Inferência Estatística I: Intervalos de Confiança e Aplicações

Professora: Tatiene Souza

11 de setembro de 2025

Sumário

1 Motivação

Quando calculamos uma média ou proporção a partir de uma amostra, obtemos apenas um número: a **estimativa pontual**. Mas será que esse número é realmente igual ao parâmetro verdadeiro? Geralmente não. Por isso, construímos um **Intervalo de Confiança (IC)**: uma faixa de valores plausíveis onde acreditamos que o parâmetro se encontra.

Exemplo do dia a dia: em pesquisas eleitorais, vemos frases como: *"O candidato tem 48% das intenções de voto, com margem de erro de 3 pontos, nível de confiança 95%."* Isso significa que, se muitas pesquisas iguais fossem realizadas, em cerca de 95% delas o intervalo construído conteria o valor verdadeiro da proporção de votos.

2 Como interpretar um Intervalo de Confiança

- O parâmetro (como a média populacional) é fixo; o que muda são as amostras.
- O IC não quer dizer "há 95% de chance de o parâmetro estar no intervalo".
- A interpretação correta: em longo prazo, 95% dos ICs calculados conterão o parâmetro verdadeiro.

Analogias úteis:

- **Radar meteorológico:** o IC é como a faixa de localização provável de um avião. Não sabemos o ponto exato, mas sabemos a região plausível.
- **Arco e flecha:** cada amostra é um disparo. A cada 100 disparos (intervalos), cerca de 95 acertam o alvo (parâmetro).

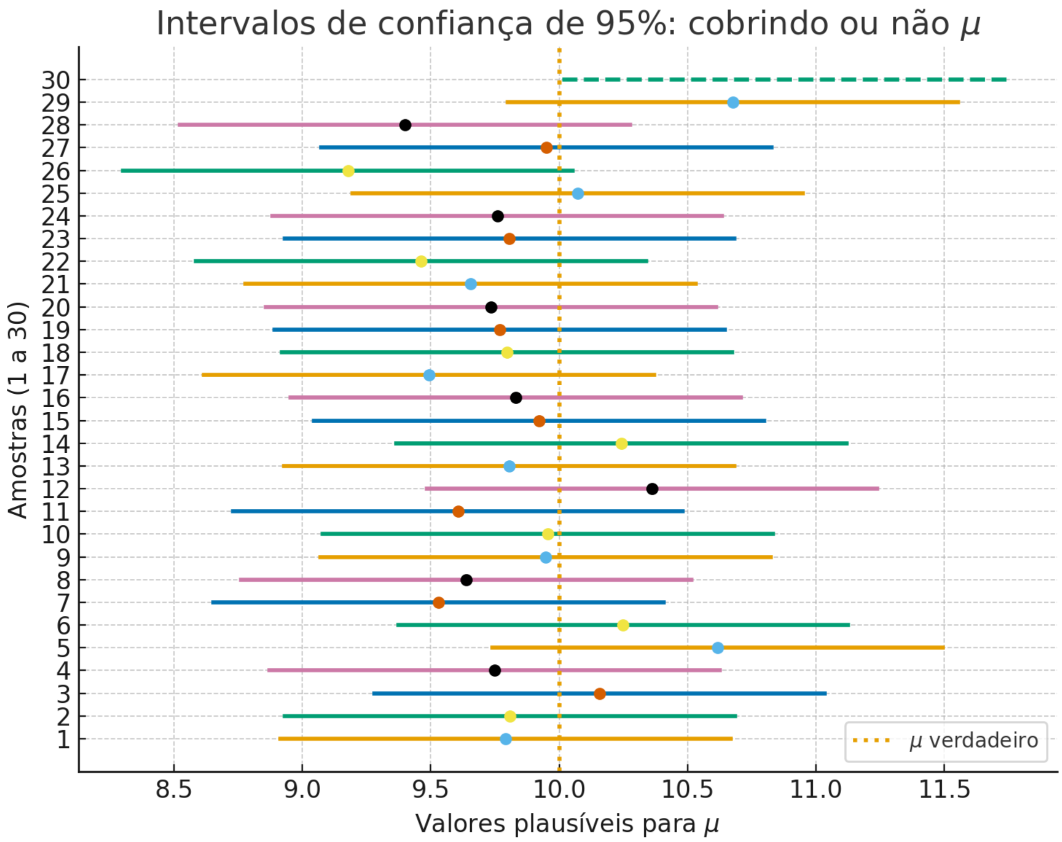

Figura 1: Exemplo de 30 intervalos de confiança (95%). Linhas *contínuas* (com ponto central) indicam intervalos que cobrem o parâmetro verdadeiro; linhas *tracejadas* (com marcador em "x") indicam intervalos que não cobrem. A linha vertical pontilhada é o valor verdadeiro de μ.

3 Quantidade pivotal e relações entre distribuições

Definição: Uma **quantidade pivotal** é uma estatística construída a partir da amostra e do parâmetro de interesse cuja distribuição **não depende do parâmetro desconhecido**.

Exemplo inicial:

$$Q = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

O papel da quantidade pivotal é transformar um problema em que a distribuição depende de parâmetros desconhecidos em outro com distribuição **conhecida**. A partir dela é possível determinar probabilidades e, consequentemente, construir intervalos de confiança.

Por que relacionar distribuições? As quantidades pivô mais usadas derivam de combinações da distribuição Normal. Dessa forma surgem naturalmente as distribuições t, qui-quadrado e F, que servem como base para intervalos de confiança em diferentes situações:

- Se $Z \sim N(0,1)$, então combinações de Z levam a estatísticas pivô.
- A soma de quadrados de Normais gera χ^2.
- A razão de uma Normal por uma raiz de qui-quadrado gera a distribuição t.
- A razão de dois qui-quadrados independentes gera a distribuição F.

Portanto, compreender as relações entre essas distribuições é essencial para entender como são obtidos os diferentes intervalos de confiança.

4 Intervalos de confiança para parâmetros da distribuição Normal

Nesta seção serão construídos intervalos de confiança sob a suposição de normalidade dos dados. O fio condutor é a **quantidade pivotal** e as relações entre as distribuições **Normal**, t, χ^2 e F. Com esses blocos, serão apresentados intervalos para:

- **Média com variância conhecida**: uso da distribuição Normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- **Média com variância desconhecida**: uso da distribuição t com $n-1$ graus de liberdade.
- **Diferença de médias**: apresentação dos casos com variâncias conhecidas e variâncias desconhecidas e iguais (variância combinada).
- **Variância**: uso da distribuição χ^2.
- **Razão de variâncias**: uso da distribuição F.

Em cada caso, o procedimento seguirá o mesmo roteiro:

1. declarar as **suposições** (normalidade, independência, tamanhos amostrais);
2. escolher a **quantidade pivotal**;
3. usar a **probabilidade central** da distribuição apropriada para obter $1-\alpha$;

4. **desfazer a padronização** e **isolar** o parâmetro;
5. escrever o **intervalo de confiança** e a **margem de erro** E (com **amplitude** $A = 2E$);
6. interpretar corretamente o resultado.

Observação: sob normalidade, os resultados são **exatos**. Para dados que não seguem Normal, intervalos **aproximados** podem ser obtidos por grandes amostras via EMV e TCL (ver seção de aproximações assintóticas).

Contexto e suposições

- Amostra $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de média μ e variância populacional *conhecida* σ^2.
- Se a população é Normal, o resultado é exato para qualquer n; caso contrário, para n grande, aplica-se pelo TCL.

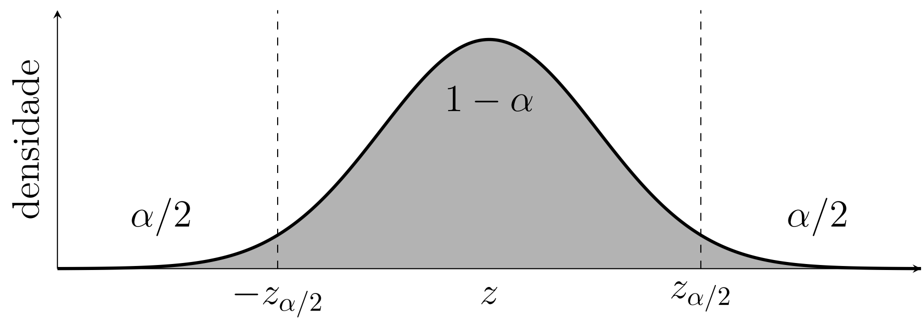

Figura 2: Densidade Normal padrão: região central $1-\alpha$ entre $-z_{\alpha/2}$ e $z_{\alpha/2}$ e caudas $\alpha/2$.

4.1 Intervalo de confiança para média com variância conhecida

Objetivo Construir o intervalo de confiança de nível $1-\alpha$ para μ.

Passo 1 — Estatística pivô A média amostral $\bar{X}$ tem

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\sim\; N(0,1).$$

Definir a quantidade pivotal $Q \;=\; \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Passo 2 — Probabilidade central Para o quantil $z_{\alpha/2}$ da Normal padrão,

$$P\big(-z_{\alpha/2} \le Q \le z_{\alpha/2}\big) \;=\; 1-\alpha.$$

Passo 3 — Desfazer a padronização Substituir Q e multiplicar por $\sigma/\sqrt{n}$ (quantidade positiva):

$$P\left(-z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\le\; \bar{X}-\mu \;\le\; z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \;=\; 1-\alpha.$$

Passo 4 — Isolar o parâmetro μ Reorganizar a desigualdade para obter:

$$P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\le\; \mu \;\le\; \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \;=\; 1-\alpha.$$

Passo 5 — Intervalo de Confiança (bilateral)

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) \;=\; \left[\,\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\;\; \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\right]}$$

Passo 6 — Interpretação correta Se o procedimento for repetido muitas vezes sob as mesmas condições, em longo prazo cerca de $100(1-\alpha)\%$ dos intervalos construídos por esta regra cobrirá o valor verdadeiro de μ. O parâmetro é fixo; a aleatoriedade está no intervalo.

Observações úteis:

- **Margem de erro**: $E \;=\; z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- **Amplitude do IC**: $A = 2E$.
- **Planejamento amostral**: dado um erro máximo E,

$$n \;=\; \left(\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E}\right)^2.$$

Relações importantes

- Quanto maior o nível de confiança (maior $z_{\alpha/2}$), maior será a margem de erro e, portanto, mais largo o intervalo.
- Quanto maior o tamanho da amostra n, menor será a margem de erro e mais preciso o intervalo.
- A amplitude do intervalo é sempre o dobro da margem de erro: $A = 2E$.

Exemplo: tempo médio em redes sociais — passo a passo

Pesquisadores desejam estimar o tempo médio diário que jovens gastam em redes sociais. A variância populacional é conhecida: $\sigma^2 = 100$ (minutos^2), logo $\sigma = 10$. Uma amostra aleatória de $n = 25$ estudantes forneceu média amostral $\bar{X} = 130$ minutos.

Passo 1 — Quantidade pivotal e forma geral do IC

$$Q = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} \; - \; z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \; \bar{X} \; + \; z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Passo 2 — Erro padrão, margem de erro e amplitude

$$\text{Erro padrão} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\text{Margem de erro } (E) = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot 2$$

$$\text{Amplitude } (A) = 2E$$

Cálculos para três níveis de confiança

- **Nível 90%** ($z_{0.05} = 1{,}645$)

  $$E = 1{,}645 \times 2 = 3{,}29, \qquad A = 2E = 6{,}58,$$

  $$IC_{90\%}(\mu) = [130 - 3{,}29, \; 130 + 3{,}29] = [126{,}71, \; 133{,}29].$$

  Interpretação: com 90% de confiança, valores plausíveis para a média populacional estão entre 126,71 e 133,29 minutos. O intervalo é mais estreito, porém com menor garantia de cobertura.

- **Nível 95%** ($z_{0.025} = 1{,}96$)

  $$E = 1{,}96 \times 2 = 3{,}92, \qquad A = 2E = 7{,}84,$$

  $$IC_{95\%}(\mu) = [130 - 3{,}92, \; 130 + 3{,}92] = [126{,}08, \; 133{,}92].$$

  Interpretação: com 95% de confiança, a média populacional está entre 126,08 e 133,92 minutos. Esse é o nível convencional em muitas aplicações.

- **Nível 99%** ($z_{0.005} = 2{,}576$)

  $$E = 2{,}576 \times 2 = 5{,}152 \; \approx \; 5{,}15, \qquad A = 2E \approx 10{,}30,$$

  $$IC_{99\%}(\mu) = [130 - 5{,}152, \; 130 + 5{,}152] \approx [124{,}85, \; 135{,}15].$$

  Interpretação: com 99% de confiança, o intervalo é mais largo porque aumenta a exigência de cobertura.

Comparação entre os três níveis

- O aumento do nível de confiança eleva o quantil $z_{\alpha/2}$, o que amplia a margem de erro E e a amplitude A.
- Para $\bar{X} = 130$ e erro padrão 2, obtém-se:

Nível	$z_{\alpha/2}$	Margem E	Amplitude $A = 2E$	Intervalo $IC(\mu)$
90%	1,645	3,29	6,58	[126,71, 133,29]
95%	1,96	3,92	7,84	[126,08, 133,92]
99%	2,576	5,15	10,30	[124,85, 135,15]

Conclusão prática

- A escolha do nível de confiança deve equilibrar **precisão** (intervalos curtos) e **garantia de cobertura** (níveis altos).
- Para reduzir a amplitude sem diminuir o nível de confiança, é necessário aumentar o tamanho amostral n, pois $E = z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$ diminui com $\sqrt{n}$.

Interpretação: O tempo médio de uso de redes sociais entre todos os jovens da população estudada está em torno de 130 minutos por dia. Com 90% de confiança, o intervalo é mais estreito, mas há menor segurança. Com 99% de confiança, o intervalo é mais largo, pois é preciso maior garantia de cobertura. A escolha do nível de confiança envolve equilibrar **precisão** (intervalos curtos) e **segurança** (alta confiança).

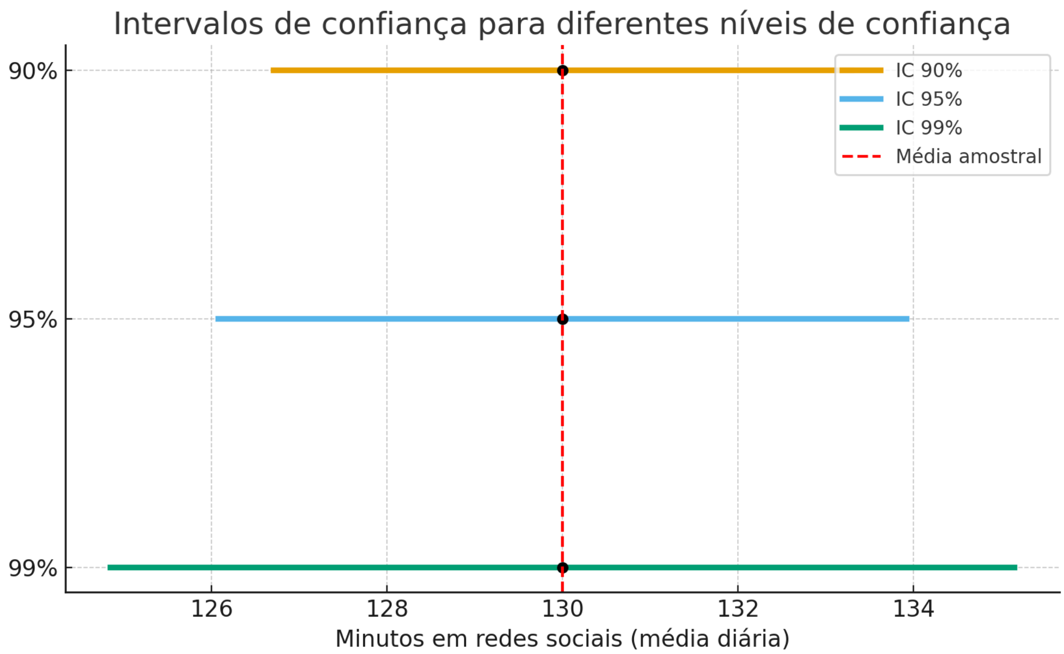

Figura 3: Intervalos de confiança da média amostral para diferentes níveis de confiança (90%, 95% e 99%). Quanto maior o nível de confiança, maior a amplitude do intervalo.

EXERCÍCIO I — Intervalo de Confiança

ATENÇÃO: O objetivo desta atividade não é apenas testar contas, mas verificar se vocês conseguem **explicar e interpretar** um intervalo de confiança no contexto de uma situação real. Pensem como se tivessem que explicar o resultado para um amigo que não sabe nada de Estatística.

Uso do celular para vídeos curtos:

Um grupo de pesquisadores deseja estimar o tempo médio (em minutos por dia) que estudantes universitários passam assistindo a vídeos curtos no celular (TikTok, Instagram Reels, YouTube Shorts). Com base em estudos anteriores, sabe-se que a variância populacional é aproximadamente $\sigma^2 = 144$ (minutos^2). Uma amostra aleatória com $n = 36$ estudantes da sua universidade foi coletada, e a média amostral observada foi $\bar{X} = 82$ minutos.

a) Qual é o **erro padrão** da média amostral? Mostre o cálculo.

b) Considerando um nível de confiança de 95%, calcule:

i) a margem de erro E;

ii) a amplitude A do intervalo;

iii) o intervalo de confiança $IC_{95\%}(\mu)$.

c) Repita os cálculos para um nível de confiança de 99%. Compare a margem de erro, a amplitude e o intervalo com o caso de 95%.

d) Explique, com suas próprias palavras:

i) o que significa o nível de confiança de 95%;

ii) por que o intervalo de 99% é mais amplo que o de 95%;

iii) como seria possível reduzir a amplitude do intervalo sem mudar o nível de confiança.

e) Se o objetivo do pesquisador fosse garantir que a margem de erro fosse no máximo de 2 minutos, mantendo o nível de confiança de 95%, qual deveria ser o tamanho mínimo da amostra n?

Instruções finais: Responda cada item passo a passo, mostrando cálculos e **interpretações completas em frases**. Respostas apenas numéricas sem explicação não terão pontuação máxima.

4.2 Intervalo de confiança para média com variância desconhecida

Contexto e suposições

- Amostra $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de média μ e variância populacional *desconhecida.*
- População Normal; para amostras grandes, pode-se justificar via TCL.

Objetivo Construir um IC bilateral de nível $1-\alpha$ para μ quando a variância é desconhecida.

Passo 1 — Quantidade pivotal

$$Q \;=\; \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \;\sim\; t_{n-1}.$$

Passo 2 — Probabilidade central

$$P\big(-t_{\alpha/2;\,n-1} \le Q \le t_{\alpha/2;\,n-1}\big) \;=\; 1-\alpha.$$

Passo 3 — Desfazer a padronização

$$P\left(-t_{\alpha/2;\,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}} \;\le\; \bar{X}-\mu \;\le\; t_{\alpha/2;\,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \;=\; 1-\alpha.$$

Passo 4 — Isolar o parâmetro μ

$$P\left(\bar{X}-t_{\alpha/2;\,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \;\le\; \mu \;\le\; \bar{X}+t_{\alpha/2;\,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \;=\; 1-\alpha.$$

Passo 5 — Intervalo de confiança (bilateral)

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) \;=\; \left[\bar{X}-t_{\alpha/2;\,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}},\;\; \bar{X}+t_{\alpha/2;\,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

Passo 6 — Interpretação Em longo prazo, cerca de $100(1-\alpha)\%$ dos intervalos construídos por este procedimento cobrirá o valor verdadeiro de μ. O parâmetro é fixo; a aleatoriedade está no intervalo.

Margem de erro e amplitude

$$E \;=\; t_{\alpha/2;\,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$A \;=\; 2E$$

Observações

- Para n grande, $t_{\alpha/2;n-1} \approx z_{\alpha/2}$ e o resultado se aproxima do caso com variância conhecida.
- O uso da distribuição t incorpora a incerteza adicional de estimar a variância com S^2.

4.3 Intervalo de confiança para diferença de médias

Por que é importante? Em muitas situações não basta estimar uma média isolada. O interesse está em **comparar grupos**. Exemplos:

- Comparar a média de pressão arterial em um grupo que tomou medicamento versus grupo placebo.
- Comparar o desempenho médio em matemática entre estudantes de escolas públicas e privadas.
- Comparar o tempo médio gasto em redes sociais por adolescentes e adultos.
- Comparar a produtividade média de duas linhas de produção em uma fábrica.

Qual a aplicação prática? O intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$ permite responder:

- A diferença observada entre as médias pode ser atribuída ao acaso?
- Qual a faixa de valores plausíveis para a diferença real entre os grupos?
- A diferença é estatística e praticamente relevante?

Escolha do método

- **Variâncias conhecidas** (situação rara): usar Normal padrão (z).
- **Variâncias desconhecidas e assumidas iguais** ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$): usar t com variância combinada (*pooled*).
- **Variâncias desconhecidas e possivelmente diferentes**: usar **Welch** com graus de liberdade aproximados de Satterthwaite.
- Para amostras grandes, resultados t aproximam-se de z.

Caso A: variâncias conhecidas

Quantidade pivotal

$$Q \;=\; \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \;\sim\; N(0,1).$$

Intervalo de confiança

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1-\mu_2) \;=\; \left[(\bar{X}-\bar{Y}) \;\pm\; z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

Margem de erro e amplitude

$$E \;=\; z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \qquad A \;=\; 2E.$$

Caso B: variâncias desconhecidas e iguais (pooled)

Estimador combinado da variância

$$S_p^2 \;=\; \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

Quantidade pivotal

$$Q \;=\; \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \;\sim\; t_{\,n_1+n_2-2}.$$

Intervalo de confiança

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1-\mu_2) \;=\; \left[(\bar{X}-\bar{Y}) \;\pm\; t_{\alpha/2;\,n_1+n_2-2}\; S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right].$$

Margem de erro e amplitude

$$E \;=\; t_{\alpha/2;\,n_1+n_2-2}\; S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, \qquad A \;=\; 2E.$$

Exemplo — Música instrumental ambiente melhora o desempenho? (IC para $\mu_1 - \mu_2$)

Deseja-se comparar o **desempenho médio em um mini-simulado de 20 questões** entre dois grupos independentes:

- Grupo 1 (Música instrumental): estudou por 40 minutos ouvindo faixas instrumentais sem letra.
- Grupo 2 (Silêncio): estudou por 40 minutos em silêncio.

A variável é o **número de acertos** (0 a 20). A amostra forneceu os seguintes resumos:

$$n_1 = 40, \quad \bar{X} = 15{,}8, \quad S_1 = 3{,}6 \qquad\qquad n_2 = 38, \quad \bar{Y} = 14{,}1, \quad S_2 = 3{,}4$$

Assuma populações aproximadamente Normais, amostras independentes, variâncias populacionais **desconhecidas e assumidas iguais**. Pede-se:

a) Calcular a variância combinada S_p^2 e o desvio-padrão combinado S_p.

b) Calcular o erro-padrão da diferença EP.

c) Para **95%**, obter o quantil t, a **margem de erro** E e a **amplitude** A.

d) Construir o **IC de 95%** para $\mu_1 - \mu_2$.

e) Para **99%**, obter o quantil t, a **margem de erro** E e a **amplitude** A.

f) Construir o **IC de 99%** para $\mu_1 - \mu_2$.

g) Interpretar os dois intervalos e discutir a decisão prática.

Solução:
(a) Variância e desvio-padrão combinados

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{39 \cdot 3{,}6^2 + 37 \cdot 3{,}4^2}{76} \\ &= \frac{39 \cdot 12{,}96 + 37 \cdot 11{,}56}{76} = \frac{505{,}44 + 427{,}72}{76} = \frac{933{,}16}{76} \approx 12{,}28. \end{aligned}$$

$$S_p = \sqrt{12{,}28} \approx 3{,}505.$$

(b) Erro-padrão da diferença

$$\begin{aligned} \text{EP} &= S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 3{,}505 \cdot \sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{38}} \\ &= 3{,}505 \cdot \sqrt{0{,}0250 + 0{,}0263158} = 3{,}505 \cdot \sqrt{0{,}0513158} \\ &= 3{,}505 \cdot 0{,}2266 \approx 0{,}794. \end{aligned}$$

(c) Para 95%: quantil t, margem e amplitude

$$\text{gl} = n_1 + n_2 - 2 = 76, \qquad t_{0{,}025;\,76} \approx 1{,}99.$$

$$E_{95\%} = 1{,}99 \times 0{,}794 \approx 1{,}58, \qquad A_{95\%} = 2E_{95\%} \approx 3{,}16.$$

(d) IC de 95% para $\mu_1 - \mu_2$

$$(\widehat{\mu_1 - \mu_2}) = \bar{X} - \bar{Y} = 15{,}8 - 14{,}1 = 1{,}7.$$

$$IC_{95\%}(\mu_1 - \mu_2) = [\,1{,}7 - 1{,}58,\ 1{,}7 + 1{,}58\,] = [\,0{,}12,\ 3{,}28\,].$$

(e) Para 99%: quantil t, margem e amplitude

$$t_{0{,}005;\,76} \approx 2{,}64, \qquad E_{99\%} = 2{,}64 \times 0{,}794 \approx 2{,}10, \qquad A_{99\%} = 2E_{99\%} \approx 4{,}20.$$

(f) IC de 99% para $\mu_1 - \mu_2$

$$IC_{99\%}(\mu_1 - \mu_2) = [\,1{,}7 - 2{,}10,\ 1{,}7 + 2{,}10\,] = [\,-0{,}40,\ 3{,}80\,].$$

(g) Interpretação e decisão

- **95%:** Como $0 \notin [0{,}12,\ 3{,}28]$, **inferimos diferença** entre as médias a 95% (IC não contém 0).
- **99%:** Como $0 \in [-0{,}40,\ 3{,}80]$, **não inferimos diferença** entre as médias a 99% (IC contém 0).
- **Técnico-prático:** aumentar o nível de confiança $\Rightarrow$ maior quantil t $\Rightarrow$ maior margem E $\Rightarrow$ intervalo mais largo. Para manter 99% e restringir a largura (evitar incluir zero), é necessário aumentar os tamanhos amostrais (EP cai com $\sqrt{n}$).
- **Relevância:** se a meta mínima de ganho for $\geq 1{,}0$ acerto, o IC de 95% é favorável (boa parte acima de 1). Se a meta for $\geq 2{,}0$, a decisão fica mais cautelosa, pois o IC de 95% cruza 2 e o de 99% inclui zero.

Exercício II — Revisão diária vs estudo na véspera (IC para $\mu_1 - \mu_2$)

Duas turmas independentes prepararam-se para um mini-simulado de 20 questões com estratégias diferentes:

- Grupo 1 (Revisão diária): sessões curtas e frequentes ao longo da semana.
- Grupo 2 (Estudo na véspera): sessão longa apenas no dia anterior.

Após 40 minutos finais de estudo, cada estudante fez o simulado. A variável é o **número de acertos** (0 a 20).

Grupo	n	$\bar{X}$	S
Revisão diária (1)	40	15,8	3,6
Estudo na véspera (2)	38	14,1	3,4

Tabela 1: Dados resumidos da amostra (acertos em 20).

Regra para a decisão (usar apenas o IC): Se $0 \notin IC(\mu_1 - \mu_2)$, inferimos diferença entre as médias; se $0 \in IC(\mu_1 - \mu_2)$, não inferimos diferença.

Tarefas

a) **Estimativa pontual:** calcule a estimativa de $\mu_1 - \mu_2$ a partir dos dados da amostra.

b) **Cenário A — Variâncias populacionais conhecidas** (situação hipotética para fins didáticos): Considere que os desvios-padrão populacionais são $\sigma_1 = 3{,}5$ e $\sigma_2 = 3{,}5$.

   i) Calcule o **erro-padrão** da diferença: $\mathrm{EP}_Z = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$.

   ii) Para **95%** e **99%**, use $z_{0{,}025} = 1{,}96$ e $z_{0{,}005} = 2{,}576$. Obtenha, para cada nível:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \mathrm{EP}_Z, \qquad A = 2E, \qquad IC = (\bar{X} - \bar{Y}) \pm E.$$

   iii) Aplique a regra: o zero pertence ao IC? Conclusão.

c) **Cenário B — Variâncias desconhecidas e assumidas iguais (pooled)**:

   i) Calcule a **variância combinada**:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \qquad S_p = \sqrt{S_p^2}.$$

ii) Calcule o **erro-padrão**:

$$\mathrm{EP}_t = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

iii) Para **95%** e **99%**, use $t_{0{,}025;\,n_1+n_2-2}$ e $t_{0{,}005;\,n_1+n_2-2}$. Obtenha, para cada nível:

$$E = t_{\alpha/2;\,n_1+n_2-2}\cdot \mathrm{EP}_t, \qquad A = 2E, \qquad IC = (\bar{X}-\bar{Y}) \pm E.$$

iv) Aplique a regra: o zero pertence ao IC? Conclusão.

d) Comparação entre os cenários: comente brevemente por que os ICs do Cenário B tendem a ser mais largos que os do Cenário A, e como isso se relaciona com a incerteza extra por estimar as variâncias.

e) Relevância prática: adote como ganho relevante $\delta^* = 1{,}0$ acerto. Com base nos ICs de **95%** e **99%** do Cenário B (pooled), o ganho relevante é sustentado pelos dados? Justifique citando os intervalos e usando a regra do zero.

f) Planejamento amostral (opcional, valendo bônus): suponha $n_1 = n_2 = n$ e use o Cenário A como aproximação para planejar. Deseja-se, para 95%, **amplitude** máxima $A_{\max} = 2{,}0$ pontos (logo $E_{\max} = 1{,}0$). Encontre n tal que $E_{\max} \geq 1{,}96\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/n}$. Mostre a conta e arredonde n para cima.

ATENÇÃO: Mostre **todas as etapas**, com contas e **interpretações em frases**.

5 Intervalos de Confiança para a Variância e Razão de Variâncias

5.1 Motivação

Até agora vimos intervalos para a **média**. Mas em muitas situações, o interesse está na **variabilidade dos dados** — isto é, na **variância** da população.

Exemplos do cotidiano:

- **Streaming e redes sociais:** Dois apps de vídeo — como Netflix e TikTok — dizem que carregam rapidinho. Ambos têm tempo médio de carregamento de 3 segundos, mas será que são igualmente bons? Um deles pode ter tempos mais estáveis (quase sempre 3 segundos), enquanto o outro varia muito (às vezes carrega em 1s, outras demora 6s). A **variância** mede essa oscilação: o mais "consistente" nem sempre é o mais rápido, mas o mais confiável.

- **Notas de provas:** Duas turmas tiraram a mesma média na prova de Matemática: 7,5. Mas em uma turma quase todos os alunos ficaram entre 7 e 8, enquanto na outra teve gente com 2 e outros com 10. Quem olhar só a média vai achar que elas são iguais, mas a **distribuição das notas** mostra realidades bem diferentes. A variância serve para enxergar essa "espalhabilidade".

- **Fones de ouvido:** Uma marca diz que a bateria dura 10 horas. Ótimo! Mas... em testes, alguns pares duram só 6h e outros 13h — muita variação. Outra marca também promete 10h, mas todos os fones testados ficaram entre 9h e 11h. **A média é a mesma**, mas a experiência é mais confiável com quem entrega menos oscilação — menor variância, mais confiança no produto.

- **Transporte por app (Uber, 99):** Dois motoristas fazem o mesmo percurso, e o tempo médio é de 25 minutos. Mas o primeiro quase sempre leva de 24 a 26 minutos; o segundo já variou de 15 a 40 minutos. Se você tem hora marcada, qual prefere? A variância ajuda a responder: mais do que saber a média, você quer **previsibilidade**.

Nessas situações, construímos intervalos para:

- a **variância populacional** σ^2 (ou o desvio-padrão σ);
- a **razão de variâncias** entre dois grupos: σ_1^2/σ_2^2.

5.2 Distribuição qui-quadrado (χ^2) — Variância

Se $X_1, \dots, X_n$ é uma amostra i.i.d. de uma população Normal com variância σ^2, então a estatística:

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

tem distribuição χ^2 com $n-1$ graus de liberdade.

5.3 Construção do Intervalo para σ^2

- Suponha: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de população Normal com variância σ^2.
- A quantidade pivotal é: $Q = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Passos:

1. Determinar os quantis $\chi^2_{\alpha/2;\,n-1}$ e $\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}$.
2. Construir a probabilidade central:

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2;\,n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}\right) = 1-\alpha$$

3. Isolar σ^2:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Resultado final:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right]}$$

Para o desvio-padrão, basta extrair a raiz quadrada dos extremos.

Exemplo — Durabilidade da bateria de fones de ouvido

Uma marca de fones de ouvido afirma que a bateria dura, em média, 10 horas. Para verificar a consistência dessa duração, foram testadas 12 unidades em laboratório. Os tempos de duração (em horas) foram registrados, e o desvio-padrão amostral foi $S = 1{,}1$. Assuma que os dados vêm de uma população Normal.

Deseja-se construir um intervalo de confiança de 95% para a **variância** da duração da bateria.

Passo 1 — Dados da amostra

$$n = 12, \quad S = 1{,}1, \quad S^2 = 1{,}21, \quad gl = n - 1 = 11$$

Passo 2 — Quantis da distribuição qui-quadrado

Para construir o intervalo de confiança, precisamos dos quantis da distribuição χ^2 com $gl = 11$ graus de liberdade, correspondentes a uma área de $\alpha/2 = 0{,}025$ nas caudas.

Esses valores podem ser obtidos diretamente no `R` com o seguinte comando:

```
qchisq(c(0.025, 0.975), df = 11)
```

Resultado:

$$\chi^2_{0.025;11} = 21{,}920, \qquad \chi^2_{0.975;11} = 3{,}816$$

Passo 3 — Construção do intervalo

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(11)(1{,}21)}{21{,}920}, \quad \frac{(11)(1{,}21)}{3{,}816}\right] = \left[\frac{13{,}31}{21{,}920}, \quad \frac{13{,}31}{3{,}816}\right] = [0{,}607, \ 3{,}489]$$

Passo 4 — Desvio-padrão correspondente

Para obter o intervalo de confiança para o desvio-padrão σ, basta extrair a raiz quadrada dos limites do intervalo da variância:

$$\sqrt{0{,}607} \approx 0{,}78 \text{ h}, \qquad \sqrt{3{,}489} \approx 1{,}87 \text{ h}$$

Passo 5 — Interpretação do intervalo de confiança:

O intervalo de confiança indica que, com 95% de confiança, a **variância verdadeira** da duração da bateria está entre 0,61 e 3,49 horas^2. Isso significa que essa é uma faixa plausível para a variância da população, com base na nossa amostra.

Como o desvio-padrão é a raiz da variância, ele está entre 0,78 e 1,87 horas. Ou seja: mesmo que a média seja 10 horas, o tempo de duração pode variar — em média — cerca de 1 hora para mais ou para menos.

Em termos práticos: em alguns casos, o fone pode durar apenas 9 horas; em outros, até 11 horas ou mais.
Quanto menor for essa variação (menor desvio-padrão), mais **previsível e confiável** será o produto. Por isso, não basta saber a média: **a variância ajuda a entender se podemos confiar na regularidade do que foi prometido**.

EXERCÍCIO III — Intervalo de Confiança para a Variância

ATENÇÃO: Esse exercício exige mais do que apenas fazer contas. Você precisa **entender e interpretar o que o intervalo de confiança significa**, e explicar como se estivesse apresentando para alguém que não conhece Estatística.

Streaming — Tempo de carregamento de vídeos:

Um grupo de desenvolvedores deseja avaliar a consistência do tempo de carregamento do aplicativo **TikTok**. Para isso, registraram o tempo (em segundos) que o app leva para carregar vídeos em diferentes momentos do dia, sob condições de uso real.

Foram coletadas $\boldsymbol{n = 12}$ observações, com média $\bar{X} = 3{,}1$ segundos e **desvio-padrão amostral** $S = 0{,}9$ segundos.

Assuma que os tempos seguem uma distribuição Normal.

a) Calcule a **variância amostral** S^2 e determine os **graus de liberdade** gl.

b) Usando um nível de confiança de 95%, calcule os **quantis da distribuição qui-quadrado** necessários para construir o intervalo de confiança para σ^2. **Dica:** use o comando no `R`:

```
qchisq(c(0.025, 0.975), df = 11)
```

c) Construa o **intervalo de confiança para a variância populacional** σ^2 (em segundos^2).

d) A partir do intervalo para σ^2, construa o **intervalo para o desvio-padrão** σ.

e) **Interprete os resultados:** Com suas palavras, explique:

- i) o que significa o nível de confiança de 95%;
- ii) o que o intervalo encontrado diz sobre a consistência do tempo de carregamento;
- iii) por que pode ser importante avaliar a **variância**, e não apenas a média.

Instruções finais: Explique cada etapa com frases completas e calcule com cuidado. Capriche especialmente na parte interpretativa!

5.4 Razão de variâncias — Distribuição F de Fisher

Sejam $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ duas amostras independentes de populações Normais, com variâncias σ_1^2 e σ_2^2. A estatística:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,\, n_2-1}$$

tem distribuição F de Fisher com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade.

5.5 Construção do Intervalo para σ_1^2/σ_2^2

- Suponha: duas amostras independentes de populações Normais.
- A quantidade pivotal é: $F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,\, n_2-1}$.

Passos:

1. Determinar os quantis $F_{\alpha/2;\, n_1-1,\, n_2-1}$ e $F_{1-\alpha/2;\, n_1-1,\, n_2-1}$.
2. Construir a probabilidade central:

$$P\left(F_{\alpha/2;\, n_1-1,\, n_2-1} \leq \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \leq F_{1-\alpha/2;\, n_1-1,\, n_2-1}\right) = 1 - \alpha$$

3. Isolar σ_1^2/σ_2^2:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

Resultado final:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left[\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}}\right]}$$

Para o intervalo da razão dos desvios-padrão, basta extrair a raiz quadrada dos extremos.

Exemplo — Comparando a variabilidade de duas marcas de fones de ouvido

Duas marcas diferentes de fones de ouvido foram testadas quanto à duração da bateria (em horas). Foram coletadas amostras independentes:

- **Marca A:** $n_1 = 10$, desvio-padrão amostral $S_1 = 1{,}2$.

- **Marca B:** $n_2 = 9$, desvio-padrão amostral $S_2 = 0{,}8$.

Deseja-se construir um intervalo de confiança de 95% para a razão das variâncias σ_1^2/σ_2^2.

Passo 1 — Dados da amostra:

$$S_1^2 = 1{,}44, \quad S_2^2 = 0{,}64, \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1{,}44}{0{,}64} = 2{,}25$$

$$gl_1 = n_1 - 1 = 9, \quad gl_2 = n_2 - 1 = 8$$

Passo 2 — Quantis da distribuição F

Utilizando o comando no `R`:

```
qf(c(0.025, 0.975), df1 = 9, df2 = 8)
```

Resultado:

$$F_{0.025;9,8} = 0{,}262, \qquad F_{0.975;9,8} = 3{,}515$$

Passo 3 — Construção do intervalo

$$IC_{95\%}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left[\frac{2{,}25}{3{,}515}, \quad \frac{2{,}25}{0{,}262}\right] = [0{,}64,\ 8{,}59]$$

Passo 4 — Intervalo para a razão dos desvios-padrão

$$\sqrt{0{,}64} \approx 0{,}80, \quad \sqrt{8{,}59} \approx 2{,}93$$

$$IC_{95\%}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = [0{,}80,\ 2{,}93]$$

Passo 5 — Interpretação do intervalo de confiança:

Com 95% de confiança, os dados indicam que a razão entre as variâncias populacionais das duas marcas está entre 0,64 e 8,59. Isso quer dizer que a variância da Marca A pode ser consideravelmente menor, semelhante ou até cerca de 9 vezes maior que a da Marca B — todas essas possibilidades são compatíveis com a amostra observada.

Convertendo o intervalo para a razão entre os desvios-padrão, temos:

$$IC_{95\%}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = [0{,}80,\ 2{,}93]$$

Ou seja, com 95% de confiança, o desvio-padrão da Marca A pode ser aproximadamente 20% menor até quase 3 vezes maior que o da Marca B. Como o intervalo contém o valor 1 (igualdade) e também valores menores e maiores, os dados não fornecem evidência estatística suficiente para afirmar que as duas marcas têm variabilidades diferentes.

Conclusão prática: A diferença observada nas amostras pode ser apenas resultado de variação aleatória. Para avaliar com mais precisão se uma marca é realmente mais consistente do que a outra, seria necessário coletar amostras maiores.

EXERCÍCIO IV — Comparando a Variabilidade com a Distribuição F

Transporte por aplicativo — Previsibilidade do tempo de viagem:

Dois motoristas parceiros de apps como Uber e 99 fazem o mesmo trajeto diariamente. Ambos têm o mesmo tempo médio de viagem: $\bar{X} = 25$ minutos. No entanto, o nível de **consistência** das viagens pode ser diferente — e é isso que os desenvolvedores do app querem investigar.

Foram coletadas amostras independentes com 30 viagens de cada motorista. Os desvios-padrão amostrais dos tempos de viagem foram:

- **Motorista A:** $n_1 = 30$ viagens, desvio-padrão $S_1 = 1{,}0$ minuto.
- **Motorista B:** $n_2 = 30$ viagens, desvio-padrão $S_2 = 4{,}5$ minutos.

Assuma que os tempos de viagem seguem uma distribuição Normal.

Objetivo: Construir um **intervalo de confiança de 95%** para a razão σ_B^2/σ_A^2, e interpretar os resultados com foco em **previsibilidade**.

a) Calcule as variâncias amostrais S_1^2 e S_2^2.

b) Determine os graus de liberdade de cada amostra.

c) Usando o nível de confiança de 95%, calcule os quantis da distribuição F com os respectivos graus de liberdade. **Dica:** no `R`, use:

```
qf(c(0.025, 0.975), df1 = 29, df2 = 29)
```

d) Construa o intervalo de confiança para a razão σ_B^2/σ_A^2 (razão entre as variâncias populacionais).

e) Construa o intervalo correspondente para a razão entre os desvios-padrão populacionais σ_B/σ_A.

f) Interprete os resultados:

i) O que significa dizer que o nível de confiança é 95%?

ii) O que o intervalo obtido diz sobre a **consistência** dos dois motoristas?

iii) Se você tivesse hora marcada para um compromisso, qual motorista escolheria? Justifique usando a variância.

iv) Por que comparar apenas as médias não é suficiente neste caso?

Instruções finais: Apresente os cálculos com clareza, mas capriche especialmente nas interpretações. Imagine que você está explicando para um gerente de produto que quer melhorar a experiência do usuário no app.

6 Vamos praticar no R?

Suponha que você faça parte da equipe de engenharia de qualidade da empresa **AudioMax**, especializada em tecnologia de fones de ouvido inteligentes com cancelamento de ruído e assistente de voz integrado.

Nas últimas semanas, dois fornecedores de microprocessadores embarcados (Modelo A e Modelo B) foram testados para integrar a nova linha de fones premium da marca. O objetivo é avaliar o **tempo de resposta** do assistente de voz embutido (em segundos) ao receber comandos simples.

Seu gerente quer uma resposta objetiva e baseada em dados:

> *"Qual dos dois modelos oferece melhor desempenho? E mais importante: qual é mais consistente? Nosso cliente quer respostas rápidas, mas acima de tudo, confiáveis."*

0) Antes de tudo: descrevendo os dados e olhando o formato das distribuições

Você recebeu do seu chefe um arquivo chamado `dados_fones.csv`, que contém os tempos de resposta (em segundos) de dois modelos de microprocessadores, A e B, coletados em um ambiente de teste controlado. Cada linha do arquivo traz duas informações: o modelo utilizado e o respectivo tempo de resposta observado. Sua missão é analisar esses dados no `R` para responder às perguntas do gerente sobre desempenho e consistência dos modelos.

- `modelo`: identificador do fornecedor do microprocessador (A ou B);
- `tempo`: tempo de resposta do assistente de voz (em *segundos*) para um comando simples.

Sua primeira tarefa é conferir a **estrutura**, **resumos numéricos** e **distribuições** antes de partir para os intervalos de confiança.

Saída do R — estrutura, primeiras linhas e `summary`:

```
--- ESTRUTURA DOS DADOS ---
'data.frame':  90 obs. of  2 variables:
$ modelo: chr  "A" "A" "A" "A" ...
$ tempo : num  0.972 0.988 1.078 1.004 1.006 ...

--- PRIMEIRAS OBSERVAÇÕES ---
modelo     tempo
1      A 0.9719762
2      A 0.9884911
3      A 1.0779354
4      A 1.0035254
5      A 1.0064644
```

```
6      A 1.0857532

--- RESUMO ESTATÍSTICO GERAL ---
modelo              tempo
Length:90          Min.   :0.8084
Class :character   1st Qu.:0.9560
Mode  :character   Median :0.9881
Mean   :0.9899
3rd Qu.:1.0270
Max.   :1.1135

--- RESUMO POR MODELO ---
Modelo A:
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.9017  0.9720  0.9964  1.0017  1.0349  1.1084

Modelo B:
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.8084  0.9460  0.9762  0.9752  1.0038  1.1135
```

Descrição dos dados:

– **Modelo A** apresenta média 1,0017 s e distribuição concentrada próximo de 1 s (Q1 = 0,9720; Q3 = 1,0349), sugerindo *boa estabilidade*.

– **Modelo B** apresenta média 0,9752 s (mais rápida), mas com faixa um pouco mais ampla (Q1 = 0,9460; Q3 = 1,0038) e *mínimo* mais baixo (0,8084), sinalizando maior dispersão.

A Figura 4 apresenta a distribuição dos tempos de resposta dos dois modelos de microprocessadores. As medianas estão próximas de 1 segundo, com o modelo B levemente mais baixo, o que indica respostas um pouco mais rápidas. A dispersão dos tempos do modelo B é maior, como evidenciado pela amplitude da caixa e pela extensão dos intervalos externos, além da presença de valores mais extremos. Esses resultados sugerem que, embora o modelo B tenda a ser mais rápido, apresenta também maior variabilidade, o que pode comprometer a consistência da experiência do usuário.

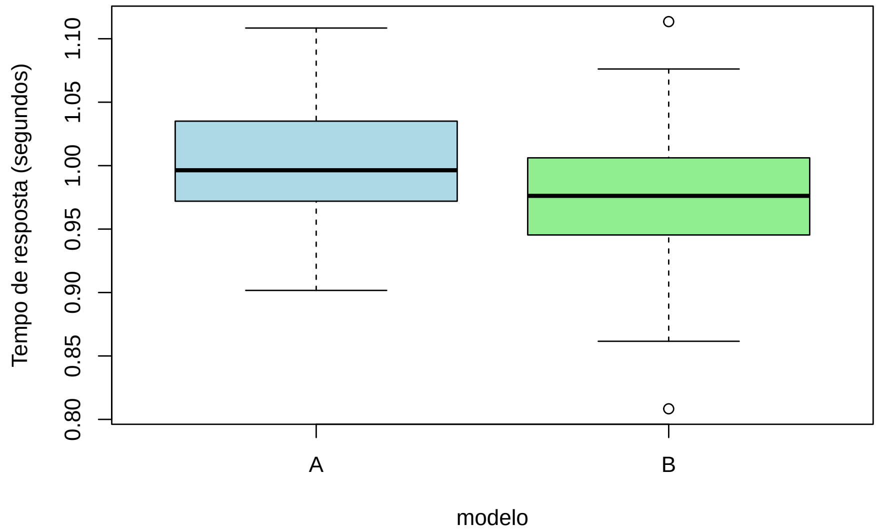

Figura 4: Boxplot comparativo dos tempos de resposta dos modelos A e B.

Agora que os dados foram descritos e explorados, vamos às perguntas solicitadas pelo gerente:

1) Qual é o tempo médio de resposta estimado para cada modelo?

- Modelo A: 1,0017 segundos
- Modelo B: 0,9752 segundos

```
> print(ic_A_95)
mean     lwr.ci    upr.ci
1.0017202 0.9885637 1.0148766

> print(ic_B_95)
mean     lwr.ci    upr.ci
0.9751616 0.9559125 0.9944107
```

Interpretação: O Modelo B é, em média, mais rápido que o Modelo A por cerca de 0,026 s. Em interações repetidas, diferenças nessa ordem podem ser percebidas pelo usuário.

2) Qual é a margem de erro e a amplitude do IC da média do Modelo A em diferentes níveis de confiança?

Nível de Confiança	Margem de Erro	Amplitude
90%	0,0110 s	0,0220 s
95%	0,0132 s	0,0263 s
99%	0,0175 s	0,0351 s

```
IC 90%:  Margem de erro = 0.01097619  | Amplitude = 0.02195239
IC 95%:  Margem de erro = 0.01315647  | Amplitude = 0.02631293
IC 99%:  Margem de erro = 0.01754535  | Amplitude = 0.0350907
```

Interpretação: aumentar o nível de confiança exige intervalos mais largos. Mesmo assim, os valores do Modelo A permanecem próximos de 1 segundo, o que indica bom controle do processo.

3) Qual o tamanho de amostra necessário para estimar a média do Modelo A com margem de erro de 0,01 s?

– Confiança 90%: 58 observações

– Confiança 95%: 83 observações

– Confiança 99%: 143 observações

```
Confiança 90%: 58 observações
Confiança 95%: 83 observações
Confiança 99%: 143 observações
```

Interpretação: margens de erro pequenas requerem amostras maiores. Para 99% de confiança com erro de 0,01 s, são necessárias cerca de 143 medições do Modelo A.

4) Existe diferença significativa entre as médias dos modelos A e B?

– IC 90%: [0,0073 ; 0,0458] $\Rightarrow$ não contém 0

– IC 95%: [0,0035 ; 0,0496] $\Rightarrow$ não contém 0

– IC 99%: [$-$0,0040 ; 0,0571] $\Rightarrow$ contém 0

```
IC 90%: 0.0266 [0.0073 ; 0.0458]
IC 95%: 0.0266 [0.0035 ; 0.0496]
```

```
IC 99%: 0.0266 [-0.0040 ; 0.0571]
```

Interpretação: com 90% e 95% de confiança, há evidência de diferença entre as médias (o Modelo B é mais rápido). Com 99%, a evidência não é conclusiva, pois o intervalo inclui 0.

5) Como está a variabilidade (previsibilidade) dos dois modelos?

- Modelo A: variância = 0,0021 IC 95% = [0,0015 ; 0,0033]
- Modelo B: variância = 0,0036 IC 95% = [0,0024 ; 0,0060]

```
Modelo A:
0.002143088 [0.001495410 ; 0.003327891]

Modelo B:
0.003622612 [0.002430862 ; 0.005972771]
```

Interpretação: o Modelo A é mais previsível (menor variância). O Modelo B tende a variar mais, o que pode gerar respostas menos consistentes.

6) A diferença de variabilidade entre os modelos é estatisticamente significativa? (Razão A / B)

- IC 90%: [0,3541 ; 0,9718] $\Rightarrow$ não contém 1
- IC 95%: [0,3204 ; 1,0697] $\Rightarrow$ contém 1
- IC 99%: [0,2627 ; 1,2917] $\Rightarrow$ contém 1

```
IC 90%: [0.3541430 ; 0.9718292]
IC 95%: [0.3204197 ; 1.0697115]
IC 99%: [0.262660 ; 1.291725]
```

Interpretação: para 90% de confiança, as variâncias parecem diferentes (intervalo não contém 1). Para 95% e 99%, a evidência não é suficiente (intervalos incluem 1). A decisão depende do nível de confiança exigido.

Conclusão — Comparação entre os Modelos A e B

- **Velocidade média:** O Modelo B responde em média mais rápido (0,975 s) do que o Modelo A (1,002 s). Pelos ICs calculados, a diferença de médias **não contém 0** nos níveis de 90% e 95% de confiança, o que indica que as médias não são iguais. No entanto, ao nível de 99% de confiança, o zero pertence ao IC, logo as médias podem ser consideradas iguais.
- **Consistência:** O Modelo A apresenta menor variabilidade (menor variância). Nos ICs da razão de variâncias, ao nível de 90% o valor 1 não pertence ao intervalo, sugerindo que as variabilidades não são iguais. Porém, nos níveis de 95% e 99% o valor 1 pertence ao intervalo, indicando que as variabilidades podem ser consideradas iguais.
- **Equilíbrio entre rapidez e consistência:**
  - ▷ Modelo B: respostas mais rápidas, porém com maior dispersão;
  - ▷ Modelo A: respostas mais consistentes, mas ligeiramente mais lentas.
- **Recomendação prática:**
  - ▷ Se a prioridade é **rapidez**, escolher o Modelo B;
  - ▷ Se a prioridade é **regularidade/consistência**, escolher o Modelo A.
- **Próximos passos:**
  - ▷ Avaliar possíveis ajustes no processo do Modelo B para tentar reduzir a variação nos tempos de resposta;
  - ▷ Caso seja possível obter mais dados, realizar novos testes com um número maior de observações (principalmente do Modelo B). Isso permitirá construir intervalos de confiança mais estreitos e alcançar conclusões mais seguras.

Script R:

```
# ----------------------------
# SCRIPT - ANÁLISE DE INTERVALOS DE CONFIANÇA
# ----------------------------

# 1. Instalar e carregar o pacote necessário
if (!require(DescTools)) install.packages("DescTools")
library(DescTools)

# 2. Leitura dos dados
dados <- read.table("dados_fones.csv", header = TRUE, sep = ",")

# 3. Separar os dados por modelo
modelo_A <- subset(dados, modelo == "A")$tempo
modelo_B <- subset(dados, modelo == "B")$tempo

# 4. IC da MÉDIA - Modelos A e B
cat("\n--- IC da MÉDIA - MODELO A ---\n")
ic_A_90 <- MeanCI(modelo_A, conf.level = 0.90)
ic_A_95 <- MeanCI(modelo_A, conf.level = 0.95)
ic_A_99 <- MeanCI(modelo_A, conf.level = 0.99)
print(ic_A_90)
print(ic_A_95)
print(ic_A_99)

cat("\n--- IC da MÉDIA - MODELO B ---\n")
ic_B_90 <- MeanCI(modelo_B, conf.level = 0.90)
ic_B_95 <- MeanCI(modelo_B, conf.level = 0.95)
ic_B_99 <- MeanCI(modelo_B, conf.level = 0.99)
print(ic_B_90)
print(ic_B_95)
print(ic_B_99)

# 5. Margem de erro e amplitude - Modelo A
erro_A_90 <- (ic_A_90["upr.ci"] - ic_A_90["lwr.ci"]) / 2
ampl_A_90 <- ic_A_90["upr.ci"] - ic_A_90["lwr.ci"]
erro_A_95 <- (ic_A_95["upr.ci"] - ic_A_95["lwr.ci"]) / 2
ampl_A_95 <- ic_A_95["upr.ci"] - ic_A_95["lwr.ci"]
erro_A_99 <- (ic_A_99["upr.ci"] - ic_A_99["lwr.ci"]) / 2
ampl_A_99 <- ic_A_99["upr.ci"] - ic_A_99["lwr.ci"]

cat("\n--- MARGEM DE ERRO E AMPLITUDE - MODELO A ---\n")
cat("IC 90%:  Margem de erro =", erro_A_90, " | Amplitude =", ampl_A_90, "\n")
cat("IC 95%:  Margem de erro =", erro_A_95, " | Amplitude =", ampl_A_95, "\n")
cat("IC 99%:  Margem de erro =", erro_A_99, " | Amplitude =", ampl_A_99, "\n")

# 6. Tamanho da amostra necessário para margem de erro = 0.01s
margem_desejada <- 0.01
desvio_A <- sd(modelo_A)
z_90 <- qnorm(1 - (1 - 0.90)/2)
z_95 <- qnorm(1 - (1 - 0.95)/2)
z_99 <- qnorm(1 - (1 - 0.99)/2)
n_90 <- (z_90 * desvio_A / margem_desejada)^2
n_95 <- (z_95 * desvio_A / margem_desejada)^2
n_99 <- (z_99 * desvio_A / margem_desejada)^2
cat("\n--- TAMANHO DA AMOSTRA NECESSÁRIO (Margem = 0.01s) ---\n")
cat("Confiança 90%:", ceiling(n_90), "observações\n")
```

```
cat("Confiança 95%:", ceiling(n_95), "observações\n")
cat("Confiança 99%:", ceiling(n_99), "observações\n")

# 7. IC da DIFERENÇA DE MÉDIAS (Modelo A - Modelo B)
cat("\n--- IC da DIFERENÇA DE MÉDIAS (A - B) ---\n")
ic_diff_90 <- MeanDiffCI(modelo_A, modelo_B, conf.level = 0.90)
ic_diff_95 <- MeanDiffCI(modelo_A, modelo_B, conf.level = 0.95)
ic_diff_99 <- MeanDiffCI(modelo_A, modelo_B, conf.level = 0.99)
print(ic_diff_90)
print(ic_diff_95)
print(ic_diff_99)

# 8. IC da VARIÂNCIA de cada modelo
cat("\n--- IC da VARIÂNCIA - MODELO A ---\n")
print(VarCI(modelo_A, conf.level = 0.95))
cat("\n--- IC da VARIÂNCIA - MODELO B ---\n")
print(VarCI(modelo_B, conf.level = 0.95))

# 9. IC da RAZÃO DE VARIÂNCIAS (A / B)
cat("\n--- IC da RAZÃO DE VARIÂNCIAS (A / B) ---\n")
print(VarTest(modelo_A, modelo_B, conf.level = 0.90)$conf.int)
print(VarTest(modelo_A, modelo_B, conf.level = 0.95)$conf.int)
print(VarTest(modelo_A, modelo_B, conf.level = 0.99)$conf.int)
```

7 Intervalos de Confiança Assintóticos (Aproximados)

Motivação Em muitos problemas reais, não conhecemos a distribuição exata da estatística amostral. Para amostras grandes, podemos usar aproximações assintóticas — ou seja, válidas quando n é grande. Isso permite construir intervalos de confiança usando a distribuição Normal padrão.

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com média μ e variância finita σ^2. O Teorema Central do Limite afirma que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

ou seja, a média amostral $\bar{X}$ tende a seguir uma distribuição aproximadamente Normal conforme o tamanho da amostra aumenta.

Seja $\hat{\theta}$ um estimador de máxima verossimilhança (EMV) para um parâmetro θ. Sob condições regulares, temos:

$$\boxed{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \;\xrightarrow{d}\; N\left(0,\; \frac{1}{\mathcal{I}(\theta)}\right)}$$

Isso implica que:

$$\boxed{\hat{\theta} \;\overset{\mathcal{A}}{\sim}\; N\left(\theta,\; \frac{1}{n \cdot \mathcal{I}(\theta)}\right),}$$

em que $\mathcal{I}(\theta)$ é a **informação de Fisher**, definida por:

$$\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta)\right]$$

Essa forma fornece a variância assintótica do estimador e é a base para construção de ICs aproximados. O intervalo de confiança é:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n \cdot \mathcal{I}(\theta)}}\right]$$

Exemplo — Proporção: amostra de variáveis Bernoulli

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n, com cada X_i seguindo uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p, ou seja:

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

A soma total de sucessos é:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \sim \ \text{Bin}(n, p)$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) para p é:

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

A log-verossimilhança baseada nos dados é:

$$\log L(p) = \sum_{i=1}^{n} [X_i \log p + (1 - X_i) \log(1 - p)] = X \log p + (n - X) \log(1 - p)$$

Derivando duas vezes e tomando a esperança, obtemos a informação de Fisher:

$$\mathcal{I}(p) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log L(p)\right] = \frac{n}{p(1-p)}$$

Portanto, a variância assintótica do estimador $\hat{p}$ é:

$$\text{Var}(\hat{p}) \stackrel{\mathcal{A}}{=} \frac{1}{\mathcal{I}(p)} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Isso justifica o uso do intervalo de confiança assintótico baseado em Normal:

$$\hat{p} \ \stackrel{\mathcal{A}}{\sim} \ N\left(p, \ \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

7.1 Intervalo de Confiança para Proporção (Assintótico)

Objetivo: Estimar a proporção populacional p com base em uma amostra aleatória de tamanho n, onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis independentes e identicamente distribuídas, com

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Estimador:

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Distribuição assintótica:

$$\hat{p} \ \stackrel{\mathcal{A}}{\sim} \ N\left(p, \ \frac{p(1-p)}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \ \stackrel{\mathcal{A}}{\sim} \ N(0, 1)$$

Intervalo de confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(p) = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]}$$

Condições para validade:

- Aproximação válida quando $n\hat{p} \geq 5$ e $n(1-\hat{p}) \geq 5$
- Resultados mais confiáveis com amostras grandes

Margem de erro (E) e amplitude (A):

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \qquad A = 2E$$

Exemplo: proporção de estudantes que usam TikTok todos os dias

Uma pesquisa com $n = 200$ estudantes revelou que $X = 124$ usam TikTok diariamente.

- Estimativa: $\hat{p} = \dfrac{124}{200} = 0{,}62$
- Erro padrão: $EP = \sqrt{\dfrac{0{,}62 \cdot (1 - 0{,}62)}{200}} \approx 0{,}0343$
- Margem de erro (95%): $E = 1{,}96 \cdot 0{,}0343 \approx 0{,}0672$
- Intervalo: $IC_{95\%}(p) = [\,0{,}5528,\ 0{,}6872\,]$

Interpretação: Com 95% de confiança, valores plausíveis para a proporção de estudantes que usam TikTok diariamente estão entre 0,5528 e 0,6872. Em termos percentuais, isso corresponde a um intervalo de 55,28% e 68,72%.

7.1.1 Determinação do Tamanho Amostral

Ao planejar um estudo, frequentemente desejamos determinar o tamanho amostral n necessário para que o intervalo de confiança para p tenha uma margem de erro pré-estabelecida E com nível de confiança $1 - \alpha$.

Sabemos que

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Rearranjando para n, obtemos:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2\, p(1-p)}{E^2}.$$

Problema: Na prática, o valor verdadeiro de p é desconhecido, justamente o parâmetro que desejamos estimar. Isso gera a dúvida: qual p usar no cálculo do tamanho da amostra?

Solução usual: O produto $p(1-p)$ é máximo quando $p = 0.5$, pois

$$p(1-p) = p - p^2$$

é uma parábola com vértice em $p = 0.5$, cujo valor máximo é 0.25.

Portanto, ao adotar $p = 0.5$, obtemos o cenário *mais conservador*, isto é, o maior valor possível de n. Dessa forma, garantimos que a amostra calculada será suficiente para qualquer valor real de p.

Intuição: Imagine uma urna cheia de bolinhas de duas cores: vermelhas (sucesso) e azuis (fracasso). Se quase todas as bolinhas são vermelhas (p perto de 1) ou quase todas são azuis (p perto de 0), basta tirar algumas poucas para ter uma boa ideia da proporção — a amostra "fala por si".

Agora, se a urna tem metade vermelha e metade azul ($p = 0.5$), cada retirada é uma verdadeira incerteza: pode vir qualquer cor, e só olhando poucas bolinhas não dá para ter segurança sobre o equilíbrio. É justamente nesse caso que a variabilidade é máxima, e por isso precisamos de uma amostra bem maior para chegar a uma conclusão precisa.

Assim, assumir $p = 0.5$ no cálculo amostral significa considerar o cenário de maior incerteza possível. Se conseguimos garantir a precisão nesse caso, automaticamente estaremos cobertos para qualquer outro valor de p.

Exemplo comparativo:

Desejamos estimar a proporção de estudantes que utilizam diariamente uma rede social com nível de confiança de 95% e margem de erro $E = 0.05$.

- Nível de confiança 95% $\Rightarrow z_{0.025} = 1.96$
- Margem de erro desejada: $E = 0.05$

Caso 1: supondo $p = 0.5$ (caso conservador):

$$n = \frac{1.96^2 \cdot 0.25}{0.05^2} = \frac{3.8416 \cdot 0.25}{0.0025} = \frac{0.9604}{0.0025} = 384.16 \approx 385.$$

Caso 2: supondo uma estimativa preliminar $p = 0.2$ (por exemplo, com base em pesquisa-piloto):

$$n = \frac{1.96^2 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{0.05^2} = \frac{3.8416 \cdot 0.16}{0.0025} = \frac{0.6147}{0.0025} = 245.9 \approx 246.$$

Comparação: Com a escolha conservadora $p = 0.5$, obtemos $n \approx 385$ respondentes. Já ao considerar uma estimativa mais realista, como $p = 0.2$, o tamanho amostral necessário cai para $n \approx 246$. Isso mostra que o uso de $p = 0.5$ fornece um cálculo mais conservador (maior amostra).

Exemplo aplicado: Pesquisa eleitoral (IBOPE)

Nas pesquisas eleitorais, um dos principais objetivos é estimar a proporção p de eleitores que pretendem votar em determinado candidato. A margem de erro divulgada pela imprensa — como "± 2 pontos percentuais" ou "± 3 pontos percentuais" — está diretamente ligada ao cálculo do tamanho amostral.

Situação: Suponha que o instituto de pesquisa queira estimar a proporção de eleitores que votarão no candidato XXX, com nível de confiança de 95% e margem de erro de no máximo $E = 0.02$ (ou 2 pontos percentuais).

Cálculo conservador (sem conhecimento prévio de p):

$$n = \frac{z_{0.025}^2 \cdot p(1-p)}{E^2} = \frac{1.96^2 \cdot 0.50 \cdot 0.50}{0.02^2} = \frac{1.96^2 \cdot 0.25}{0.0004} = \frac{3.8416 \cdot 0.25}{0.0004} = \frac{0.9604}{0.0004} = 2401.$$

Portanto, seriam necessários aproximadamente $n = 2401$ eleitores na amostra.

Cálculo com estimativa prévia (por exemplo, $p \approx 0.30$):

$$n = \frac{z_{0.025}^2 \cdot p(1-p)}{E^2} = \frac{1.96^2 \cdot 0.30 \cdot 0.70}{0.02^2} = \frac{3.8416 \cdot 0.21}{0.0004} = \frac{0.8067}{0.0004} = 2017.$$

Nesse caso, apenas $n \approx 2017$ eleitores seriam suficientes.

Interpretação: Quando não temos informação prévia sobre p, usamos $p = 0.5$ e obtemos a amostra máxima necessária ($n = 2401$). Se já existe uma estimativa preliminar (por exemplo, de pesquisas anteriores indicando $p \approx 0.30$), o tamanho amostral pode ser reduzido sem perder a confiabilidade ($n = 2017$).

Exercício V — Compras online entre jovens

Uma pesquisa com $n = 150$ estudantes mostrou que $X = 99$ compram roupas ou acessórios online ao menos uma vez por mês.

a) Calcule a proporção amostral $\hat{p}$.

b) Verifique se é válido aplicar o IC assintótico.

c) Calcule o erro padrão da estimativa.

d) Para nível de confiança de 95%, calcule:

- i) a margem de erro E;
- ii) a amplitude A;
- iii) o intervalo de confiança $IC_{95\%}(p)$.

e) Interprete o intervalo encontrado.

f) Como reduzir a amplitude mantendo o mesmo nível de confiança?

Instruções finais: Mostre todos os cálculos e explique cada resposta com frases completas. Respostas apenas numéricas não valem nota total.

7.2 Intervalo de Confiança para Diferença de Proporções (Assintótico)

Objetivo: Estimar a diferença entre duas proporções populacionais, $p_1 - p_2$.

Contexto (formulação clara com somas):

$$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(p_1), \qquad X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(p_2),$$

amostras *independentes* entre si. Defina os totais de sucessos

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}, \qquad S_2 = \sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j},$$

e as proporções amostrais (estimadores)

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j}.$$

Diferença estimada:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2.$$

Distribuição assintótica da diferença:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \overset{\mathcal{A}}{\sim} N\left(p_1 - p_2,\ \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right).$$

Substituindo p_1, p_2 por seus estimadores para obter o erro-padrão:

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \overset{\mathcal{A}}{\sim} N(0,1).$$

Intervalo de confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(p_1 - p_2) = \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \ \pm\ z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right].}$$

Margem de erro e amplitude:

$$E \ = \ z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}, \qquad A \ = \ 2E.$$

Condições de validade (regra prática):

$$n_1\hat{p}_1 \geq 5, \ \ n_1(1-\hat{p}_1) \geq 5, \qquad n_2\hat{p}_2 \geq 5, \ \ n_2(1-\hat{p}_2) \geq 5.$$

Exemplo: TikTok vs Instagram — proporção de uso diário

Um estudo entrevistou dois grupos independentes de estudantes para investigar a frequência de uso diário de duas redes sociais:

- Grupo 1 (TikTok): $n_1 = 180$, com $X_1 = 117$ usuários diários.
- Grupo 2 (Instagram): $n_2 = 160$, com $X_2 = 96$ usuários diários.

Deseja-se construir um intervalo de confiança de 95% para a diferença $p_1 - p_2$ entre as proporções de usuários diários.

Estimativas:

$$\hat{p}_1 = \frac{117}{180} \approx 0.650, \quad \hat{p}_2 = \frac{96}{160} = 0.600$$

Erro padrão:

$$\begin{aligned} EP &= \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{180} + \frac{0.60 \cdot 0.40}{160}} \\ &= \sqrt{\frac{0.2275}{180} + \frac{0.24}{160}} \\ &= \sqrt{0.001264 + 0.001500} \\ &= \sqrt{0.002764} \approx 0.0526 \end{aligned}$$

Margem de erro (95%):

$$E = 1.96 \cdot 0.0526 \approx 0.1031$$

Intervalo de confiança:

$$IC_{95\%}(p_1 - p_2) = [0.650 - 0.600 - 0.1031,\ 0.650 - 0.600 + 0.1031] = [-0.0531,\ 0.1531]$$

Interpretação: Com 95% de confiança, a diferença real entre as proporções de usuários diários de TikTok e Instagram está entre $-5{,}31\%$ e $15{,}31\%$. Como o intervalo inclui zero, não podemos afirmar que existe uma diferença estatisticamente significativa entre os dois grupos.

Exercício VI — Diferença entre proporções: hábito de estudar à noite

Um levantamento foi feito com dois grupos de estudantes:

- Grupo 1 (ensino médio): $n_1 = 120$, com $X_1 = 84$ que costumam estudar à noite.
- Grupo 2 (universitários): $n_2 = 100$, com $X_2 = 74$ que costumam estudar à noite.

Deseja-se construir um intervalo de confiança de 95% para a diferença $p_1 - p_2$ entre as proporções populacionais.

Tarefas:

a) Calcule $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$.

b) Verifique se é válido usar a aproximação Normal.

c) Calcule o erro padrão da diferença.

d) Calcule a margem de erro e a amplitude.

e) Construa o intervalo de confiança de 95%.

f) Interprete o resultado: a diferença é estatisticamente significativa?

g) Como reduzir a amplitude do intervalo mantendo o mesmo nível de confiança?

Instruções: Explique todos os passos com clareza. Justifique a validade da aproximação e interprete o intervalo com frases completas.

Exemplo no `R` — IC para proporção (assintótico via Wald)

Considere uma amostra aleatória de $n = 200$ estudantes, dos quais $X = 124$ afirmaram usar TikTok diariamente. Vamos estimar a proporção populacional com um intervalo de confiança de 95%.

Script `R`:

```
# ----------------------------
# IC ASSINTÓTICO PARA PROPORÇÃO (MÉTODO DE WALD)
# ----------------------------

# 1. Instalar e carregar o pacote
if (!require(DescTools)) install.packages("DescTools")
library(DescTools)

# 2. Parâmetros da amostra
x <- 124
n <- 200

# 3. IC assintótico com método "wald"
ic_wald <- BinomCI(x = x, n = n, conf.level = 0.95, method = "wald")
print(ic_wald)

# 4. Cálculo da margem de erro e amplitude
erro <- (ic_wald[1, "upr.ci"] - ic_wald[1, "lwr.ci"]) / 2
ampl <- ic_wald[1, "upr.ci"] - ic_wald[1, "lwr.ci"]

cat("Margem de erro:", erro, "\n")
cat("Amplitude do IC:", ampl, "\n")
```

Observação: o método ‘"wald"‘ corresponde à abordagem apresentada em aula, baseada na aproximação Normal e na variância estimada da proporção amostral.

Exemplo no R — IC para diferença de proporções (assintótico via Wald)

Considere dois grupos independentes:

- Grupo 1 (TikTok): $n_1 = 180$ com $X_1 = 108$ usuários diários.
- Grupo 2 (Instagram): $n_2 = 160$ com $X_2 = 96$ usuários diários.

Vamos estimar a diferença $p_1 - p_2$ com um intervalo de confiança assintótico de 95%.

Script R:

```r
# ---------------------------
# IC ASSINTÓTICO PARA DIFERENÇA DE PROPORÇÕES (WALD)
# ---------------------------

# 1. Dados dos dois grupos
x1 <- 108; n1 <- 180
x2 <- 96;  n2 <- 160

# 2. Proporções amostrais
p1 <- x1 / n1
p2 <- x2 / n2
dif <- p1 - p2

# 3. Quantil z para 95%
z <- qnorm(1 - 0.05/2)

# 4. Erro padrão da diferença
EP <- sqrt(p1*(1 - p1)/n1 + p2*(1 - p2)/n2)

# 5. Margem de erro e intervalo
E <- z * EP
ic <- c(dif - E, dif + E)

# 6. Resultados
cat("Estimativa da diferença:", round(dif, 4), "\n")
cat("Erro padrão:", round(EP, 4), "\n")
cat("Margem de erro:", round(E, 4), "\n")
cat("Intervalo de confiança 95%: [", round(ic[1], 4), ",", round(ic[2], 4), "]\n")

# 7. Verificar se IC contém zero
if (ic[1] <= 0 && ic[2] >= 0) {
 cat("O IC contém 0, portanto, não há evidência de diferença significativa.\n")
} else {
 cat("O IC não contém 0, portanto, há evidência de diferença significativa.\n")
}
```