

C14 Ordre – Induction structurelle

1. Rappel

Variant

On rappelle que pour montrer la terminaison d'un programme, on utilise la notion de variant que nous avons défini comme une quantité qui dépend des variables du programme et :

- ne prend que des valeurs entières,

C14 Ordre – Induction structurelle

1. Rappel

Variant

On rappelle que pour montrer la terminaison d'un programme, on utilise la notion de variant que nous avons défini comme une quantité qui dépend des variables du programme et :

- ne prend que des valeurs entières,
- positives

C14 Ordre – Induction structurelle

1. Rappel

Variant

On rappelle que pour montrer la terminaison d'un programme, on utilise la notion de variant que nous avons défini comme une quantité qui dépend des variables du programme et :

- ne prend que des valeurs entières,
- positives
- et est *strictement* décroissante à chaque itération.

C14 Ordre – Induction structurelle

1. Rappel

Variant

On rappelle que pour montrer la terminaison d'un programme, on utilise la notion de variant que nous avons défini comme une quantité qui dépend des variables du programme et :

- ne prend que des valeurs entières,
- positives
- et est *strictement* décroissante à chaque itération.

Comme il **n'existe pas de suites d'entiers positifs strictement décroissante**, l'existence d'un variant prouve la terminaison.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une relation binaire sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
 - ❶ *réflexive* : pour tout $x \in E, x \mathcal{R} x$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
 - 1 *réfléxive* : pour tout $x \in E, x \mathcal{R} x$.
 - 2 *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
 - 1 **réflexive** : pour tout $x \in E, x \mathcal{R} x$.
 - 2 **antisymétrique** : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$
 - 3 **transitive** : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $x \mathcal{R} z$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
 - 1 *réflexive* : pour tout $x \in E, x \mathcal{R} x$.
 - 2 *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$
 - 3 *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $x \mathcal{R} z$.

On dit alors que (E, \mathcal{R}) est un ensemble ordonné.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
 - 1 **réflexive** : pour tout $x \in E, x \mathcal{R} x$.
 - 2 **antisymétrique** : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$
 - 3 **transitive** : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $x \mathcal{R} z$.

On dit alors que (E, \mathcal{R}) est un ensemble ordonné.

- Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné, \mathcal{R} est **total** si pour tout $x, y \in E^2$, $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$, sinon \mathcal{R} est **partiel**.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : ensemble ordonné

- Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous ensemble de $E \times E$.
- Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E ayant les 3 propriétés suivantes :
 - ❶ *réflexive* : pour tout $x \in E, x \mathcal{R} x$.
 - ❷ *antisymétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$
 - ❸ *transitive* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $x \mathcal{R} z$.

On dit alors que (E, \mathcal{R}) est un ensemble ordonné.

- Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné, \mathcal{R} est **total** si pour tout $x, y \in E^2$, $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$, sinon \mathcal{R} est **partiel**.

Remarques

- On notera \preccurlyeq une relation d'ordre dans un cadre général, afin de la différencier de l'ordre usuel \leq sur les ensembles de nombres.
- A toute relation d'ordre \preccurlyeq est associé l'*ordre strict* correspondant défini par $x \prec y$ si et seulement si $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- (\mathbb{N}, \leq) est un ensemble ordonné.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- (\mathbb{N}, \leq) est un ensemble ordonné.
- En notant $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties d'un ensemble \mathcal{E} , $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ est un ensemble ordonné.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- (\mathbb{N}, \leq) est un ensemble ordonné.
- En notant $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties d'un ensemble \mathcal{E} , $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ est un ensemble ordonné.
- Soit $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$, la relation $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b)\}$ est-elle une relation d'ordre? Sinon, quels couples faut-il ajouter à \mathcal{R} pour qu'elle le devienne?

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- (\mathbb{N}, \leq) est un ensemble ordonné.
- En notant $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties d'un ensemble \mathcal{E} , $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ est un ensemble ordonné.
- Soit $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$, la relation $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b)\}$ est-elle une relation d'ordre? Sinon, quels couples faut-il ajouter à \mathcal{R} pour qu'elle le devienne?

Clôture

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E ,

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- (\mathbb{N}, \leq) est un ensemble ordonné.
- En notant $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties d'un ensemble \mathcal{E} , $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ est un ensemble ordonné.
- Soit $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$, la relation $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b)\}$ est-elle une relation d'ordre? Sinon, quels couples faut-il ajouter à \mathcal{R} pour qu'elle le devienne?

Clôture

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E ,

- la **clôture réflexive** de \mathcal{R} est la plus petite relation réflexive contenant \mathcal{R} .

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre


Exemples

- (\mathbb{N}, \leq) est un ensemble ordonné.
- En notant $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties d'un ensemble \mathcal{E} , $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ est un ensemble ordonné.
- Soit $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$, la relation $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b)\}$ est-elle une relation d'ordre? Sinon, quels couples faut-il ajouter à \mathcal{R} pour qu'elle le devienne?

Clôture

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E ,

- la **clôture réflexive** de \mathcal{R} est la plus petite relation réflexive contenant \mathcal{R} .
- la **clôture transitive** de \mathcal{R} est la plus petite relation transitive contenant \mathcal{R} .

 La clôture réflexive-transitive d'une relation \mathcal{R} , notée \mathcal{R}^* , n'est pas forcément une relation d'ordre (car l'antisymétrie n'est pas garantie).

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- La clôture réflexive d'un ordre strict est l'ordre associé.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- La clôture réflexive d'un ordre strict est l'ordre associé.
- Soit \mathcal{R} la relation sur \mathbb{N} définie par $\mathcal{R} = \{(n, n+1), n \in \mathbb{N}\}$ alors \mathcal{R}^* est un ordre (c'est l'ordre usuel sur \mathbb{N}).

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Exemples

- La clôture réflexive d'un ordre strict est l'ordre associé.
- Soit \mathcal{R} la relation sur \mathbb{N} définie par $\mathcal{R} = \{(n, n + 1), n \in \mathbb{N}\}$ alors \mathcal{R}^* est un ordre (c'est l'ordre usuel sur \mathbb{N}).
- Soit \mathcal{R} la relation sur $\{0, 1, 2\}$ définie par $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$, \mathcal{R}^* est-elle antisymétrique ?

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \prec y$, x est un **prédécesseur** de y (et y est un **successeur** de x).

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \prec) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \prec y$, x est un **prédécesseur** de y (et y est un **successeur** de x).
- Si $x \prec y$ et s'il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$, on dit que y est un **successeur immédiat** de x (ou que x est un **prédécesseur immédiat** de y).

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \prec) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \prec y$, x est un **prédécesseur** de y (et y est un **successeur** de x).
- Si $x \prec y$ et s'il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$, on dit que y est un **successeur immédiat** de x (ou que x est un **prédécesseur immédiat** de y).

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \prec) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \prec y$, x est un **prédécesseur** de y (et y est un **successeur** de x).
- Si $x \prec y$ et s'il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$, on dit que y est un **successeur immédiat** de x (ou que x est un **prédécesseur immédiat** de y).

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

- (\mathbb{N}, \leq) et $x \in \mathbb{N}$

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \prec) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \prec y$, x est un **prédécesseur** de y (et y est un **successeur** de x).
- Si $x \prec y$ et s'il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$, on dit que y est un **successeur immédiat** de x (ou que x est un **prédécesseur immédiat** de y).

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

- (\mathbb{N}, \leq) et $x \in \mathbb{N}$
- (\mathbb{Q}, \leq) et $x \in \mathbb{Q}$

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définitions : prédécesseur, successeur

Soit (E, \prec) un ensemble ordonné et x, y deux éléments de E

- Si $x \prec y$, x est un **prédécesseur** de y (et y est un **successeur** de x).
- Si $x \prec y$ et s'il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$, on dit que y est un **successeur immédiat** de x (ou que x est un **prédécesseur immédiat** de y).

Exemple

Déterminer, lorsqu'ils existent les successeurs et prédécesseur immédiat de x dans les cas suivants

- (\mathbb{N}, \leq) et $x \in \mathbb{N}$
- (\mathbb{Q}, \leq) et $x \in \mathbb{Q}$
- $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ avec $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$ et $x = \{a\}$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \prec) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).
- on dit que $m \in F$, est **le plus petit élément** de F si pour tout x dans F , $m \preccurlyeq x$ (m est plus petit que tous les autres éléments de F).

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).
- on dit que $m \in F$, est **le plus petit élément** de F si pour tout x dans F , $m \preccurlyeq x$ (m est plus petit que tous les autres éléments de F).

On définit de même, les élément maximaux et *le* plus grand élément.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).
- on dit que $m \in F$, est **le plus petit élément** de F si pour tout x dans F , $m \preccurlyeq x$ (m est plus petit que tous les autres éléments de F).

On définit de même, les élément maximaux et *le* plus grand élément.

Exercices

Etudier l'existence d'éléments minimaux et du plus petit élément dans les cas suivants :

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).
- on dit que $m \in F$, est **le plus petit élément** de F si pour tout x dans F , $m \preccurlyeq x$ (m est plus petit que tous les autres éléments de F).

On définit de même, les élément maximaux et *le* plus grand élément.

Exercices

Etudier l'existence d'éléments minimaux et du plus petit élément dans les cas suivants :

- $E = (\mathbb{N}, \leq)$, et $F = \mathbb{N}$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).
- on dit que $m \in F$, est **le plus petit élément** de F si pour tout x dans F , $m \preccurlyeq x$ (m est plus petit que tous les autres éléments de F).

On définit de même, les élément maximaux et *le* plus grand élément.

Exercices

Etudier l'existence d'éléments minimaux et du plus petit élément dans les cas suivants :

- $E = (\mathbb{N}, \leq)$, et $F = \mathbb{N}$.
- $E = (\mathbb{R}, \leq)$ et $F =]0; 1]$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Définition : élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et F une partie de E ,

- on dit que $e \in F$, est **minimal** dans F s'il n'existe pas d'éléments x dans F tel que $x \prec e$ (aucun autre élément n'est plus petit que e).
- on dit que $m \in F$, est **le plus petit élément** de F si pour tout x dans F , $m \preccurlyeq x$ (m est plus petit que tous les autres éléments de F).

On définit de même, les élément maximaux et *le* plus grand élément.

Exercices

Etudier l'existence d'éléments minimaux et du plus petit élément dans les cas suivants :

- $E = (\mathbb{N}, \leq)$, et $F = \mathbb{N}$.
- $E = (\mathbb{R}, \leq)$ et $F =]0; 1]$.
- $E = (\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subset)$ et $F = \mathcal{P}(\mathcal{E}) \setminus \{\emptyset\}$ où $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) , on définit sur $E \times F$:

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) , on définit sur $E \times F$:

- La relation \preceq_p par $(e, f) \preceq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ et $f \preceq_F f'$,
 \preceq_p est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre produit**.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) , on définit sur $E \times F$:

- La relation \preceq_p par $(e, f) \preceq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ et $f \preceq_F f'$, \preceq_p est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre produit**.
- La relation \preceq_l par $(e, f) \preceq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ ou $(e = e'$ et $f \preceq_f f')$, \preceq_l est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre lexicographique**.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) , on définit sur $E \times F$:

- La relation \preceq_p par $(e, f) \preceq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ et $f \preceq_F f'$, \preceq_p est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre produit**.
- La relation \preceq_l par $(e, f) \preceq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ ou $(e = e'$ et $f \preceq_f f')$, \preceq_l est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre lexicographique**.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) , on définit sur $E \times F$:

- La relation \preceq_p par $(e, f) \preceq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ et $f \preceq_F f'$, \preceq_p est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre produit**.
- La relation \preceq_l par $(e, f) \preceq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ ou $(e = e'$ et $f \preceq_f f')$, \preceq_l est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre lexicographique**.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Exemple

Comparer (lorsque cela est possible) les couples suivants pour l'ordre produit et l'ordre lexicographique sur $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$:

C14 Ordre – Induction structurelle

2. Relation d'ordre

Ordre sur un produit cartésien

Etant deux ensembles ordonnés (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) , on définit sur $E \times F$:

- La relation \preceq_p par $(e, f) \preceq_p (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ et $f \preceq_F f'$, \preceq_p est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre produit**.
- La relation \preceq_l par $(e, f) \preceq_l (e', f')$ si et seulement si $e \preceq_E e'$ ou $(e = e' \text{ et } f \preceq_F f')$, \preceq_l est une relation d'ordre sur $E \times F$ appelé **ordre lexicographique**.

Ces définitions se généralisent à un produit cartésien de n ensembles.

Exemple

Comparer (lorsque cela est possible) les couples suivants pour l'ordre produit et l'ordre lexicographique sur $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$:

- 1 $(3, 5)$ et $(7, 6)$
- 2 $(3, 5)$ et $(7, 4)$
- 3 $(2, 1)$ et $(2, 4)$

C14 Ordre – Induction structurelle

3. Ordres bien fondés

Définition

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné, on dit que \preccurlyeq est un ordre **bien fondé** lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E . C'est à dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_k \prec x_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Un ensemble **bien ordonné** est un ensemble muni d'un ordre bien fondé.

C14 Ordre – Induction structurelle

3. Ordres bien fondés

Définition

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné, on dit que \preccurlyeq est un ordre **bien fondé** lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E . C'est à dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_k \prec x_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Un ensemble **bien ordonné** est un ensemble muni d'un ordre bien fondé.

Exemple

- L'ordre usuel sur \mathbb{N} est bien fondé.

C14 Ordre – Induction structurelle

3. Ordres bien fondés

Définition

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné, on dit que \preccurlyeq est un ordre **bien fondé** lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E . C'est à dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_k \prec x_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Un ensemble **bien ordonné** est un ensemble muni d'un ordre bien fondé.

Exemple

- L'ordre usuel sur \mathbb{N} est bien fondé.
- L'ordre usuel sur \mathbb{Z} n'est pas bien fondé.

C14 Ordre – Induction structurelle

3. Ordres bien fondés

Définition

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné, on dit que \preccurlyeq est un ordre **bien fondé** lorsqu'il n'existe pas de suites d'éléments strictement décroissantes d'éléments de E . C'est à dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_k \prec x_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Un ensemble **bien ordonné** est un ensemble muni d'un ordre bien fondé.

Exemple

- L'ordre usuel sur \mathbb{N} est bien fondé.
- L'ordre usuel sur \mathbb{Z} n'est pas bien fondé.

Caractérisation d'un ordre bien fondé

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné, l'ordre \preccurlyeq est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet un élément minimal.

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Preuve de terminaison

La notion d'ordre bien fondé permet d'étendre la définition d'un variant. En effet, pour prouver la terminaison d'une boucle, on peut exhiber une quantité à valeur dans ensemble E muni d'un ordre bien fondé \preceq et strictement décroissante à chaque passage dans la boucle.

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Preuve de terminaison

La notion d'ordre bien fondé permet d'étendre la définition d'un variant. En effet, pour prouver la terminaison d'une boucle, on peut exhiber une quantité à valeur dans ensemble E muni d'un ordre bien fondé \preceq et strictement décroissante à chaque passage dans la boucle.

Comme dans le cas de (N, \leq) , déjà rencontré, cela permet de prouver la terminaison de la boucle car comme (E, \preceq) est bien fondé, il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de E .

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Preuve de terminaison

La notion d'ordre bien fondé permet d'étendre la définition d'un variant. En effet, pour prouver la terminaison d'une boucle, on peut exhiber une quantité à valeur dans ensemble E muni d'un ordre bien fondé \preceq et strictement décroissante à chaque passage dans la boucle.

Comme dans le cas de (N, \leq) , déjà rencontré, cela permet de prouver la terminaison de la boucle car comme (E, \preceq) est bien fondé, il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de E .

Ordre bien fondé sur un produit cartésien

Si (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) sont deux ensembles bien fondés alors,

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Preuve de terminaison

La notion d'ordre bien fondé permet d'étendre la définition d'un variant. En effet, pour prouver la terminaison d'une boucle, on peut exhiber une quantité à valeur dans ensemble E muni d'un ordre bien fondé \preceq et strictement décroissante à chaque passage dans la boucle.

Comme dans le cas de (N, \leq) , déjà rencontré, cela permet de prouver la terminaison de la boucle car comme (E, \preceq) est bien fondé, il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de E .

Ordre bien fondé sur un produit cartésien

Si (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) sont deux ensembles bien fondés alors,

- L'ordre produit sur $E \times F$ est bien fondé,

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Preuve de terminaison

La notion d'ordre bien fondé permet d'étendre la définition d'un variant. En effet, pour prouver la terminaison d'une boucle, on peut exhiber une quantité à valeur dans ensemble E muni d'un ordre bien fondé \preceq et strictement décroissante à chaque passage dans la boucle.

Comme dans le cas de (N, \leq) , déjà rencontré, cela permet de prouver la terminaison de la boucle car comme (E, \preceq) est bien fondé, il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de E .

Ordre bien fondé sur un produit cartésien

Si (E, \preceq_E) et (F, \preceq_F) sont deux ensembles bien fondés alors,

- L'ordre produit sur $E \times F$ est bien fondé,
- L'ordre lexicographique sur $E \times F$ est bien fondé.

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fusion de deux listes

- Ecrire en OCaml une fonction `fusion, int list -> int list -> int list` qui prend en arguments deux listes triées d'entiers et renvoie leur fusion triée.

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fusion de deux listes

- Ecrire en OCaml une fonction `fusion`, `int list -> int list -> int list` qui prend en arguments deux listes triées d'entiers et renvoie leur fusion triée.
- En utilisant un variant à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre produit justifier la terminaison de cette fonction.

Terminaison de la fusion de deux listes

- Ecrire en OCaml une fonction `fusion`, `int list -> int list -> int list` qui prend en arguments deux listes triées d'entiers et renvoie leur fusion triée.

```
1  let rec fusion l1 l2 =  
2    match l1,l2 with  
3    | [], l2 -> l2  
4    | l1, [] -> l1  
5    | h1::t1, h2::t2 -> if h1<h2 then h1::fusion t1 l2 else  
    ↪ h2::fusion l1 t2;;
```

- En utilisant un variant à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre produit justifier la terminaison de cette fonction.

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

On considère la fonction d'Ackerman $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} a(0, m) &= m + 1 \\ a(n, 0) &= a(n - 1, 1) \text{ si } n > 0 \\ a(n, m) &= a(n - 1, a(n, m - 1)) \text{ si } n > 0 \text{ et } m > 0 \end{cases}$$

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

On considère la fonction d'Ackerman $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par par :

$$\begin{cases} a(0, m) &= m + 1 \\ a(n, 0) &= a(n - 1, 1) \text{ si } n > 0 \\ a(n, m) &= a(n - 1, a(n, m - 1)) \text{ si } n > 0 \text{ et } m > 0 \end{cases}$$

① Compléter le tableau de valeurs suivant de la fonction a :

	0	1	2	3	4	5	6
0
1	
2				

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

On considère la fonction d'Ackerman $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par par :

$$\begin{cases} a(0, m) &= m + 1 \\ a(n, 0) &= a(n - 1, 1) \text{ si } n > 0 \\ a(n, m) &= a(n - 1, a(n, m - 1)) \text{ si } n > 0 \text{ et } m > 0 \end{cases}$$

- ① Compléter le tableau de valeurs suivant de la fonction a :

	0	1	2	3	4	5	6
0
1	
2				

- ② Ecrire la fonction `ack int -> int -> int` qui permet de calculer $a(n, m)$

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

On considère la fonction d'Ackerman $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par par :

$$\begin{cases} a(0, m) &= m + 1 \\ a(n, 0) &= a(n - 1, 1) \text{ si } n > 0 \\ a(n, m) &= a(n - 1, a(n, m - 1)) \text{ si } n > 0 \text{ et } m > 0 \end{cases}$$

- ① Compléter le tableau de valeurs suivant de la fonction a :

	0	1	2	3	4	5	6
0
1	
2				

- ② Ecrire la fonction `ack int -> int -> int` qui permet de calculer $a(n, m)$
- ③ Prouver sa terminaison à l'aide d'un variant à valeurs dans \mathbb{N}^2 muni de l'ordre lexicographique.

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

① Tableau de valeurs :

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	
2	2	3	5				

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

① Tableau de valeurs :

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	
2	2	3	5				

② Fonction ack :

```
1  let rec ack n m =  
2    match n, m with  
3    | 0, m -> m+1  
4    | n, 0 -> ack (n-1) 1  
5    | n, m -> ack (n-1) (ack n (m-1));;
```

C14 Ordre – Induction structurelle

4. Applications aux preuves de terminaison

Terminaison de la fonction d'Ackerman

1 Tableau de valeurs :

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	
2	2	3	5				

2 Fonction ack :

```
1  let rec ack n m =  
2    match n, m with  
3    | 0, m -> m+1  
4    | n, 0 -> ack (n-1) 1  
5    | n, m -> ack (n-1) (ack n (m-1));;
```

3 On note (n, m) (resp. (n', m')) les valeurs des paramètres avant (resp. après un appel récursif) alors, soit $n' < n$ et donc $(n', m') \prec (n, m)$ soit $n' = n$ et $m' \leq m$ et on a encore $(n', m') \prec (n, m)$.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Rappel : arbre binaire

On rappelle qu'on a défini un arbre binaire (sur un ensemble d'étiquettes E) comme étant :

- soit l'arbre vide noté \emptyset
- soit la donnée d'un triplet (g, e, d) où $e \in E$ et g et d sont des arbres binaires.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Rappel : arbre binaire

On rappelle qu'on a défini un arbre binaire (sur un ensemble d'étiquettes E) comme étant :

- soit l'arbre vide noté \emptyset
- soit la donnée d'un triplet (g, e, d) où $e \in E$ et g et d sont des arbres binaires.

On a donc donné un objet de base (l'arbre vide) et une règle permettant de construire un arbre « plus grand » en donnant deux sous arbres.

C'est ce mécanisme (la donnée d'un ou plusieurs objets de base et d'une ou plusieurs règles permettant d'en construire d'autres) qui permet de définir des ensembles dits **inductifs**.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

- Un ensemble $X_0 \subset E$, appelé **axiomes**

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

- Un ensemble $X_0 \subset E$, appelé **axiomes**
- Un ensemble fini de **règles d'inférences**.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

- Un ensemble $X_0 \subset E$, appelé **axiomes**
- Un ensemble fini de **règles d'inférences**.

Une règle d'inférence R est une fonction de E^n dans E , n est appelé **arité** de R .

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

- Un ensemble $X_0 \subset E$, appelé **axiomes**
- Un ensemble fini de **règles d'inférences**.

Une règle d'inférence R est une fonction de E^n dans E , n est appelé **arité** de R .
 X est alors la *plus petite partie* (au sens de l'inclusion) de E qui :

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

- Un ensemble $X_0 \subset E$, appelé **axiomes**
- Un ensemble fini de **règles d'inférences**.

Une règle d'inférence R est une fonction de E^n dans E , n est appelé **arité** de R .

X est alors la *plus petite partie* (au sens de l'inclusion) de E qui :

- contient X_0

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Définition

Soit E un ensemble, on peut définir par **induction** une partie X de E en se donnant :

- Un ensemble $X_0 \subset E$, appelé **axiomes**
- Un ensemble fini de **règles d'inférences**.

Une règle d'inférence R est une fonction de E^n dans E , n est appelé **arité** de R .

X est alors la *plus petite partie* (au sens de l'inclusion) de E qui :

- contient X_0
- est stable par l'application des règles d'inférence c'est à dire que $\forall f \in R$ d'arité n , $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ appartenant au domaine de définition de f , $f(x_1, \dots, x_n) \in X$.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exemples

- L'ensemble \mathbb{N} peut-être défini de façon inductive par $X_0 = \{0\}$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $n \mapsto n + 1$.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exemples

- L'ensemble \mathbb{N} peut-être défini de façon inductive par $X_0 = \{0\}$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $n \mapsto n + 1$.
- Les listes d'entiers de OCaml peuvent être définies de façon inductive par $X_0 = []$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $l \mapsto n :: l$ où $n \in \mathbb{N}$.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exemples

- L'ensemble \mathbb{N} peut-être défini de façon inductive par $X_0 = \{0\}$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $n \mapsto n + 1$.
- Les listes d'entiers de OCaml peuvent être définies de façon inductive par $X_0 = []$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $l \mapsto n :: l$ où $n \in \mathbb{N}$.

Le **filtrage par motif** permet alors de raisonner sur les listes de façon globale en envisageant à chaque fois le cas de base (la liste vide) et le cas d'une liste produite par la règle d'inférence.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exemples

- L'ensemble \mathbb{N} peut-être défini de façon inductive par $X_0 = \{0\}$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $n \mapsto n + 1$.
- Les listes d'entiers de OCaml peuvent être définies de façon inductive par $X_0 = []$ et la règle d'inférence d'arité 1 : $l \mapsto n :: l$ où $n \in \mathbb{N}$.
Le **filtrage par motif** permet alors de raisonner sur les listes de façon globale en envisageant à chaque fois le cas de base (la liste vide) et le cas d'une liste produite par la règle d'inférence.
- Etant donné un ensemble A appelé **alphabet** dont les éléments sont appelés **lettres**, on peut définir de façon inductive l'ensemble A^* des mots sur A par la donnée de $X_0 = \{\epsilon\}$ où ϵ est le mot vide et la règle d'inférence d'arité 1 : $u \mapsto ua$ pour tout a dans A

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exercices

- 1 Donner l'ensemble X_0 , et la règle d'inférence pour la définition des arbres binaires rappelées en début de chapitre.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exercices

- 1 Donner l'ensemble X_0 , et la règle d'inférence pour la définition des arbres binaires rappelées en début de chapitre.
- 2 Donner une définition inductive des entiers pairs.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exercices

- 1 Donner l'ensemble X_0 , et la règle d'inférence pour la définition des arbres binaires rappelées en début de chapitre.
- 2 Donner une définition inductive des entiers pairs.
- 3 Sur $\mathbb{N} \cup \{+, -, \times, /\}$ on définit par induction l'ensemble E par $X_0 = \mathbb{N}$ et les règles d'inférences d'arité 2 : $(u, v) \mapsto u + v$, $(u, v) \mapsto u - v$, $(u, v) \mapsto u \times v$ et $(u, v) \mapsto u/v$
Montrer que $8 \times 4 + 10 \in E$ et donner deux suites différentes d'application des règles d'inférence permettant de l'obtenir.

C14 Ordre – Induction structurelle

5. Ensembles inductifs

Exercices

- 1 Donner l'ensemble X_0 , et la règle d'inférence pour la définition des arbres binaires appelées en début de chapitre.
- 2 Donner une définition inductive des entiers pairs.
- 3 Sur $\mathbb{N} \cup \{+, -, \times, /\}$ on définit par induction l'ensemble E par $X_0 = \mathbb{N}$ et les règles d'inférences d'arité 2 : $(u, v) \mapsto u + v$, $(u, v) \mapsto u - v$, $(u, v) \mapsto u \times v$ et $(u, v) \mapsto u/v$
Montrer que $8 \times 4 + 10 \in E$ et donner deux suites différentes d'application des règles d'inférence permettant de l'obtenir.

Ambigüité d'une définition inductive

Une définition inductive d'un ensemble X est dite **non ambiguë** si pour tout $x \in X$, il n'existe qu'une seule façon de construire x à partir des axiomes et des règles d'inférence. Cela permet notamment de construire des fonctions sur les objets inductifs.

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Principe d'induction structurelle

Soit X un ensemble défini inductivement, et P une propriété sur X .

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Principe d'induction structurelle

Soit X un ensemble défini inductivement, et P une propriété sur X .

- (*initialisation*) Si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments de X_0 .

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Principe d'induction structurelle

Soit X un ensemble défini inductivement, et P une propriété sur X .

- (*initialisation*) Si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments de X_0 .
- (*hérédité*) Et si pour toute règle R d'arité n , et tout $(x_1, \dots, x_n) \in X$,
 $P(x_1), \dots, P(x_n)$ vraies $\implies P(x_1, \dots, x_n)$ vraie.

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Principe d'induction structurelle

Soit X un ensemble défini inductivement, et P une propriété sur X .

- (*initialisation*) Si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments de X_0 .
- (*hérédité*) Et si pour toute règle R d'arité n , et tout $(x_1, \dots, x_n) \in X$,
 $P(x_1), \dots, P(x_n)$ vraies $\implies P(x_1, \dots, x_n)$ vraie.

alors pour tout $x \in X$, $P(x)$ est vraie.

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Principe d'induction structurelle

Soit X un ensemble défini inductivement, et P une propriété sur X .

- (*initialisation*) Si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments de X_0 .
- (*hérédité*) Et si pour toute règle R d'arité n , et tout $(x_1, \dots, x_n) \in X$,
 $P(x_1), \dots, P(x_n)$ vraies $\implies P(x_1, \dots, x_n)$ vraie.

alors pour tout $x \in X$, $P(x)$ est vraie.

Remarque

Dans le cas où X est l'ensemble des entiers naturels défini de façon inductive, on retrouve le principe du raisonnement par récurrence.

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Exemple

On définit inductivement (et de façon non ambiguë) l'ensemble D des mots de Dyck (ou parenthésages bien formés) par : $X_0 = \{\epsilon\}$ et la règle d'inférence d'arité 2 $(x, y) \mapsto \langle x \rangle y$.

Pour $d \in D$, on note $n_o(d)$ (resp. $n_f(d)$) le nombre de symboles \langle (resp. \rangle) apparaissant dans d . Montrer par induction structurelle que $n_o(d) = n_f(d)$ pour tout $d \in D$.

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Exemple

On définit inductivement (et de façon non ambiguë) l'ensemble D des mots de Dyck (ou parenthésages bien formés) par : $X_0 = \{\epsilon\}$ et la règle d'inférence d'arité 2 $(x, y) \mapsto \langle x \rangle y$.

Pour $d \in D$, on note $n_o(d)$ (resp. $n_f(d)$) le nombre de symboles \langle (resp. \rangle) apparaissant dans d . Montrer par induction structurelle que $n_o(d) = n_f(d)$ pour tout $d \in D$.

- On note $P(d)$ la propriété $n_o(d) = n_f(d)$

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Exemple

On définit inductivement (et de façon non ambiguë) l'ensemble D des mots de Dyck (ou parenthésages bien formés) par : $X_0 = \{\epsilon\}$ et la règle d'inférence d'arité 2 $(x, y) \mapsto \langle x \rangle y$.

Pour $d \in D$, on note $n_o(d)$ (resp. $n_f(d)$) le nombre de symboles \langle (resp. \rangle) apparaissant dans d . Montrer par induction structurelle que $n_o(d) = n_f(d)$ pour tout $d \in D$.

- On note $P(d)$ la propriété $n_o(d) = n_f(d)$
- Initialisation : on vérifie la propriété pour les éléments de X_0 , comme $X_0 = \epsilon$ et $n_o(\epsilon) = 0$ et $n_f(\epsilon) = 0$. P est vraie pour tous les éléments de X_0 .

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Exemple

On définit inductivement (et de façon non ambiguë) l'ensemble D des mots de Dyck (ou parenthésages bien formés) par : $X_0 = \{\epsilon\}$ et la règle d'inférence d'arité 2 $(x, y) \mapsto \langle x \rangle y$.

Pour $d \in D$, on note $n_o(d)$ (resp. $n_f(d)$) le nombre de symboles \langle (resp. \rangle) apparaissant dans d . Montrer par induction structurelle que $n_o(d) = n_f(d)$ pour tout $d \in D$.

- On note $P(d)$ la propriété $n_o(d) = n_f(d)$
- Initialisation : on vérifie la propriété pour les éléments de X_0 , comme $X_0 = \epsilon$ et $n_o(\epsilon) = 0$ et $n_f(\epsilon) = 0$. P est vraie pour tous les éléments de X_0 .
- Hérédité : on vérifie la conservation de la propriété par application de chacune des règles d'inférence. Si x et y sont deux mots de Dyck vérifiant P alors $n_o(\langle x \rangle y) = 1 + n_o(x) + n_o(y)$ et $n_f(\langle x \rangle y) = 1 + n_f(x) + n_f(y)$ et puisque x et y vérifient P , $n_o(\langle x \rangle y) = n_f(\langle x \rangle y)$

C14 Ordre – Induction structurelle

6. Preuve par induction structurelle

Exemple

On définit inductivement (et de façon non ambiguë) l'ensemble D des mots de Dyck (ou parenthésages bien formés) par : $X_0 = \{\epsilon\}$ et la règle d'inférence d'arité 2 $(x, y) \mapsto \langle x \rangle y$.

Pour $d \in D$, on note $n_o(d)$ (resp. $n_f(d)$) le nombre de symboles \langle (resp. \rangle) apparaissant dans d . Montrer par induction structurelle que $n_o(d) = n_f(d)$ pour tout $d \in D$.

- On note $P(d)$ la propriété $n_o(d) = n_f(d)$
- Initialisation : on vérifie la propriété pour les éléments de X_0 , comme $X_0 = \epsilon$ et $n_o(\epsilon) = 0$ et $n_f(\epsilon) = 0$. P est vraie pour tous les éléments de X_0 .
- Hérédité : on vérifie la conservation de la propriété par application de chacune des règles d'inférence. Si x et y sont deux mots de Dyck vérifiant P alors $n_o(\langle x \rangle y) = 1 + n_o(x) + n_o(y)$ et $n_f(\langle x \rangle y) = 1 + n_f(x) + n_f(y)$ et puisque x et y vérifient P , $n_o(\langle x \rangle y) = n_f(\langle x \rangle y)$

Par induction structurelle on conclut que P est vraie pour tout $x \in D$.

C14 Ordre – Induction structurelle

7. Ordre induit

Définition - Théorème

Soit X un ensemble inductif défini de manière non ambiguë on définit la relation \mathcal{R} par $x_i \mathcal{R} f(x_1, \dots, x_n)$ pour toute règle d'inférence f d'arité n et tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) .

C14 Ordre – Induction structurelle

7. Ordre induit

Définition - Théorème

Soit X un ensemble inductif défini de manière non ambiguë on définit la relation \mathcal{R} par $x_i \mathcal{R} f(x_1, \dots, x_n)$ pour toute règle d'inférence f d'arité n et tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) .

La fermeture réflexive-transitive de \mathcal{R} , notée \preccurlyeq est une relation d'ordre bien fondé sur X appelé **ordre induit**.

C14 Ordre – Induction structurelle

7. Ordre induit

Définition - Théorème

Soit X un ensemble inductif défini de manière non ambiguë on définit la relation \mathcal{R} par $x_i \mathcal{R} f(x_1, \dots, x_n)$ pour toute règle d'inférence f d'arité n et tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) .

La fermeture réflexive-transitive de \mathcal{R} , notée \preccurlyeq est une relation d'ordre bien fondé sur X appelé **ordre induit**.

Principe d'induction bien fondé

Soient (X, \preccurlyeq) un ensemble bien ordonné et P une propriété sur X , si

- P est vraie pour tous les éléments minimaux de X .
- Et si pour $z \preccurlyeq x$ $P(z)$ vraies $\implies P(x)$

Alors P est vraie pour tout $x \in X$.