EXERCICE 3 (4 points)

Cet exercice porte sur les arbres binaires de recherche et la programmation orientée objet.

On rappelle qu'un arbre binaire est composé de nœuds, chacun des nœuds possédant éventuellement un sous-arbre gauche et éventuellement un sous-arbre droit. Un nœud sans sous-arbre est appelé feuille. La taille d'un arbre est le nombre de nœuds qu'il contient ; sa hauteur est le nombre de nœuds du plus long chemin qui joint le nœud racine à l'une des feuilles. Ainsi la hauteur d'un arbre réduit à un nœud, c'est-à-dire la racine, est 1.

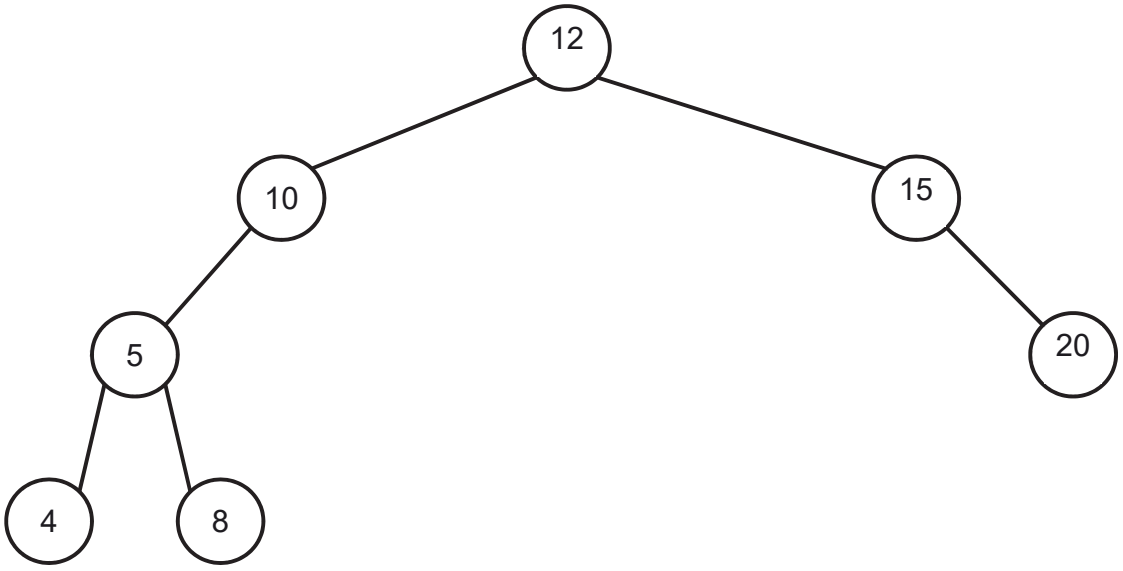
Dans un arbre binaire de recherche, chaque nœud contient une clé, ici un nombre entier, qui est :

- strictement supérieure à toutes les clés des nœuds du sous-arbre gauche ;
- strictement inférieure à toutes les clés des nœuds du sous-arbre droit.

Ainsi les clés de cet arbre sont toutes distinctes.

Un arbre binaire de recherche est dit « bien construit » s'il n'existe pas d'arbre de hauteur inférieure qui pourrait contenir tous ses nœuds.

On considère l'arbre binaire de recherche ci-dessous.



1. **a**. Quelle est la taille de l'arbre ci-dessus ?
   b. Quelle est la hauteur de l'arbre ci-dessus ?

2. Cet arbre binaire de recherche n'est pas « bien construit ». Proposer un arbre binaire de recherche contenant les mêmes clés et dont la hauteur est plus petite que celle de l'arbre initial.

3. Les classes `Noeud` et `Arbre` ci-dessous permettent de mettre en œuvre en Python la structure d'arbre binaire de recherche. La méthode `insere` permet d'insérer récursivement une nouvelle clé.

```
class Noeud :

    def __init__(self, cle):
        self.cle = cle
        self.gauche = None
        self.droit = None

    def insere(self, cle):
        if cle < self.cle :
            if self.gauche == None :
                self.gauche = Noeud(cle)
            else :
                self.gauche.insere(cle)
        elif cle > self.cle :
            if self.droit == None :
                self.droit = Noeud(cle)
            else :
                self.droit.insere(cle)

class Arbre :

    def __init__(self, cle):
        self.racine = Noeud(cle)

    def insere(self, cle):
        self.racine.insere(cle)
```

Donner la représentation de l'arbre codé par les instructions ci-dessous.

```
a = Arbre(10)
a.insere(20)
a.insere(15)
a.insere(12)
a.insere(8)
a.insere(4)
a.insere(5)
```

4. Pour calculer la hauteur d'un arbre non vide, on a écrit la méthode ci-dessous dans la classe `Noeud`.

```
def hauteur(self):
    if self.gauche == None and self.droit == None:
        return 1
    if self.gauche == None:
        return 1+self.droit.hauteur()
    elif self.droit == None:
        return 1+self.gauche.hauteur()
    else:
        hg = self.gauche.hauteur()
        hd = self.droit.hauteur()
        if hg > hd:
            return hg+1
        else:
            return hd+1
```

Écrire la méthode `hauteur` de la classe `Arbre` qui renvoie la hauteur de l'arbre.

5. Écrire les méthodes `taille` des classes `Noeud` et `Arbre` permettant de calculer la taille d'un arbre.

6. On souhaite écrire une méthode `bien_construit` de la classe `Arbre` qui renvoie la valeur `True` si l'arbre est « bien construit » et `False` sinon.

On rappelle que la taille maximale d'un arbre binaire de recherche de hauteur h est $2^h - 1$.

a. Quelle est la taille minimale, notée t_min, d'un arbre binaire de recherche « bien construit » de hauteur h ?

b. Écrire la méthode `bien_construit` demandée.