

C15 Décomposition en sous problèmes

1. Introduction

Principe général

Pour résoudre un problème donné, une stratégie peut-être de se ramener à un ou plusieurs sous problèmes de *même type* mais *plus petit*. En notant $P(n)$, un problème de taille n , la résolution de P_n conduit à la résolution de k problèmes de tailles $P(\frac{n}{p})$. Un fois ces problèmes résolus, leurs solutions sont combinées afin de former celle du problème initial.

C15 Décomposition en sous problèmes

1. Introduction

Principe général

Pour résoudre un problème donné, une stratégie peut-être de se ramener à un ou plusieurs sous problèmes de *même type* mais *plus petit*. En notant $P(n)$, un problème de taille n , la résolution de P_n conduit à la résolution de k problèmes de tailles $P(\frac{n}{p})$. Un fois ces problèmes résolus, leurs solutions sont combinées afin de former celle du problème initial.

On distingue :

C15 Décomposition en sous problèmes

1. Introduction

Principe général

Pour résoudre un problème donné, une stratégie peut-être de se ramener à un ou plusieurs sous problèmes de *même type* mais *plus petit*. En notant $P(n)$, un problème de taille n , la résolution de P_n conduit à la résolution de k problèmes de tailles $P(\frac{n}{p})$. Un fois ces problèmes résolus, leurs solutions sont combinées afin de former celle du problème initial.

On distingue :

- la méthode **diviser pour régner**, dans laquelle les sous-problèmes sont indépendants

C15 Décomposition en sous problèmes

1. Introduction

Principe général

Pour résoudre un problème donné, une stratégie peut-être de se ramener à un ou plusieurs sous problèmes de *même type* mais *plus petit*. En notant $P(n)$, un problème de taille n , la résolution de P_n conduit à la résolution de k problèmes de tailles $P(\frac{n}{p})$. Un fois ces problèmes résolus, leurs solutions sont combinées afin de former celle du problème initial.

On distingue :

- la méthode **diviser pour régner**, dans laquelle les sous-problèmes sont indépendants
- la méthode de **programmation dynamique** dans laquelle, certains sous problèmes se chevauchent.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Exemple introductif

Le tri fusion est l'exemple typique d'une résolution par la méthode diviser pour régner. En effet, pour trier une liste l de taille n ,

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Exemple introductif

Le tri fusion est l'exemple typique d'une résolution par la méthode diviser pour régner. En effet, pour trier une liste l de taille n ,

- **Diviser** : on sépare l en deux moitiés (à une unité près) l_1 et l_2 . Dans cet exemple $P(n)$ se ramène à la résolution de 2 instances de résolution de $P(n/2)$.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Exemple introductif

Le tri fusion est l'exemple typique d'une résolution par la méthode diviser pour régner. En effet, pour trier une liste l de taille n ,

- **Diviser** : on sépare l en deux moitiés (à une unité près) l_1 et l_2 . Dans cet exemple $P(n)$ se ramène à la résolution de 2 instances de résolution de $P(n/2)$.
- **Régner** : on trie l_1 et l_2

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Exemple introductif

Le tri fusion est l'exemple typique d'une résolution par la méthode diviser pour régner. En effet, pour trier une liste l de taille n ,

- **Diviser** : on sépare l en deux moitiés (à une unité près) l_1 et l_2 . Dans cet exemple $P(n)$ se ramène à la résolution de 2 instances de résolution de $P(n/2)$.
- **Régner** : on trie l_1 et l_2
- **Combiner** : on fusionne les listes triées afin de construire la solution au problème initial

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Tri fusion en OCaml

- 1 Ecrire une fonction `separe int list -> int list * int list` qui prend en argument une liste d'entiers et renvoie les deux moitiés de cette liste.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Tri fusion en OCaml

- 1 Ecrire une fonction `separe int list -> int list * int list` qui prend en argument une liste d'entiers et renvoie les deux moitiés de cette liste.
- 2 Ecrire une fonction `fusion int list -> int list -> int list` qui fusionne les deux listes données en arguments.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Tri fusion en OCaml

- 1 Ecrire une fonction `separe int list -> int list * int list` qui prend en argument une liste d'entiers et renvoie les deux moitiés de cette liste.
- 2 Ecrire une fonction `fusion int list -> int list -> int list` qui fusionne les deux listes données en arguments.

Tri fusion en OCaml

- ① Ecrire une fonction `separe int list -> int list * int list` qui prend en argument une liste d'entiers et renvoie les deux moitiés de cette liste.

```
1  let rec separe l =  
2      match l with  
3      | [] -> [], []  
4      | [x] -> [x], []  
5      | h1::h2::t -> let ft1,ft2 = (separe t) in h1::ft1, h2::ft2;;
```

- ② Ecrire une fonction `fusion int list -> int list -> int list` qui fusionne les deux listes données en arguments.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Tri fusion en OCaml

- ① Ecrire une fonction `separe int list -> int list * int list` qui prend en argument une liste d'entiers et renvoie les deux moitiés de cette liste.

```
1  let rec separe l =  
2    match l with  
3    | [] -> [], []  
4    | [x] -> [x], []  
5    | h1::h2::t -> let ft1,ft2 = (separe t) in h1::ft1, h2::ft2;;
```

- ② Ecrire une fonction `fusion int list -> int list -> int list` qui fusionne les deux listes données en arguments.

```
1  let rec fusion l1 l2 =  
2    match l1,l2 with  
3    | [], x -> x  
4    | x, [] -> x  
5    | h1::t1, h2::t2 -> if h1<h2 then h1::(fusion t1 l2) else  
    ↪ h2::(fusion l1 t2);;
```

Tri fusion en OCaml

- ③ Ecrire une fonction `tri_fusion int list -> int list` qui renvoie la liste donnée en argument triée.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Tri fusion en OCaml

- ⑧ Ecrire une fonction `tri_fusion int list -> int list` qui renvoie la liste donnée en argument triée.

```
1  let rec tri_fusion l =  
2    match l with  
3    | [] -> []  
4    | [x] -> [x]  
5    | _ -> let l1,l2 = separe l in  
6            let t11 = tri_fusion l1 and t12 = tri_fusion l2 in  
7            (fusion t11 t12);;
```

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

On en déduit l' équation de complexité :

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

On en déduit l' équation de complexité :

$$C(n) = k C\left(\frac{n}{p}\right) + T(n)$$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

On en déduit l' équation de complexité :

$$C(n) = k C\left(\frac{n}{p}\right) + T(n)$$

On suppose de plus que la résolution d'un problème de taille inférieure à un entier m donnée s'effectue en temps constant

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

On en déduit l' équation de complexité :

$$C(n) = k C\left(\frac{n}{p}\right) + T(n)$$

On suppose de plus que la résolution d'un problème de taille inférieure à un entier m donnée s'effectue en temps constant

Exemple

Dans le cas du tri fusion,

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

On en déduit l' équation de complexité :

$$C(n) = k C\left(\frac{n}{p}\right) + T(n)$$

On suppose de plus que la résolution d'un problème de taille inférieure à un entier m donnée s'effectue en temps constant

Exemple

Dans le cas du tri fusion,

- Donner les valeurs de k , p , m et écrire les équations de complexité.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Equation de complexité

On note :

- $C(n)$ la complexité de la résolution d'un problème de taille n .
- k le nombre de sous problèmes à résoudre et $\frac{n}{p}$ leur taille.
- $T(n)$ le coût de construction de la solution de taille n .

On en déduit l' équation de complexité :

$$C(n) = k C\left(\frac{n}{p}\right) + T(n)$$

On suppose de plus que la résolution d'un problème de taille inférieure à un entier m donnée s'effectue en temps constant

Exemple

Dans le cas du tri fusion,

- Donner les valeurs de k , p m et écrire les équations de complexité.
- Donner un O de $T(n)$.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Résolution

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Résolution

Si la complexité d'un problème est définie par une équation de la forme :
 $C(n) = kC(\frac{n}{p}) + f(n)$, où f est un polynôme de degré d , alors

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Résolution

Si la complexité d'un problème est définie par une équation de la forme :
 $C(n) = kC(\frac{n}{p}) + f(n)$, où f est un polynôme de degré d , alors

- Si $d < \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^{\frac{\log(k)}{\log(p)}})$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Résolution

Si la complexité d'un problème est définie par une équation de la forme :
 $C(n) = kC(\frac{n}{p}) + f(n)$, où f est un polynôme de degré d , alors

- Si $d < \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^{\frac{\log(k)}{\log(p)}})$
- Si $d = \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d \log(n))$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Résolution

Si la complexité d'un problème est définie par une équation de la forme : $C(n) = kC(\frac{n}{p}) + f(n)$, où f est un polynôme de degré d , alors

- Si $d < \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^{\frac{\log(k)}{\log(p)}})$
- Si $d = \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d \log(n))$
- Si $d > \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d)$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour regner

Résolution

Si la complexité d'un problème est définie par une équation de la forme : $C(n) = kC(\frac{n}{p}) + f(n)$, où f est un polynôme de degré d , alors

- Si $d < \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^{\frac{\log(k)}{\log(p)}})$
- Si $d = \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d \log(n))$
- Si $d > \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d)$

⚠ Ce théorème appelé (*master theorem*) est hors-programme.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Résolution

Si la complexité d'un problème est définie par une équation de la forme :
 $C(n) = kC(\frac{n}{p}) + f(n)$, où f est un polynôme de degré d , alors

- Si $d < \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^{\frac{\log(k)}{\log(p)}})$
- Si $d = \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d \log(n))$
- Si $d > \frac{\log(k)}{\log(p)}$, alors $C \in O(n^d)$

⚠ Ce théorème appelé (*master theorem*) est hors-programme.

Mais il permet de résoudre instantanément les équations de complexité de la méthode diviser pour régner !

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

Par exemple, dans le cas du tri fusion, les équations sont :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

Par exemple, dans le cas du tri fusion, les équations sont :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

Pour simplifier on suppose que n est une puissance exacte de 2 et on obtient :

$C(2^{k+1}) \leq 2C(2^k) + M2^k$ et en divisant par 2^{k+1} , on obtient

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

Par exemple, dans le cas du tri fusion, les équations sont :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

Pour simplifier on suppose que n est une puissance exacte de 2 et on obtient :

$C(2^{k+1}) \leq 2C(2^k) + M2^k$ et en divisant par 2^{k+1} , on obtient

$$u_{k+1} \leq u_k + M \text{ où } u_k = \frac{C(2^k)}{2^k}.$$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

Par exemple, dans le cas du tri fusion, les équations sont :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

Pour simplifier on suppose que n est une puissance exacte de 2 et on obtient :

$C(2^{k+1}) \leq 2C(2^k) + M2^k$ et en divisant par 2^{k+1} , on obtient

$$u_{k+1} \leq u_k + M \text{ où } u_k = \frac{C(2^k)}{2^k}.$$

par récurrence immédiate, $u_k \leq u_0 + kM$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

Par exemple, dans le cas du tri fusion, les équations sont :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

Pour simplifier on suppose que n est une puissance exacte de 2 et on obtient :

$C(2^{k+1}) \leq 2C(2^k) + M2^k$ et en divisant par 2^{k+1} , on obtient

$$u_{k+1} \leq u_k + M \text{ où } u_k = \frac{C(2^k)}{2^k}.$$

par récurrence immédiate, $u_k \leq u_0 + kM$ et donc $C(n) \leq nu_0 + M n \log_2(n)$

C15 Décomposition en sous problèmes

2. Diviser pour régner

Complexité d'une méthode diviser pour régner

- Dans la plupart des cas, on peut résoudre l'équation de complexité **sans** le *master theorem*.

Par exemple, dans le cas du tri fusion, les équations sont :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

Pour simplifier on suppose que n est une puissance exacte de 2 et on obtient :

$C(2^{k+1}) \leq 2C(2^k) + M2^k$ et en divisant par 2^{k+1} , on obtient

$$u_{k+1} \leq u_k + M \text{ où } u_k = \frac{C(2^k)}{2^k}.$$

par récurrence immédiate, $u_k \leq u_0 + kM$ et donc $C(n) \leq nu_0 + M n \log_2(n)$

c'est à dire $C(n) \in O(n \log n)$.

- Sinon, on peut utiliser le *master theorem* afin d'obtenir la complexité, puis la prouver par récurrence.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est :

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

- 1 Proposer un algorithme de complexité quadratique permettant de résoudre ce problème.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

- 1 Proposer un algorithme de complexité quadratique permettant de résoudre ce problème.
- 2 En donner une implémentation en langage C

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

- ❶ Proposer un algorithme de complexité quadratique permettant de résoudre ce problème.
- ❷ En donner une implémentation en langage C
- ❸ Une solution plus efficace :
 - ❶ Proposer un nouvel algorithme basé sur la méthode *diviser pour régner*

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

- ❶ Proposer un algorithme de complexité quadratique permettant de résoudre ce problème.
- ❷ En donner une implémentation en langage C
- ❸ Une solution plus efficace :
 - ❶ Proposer un nouvel algorithme basé sur la méthode *diviser pour régner*
 - ❷ Donner une implémentation en C de ce nouvel algorithme

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Tranche maximale dans un tableau

On considère un tableau T de n entiers, le but du problème est de déterminer la somme maximale d'une tranche (c'est à dire d'éléments contigus de T). Par exemple si $T = [2, -7, -5, 4, -1, 10, -4, 9, -2]$ alors la somme maximale d'une tranche est : 18, et elle est obtenue en prenant la tranche $[4, -1, 10, -4, 9]$.

- ❶ Proposer un algorithme de complexité quadratique permettant de résoudre ce problème.
- ❷ En donner une implémentation en langage C
- ❸ Une solution plus efficace :
 - ❶ Proposer un nouvel algorithme basé sur la méthode *diviser pour régner*
 - ❷ Donner une implémentation en C de ce nouvel algorithme
 - ❸ Déterminer sa complexité

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution avec une complexité quadratique

- 1 On calcule les $S_{i,j}$ (somme de la tranche des éléments du tableau compris entre les indices i et j inclus) de proche en proche, en utilisant $S_{ij} = S_{i,j-1} + t_j$ et on prend le maximum des valeurs obtenus.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution avec une complexité quadratique

- 1 On calcule les $S_{i,j}$ (somme de la tranche des éléments du tableau compris entre les indices i et j inclus) de proche en proche, en utilisant $S_{ij} = S_{i,j-1} + t_j$ et on prend le maximum des valeurs obtenus. On utilise donc deux boucles imbriquées dans laquelle on effectue uniquement des opérations élémentaires, la complexité est donc quadratique.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution avec une complexité quadratique

- 1 On calcule les $S_{i,j}$ (somme de la tranche des éléments du tableau compris entre les indices i et j inclus) de proche en proche, en utilisant $S_{ij} = S_{i,j-1} + t_j$ et on prend le maximum des valeurs obtenus. On utilise donc deux boucles imbriquées dans laquelle on effectue uniquement des opérations élémentaires, la complexité est donc quadratique.
- 2 Implémentation :

```
1  int tmaxi(int tab[], int size){  
2      int tmax = tab[0];  
3      int tij;  
4      for (int i=0;i<size;i++){  
5          tij=0;  
6          for (int j=i;j<size;j++){  
7              tij = tij + tab[j];  
8              if (tij>tmax) {tmax = tij;}}  
9      }  
10     return tmax;}
```

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

① On note $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

- ① On note $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
 - **Diviser** : on sépare T en deux sous tableaux $T_g = [t_0 \dots t_{k-1}]$ et $T_d = [t_{k+1} \dots t_{n-1}]$.
 - ⚠ Attention : on remarquera bien que t_k n'est dans aucun des deux sous tableaux !

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

- ① On note $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
 - **Diviser** : on sépare T en deux sous tableaux $T_g = [t_0 \dots t_{k-1}]$ et $T_d = [t_{k+1} \dots t_{n-1}]$.
 - ⚠ Attention : on remarquera bien que t_k n'est dans aucun des deux sous tableaux !
 - **Régner** : on recherche les tranches maximales des sous tableaux T_g et T_d ainsi que celle des tranches contenant l'élément t_k .

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

- ① On note $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
 - **Diviser** : on sépare T en deux sous tableaux $T_g = [t_0 \dots t_{k-1}]$ et $T_d = [t_{k+1} \dots t_{n-1}]$.
 - ⚠ Attention : on remarquera bien que t_k n'est dans aucun des deux sous tableaux !
 - **Régner** : on recherche les tranches maximales des sous tableaux T_g et T_d ainsi que celle des tranches contenant l'élément t_k .
 - **Combiner** on prend le maximum des trois valeurs obtenues.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

② Implémentation :

```
1  int somme_maxi_aux(int tab[], int size, int start, int end) {
2      if (end==start)
3          {return tab[start];}
4      if (end==start+1)
5          {return max3(tab[start],tab[end],tab[start]+tab[end]);}
6      int s1, s2, s3;
7      int mid = (start+end)/2;
8      s1 = somme_maxi_aux(tab, size, start, mid-1);
9      s2 = max_tranche(tab,start,mid,end);
10     s3 = somme_maxi_aux(tab, size, mid+1, end);
11     return max3(s1,s2,s3);}
```

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

- ③ Calcul de la complexité

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

③ Calcul de la complexité

Pour résoudre un problème de taille n , on doit en résoudre deux de tailles $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et rechercher le maximum des tranches contenant l'élément t_k . Cette opération a une complexité linéaire, on a donc :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Résolution : diviser pour régner

③ Calcul de la complexité

Pour résoudre un problème de taille n , on doit en résoudre deux de tailles $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et rechercher le maximum des tranches contenant l'élément t_k . Cette opération a une complexité linéaire, on a donc :

$$\begin{cases} C(0) & \in O(1) \\ C(2n) & = 2C(n) + O(n) \end{cases}$$

On retrouve les mêmes équations de complexité que dans le cas du tri fusion. Et donc la complexité est la même : $O(n \log n)$.

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Multiplication matricielle

Soient A et B deux matrices carrés de tailles n , on note $C = A \times B$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Multiplication matricielle

Soient A et B deux matrices carrées de tailles n , on note $C = A \times B$

- 1 Rappel de l'expression de C_{ij} .

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Multiplication matricielle

Soient A et B deux matrices carrés de tailles n , on note $C = A \times B$

- 1 Rappel l'expression de C_{ij} .
- 2 Quelle est la complexité d'un algorithme calculant les coefficients de C en utilisant l'expression précédente ?

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Multiplication matricielle

Soient A et B deux matrices carrées de tailles n , on note $C = A \times B$

- 1 Rappel l'expression de C_{ij} .
- 2 Quelle est la complexité d'un algorithme calculant les coefficients de C en utilisant l'expression précédente ?
- 3 on sépare A et B en blocs de tailles égales :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

Déterminer la complexité d'un algorithme qui effectue la multiplication par bloc :

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Algorithme de Strassen

L'algorithme de Strassen est une approche diviser pour régner :

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Algorithme de Strassen

L'algorithme de Strassen est une approche diviser pour régner :

- **diviser** : on sépare A et B en blocs de tailles égales :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Algorithme de Strassen

L'algorithme de Strassen est une approche diviser pour régner :

- **diviser** : on sépare A et B en blocs de tailles égales :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

- **régner** On calcule **seulement 7** produits matriciels :

$$M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2})$$

$$M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2})B_{1,1}$$

$$M_3 = A_{1,1}(B_{1,2} - B_{2,2})$$

$$M_4 = A_{2,2}(B_{2,1} - B_{1,1})$$

$$M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2})B_{2,2}$$

$$M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2})$$

$$M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2})$$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Algorithme de Strassen

L'algorithme de Strassen est une approche diviser pour régner :

- **diviser** : on sépare A et B en blocs de tailles égales :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

- **régner** On calcule **seulement 7** produits matriciels :

$$M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2})$$

$$M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2})B_{1,1}$$

$$M_3 = A_{1,1}(B_{1,2} - B_{2,2})$$

$$M_4 = A_{2,2}(B_{2,1} - B_{1,1})$$

$$M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2})B_{2,2}$$

$$M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2})$$

$$M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2})$$

- **combiner** On combine les solutions afin de construire les blocs de la matrice C :

$$C_{1,1} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$C_{1,2} = M_3 + M_5$$

$$C_{2,1} = M_2 + M_4$$

$$C_{2,2} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Complexité

L'équation de complexité s'écrit alors :

$$C(2n) = 7C(n) + O(n^2)$$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Complexité

L'équation de complexité s'écrit alors :

$$C(2n) = 7C(n) + O(n^2)$$

Et on montre que $C(n) \in O(n^{\log_2 7})$, et $\log_2 7 \simeq 2,807$

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Complexité

L'équation de complexité s'écrit alors :

$$C(2n) = 7C(n) + O(n^2)$$

Et on montre que $C(n) \in O(n^{\log_2 7})$, et $\log_2 7 \simeq 2,807$

On obtient donc une complexité meilleure que l'algorithme "naïf"

C15 Décomposition en sous problèmes

3. Exemples résolus de la méthode diviser pour régner

Complexité

L'équation de complexité s'écrit alors :

$$C(2n) = 7C(n) + O(n^2)$$

Et on montre que $C(n) \in O(n^{\log_2 7})$, et $\log_2 7 \simeq 2,807$

On obtient donc une complexité meilleure que l'algorithme "naïf"

A noter qu'à cause des tailles respectives des *facteurs cachés* dans l'algorithme de naïf et dans l'algorithme de Strassen, ce dernier ne devient plus efficace en terme de temps de calcul que pour de grandes valeurs de n .

Complexité

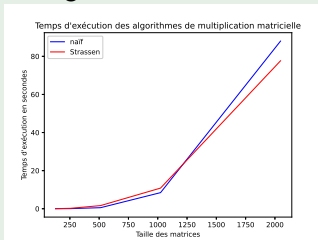
L'équation de complexité s'écrit alors :

$$C(2n) = 7C(n) + O(n^2)$$

Et on montre que $C(n) \in O(n^{\log_2 7})$, et $\log_2 7 \simeq 2,807$

On obtient donc une complexité meilleure que l'algorithme "naïf"

A noter qu'à cause des tailles respectives des *facteurs cachés* dans l'algorithme de naïf et dans l'algorithme de Strassen, ce dernier ne devient plus efficace en terme de temps de calcul que pour de grandes valeurs de n .



C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Exemple

- ① Ecrire une fonction récursive *naïve* en Ocaml qui prend en argument un entier n et renvoie le n ième terme de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Exemple

- ① Ecrire une fonction récursive *naïve* en Ocaml qui prend en argument un entier n et renvoie le n ième terme de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} f_0 = 1, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

```
1 let rec fibo n =  
2   if n < 2 then 1 else fibo (n-1) + fibo (n-2);;
```

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Exemple

- 1 Ecrire une fonction récursive *naïve* en Ocaml qui prend en argument un entier n et renvoie le n ième terme de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} f_0 = 1, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

```
1 let rec fibo n =  
2   if n < 2 then 1 else fibo (n-1) + fibo (n-2);;
```

- 2 Tracer le graphe des appels récursifs de cette fonction pour $n = 5$

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Exemple

- 1 Ecrire une fonction récursive *naïve* en Ocaml qui prend en argument un entier n et renvoie le n ième terme de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} f_0 = 1, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

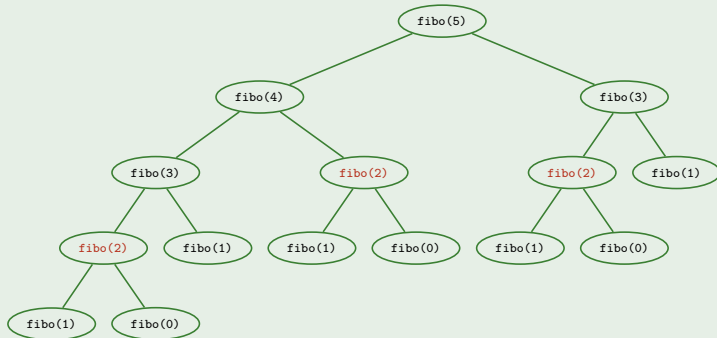
```
1 let rec fibo n =  
2   if n < 2 then 1 else fibo (n-1) + fibo (n-2);;
```

- 2 Tracer le graphe des appels récursifs de cette fonction pour $n = 5$
- 3 Commenter

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

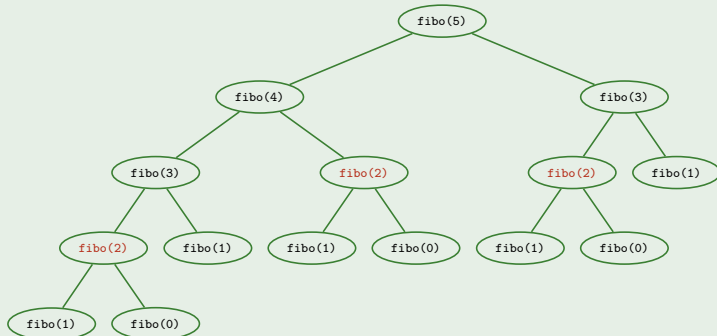
Exemple



C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Exemple

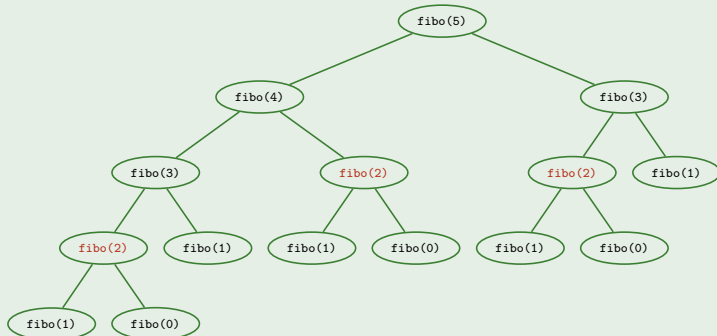


Les mêmes appels récurifs apparaissent dans plusieurs branche, on dit qu'il y a *chevauchement des appels récurifs*.

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Exemple



Les mêmes appels récurrents apparaissent dans plusieurs branches, on dit qu'il y a *chevauchement des appels récurrents*. (On peut montrer que le nombre d'appels récurrents a_n pour calculer f_n est $a_n = 2 f_n - 1$ et donc la complexité est exponentielle)

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Mémoïsation

- La **mémoïsation** consiste à stocker dans une structure de données les valeurs renvoyées par une fonction afin de ne pas les recalculer lors des appels identiques suivant.

Mémoïsation

- La **mémoïsation** consiste à stocker dans une structure de données les valeurs renvoyées par une fonction afin de ne pas les recalculer lors des appels identiques suivant.
- Les tableaux associatifs dont les clés sont les arguments de la fonction et les valeurs les résultats correspondant sont des structures de données adaptées à ce stockage car on teste l'appartenance et on retrouve une valeur efficacement.

C15 Décomposition en sous problèmes

4. Rappel : mémoïsation

Mémoïsation

- La **mémoïsation** consiste à stocker dans une structure de données les valeurs renvoyées par une fonction afin de ne pas les recalculer lors des appels identiques suivant.
- Les tableaux associatifs dont les clés sont les arguments de la fonction et les valeurs les résultats correspondant sont des structures de données adaptées à ce stockage car on teste l'appartenance et on retrouve une valeur efficacement.
- On rappelle qu'un tableau associatif peut-être implémenté de façon efficace par :
 - une table de hachage
 - un arbre binaire de recherche lorsque les clés sont ordonnées.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

On note N la longueur de la barre, $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille i et $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ le prix d'un morceaux de longueur i .

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

On note N la longueur de la barre, $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille i et $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ le prix d'un morceaux de longueur i .

- 1 Donner les valeurs de v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

On note N la longueur de la barre, $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille i et $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ le prix d'un morceaux de longueur i .

- 1 Donner les valeurs de v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .
- 2 Etablir une relation de récurrence liant les $(v_i)_{0 \leq i \leq N}$.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

On note N la longueur de la barre, $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille i et $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ le prix d'un morceaux de longueur i .

- 1 Donner les valeurs de v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .
- 2 Etablir une relation de récurrence liant les $(v_i)_{0 \leq i \leq N}$.
- 3 En déduire une fonction récursive en C calculant la valeur de la découpe maximale.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

On note N la longueur de la barre, $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille i et $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ le prix d'un morceaux de longueur i .

- 1 Donner les valeurs de v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .
- 2 Etablir une relation de récurrence liant les $(v_i)_{0 \leq i \leq N}$.
- 3 En déduire une fonction récursive en C calculant la valeur de la découpe maximale.
- 4 Vérifier qu'on se trouve dans une situation de chevauchement des appels récursifs et proposer une nouvelle version de votre fonction utilisant la mémoïsation.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Position du problème

On considère une barre de métal de longueur entière 12 et pouvant être découpée en morceaux de longueurs entières ayant chacun un prix comme indiqué ci-dessous :

longueur (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prix (p_i)	2	4	7	8	12	14	18	23	24	25	26	31

Le prix de vente des différents morceaux varie donc suivant la découpe utilisée, par exemples : la découpe (2, 4, 6) a un prix de vente de $4 + 8 + 14 = 26$, tandis que la découpe (7, 5) a un prix de vente de $18 + 12 = 30$

Le but du problème est de trouver la valeur maximale des découpes possibles.

On note N la longueur de la barre, $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille i et $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ le prix d'un morceaux de longueur i .

- 1 Donner les valeurs de v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .
- 2 Etablir une relation de récurrence liant les $(v_i)_{0 \leq i \leq N}$.
- 3 En déduire une fonction récursive en C calculant la valeur de la découpe maximale.
- 4 Vérifier qu'on se trouve dans une situation de chevauchement des appels récursifs et proposer une nouvelle version de votre fonction utilisant la mémoïsation.
- 5 Etudier les complexités des deux versions.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

① $v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 4$ et $v_3 = 7$

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- ① $v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 4$ et $v_3 = 7$
- ② En supposant qu'on connaisse les valeurs maximales de découpe pour *toutes* les tailles inférieures à n , la découpe maximale pour la taille n s'en déduit en prenant le maximum parmi les découpes maximales d'une barre de longueur $n - k \leq n - 1$ et du prix d'un morceau de taille k , c'est à dire : $v_n = \max \{v_{n-k} + p_k, 1 \leq k \leq n\}$

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- 1 $v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 4$ et $v_3 = 7$
- 2 En supposant qu'on connaisse les valeurs maximales de découpe pour *toutes* les tailles inférieures à n , la découpe maximale pour la taille n s'en déduit en prenant le maximum parmi les découpes maximales d'une barre de longueur $n - k \leq n - 1$ et du prix d'un morceau de taille k , c'est à dire : $v_n = \max \{v_{n-k} + p_k, 1 \leq k \leq n\}$
- 3 Implémentation en C :

```
1 // Découpe maximale d'une barre de taille n
2 int vmax(int barre[], int n) {
3     int cmax = 0;
4     int vnk;
5     if (n == 0) {return 0;}
6     for (int k = 1; k <= n; k++){
7         vnk = vmax(barre, n-k);
8         if (barre[k] + vnk > cmax) {cmax = vnk + barre[k];}
9     }
10    return cmax;}
```

Résolution

- ④ Pour calculer v_5 , on doit calculer v_4, v_3, \dots, v_0 . Mais l'appel à v_4 demande aussi le calcul de v_3, v_2, \dots, v_0 . On se trouve donc bien dans le cas d'un chevauchement d'appels récursifs.

On peut proposer la version avec memoisation suivante :

```
1 // Avec mémorisation (v[n]=-1 indique une valeur non encore calculée)
2 int vmax_memo(int barre[], int n, int v[]){
3     if (v[n]!=-1) {return v[n];}
4     int cmax = 0;
5     int vnk;
6     for (int k = 1; k <= n; k++){
7         vnk = vmax_memo(barre, n-k, v);
8         if (barre[k] + vnk > cmax) {cmax = vnk + barre[k];}
9     }
10    v[n] = cmax;
11    return cmax;}
```

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

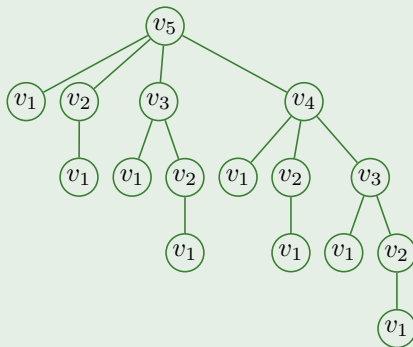
- 5 On peut construire l'arbre des appels récur­sifs pour $n = 5$:

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- 5 On peut construire l'arbre des appels récurrents pour $n = 5$:

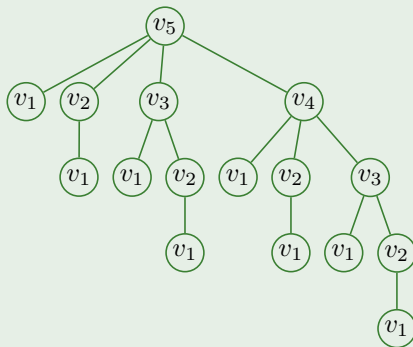


C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- 5 On peut construire l'arbre des appels récurrents pour $n = 5$:



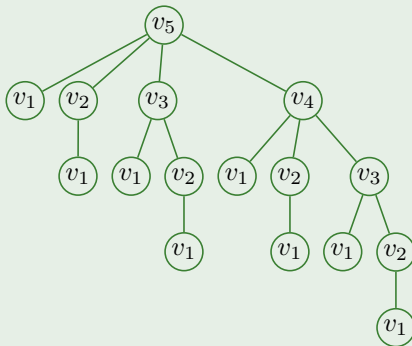
En notant a_n le nombre d'appels pour calculer v_n , on a $a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- 5 On peut construire l'arbre des appels récurrents pour $n = 5$:



En notant a_n le nombre d'appels pour calculer v_n , on a $a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. On obtient $a_n = 2^n$ et donc la complexité est au moins quadratique !

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

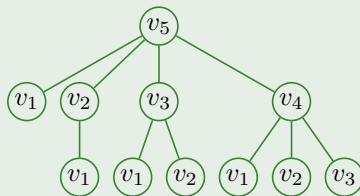
- ⑤ Dans le cas de la mémorisation, les appels récursifs déjà calculés sont obtenus directement, ce qui donne l'arbre d'appel suivant :

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- 5 Dans le cas de la mémorisation, les appels récursifs déjà calculés sont obtenus directement, ce qui donne l'arbre d'appel suivant :

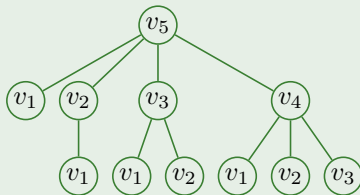


C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- ⑤ Dans le cas de la mémorisation, les appels récursifs déjà calculés sont obtenus directement, ce qui donne l'arbre d'appel suivant :



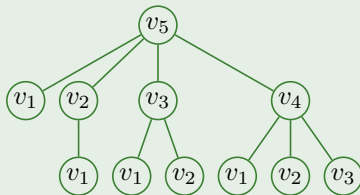
En notant b_n le nombre d'appels pour calculer v_n , on a $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} k$.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Résolution

- ⑤ Dans le cas de la mémorisation, les appels récursifs déjà calculés sont obtenus directement, ce qui donne l'arbre d'appel suivant :



En notant b_n le nombre d'appels pour calculer v_n , on a $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} k$. La complexité est donc quadratique.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Calcul de bas en haut (*bottom up*)

La mémorisation construit la solution de façon "descendante", on lance les appels récursif sur les plus grandes valeurs de taille de la barre. Une autre stratégie dite *ascendante* ou *de bas en haut* (*bottom up*) consiste à construire la solution en partant des instances les plus petites du problème.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Calcul de bas en haut (*bottom up*)

La mémorisation construit la solution de façon "descendante", on lance les appels récursif sur les plus grandes valeurs de taille de la barre. Une autre stratégie dite *ascendante* ou *de bas en haut* (*bottom up*) consiste à construire la solution en partant des instances les plus petites du problème.

Pour la découpe de la barre on part donc des valeurs connues v_0 et v_1 et on construit v_2 puis v_3 , en utilisant la relation de récurrence $v_n = \max \{v_{n-k} + p_k, 1 \leq k \leq n\}$

Calcul de bas en haut (*bottom up*)

La mémorisation construit la solution de façon "descendante", on lance les appels récursif sur les plus grandes valeurs de taille de la barre. Une autre stratégie dite **ascendante** ou **de bas en haut** (*bottom up*) consiste à construire la solution en partant des instances les plus petites du problème.

Pour la découpe de la barre on part donc des valeurs connues v_0 et v_1 et on construit v_2 puis v_3 , en utilisant la relation de récurrence $v_n = \max \{v_{n-k} + p_k, 1 \leq k \leq n\}$

Ce qui se traduit par une solution **itérative** :

Calcul de bas en haut (*bottom up*)

La mémorisation construit la solution de façon "descendante", on lance les appels récursifs sur les plus grandes valeurs de taille de la barre. Une autre stratégie dite *ascendante* ou *de bas en haut (bottom up)* consiste à construire la solution en partant des instances les plus petites du problème.

Pour la découpe de la barre on part donc des valeurs connues v_0 et v_1 et on construit v_2 puis v_3 , en utilisant la relation de récurrence $v_n = \max \{v_{n-k} + p_k, 1 \leq k \leq n\}$

Ce qui se traduit par une solution *itérative* :

```
1  int vmax_iter(int barre[], int n){
2      int vmax[n];
3      vmax[0] = 0;
4      vmax[1] = barre[1];
5      for (int i=2; i<=n; i++){
6          vmax[i] = 0;
7          for (int j=1; j<=i; j++){
8              if (vmax[j]+barre[i-j]>vmax[i])
9                  {vmax[i] = vmax[j]+barre[i-j];}}
10     return vmax[n];}
```

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Construction d'une solution

On a pour le moment déterminé la valeur maximale de la découpe, mais pas la découpe elle-même. D'autre part, plusieurs découpes différentes peuvent avoir cette même valeur maximale. Pour rechercher *une* découpe de valeur maximale, on peut par exemple :

- construire le tableau $(v_k)_{0 \leq k \leq N}$ et l'utiliser afin d'en déduire la découpe.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Construction d'une solution

On a pour le moment déterminé la valeur maximale de la découpe, mais pas la découpe elle-même. D'autre part, plusieurs découpes différentes peuvent avoir cette même valeur maximale. Pour rechercher *une* découpe de valeur maximale, on peut par exemple :

- construire le tableau $(v_k)_{0 \leq k \leq N}$ et l'utiliser afin d'en déduire la découpe.
Par exemple, si $v_{12} = v_8 + p_4$, cela signifie que pour avoir la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille 12, une possibilité est d'utiliser une découpe maximale d'une barre de taille 8 et un morceau de taille 4. En remontant ainsi de proche en proche, on obtient une découpe maximale possible

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Construction d'une solution

On a pour le moment déterminé la valeur maximale de la découpe, mais pas la découpe elle-même. D'autre part, plusieurs découpes différentes peuvent avoir cette même valeur maximale. Pour rechercher *une* découpe de valeur maximale, on peut par exemple :

- construire le tableau $(v_k)_{0 \leq k \leq N}$ et l'utiliser afin d'en déduire la découpe.
Par exemple, si $v_{12} = v_8 + p_4$, cela signifie que pour avoir la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille 12, une possibilité est d'utiliser une découpe maximale d'une barre de taille 8 et un morceau de taille 4. En remontant ainsi de proche en proche, on obtient une découpe maximale possible
- Modifier notre fonction afin qu'elle renvoie la découpe maximale et non pas la valeur de cette découpe.

C15 Décomposition en sous problèmes

5. Programmation dynamique : exemple introductif

Construction d'une solution

On a pour le moment déterminé la valeur maximale de la découpe, mais pas la découpe elle-même. D'autre part, plusieurs découpes différentes peuvent avoir cette même valeur maximale. Pour rechercher *une* découpe de valeur maximale, on peut par exemple :

- construire le tableau $(v_k)_{0 \leq k \leq N}$ et l'utiliser afin d'en déduire la découpe.
Par exemple, si $v_{12} = v_8 + p_4$, cela signifie que pour avoir la valeur maximale de la découpe d'une barre de taille 12, une possibilité est d'utiliser une découpe maximale d'une barre de taille 8 et un morceau de taille 4. En remontant ainsi de proche en proche, on obtient une découpe maximale possible
- Modifier notre fonction afin qu'elle renvoie la découpe maximale et non pas la valeur de cette découpe.

Ces deux possibilités seront abordées en TP.

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Principes généraux

La programmation dynamique s'applique généralement à la résolution d'un problème d'optimisation vérifiant les conditions suivantes :

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Principes généraux

La programmation dynamique s'applique généralement à la résolution d'un problème d'optimisation vérifiant les conditions suivantes :

- 1 **Sous structure optimale** : ce problème peut-être résolu à partir de problèmes similaires mais plus petits

Principes généraux

La programmation dynamique s'applique généralement à la résolution d'un problème d'optimisation vérifiant les conditions suivantes :

- ❶ **Sous structure optimale** : ce problème peut-être résolu à partir de problèmes similaires mais plus petits

La découpe maximale d'une barre de taille N s'obtient comme découpe maximale d'une barre de taille strictement inférieure k et d'un morceau de taille $N - k$.

Principes généraux

La programmation dynamique s'applique généralement à la résolution d'un problème d'optimisation vérifiant les conditions suivantes :

- 1 **Sous structure optimale** : ce problème peut-être résolu à partir de problèmes similaires mais plus petits

La découpe maximale d'une barre de taille N s'obtient comme découpe maximale d'une barre de taille strictement inférieure k et d'un morceau de taille $N - k$.

- 2 **Chevauchement de sous problème** : une solution récursive produit des appels identiques. Pour pallier ce problème, on utilise la mémorisation dans les solutions récursives ou une solution de bas en haut itérative.

Principes généraux

La programmation dynamique s'applique généralement à la résolution d'un problème d'optimisation vérifiant les conditions suivantes :

- 1 **Sous structure optimale** : ce problème peut-être résolu à partir de problèmes similaires mais plus petits

La découpe maximale d'une barre de taille N s'obtient comme découpe maximale d'une barre de taille strictement inférieure k et d'un morceau de taille $N - k$.

- 2 **Chevauchement de sous problème** : une solution récursive produit des appels identiques. Pour pallier ce problème, on utilise la mémorisation dans les solutions récursives ou une solution de bas en haut itérative.

Pour rechercher la découpe maximale d'un barre de taille 5, on est amené à chercher celle d'une barre de taille 4,3,2,1. Et pour chercher celle d'une barre de taille 4, on fera de nouveau appel à celle d'une barre de taille 3,2,1 ...

Principes généraux

La programmation dynamique s'applique généralement à la résolution d'un problème d'optimisation vérifiant les conditions suivantes :

- 1 **Sous structure optimale** : ce problème peut-être résolu à partir de problèmes similaires mais plus petits

La découpe maximale d'une barre de taille N s'obtient comme découpe maximale d'une barre de taille strictement inférieure k et d'un morceau de taille $N - k$.

- 2 **Chevauchement de sous problème** : une solution récursive produit des appels identiques. Pour pallier ce problème, on utilise la mémorisation dans les solutions récursives ou une solution de bas en haut itérative.

Pour rechercher la découpe maximale d'un barre de taille 5, on est amené à chercher celle d'une barre de taille 4,3,2,1. Et pour chercher celle d'une barre de taille 4, on fera de nouveau appel à celle d'une barre de taille 3,2,1 ...

- ! L'étape cruciale est de déterminer les relations de récurrence entre les différentes instances du problème.

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Sous structure optimale : contre-exemples

On donne ici deux exemples de problèmes n'ayant *pas* la propriété de **sous structure optimale** :

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Sous structure optimale : contre-exemples

On donne ici deux exemples de problèmes n'ayant *pas* la propriété de **sous structure optimale** :

- Nombre minimal de multiplications dans le calcul de a^n

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Sous structure optimale : contre-exemples

On donne ici deux exemples de problèmes n'ayant *pas* la propriété de **sous structure optimale** :

- Nombre minimal de multiplications dans le calcul de a^n

Par exemple le calcul optimal de a^{15} demande 5 multiplications :

$$a^{15} = a^3 \times ((a^3)^2)^2$$

a^6 doit donc être calculé en utilisant le calcul de a^3 au lieu de par exemple

$a^6 = (a^2)^3$ qui demande aussi 3 multiplications. C'est à dire qu'on peut avoir trouvé une solution optimale $n = 6$ mais qui n'intervient *pas* dans le calcul pour $n = 15$.

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Sous structure optimale : contre-exemples

On donne ici deux exemples de problèmes n'ayant *pas* la propriété de **sous structure optimale** :

- Nombre minimal de multiplications dans le calcul de a^n

Par exemple le calcul optimal de a^{15} demande 5 multiplications :

$$a^{15} = a^3 \times ((a^3)^2)^2$$

a^6 doit donc être calculé en utilisant le calcul de a^3 au lieu de par exemple

$a^6 = (a^2)^3$ qui demande aussi 3 multiplications. C'est à dire qu'on peut avoir trouvé une solution optimale $n = 6$ mais qui n'intervient *pas* dans le calcul pour $n = 15$.

- Recherche du plus long chemin élémentaire dans un graphe

C15 Décomposition en sous problèmes

6. Programmation dynamique

Sous structure optimale : contre-exemples

On donne ici deux exemples de problèmes n'ayant *pas* la propriété de **sous structure optimale** :

- Nombre minimal de multiplications dans le calcul de a^n

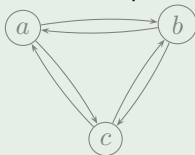
Par exemple le calcul optimal de a^{15} demande 5 multiplications :

$$a^{15} = a^3 \times ((a^3)^2)^2$$

a^6 doit donc être calculé en utilisant le calcul de a^3 au lieu de par exemple

$a^6 = (a^2)^3$ qui demande aussi 3 multiplications. C'est à dire qu'on peut avoir trouvé une solution optimale $n = 6$ mais qui n'intervient *pas* dans le calcul pour $n = 15$.

- Recherche du plus long chemin élémentaire dans un graphe



Dans le graphe ci-contre, le plus long chemin élémentaire de a vers c est $a \rightarrow b \rightarrow c$ et son sous-chemin $a \rightarrow b$ n'est pas une la solution du sous problème consistant à rechercher le plus long chemin élémentaire de a vers b . Et de même pour son sous chemin $b \rightarrow c$.

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,
- w est une sous séquence de v ,

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,
- w est une sous séquence de v ,
- w est de longueur maximale.

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,
- w est une sous séquence de v ,
- w est de longueur maximale.

Par exemple, $u = \text{"PROGRAMMATION"}$ et $v = \text{"DYNAMIQUE"}$ ont comme sous séquence commune "AMI" (et c'est la plus longue)

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,
- w est une sous séquence de v ,
- w est de longueur maximale.

Par exemple, $u = \text{"PROGRAMMATION"}$ et $v = \text{"DYNAMIQUE"}$ ont comme sous séquence commune "AMI" (et c'est la plus longue)

- PROGRAMMATION

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,
- w est une sous séquence de v ,
- w est de longueur maximale.

Par exemple, $u = \text{"PROGRAMMATION"}$ et $v = \text{"DYNAMIQUE"}$ ont comme sous séquence commune "AMI" (et c'est la plus longue)

- PROGRAMMATION
- DYNAMIQUE

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Position du problème

On considère deux chaînes de caractères u et v de longueurs respectives n et m . On cherche à déterminer la longueur de leur plus longue sous séquence commune (PLSSC), c'est à dire la chaîne w telle que :

- w est une sous séquence (c'est à dire une suite extraite) de u ,
- w est une sous séquence de v ,
- w est de longueur maximale.

Par exemple, $u = \text{"PROGRAMMATION"}$ et $v = \text{"DYNAMIQUE"}$ ont comme sous séquence commune "AMI" (et c'est la plus longue)

- PROGRAMMATION
- DYNAMIQUE

Donc ici, la longueur de la PLSSC est 3.

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

- Si $u[i] = v[j]$ alors, quelle est la relation entre $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ et $\text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$?

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

- Si $u[i] = v[j]$ alors, quelle est la relation entre $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ et $\text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$?
- Sinon, exprimer $\text{plssc}(u_i, v_j)$ en fonction de $\text{plssc}(u_i, v_{j-1})$ et $\text{plssc}(u_{i-1}, v_j)$

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

- Si $u[i] = v[j]$ alors, quelle est la relation entre $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ et $\text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$?
- Sinon, exprimer $\text{plssc}(u_i, v_j)$ en fonction de $\text{plssc}(u_i, v_{j-1})$ et $\text{plssc}(u_{i-1}, v_j)$
- Déterminer les cas de base (ceux où u et v sont des chaînes vides notés ϵ) :

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

- Si $u[i] = v[j]$ alors, quelle est la relation entre $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ et $\text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$?
 $\text{lplssc}(u_i, v_j) = 1 + \text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$
- Sinon, exprimer $\text{plssc}(u_i, v_j)$ en fonction de $\text{plssc}(u_i, v_{j-1})$ et $\text{plssc}(u_{i-1}, v_j)$
- Déterminer les cas de base (ceux où u et v sont des chaînes vides notés ϵ) :

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

- Si $u[i] = v[j]$ alors, quelle est la relation entre $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ et $\text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$?
 $\text{lplssc}(u_i, v_j) = 1 + \text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$
- Sinon, exprimer $\text{plssc}(u_i, v_j)$ en fonction de $\text{plssc}(u_i, v_{j-1})$ et $\text{plssc}(u_{i-1}, v_j)$
 $\text{lplssc}(u_i, v_j) = \max(\text{lplssc}(u_i, v_{j-1}), \text{lplssc}(u_{i-1}, v_j))$
- Déterminer les cas de base (ceux où u et v sont des chaînes vides notés ϵ) :

Résolution

On cherche les relations de récurrence entre des instances du sous-problème. Pour cela on note u_i ($0 \leq i \leq n$) la chaîne composée des i premiers caractères de u , et v_j ($0 \leq j \leq m$) celle composée des j premiers caractères de v . Et on note $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ la longueur de la PLSSC de u_i et de v_j .

- Si $u[i] = v[j]$ alors, quelle est la relation entre $\text{lplssc}(u_i, v_j)$ et $\text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$?

$$\text{lplssc}(u_i, v_j) = 1 + \text{lplssc}(u_{i-1}, v_{j-1})$$
- Sinon, exprimer $\text{plssc}(u_i, v_j)$ en fonction de $\text{plssc}(u_i, v_{j-1})$ et $\text{plssc}(u_{i-1}, v_j)$

$$\text{lplssc}(u_i, v_j) = \max(\text{lplssc}(u_i, v_{j-1}), \text{lplssc}(u_{i-1}, v_j))$$
- Déterminer les cas de base (ceux où u et v sont des chaînes vides notés ϵ) :

$$\text{lplssc}(u_i, \epsilon) = 0$$

$$\text{lplssc}(\epsilon, v_j) = 0$$

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Implémentation en OCaml

On doit donc écrire une fonction `lplssc string -> string -> int` qui prend en argument deux chaînes de caractères `u` et `v` et renvoie la longueur de leur plus longue sous séquence commune.

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Implémentation en OCaml

On doit donc écrire une fonction `lplssc string -> string -> int` qui prend en argument deux chaînes de caractères `u` et `v` et renvoie la longueur de leur plus longue sous séquence commune.

🌀 Comme on travaille récursivement sur la longueur des préfixes on pourra écrire une fonction auxiliaire aux `string -> string -> int -> int -> int` qui prend deux entiers supplémentaires en arguments : les longueurs de chacune des deux chaînes

Implémentation en OCaml

On doit donc écrire une fonction `lplssc string -> string -> int` qui prend en argument deux chaînes de caractères `u` et `v` et renvoie la longueur de leur plus longue sous séquence commune.

🌀 Comme on travaille récursivement sur la longueur des préfixes on pourra écrire une fonction auxiliaire `aux string -> string -> int -> int -> int` qui prend deux entiers supplémentaires en arguments : les longueurs de chacune des deux chaînes

```
1 let lplssc u v =  
2   let rec aux u v n m =  
3     if n=0 || m=0 then 0 else  
4     if u.[n-1] = v.[m-1] then  
5       1 + aux u v (n-1) (m-1) else  
6       max (aux u v (n-1) m) (aux u v n (m-1)) in  
7   aux u v (String.length u) (String.length v);;
```

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Mémoïsation

Modifier la fonction précédente afin de mémoriser les résultats déjà calculés. On pourra utiliser une matrice `memo` créée en OCaml avec

```
let memo = Array.make_matrix (n+1) (m+1) (-1)
```

La valeur initiale -1 indiquant que la LPLSSC de u_i et v_j n'a pas encore été calculée.

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Mémoïsation

Modifier la fonction précédente afin de mémoriser les résultats déjà calculés. On pourra utiliser une matrice `memo` créée en OCaml avec

```
let memo = Array.make_matrix (n+1) (m+1) (-1)
```

La valeur initiale -1 indiquant que la LPLSSC de u_i et v_j n'a pas encore été calculée.

Mémoïsation

Modifier la fonction précédente afin de mémoriser les résultats déjà calculés. On pourra utiliser une matrice memo créée en OCaml avec

```
let memo = Array.make_matrix (n+1) (m+1) (-1)
```

La valeur initiale -1 indiquant que la LPLSSC de u_i et v_j n'a pas encore été calculée.

```

1  let lplssc_memo u v memo =
2      let rec aux u v n m memo=
3          if memo.(n).(m) <> -1 then memo.(n).(m) else
4              (if n=0 || m=0 then
5                  (memo.(n).(m) <- 0; 0)
6                  else
7                      (if u.[n-1] = v.[m-1] then
8                          (let r1 = 1 + aux u v (n-1) (m-1) memo in
9                              memo.(n).(m)<-r1; r1) else
10                          (let r2 = max (aux u v (n-1) m memo) (aux u v n (m-1) memo) in
11                              memo.(n).(m)<-r2; r2))
12              ) in
13      aux u v (String.length u) (String.length v) memo;;

```

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Version itérative

Version itérative

```
1  let lplssc_iter u v memo =  
2    let n = String.length u in  
3    let m = String.length v in  
4    for i = 0 to n do  
5      memo.(i).(0) <- 0;  
6    done;  
7    for i = 0 to m do  
8      memo.(0).(i) <- 0;  
9    done;  
10   for i=1 to n do  
11     for j=1 to m do  
12       if u.[i-1]=v.[j-1] then  
13         memo.(i).(j) <- 1 + memo.(i-1).(j-1)  
14       else  
15         memo.(i).(j) <- max memo.(i-1).(j) memo.(i).(j-1)  
16       done;  
17     done;  
18   memo.(n).(m);;
```

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	3	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	2	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	<u>2</u>	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	1	<u>2</u>	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	<u>1</u>	1	1	1	1
P	0	0	1	<u>2</u>	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	<u>1</u>	1	1	1	1
P	0	0	1	<u>2</u>	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

La matrice obtenue pour les mots : IMPERIAL et EMPIRE est :

	€	E	M	P	I	R	E
€	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	<u>1</u>	1	1	1	1
P	0	0	1	<u>2</u>	2	2	2
E	0	1	1	2	2	2	3
R	0	1	1	2	2	3	3
I	0	1	1	2	<u>3</u>	3	3
A	0	1	1	2	3	3	3
L	0	1	1	2	3	3	3

On peut utiliser ce résultat pour construire la PLSSC :

- on part de la dernière case en bas et à droite
- si les lettres sur la ligne et la colonne sont identiques on ajoute à la PLSSC et on remonte en diagonale
- sinon on va à gauche ou en haut suivant la case qui a plus grande valeur

C15 Décomposition en sous problèmes

7. Exemple résolu : plus longue sous séquence commune

Reconstruction de la solution

Reconstruction de la solution

```
1  let reconstruit u v memo =
2    let n = ref (String.length u) in
3    let m = ref (String.length v) in
4    let res = ref "" in
5    while (!n <> 0) && (!m <> 0) do
6      if (u.[!n-1]=v.[!m-1] && memo.(!n).(!m) = 1 + memo.(!n-1).(!m-1)) then
7        (res := (String.make 1 u.[!n-1]) ^ !res ;
8         n := !n -1;
9         m := !m -1;)
10     else
11       ( if (memo.(!n-1).(!m) > memo.(!n).(!m-1)) then
12         (n := !n -1;)
13       else
14         (m := !m -1;))
15   done;
16   !res;;
```

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée.

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7,

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7, alors on peut utiliser au minimum 2 pièces ($4 + 3$).

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7, alors on peut utiliser au minimum 2 pièces ($4 + 3$).

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7, alors on peut utiliser au minimum 2 pièces ($4 + 3$).

🔄 **Rappel :** l'algorithme glouton qui consiste à rendre à tout moment la pièce de plus forte valeur possible ne fournit pas toujours la solution optimale. Ici, on obtiendrait 5, 1, 1 et donc 3 pièces.

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7, alors on peut utiliser au minimum 2 pièces ($4 + 3$).

🔄 **Rappel :** l'algorithme glouton qui consiste à rendre à tout moment la pièce de plus forte valeur possible ne fournit pas toujours la solution optimale. Ici, on obtiendrait 5, 1, 1 et donc 3 pièces.

- 1 Ecrire une relation de récurrence entre les différentes instances du problème en donnant les solutions des cas de base.

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7, alors on peut utiliser au minimum 2 pièces ($4 + 3$).

🔄 **Rappel :** l'algorithme glouton qui consiste à rendre à tout moment la pièce de plus forte valeur possible ne fournit pas toujours la solution optimale. Ici, on obtiendrait 5, 1, 1 et donc 3 pièces.

- 1 Ecrire une relation de récurrence entre les différentes instances du problème en donnant les solutions des cas de base.
- 2 Ecrire un programme en C permettant de répondre au problème.

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Position du problème

On dispose d'un *système monétaire* c'est à dire d'un ensemble de valeurs possibles pour les pièces et les billets. Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour former une somme donnée. Par exemple si le système monétaire est $\{1, 3, 4, 5\}$ et la somme 7, alors on peut utiliser au minimum 2 pièces ($4 + 3$).

🔄 **Rappel :** l'algorithme glouton qui consiste à rendre à tout moment la pièce de plus forte valeur possible ne fournit pas toujours la solution optimale. Ici, on obtiendrait 5, 1, 1 et donc 3 pièces.

- 1 Ecrire une relation de récurrence entre les différentes instances du problème en donnant les solutions des cas de base.
- 2 Ecrire un programme en C permettant de répondre au problème.
- 3 Construire la liste effective des pièces à rendre.

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

1 On note :

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

- 1 On note :
 - s la somme à rendre,

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

- 1 On note :
- s la somme à rendre,
 - $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs des pièces rangées dans l'ordre *croissant*

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

1 On note :

- s la somme à rendre,
- $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs des pièces rangées dans l'ordre *croissant*
- $m(s, k)$ le nombre minimal de pièce pour rendre la somme s en utilisant les pièces $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

1 On note :

- s la somme à rendre,
- $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs des pièces rangées dans l'ordre *croissant*
- $m(s, k)$ le nombre minimal de pièce pour rendre la somme s en utilisant les pièces $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$

Avec ces notations, on doit donc trouver $m(s, n)$ et on dispose des relations suivantes :

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

1 On note :

- s la somme à rendre,
- $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs des pièces rangées dans l'ordre *croissant*
- $m(s, k)$ le nombre minimal de pièce pour rendre la somme s en utilisant les pièces $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$

Avec ces notations, on doit donc trouver $m(s, n)$ et on dispose des relations suivantes :

$$\begin{cases} m(0, k) &= 0 \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n, \\ m(s, 0) &= +\infty \text{ pour tout } s \in \mathbb{N}^*, \\ m(s, k) &= m(s, k-1) \text{ si } s < p_k, \\ m(s, k) &= \min \{1 + m(s - p_k, k), m(s, k-1)\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

2 Programme en C

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

② Programme en C

```
1  int min_pieces(int s, int pieces[], int k)
2  {
3      int m1, m2;
4      if (s == 0)
5      {
6          return 0;
7      }
8      if (k == 0)
```

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Résolution

2 Programme en C

```
1  int min_pieces(int s, int pieces[], int k)
2  {
3      int m1, m2;
4      if (s == 0)
5      {
6          return 0;
7      }
8      if (k == 0)
```

Comme pour la PLSSC, on peut écrire une solution itérative ou une solution utilisant la mémorisation.

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Reconstruction de la solution

- ③ On construit une solution effective à partir des valeurs de la matrice $m(s, k)$

	0	1 ($p_1=1$)	2 ($p_2=3$)	3 ($p_3=4$)	4 ($p_4=5$)
0	0	0	0	0	0
1	∞	1	1	1	1
2	∞	2	2	2	2
3	∞	3	1	1	1
4	∞	4	2	1	1
5	∞	5	3	2	1
6	∞	6	2	2	2
7	∞	7	3	2	2

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Reconstruction de la solution

- ③ On construit une solution effective à partir des valeurs de la matrice $m(s, k)$

	0	1 ($p_1=1$)	2 ($p_2=3$)	3 ($p_3=4$)	4 ($p_4=5$)
0	0	0	0	0	0
1	∞	1	1	1	1
2	∞	2	2	2	2
3	∞	3	1	1	1
4	∞	4	2	1	1
5	∞	5	3	2	1
6	∞	6	2	2	2
7	∞	7	3	2	2

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Reconstruction de la solution

- ③ On construit une solution effective à partir des valeurs de la matrice $m(s, k)$

	0	1 ($p_1=1$)	2 ($p_2=3$)	3 ($p_3=4$)	4 ($p_4=5$)
0	0	0	0	0	0
1	∞	1	1	1	1
2	∞	2	2	2	2
3	∞	3	1	1	1
4	∞	4	2	1	1
5	∞	5	3	2	1
6	∞	6	2	2	2
7	∞	7	3	2	2

p_4

C15 Décomposition en sous problèmes

8. Exemple résolu : rendu de monnaie

Reconstruction de la solution

- ③ On construit une solution effective à partir des valeurs de la matrice $m(s, k)$

	0	1 ($p_1=1$)	2 ($p_2=3$)	3 ($p_3=4$)	4 ($p_4=5$)
0	0	0	0	0	0
1	∞	1	1	1	1
2	∞	2	2	2	2
3	∞	3	1	1	1
4	∞	4	2	1	1
5	∞	5	3	2	1
6	∞	6	2	2	2
7	∞	7	3	2	2

