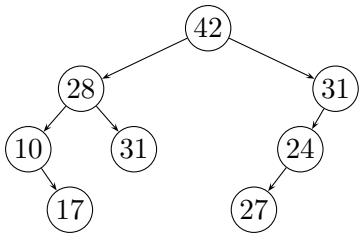
Devoir surveillé d'informatique

Consignes

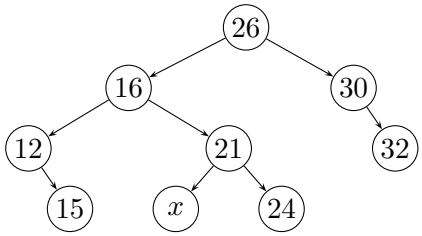
- Les programmes demandés doivent être écrits en C ou en OCaml. Dans le cas du C, on suppose que les librairies standards usuelles (`<stdio.h>`, `<stdlib.h>`, `<stdbool.h>`, `<stdassert.h>`, ...) sont déjà importées.
- On pourra toujours librement utiliser une fonction demandée à une question précédente même si cette question n'a pas été traitée.
- Veillez à présenter vos idées et vos réponses partielles même si vous ne trouvez pas la solution complète à une question.
- La clarté et la lisibilité de la rédaction et des programmes sont des éléments de notation.

❑ Exercice 1 : *Questions de cours*

1. Donner la définition d'un arbre binaire.
2. Donner les définitions de la hauteur et de la taille d'un arbre binaire.
3. Donner la définition d'un arbre binaire de recherche.
4. Prouver qu'un arbre binaire est un arbre binaire de recherche si et seulement si son parcours infixe fournit les clés dans l'ordre croissant.
5. Donner l'ordre des noeuds lors des parcours prefixe, infixe et suffixe de l'arbre suivant :



6. On considère l'arbre binaire suivant :



Donner les valeurs de l'étiquette x pour lesquelles cet arbre est un arbre binaire de recherche.

7. On implémente les arbres binaires de recherche en OCaml à l'aide du type suivant :

```
type abr =
  | Vide
  | Noeud of  abr * int * abr;;
```

Ecrire une fonction `insere : int -> abr -> abr` qui prend en argument un entier x et un arbre binaire de recherche a et renvoie un arbre binaire de recherche contenant x et tous les éléments de a.

❑ Exercice 2 : *Valeur plus petite la plus proche*

On considère un tableau d'entiers *positifs* et on s'intéresse au problème de la recherche pour chacun de ces entiers de la valeur plus petite la plus proche située à gauche dans le tableau. Dans le cas où aucune valeur située à gauche dans le tableau n'est plus petite que la valeur considérée alors on renverra -1.
Par exemple dans le tableau $\{2, 1, 7, 9, 8, 3\}$:

— Il n'y a aucune valeur à gauche de 2, donc la valeur plus petite la plus proche est -1,

— Pour 1, aucune valeur située à gauche n'est plus petite, donc on renvoie aussi -1,

— Pour 7, la valeur plus petite la plus proche est 1.

— Pour 9, c'est 7.

— Pour 8 c'est 7.

— Pour 3, c'est 1.

Et donc le tableau des valeurs plus petites les plus proches dans cet exemple est $\{-1, -1, 1, 7, 7, 1\}$

1. Donner le tableau des valeurs plus petites les plus proches pour le tableau $\{5, 7, 11, 6, 9, 2\}$
2. On propose l'algorithme suivant pour résoudre ce problème : pour chaque élément `tab[i]` du tableau on parcourt les valeurs `tab[i-1], ..., tab[0]` *dans cet ordre*, si on trouve un élément strictement inférieur à `tab[i]` alors c'est la valeur plus petite la plus proche, sinon le valeur plus petite la plus proche est `-1`. Ecrire une implémentation de cet algorithme en C sous la forme d'une fonction de signature `int *vpp_naif(int tab[], int size)` qui prend en argument un tableau d'entiers `tab` ainsi que sa taille `size` et un renvoie un tableau de taille `size` contenant à l'indice `i` la valeur strictement inférieure la plus proche de `tab[i]`.
3. Justifier rapidement que l'algorithme précédent a une complexité quadratique

   On considère maintenant l'algorithme suivant qui utilise une pile dotée de son interface usuelle (`est_vide, empiler, depiler`) et de la fonction `sommet` qui renvoie la valeur située au sommet de la pile sans la dépiler.

Algorithme : Valeurs plus petites les plus proches

Entrées : Un tableau t d'entiers positifs de taille n
Sorties : Un tableau s d'entiers positifs de taille n tel que $s[i]$ soit la valeur plus petite la plus proche de $t[i]$

```
1  s ← tableau de taille n
2  p ← pile de taille maximale n
3  pour i ← 0 à p − 1 faire
4      tant que p n'est pas vide et sommet(p) ⩾ t[i] faire
5          depiler(p) ;
6      fin
7      si p est vide alors
8          s[i] ← −1
9      fin
10     sinon
11         s[i] ← sommet(p)
12     fin
13     empiler t[i] dans p
14 fin
15 return s
```

4. On fait fonctionncer cet algorithme sur le tableau $\{2, 7, 5, 8, 6, 3\}$. Recopier et compléter le tableau suivant qui indique pour chaque valeur de l'indice `i` de la boucle `for` l'état de la pile et du tableau s après l'exécution de la boucle pour les valeurs de `i` de 0 à 5 (on note une pile avec les extrémités `|` et `>` pour indiquer le sommet de la pile)

i	État de la pile	État du tableau s
Initialement	`|>`	$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
0	`|2>`	$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
1	`|2, 7>`	$\{-1, 2, -1, -1, -1, -1\}$
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...

5. On suppose qu'on a *déjà implémentée* en C une structure de donnée de pile qu'on manipule à l'aide des fonctions suivantes :

   — `est_vide` de signature `bool est_vide(pile p)`,

   — `empiler` de signature `void empiler(pile *p, int v)`,

— `depiler` de signature `int depiler(pile *p)`.

Ecrire en utilisant ces fonctions une fonction `sommet` de signature `int sommet(pile *p)` qui renvoie le sommet de la pile sans le depiler si la pile n'est pas vide et -1 sinon.

6. Ecrire une implémentation en C de l'algorithme des valeurs plus petites les plus proches donné ci-dessus et utilisant une pile
7. Prouver que cet algorithme est de complexité linéaire, on pourra vérifier que chaque élément du tableau t est empilé une fois et dépilé au plus une fois.

❑ **Exercice 3** : *Base de données de publications scientifiques*

On utilise le schéma relationnel suivant afin de modéliser une base de données de publications scientifiques. Chaque article publié ayant un ou plusieurs auteurs.

- **Article** (IdArticle, titre, revue, volume, annee)
- **Auteur** (IdAuteur, nom, prenom)
- **Publie** (#Article,#Auteur)

La clé étrangère #Article de la table **Publie** fait référence à la clé primaire de la table **Article** et la clé étrangère #Auteur de la table **Publie** fait référence à la clé primaire de la table **Auteur**. Les attributs titre, revue, nom et prénom sont des chaines de caractères, les autres sont des entiers.

1. Justifier que l'attribut #Article de la table **Publie** seul, ne peut pas servir de clé primaire pour cette table.
2. Expliquer ce qu'affiche la requête suivante :

```
SELECT nom, prenom
FROM Auteur
JOIN Publie ON Auteur.IdAuteur = Publie.Auteur
WHERE Publie.Article = 42
```

3. Ecrire les requêtes permettant d'afficher les informations suivante :
   a) La liste des titres des articles parus en 2022 listé par ordre alphabétique.
   b) Les noms des revues listé par ordre alphabétique, sans répetition.
   c) Les noms et prénoms des auteurs qui ont publié dans la revue "Nature" en 2000.
   d) Les titres et revues des articles écrits (ou co-écrit) par Donald Knuth en 2010.
   e) La liste des volumes de la revue "Nature" en 2020 avec le nombre d'article qu'il contient.
   f) Pour chaque revue, son nom et l'année de publication de son article le plus ancien.

❑ **Exercice 4** : *Représentations classiques d'ensembles* 🎓 d'après CCSE 2021 - MP (Partie 2)

Les programmes de cet exercice doivent être écrits en OCaml.

On s'intéresse dans cet exercice à des structures de données représentant des ensembles d'entiers naturels. On implémente dans cet exercice des ensembles par des structures connues et, on notera $|E|$ le cardinal d'un ensemble E.

■ **Partie I** : Avec une liste d'entiers triés

Dans cette partie uniquement, on implémente un ensemble d'entiers positifs par la liste des ses éléments rangés *dans l'ordre croissant.*

1. Ecrire une fonction `succ_list` de signature `int list -> int -> int` prenant en arguments une liste d'entiers *distincts* dans l'ordre croissant et un entier x et renvoyant le successeur de x dans la liste, c'est à dire le plus petit entier strictement supérieur à x de la liste (-1 si cela n'existe pas.).

```
let rec succ_list entiers x =
  match entiers with
  | [] -> -1
  | h::t -> if h>x then h else succ_list t x
```

2. Donner la complexité de cette fonction dans le pire des cas.

■ **Partie II** : Avec un tableau trié

Soit N un entier naturel strictement positif, fixé pour toute cette partie. On choisit de représenter un ensemble d'entiers E de cardinal $n \leq N$ par un tableau de taille $N+1$ dont la case d'indice 0 indique le nombre n d'éléments de E et les cases d'indices 1 à n contiennent les éléments de E *rangés dans l'ordre croissant*, les autres cases étant non significatives. Par exemple, le tableau `[| 3; 2; 5; 7; 9; 1; 14 |]` représente l'ensemble $\{2, 5, 7\}$.

1. Pour une telle implémentation d'un ensemble E, décrire brièvement des méthodes permettant de réaliser chacune des opérations ci-dessous (on ne demande pas d'écrire des programmes) et donner leurs complexités dans le pire cas :
   — déterminer le maximum de E,
   — tester l'appartenance d'un élément x à E
   — ajouter un élément x dans E (on suppose que $x \notin E$ et que la taille du tableau est suffisante)

2. Par une méthode dichotomique, écrire une fonction `succ_vect` de signature `int array -> int -> int` prenant en arguments un tableau `t` codant un ensemble E comme ci-dessus et un entier x et renvoyant le successeur de x dans E (-1 si cela n'existe pas.)

```
let succ_vect entiers x =
  if x >= entiers.(entiers.(0)) then -1 else (
  let imin = ref 1 in
  let imax = ref entiers.(0) in
  let found = ref false in
  let imid = ref 0 in
  while (!imax - !imin >=0 && not !found) do
    imid := (!imax + !imin)/2;
    if (entiers.(!imid)=x) then found:=true else
      if (entiers.(!imid)<x) then imin := !imid + 1  else imax := !imid-1
    done;
    if (!found) then entiers.(!imid+1) else entiers.(!imin))
  ;;
```

3. Calculer la complexité dans le pire cas de la fonction `succ_vect` en fonction de n.

4. Ecrire une fonction `union_vect` de signature `int array -> int array -> int array` prenant en arguments deux tableaux `t_1` et `t_2`, de taille N, codant deux ensembles E_1 et E_2 et renvoyant le tableau correspondant à $E_1 \cup E_2$. On supposera que $|E_1 \cup E_2| \leq N$.

```
let union t1 t2 =
  (* size est la variable N de l'énoncé*)
  let t = Array.make size 0 in
  let size1 = t1.(0) in
  let size2 = t2.(0) in
  let i1 = ref 1 in
  let i2 = ref 1 in
  let i = ref 1 in
  while (!i1<=size1 || !i2<=size2) do
    Printf.printf "i1 = %d, i2 = %d, i = %d\n" !i1 !i2 !i;
    (* prendre dans t1 si t2 est vide OU si il reste des éléments dans les 2 et le
    ↪  plus petit est dans t1*)
    if (!i2>size2) || (!i1 <= size1 && !i2 <=size2 && t1.(!i1) <= t2.(!i2)) then
      (
        t.(!i) <- t1.(!i1);
        (* en cas d'égalité on avance aussi dans t2*)
        if (!i2<=size2 && t1.(!i1) = t2.(!i2)) then (i2 := !i2 +1);
        i1 := !i1 +1;
      ) else
    (* sinon prendre dans t2 *)
      (
        t.(!i) <- t2.(!i2);
        (* en cas d'égalité on avance aussi dans t1*)
        if (!i1<=size1 && t1.(!i1) = t2.(!i2)) then (i1 := !i1 +1);
        i2 := !i2 +1;
      );
      i := !i + 1;
      done;
      t.(0) <- !i-1;
      t;;
```

■ **Partie III** : Avec une table de hachage

Soit K un entier naturel strictement positif. On choisit de représenter un ensemble d'entiers E de cardinal n par une table de hachage de taille K avec résolution des collisions par chainage. La fonction de hachage est $h(i) = i \mod K$.

1. Dans le cas où $K = 10$, représenter la table de hachage qui correspond à l'ensemble $\{2, 5, 7, 15\}$.
2. A quelle condition, portant sur K et sur n, la fonction h génère-t-elle forcément des collisions ?
3. Décrire brièvement (on ne demande pas d'écrire un programme) une fonction permettant de renvoyer le maximum d'un ensemble E représenté par une table de hachage. Donner sa complexité.
4. Peut-on améliorer la complexité de la fonction précédente si on suppose que les listes chainées contenues dans chacune des alvéoles de la table de hachage sont maintenues triées par ordre décroissant ?