



# Formation à la Modélisation et à l'Identification du Comportement Mécanique des Matériaux

## OBJECTIF

Il s'agit ici de mécanique appliquée aux matériaux : métaux et alliages, polymères, céramiques et composites. On s'intéressera à l'étude des équilibres et des mouvements à l'aide des relations entre les contraintes  $\sigma_{ij}$  et les déformations  $\varepsilon_{ij}$  du volume élémentaire représentatif du matériau (VER) à température constante. Dans un premier temps, on modélisera le comportement indépendant du temps : élasticité et plasticité. On introduira ensuite les effets du temps : la viscoplasticité.

On étudiera le comportement mécanique d'un alliage métallique (Zirconium) à haute température (350°C) et on confrontera différents modèles à des résultats expérimentaux. Les modèles considérés ici nécessitent la résolution de systèmes d'équations différentielles et des calculs matriciels dans le cas multiaxial. Pour simplifier la programmation, le logiciel MIC2M sera utilisé (développé sous Matlab). C'est un environnement agréable pour faire du calcul de comportement non linéaire car on dispose sous la main des méthodes usuelles de cette discipline, d'une batterie d'instructions graphiques, ainsi que d'un langage de programmation simple et puissant qui intègre les notations matricielles.

## SOMMAIRE

<b><u>1</u></b>	<b><u>INTRODUCTION</u></b>	<b><u>1</u></b>
<b><u>2</u></b>	<b><u>ELASTICITE</u></b>	<b><u>2</u></b>
<b><u>3</u></b>	<b><u>PLASTICITE</u></b>	<b><u>3</u></b>
3.1	SURFACE DE CHARGE	3
3.2	CRITERE DE CHARGE-DECHARGE	4
3.3	NORMALITE DE L'ECOULEMENT	4
3.4	LOIS D'ECROUISSAGE	5
<b><u>4</u></b>	<b><u>VISCOPLASTICITE</u></b>	<b><u>7</u></b>
4.1	ECROUISSAGE CINEMATIQUE	7
4.2	RESTAURATION STATIQUE	9
<b><u>5</u></b>	<b><u>COMPORTEMENT CYCLIQUE</u></b>	<b><u>9</u></b>

## 1 Introduction

L'hypothèse de partition des déformations permet de séparer les différents phénomènes physiques et de simplifier l'écriture des lois de comportement. La déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , qui est une variable observable, est partitionnée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{in} \quad (1)$$

La déformation élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  est la déformation instantanément réversible résultant d'un chargement mécanique. La déformation inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{in}$  est la déformation non réversible instantanément.

L'approche choisie pour la modélisation est basée sur la thermodynamique des processus irréversibles. Ce type d'approche considère un matériau continu équivalent au matériau réel, et représente les phénomènes physiques microscopiques par des variables internes macroscopiques. On postule que l'état mécanique du matériau équivalent, à un instant  $t$ , est complètement défini par la connaissance d'un certain nombre de variables d'état à cet instant :

- les *variables observables* (déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et température  $T$ )
- les *variables internes*  $V_k$  (toutes les autres variables d'état qui seront nécessaires à la modélisation : écrouissage, endommagement, ...)

Avec l'hypothèse de partition des déformations, l'énergie libre spécifique  $\psi$  peut s'écrire :

$$\psi = \psi([\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}], V_k, T) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k, T) \quad (2)$$

La vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem permet dans un premier temps de définir les lois de l'élasticité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (\rho \text{ masse volumique}) \quad (3)$$

et par analogie les variables associées (Tableau 1).

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (4)$$

variables d'état		variables associées
observables	internes	
$\boldsymbol{\varepsilon}$		$\boldsymbol{\sigma}$
$T$		$s$
	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	$\boldsymbol{\sigma}$
	$\boldsymbol{\varepsilon}^{in}$	$-\boldsymbol{\sigma}$
	$V_k$	$A_k$

Tableau 1 : Récapitulatif des variables thermodynamiques

Les processus seront thermodynamiquement admissibles si la somme de la dissipation mécanique et de la dissipation thermique  $\Phi_2$  vérifie l'inégalité :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} - A_k \dot{V}_k + \Phi_2 \geq 0 \quad (5)$$

Dans le cadre de la thermodynamique des matériaux standards généralisés, en supposant le découplage entre les dissipations mécanique et thermique, on postule l'existence d'un pseudo-potential  $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k)$  pour les phénomènes dissipatifs, tel que :

$$\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + A_k \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \geq 0 \quad (6)$$

La connaissance de ce potentiel de dissipation fournit les lois d'évolution des variables internes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{V}_k = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \end{cases} \quad (7)$$

Tout le problème de la modélisation est d'identifier ce potentiel d'après les expériences, ou tout au moins les lois d'évolution des variables internes qui en découlent, c'est-à-dire les lois reliant les variables flux  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in}, \dot{V}_k)$  et les variables duales  $(\boldsymbol{\sigma}, A_k)$ .

Pour simplifier l'écriture et la programmation, la notation de Voigt sera souvent utilisée dans MIC2M :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}]^T &= [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6] = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}] \\ [\boldsymbol{\varepsilon}]^T &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}] \end{aligned} \quad (8)$$

l'indice  $^T$  désigne le transposé du vecteur considéré et  $1 \equiv x$ ,  $2 \equiv y$ ,  $3 \equiv z$ . Dans la suite, la traction simple sera effectuée suivant l'axe  $z$ .

## 2 Elasticité

La seule déformation inélastique considérée ici est la déformation réversible indépendante du temps :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (9)$$

On se limite à l'élasticité linéaire isotrope. On notera  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

- Ecrire les équations du modèle de comportement en uniaxial.
- Identifier par méthode directe (graphiquement) le module d'Young  $E$  d'après l'essai d'écrouissage en traction simple de la Figure 1.
- Confronter résultat de la simulation numérique et résultat de l'essai sur machine (voir tutorial 1).
- Ajuster le module par méthode inverse (voir tutorial 2).
- Ecrire les équations du modèle de comportement multiaxial.

- Identifier par méthode directe (graphiquement) le coefficient de Poisson  $\nu$  à l'aide de la Figure 2 et confronter la simulation et l'expérience.

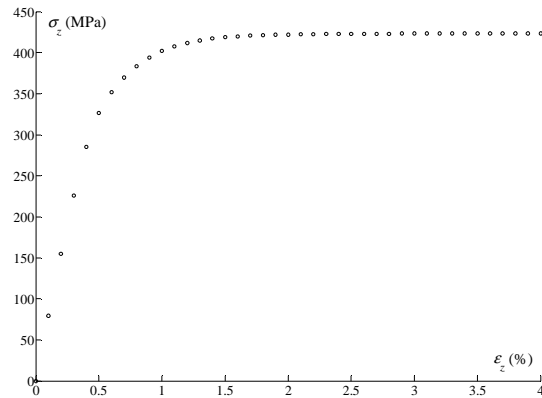


Figure 1 : Ecoulement en traction simple suivant z, vitesse  $\dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ \% / s}$ .

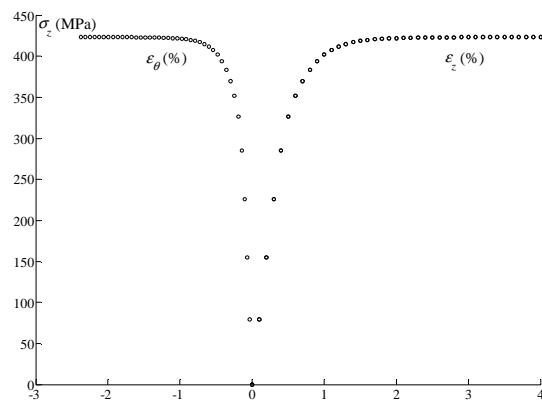


Figure 2 : Ecoulement en traction simple suivant z, vitesse  $\dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ \% / s}$ .

### 3 Plasticité

La seule déformation inélastique considérée ici est la déformation irréversible indépendante du temps :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{in} = \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (10)$$

#### 3.1 Surface de charge

Tout état de contrainte tridimensionnel est équivalent, au sens de von Mises, à l'état unidimensionnel :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{12}\sigma_{21})]} = \\ \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \\ \text{avec } s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\end{aligned}\quad (11)$$

Dans la suite, c'est cette équivalence qui sera utilisée. Elle suppose notamment l'isotropie du matériau, l'incompressibilité plastique et l'indépendance du comportement vis-à-vis de la contrainte hydrostatique.

On écrira la surface de charge  $f(\sigma_{ij}, A_k)$  sous la forme :

$$f = \bar{\sigma} - X - R - \sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - X_{ij})(s_{ij} - X_{ij})} - R - \sigma_Y \quad (12)$$

$\mathbf{X}$  est le tenseur d'écrouissage cinématique, associé à  $\alpha$  et  $\sigma_Y$  la limite élastique.  $R$  est une fonction d'écrouissage isotrope, variable associée à la déformation plastique cumulée  $\bar{\epsilon}$  (parfois notée  $p$ ), qui représente l'état de la matière (l'écrouissage) et qui vérifie :

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} \quad (13)$$

variables d'état		variables associées
observables	internes	
	$\epsilon^p$	$-\sigma$
	$\bar{\epsilon}$	$R$
	$\alpha$	$\mathbf{X}$

Tableau 2 : Variables thermodynamiques

### 3.2 Critère de charge-décharge

$$\begin{aligned}f < 0 &\rightarrow \text{comportement élastique} \\ f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 &\rightarrow \text{écoulement plastique} \\ f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 &\rightarrow \text{décharge élastique}\end{aligned}$$

On peut démontrer que l'écoulement plastique a lieu si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$f = 0 \text{ et } \frac{3}{2} \frac{s_{ij} - X_{ij}}{\sigma - X} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (14)$$

### 3.3 Normalité de l'écoulement

La plasticité indépendante du temps est un cas particulier du schéma plus général de la viscoplasticité. Pour identifier la loi d'évolution des variables internes, on utilise le formalisme de la plasticité associée. Selon ce formalisme, le pseudo-potentiel  $\varphi^*(\sigma_{ij}, A_k)$  joue le rôle de fonction indicatrice du convexe  $f(\sigma_{ij}, A_k) = 0$ . Les lois d'écoulement s'écrivent alors en fonction du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  que l'on détermine à partir de la condition de consistance  $\dot{f} = 0$  :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dot{V}_k = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_k} \end{cases} \quad (15)$$

- On peut démontrer :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{s_{ij} - X_{ij}}{\sigma - X} \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\lambda} \\ \dot{\alpha}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \end{cases} \quad (16)$$

### 3.4 Lois d'écrouissage

Le modèle étudié est un modèle à écrouissage isotrope et cinématique :

écrouissage isotrope :

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{\bar{\varepsilon}} \quad (17)$$

écrouissage cinématique non-linéaire :

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma X_{ij} \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (18)$$

- Ecrire les équations (17) et (18) dans le cas uniaxial.
- En faisant l'hypothèse d'un écrouissage purement isotrope (annuler l'écrouissage cinématique en posant  $C = \gamma = 0$ ), identifier les paramètres matériaux  $b$  et  $Q$  et confronter la simulation au résultat de l'essai d'écrouissage de la Figure 1.
- En faisant cette fois l'hypothèse d'un écrouissage purement cinématique (annuler l'écrouissage isotrope en posant  $b = Q = 0$ ), identifier les paramètres matériaux  $C$  et  $\gamma$  et confronter votre simulation au résultat de l'essai d'écrouissage de la Figure 1.
- Comparer sur la même figure l'expérience en traction non monotone (Figure 3) et les prédictions des 2 modèles d'écrouissage : isotrope et cinématique. Quel modèle est le plus réaliste ?

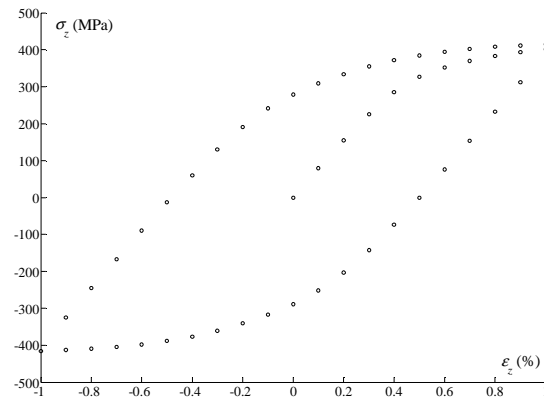


Figure 3 : Ecouissage en traction non monotone à  $|\dot{\epsilon}_3| = 2 \cdot 10^{-4} \text{ \% / s}$

- La Figure 4 présente des résultats d'essais d'écrouissage en traction simple effectués à différentes vitesses. Comparer avec les simulations effectuées avec le modèle le plus réaliste identifié à la question précédente.

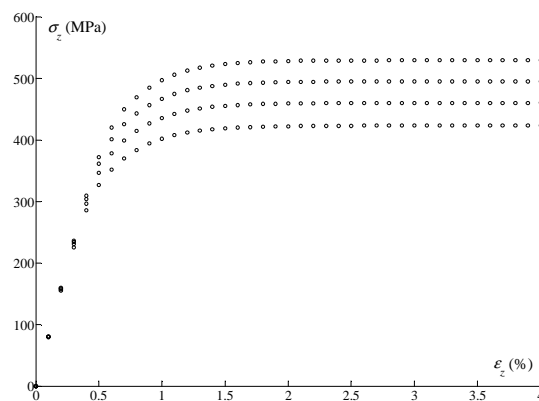


Figure 4 : Ecouissage en traction simple à différentes vitesses :  $\dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ \% / s}$ ,  
 $\dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ \% / s}$ ,  $\dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ \% / s}$  et  $\dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-1} \text{ \% / s}$ .

- En utilisant le même modèle que précédemment, comparer la simulation et l'expérience pour des chargements de fluage en traction à différentes contraintes (Figure 5 et Figure 6).
- Conclure



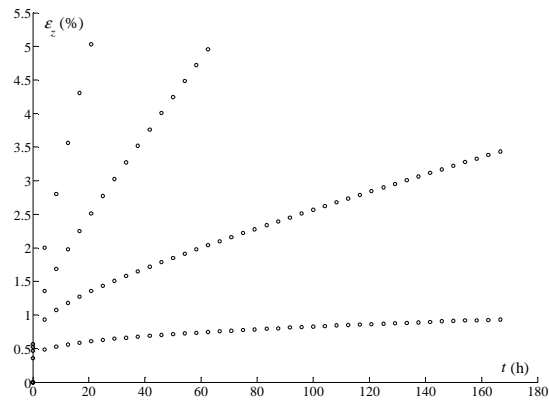


Figure 5 : Fluage en traction simple pour différentes contraintes  $\sigma_3$  (275, 350, 380, et 400 MPa)

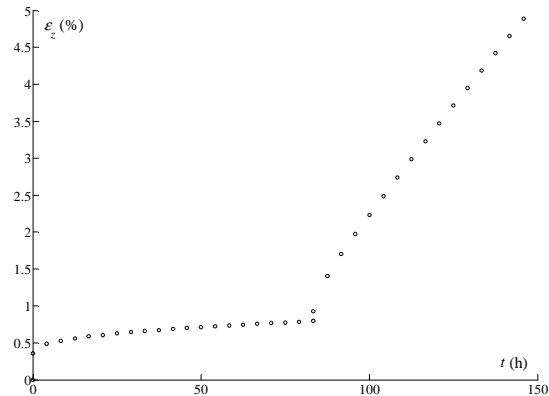


Figure 6 : Fluage en traction simple à 2 niveaux (275 et 380 MPa)

## 4 Viscoplasticité

La déformation inélastique considérée est ici la déformation irréversible dépendante du temps :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{in} = \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (19)$$

### 4.1 Ecoulement cinématique

variables d'état		variables associées
observables	internes	
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{vp}$	$-\sigma_{ij}$
	$\alpha_{ij}$	$X_{ij}$

Tableau 3 : Variables thermodynamiques

fonction de charge :

$$f = \overline{\sigma - X} - \sigma_y \quad (20)$$

normalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij} - X_{ij}}{\overline{\sigma - X}} \dot{\varepsilon} \quad (21)$$

écrouissage cinématique non-linéaire :

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma X_{ij} \dot{\varepsilon} \quad (C \text{ et } \gamma \text{ paramètres matériau}) \quad (22)$$

Que l'on peut écrire également :

$$\dot{X}_{ij} = p \left\{ \frac{2}{3} Y_0 \dot{\varepsilon}_{ij}^p - X_{ij} \dot{\varepsilon} \right\} \quad (p \text{ et } Y_0 \text{ paramètres matériau}) \quad (23)$$

loi d'état :

$$\dot{\varepsilon} = \left( \frac{\langle f \rangle}{K} \right)^n \quad (24)$$

Une identification inverse assistée par ordinateur a permis d'obtenir les paramètres matériau suivants :  $\sigma_y = 2,22 \text{ MPa}$  ,  $K = 568 \text{ [MPa.s]}$  ,  $n = 17,7$  ,  $C = 41200 \text{ MPa}$  ,  $\gamma = 282$  .

- Ecrire les équations du modèle unidimensionnel.
- Comparer les simulations et les expériences pour les chargements de fluage en traction à 275, 350, 380 et 400 M Pa et de fluage à 2 niveaux (Figure 5 et Figure 6). Quelle modélisation est la plus représentative ?
- Confronter les modèles aux essais d'écrouissage en traction simple à différentes vitesses et à l'essai non monotone (Figure 3 et Figure 4). Commenter.
- Confronter le modèle aux essais de relaxation de la Figure 7.

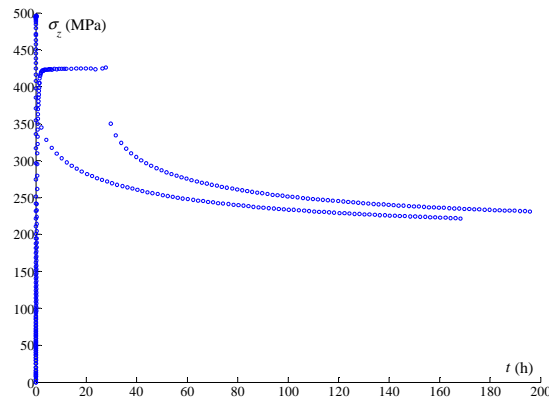


Figure 7 : Ecouissage (jusqu'à 2% à  $2 \cdot 10^{-3}$  %/s et  $2 \cdot 10^{-4}$  %/s) et relaxation

- Quel est le modèle le plus représentatif de tous les résultats d'essais présentés jusqu'ici ?

#### 4.2 Restauration statique

Afin d'améliorer la réponse en fluage, une possibilité est d'ajouter un terme de restauration statique :

$$\dot{X}_{ij} = p \left\{ \frac{2}{3} Y_0 \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} - X_{ij} \dot{\varepsilon} \right\} - r_m \left( \frac{\bar{X}}{X_0} \right)^{m_0} \frac{X_{ij}}{\bar{X}} \quad (r_m, m_0 \text{ et } X_0 \text{ paramètres matériau}) \quad (25)$$

avec  $\bar{X} = \sqrt{\frac{3}{2} X_{ij} X_{ij}}$  écouissage équivalent

- Ecrire les équations du modèle unidimensionnel.
- Identifier  $r_m$ ,  $m_0$  et  $X_0$  et comparer modèle et expérience (écouissage et fluage).
- Valider le modèle sur les essais de relaxation.
- Proposer des pistes pour améliorer la corrélation modèle-expérience.

### 5 Comportement cyclique

- Simuler le chargement cyclique Figure 8. Commenter.

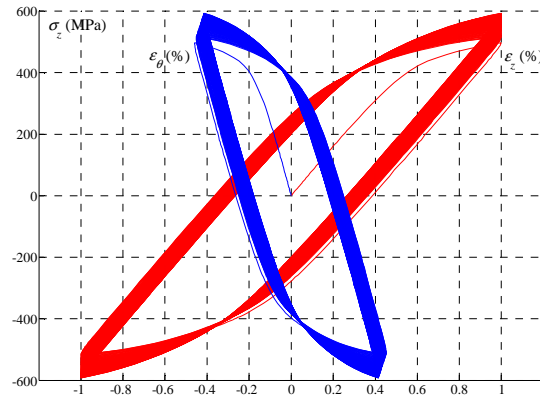


Figure 8 : Ecouissage cyclique en traction simple suivant z, vitesse  $|\dot{\epsilon}_3| = 2.10^{-1} \text{ \% / s}$  . 100 cycles

- Une possibilité pour prendre en compte cet effet cyclique et de rajouter une variable pour faire évoluer la saturation de l'écrouissage :

$$\dot{X}_{ij} = p \left\{ \frac{2}{3} Y^* \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} - X_{ij} \dot{\epsilon} \right\} - r_m \left( \frac{\bar{X}}{X_0} \right)^{m_0} \frac{X_{ij}}{\bar{X}}$$

avec :

(26)

$$Y^* = Y_0 + Y_{iso}$$

$$\dot{Y}_{iso} = b_Y (Y_{sat} - Y_{iso}) \dot{\epsilon} \quad (b_Y \text{ et } Y_{sat} \text{ 2 paramètres matériau supplémentaires})$$

- Identifier  $b_Y$  et  $Y_{sat}$  et confronter le modèle et les expériences.
- Conclure