Définition

Définition

En informatique, on dit qu'une fonction est récursive,

Définition

En informatique, on dit qu'une fonction est récursive, lorsque cette fonction fait appel à elle-même.

Définition

En informatique, on dit qu'une fonction est récursive, lorsque cette fonction fait appel à elle-même.

Remarques

Définition

En informatique, on dit qu'une fonction est récursive, lorsque cette fonction fait appel à elle-même.

Remarques

- Une fonction récursive permet donc, *comme une boucle*, de répéter des instructions. Une même fonction peut donc souvent se programmer de façon itérative (avec des boucles) ou de façon récursive (en s'appelant elle-même).

Définition

En informatique, on dit qu'une fonction est récursive, lorsque cette fonction fait appel à elle-même.

Remarques

- Une fonction récursive permet donc, *comme une boucle*, de répéter des instructions. Une même fonction peut donc souvent se programmer de façon itérative (avec des boucles) ou de façon récursive (en s'appelant elle-même).
- Une fonction récursive doit toujours contenir une condition d'arrêt, dans le cas contraire elle s'appelle elle-même à l'infini et le programme ne se termine jamais.

Définition

En informatique, on dit qu'une fonction est récursive, lorsque cette fonction fait appel à elle-même.

Remarques

- Une fonction récursive permet donc, *comme une boucle*, de répéter des instructions. Une même fonction peut donc souvent se programmer de façon itérative (avec des boucles) ou de façon récursive (en s'appelant elle-même).
- Une fonction récursive doit toujours contenir une condition d'arrêt, dans le cas contraire elle s'appelle elle-même à l'infini et le programme ne se termine jamais.
- Les valeurs passées en paramètres lors des appels successifs doivent être différents, sinon la fonction s'exécute à l'identique à chaque appel et donc boucle à l'infini.

Exemple : les puissances positives

En mathématiques, pour un nombre quelconque a et un entier positif n, on définit a puissance n par :
$a^n = a \times a \times \cdots \times a$, et on convient que $a^0 = 1$

Exemple : les puissances positives

En mathématiques, pour un nombre quelconque a et un entier positif n, on définit a puissance n par :
$a^n = a \times a \times \cdots \times a$, et on convient que $a^0 = 1$

- Définir une fonction `puissance` qui prend en argument un flottant a et un entier n et renvoie a^n en effectuant ce calcul de façon itératif

Exemple : les puissances positives

En mathématiques, pour un nombre quelconque a et un entier positif n, on définit a puissance n par :
$a^n = a \times a \times \cdots \times a$, et on convient que $a^0 = 1$

- Définir une fonction `puissance` qui prend en argument un flottant a et un entier n et renvoie a^n en effectuant ce calcul de façon itératif
- Recopier et compléter : $a^n = \cdots \times a^{\cdots}$

Exemple : les puissances positives

En mathématiques, pour un nombre quelconque a et un entier positif n, on définit a puissance n par :
$a^n = a \times a \times \cdots \times a$, et on convient que $a^0 = 1$

- Définir une fonction `puissance` qui prend en argument un flottant a et un entier n et renvoie a^n en effectuant ce calcul de façon itératif
- Recopier et compléter : $a^n = \cdots \times a^{\cdots}$
- En déduire une version récursive de la fonction calculant les puissances

Exemple : les puissances positives

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
6          p = p * a;
7      }
8      return p;
9  }
```

Exemple : les puissances positives

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
6          p = p * a;
7      }
8      return p;
9  }
```

- $a^n = a \times a^{n-1}$

Exemple : les puissances positives

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
6          p = p * a;
7      }
8      return p;
9  }
```

- $a^n = a \times a^{n-1}$

```
1  double puissance_recursif(double a, int n)
2  {
3      if (n == 0)
4      {
5          return 1;
6      }
7      else
8      {
9          return a * puissance_recursif(a, n - 1);
10     }
11 }
```

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1  let rec puissance x n =
2    if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1  let rec puissance x n =
2    if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1  let rec puissance x n =
2    if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

- La définition d'une fonction commence par `let`, suivi de `rec` si la fonction est récursive.

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1 let rec puissance x n =
2   if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

- La définition d'une fonction commence par `let`, suivi de `rec` si la fonction est récursive.
- Remarquer l'absence des parenthèses autour des arguments, et surtout l'absence du type des variables. En effet, OCaml détecte automatiquement le type des variables utilisés (ici des entiers) par un procédé appelé inférence de types.

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1  let rec puissance x n =
2    if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1  let rec puissance x n =
2    if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

- Le test d'égalité est le simple =

Un petit détour par OCaml

La récursivité est très présente dans le paradigme de programmation fonctionnel que nous verrons en OCaml. On présente donc ici la version récursive des puissances en OCaml (même si nous n'avons pas encore commencé son apprentissage)

```
1  let rec puissance x n =
2    if n=0 then 1 else x * puissance x (n-1)
```

- Le test d'égalité est le simple =
- Le mot clé `then` suit le test d'égalité.
- Remarquer l'absence de `return`.

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.

Exemple : dessin d'un triangle

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.
2. Ecrire la relation liant $n!$ et $(n-1)!$.

Exemple : dessin d'un triangle

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.
2. Ecrire la relation liant $n!$ et $(n-1)!$.
3. Donner une fonction récursive en C permettant de calculer $n!$.

Exemple : dessin d'un triangle

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.
2. Ecrire la relation liant $n!$ et $(n-1)!$.
3. Donner une fonction récursive en C permettant de calculer $n!$.
4. Même question en Ocaml.

Exemple : dessin d'un triangle

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.
2. Ecrire la relation liant $n!$ et $(n-1)!$.
3. Donner une fonction récursive en C permettant de calculer $n!$.
4. Même question en Ocaml.

Exemple : dessin d'un triangle

On suppose qu'on dispose déjà d'une fonction `ligne` qui ne renvoie rien prend en argument un entier `n` et affiche `n` caractères `*` suivi d'un saut de ligne.

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.
2. Ecrire la relation liant $n!$ et $(n-1)!$.
3. Donner une fonction récursive en C permettant de calculer $n!$.
4. Même question en Ocaml.

Exemple : dessin d'un triangle

On suppose qu'on dispose déjà d'une fonction `ligne` qui ne renvoie rien prend en argument un entier `n` et affiche `n` caractères `*` suivi d'un saut de ligne.

1. Ecrire une fonction itérative en C qui prend en argument un entier n et dessine un triangle de caractères *comme ci-dessous ($n = 4$) :

```
****
***
**
*
```

Exemple : factorielle

1. Ecrire une fonction itérative en C permettant de calculer $n!$.
2. Ecrire la relation liant $n!$ et $(n-1)!$.
3. Donner une fonction récursive en C permettant de calculer $n!$.
4. Même question en Ocaml.

Exemple : dessin d'un triangle

On suppose qu'on dispose déjà d'une fonction `ligne` qui ne renvoie rien prend en argument un entier `n` et affiche `n` caractères `*` suivi d'un saut de ligne.

1. Ecrire une fonction itérative en C qui prend en argument un entier n et dessine un triangle de caractères *comme ci-dessous ($n = 4$) :

   ****

   ***

   **

   *

2. Donner une version récursive de cette fonction.

Factorielle : correction

1. Version itérative

```
1   int fact_iter( int n){
2       int res = 1;
3      for ( int i=1;i<=n;i++){
4          res = res * i;}
5      return res;}
```

Factorielle : correction

1. Version itérative

```
1   int fact_iter( int n){
2       int res = 1;
3      for ( int i=1;i<=n;i++){
4          res = res * i;}
5      return res;}
```

2. $n! = n \times (n-1)!$

Factorielle : correction

1. Version itérative

```
1   int fact_iter( int n){
2       int res = 1;
3      for ( int i=1;i<=n;i++){
4          res = res * i;}
5      return res;}
```

2. $n! = n \times (n-1)!$

3. Version récursive en C

```
1   int fact_rec( int n){
2      if (n==0)
3          {return 1;}
4      return n*fact_rec(n-1);}
```

Factorielle : correction

1. Version itérative

```
1   int fact_iter( int n){
2       int res = 1;
3      for ( int i=1;i<=n;i++){
4          res = res * i;}
5      return res;}
```

2. $n! = n \times (n-1)!$

3. Version récursive en C

```
1   int fact_rec( int n){
2      if (n==0)
3          {return 1;}
4      return n*fact_rec(n-1);}
```

4. Version récursive en Ocaml

```
1  let rec fact n =
2    if n=0 then 1 else n*fact (n-1)
```

Triangle : correction

1. Version itérative

```
1  void triangle_iter(int n){
2      for (int i=n;i>=1;i--)
3      {ligne(i);}
4      }
```

Triangle : correction

1. Version itérative

```
1  void triangle_iter(int n){
2      for (int i=n;i>=1;i--)
3      {ligne(i);}
4      }
```

2. Version récursive

```
1  void triangle_rec(int n) {
2      if (n>0)
3          {ligne(n);
4           triangle_rec(n-1);}
5      }
```

Définition

Une fonction est dite récursive terminale lorsque chaque appel récursif est la dernière instruction a être évaluée. c'est-à-dire qu'aucun calcul n'est effectué avec le résultat de l'appel récursif.

Exemples

Définition

Une fonction est dite récursive terminale lorsque chaque appel récursif est la dernière instruction a être évaluée. c'est-à-dire qu'aucun calcul n'est effectué avec le résultat de l'appel récursif.

Exemples

La fonction `puissance` vue en début de chapitre :

```
1        return a * puissance_recursif(a, n - 1);
```

Définition

Une fonction est dite récursive terminale lorsque chaque appel récursif est la dernière instruction a être évaluée. c'est-à-dire qu'aucun calcul n'est effectué avec le résultat de l'appel récursif.

Exemples

La fonction `puissance` vue en début de chapitre :

```
1        return a * puissance_recursif(a, n - 1);
```

n'est pas récursive terminale,

Définition

Une fonction est dite récursive terminale lorsque chaque appel récursif est la dernière instruction a être évaluée. c'est-à-dire qu'aucun calcul n'est effectué avec le résultat de l'appel récursif.

Exemples

La fonction `puissance` vue en début de chapitre :

```
1        return a * puissance_recursif(a, n - 1);
```

n'est pas récursive terminale, en effet bien que l'appel récursif soit placé à la fin, le dernier calcul effectué par la fonction est la multiplication.

Exemples

1. La fonction `factorielle` ci-dessous est-elle récursive terminale ?

```
1   int fact_rec( int n){
2       if (n==0)
3           {return 1;}
4       return n*fact_rec(n-1);}
```

Exemples

1. La fonction `factorielle` ci-dessous est-elle récursive terminale ?

```
1   int fact_rec( int n){
2       if (n==0)
3           {return 1;}
4       return n*fact_rec(n-1);}
```

Non, car le dernier calcul effectué par la fonction est la multiplication.

Exemples

1. La fonction `factorielle` ci-dessous est-elle récursive terminale ?

```
1  int fact_rec( int n){
2      if (n==0)
3          {return 1;}
4      return n*fact_rec(n-1);}
```

Non, car le dernier calcul effectué par la fonction est la multiplication.

2. Même question pour la fonction `triangle`

```
1  void triangle_rec(int n) {
2      if (n>0)
3          {ligne(n);
4           triangle_rec(n-1);}
5      }
```

Exemples

1. La fonction `factorielle` ci-dessous est-elle récursive terminale ?

```
1  int fact_rec( int n){
2      if (n==0)
3          {return 1;}
4      return n*fact_rec(n-1);}
```

Non, car le dernier calcul effectué par la fonction est la multiplication.

2. Même question pour la fonction `triangle`

```
1  void triangle_rec(int n) {
2      if (n>0)
3          {ligne(n);
4           triangle_rec(n-1);}
5      }
```

Oui, l'appel récursif est la dernière instruction à être exécutée.

Remarque

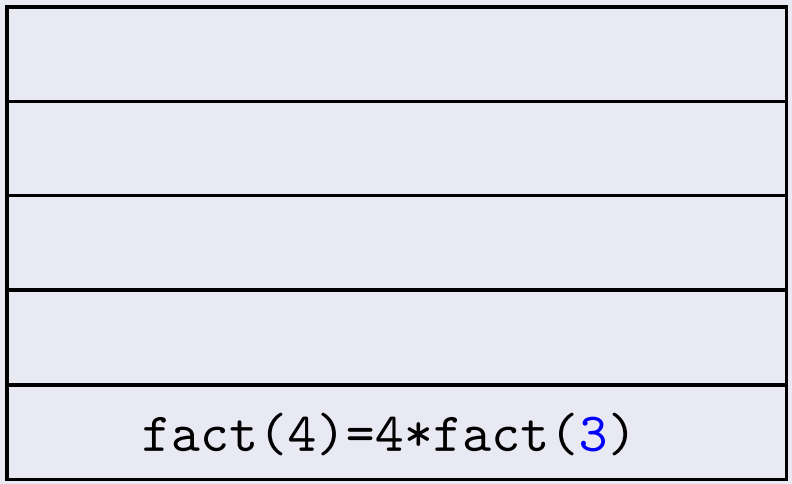
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.

Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :

Remarque

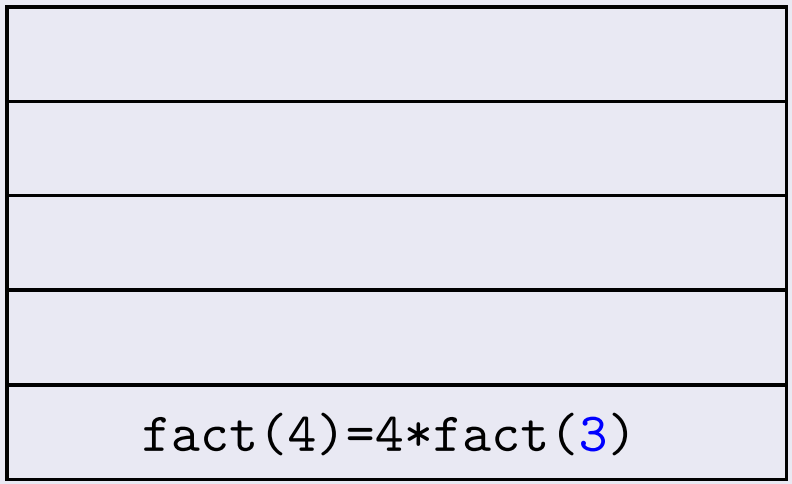
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

Remarque

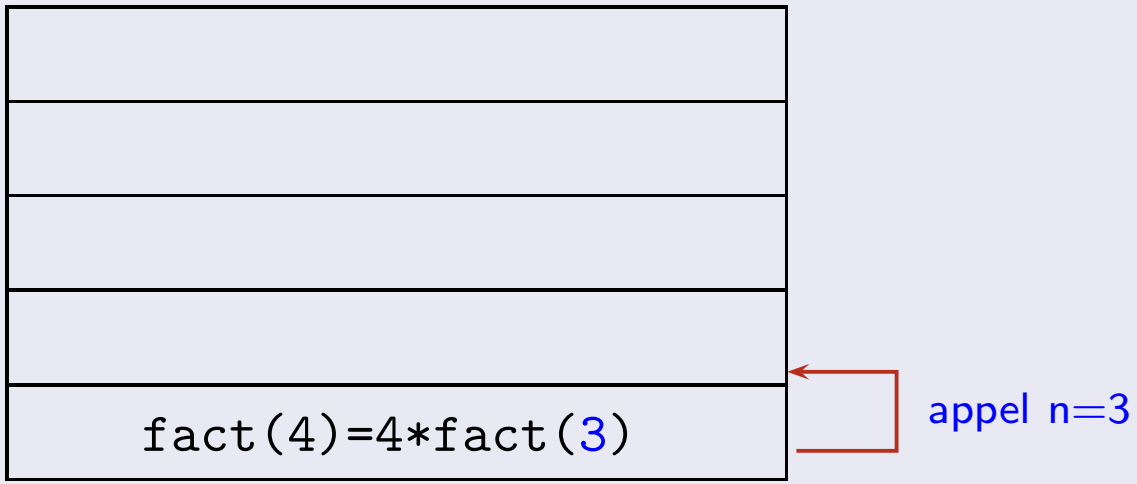
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

Remarque

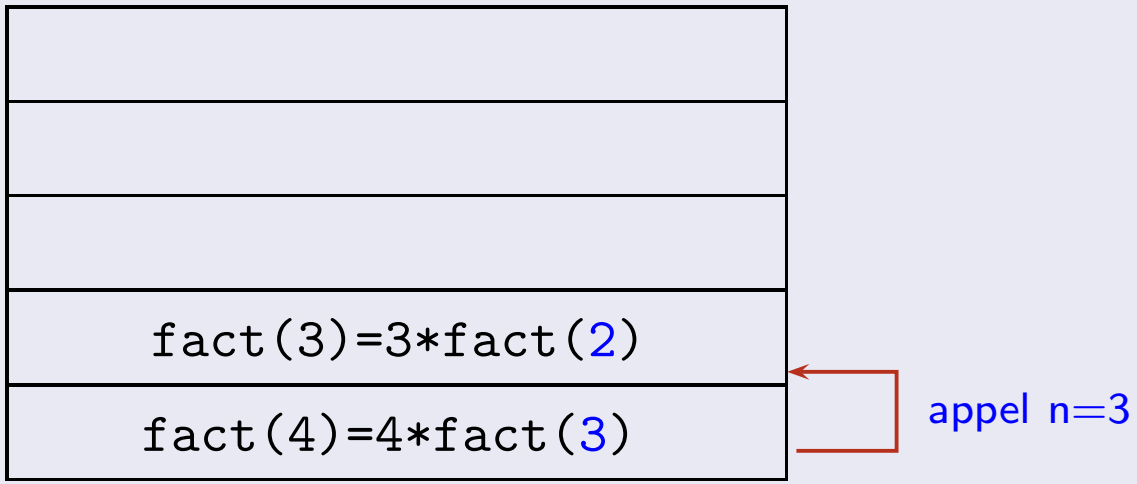
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

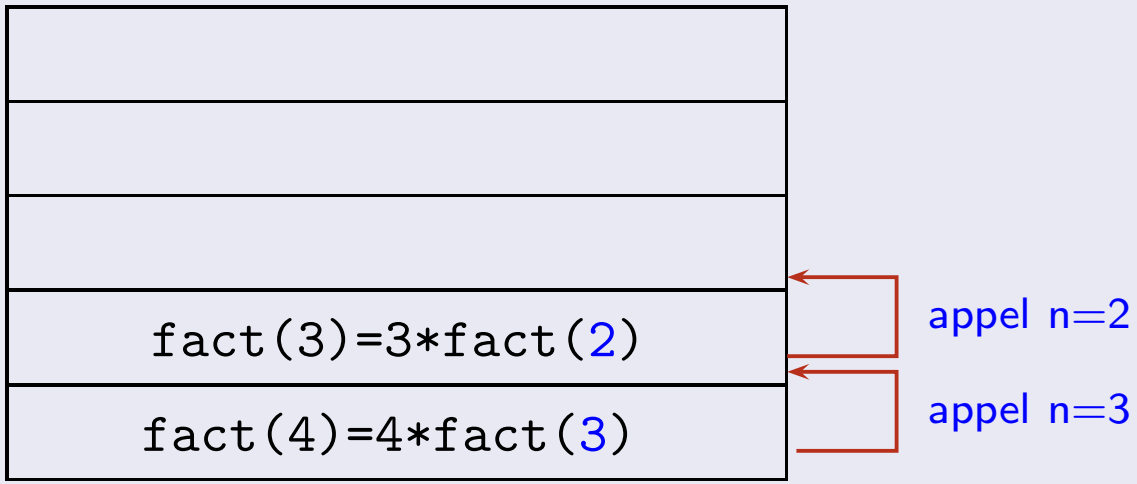
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Remarque

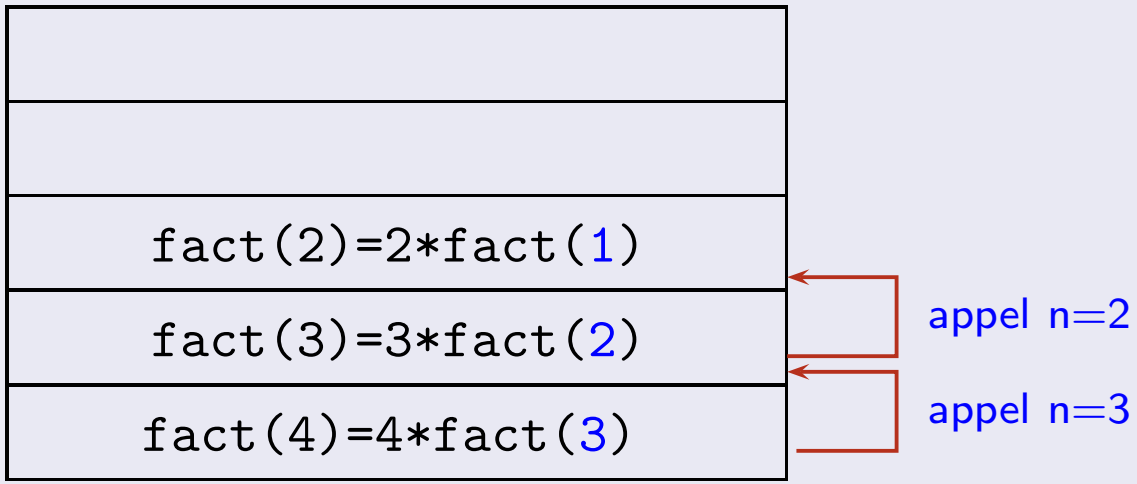
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

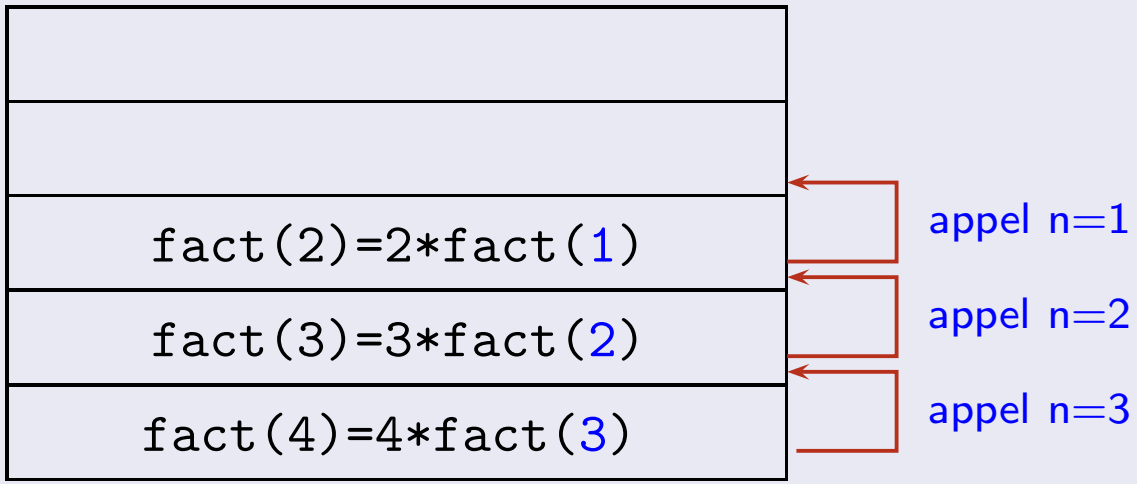
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Remarque

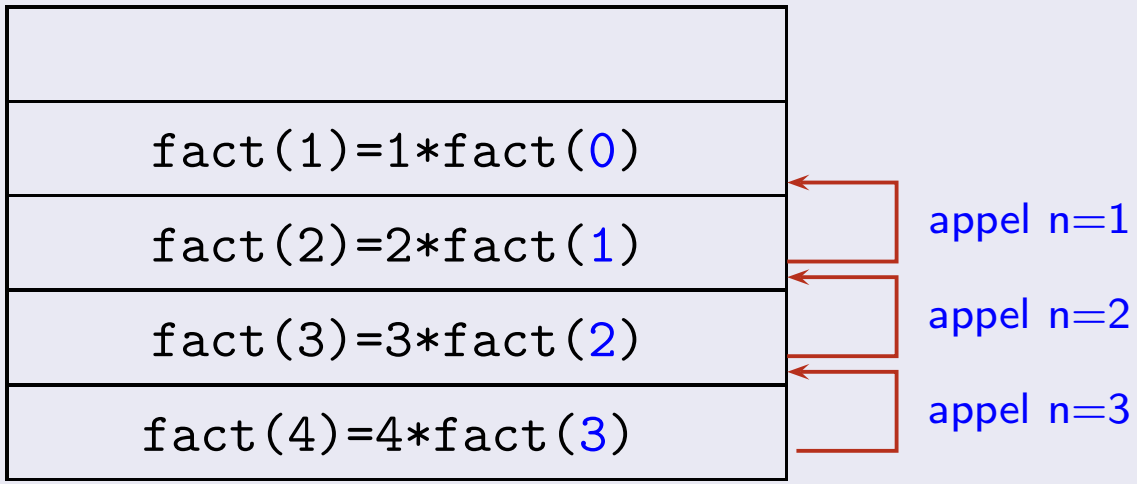
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

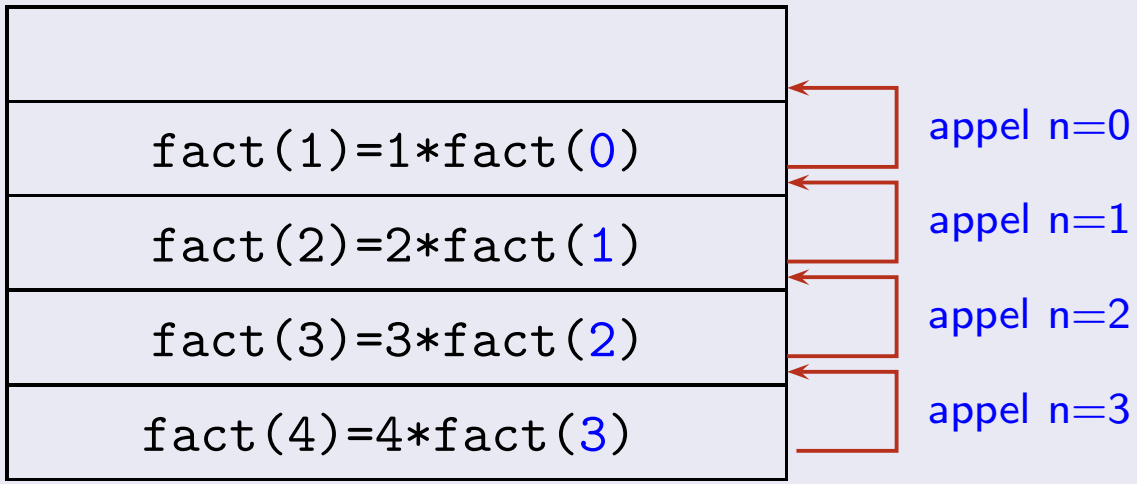
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Remarque

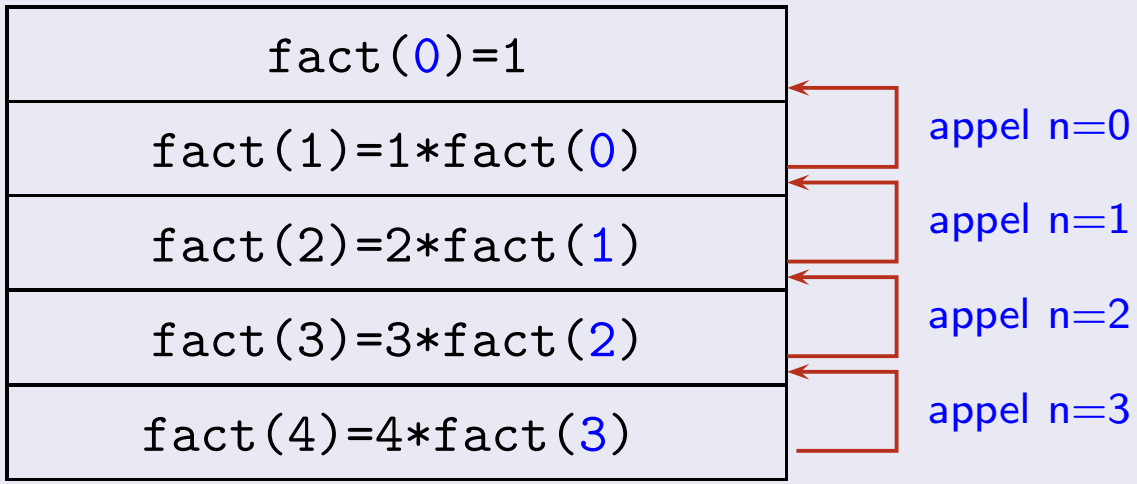
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

Remarque

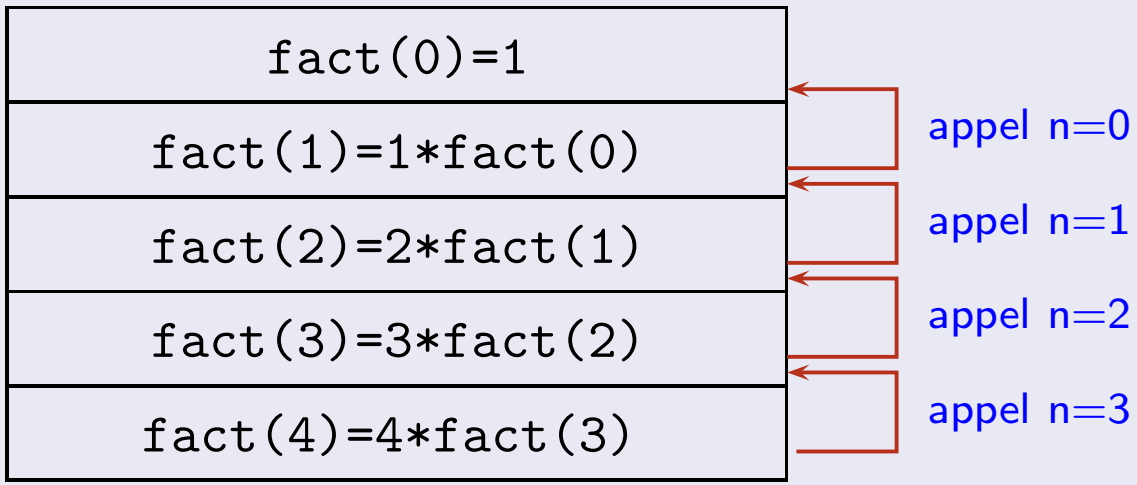
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

Remarque

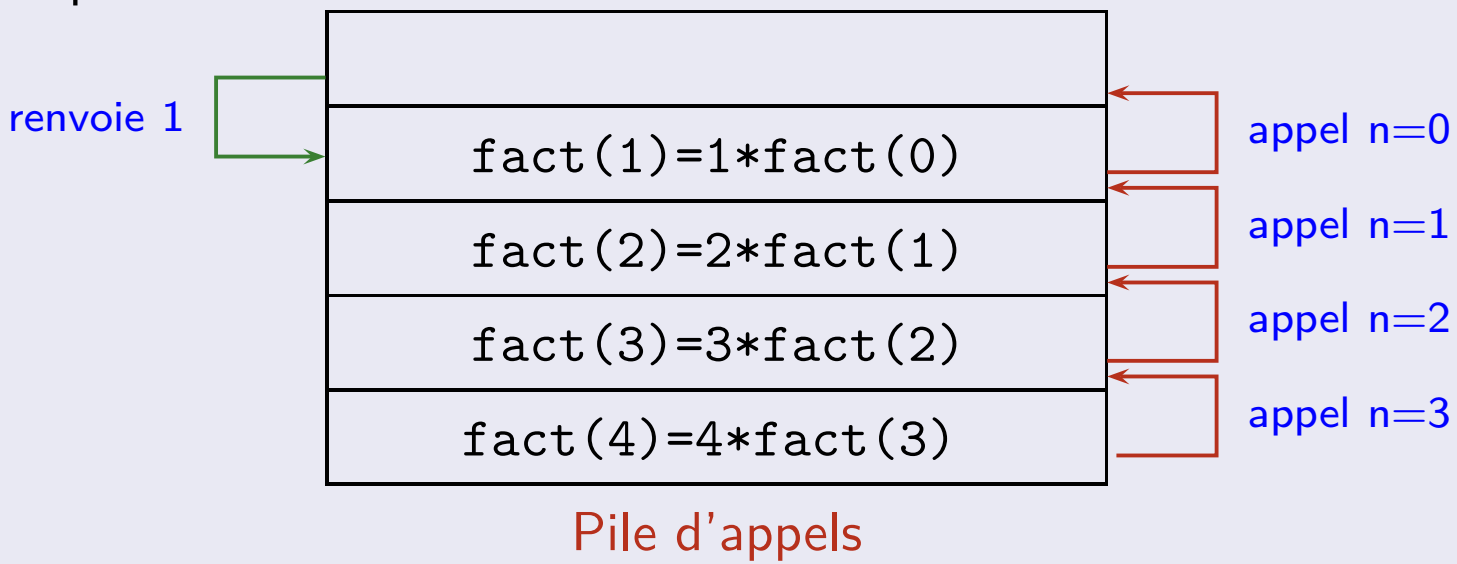
Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

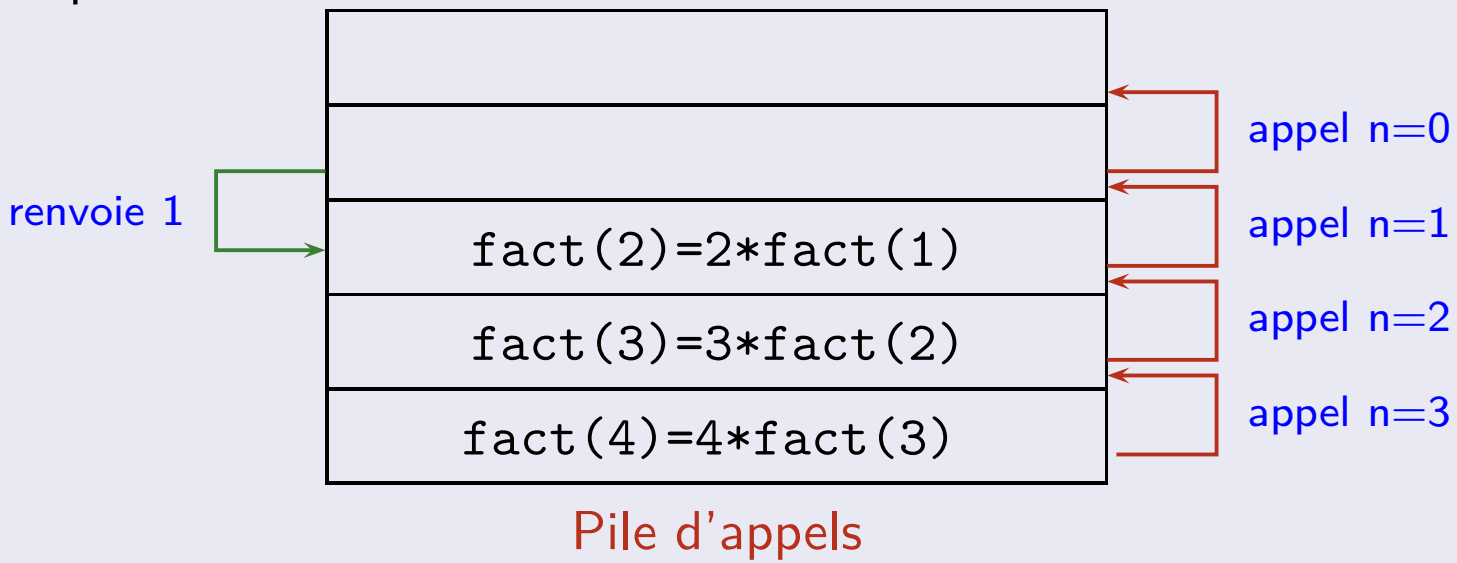
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



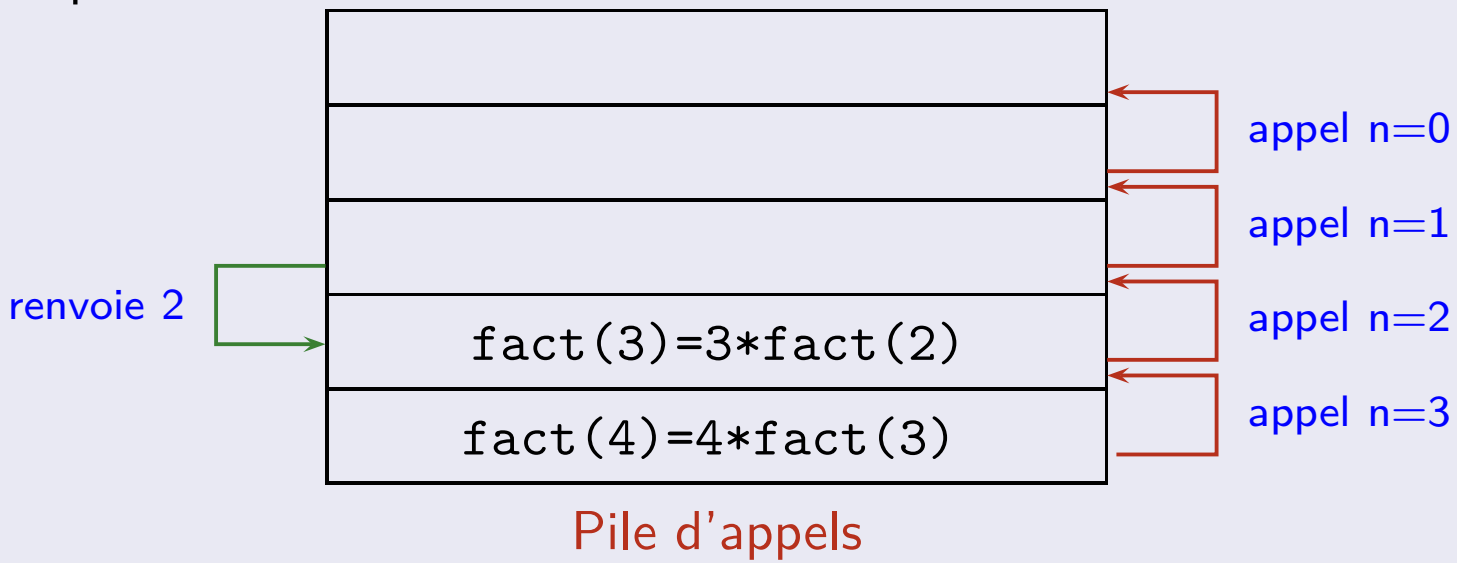
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



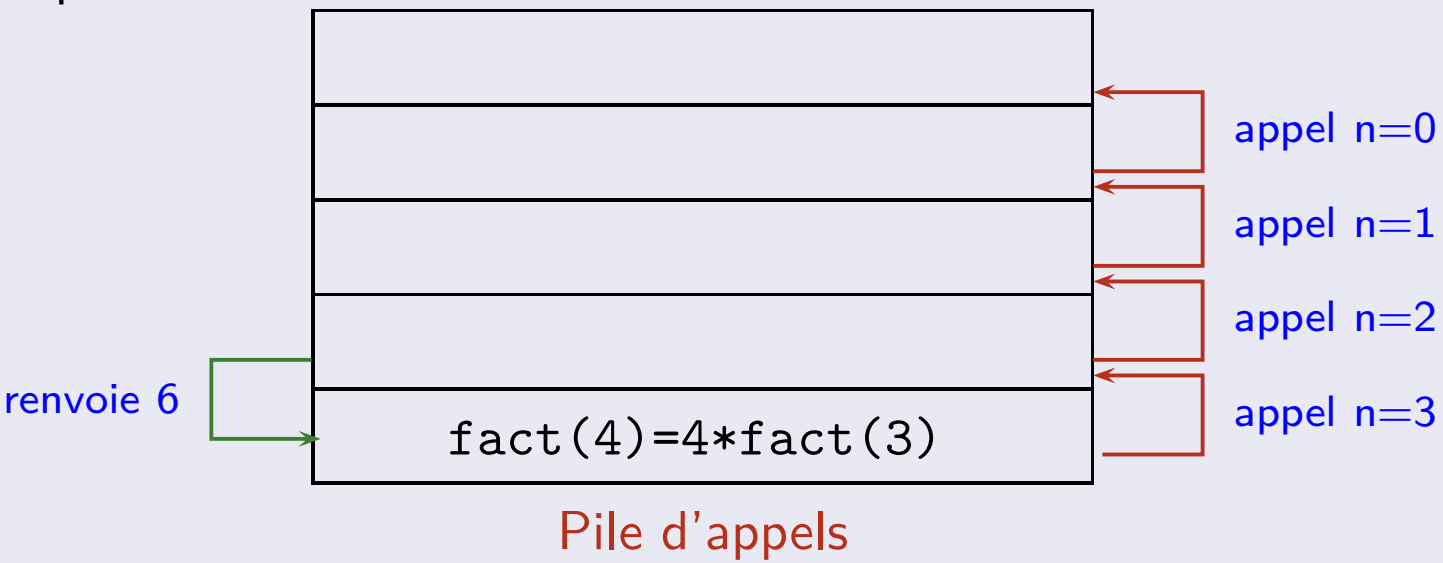
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



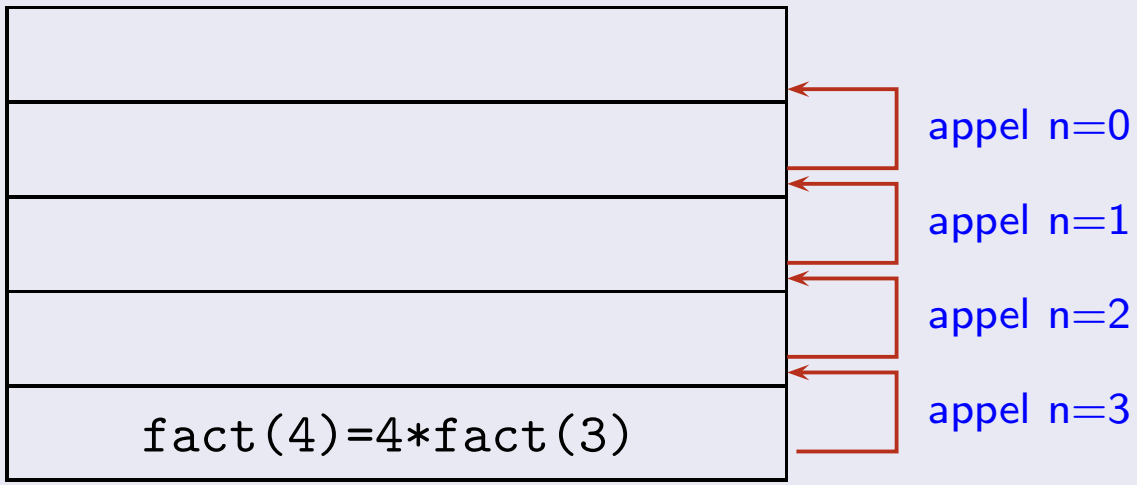
Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :

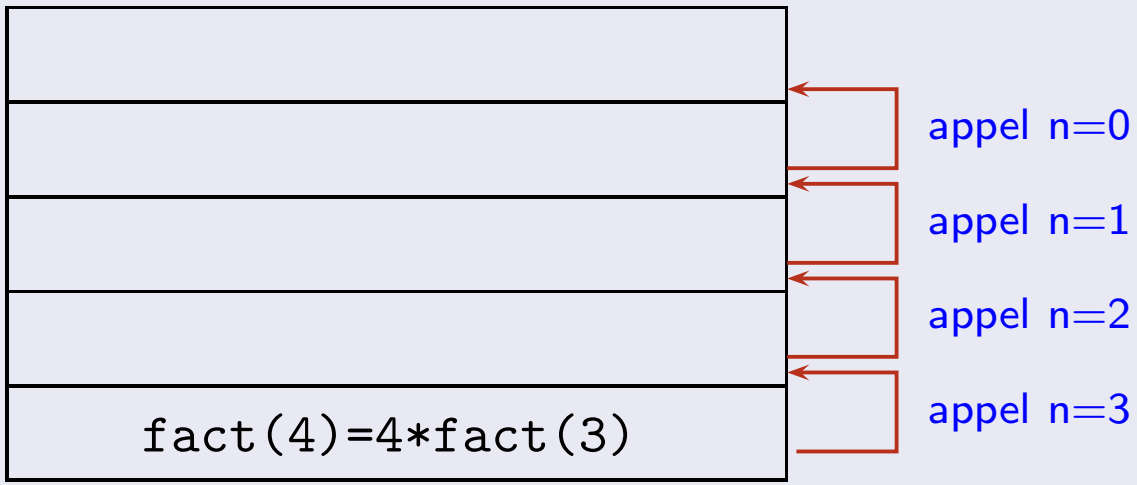


Pile d'appels

Le dépassement de capacité de la pile d'appel est le fameux *stackoverflow* (débordement de pile).

Remarque

Dans le cas d'une récursivité non terminale, les appels successifs sont empilés dans la pile d'exécution, en effet le résultat de chaque appel doit être renvoyé vers l'appel précédent. Puis être dépilés une fois le cas de base atteint.
Par exemple pour la fonction `factorielle` récursive :



Pile d'appels

Le dépassement de capacité de la pile d'appel est le fameux *stackoverflow* (débordement de pile). Pour l'éviter, on peut transformer une fonction récursive non terminale en récursive terminale ce qui évite l'empilement des appels successifs.

Exemple : factorielle récursive terminale

L'idée est d'utiliser une variable auxiliaire (un *accumulateur*) qui est passé en argument à l'appel récursif et dans lequel les calculs sont effectués au fur et à mesure des appels.

Exemple : factorielle récursive terminale

L'idée est d'utiliser une variable auxiliaire (un *accumulateur*) qui est passé en argument à l'appel récursif et dans lequel les calculs sont effectués au fur et à mesure des appels.

- En C :

```c
int fact_acc( int n,  int acc){
   if (n==0)
       {return acc;}
   return fact_acc(n-1,n*acc);}
```

- En OCaml :

```
let rec fact_acc  n acc =
  if n=0 then acc else fact_acc (n-1) (n*acc)
```

Exemple : puissance

Donner une version récursive terminale de la fonction puissance :

Exemple : puissance

Donner une version récursive terminale de la fonction puissance :

- En C

Exemple : puissance

Donner une version récursive terminale de la fonction puissance :

- En C

```c
double puissance_acc(double a, int n, double acc)
{
    if (n == 0)
    {
        return acc;
    }
    else
    {
        return puissance_acc(a, n - 1, acc * a);
    }
}
```

Exemple : puissance

Donner une version récursive terminale de la fonction puissance :

- En C

```c
double puissance_acc(double a, int n, double acc)
{
    if (n == 0)
    {
        return acc;
    }
    else
    {
        return puissance_acc(a, n - 1, acc * a);
    }
}
```

- En OCaml

```ocaml
let rec puissance_acc x n acc =
  if n=0 then acc else puissance_acc x (n-1) (x*acc)
```

Remarque

- La version récursive terminale ne provoquera pas de débordement de pile en OCaml car elle sera automatiquement optimisée par le compilateur.

Remarque

- La version récursive terminale ne provoquera pas de débordement de pile en OCaml car elle sera automatiquement optimisée par le compilateur.
- En C, on utilisera l'option d'optimisation `-O2` pour que cela soit le cas.

Remarque

- La version récursive terminale ne provoquera pas de débordement de pile en OCaml car elle sera automatiquement optimisée par le compilateur.
- En C, on utilisera l'option d'optimisation `-O2` pour que cela soit le cas.
- Le langage Ocaml est plus "adapté" à une programmation fonctionnel (et donc à la récursivité) que le C qui permet la récursivité mais représente avant tout le paradigme impératif.

Définition

Lorsqu'on définit simultanément plusieurs fonctions qui s'appellent mutuellement on parle de récursivité croisée (ou de récursivité mutuelle).

Définition

Lorsqu'on définit simultanément plusieurs fonctions qui s'appellent mutuellement on parle de récursivité croisée (ou de récursivité mutuelle).

Exemple : moyenne arithmético-géométrique

Etant donné $a \in R^+, b \in \mathbb{R}^+$, on définit les suites :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 &= b \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Ecrire deux fonctions mutuellement récursives `un` et `vn` permettant de calculer les termes de ces deux suites.

Définition

Lorsqu'on définit simultanément plusieurs fonctions qui s'appellent mutuellement on parle de récursivité croisée (ou de récursivité mutuelle).

Exemple : moyenne arithmético-géométrique

Etant donné $a \in R^+, b \in \mathbb{R}^+$, on définit les suites :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 & = & b \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Ecrire deux fonctions mutuellement récursives `un` et `vn` permettant de calculer les termes de ces deux suites.

⚠ En C, une fonction doit être définie avant d'y faire appel. On doit donc dans le cas d'une récursivité croisée donner la signature d'une des deux fonctions avant la définition complète de l'autre.

Définition

Lorsqu'on définit simultanément plusieurs fonctions qui s'appellent mutuellement on parle de récursivité croisée (ou de récursivité mutuelle).

Exemple : moyenne arithmético-géométrique

Etant donné $a \in R^+, b \in \mathbb{R}^+$, on définit les suites :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 & = & b \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Ecrire deux fonctions mutuellement récursives `un` et `vn` permettant de calculer les termes de ces deux suites.

⚠ En C, une fonction doit être définie avant d'y faire appel. On doit donc dans le cas d'une récursivité croisée donner la signature d'une des deux fonctions avant la définition complète de l'autre.

En OCaml, on définira les deux fonctions dans le même "`let`" en les séparant par `and`.

Correction : En C

```c
double vn(int n, double a, double b);

double un(int n, double a, double b){
    if (n==0)
    {return a;}
    return sqrt(un(n-1,a,b)*vn(n-1,a,b));}

double vn(int n,double a, double b){
    if (n==0)
    {return b;}
    return (un(n-1,a,b)+vn(n-1,a,b))/2;}
```

Correction : En OCaml

```
1  let rec un n a b=
2   if n=0 then a else sqrt((un (n-1) a b) *. vn (n-1) a b)
3   and
4   vn n a b =
5   if n=0 then b else ((un (n-1) a b) +. (vn (n-1) a b)) /. 2.0
```

Correction : En OCaml

```
1  let rec un n a b=
2   if n=0 then a else sqrt((un (n-1) a b) *. vn (n-1) a b)
3   and
4   vn n a b =
5   if n=0 then b else ((un (n-1) a b) +. (vn (n-1) a b)) /. 2.0
```

On remarquera `+.`, `*.`, et `/.` qui correspondent aux opérations sur les flottants (inférence de type)

Exemple introductif

1. Ecrire une fonction récursive qui prend en argument un entier n et renvoie le $n$ième terme de la suite de Fibonacci défini par :

$$\begin{cases} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Exemple introductif

1. Ecrire une fonction récursive qui prend en argument un entier n et renvoie le $n$ième terme de la suite de Fibonacci défini par :
$$\begin{cases} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 2. \end{cases}$$
2. Tracer le graphe des appels récursifs de cette fonction pour $n = 5$

Exemple introductif

1. Ecrire une fonction récursive qui prend en argument un entier n et renvoie le $n$ième terme de la suite de Fibonacci défini par :
$$\begin{cases} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 2. \end{cases}$$
2. Tracer le graphe des appels récursifs de cette fonction pour $n = 5$
3. Commenter

Correction question 1

- En C

```c
int fibo_rec(int n){
    if (n<2)
    {return 1;}
    return fibo_rec(n-1) + fibo_rec(n-2);}
```

Correction question 1

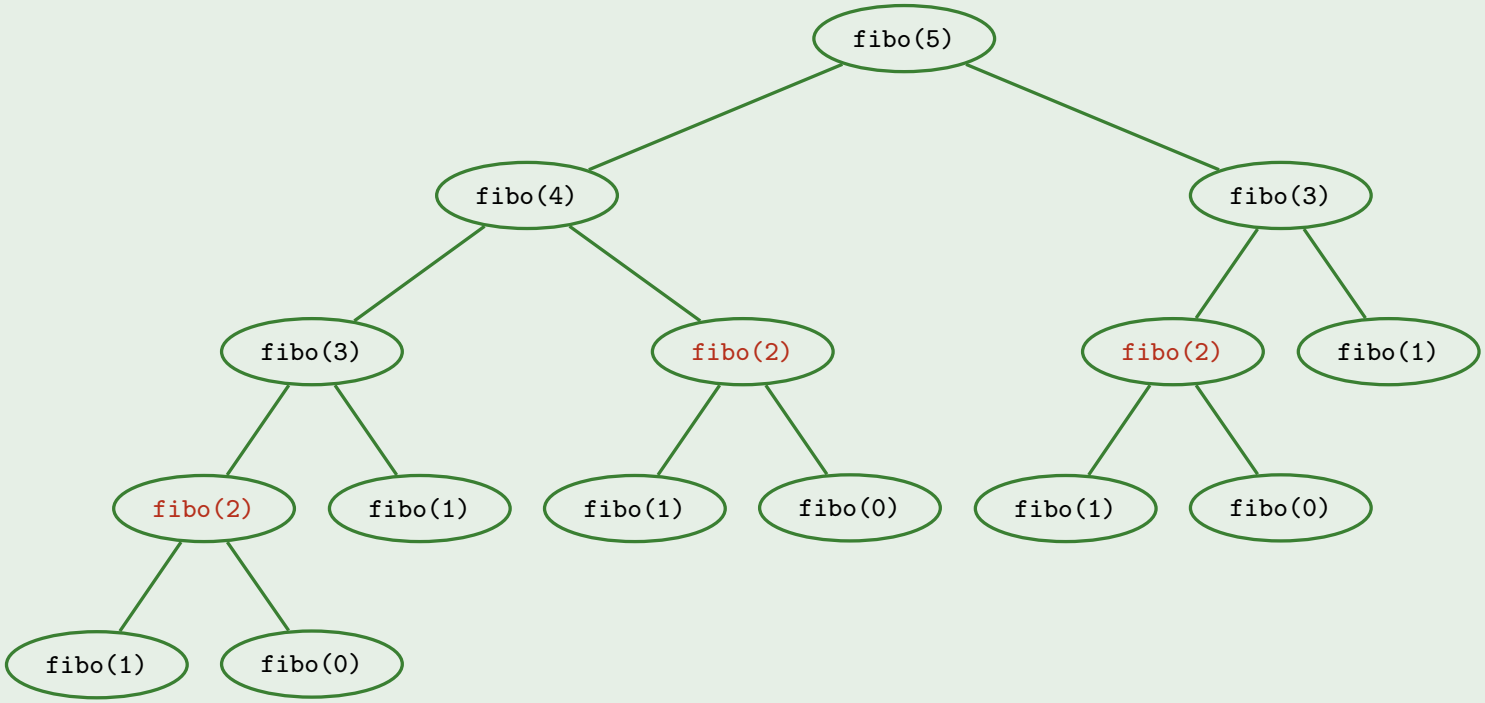
- En C

```c
int fibo_rec(int n){
    if (n<2)
    {return 1;}
    return fibo_rec(n-1) + fibo_rec(n-2);}
```

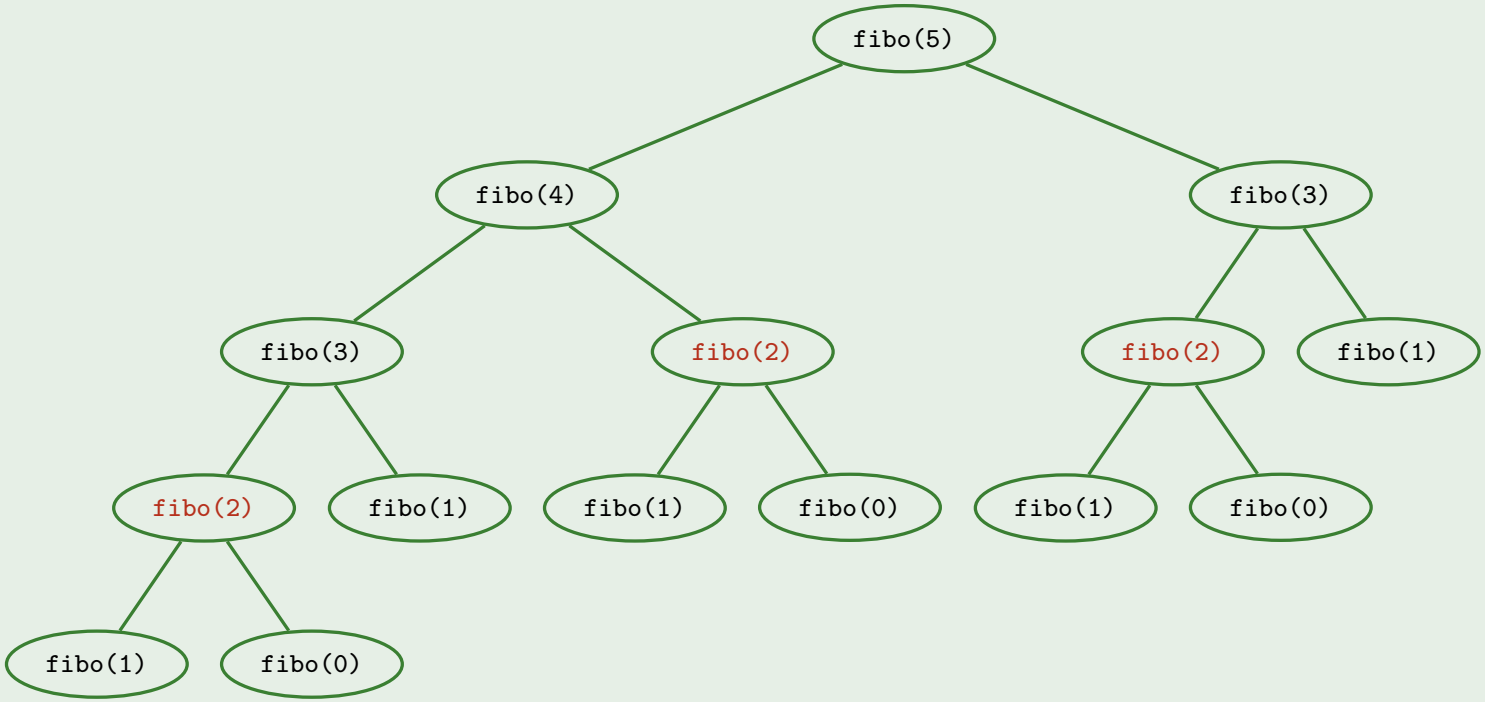
- En OCaml

```
let rec fibo n =
  if n<2 then 1 else fibo (n-1) + fibo (n-2)
```

Correction questions 2



Correction questions 3



On calcule à plusieurs reprises les *mêmes valeurs*, ici par exemple `fibo(2)` est calculé à trois reprises.

Remarque

- La solution récursive est ici simple à mettre en oeuvre (on traduit directement la définition mathématique de la suite)

Remarque

- La solution récursive est ici simple à mettre en oeuvre (on traduit directement la définition mathématique de la suite)
- L'exécution est problématique car on effectue plusieurs fois les mêmes appels récursifs.

Remarque

- La solution récursive est ici simple à mettre en oeuvre (on traduit directement la définition mathématique de la suite)
- L'exécution est problématique car on effectue plusieurs fois les mêmes appels récursifs.
- Pour pallier ce problème :

Remarque

- La solution récursive est ici simple à mettre en oeuvre (on traduit directement la définition mathématique de la suite)
- L'exécution est problématique car on effectue plusieurs fois les mêmes appels récursifs.
- Pour pallier ce problème :
  - On peut stocker les résultats des appels antérieurs dans une structure de données adaptées (c'est le principe de mémoïsation)

Remarque

- La solution récursive est ici simple à mettre en oeuvre (on traduit directement la définition mathématique de la suite)
- L'exécution est problématique car on effectue plusieurs fois les mêmes appels récursifs.
- Pour pallier ce problème :
  - On peut stocker les résultats des appels antérieurs dans une structure de données adaptées (c'est le principe de mémoïsation)
  - On peut utiliser une formulation itérative.

Remarques

- Bien que la programmation récursive soit parfois gourmande en ressource (débordement de pile, chevauchement d'appels récursifs). Certains problèmes ont une solution récursive très lisible et rapide à programmer.

Remarques

- Bien que la programmation récursive soit parfois gourmande en ressource (débordement de pile, chevauchement d'appels récursifs). Certains problèmes ont une solution récursive très lisible et rapide à programmer.
- La formulation récursive est donc parfois « plus adaptée » à un problème et constitue une façon « élégante » et concise de programmer une résolution.

Remarques

- Bien que la programmation récursive soit parfois gourmande en ressource (débordement de pile, chevauchement d'appels récursifs). Certains problèmes ont une solution récursive très lisible et rapide à programmer.
- La formulation récursive est donc parfois « plus adaptée » à un problème et constitue une façon « élégante » et concise de programmer une résolution.
- On présente ici un exemple simple mais d'autres seront vus en TP (tours de Hanoï, dessins récursifs)

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :
   - Calculer a^6, l'élever au carré et le multiplier par a.

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :
   - Calculer a^6, l'élever au carré et le multiplier par a.
   - Pour calculer a^6,calculer a^3 et l'élever au carré.

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :
   - Calculer a^6, l'élever au carré et le multiplier par a.
   - Pour calculer a^6,calculer a^3 et l'élever au carré.
   - Pour calculer a^3, élever a au carré et multiplier par a.

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :
   - Calculer a^6, l'élever au carré et le multiplier par a.
   - Pour calculer a^6,calculer a^3 et l'élever au carré.
   - Pour calculer a^3, élever a au carré et multiplier par a.
3. Généraliser la méthode précédente au cas d'un exposant quelconque et en déduire une relation de récurrence entre a^n et $a^{\frac{n}{2}}$ si n et pair et $a^{\frac{n-1}{2}}$ sinon.

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :
   - Calculer a^6, l'élever au carré et le multiplier par a.
   - Pour calculer a^6,calculer a^3 et l'élever au carré.
   - Pour calculer a^3, élever a au carré et multiplier par a.
3. Généraliser la méthode précédente au cas d'un exposant quelconque et en déduire une relation de récurrence entre a^n et $a^{\frac{n}{2}}$ si n et pair et $a^{\frac{n-1}{2}}$ sinon.
4. Proposer une implémentation récursive en C.
5. Même question en Ocaml.

Exemple : exponentiation rapide

1. Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{13} avec la fonction

```
1  double puissance_iteratif(double a, int n)
2  {
3      double p = 1.0;
4      for (int k = 1; k <= n; k = k + 1)
5      {
```

2. Combien en faut-il si on procède de la façon suivante :
   - Calculer a^6, l'élever au carré et le multiplier par a.
   - Pour calculer a^6,calculer a^3 et l'élever au carré.
   - Pour calculer a^3, élever a au carré et multiplier par a.
3. Généraliser la méthode précédente au cas d'un exposant quelconque et en déduire une relation de récurrence entre a^n et $a^{\frac{n}{2}}$ si n et pair et $a^{\frac{n-1}{2}}$ sinon.
4. Proposer une implémentation récursive en C.
5. Même question en Ocaml.
6. Donner une version itérative de cet algorithme.

Exemple : exponentiation rapide

1. Il faut faire 13 multiplications, puisque a^{13} est calculé avec :
   $a^{13} = 1 \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$

Exemple : exponentiation rapide

1. Il faut faire 13 multiplications, puisque a^{13} est calculé avec :
   $a^{13} = 1 \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$
2. Dans ce cas, il ne faut que 5 multiplications en effet, on calcul a^{13} avec :
   $a^{13} = \left(\left(a^2 \times a \right)^2 \right)^2 \times a$

Exemple : exponentiation rapide

1. Il faut faire 13 multiplications, puisque a^{13} est calculé avec :
   $a^{13} = 1 \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$
2. Dans ce cas, il ne faut que 5 multiplications en effet, on calcul a^{13} avec :
   $a^{13} = \left(\left(a^2 \times a\right)^2\right)^2 \times a$
3. $$\begin{cases} a^n & = & \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2, \text{ si } n \text{ est paire} \\ a^n & = & \left(a^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 \times a, \text{ sinon} \end{cases}$$

Exponentiation rapide

4 Implémentation en C :

```c
double puissance_rapide(double a, int n)
{
    if (n == 0)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
        double pr = puissance_rapide(a, n / 2);
        if (n % 2 == 0)
        {
            return pr * pr;
        }
        else
        {
            return pr * pr * a;
        }
    }
}
```

Exponentiation rapide

5. Implémentation en OCaml :

```
let rec puissance_rapide x n =
  if n=0 then 1 else
    if n mod 2 = 0 then
      (puissance_rapide x (n/2) * puissance_rapide x (n/2))
else x * (puissance_rapide x (n/2) * puissance_rapide x (n/2))
```

Exponentiation rapide

6 Version itérative

Algorithme : Version itérative de l'exponentiation rapide

Entrées : $a \in \mathbb{R}^{*+}, n \in \mathbb{N}$
Sorties : a^n

```
1 p ← 1
2 tant que n ≠ 0 faire
3 |   si n est impair alors
4 |   |   p ← p × a
5 |   fin
6 |   a ← a ∗ a
7 |   n ← ⌊n/2⌋
8 fin
9 return p
```

Moins « naturel » que sa version itérative, cet algorithme sera prouvé totalement correct en TD.

Principe

Pour prouver la terminaison d'une fonction récursive, on montre qu'une quantité qui dépend des paramètres d'appels de la fonction :

Principe

Pour prouver la terminaison d'une fonction récursive, on montre qu'une quantité qui dépend des paramètres d'appels de la fonction :

- est entière,

Principe

Pour prouver la terminaison d'une fonction récursive, on montre qu'une quantité qui dépend des paramètres d'appels de la fonction :

- est entière,
- positive,

Principe

Pour prouver la terminaison d'une fonction récursive, on montre qu'une quantité qui dépend des paramètres d'appels de la fonction :

- est entière,
- positive,
- strictement décroissante.

Principe

Pour prouver la terminaison d'une fonction récursive, on montre qu'une quantité qui dépend des paramètres d'appels de la fonction :

- est entière,
- positive,
- strictement décroissante.

La méthode est donc similaire à celle utilisée pour prouver la terminaison des boucles.

Principe

Pour prouver la terminaison d'une fonction récursive, on montre qu'une quantité qui dépend des paramètres d'appels de la fonction :

- est entière,
- positive,
- strictement décroissante.

La méthode est donc similaire à celle utilisée pour prouver la terminaison des boucles.

Exemple

La fonction factorielle récursive en OCaml rappelée ci-dessous :

```
1  let rec fact n =
2    if n=0 then 1 else n*fact (n-1)
```

Termine car le paramètre d'appel n est positif, décroît strictement et reste positif (par condition d'appel récursif).

Principe

Pour prouver la correction d'une fonction récursive, on peut utiliser une preuve par récurrence :

Principe

Pour prouver la correction d'une fonction récursive, on peut utiliser une preuve par récurrence :

- on vérifie que la fonction est correcte pour le cas de base (initialisation)

Principe

Pour prouver la correction d'une fonction récursive, on peut utiliser une preuve par récurrence :

- on vérifie que la fonction est correcte pour le cas de base (initialisation)
- puis, on prouve que si la fonction est correcte à un range $n \in \mathbb{N}$ alors elle l'est aussi au range $n+1$.

Principe

Pour prouver la correction d'une fonction récursive, on peut utiliser une preuve par récurrence :

- on vérifie que la fonction est correcte pour le cas de base (initialisation)
- puis, on prouve que si la fonction est correcte à un range $n \in \mathbb{N}$ alors elle l'est aussi au range $n+1$.

Exemple

La fonction factorielle récursive en OCaml rappelée ci-dessous :

```
1  let rec fact n =
2    if n=0 then 1 else n*fact (n-1)
```

est correcte car :

Principe

Pour prouver la correction d'une fonction récursive, on peut utiliser une preuve par récurrence :

- on vérifie que la fonction est correcte pour le cas de base (initialisation)
- puis, on prouve que si la fonction est correcte à un range $n \in \mathbb{N}$ alors elle l'est aussi au range $n+1$.

Exemple

La fonction factorielle récursive en OCaml rappelée ci-dessous :

```
1  let rec fact n =
2    if n=0 then 1 else n*fact (n-1)
```

est correcte car :

- elle est correcte pour $n = 0$ puisqu'elle renvoie 1 et que $0! = 1$.

Principe

Pour prouver la correction d'une fonction récursive, on peut utiliser une preuve par récurrence :

- on vérifie que la fonction est correcte pour le cas de base (initialisation)
- puis, on prouve que si la fonction est correcte à un range $n \in \mathbb{N}$ alors elle l'est aussi au range $n+1$.

Exemple

La fonction factorielle récursive en OCaml rappelée ci-dessous :

```
1  let rec fact n =
2    if n=0 then 1 else n*fact (n-1)
```

est correcte car :

- elle est correcte pour $n = 0$ puisqu'elle renvoie 1 et que $0! = 1$.
- si elle est correcte au rang `n`, alors `fact(n)`$=n!$. Et comme, `fact(n+1) = (n+1) * fact(n)`, on en déduit `fact(n)` $=(n+1)!$.