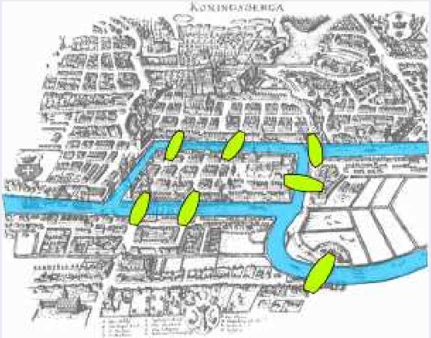
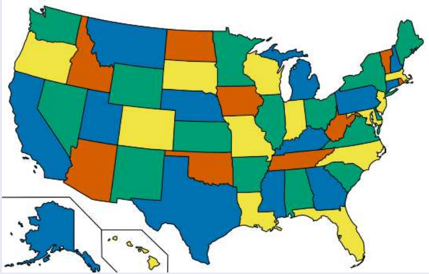
Les sept ponts de Konigsberg



credit : Wikipedia

Est-il possible de trouver un chemin qui passe une seule fois par chaque pont et revient à son point de départ ?

Le problème des quatre couleurs



credit : Wikipedia

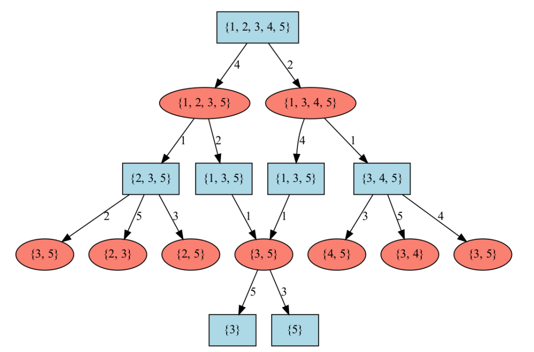
Peut-on colorier n'importe quelle carte en utilisant seulement 4 couleurs ? (sans que deux pays limitrophes aient la même couleur)

Le problème du voyageur de commerce

credit : Wikipedia

Trouver le chemin le plus court possible qui passe par toutes les villes une seule fois et revient à son point de départ.

Le jeu de Juniper Green



Existe-il une stratégie gagnante au jeu de Juniper Green ?

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,
- énergie, transport, ...

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,
- énergie, transport, ...

La taille des graphes en jeu impose la recherche d'algorithmes efficaces :

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,
- énergie, transport, ...

La taille des graphes en jeu impose la recherche d'algorithmes efficaces :

Graphe	Sommets	Arcs

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,
- énergie, transport, ...

La taille des graphes en jeu impose la recherche d'algorithmes efficaces :

Graphe	Sommets	Arcs
Facebook	$\simeq 7,2 \times 10^8$	$\simeq 7 \times 10^9$

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,
- énergie, transport, ...

La taille des graphes en jeu impose la recherche d'algorithmes efficaces :

Graphe	Sommets	Arcs
Facebook	$\simeq 7,2 \times 10^8$	$\simeq 7 \times 10^9$
OpenStreetMap	$\simeq 9 \times 10^9$	$\simeq 10^9$

Théorie des graphes

Ces problèmes se modélisent et se résolvent à l'aide de la théorie des graphes, un domaine central de l'informatique ayant des applications variées :

- GPS : recherches de chemins,
- planification de tâches,
- réseaux : informatique, sociaux,
- énergie, transport, ...

La taille des graphes en jeu impose la recherche d'algorithmes efficaces :

Graphe	Sommets	Arcs
Facebook	$\simeq 7,2 \times 10^8$	$\simeq 7 \times 10^9$
OpenStreetMap	$\simeq 9 \times 10^9$	$\simeq 10^9$
Jeu d'échecs	$\simeq 10^{47}$	?

Définition

Un graphe non-orienté est la donnée :

Définition

Un graphe non-orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini (V pour *vertice* en anglais.).

Définition

Un graphe non-orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini (V pour *vertice* en anglais.).
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arêtes (E pour *edges* en anglais).

Définition

Un graphe non-orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini (V pour *vertice* en anglais.).
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arêtes (E pour *edges* en anglais).

Remarques

Définition

Un graphe non-orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini (V pour *vertice* en anglais.).
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arêtes (E pour *edges* en anglais).

Remarques

- Une arête est donc une paire $\{x, y\}$, avec $x \in S$, $y \in S$ et $x \neq y$.

Définition

Un graphe non-orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini (V pour *vertice* en anglais.).
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arêtes (E pour *edges* en anglais).

Remarques

- Une arête est donc une paire $\{x, y\}$, avec $x \in S$, $y \in S$ et $x \neq y$.
- Puisque $\{x, y\} = \{y, x\}$, l'ordre n'a pas d'importance.

Définition

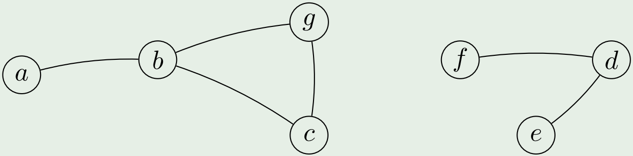
Un graphe non-orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini (V pour *vertice* en anglais.).
- D'un ensemble de paires de sommets A appelés arêtes (E pour *edges* en anglais).

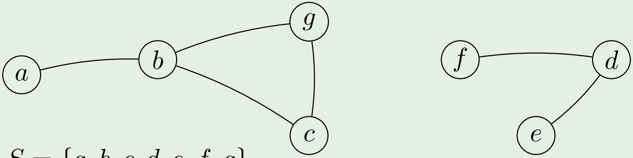
Remarques

- Une arête est donc une paire $\{x, y\}$, avec $x \in S$, $y \in S$ et $x \neq y$.
- Puisque $\{x, y\} = \{y, x\}$, l'ordre n'a pas d'importance.
- On notera $x - y$ ou plus simplement xy l'arête $\{x, y\}$.

Exemple

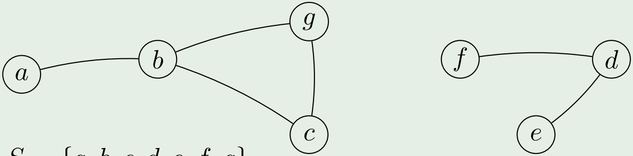


Exemple



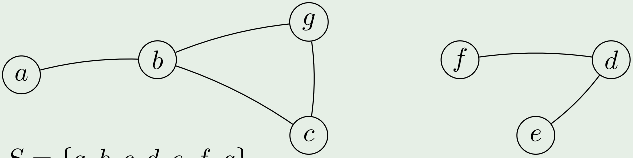
$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Exemple



$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, g\}, \{c, g\}, \{f, d\}, \{e, d\}\}$

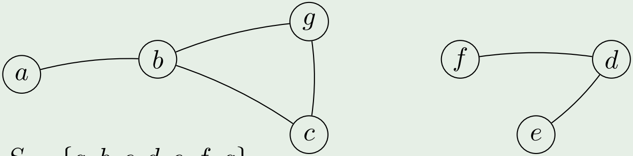
Exemple



$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, g\}, \{c, g\}, \{f, d\}, \{e, d\}\}$

Dessiner le graphe G' définit par $S' = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A' = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$

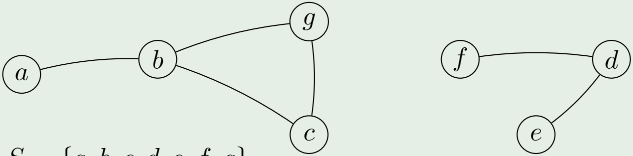
Exemple



$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, g\}, \{c, g\}, \{f, d\}, \{e, d\}\}$

Dessiner le graphe G' définit par $S' = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A' = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$

Exemple



$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, g\}, \{c, g\}, \{f, d\}, \{e, d\}\}$

Dessiner le graphe G' définit par $S' = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A' = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$

⚠ L'emplacement des noeuds sur la représentation graphique n'a pas d'importance.

Vocabulaire

- La taille d'un graphe est son nombre de sommets.

Vocabulaire

- La taille d'un graphe est son nombre de sommets.
- Les voisins d'un sommet s est l'ensemble $\mathcal{V}(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.

Vocabulaire

- La taille d'un graphe est son nombre de sommets.
- Les voisins d'un sommet s est l'ensemble $\mathcal{V}(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré d'un sommet s noté $d(s)$ est son nombre de voisins $d(s) = |\mathcal{V}(s)|$.

Vocabulaire

- La taille d'un graphe est son nombre de sommets.
- Les voisins d'un sommet s est l'ensemble $\mathcal{V}(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré d'un sommet s noté $d(s)$ est son nombre de voisins $d(s) = |\mathcal{V}(s)|$.

Exemples

1. Dessiner un graphe de taille 5 dont tous les sommets sont de degrés 2.

Vocabulaire

- La taille d'un graphe est son nombre de sommets.
- Les voisins d'un sommet s est l'ensemble $\mathcal{V}(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré d'un sommet s noté $d(s)$ est son nombre de voisins $d(s) = |\mathcal{V}(s)|$.

Exemples

1. Dessiner un graphe de taille 5 dont tous les sommets sont de degrés 2.
2. Donner un majorant du nombre d'arêtes d'un graphe de taille n.

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe $G = (S, A)$ avec $|S| = n$ par une matrice M appelée matrice d'adjacence, définie par : $M_{ij} = 1$ si $\{i, j\} \in A$ et $M_{ij} = 0$ sinon.

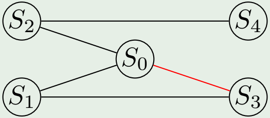
Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe $G = (S, A)$ avec $|S| = n$ par une matrice M appelée matrice d'adjacence, définie par : $M_{ij} = 1$ si $\{i, j\} \in A$ et $M_{ij} = 0$ sinon. M est une matrice symétrique.

Représentation par matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe $G = (S, A)$ avec $|S| = n$ par une matrice M appelée matrice d'adjacence, définie par : $M_{ij} = 1$ si $\{i, j\} \in A$ et $M_{ij} = 0$ sinon. M est une matrice symétrique.

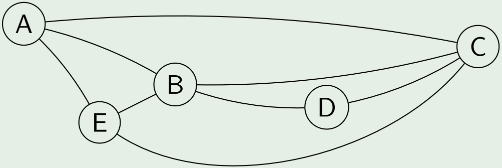
Exemple : Un graphe et sa matrice d'adjacence



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & {\color{red}1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ {\color{red}1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

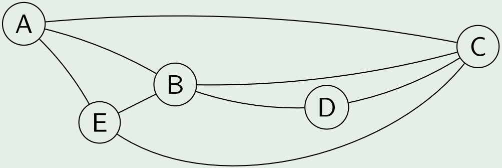
Exemple

1. En supposant les sommets numérotés dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice d'adjacence du graphe suivant :



Exemple

1. En supposant les sommets numérotés dans l'ordre alphabétique, écrire la matrice d'adjacence du graphe suivant :



2. Dessiner le graphe ayant la matrice d'adjacence suivante (on appellera les sommets $S_0, S_1, \dots$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Implémentation en C : tableau statique

Implémentation en C : tableau statique

```c
#define NMAX 100 // nombre maximal de sommets
typedef bool graphe[NMAX][NMAX]; // La matrice d'adjacence
```

Implémentation en C : tableau statique

```c
#define NMAX 100 // nombre maximal de sommets
typedef bool graphe[NMAX][NMAX]; // La matrice d'adjacence
```

On évite ainsi l'utilisation de pointeurs et on manipule directement la matrice d'adjacence. On doit passer la taille effective du graphe aux fonctions lorsque nécessaire.

Implémentation en C : tableau statique

```
#define NMAX 100 // nombre maximal de sommets
typedef bool graphe[NMAX][NMAX]; // La matrice d'adjacence
```

On évite ainsi l'utilisation de pointeurs et on manipule directement la matrice d'adjacence. On doit passer la taille effective du graphe aux fonctions lorsque nécessaire.

Exemple

Ecrire la fonction de signature `void cree_arete(graphe g, int i, int j)` qui crée l'arête reliant les sommets `i` et `j`.

Implémentation en C : tableau statique

```c
#define NMAX 100 // nombre maximal de sommets
typedef bool graphe[NMAX][NMAX]; // La matrice d'adjacence
```

On évite ainsi l'utilisation de pointeurs et on manipule directement la matrice d'adjacence. On doit passer la taille effective du graphe aux fonctions lorsque nécessaire.

Exemple

Ecrire la fonction de signature `void cree_arete(graphe g, int i, int j)` qui crée l'arête reliant les sommets `i` et `j`.

```c
void cree_arete(graphe g, int i, int j){
    g[i][j] = true;
    g[j][i] = true;}
```

Implémentation en C : type structuré

On utilise un `struct` contenant un champ `int` (le nombre de sommets), et un pointeur vers la matrice d'adjacence linéarisée.

Implémentation en C : type structuré

On utilise un `struct` contenant un champ `int` (le nombre de sommets), et un pointeur vers la matrice d'adjacence linéarisée. L'indice de M_{ij} dans la matrice linéarisée est alors $i \times |S| + j$.

Implémentation en C : type structuré

On utilise un `struct` contenant un champ `int` (le nombre de sommets), et un pointeur vers la matrice d'adjacence linéarisée. L'indice de M_{ij} dans la matrice linéarisée est alors $i \times |S| + j$.

```
struct graphe
{
    int taille; // |S|
    bool * madj; // matrice linéarisée (à allouer)
};
typedef struct graphe graphe;
```

Implémentation en C : type structuré

On utilise un `struct` contenant un champ `int` (le nombre de sommets), et un pointeur vers la matrice d'adjacence linéarisée. L'indice de M_{ij} dans la matrice linéarisée est alors $i \times |S| + j$.

```c
struct graphe
{
    int taille; // |S|
    bool * madj; // matrice linéarisée (à allouer)
};
typedef struct graphe graphe;
```

Cette solution est plus efficace en terme de d'utilisation mémoire mais impose l'utilisation de pointeurs.

Implémentation en OCaml

- On crée le type graphe sous forme d'un type structuré

Implémentation en OCaml

- On crée le type graphe sous forme d'un type structuré

```
type graphe = {
  taille : int;
  madj : bool array array;};;
```

Implémentation en OCaml

- On crée le type graphe sous forme d'un type structuré

```ocaml
type graphe = {
  taille : int;
  madj : bool array array;};;
```

- La création d'un graphe peut alors se faire à l'aide d'une fonction d'initialisation

Implémentation en OCaml

- On crée le type graphe sous forme d'un type structuré

```
type graphe = {
  taille : int;
  madj : bool array array;};;
```

- La création d'un graphe peut alors se faire à l'aide d'une fonction d'initialisation

```
let cree_graph n =
  {taille = n; madj = Array.make_matrix n n false};;
```

Implémentation en OCaml

- On crée le type graphe sous forme d'un type structuré

```ocaml
type graphe = {
  taille : int;
  madj : bool array array;};;
```

- La création d'un graphe peut alors se faire à l'aide d'une fonction d'initialisation

```ocaml
let cree_graph n =
  {taille = n; madj = Array.make_matrix n n false};;
```

⚠ On rappelle qu'on initialise avec `Array.make_matrix` afin d'éviter le problème des références multiples à une même ligne.

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.
Un graphe $G = (S, A)$ est alors un tableau de taille $|S|$ où la case d'indice i contient la liste des voisins de i.

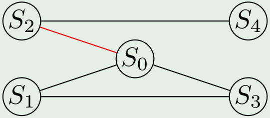
Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.
Un graphe $G = (S, A)$ est alors un tableau de taille $|S|$ où la case d'indice i contient la liste des voisins de i.

Représentation par listes d'adjacence

On peut représenter un graphe à l'aide de listes d'adjacences, c'est à dire en mémorisant pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins.
Un graphe $G = (S, A)$ est alors un tableau de taille $|S|$ où la case d'indice i contient la liste des voisins de i.

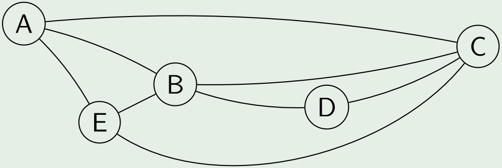
Exemple : Un graphe et ses listes d'adjacence



0	$\rightarrow$	[1; 2; 3]
1	$\rightarrow$	[0; 3]
2	$\rightarrow$	[0; 4]
3	$\rightarrow$	[0; 1]
4	$\rightarrow$	[2]

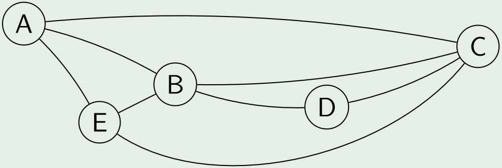
Exemple

1. Ecrire les listes d'adjacences du graphe suivante :



Exemple

1. Ecrire les listes d'adjacences du graphe suivante :



2. Dessiner le graphe représenté par le tableau T tel que :

```
T[0] = [2]
T[1] = [3; 4]
T[2] = [0; 1]
T[3] = [1; 2]
T[4] = [1; 2]
```

Implémentation en C : tableau statique d'entiers

Implémentation en C : tableau statique d'entiers

```c
#define NMAX  100 // nombre maximal de sommets
// graphe[i][0] contient le nombre de sommets adjacents
// graphe[i][1..] est la liste d'adjacence du sommet i
typedef int graphe[NMAX][NMAX];
```

Implémentation en C : tableau statique d'entiers

```c
#define NMAX  100 // nombre maximal de sommets
// graphe[i][0] contient le nombre de sommets adjacents
// graphe[i][1..] est la liste d'adjacence du sommet i
typedef int graphe[NMAX][NMAX];
```

On évite de cette façon l'utilisation de pointeurs mais au prix d'un manque d'efficacité en terme d'occupation mémoire.

Implémentation en C : tableau statique d'entiers

```c
#define NMAX  100 // nombre maximal de sommets
// graphe[i][0] contient le nombre de sommets adjacents
// graphe[i][1..] est la liste d'adjacence du sommet i
typedef int graphe[NMAX][NMAX];
```

On évite de cette façon l'utilisation de pointeurs mais au prix d'un manque d'efficacité en terme d'occupation mémoire.

Exemple

Ecrire la fonction `void cree_arete(graphe g, int i, int j)`

Implémentation en C : tableau statique d'entiers

```c
#define NMAX  100 // nombre maximal de sommets
// graphe[i][0] contient le nombre de sommets adjacents
// graphe[i][1..] est la liste d'adjacence du sommet i
typedef int graphe[NMAX][NMAX];
```

On évite de cette façon l'utilisation de pointeurs mais au prix d'un manque d'efficacité en terme d'occupation mémoire.

Exemple

Ecrire la fonction `void cree_arete(graphe g, int i, int j)`

```c
void cree_arete(graphe g, int i, int j){
    g[i][0]++;
    g[j][0]++;
    g[i][g[i][0]] = j;
    g[j][g[j][0]] = i;}
```

Implémentation en C : tableau de listes chainées

On utilise un tableau de liste chainées afin d'optimiser l'espace mémoire occupé :

Implémentation en C : tableau de listes chainées

On utilise un tableau de liste chainées afin d'optimiser l'espace mémoire occupé :

```
struct graphe{
    int taille;
    liste* ladj;};
typedef struct graphe graphe;
```

Implémentation en C : tableau de listes chainées

On utilise un tableau de liste chainées afin d'optimiser l'espace mémoire occupé :

```
struct graphe{
    int taille;
    liste* ladj;};
typedef struct graphe graphe;
```

On rappelle la structure de liste chainée :

```
struct maillon{
    int valeur;
    struct maillon* suivant;};
typedef struct maillon maillon;
typedef maillon* liste;
```

Implémentation en OCaml

On utilise le type `list` de OCaml

Implémentation en OCaml

On utilise le type `list` de OCaml

```
type graphe = {
taille : int;
ladj : int list array};;
```

Implémentation en OCaml

On utilise le type list de OCaml

```
type graphe = {
taille : int;
ladj : int list array};;
```

On peut alors écrire une fonction de création d'un graphe de taille n :

Implémentation en OCaml

On utilise le type list de OCaml

```
type graphe = {
taille : int;
ladj : int list array};;
```

On peut alors écrire une fonction de création d'un graphe de taille n :

```
let cree_graphe n =
  {taille=n; ladj = Array.make n []}
```

Implémentation en OCaml

On utilise le type list de OCaml

```
type graphe = {
taille : int;
ladj : int list array};;
```

On peut alors écrire une fonction de création d'un graphe de taille n :

```
let cree_graphe n =
  {taille=n; ladj = Array.make n []}
```

Exemple

Ecrire la fonction cree_arete graphe -> int ->int -> unit

Implémentation en OCaml

On utilise le type list de OCaml

```
type graphe = {
taille : int;
ladj : int list array};;
```

On peut alors écrire une fonction de création d'un graphe de taille n :

```
let cree_graphe n =
  {taille=n; ladj = Array.make n []}
```

Exemple

Ecrire la fonction cree_arete graphe -> int ->int -> unit

```
let cree_arete g i j =
  g.ladj.(i) <- j::g.ladj.(i);
  g.ladj.(j) <- i::g.ladj.(j);;
```

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Un choix d'implémentation doit donc tenir compte :

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Un choix d'implémentation doit donc tenir compte :

- de la taille du graphe

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Un choix d'implémentation doit donc tenir compte :

- de la taille du graphe
- de la « *densité* » du graphe

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Un choix d'implémentation doit donc tenir compte :

- de la taille du graphe
- de la « *densité* » du graphe
- des algorithmes utilisés

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Un choix d'implémentation doit donc tenir compte :

- de la taille du graphe
- de la « *densité* » du graphe
- des algorithmes utilisés

⚠ Les complexités spatiales et temporelles des algorithmes dépendent de la représentation choisie !

Comparatif

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Occupation mémoire	$O(\|S\|^2)$	$O(\|S\| + \|A\|)$
Modification d'arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Test d'existence d'une arête	$O(1)$	$O(\|S\|)$
Enumération des voisins	$O(\|S\|)$	$O(1)$

Un choix d'implémentation doit donc tenir compte :

- de la taille du graphe
- de la « *densité* » du graphe
- des algorithmes utilisés

⚠ Les complexités spatiales et temporelles des algorithmes dépendent de la représentation choisie !

Par exemple, le test d'existence d'une arête est une opération élémentaire dans le cas représentation par matrice d'adjacence et est de complexité linéaire (en $|S|$), dans le cas des listes d'adjacences.

Relation non symétrique

Dans de nombreuses situations (voie à sens unique, lien d'un site web à un autre, relation « *follower* » dans un réseau social, ...), on doit modéliser sur un en ensemble S, des relations non symétriques, ce qui conduit à la notion de graphe orienté.

Relation non symétrique

Dans de nombreuses situations (voie à sens unique, lien d'un site web à un autre, relation « *follower* » dans un réseau social, ...), on doit modéliser sur un en ensemble S, des relations non symétriques, ce qui conduit à la notion de graphe orienté.

Définition

Un graphe orienté est la donnée :

Relation non symétrique

Dans de nombreuses situations (voie à sens unique, lien d'un site web à un autre, relation « *follower* » dans un réseau social, ...), on doit modéliser sur un en ensemble S, des relations non symétriques, ce qui conduit à la notion de graphe orienté.

Définition

Un graphe orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini.

Relation non symétrique

Dans de nombreuses situations (voie à sens unique, lien d'un site web à un autre, relation « *follower* » dans un réseau social, ...), on doit modéliser sur un en ensemble S, des relations non symétriques, ce qui conduit à la notion de graphe orienté.

Définition

Un graphe orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini.
- D'un ensemble de **couples** de sommets $A \subset S \times S$ appelés arcs

Relation non symétrique

Dans de nombreuses situations (voie à sens unique, lien d'un site web à un autre, relation « *follower* » dans un réseau social, ...), on doit modéliser sur un en ensemble S, des relations non symétriques, ce qui conduit à la notion de graphe orienté.

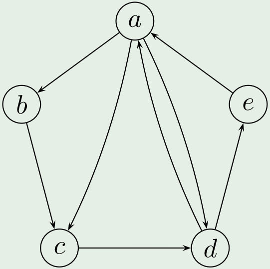
Définition

Un graphe orienté est la donnée :

- D'un ensemble de sommets (ou noeuds) S fini.
- D'un ensemble de **couples** de sommets $A \subset S \times S$ appelés arcs

L'ordre est important, $(x, y) \neq (y, x)$, on notera un arc $x \to y$ ou xy.

Exemple



- $S = \{a, b, c, d, e\}$
- $A = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a), (a, c), (a, d), (d, a)\}$

Vocabulaire

Vocabulaire

- Les successeurs (ou voisins sortants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_+(s) = \{t \in S$ tel que $s - t\}$.

Vocabulaire

- Les successeurs (ou voisins sortants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_+(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est son nombre de sucesseurs $d_+(s) = |\mathcal{V}_+(s)|$.

Vocabulaire

- Les successeurs (ou voisins sortants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_+(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est son nombre de sucesseurs $d_+(s) = |\mathcal{V}_+(s)|$.
- Les prédecesseurs (ou voisins entrants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_-(s) = \{t \in S \text{ tel que } t - s\}$.

Vocabulaire

- Les successeurs (ou voisins sortants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_+(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est son nombre de sucesseurs $d_+(s) = |\mathcal{V}_+(s)|$.
- Les prédecesseurs (ou voisins entrants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_-(s) = \{t \in S \text{ tel que } t - s\}$.
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_-(s)$ est son nombre de prédecesseurs $d_-(s) = |\mathcal{V}_-(s)|$.

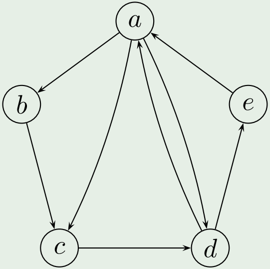
Vocabulaire

- Les successeurs (ou voisins sortants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_+(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est son nombre de sucesseurs $d_+(s) = |\mathcal{V}_+(s)|$.
- Les prédecesseurs (ou voisins entrants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_-(s) = \{t \in S \text{ tel que } t - s\}$.
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_-(s)$ est son nombre de prédecesseurs $d_-(s) = |\mathcal{V}_-(s)|$.
- Les voisins d'un sommet s sont les éléments de $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}_+ \cup \mathcal{V}_-$

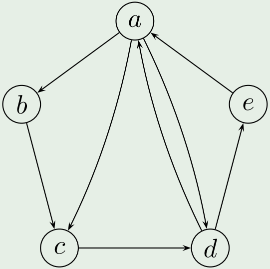
Vocabulaire

- Les successeurs (ou voisins sortants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_+(s) = \{t \in S \text{ tel que } s - t\}$.
- Le degré sortant d'un sommet s noté $d_+(s)$ est son nombre de sucesseurs $d_+(s) = |\mathcal{V}_+(s)|$.
- Les prédecesseurs (ou voisins entrants) d'un sommet $s \in S$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{V}_-(s) = \{t \in S \text{ tel que } t - s\}$.
- Le degré entrant d'un sommet s noté $d_-(s)$ est son nombre de prédecesseurs $d_-(s) = |\mathcal{V}_-(s)|$.
- Les voisins d'un sommet s sont les éléments de $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}_+ \cup \mathcal{V}_-$
- Le degré d'un sommet s noté $d(s)$ est la somme de ses degrés entrants et sortants $d(s) = d_-(s) + d_+(s)$

Exemple

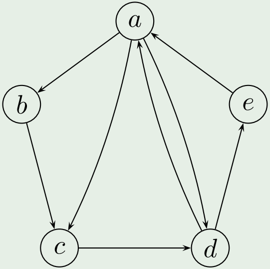


Exemple



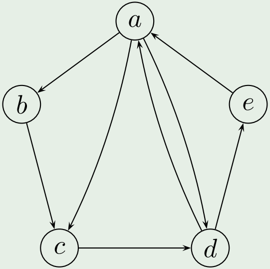
- $V_+(a) = ?$

Exemple



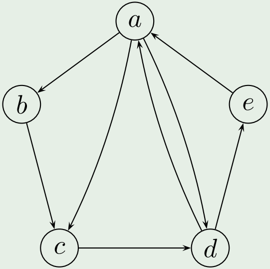
- $V_+(a) = ?$
- $V_+(d) = ?$

Exemple



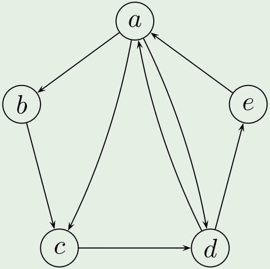
- $V_+(a) = ?$
- $V_+(d) = ?$
- $d_+(e) = ?$

Exemple



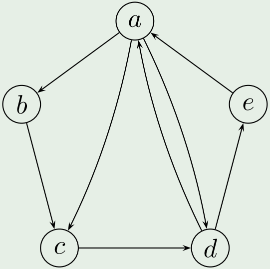
- $V_+(a) = ?$
- $V_+(d) = ?$
- $d_+(e) = ?$
- $d_-(a) = ?$

Exemple



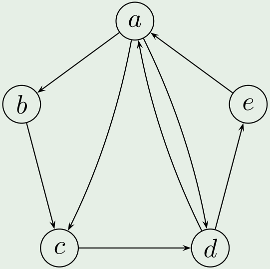
- $V_+(a) = \{b, c, d\}$
- $V_+(d) = ?$
- $d_+(e) = ?$
- $d_-(a) = ?$

Exemple



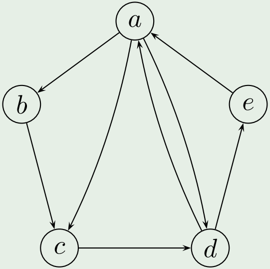
- $V_+(a) = \{b, c, d\}$
- $V_+(d) = \{a, c\}$
- $d_+(e) = ?$
- $d_-(a) = ?$

Exemple



- $V_+(a) = \{b, c, d\}$
- $V_+(d) = \{a, c\}$
- $d_+(e) = 1$
- $d_-(a) = ?$

Exemple



- $V_+(a) = \{b, c, d\}$
- $V_+(d) = \{a, c\}$
- $d_+(e) = 1$
- $d_-(a) = 2$

Représentation informatique

- La représentation par matrice d'adjacence reste valide mais la matrice n'est plus nécessairement symétrique.

Représentation informatique

- La représentation par matrice d'adjacence reste valide mais la matrice n'est plus nécessairement symétrique.
- Dans la représentation par liste d'adjacence, les listes contiennent les voisins sortants.

Représentation informatique

- La représentation par matrice d'adjacence reste valide mais la matrice n'est plus nécessairement symétrique.
- Dans la représentation par liste d'adjacence, les listes contiennent les voisins sortants.
- Les remarques sur le choix d'une représentation restent valides.

Représentation informatique

- La représentation par matrice d'adjacence reste valide mais la matrice n'est plus nécessairement symétrique.
- Dans la représentation par liste d'adjacence, les listes contiennent les voisins sortants.
- Les remarques sur le choix d'une représentation restent valides.
  ⚠ Attention cependant, dans le cas des listes d'adjacence on a un accès en $O(1)$ à la liste des voisins **sortants**, lister les voisins entrants s'avère plus compliqué (voir TP).

Graphes pondérés

Dans de nombreuses situations (distance entre deux villes, capacité d'une liaison dans un réseau, ...), on souhaite pouvoir ajouter des informations aux arêtes d'un graphe, ce qui conduit à la notion de graphe pondéré (orienté ou non).

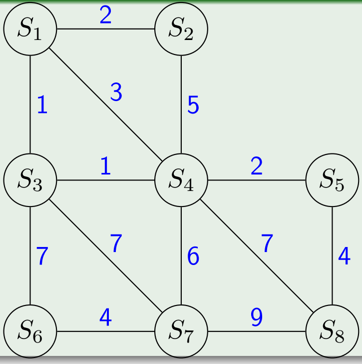
Graphes pondérés

Dans de nombreuses situations (distance entre deux villes, capacité d'une liaison dans un réseau, ...), on souhaite pouvoir ajouter des informations aux arêtes d'un graphe, ce qui conduit à la notion de graphe pondéré (orienté ou non).

Définition

Etant donné un graphe $G = (S, A)$n une fonction de pondération de G est un fonction $\omega : A \mapsto \mathbb{R}$. Le poids de l'arête (ou arc) a est le réel $w(a)$ et on dit que (G, S, ω) est un graphe pondéré

Exemple



Représentation informatique

En pratique, on se limitera le plus souvent à des poids entiers et positifs.

- Dans le cas d'une représentation par matrice d'adjacence, on posera :

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \omega(ij) & \text{si } i \neq j \text{ et } ij \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Représentation informatique

En pratique, on se limitera le plus souvent à des poids entiers et positifs.

- Dans le cas d'une représentation par matrice d'adjacence, on posera :
$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \omega(ij) & \text{si } i \neq j \text{ et } ij \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
- Dans le cas d'une représentation par liste d'adjacence, on stocke dans la liste d'adjacence d'un sommet s, les couples $(t, \omega(st))$

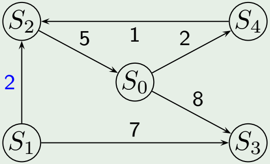
Représentation informatique

En pratique, on se limitera le plus souvent à des poids entiers et positifs.

- Dans le cas d'une représentation par matrice d'adjacence, on posera :
$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \omega(ij) & \text{si } i \neq j \text{ et } ij \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
- Dans le cas d'une représentation par liste d'adjacence, on stocke dans la liste d'adjacence d'un sommet s, les couples $(t, \omega(st))$

⚠ L'absence d'arc est indiqué par un 0 dans la matrice d'adjacence d'un graphe non pondéré et par un $+\infty$ dans celle d'un graphe pondéré.

Exemple : Un graphe pondéré et sa matrice d'adjacence



$$\begin{pmatrix} 0 & +\infty & +\infty & 8 & 2 \\ +\infty & 0 & 2 & 7 & +\infty \\ 5 & +\infty & 0 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 1 & +\infty & 0 \end{pmatrix}$$

Parcours d'un graphe

A la base des algorithmes sur les graphes, on trouve les parcours de graphe, c'est à dire l'exploration des sommets. A partir du sommet de départ, on peut :

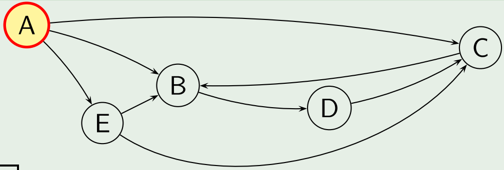
- explorer tous ses voisins immédiats, puis les voisins des voisins et ainsi de suite. Le graphe est donc exploré en « cercle concentrique »autour du sommet de départ ..., on parle alors de parcours en largeur ou breadth first search (*BFS*) en anglais.

Parcours d'un graphe

A la base des algorithmes sur les graphes, on trouve les parcours de graphe, c'est à dire l'exploration des sommets. A partir du sommet de départ, on peut :

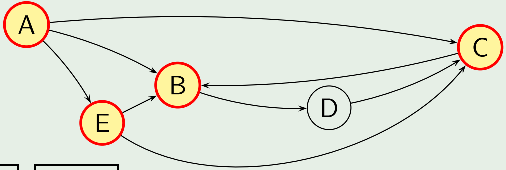
- explorer tous ses voisins immédiats, puis les voisins des voisins et ainsi de suite. Le graphe est donc exploré en « cercle concentrique »autour du sommet de départ . . ., on parle alors de parcours en largeur ou breadth first search (*BFS*) en anglais.
- explorer à chaque étape le premier voisin non encore exploré. Lorsque qu'on atteint un sommet dont tous les voisins ont déjà été exploré, on revient en arrière, on parle alors de parcours en profondeur ou depth first search (*DFS*) en anglais.

Exemple de parcours en largeur



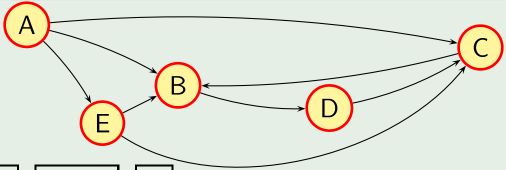
Sommets explorés : $\boxed{A}$

Exemple de parcours en largeur



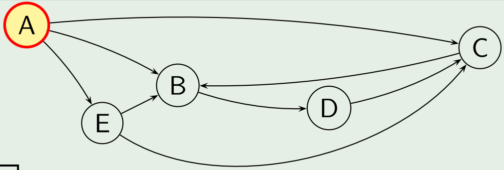
Sommets explorés : $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B,C,E}}$

Exemple de parcours en largeur



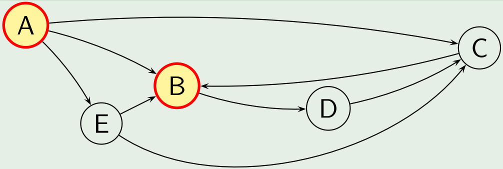
Sommets explorés : $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B,C,E}}$, $\boxed{\text{D}}$.

Exemple de parcours en profondeur



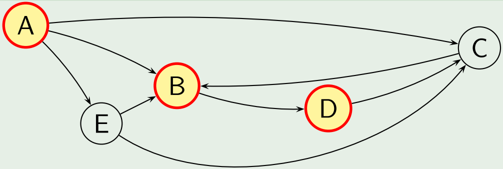
Sommets explorés : $\boxed{\text{A}}$

Exemple de parcours en profondeur



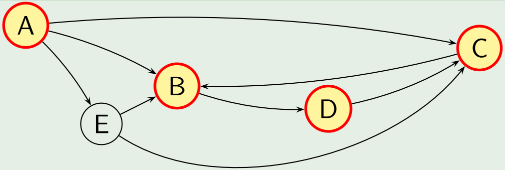
Sommets explorés : A, B

Exemple de parcours en profondeur



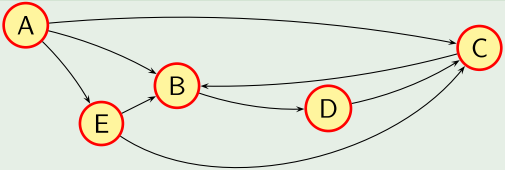
Sommets explorés : A, B, D

Exemple de parcours en profondeur



Sommets explorés : A, B, D, C

Exemple de parcours en profondeur



Sommets explorés : A, B, D, C, E

File et parcours en largeur

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins . . .Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (*FIFO*)), c'est donc une file.

File et parcours en largeur

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins . . .Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (*FIFO*)), c'est donc une file.

File et parcours en largeur

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (*FIFO*)), c'est donc une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en $O(1)$.

File et parcours en largeur

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins . . .Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (*FIFO*)), c'est donc une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en $O(1)$.
- Pour l'implémentation on pourra utiliser

File et parcours en largeur

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (*FIFO*)), c'est donc une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en $O(1)$.
- Pour l'implémentation on pourra utiliser
  - Le module `Queue` de OCaml

File et parcours en largeur

- Pour un parcours en largeur, on doit stocker dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. C'est à dire les voisins du sommet de départ, puis les voisins des voisins ...Ces sommets doivent être retirés pour exploration, dans leur ordre d'insertion, la structure de données utilisée est donc du type premier entré, premier sorti (first in first out (*FIFO*)), c'est donc une file.
- Pour l'implémentation on doit pouvoir enfiler (ajouter un sommet dans la file) et défiler (retirer une sommet) de façon efficace donc en $O(1)$.
- Pour l'implémentation on pourra utiliser
  - Le module `Queue` de OCaml
  - Une structure de liste chaînée avec des opérations enfiler et défiler en $O(1)$

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocke aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est du type dernier entré, premier sorti (last in first out (*LIFO*)), c'est à dire une pile.

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocke aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est du type dernier entré, premier sorti (last in first out (*LIFO*)), c'est à dire une pile.

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocke aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est du type dernier entré, premier sorti (last in first out (*LIFO*)), c'est à dire une pile.
- Pour l'implémentation, on peut :

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocke aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est du type dernier entré, premier sorti (last in first out (*LIFO*)), c'est à dire une pile.
- Pour l'implémentation, on peut :
  - se contenter d'utiliser la récursivité de façon à ce que la pile des sommets en attente d'être exploré soit gérée de façon automatique via la pile des appels récursifs.

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocke aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est du type dernier entré, premier sorti (last in first out (*LIFO*)), c'est à dire une pile.
- Pour l'implémentation, on peut :
  - se contenter d'utiliser la récursivité de façon à ce que la pile des sommets en attente d'être exploré soit gérée de façon automatique via la pile des appels récursifs.
  - Utiliser le module `Stack` de OCaml (ou une simple liste).

File et parcours en profondeur

- Pour un parcours en profondeur, on stocke aussi dans une structure de données les sommets en attente d'être explorés. Mais cette fois, la structure de données utilisée est du type dernier entré, premier sorti (last in first out (*LIFO*)), c'est à dire une pile.
- Pour l'implémentation, on peut :
  - se contenter d'utiliser la récursivité de façon à ce que la pile des sommets en attente d'être exploré soit gérée de façon automatique via la pile des appels récursifs.
  - Utiliser le module `Stack` de OCaml (ou une simple liste).
  - Utiliser une liste chainée en C afin d'implémenter une pile.