou étiquette attaché à un noeud est souvent de nature numérique, on parle alors de poids ou longueur d'un arc.



1. Rappels sur les graphes

Graphes pondérés

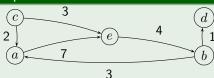
- Dans de nombreuses situations, on est amené à attacher une information aux arcs d'un graphe (ex : distance entre deux villes, coût d'une liaison dans un réseau informatique, ...), on parle alors de graphe pondéré.
- L'information, ou étiquette attaché à un noeud est souvent de nature numérique, on parle alors de poids ou longueur d'un arc.
- Le coût d'un chemin est alors la somme des poids des arcs qui le compose.



1. Rappels sur les graphes

Graphes pondérés

- Dans de nombreuses situations, on est amené à attacher une information aux arcs d'un graphe (ex : distance entre deux villes, coût d'une liaison dans un réseau informatique, ...), on parle alors de graphe pondéré.
- L'information, ou étiquette attaché à un noeud est souvent de nature numérique, on parle alors de poids ou longueur d'un arc.
- Le coût d'un chemin est alors la somme des poids des arcs qui le compose.





1. Rappels sur les graphes

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe à n sommets par sa matrice d'adjacence M, c'est à dire un tableau de n lignes et n colonnes :



1. Rappels sur les graphes

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe à n sommets par sa matrice d'adjacence M, c'est à dire un tableau de n lignes et n colonnes :

• On numérote les sommets du graphe



1. Rappels sur les graphes

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe à n sommets par sa matrice d'adjacence M, c'est à dire un tableau de n lignes et n colonnes :

- On numérote les sommets du graphe
- S'il y a une arête du sommet i vers le sommet j alors on place un 1 à la ligne i et à la colonne j de M



1. Rappels sur les graphes

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe à n sommets par sa matrice d'adjacence M, c'est à dire un tableau de n lignes et n colonnes :

- On numérote les sommets du graphe
- S'il y a une arête du sommet i vers le sommet j alors on place un 1 à la ligne i et à la colonne j de M
- Sinon on place un 0



1. Rappels sur les graphes

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe à n sommets par sa matrice d'adjacence M, c'est à dire un tableau de n lignes et n colonnes :

- On numérote les sommets du graphe
- S'il y a une arête du sommet i vers le sommet j alors on place un 1 à la ligne i et à la colonne j de M
- Sinon on place un 0

Remarques

• Si le graphe n'est pas orienté alors la matrice est symétrique par rapport à sa première diagonale.



1. Rappels sur les graphes

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe à n sommets par sa matrice d'adjacence M, c'est à dire un tableau de n lignes et n colonnes :

- On numérote les sommets du graphe
- S'il y a une arête du sommet i vers le sommet j alors on place un 1 à la ligne i et à la colonne j de M
- Sinon on place un 0

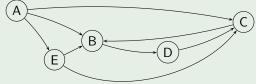
- Si le graphe n'est pas orienté alors la matrice est symétrique par rapport à sa première diagonale.
- On peut représenter les graphes pondérés en écrivant le poids à la place du 1 pour chaque arête.



1. Rappels sur les graphes

Exemple

• En supposant les sommets numérotés dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice d'adjacence du graphe suivant :

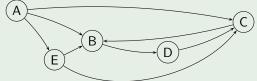




1. Rappels sur les graphes

Exemple

• En supposant les sommets numérotés dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice d'adjacence du graphe suivant :



② Dessiner le graphe ayant la matrice d'adjacence suivante (on appellera les sommets S_1, S_2, \ldots) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1. Rappels sur les graphes

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.



1. Rappels sur les graphes

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.

• On crée pour chaque sommet du graphe une liste



1. Rappels sur les graphes

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.

- On crée pour chaque sommet du graphe une liste



1. Rappels sur les graphes

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.

- On crée pour chaque sommet du graphe une liste



1. Rappels sur les graphes

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.

- On crée pour chaque sommet du graphe une liste
- \bullet S'il y a une arête du sommet S_i vers le sommet S_j alors S_j est dans la liste de S_i

Remarques

• Lorsqu'un graphe a "peu" d'arête cette implémentation est plus intéressante en terme d'occupation mémoire que celle par matrice d'adjacence.



1. Rappels sur les graphes

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.

- On crée pour chaque sommet du graphe une liste
- \bullet S'il y a une arête du sommet S_i vers le sommet S_j alors S_j est dans la liste de S_i

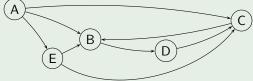
- Lorsqu'un graphe a "peu" d'arête cette implémentation est plus intéressante en terme d'occupation mémoire que celle par matrice d'adjacence.
- En Python, on utilisera un dictionnaire pour représenter les listes d'adjacences, les clés sont les sommets et les valeurs les listes associées



1. Rappels sur les graphes

Exemple

• Ecrire les listes d'adjacences du graphe suivante :

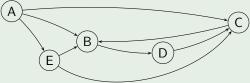




1. Rappels sur les graphes

Exemple

Ecrire les listes d'adjacences du graphe suivante :



Dessiner le graphe représenté par le dictionnaire Python suivante :



1. Rappels sur les graphes

Parcours d'un graphe

A la base des algorithmes sur les graphes, on trouve les parcours de graphe, c'est à dire l'exploration des sommets. A partir du sommet de départ, on peut :

 explorer tous ses voisins immédiats, puis les voisins des voisins et ainsi de suite. Le graphe est donc exploré en « cercle concentrique » autour du sommet de départ ..., on parle alors de parcours en largeur ou breadth first search (BFS) en anglais.



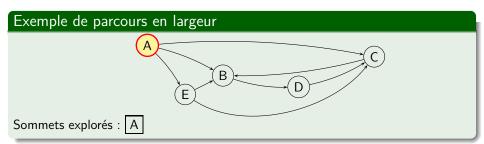
1. Rappels sur les graphes

Parcours d'un graphe

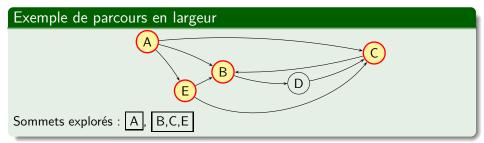
A la base des algorithmes sur les graphes, on trouve les parcours de graphe, c'est à dire l'exploration des sommets. A partir du sommet de départ, on peut :

- explorer tous ses voisins immédiats, puis les voisins des voisins et ainsi de suite. Le graphe est donc exploré en « cercle concentrique » autour du sommet de départ ..., on parle alors de parcours en largeur ou breadth first search (BFS) en anglais.
- explorer à chaque étape le premier voisin non encore exploré. Lorsque qu'on atteint un sommet dont tous les voisins ont déjà été exploré, on revient en arrière, on parle alors de parcours en profondeur ou depth first search (*DFS*) en anglais.

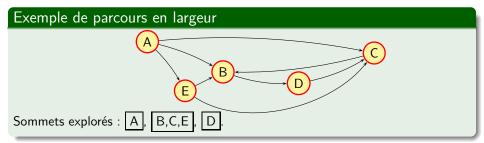




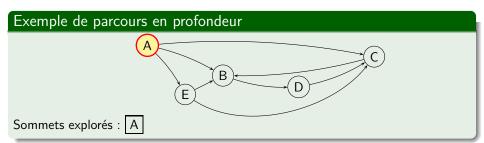




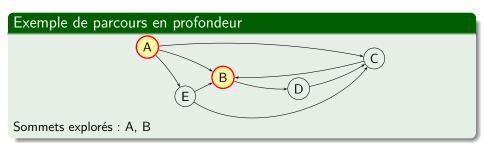














1. Rappels sur les graphes

Exemple de parcours en profondeur A B C Sommets explorés : A, B, D



1. Rappels sur les graphes

Exemple de parcours en profondeur A B B C Sommets explorés : A, B, D, C



1. Rappels sur les graphes

Exemple de parcours en profondeur A B B C Sommets explorés : A, B, D, C, E



1. Rappels sur les graphes

File et parcours en largeur

 Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).



1. Rappels sur les graphes

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.



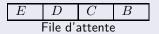
1. Rappels sur les graphes

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).



1. Rappels sur les graphes

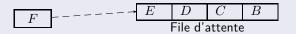
- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

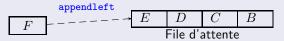
- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

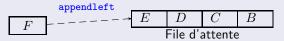
- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

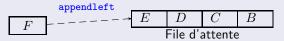
- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

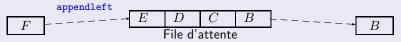
- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

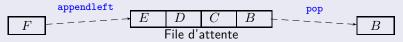
- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (FIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en O(1).
- Les listes de Python ne sont pas adaptées, on utilisera le module deque de Python, enfiler correspond alors à appendleft et défiler à pop.





1. Rappels sur les graphes

File et parcours en profondeur

 Pour un parcours en profondeur, on stocker aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est donc du type dernier entré, premier sorti (last in first out (LIFO)).



1. Rappels sur les graphes

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocker aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est donc du type dernier entré, premier sorti (last in first out (LIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une pile.



1. Rappels sur les graphes

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocker aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est donc du type dernier entré, premier sorti (last in first out (LIFO)).
- Ce type de structure de données s'appelle une pile.
- Pour l'implémentation, on se contente d'utiliser la récursivité de façon à ce que la pile des sommets en attente d'être exploré soit gérée de façon automatique par les appels récursifs.



