

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 1. Exemple introductif

### Nombre d'occurrence des mots d'un texte

A partir du texte de l'oeuvre de J. Verne, « *20 000 lieux sous les mers* », on a construit la liste des mots (sans accent, ni majuscules) qui apparaissent dans cet oeuvre. A titre d'exemple voici un extrait du fichier obtenu

```
1  cetace
2  extraordinaire
3  pouvait
4  se
5  transporter
6  un
7  endroit
8  un
9  autre
```

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 1. Exemple introductif

### Nombre d'occurrence des mots d'un texte

A partir du texte de l'oeuvre de J. Verne, « *20 000 lieux sous les mers* », on a construit la liste des mots (sans accent, ni majuscules) qui apparaissent dans cet oeuvre. A titre d'exemple voici un extrait du fichier obtenu

```
1  cetace
2  extraordinaire
3  pouvait
4  se
5  transporter
6  un
7  endroit
8  un
9  autre
```

Le but du problème est de trouver une méthode **efficace** afin d'obtenir le nombre d'occurrence de chaque mot

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Définition

Un **tableau associatif** (ou **dictionnaire**) est une structure de données constituée d'un ensemble de **clés**  $C$  et d'un ensemble de **valeurs**  $V$ . Chaque clé n'apparaît qu'une fois dans la structure et est associée à un élément de  $V$ .

Les dictionnaires étendent en quelque sorte la notion de tableau, les indices des éléments d'un tableau associatif de taille  $n$  n'étant plus nécessairement les entiers  $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  comme pour les tableaux classiques.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Définition

Un **tableau associatif** (ou **dictionnaire**) est une structure de données constituée d'un ensemble de **clés**  $C$  et d'un ensemble de **valeurs**  $V$ . Chaque clé n'apparaît qu'une fois dans la structure et est associée à un élément de  $V$ .

Les dictionnaires étendent en quelque sorte la notion de tableau, les indices des éléments d'un tableau associatif de taille  $n$  n'étant plus nécessairement les entiers  $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  comme pour les tableaux classiques.

### Exemple

On peut associer à chaque mot d'un texte, son nombre d'occurrence dans ce texte :

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Définition

Un **tableau associatif** (ou **dictionnaire**) est une structure de données constituée d'un ensemble de **clés**  $C$  et d'un ensemble de **valeurs**  $V$ . Chaque clé n'apparaît qu'une fois dans la structure et est associée à un élément de  $V$ .

Les dictionnaires étendent en quelque sorte la notion de tableau, les indices des éléments d'un tableau associatif de taille  $n$  n'étant plus nécessairement les entiers  $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  comme pour les tableaux classiques.

### Exemple

On peut associer à chaque mot d'un texte, son nombre d'occurrence dans ce texte :

- L'ensemble des clés est l'ensemble des mots du texte.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Définition

Un **tableau associatif** (ou **dictionnaire**) est une structure de données constituée d'un ensemble de **clés**  $C$  et d'un ensemble de **valeurs**  $V$ . Chaque clé n'apparaît qu'une fois dans la structure et est associée à un élément de  $V$ .

Les dictionnaires étendent en quelque sorte la notion de tableau, les indices des éléments d'un tableau associatif de taille  $n$  n'étant plus nécessairement les entiers  $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  comme pour les tableaux classiques.

### Exemple

On peut associer à chaque mot d'un texte, son nombre d'occurrence dans ce texte :

- L'ensemble des clés est l'ensemble des mots du texte.
- L'ensemble des valeurs est  $\mathbb{N}$ .

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Définition

Un **tableau associatif** (ou **dictionnaire**) est une structure de données constituée d'un ensemble de **clés**  $C$  et d'un ensemble de **valeurs**  $V$ . Chaque clé n'apparaît qu'une fois dans la structure et est associée à un élément de  $V$ .

Les dictionnaires étendent en quelque sorte la notion de tableau, les indices des éléments d'un tableau associatif de taille  $n$  n'étant plus nécessairement les entiers  $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  comme pour les tableaux classiques.

### Exemple

On peut associer à chaque mot d'un texte, son nombre d'occurrence dans ce texte :

- L'ensemble des clés est l'ensemble des mots du texte.
- L'ensemble des valeurs est  $\mathbb{N}$ .

Ce tableau associatif peut se noter :

$\{(\text{"un"}, 10), (\text{"cours"}, 3), (\text{"exercice"}, 7) \dots\}$

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

- Tester si une clé  $c$  appartient à  $T$

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

- Tester si une clé  $c$  appartient à  $T$
- Ajouter à  $T$  une association  $(c, v)$

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

- Tester si une clé  $c$  appartient à  $T$
- Ajouter à  $T$  une association  $(c, v)$
- Supprimer une association  $(c, v)$  de  $T$

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

- Tester si une clé  $c$  appartient à  $T$
- Ajouter à  $T$  une association  $(c, v)$
- Supprimer une association  $(c, v)$  de  $T$
- Obtenir la valeur  $v$  associée à une clé  $c$ .

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

- Tester si une clé  $c$  appartient à  $T$
- Ajouter à  $T$  une association  $(c, v)$
- Supprimer une association  $(c, v)$  de  $T$
- Obtenir la valeur  $v$  associée à une clé  $c$ .
- Modifier la valeur associée à une clé.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 2. Définition

### Interface d'un tableau associatif

En notant  $T$  un tableau associatif d'ensemble de clé  $C$  et de valeur  $V$ ,  $c \in C$  et  $v \in V$  :

- Tester si une clé  $c$  appartient à  $T$
- Ajouter à  $T$  une association  $(c, v)$
- Supprimer une association  $(c, v)$  de  $T$
- Obtenir la valeur  $v$  associée à une clé  $c$ .
- Modifier la valeur associée à une clé.

### Exemple

La recherche du nombre d'occurrence de chacun des mots d'un texte est donc une application classique de cette structure de donnée. A chaque mot rencontré, s'il se trouve dans le dictionnaire on incrémente la valeur associée de 1 sinon on rajoute ce mot avec comme valeur 1.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )
- Une implémentation utilisant les arbres sera vue ultérieurement.

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )
- Une implémentation utilisant les arbres sera vue ultérieurement.
- Lorsque l'ensemble des clés est inclus dans  $\llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ , on peut utiliser un tableau de taille  $N$ , pour un couple  $(c, v)$ , on stocke alors la valeur  $v$  dans la case d'indice  $c$  du tableau.

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )
- Une implémentation utilisant les arbres sera vue ultérieurement.
- Lorsque l'ensemble des clés est inclus dans  $\llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ , on peut utiliser un tableau de taille  $N$ , pour un couple  $(c, v)$ , on stocke alors la valeur  $v$  dans la case d'indice  $c$  du tableau.
- Pour un ensemble de clés quelconque  $C$ , on se ramène au cas précédent en deux étapes :

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )
- Une implémentation utilisant les arbres sera vue ultérieurement.
- Lorsque l'ensemble des clés est inclus dans  $\llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ , on peut utiliser un tableau de taille  $N$ , pour un couple  $(c, v)$ , on stocke alors la valeur  $v$  dans la case d'indice  $c$  du tableau.
- Pour un ensemble de clés quelconque  $C$ , on se ramène au cas précédent en deux étapes :
  - On utilise une fonction  $h : C \rightarrow \mathbb{N}$ , dite **fonction de hachage** (*hash function*).

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )
- Une implémentation utilisant les arbres sera vue ultérieurement.
- Lorsque l'ensemble des clés est inclus dans  $\llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ , on peut utiliser un tableau de taille  $N$ , pour un couple  $(c, v)$ , on stocke alors la valeur  $v$  dans la case d'indice  $c$  du tableau.
- Pour un ensemble de clés quelconque  $C$ , on se ramène au cas précédent en deux étapes :
  - On utilise une fonction  $h : C \rightarrow \mathbb{N}$ , dite **fonction de hachage** (*hash function*).
  - L'indice de la clé  $c$  dans le tableau s'obtient alors en prenant  $h(c) \bmod N$ .

### Possibilités d'implémentation

- Une implémentation naïve à l'aide d'une liste chaînée de maillons contenant les couples (clé, valeur) est possible mais clairement inefficace (le test d'appartenance est alors en  $\mathcal{O}(n)$ )
  - Une implémentation utilisant les arbres sera vue ultérieurement.
  - Lorsque l'ensemble des clés est inclus dans  $\llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ , on peut utiliser un tableau de taille  $N$ , pour un couple  $(c, v)$ , on stocke alors la valeur  $v$  dans la case d'indice  $c$  du tableau.
  - Pour un ensemble de clés quelconque  $C$ , on se ramène au cas précédent en deux étapes :
    - On utilise une fonction  $h : C \rightarrow \mathbb{N}$ , dite **fonction de hachage** (*hash function*).
    - L'indice de la clé  $c$  dans le tableau s'obtient alors en prenant  $h(c) \bmod N$ .
- ⚠ Deux clés différentes peuvent alors donner le *même* indice dans le tableau, on parle alors de **collision**.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Visualisation

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10}

Clés

"dans"

"le"

"un"

Indice

0

1

2

⋮

42

⋮

N-1

Contenu

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

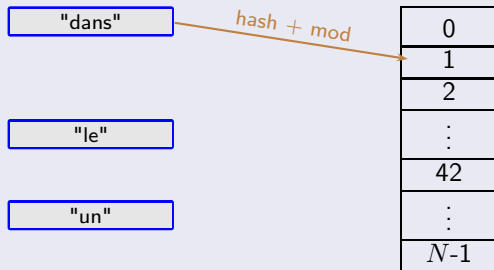
### Visualisation

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }

Clés

Indice

Contenu

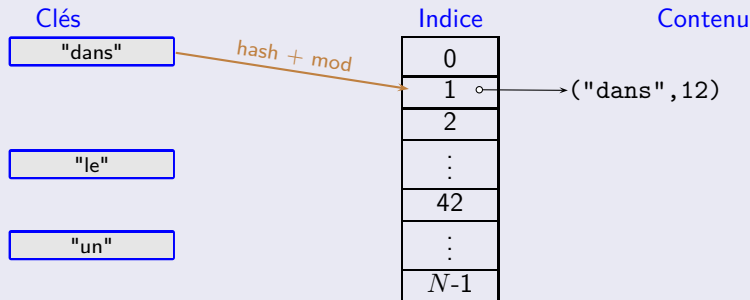


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Visualisation

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }

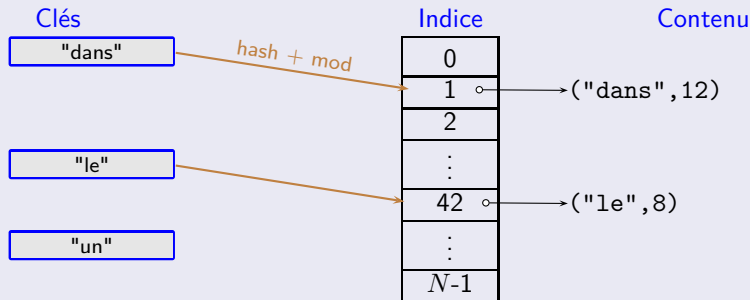


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Visualisation

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }

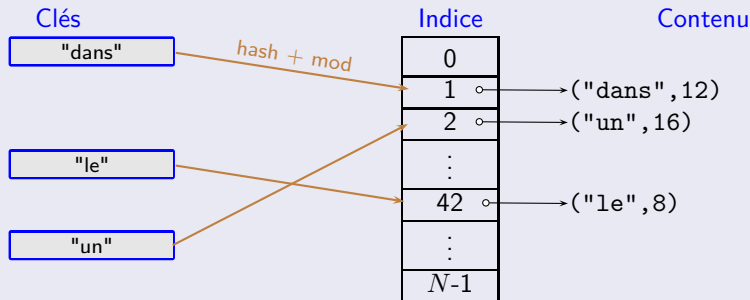


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Visualisation

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }

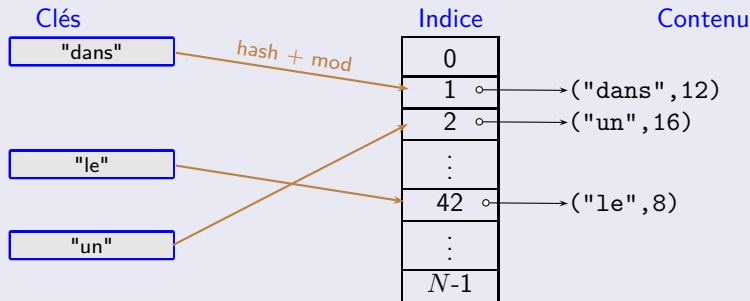


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Visualisation

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }



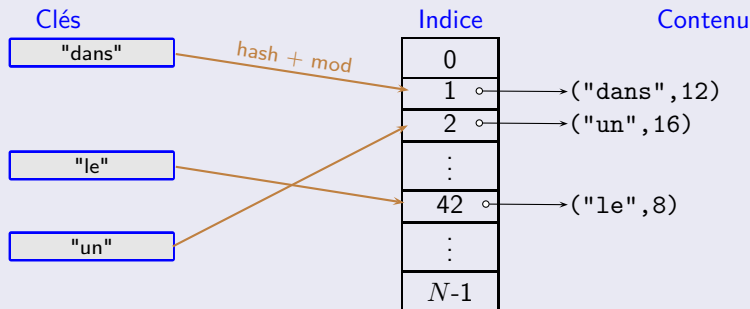
Certaines cases du tableau peuvent restées vides ! Le *taux de charge* de la table est défini comme le rapport entre le nombres de cases occupés et  $N$ .

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10}

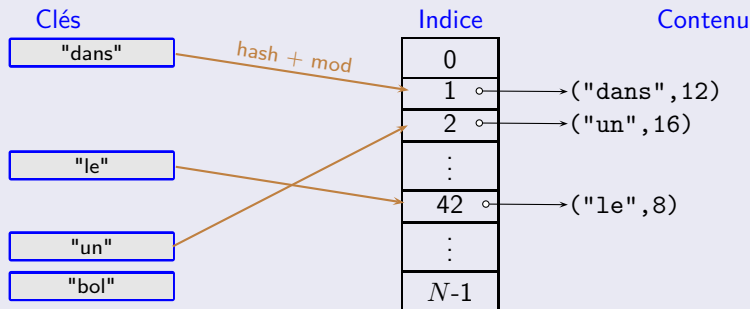


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }

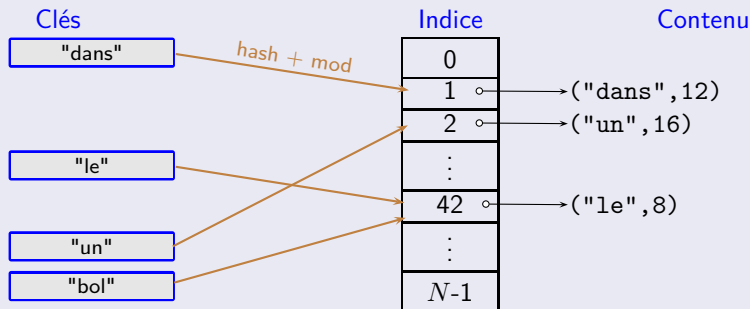


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10 }

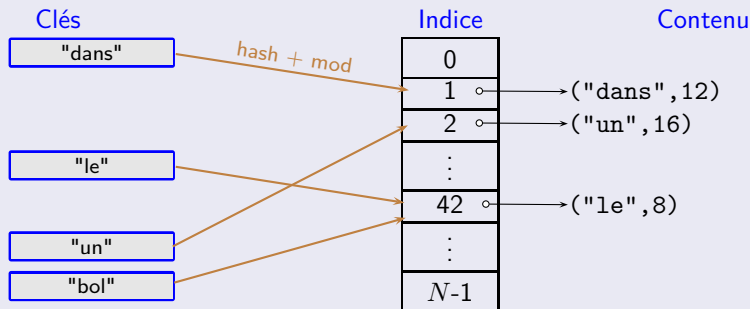


# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10}



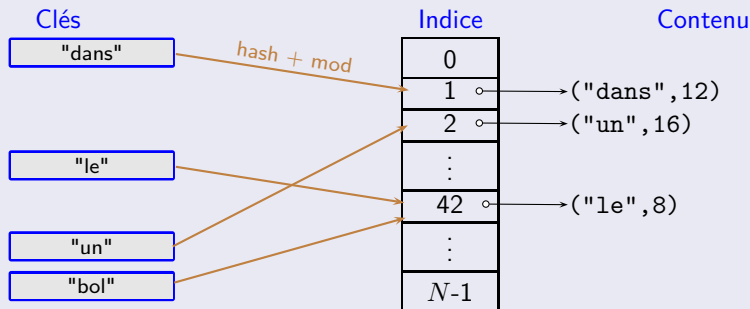
- Deux clés différentes ("bol" et "le"), doivent être rangées au même indice, c'est une **collision**.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10}



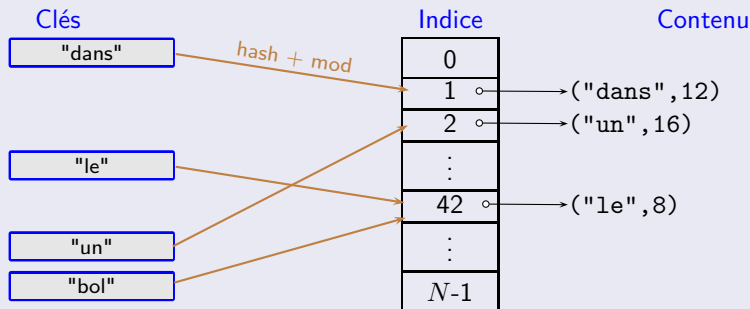
- Deux clés différentes ("bol" et "le"), doivent être rangées au même indice, c'est une **collision**.
- La résolution par chaînage consiste à stocker des listes chaînées, dans le tableau. On dit alors que chaque case du tableau est un **seau** (ou **bucket** en anglais) .

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10}



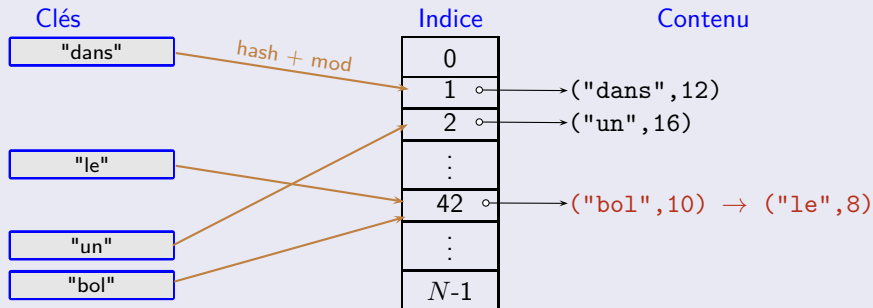
- Deux clés différentes ("bol" et "le"), doivent être rangées au même indice, c'est une **collision**.
- La résolution par chaînage consiste à stocker des listes chaînées, dans le tableau. On dit alors que chaque case du tableau est un **seau** (ou **bucket** en anglais) .

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 3. Techniques d'implémentation

### Collision

{ "dans":12 , "le" : 8, "un" : 16, "bol" : 10}



- Deux clés différentes ("bol" et "le"), doivent être rangées au même indice, c'est une **collision**.
- La résolution par chaînage consiste à stocker des listes chaînées, dans le tableau. On dit alors que chaque case du tableau est un **seau** (ou **bucket** en anglais) .

### Complexité des opérations

- ⚠ On se place dans le cas d'une *résolution des collisions par chaînage*.
- Le nombre de collisions influence directement la complexité des opérations

### Complexité des opérations

⚠ On se place dans le cas d'une *résolution des collisions par chaînage*.

- Le nombre de collisions influence directement la complexité des opérations  
Dans le cas extrême où toutes les valeurs sont en collision, le tableau associatif est représentée par une liste chaînée et les opérations sont en  $\mathcal{O}(n)$

### Complexité des opérations

⚠ On se place dans le cas d'une *résolution des collisions par chaînage*.

- Le nombre de collisions influence directement la complexité des opérations  
Dans le cas extrême où toutes les valeurs sont en collision, le tableau associatif est représentée par une liste chaînée et les opérations sont en  $\mathcal{O}(n)$
- On s'intéresse donc à la probabilité d'apparitions de collisions dans le cas d'un **hachage uniforme**, c'est à dire dans le cas où les valeurs de hachage ont la même probabilité d'apparition.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 4. Complexité

### Complexité des opérations

⚠ On se place dans le cas d'une *résolution des collisions par chaînage*.

- Le nombre de collisions influence directement la complexité des opérations  
Dans le cas extrême où toutes les valeurs sont en collision, le tableau associatif est représentée par une liste chaînée et les opérations sont en  $\mathcal{O}(n)$
- On s'intéresse donc à la probabilité d'apparitions de collisions dans le cas d'un **hachage uniforme**, c'est à dire dans le cas où les valeurs de hachage ont la même probabilité d'apparition.

### Probabilité de collision

On considère  $n$  clés hachées uniformément sur  $N$  valeurs ( $N \geq n$ ), alors la probabilité d'absence de collision est :

$$P_0 = \frac{N!}{N^n (N - n)!}$$

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 4. Complexité

### Applications numériques

En notant  $P$  la probabilité qu'au moins une collisions survienne :

$n$	$N$	$P_0$	$P = 1 - P_0$
23	365	0.49	0.51
1000	$10^6$	0.6	0.4
5000	$10^6$	$0.3 \cdot 10^{-6}$	0.999996

(paradoxe des anniversaires)

Les collisions sont donc difficilement évitables, ceci dit on dispose du résultat suivant (admis)

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 4. Complexité

### Applications numériques

En notant  $P$  la probabilité qu'au moins une collisions survienne :

$n$	$N$	$P_0$	$P = 1 - P_0$
23	365	0.49	0.51
1000	$10^6$	0.6	0.4
5000	$10^6$	$0.3 \cdot 10^{-6}$	0.999996

(paradoxe des anniversaires)

Les collisions sont donc difficilement évitables, ceci dit on dispose du résultat suivant (admis)

### Complexité d'une recherche

Si on suppose le hachage uniforme et les collisions résolues par chaînage, le temps moyen d'une recherche est  $\mathcal{O}(1 + \alpha)$ , où  $\alpha = \frac{n}{N}$  est le taux de charge de la table.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 4. Complexité

### A retenir ...

Dans le cas d'une résolution des collisions par chaînage, sous les hypothèses suivantes :

### A retenir ...

Dans le cas d'une résolution des collisions par chaînage, sous les hypothèses suivantes :

- le calcul de la fonction de hachage est en  $\mathcal{O}(1)$ ,
- le hachage est uniforme,
- le taux de charge de la table est majoré indépendamment de  $n$  (par exemple  $N$  proportionnel à  $n$ ),

### A retenir ...

Dans le cas d'une résolution des collisions par chaînage, sous les hypothèses suivantes :

- le calcul de la fonction de hachage est en  $\mathcal{O}(1)$ ,
- le hachage est uniforme,
- le taux de charge de la table est majoré indépendamment de  $n$  (par exemple  $N$  proportionnel à  $n$ ),

la complexité moyenne des opérations (appartenance, ajout, suppression, ...) est en  $\mathcal{O}(1)$ .

### Résolution des collisions par sondage

Une autre méthode de résolution des collision consiste lorsqu'elles se produisent à rechercher plus loin dans la table (à *sonder*) jusqu'à trouver un emplacement vide. On parle de *sondage linéaire* lorsqu'on recherche séquentiellement dans la table. On admettra que dans ce cas on retrouve pour les opérations, une complexité similaire à celle de la résolution par chaînage. Un exemple d'implémentation sera vue en TP.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

```
1  struct node
2  {
3      char word[26];
4      int occ;
5      struct node *next;
6  };
7  typedef struct node node;
8  typedef node *list;
```

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

```
1  struct node
2  {
3      char word[26];
4      int occ;
5      struct node *next;
6  };
7  typedef struct node node;
8  typedef node *list;
```

- Les prototypes des fonctions nécessaires :

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

```
1  struct node
2  {
3      char word[26];
4      int occ;
5      struct node *next;
6  };
7  typedef struct node node;
8  typedef node *list;
```

- Les prototypes des fonctions nécessaires :
  - Test si une clé est présente : `bool is_in(list l, char w[26])`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

```
1  struct node
2  {
3      char word[26];
4      int occ;
5      struct node *next;
6  };
7  typedef struct node node;
8  typedef node *list;
```

- Les prototypes des fonctions nécessaires :
  - Test si une clé est présente : `bool is_in(list l, char w[26])`
  - Ajout d'une nouvelle clé : `void insert(list *l, char w[26])`

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

```
1  struct node
2  {
3      char word[26];
4      int occ;
5      struct node *next;
6  };
7  typedef struct node node;
8  typedef node *list;
```

- Les prototypes des fonctions nécessaires :
  - Test si une clé est présente : `bool is_in(list l, char w[26])`
  - Ajout d'une nouvelle clé : `void insert(list *l, char w[26])`
  - Récupérer la valeur associée à une clé : `int value(list l, char w[26])`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### Cas des occurrences des mots d'un texte

- On commence par créer des listes chaînées de clés/valeurs. Les clés sont des chaînes de caractères, et les valeurs des entiers positifs. Pour simplifier, on suppose qu'un mot a au maximum 26 lettres :

```
1  struct node
2  {
3      char word[26];
4      int occ;
5      struct node *next;
6  };
7  typedef struct node node;
8  typedef node *list;
```

- Les prototypes des fonctions nécessaires :
  - Test si une clé est présente : `bool is_in(list l, char w[26])`
  - Ajout d'une nouvelle clé : `void insert(list *l, char w[26])`
  - Récupérer la valeur associée à une clé : `int value(list l, char w[26])`
  - Modification d'une valeur : `void update(list *l, char w[26], int v)`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### La table de hachage

On définit alors la table de hachage comme un tableau de `SIZE` alvéoles contenant chacune une liste chaînée (la constante `SIZE` pouvant être définie en début de programme) les prototypes des fonctions à écrire sont :

- `bool is_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### La table de hachage

On définit alors la table de hachage comme un tableau de `SIZE` alvéoles contenant chacune une liste chaînée (la constante `SIZE` pouvant être définie en début de programme) les prototypes des fonctions à écrire sont :

- `bool is_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void insert_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### La table de hachage

On définit alors la table de hachage comme un tableau de `SIZE` alvéoles contenant chacune une liste chaînée (la constante `SIZE` pouvant être définie en début de programme) les prototypes des fonctions à écrire sont :

- `bool is_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void insert_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void update_hashtable(list ht[SIZE], char w[26], int n)`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### La table de hachage

On définit alors la table de hachage comme un tableau de `SIZE` alvéoles contenant chacune une liste chaînée (la constante `SIZE` pouvant être définie en début de programme) les prototypes des fonctions à écrire sont :

- `bool is_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void insert_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void update_hashtable(list ht[SIZE], char w[26], int n)`
- `int get_val_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 5. Implémentation en langage C

### La table de hachage

On définit alors la table de hachage comme un tableau de `SIZE` alvéoles contenant chacune une liste chaînée (la constante `SIZE` pouvant être définie en début de programme) les prototypes des fonctions à écrire sont :

- `bool is_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void insert_in_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`
- `void update_hashtable(list ht[SIZE], char w[26], int n)`
- `int get_val_hashtable(list ht[SIZE], char w[26])`

Cette implémentation sera vue en détail en TP.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

On peut créer un type représentant un tableau de liste. Les éléments des listes étant des couples  $(c,v)$  où  $c$  est de type `string` et  $v$  de type `int` :

```
1 type hashtable = (string * int) list array
```

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

On peut créer un type représentant un tableau de liste. Les éléments des listes étant des couples  $(c,v)$  où  $c$  est de type `string` et  $v$  de type `int` :

```
1 type hashtable = (string * int) list array
```

Sur les listes, les opérations nécessaires sont les mêmes que celles vu sur l'implémentation en C :

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

On peut créer un type représentant un tableau de liste. Les éléments des listes étant des couples  $(c,v)$  où  $c$  est de type `string` et  $v$  de type `int` :

```
1 type hashtable = (string * int) list array
```

Sur les listes, les opérations nécessaires sont les mêmes que celles vu sur l'implémentation en C :

- Le test d'appartenance :

```
1 let rec is_in cle l =  
2   match l with  
3   | [] -> false  
4   |(s,v)::t -> s=cle || (is_in cle t);;
```

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

On peut créer un type représentant un tableau de liste. Les éléments des listes étant des couples  $(c,v)$  où  $c$  est de type `string` et  $v$  de type `int` :

```
1 type hashtable = (string * int) list array
```

Sur les listes, les opérations nécessaires sont les mêmes que celles vu sur l'implémentation en C :

- Le test d'appartenance :

```
1 let rec is_in cle l =  
2   match l with  
3   | [] -> false  
4   |(s,v)::t -> s=cle || (is_in cle t);;
```

- La mise à jour de la valeur associée à une clé (on utilise `failwith` en cas d'absence de la clé).

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

On peut créer un type représentant un tableau de liste. Les éléments des listes étant des couples  $(c,v)$  où  $c$  est de type `string` et  $v$  de type `int` :

```
1 type hashtable = (string * int) list array
```

Sur les listes, les opérations nécessaires sont les mêmes que celles vu sur l'implémentation en C :

- Le test d'appartenance :

```
1 let rec is_in cle l =  
2   match l with  
3   | [] -> false  
4   |(s,v)::t -> s=cle || (is_in cle t);;
```

- La mise à jour de la valeur associée à une clé (on utilise `failwith` en cas d'absence de la clé).
- La récupération de la valeur associée à une clé.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

- La fonction de hachage `string -> int` transforme une chaîne de caractère en un entier compris entre 0 (inclus) et `size` (exclus)

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

- La fonction de hachage `string -> int` transforme une chaîne de caractère en un entier compris entre 0 (inclus) et `size` (exclus)
- On doit alors écrire les fonctions pour :

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

- La fonction de hachage `string -> int` transforme une chaîne de caractère en un entier compris entre 0 (inclus) et `size` (exclus)
- On doit alors écrire les fonctions pour :
  - test si la clé `c` est présente (`hashtable -> string -> bool`) :  
`let is_in_ht (ht:hashtable) c`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

- La fonction de hachage `string -> int` transforme une chaîne de caractère en un entier compris entre 0 (inclus) et `size` (exclus)
- On doit alors écrire les fonctions pour :
  - test si la clé `c` est présente (`hashtable -> string -> bool`) :  
`let is_in_ht (ht:hashtable) c`
  - ajout de `(c,v)` dans la table (`hashtable -> string -> int -> unit`) :  
`let add_ht (ht:hashtable) c v`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

- La fonction de hachage `string -> int` transforme une chaîne de caractère en un entier compris entre 0 (inclus) et `size` (exclus)
- On doit alors écrire les fonctions pour :
  - test si la clé `c` est présente (`hashtable -> string -> bool`) :  
`let is_in_ht (ht:hashtable) c`
  - ajout de `(c,v)` dans la table (`hashtable -> string -> int -> unit`) :  
`let add_ht (ht:hashtable) c v`
  - renvoie la valeur associée à `c` (`hashtable -> string -> int`) :  
`let get_value_ht (ht:hashtable) c`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Implémentation avec le type `array`

- On se fixe une taille pour la table de hachage et la définit comme un tableau de liste de couples `string*int` :

```
1 let size = 100000
2 let ht = Array.make size []
```

- La fonction de hachage `string -> int` transforme une chaîne de caractère en un entier compris entre 0 (inclus) et `size` (exclus)
- On doit alors écrire les fonctions pour :
  - test si la clé `c` est présente (`hashtable -> string -> bool`) :  
`let is_in_ht (ht:hashtable) c`
  - ajout de `(c,v)` dans la table (`hashtable -> string -> int -> unit`) :  
`let add_ht (ht:hashtable) c v`
  - renvoie la valeur associée à `c` (`hashtable -> string -> int`) :  
`let get_value_ht (ht:hashtable) c`
  - met à jour la valeur associée à `c` (`hashtable -> string -> int -> unit`) :  
`let update_ht (ht:hashtable) c v`

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Module Hashtbl

La bibliothèque standard d'OCaml propose une implémentation des tables de hachage via le module `Hashtbl`.

### Module Hashtbl

La bibliothèque standard d'OCaml propose une implémentation des tables de hachage via le module `Hashtbl`.

- La fonction de hachage (`Hashtbl.hash`) est prédéfinie par OCaml et s'applique à une valeur de n'importe quel type.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Module Hashtbl

La bibliothèque standard d'OCaml propose une implémentation des tables de hachage via le module `Hashtbl`.

- La fonction de hachage (`Hashtbl.hash`) est prédéfinie par OCaml et s'applique à une valeur de n'importe quel type.
- On doit donner une taille initiale lors de la création de la table de hachage :

```
1 let my_ht = Hashtbl.create 10000
```

A noter que lorsque le taux de remplissage de cette table devient trop important, elle est redimensionnée (la taille double), c'est donc un tableau dynamique.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 6. Implémentation en OCaml

### Fonctions du module Hashtbl

Parmi les fonctions disponibles, on retrouve celles vues dans l'implémentation en langage C :

### Fonctions du module Hashtbl

Parmi les fonctions disponibles, on retrouve celles vues dans l'implémentation en langage C :

- `Hashtbl.mem` pour le test d'appartenance.

### Fonctions du module Hashtbl

Parmi les fonctions disponibles, on retrouve celles vues dans l'implémentation en langage C :

- `Hashtbl.mem` pour le test d'appartenance.
- `Hashtbl.add` pour ajouter une couple (clé, valeur).

### Fonctions du module Hashtbl

Parmi les fonctions disponibles, on retrouve celles vues dans l'implémentation en langage C :

- `Hashtbl.mem` pour le test d'appartenance.
- `Hashtbl.add` pour ajouter une couple (clé, valeur).
- `Hashtbl.find` pour trouver la valeur associée à une clé.

### Fonctions du module Hashtbl

Parmi les fonctions disponibles, on retrouve celles vues dans l'implémentation en langage C :

- `Hashtbl.mem` pour le test d'appartenance.
- `Hashtbl.add` pour ajouter une couple (clé, valeur).
- `Hashtbl.find` pour trouver la valeur associée à une clé.
- `Hashtbl.replace` pour modifier la valeur associée à une clé.

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 7. Une application

### Calcul des coefficients du binôme

- 1 Rappeler la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factoriel ainsi que la relation de récurrence liant les coefficients binomiaux

# C10 Tableaux associatifs, hachage

## 7. Une application

### Calcul des coefficients du binôme

- 1 Rappeler la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factoriel ainsi que la relation de récurrence liant les coefficients binomiaux
- 2 Ecrire une fonction en OCaml utilisant la définition à base de factoriels permettant de calculer  $\binom{n}{k}$  (avec  $n$  et  $k$  deux entiers naturels  $n \geq k$ ). Donner sa complexité.

### Calcul des coefficients du binôme

- 1 Rappeler la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factoriel ainsi que la relation de récurrence liant les coefficients binomiaux
- 2 Ecrire une fonction en OCaml utilisant la définition à base de factoriels permettant de calculer  $\binom{n}{k}$  (avec  $n$  et  $k$  deux entiers naturels  $n \geq k$ ). Donner sa complexité.
- 3 Proposer une version récursive utilisant la relation de récurrence vue à la question 1.

### Calcul des coefficients du binôme

- 1 Rappel la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factoriel ainsi que la relation de récurrence liant les coefficients binomiaux
- 2 Ecrire une fonction en OCaml utilisant la définition à base de factoriels permettant de calculer  $\binom{n}{k}$  (avec  $n$  et  $k$  deux entiers naturels  $n \geq k$ ). Donner sa complexité.
- 3 Proposer une version récursive utilisant la relation de récurrence vue à la question 1.
- 4 On note  $N(n, k)$  le nombre d'appels nécessaires pour calculer  $\binom{n}{k}$ . Donner  $N(n, 0)$ ,  $N(n, n)$  et une relation de récurrence liant  $N(n, k)$ ,  $N(n - 1, k)$  et  $N(n - 1, k - 1)$ .

### Calcul des coefficients du binôme

- 1 Rappel de la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factoriel ainsi que la relation de récurrence liant les coefficients binomiaux
- 2 Ecrire une fonction en OCaml utilisant la définition à base de factoriels permettant de calculer  $\binom{n}{k}$  (avec  $n$  et  $k$  deux entiers naturels  $n \geq k$ ). Donner sa complexité.
- 3 Proposer une version récursive utilisant la relation de récurrence vue à la question 1.
- 4 On note  $N(n, k)$  le nombre d'appels nécessaires pour calculer  $\binom{n}{k}$ . Donner  $N(n, 0)$ ,  $N(n, n)$  et une relation de récurrence liant  $N(n, k)$ ,  $N(n - 1, k)$  et  $N(n - 1, k - 1)$ .
- 5 Prouver par récurrence que  $N(n, k) = 2\binom{n}{k} - 1$ . En déduire la complexité de la fonction récursive écrite à la question 3.

### Mémoïsation avec une table de hachage

- La complexité exponentielle de la version récursive est liée à l'apparition de nombreux appels récurrents identiques.

### Mémoïsation avec une table de hachage

- La complexité exponentielle de la version récursive est liée à l'apparition de nombreux appels récursifs identiques.
- L'idée est donc de mémoriser les résultats des appels récursifs déjà effectués afin d'en avoir le résultat sans les relancer. Cette technique de programmation s'appelle la **mémoïsation**

### Mémoïsation avec une table de hachage

- La complexité exponentielle de la version récursive est liée à l'apparition de nombreux appels récursifs identiques.
- L'idée est donc de mémoriser les résultats des appels récursifs déjà effectués afin d'en avoir le résultat sans les relancer. Cette technique de programmation s'appelle la **mémoïsation**
- Quelle structure de données vous paraît adaptée ?

### Mémoïsation avec une table de hachage

- La complexité exponentielle de la version récursive est liée à l'apparition de nombreux appels récursifs identiques.
- L'idée est donc de mémoriser les résultats des appels récursifs déjà effectués afin d'en avoir le résultat sans les relancer. Cette technique de programmation s'appelle la **mémoïsation**
- Quelle structure de données vous paraît adaptée ?
- Proposer une implémentation en OCaml

### Mémoïsation avec une table de hachage

- La complexité exponentielle de la version récursive est liée à l'apparition de nombreux appels récursifs identiques.
- L'idée est donc de mémoriser les résultats des appels récursifs déjà effectués afin d'en avoir le résultat sans les relancer. Cette technique de programmation s'appelle la **mémoïsation**
- Quelle structure de données vous paraît adaptée ?
- Proposer une implémentation en OCaml
- Donner la complexité de cette nouvelle implémentation.

### Mémoïsation

- La **mémoïsation** consiste à stocker dans une structure de données les valeurs renvoyées par une fonction afin de ne pas les recalculer lors des appels identiques suivant.

### Mémoïsation

- La **mémoïsation** consiste à stocker dans une structure de données les valeurs renvoyées par une fonction afin de ne pas les recalculer lors des appels identiques suivant.
- Les tableaux associatifs sont alors des structures de données adaptées, les clés sont les paramètres d'appels de la fonction et les valeurs le résultat de l'appel.

### Mémoïsation

- La **mémoïsation** consiste à stocker dans une structure de données les valeurs renvoyées par une fonction afin de ne pas les recalculer lors des appels identiques suivant.
- Les tableaux associatifs sont alors des structures de données adaptées, les clés sont les paramètres d'appels de la fonction et les valeurs le résultat de l'appel.
- On peut alors tester si la valeur a déjà été calculée (présence de la clé) en  $\mathcal{O}(1)$  et suivant le cas de figure calculer la valeur associée puis la stocker ( $\mathcal{O}(1)$ ) ou alors la récupérer ( $\mathcal{O}(1)$ ).