

APPROCHE FIABILISTE DE LA DEFAILLANCE DES COMPOSANTS EN MATERIAUX COMPOSITES

<u>1.</u>	<u>INTRODUCTION/OBJECTIFS</u>	<u>1</u>
<u>2.</u>	<u>POLES D'EXCELLENCE</u>	<u>3</u>
<u>3.</u>	<u>ANALYSE TECHNIQUE</u>	<u>3</u>
3.1.	HISTORIQUE	3
3.2.	ALEAS ET INCERTITUDES	5
3.3.	METHODES DE MONTE-CARLO	6
3.4.	METHODES DU SECOND MOMENT	7
3.5.	FIABILITE SYSTEMES	9
3.6.	COUPLAGE MECANO-FIABILISTE	10
3.7.	ELEMENTS FINIS STOCHASTIQUES	11
<u>4.</u>	<u>ANALYSE DES DIFFICULTES</u>	<u>12</u>
<u>5.</u>	<u>CONCLUSIONS</u>	<u>12</u>
<u>6.</u>	<u>REFERENCES</u>	<u>13</u>

1. INTRODUCTION/OBJECTIFS

Les trois dernières décennies ont été marquées en mécanique des structures par la capacité d'effectuer des modélisations numériques de plus en plus fines. Parallèlement se sont développées des méthodes intégrant le caractère aléatoire des données et permettant une évaluation de la fiabilité des structures. A partir d'un scénario de défaillance au niveau d'un composant ou d'un système et en fonction des informations disponibles, ces méthodes

évaluent une probabilité d'échec et divers facteurs de sensibilité vis-à-vis de la défaillance. Il faut bien noter ici que la défaillance n'est pas forcément la rupture du matériau ou de la structure, mais peut être par exemple une déformation ou un endommagement excessifs, ou encore une fuite pour les structures destinées au transport de fluides. Cette différenciation entre défaillance et rupture est fondamentale lors de l'utilisation de composites puisqu'une des particularités de ces matériaux est leur capacité à assurer leur fonction en présence d'endommagement important. Conventionnellement, un choix de conception et de dimensionnement correct doit vérifier une inégalité du type :

$$G[\mathbf{S}, \mathbf{R}] > 0 \quad (1)$$

où \mathbf{S} est la réponse mécanique fournie par le modèle de comportement, \mathbf{R} le vecteur constitué des résistances (seuil de flambage, d'endommagement, de rupture, ...). Cette inégalité satisfaite, se pose alors la question : « Quelle confiance peut-on attribuer à un choix de conception et de dimensionnement ? ». Comment disposer d'un indicateur de confiance objectif, c'est-à-dire un indicateur de la fiabilité du composite vis-à-vis des scénarios de défaillance potentiels et des incertitudes de modélisation. Cette confiance est directement reliée à sa fiabilité, c'est-à-dire à la capacité à assurer ses fonctions pendant la période de service.

Une des possibilités pour obtenir un indicateur est de raisonner en terme de robustesse : plus les choix de conception et de dimensionnement sont stables par rapport aux incertitudes, plus le composite est fiable. C'est l'approche des modèles convexes. Cette approche est intéressante lorsque les informations sur les incertitudes sont peu nombreuses, voire inexistantes ; cependant, l'indicateur de confiance obtenu reste très subjectif. D'une manière générale, la théorie des possibilités est aussi une voie envisageable qui peut se révéler intéressante pour raisonner sur des connaissances imprécises et incertaines. Cependant, dans le domaine du comportement mécanique des matériaux composites, certaines informations statistiques sur les dispersions des paramètres des modèles sont généralement accessibles et doivent être prise en compte.

Pour faire intervenir les informations statistiques dans le calcul de l'indicateur, il est indispensable d'utiliser une approche probabiliste de la fiabilité. Calculer un indicateur de confiance basé sur la fiabilité du composite revient alors à évaluer sa probabilité de défaillance. Les intérêts de l'approche statistique-probabiliste macroscopique sont nombreux, elle permet par exemple de :

- proposer un traitement réaliste des incertitudes et une méthode d'évaluation de facteurs de sécurité trop souvent arbitraires afin de valider et d'améliorer les approches utilisées actuellement dans l'industrie,
- apporter une aide à la décision conduisant à une conception et un dimensionnement plus économiques et mieux équilibrés et à une optimisation plus fine,
- analyser les modes de défaillance et mesurer la fiabilité apportée par l'application des règlements,
- répartir de façon optimale les matériaux entre les différents composants d'une structure,
- incorporer l'expérience acquise lors des décisions par l'actualisation en fonction du retour d'expérience,
- aider aux décisions de maintenance et de réparation dans un double objectif de sécurité et d'économie,

- élargir la maîtrise de la connaissance des incertitudes sur la réponse des structures.

L'approche probabiliste de la fiabilité nécessite le calcul de la probabilité de défaillance, c'est-à-dire l'intégrale de la densité de probabilité conjointe des variables de base x_i (les variables de conception et de dimensionnement) sur le domaine de défaillance définie par $G(\mathbf{x}) \leq 0$.

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

La simplicité de cette expression cache en fait de nombreuses difficultés : d'une part la densité de probabilité conjointe n'est pas connue et il faut utiliser une information moins complète limitée aux lois marginales et aux moments d'ordre deux, et d'autre part la fonction de performance G n'est généralement pas une fonction explicite des variables de base x_i . Ses réalisations ne peuvent alors dans ce cas être obtenues que par l'intermédiaire du modèle de comportement.

2. POLES D'EXCELLENCE

Si la France dispose de nombreux centres de recherche-développement dans le domaine des composites, les spécialistes de l'approche probabiliste de la fiabilité appliquée aux composites sont rares.

Dans le domaine des méthodes couplées de mécanique des structures et de fiabilité, le Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée (LaRAMA), dont le directeur est M. Lemaire, est certainement le pôle français le plus reconnu. L'analyse et l'optimisation mécano-fiabiliste des structures en matériaux composites y sont un des thèmes de recherche majeur. On trouve également quelques rares spécialistes dans le domaine du nucléaire (CEA, EDF).

L'approche probabiliste de la fiabilité des composants en matériaux composites stratifiés utilisant des modèles de comportements non linéaires à variables internes est une des voies de recherche du LMARC depuis quelques années.

3. ANALYSE TECHNIQUE

3.1. Historique

Il est possible de distinguer deux périodes caractéristiques du développement de ces méthodes :

- La première, des années 1920 à 1974, apparaît rétrospectivement comme une période de très lent démarrage. Les problèmes posés par la prise en compte des dispersions apparaissent intraitables parce que nombre de concepts nécessaires à un exposé rationnel ne sont pas disponibles.

- La deuxième période, de 1974 à nos jours, est caractérisée par une acceptation et une utilisation croissante de ces méthodes par les concepteurs de structures. Malgré cela, à cause

de l'ignorance sur la variabilité des paramètres de conception et de la complexité des calculs, elles ne sont utilisées que dans les secteurs de pointe.

La dispersion des paramètres de conception est considérée très tôt comme un facteur influençant les marges de sécurité. Déjà Mayer, en 1926, et plus tard Basler, en 1960, proposent des mesures de sécurité semblables à l'indice de fiabilité que proposera Cornell en 1967. Mayer suggère une conception basée sur les moyennes et variances des variables aléatoires. Forsell, en 1924, avait établi le principe de l'optimalisation : les choix de conception et de dimensionnement doivent minimiser le coût total de la structure, c'est-à-dire la somme du coût initial et des coûts estimés des défaillances. Freudensthal, en 1947, est le premier à évoquer une mesure d'acceptabilité aux concepteurs. Johnson, en 1953, présente pour la première fois une théorie compréhensible de la fiabilité des structures et de leur conception d'un point de vue économique, incluant les théories statistiques développées par Weibull en 1939. Jusque dans les années 1960, ces travaux sont quasiment ignorés. En effet, l'élasticité linéaire, la plasticité, l'analyse des structures complexes ainsi que les exigences mathématiques des formes particulières comme les coques, captent le maximum d'attention. Les concepteurs continuent d'utiliser les méthodes traditionnelles des coefficients de sécurité, décidés simplement par la méthode du « jugement de l'ingénieur ». Cette notion de jugement de l'ingénieur est en fait l'expression savante de l'expérience dont pouvaient se prévaloir les bureaux d'études, la justification de la copie de ce qui avait déjà été fait et « marchait ». Durant les années 1967 à 1974, on constate une rapide croissance d'un intérêt académique pour les méthodes fiabilistes. Cependant, l'acceptation par le milieu industriel reste faible : les défaillances sont rares, et quand elles se produisent, sont attribuées à des erreurs humaines ou considérées comme des fatalités. De plus, la conception probabiliste semble lourde à mettre en œuvre, la théorie est difficile, mathématiquement et numériquement, et peu de données sont disponibles pour préciser les queues de distribution des paramètres de conception. Parmi ceux qui considèrent la conception déterministe obsolète, ce n'est que désillusion. Les travaux du début des années soixante sont, pour ces raisons, consacrées à la recherche d'une voie pour tourner ces difficultés. Turkstra, en 1970, présente la conception des structures comme un problème de décision impliquant incertitude et risque : dans une large variété de circonstances, prendre des décisions raisonnables est possible, même en cas de manque d'informations. Cornell, en 1967, suggère l'utilisation du second moment et propose un indice de sécurité, mais les problèmes d'invariance de cet indice, mis à jour par Ditlevsen et Lind en 1973, semblent mener à une impasse. Bien que les résultats des modèles du second moment soient largement acceptés, il paraît alors impossible de développer une logique raisonnable sur ces bases.

L'année 1974 marque un tournant dans le domaine : Hasofer et Lind [HAS et al., 1974] parviennent à maîtriser les problèmes d'invariance, et Veneziano clarifie les limitations de la méthode des coefficients de sécurité. Pendant une brève période, de nombreuses méthodes sont développées et utilisées successivement, elles font l'objet de guides de documentation, réduisant de nombreux concepts à de simples recettes. Emerge alors une reconnaissance tardive de l'inadéquation entre les prévisions de la théorie fiabiliste et la réalité. Les structures cèdent sous des charges qu'elles auraient du être capables de tenir, ou sous des charges exceptionnellement élevées qu'elles n'étaient pas sensées supporter. Parmi les causes possibles des défaillances de ces structures, Matousek, en 1977, conclut qu'il s'agit presque toujours de grosses fautes humaines. Brown, en 1979, montre que le taux de rupture

prédit par la théorie est trop faible d'un facteur 10 ou plus. La théorie probabiliste des structures est donc incomplète si l'on ne prend pas en compte le facteur humain. L'étude de ces facteurs humains est nettement différente de celle pratiquée dans la phase de conception et de dimensionnement pour assurer la fiabilité d'une structure, en grande partie parce qu'elle fait appel à la compréhension de méthodes particulières aux sciences sociales. Il faut donc garder à l'esprit que la fiabilité calculée par la suite n'est qu'une grandeur théorique, dont l'intérêt principal est de fournir aux décideurs un paramètre de contrôle puissant pour faire les meilleurs choix possibles avec les connaissances disponibles.

Dans le domaine des composites, l'approche probabiliste de la défaillance de stratifiés avec résistances et forces aléatoires a été étudiée par exemple par Yamada et Sun [YAM et al., 1978] en utilisant une méthode de Monte Carlo et par Cederbaum et Elishakoff [CED et al., 1990] en utilisant une méthode du second moment. Cassenti [CAS, 1984] a étudié la probabilité de rupture du premier pli de poutres et plaques stratifiées sur la base de l'hypothèse du maillon le plus faible de Weibull. Kam et Lin [KAM et al., 1992], Lin et al. [LIN et al., 1993] et Engelstad et Reddy [ENG et al., 1993] ont étudié la fiabilité de plaques composites stratifiées linéaires ou non linéaires avec des propriétés matériaux aléatoires. Gurvich et Pipes [GUR et al., 1995] ont employé une approche probabiliste méso-macro pour étudier la résistance de quelques empilements de plis unidirectionnels. Boyer et al. [BOY et al., 1997] ont utilisé la méthode FORM pour étudier la conception d'une structure composite en réalisant un objectif de fiabilité. Lin et al. [LIN et al., 1998 et 2000] ont présenté une procédure pour l'analyse de fiabilité de plaques composites stratifiées avec séquence d'empilement incertaine pour divers modes de défaillance. Lin [LIN, 2000] a analysé la probabilité de rupture de plaques composites stratifiées en couplant trois modèles fiabilistes : Monte-Carlo, FORM et les éléments finis stochastiques à plusieurs critères classiques. Richard et al. [RIC et al., 2000] ont employé une méthode du second moment couplée à un modèle élasto-dissipatif non linéaire à variables internes pour calibrer les coefficients de sécurité d'un stratifié tubulaire soumis à un chargement de fluage.

3.2. Aléas et incertitudes

Pour un mécanicien des structures, les sources d'erreur de conception et de dimensionnement se situent principalement à trois niveaux :

- Le modèle de comportement : Les décisions concernant la conception et le dimensionnement sont prises à partir de simulations utilisant le modèle de comportement. L'incertitude sur le modèle est donc tout naturellement la première source d'erreur qui vient à l'esprit. En effet, presque toujours, certains phénomènes sont négligés, soit par souci de simplicité, soit par ignorance. De plus, le calcul de la réponse nécessite une résolution numérique qui peut également être source d'erreur. Pour ces raisons, la qualité des modèles de comportement doit être soigneusement vérifiée.
- Les scénarios de défaillance : L'oubli d'un mode de défaillance ou de mauvaises combinaisons entre les événements élémentaires impliquent des erreurs dans les scénarios de défaillance. L'exemple du pont de Tacoma entré en résonance sur un mode couplé flexion-torsion non envisagé est aujourd'hui célèbre.

- Les variables de base x_i : L'incertitude sur les variables de base est bien sûr également une source d'erreur. Les chargements imposés à la structure lors de la modélisation sont toujours limités et simplifiés, et les chargements accidentels ne peuvent être qu'estimés. Les incertitudes sur les paramètres matériaux, les orientations des fibres, les épaisseurs et les résistances, estimées à partir d'une base expérimentale limitée, peuvent être importantes. Ces incertitudes sont de deux types : les aléas, qui ont pour origine les fluctuations de la fabrication et du chargement, et les incertitudes statistiques, qui ont pour origines principales le manque de données expérimentales et la difficulté d'identification des paramètres du modèle mécanique. On sépare conventionnellement les aléas (ou dispersions) sur les variables de base en deux catégories : les aléas internes et les aléas externes. Les aléas internes sont relatifs à l'état de la structure (caractéristiques du composite, des plis, orientations, épaisseurs et résistances), les aléas externes sont relatifs à l'environnement, c'est-à-dire au chargement mécanique. Rappelons que lors de l'utilisation de composites, les aléas internes posent un problème particulier.

La modélisation des distributions nécessite de connaître un nombre suffisant de données ; si l'on a besoin de connaître des valeurs rarement observées, ce nombre est particulièrement grand. En ce qui concerne les sollicitations rarement observées, on peut utiliser les méthodes d'analyse statistique des valeurs extrêmes [KEN], les méthodes bayésiennes et de l'entropie [SKI, 1988]. Des approches plus classiques, méthode des moments ou du maximum de vraisemblance [KEN] peuvent être utilisées pour modéliser les autres propriétés. Les méthodes statistiques habituelles seront utilisées pour déterminer les distributions où l'on ne cherche pas particulièrement à obtenir une bonne modélisation des valeurs extrêmes.

Dans les études pratiques, la définition des données et leur analyse statistique sont souvent les étapes qui sont les plus difficiles à réaliser.

3.3. Méthodes de Monte-Carlo

Cette méthode est une première approche pour l'évaluation de la fiabilité. Les distributions cumulées des variables aléatoires X_i étant connues, la méthode de Monte-Carlo directe implique de tirer au hasard des réalisations x_i de ces variables en respectant leurs distributions. La technique la plus couramment utilisée consiste à tirer au sort des nombres τ_i entre 0 et 1 (distribution uniforme) et déterminer les x_i ayant pour densité de probabilité cumulée cette valeur τ_i . Chaque jeu de valeurs obtenu, appelé réalisation aléatoire \mathbf{x} , est testé avec la fonction de performance G . Sous réserve d'un nombre suffisant n de réalisations aléatoires, le nombre de défaillances n_f fournit alors un estimateur de la probabilité de défaillance $P_f = n_f / n$.

Le principe de la méthode de Monte-Carlo directe est donc très simple et sa mise en œuvre aisée, mais son application est, dans la plupart des cas, trop coûteuse en temps de calcul. En effet, on considère que pour une probabilité recherchée de l'ordre de 10^{-n} , le nombre de réalisations doit être supérieur à 10^{n+2} , nombre souvent rédhibitoire. Néanmoins, cette méthode est utile dans des cas tests pour l'étalonnage de méthodes approchées. Si on est capable de définir à l'avance dans quel domaine des variables aléatoires la défaillance se produit, il est possible, dans certains cas, de réduire le nombre de tirages de plusieurs ordres

de grandeur en utilisant la méthode de Monte-Carlo modifiée : stratifiée, biaisée, ou encore avec biaisage directionnel.

Les temps de calcul des modèles de comportement développés pour les composites et les probabilités de défaillance espérées rendent ici les méthodes de Monte-Carlo peu exploitables.

3.4. Méthodes du second moment

L'idée est d'exprimer toutes les incertitudes en termes de moyenne (premier moment) et de covariance (second moment) des variables de base. Ces méthodes nécessitent, pour évaluer la probabilité de défaillance, de calculer un indice de fiabilité. Plusieurs auteurs ont proposé des indices comme Cornell, Veneziano et Ditlevsen, mais le plus couramment utilisé est celui de Hasofer et Lind [HAS et al., 1974], noté β . Ces deux auteurs ont suggéré de se placer non plus dans l'espace \mathbf{X} des variables de base, mais dans un espace \mathbf{Y} de variables gaussiennes centrées réduites (moyennes nulles et écart-types unitaires) statistiquement indépendantes.

Une transformation iso-probabiliste T permet de passer de l'espace physique des variables x_i à un espace de variables normées centrées gaussiennes décorréliées y_i . Les principales transformations utilisables sont celles de Rosenblatt, Nataf et Hermite. Dans l'espace \mathbf{Y} , la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = \int_{g(\mathbf{y}) \leq 0} \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3)$$

où ϕ est la fonction densité de probabilité de la loi normale standard, et $g(\mathbf{y})$ la fonction de performance dans l'espace \mathbf{Y} , qui définit la surface de défaillance. Dans l'espace \mathbf{Y} , la densité de probabilité dépend uniquement de la distance du point à l'origine [MAD et al., 1986], elle décroît très rapidement lorsque cette distance augmente. Sur la surface de défaillance, le point le plus proche de l'origine est donc le point de défaillance le plus probable, noté P^* et souvent nommé point de conception (design point). Les méthodes FORM et SORM nécessitent la détermination de P^* , donc la résolution du problème d'optimisation contraint :

$$\text{minimiser } \|\mathbf{y}\| \quad \text{soumis à } g(\mathbf{y}) \leq 0 \quad (4)$$

La solution \mathbf{y}^* de ce problème peut s'exprimer sous la forme $\mathbf{y}^* = -\beta \boldsymbol{\alpha}$, où les α_i sont les cosinus directeurs en P^* (et vérifient : $-1 \leq \alpha_i \leq 1$ et $\sum \alpha_i^2 = 1$). Ainsi écrites, les coordonnées du point de conception fournissent deux informations importantes :

- l'indice de fiabilité β qui permet une évaluation de la probabilité de défaillance,
- les cosinus directeurs, qui mesurent l'importance relative des différentes variables aléatoires intervenant dans le calcul de la fiabilité et sont donc d'un grand intérêt lors de l'analyse de la sensibilité de l'indice. On les appelle les facteurs d'importance, ils peuvent également être utiles dans le cas d'un scénario de défaillance à plusieurs événements combinés.

La méthode FORM (First Order Reliability Method) consiste à approcher la surface de défaillance $g(\mathbf{y}) = 0$ par l'hyperplan tangent en P^* (Figure 1).

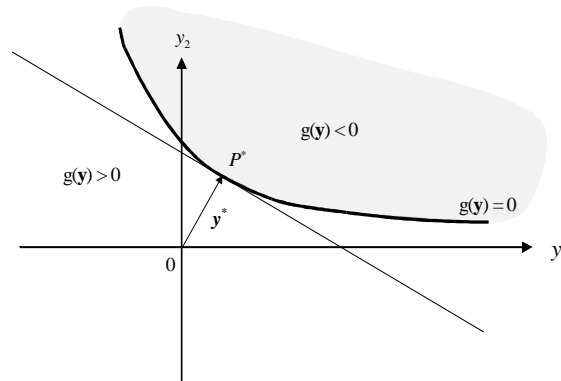


Figure 1 – Approximation de la surface de défaillance

L'indice de fiabilité β , défini comme la distance entre O, origine de l'espace gaussien, et P^* , point de conception, permet d'évaluer la probabilité de défaillance (Tableau 1). La précision de la solution obtenue dépend de la non-linéarité de la fonction d'état limite $g(\mathbf{y}) = 0$:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (5)$$

Φ est la fonction de distribution cumulée de la loi normale standard.

β	P_f
0	0.5
1	0.16
2	$2.28 \cdot 10^{-2}$
3	$1.35 \cdot 10^{-3}$
4	$3.17 \cdot 10^{-5}$
5	$2.87 \cdot 10^{-7}$
6	$9.87 \cdot 10^{-10}$
7	$1.28 \cdot 10^{-12}$
8	$6.22 \cdot 10^{-16}$

Tableau 1 – Correspondance entre l'indice et la probabilité de défaillance

L'approximation de FORM peut être améliorée sous certaines conditions [MAD et al., 1986] en approchant la surface de défaillance par une surface quadratique, c'est la méthode SORM (Second Order Reliability Method). Celle-ci consiste à déterminer, en plus du point de conception, les courbures κ_i de la surface de défaillance en ce point. La probabilité de défaillance est alors donnée par :

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^n (1 - \beta \kappa_j)^{-1/2} \quad (6)$$

n est le nombre de variables aléatoires. Le produit des termes $(1 - \beta \kappa_j)$ représente la correction de SORM par rapport à FORM.

Les méthodes du second moment sont aujourd'hui souvent utilisées dans les secteurs de pointe. Leur principal avantage est un temps de calcul indépendant du niveau de probabilité recherché (contrairement à la méthode de Monte-Carlo). Il peut arriver en revanche que le résultat obtenu ne soit pas satisfaisant, soit à cause des approximations propres à ces méthodes, soit à cause de la difficulté de détermination du point de conception. Les « méthodes de simulation conditionnelle », développées récemment, permettent de vérifier et corriger éventuellement les résultats obtenus par FORM ou SORM, en utilisant une méthode de Monte-Carlo biaisée [HOH et al. 1988]. L'idée centrale de ce type d'approche est de faire des simulations autour du point de conception. D'autres techniques sont également développées pour palier les défauts de FORM : par exemple l'approche par surface de réponse (Response Surface Approach : RSA) ou encore FOTM (First Order Third Moment reliability method). L'exactitude et l'efficacité de ces méthodes sont discutées par Zhao et al. [ZHA et al., 2001].

3.5. Fiabilité systèmes

La défaillance globale peut être une combinaison de m modes de défaillance élémentaire i ($i = 1, \dots, m$) ; cela peut être le cas par exemple lorsque la défaillance d'un stratifié est définie à l'échelle d'un pli. Un choix de conception et de dimensionnement doit toujours vérifier $G[\mathbf{S}, \mathbf{R}] > 0$, mais la définition de G est ici plus complexe. Pour chaque mode de défaillance élémentaire i , on définit un domaine de sécurité et un domaine de défaillance grâce à une fonction de performance élémentaire G_i . Un mode de défaillance élémentaire $G_i(\mathbf{x}) \leq 0$ n'est que la vérification d'un événement potentiel parmi d'autres. Il est important, naturellement, que l'ensemble des modes couvre toutes les possibilités de défaillance élémentaires imaginables. Un autre facteur essentiel est la bonne combinaison de ces modes pour former les scénarios. En effet, la défaillance résulte, soit de la réalisation d'un événement parmi plusieurs, soit de la réalisation simultanée de plusieurs événements, soit encore d'une combinaison plus complexe. Le premier cas est représenté par un système série et le second par un système parallèle, ces deux systèmes pouvant éventuellement être combinés dans le cas général.

Dans le cas où le scénario de défaillance est constitué de plusieurs événements élémentaires, la défaillance est représentée, soit par un système série lorsque la défaillance résulte de la réalisation d'un événement parmi plusieurs, soit d'un système parallèle lorsque la défaillance résulte de la réalisation simultanée de plusieurs événements, soit encore d'une combinaison de ces deux systèmes. Dans tous les cas, il est possible d'encadrer la probabilité de défaillance du système et de définir un indice de fiabilité du système β_{sys} qui correspond à la borne supérieure de la probabilité de défaillance.

$$\beta_{sys} \approx -\Phi^{-1}(P_f^{\max}) \quad (7)$$

Tout le problème est donc de déterminer la borne supérieure de la probabilité de défaillance qui permet de définir l'indice de fiabilité β_{sys} du système. La méthode de calcul de cette borne supérieure dépend de la combinaison entre les événements élémentaires.

La probabilité de défaillance d'un système série est la probabilité de défaillance de l'union de tous les événements élémentaires. Cette combinaison peut être utilisée, par exemple, lorsque la défaillance d'un seul pli suffit à provoquer la défaillance globale du stratifié. L'encadrement du Tableau 2 est très grossier, on lui préfère donc généralement celui proposé par Ditlevsen [MAD et al., 1986]. La probabilité de défaillance d'un système parallèle est la probabilité de défaillance de l'intersection de tous les événements élémentaires. Cette combinaison s'utilise par exemple si la défaillance globale du stratifié implique la défaillance de tous les plis simultanément. L'encadrement proposé au Tableau 2 manque de finesse; malheureusement, des bornes plus fines n'ont toujours pas été trouvées.

série	parallèle
$\max_i(P_i) \leq P_f = P\left[\bigcup_{i=1}^n (G_i \leq 0)\right] \leq \sum_{i=1}^n P_i$	$0 \leq P_f = P\left[\bigcap_{i=1}^n (G_i \leq 0)\right] \leq \min_i(P_i)$

Tableau 2 – Systèmes série et parallèle

La combinaison des modes de défaillance peut être plus complexe, les deux systèmes série et parallèle sont alors combinés :

$$\bigcup_{i=1}^n \left[\bigcap_{j=1}^m (G_j \leq 0) \right]_i \quad (8)$$

3.6. Couplage mécano-fiabiliste

La fonction de performance n'est généralement pas une fonction explicite des variables de base, c'est-à-dire qu'elle est souvent exprimée en fonction de la réponse de la structure. Il est donc nécessaire de coupler l'algorithme fiabiliste avec le modèle de comportement pour calculer $g(\mathbf{y})$. La détermination du point de conception nécessite la résolution du problème d'optimisation contraint :

$$\text{minimiser } \|\mathbf{y}\| \quad \text{soumis à } g(\mathbf{y}) \leq 0 \quad (9)$$

Rappelons que la solution \mathbf{y}^* de ce problème fournit, par l'intermédiaire de la norme et des cosinus directeurs α_i , deux indications importantes : l'indice de fiabilité β et les facteurs d'importance α_i .

Pour résoudre ce problème d'optimisation contraint, plusieurs algorithmes spécifiques sont disponibles [LIU et al., 1991], dont beaucoup sont implémentés dans des logiciels dédiés [COMREL, PROBAN, PHIMECA] : la méthode de programmation séquentielle quadratique (SQP), celle du gradient projeté (GP), des pénalités, ou encore du lagrangien augmenté. Un algorithme fréquemment utilisé est celui de Rackwitz-Fiessler (HL-RF) [RAC et al., 1978].

Cet algorithme est basé sur un calcul itératif. La $k^{\text{ième}}$ itération se calcule grâce à la formule suivante :

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \frac{1}{\|\nabla g(\mathbf{y}^{(k)})\|^2} \left[{}^T \nabla g(\mathbf{y}^{(k)}) \mathbf{y}^{(k)} - g(\mathbf{y}^{(k)}) \right] \nabla g(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (10)$$

Cet algorithme peut s'énoncer de la façon suivante :

- (1) choix d'un point de départ (par exemple $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{0}$). $k = 0$
- (2) calcul de $g(\mathbf{y}^{(k)})$ en utilisant le modèle mécanique
- (3) calcul du gradient $\nabla g(\mathbf{y}^{(k)})$ par différences finies
si $y_i^{(k)} = 0$, $d y_i^{(k)} = 10^{-4}$; sinon $d y_i^{(k)} = 10^{-4} y_i^{(k)}$
- (4) calcul de $\mathbf{y}^{(k+1)}$
- (5) vérifier si $\|\mathbf{y}^{(k+1)}\| - \|\mathbf{y}^{(k)}\| < 10^{-4}$
 - (a) si vrai, $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{(k+1)}$, stop
 - (b) si faux, $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k+1)}$, $k = k + 1$ et retour en (2)

Afin de réduire le nombre d'appels au modèle mécanique, une possibilité est de construire une représentation analytique de forme simple au voisinage du point de conception. Le nom de surface de réponse est donné à une telle représentation. Son intérêt réside dans une forme explicite sur laquelle le calcul de fiabilité est grandement simplifié et d'un coût quasi-nul ; la difficulté est alors de justifier l'approximation choisie dans un domaine donnée. Une autre possibilité de couplage est de reformuler le problème d'optimisation dans le cadre d'un schéma d'optimisation classique :

$$\text{minimiser } \|\mathbf{y}\| \quad \text{soumis à} \quad G(x_i) \leq 0 \quad \text{et} \quad y_i - T_i(x_i) = 0 \quad (11)$$

L'intérêt d'une telle reformulation est de permettre le calcul fiabiliste à l'aide des codes éléments finis commerciaux qui proposent un module d'optimisation général. Il est clair que la performance dépend de l'algorithme d'optimisation implémenté.

3.7. Eléments finis stochastiques

Le couplage mécano-fiabiliste présenté dans la section précédente est une procédure largement applicable sous réserve d'être capable d'effectuer toutes les expériences numériques. Or le nombre de ces expériences peut devenir élevé si le nombre de variables aléatoires est important. Cette technique est donc délicate à mettre en œuvre pour représenter des champs aléatoires.

Les éléments finis stochastiques calculent une estimation des deux premiers moments statistiques de la réponse du modèle mécanique. Ils restreignent donc l'approche de la fiabilité à une approche par loi Gaussienne. Ils peuvent également donner les moments d'ordre supérieur à 2 par simulation. Deux voies sont actuellement envisagées : la discrétisation spatiale et la discrétisation spectrale [COL et al., 1986, MAT et al., 1997]. Ces méthodes, en

plein essor, devront être capables de s'adapter à la variabilité spatiale des aléas, indépendante de la variabilité spatiale de la déformation qui gouverne la discrétisation de la MEF.

4. ANALYSE DES DIFFICULTES

La réalisation de calculs fiabilistes n'est possible que si l'on dispose de données suffisantes concernant les propriétés des matériaux, la géométrie de la structure, le chargement et les conditions aux limites. La définition des données et leur traitement statistique sont souvent les difficultés les plus grandes que l'on rencontre dans les applications pratiques.

De plus, les caractéristiques des matériaux, pour peu que l'on modélise leur vieillissement, sont de nature stochastique, tout comme les sollicitations appliquées. En toute rigueur, l'obtention d'un indicateur réaliste nécessite l'utilisation de la théorie de la fiabilité dépendante du temps avec prise en compte du caractère temporel de l'ensemble des variables aléatoires dans le cadre des processus stochastique. Plusieurs méthodes de calcul existent : Schall, Faber et Rackwitz, Φ_2 , RGMR, mais la fiabilité dépendante du temps, principalement lorsque la fonction de performance n'est pas une fonction décroissante, reste une difficulté et un enjeu actuel important. Il est d'ailleurs difficile de trouver des articles sur la question et les hypothèses sont souvent restrictives et mal précisées. Dans le même ordre d'idée, l'application des méthodes fiabilistes aux structures que l'on inspecte et répare est une affaire à suivre.

5. CONCLUSIONS

L'objectif final de l'approche statistique-probabiliste macroscopique de la défaillance est de proposer, pour une structure composite, un indicateur de confiance basé sur sa fiabilité. Le couplage entre une méthode du second moment comme FORM et un modèle de comportement mécanique du type EF, éventuellement non linéaire permet l'évaluation de la fiabilité en évitant le calcul direct de la probabilité de défaillance, généralement impossible. Le nombre d'appels à la fonction de performance dépend du nombre de variables aléatoires et les limitations proviennent de la difficulté d'augmenter la finesse du maillage d'une part, et de décrire la corrélation spatiale d'autre part.

Les progrès viendront de l'introduction du calcul des gradients directement dans le code EF, pour éviter la dérivation numérique par différences finies et d'une capacité à mieux appréhender les discrétisations spatiale et stochastique.

Parmi les autres sujets où des efforts particuliers de recherche et développement sont nécessaires, il faut citer l'amélioration des méthodes de dépouillement statistique lorsque le nombre d'observations expérimentales est limité et le développement de méthodes de calcul de la fiabilité en fonction du temps applicables aux structures qui se détériorent, que l'on inspecte et répare.

6. REFERENCES

- Boyer C., Beakou A., Lemaire M., *Design of a composite structure to achieve a specified reliability level*, Reliability Engineering and System Safety, 1997, **56**(3): p. 273-283
- Cassenti B.N., *Probabilistic static failure of composite material*, AIAA Journal, 1984, **22**(1): p. 103-110
- Cederbaum G., Elishakoff I., *Reliability of laminated plates via the First order second method*, Journal of Composite Structures, 1990, **15**: p. 161-167
- Collectif, *ISSAR report on computational stochastic mechanics, 4 stochastic finite elements*. Probabilistic Mechanics, 1997, **12**(4): p. 285-321
- Engelstad S.P., Reddy J.N., *Probabilistic nonlinear finite element analysis of composite structures*, AIAA Journal, 1993, **31**(2): p. 362-369
- Gurvich M.R., Pipes R.B., *Probabilistic analysis of multi-step failure process of a laminated composite in bending*, Composite Science and Technology, 1995, **55**: p. 413-421
- Hasofer A.M., Lind N.C., *Exact and Invariant Second Moment Code Format*, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 1974, **100**: p. 111-121
- Hohenbichler M., Rackwitz R., *Improvement of second order reliability estimates by importance sampling*, Journal of Engineering Mechanics, 1988, **114**(2)
- Kendall M., *The advanced theory of statistics*, 3 volumes, Charles Griffin and Co, London
- Kam T.Y., Lin S.C., *Reliability analysis of laminated composite plates*, Proc. NSC, 1992, Part A, **16**: pp. 163-171
- Lin S.C., Kam T.Y., Chu K.H., *Evaluation of buckling and first-ply failure probabilities of composite laminates*, International Journal of Solids Structures, 1998, **35**(13): p. 1395-1410
- Lin S.C., Kam T.Y., Hsiao K.M., *Reliability analysis of nonlinear laminated composite plate structures*, Composite Structures, 1993, **25**: p. 503-510.
- Liu P.L., Der Kiureghian A., *Optimization algorithms for structural reliability*, Structural Safety, 1991, **9**: p.161-777
- Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C., *Methods of structural safety*, Prentice-Hall, 1986
- Matthies G.H, Brenner C.E, Bucher C.G, Guedes Soares C., *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids – stochastic finite elements*, Structural Safety, 1997, **19**(3): p. 283-336
- Richard F., Perreux D., *The safety factor calibration of laminates for long-term applications: behaviour model and reliability method*, Composites Sciences and Technology, 2001, **61**: p. 2087-2094
- Rackwitz R., Fiessler B., *Structural reliability under combined load sequences*, Computer. Struct., 1978, **9**(5): p. 489-494
- Skillin J., *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Kluwer Academic Pub, 1988

Yamada S.E, Sun C.T., *Analysis of laminate strength and its distribution*, Journal of Composite Material, 1978, **12**: p. 275-284

Zhao Y-G., Ono T., *Moment methods for structural reliability*, Structural Safety, 2001, **23**: p. 47-75