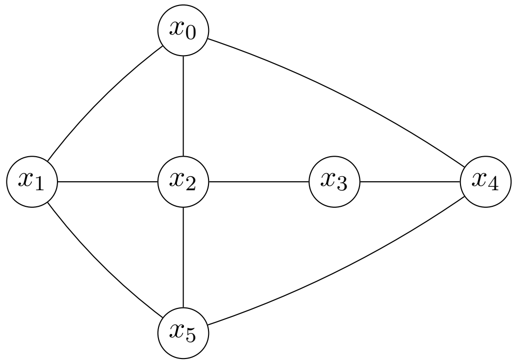
❑ **Exercice 1** : *Définition et représentation d'un graphe non orienté*
On note : $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $A = \{ab, ac, bc, ef, gf, ed, ce, bg\}$

1. Représenter le graphe non orienté $G = (S, A)$
2. Donner le degré de chaque sommet.
3. Donner la représentation de G sous forme de matrice d'adjacence.
4. Donner la représentation de G sous forme de listes d'adjacence.

❑ **Exercice 2** : *Définition et représentation d'un graphe orienté*
On note : $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $A = \{ab, ac, bc, ef, gf, ed, ce, bg\}$

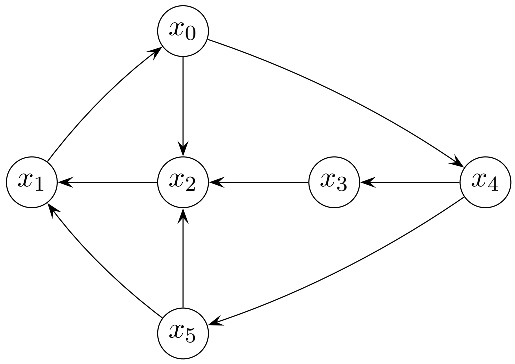
1. Représenter le graphe orienté $G = (S, A)$
2. Donner les degrés entrant et sortants de chaque sommet.
3. Donner la représentation de G sous forme de matrice d'adjacence.
4. Donner la représentation de G sous forme de listes d'adjacence.

❑ **Exercice 3** : *Représentation d'un graphe*
On considère le graphe suivant :



1. Donner sa représentation sous forme de matrice d'adjacence.
2. Donner sa représentation sous forme de listes d'adjacence.
3. Quel est le sommet de plus haut degré ? Donner la liste de ses voisins.

❑ **Exercice 4** : *Représentation d'un graphe orienté*
On considère le graphe G représenté ci-dessous :



1. Donner sa représentation sous forme de matrice d'adjacence.
2. Donner sa représentation sous forme de listes d'adjacence.
3. Donner les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
4. Donner $\mathcal{V}_+(x_0)$ et $\mathcal{V}_-(x_1)$
5. Dessiner le graphe dont la matrice d'adjacence est la transposée de celle de ce graphe.

❑ **Exercice 5** : *Graphe régulier, graphe complet*
Les graphes considérés dans cet exercice sont non orientés. On dit qu'un graphe $G = (S, A)$ est *régulier* lorsque tous ses sommets ont le même degré. Et on dit qu'un graphe est *complet* lorsque qu'il y a une arête entre tous les paires de sommets

1. Dessiner un graphe non orienté régulier de taille 6 dont les sommets sont de degré 3

2. Dessiner un graphe complet de taille 5
3. Déterminer le nombre d'arête du graphe complet à n sommets
4. Un graphe complet est-il régulier ?
5. Peut-on construire un graphe régulier de taille 5 dont tous les sommets sont de degré 3 ?
6. A quelle condition portant sur n et k peut-on construire un graphe régulier de taille n dont tous les sommets sont de degré k ?

❑ **Exercice 6** : *Sommet isolé*
On dit qu'un sommet d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est *isolé* lorsque son degré est nul.

1. Montrer qu'un graphe ne peut avoir simultanément un sommet isolé et un sommet de degré $|S| - 1$
2. En déduire qu'un graphe a au moins deux sommets de même degré.

❑ **Exercice 7** : *Parité*
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté, on note $d(x)$ le degré d'un sommet $x \in A$.

1. Montrer que $\sum\limits_{x \in A} d(x) = 2|A|$
2. En déduire que G a forcément un nombre pair de sommets de degré impair

❑ **Exercice 8** : *Un peu de dénombrement*

1. Montrer qu'il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ graphes non orientés à n sommets.
2. Déterminer le nombre de graphes orientés à n sommets.

❑ **Exercice 9** : *Matrice d'adjacence et nombre de chemins*
Soit $G = (S, A)$ et M sa matrice d'adjacence, le but de l'exercice est de calculer le nombre de chemins de longueur k entre deux sommets i et j d'un graphe qu'on notera $c_{i,j,k}$.

1. Montrer que $c_{i,j,1} = M_{i,j}$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{i,j,k} = M^k_{i,j}$ (on pourra raisonner par récurrence)
3. En supposant qu'on calcul M^k avec l'algorithme d'exponentiation rapide, donner la complexité de cette méthode pour calculer les $c_{i,j,k}$