Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x \, \mathcal{R} \, x$.

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x \,\mathcal{R}\, x$.
  2. *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $ERxy$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ alors $y \,\mathcal{R}\, z$

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x \,\mathcal{R}\, x$.
  2. *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $ERxy$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ alors $y \,\mathcal{R}\, z$
  3. *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x \,\mathcal{R}\, z$.

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x \,\mathcal{R}\, x$.
  2. *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $ERxy$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ alors $y \,\mathcal{R}\, z$
  3. *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x \,\mathcal{R}\, z$.

  On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x\,\mathcal{R}\,x$.
  2. *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $ERxy$ et $y\,\mathcal{R}\,z$ alors $y\,\mathcal{R}\,z$
  3. *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\,\mathcal{R}\,z$.

  On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.
- Soit $(E, \mathcal{R})$, un ensemble ordonné, On dit que $\mathcal{R}$ est un ordre total si pour tout $x, y \in E^2$, $x\,\mathcal{R}\,y$ ou $y\,\mathcal{R}\,x$, sinon $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x\,\mathcal{R}\,x$.
  2. *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $ERxy$ et $y\,\mathcal{R}\,z$ alors $y\,\mathcal{R}\,z$
  3. *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\,\mathcal{R}\,z$.

  On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.
- Soit $(E, \mathcal{R})$, un ensemble ordonné, On dit que $\mathcal{R}$ est un ordre total si pour tout $x, y \in E^2$, $x\,\mathcal{R}\,y$ ou $y\,\mathcal{R}\,x$, sinon $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.

Exemples

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
  1. *réfléxive* : pour tout $x \in E, x \, \mathcal{R} \, x$.
  2. *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $ERxy$ et $y \, \mathcal{R} \, z$ alors $y \, \mathcal{R} \, z$
  3. *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x \, \mathcal{R} \, z$.

  On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.
- Soit $(E, \mathcal{R})$, un ensemble ordonné, On dit que $\mathcal{R}$ est un ordre total si pour tout $x, y \in E^2$, $x \, \mathcal{R} \, y$ ou $y \, \mathcal{R} \, x$, sinon $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.

Exemples

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.
- En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties d'un ensemble E, $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.

Remarques

- On notera $\preccurlyeq$ une relation d'ordre dans un cadre général, afin de la différencier de l'ordre usuel $\leqslant$ sur les ensembles de nombres.

Remarques

- On notera $\preccurlyeq$ une relation d'ordre dans un cadre général, afin de la différencier de l'ordre usuel $\leqslant$ sur les ensembles de nombres.
- A toute relation d'ordre $\preccurlyeq$ est associé l'*ordre strict* correspondant défini par $x \prec y$ si et seulement si $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$.

Remarques

- On notera $\preccurlyeq$ une relation d'ordre dans un cadre général, afin de la différencier de l'ordre usuel $\leqslant$ sur les ensembles de nombres.
- A toute relation d'ordre $\preccurlyeq$ est associé l'*ordre strict* correspondant défini par $x \prec y$ si et seulement si $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$.

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

Remarques

- On notera $\preccurlyeq$ une relation d'ordre dans un cadre général, afin de la différencier de l'ordre usuel $\leqslant$ sur les ensembles de nombres.
- A toute relation d'ordre $\preccurlyeq$ est associé l'*ordre strict* correspondant défini par $x \prec y$ si et seulement si $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$.

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \preccurlyeq y$, x est un prédécesseur de y et y est un successeur de x.

Remarques

- On notera $\preccurlyeq$ une relation d'ordre dans un cadre général, afin de la différencier de l'ordre usuel $\leqslant$ sur les ensembles de nombres.
- A toute relation d'ordre $\preccurlyeq$ est associé l'*ordre strict* correspondant défini par $x \prec y$ si et seulement si $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$.

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \preccurlyeq y$, x est un prédécesseur de y et y est un successeur de x.
- Si $x \prec y$ et s'il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$, on dit que y est un successeur immédiat de x (ou que x est un prédécesseur immédiat de y).

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ et $x \in \mathbb{N}$

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ et $x \in \mathbb{N}$
- $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ et $x \in \mathbb{Q}$

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ et $x \in \mathbb{N}$
- $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ et $x \in \mathbb{Q}$
- $(E, \subset)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$ et $x = \{a\}$.

Définition : élément minimal

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie de E, on dit que $m \in F$, est minimal dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec m$.

Définition : élément minimal

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie de E, on dit que $m \in F$, est minimal dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec m$.

Exercices

Déterminer le (ou les éléments minimaux lorsqu'ils existent) dans les cas suivants :

- $E = (\mathbb{N}, \leqslant)$, et $F = \mathbb{N}$.

Définition : élément minimal

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie de E, on dit que $m \in F$, est minimal dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec m$.

Exercices

Déterminer le (ou les éléments minimaux lorsqu'ils existent) dans les cas suivants :

- $E = (\mathbb{N}, \leqslant)$, et $F = \mathbb{N}$.
- $F = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ et $F = \mathbb{Z}$.

Définition : élément minimal

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie de E, on dit que $m \in F$, est minimal dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec m$.

Exercices

Déterminer le (ou les éléments minimaux lorsqu'ils existent) dans les cas suivants :

- $E = (\mathbb{N}, \leqslant)$, et $F = \mathbb{N}$.
- $F = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ et $F = \mathbb{Z}$.
- $(P(E), \subset)$ et $F = \mathcal{P}(E) \backslash \{\varnothing\}$ où $E = \{a, b, c, d\}$.

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$, on définit sur $E \times F$:

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$, on définit sur $E \times F$:

- La relation $\preccurlyeq_p$ par $(e, f) \preccurlyeq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ et $f \preccurlyeq_F f'$, $\preccurlyeq_p$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre produit.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$, on définit sur $E \times F$:

- La relation $\preccurlyeq_p$ par $(e, f) \preccurlyeq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ et $f \preccurlyeq_F f'$, $\preccurlyeq_p$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre produit.
- La relation $\preccurlyeq_l$ par $(e, f) \preccurlyeq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ ou ($e = e'$ et $f \preccurlyeq_f f'$), $\preccurlyeq_l$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre lexicographique.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$, on définit sur $E \times F$:

- La relation $\preccurlyeq_p$ par $(e, f) \preccurlyeq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ et $f \preccurlyeq_F f'$, $\preccurlyeq_p$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre produit.
- La relation $\preccurlyeq_l$ par $(e, f) \preccurlyeq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ ou ($e = e'$ et $f \preccurlyeq_f f'$), $\preccurlyeq_l$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre lexicographique.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Exemple

Comparer (lorsque cela est possible) les couples suivants pour l'ordre produit et l'ordre lexicographique sur $(\mathbb{N}, \leqslant) \times (\mathbb{N}, \leqslant)$:

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$, on définit sur $E \times F$:

- La relation $\preccurlyeq_p$ par $(e, f) \preccurlyeq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ et $f \preccurlyeq_F f'$, $\preccurlyeq_p$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre produit.
- La relation $\preccurlyeq_l$ par $(e, f) \preccurlyeq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preccurlyeq_E e'$ ou ($e = e'$ et $f \preccurlyeq_f f'$), $\preccurlyeq_l$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé ordre lexicographique.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Exemple

Comparer (lorsque cela est possible) les couples suivants pour l'ordre produit et l'ordre lexicographique sur $(\mathbb{N}, \leqslant) \times (\mathbb{N}, \leqslant)$:

1. $(3, 5)$ et $(7, 6)$
2. $(3, 5)$ et $(7, 4)$
3. $(2, 1)$ et $(2, 4)$

Définition

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, on dit que $\preccurlyeq$ est un ordre bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E.

Définition

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, on dit que $\preccurlyeq$ est un ordre bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E.

Exemple

- L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est bien fondé.

Définition

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, on dit que $\preccurlyeq$ est un ordre bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E.

Exemple

- L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est bien fondé.
- L'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ n'est pas bien fondé.

Caractérisation d'un ordre bien fondé

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, l'ordre $\preccurlyeq$ est bien fondé si et seulement si tout partie non vide de E admet un plus petit élément.

Variant

La notion d'ordre bien fondé permet d'étendre la définition d'un variant. En effet, pour prouver la terminaison d'une boucle, on peut exhiber une quantité à valeur dans ensemble E muni d'un ordre bien fondé $\preccurlyeq$ et strictement décroissante à chaque passage dans la boucle.