

Atividade I: Ilustrando o Teorema Central do Limite

Tatiene Souza

26 de junho de 2025

1 Regras do Jogo

- Esta atividade vale **até 1,5 ponto** na avaliação da Unidade I.
- As equipes devem ser compostas por **no máximo 4 estudantes**.
- A apresentação deverá ser realizada por **todos os integrantes da equipe**, no dia **26/06/2025**, com tempo limite de **10 minutos por equipe**.
- A **presença de todos os membros é obrigatória** no momento da apresentação. A ausência de qualquer integrante resultará em prejuízo na nota do grupo.
- Cada equipe deve enviar, **até o dia 03/07/2025**, os seguintes arquivos para o e-mail tatitex@gmail.com:
 - Os slides da apresentação em formato PDF.
 - O script em R desenvolvido para ilustrar o Teorema Central do Limite.

2 Contexto e Objetivo Comum a Todas as Equipes

Todas as equipes receberão um problema com uma variável aleatória que segue uma distribuição conhecida. A missão é a mesma para todas: **mostrar na prática como o Teorema Central do Limite (TCL) funciona**.

Para isso, cada grupo irá explorar o comportamento da **média amostral** ao gerar dados simulados no software R. A proposta é usar a simulação para entender como a média de variáveis aleatórias se comporta quando o tamanho da amostra aumenta — e como isso leva a uma distribuição próxima da normal, como prevê o TCL.

Todas as equipes devem executar a seguinte simulação de Monte Carlo (com 1000 réplicas):

1. Fixar a semente com `set.seed(123)` para garantir reprodutibilidade.
2. Gerar amostras aleatórias com tamanhos $n = 10, 30, 50$ e 100 .
3. Em cada réplica, gerar uma amostra a partir da distribuição definida no seu problema.

4. Calcular a média da amostra gerada.
5. Repetir isso 1000 vezes para cada tamanho n .
6. Armazenar as 1000 médias simuladas.
7. Construir um histograma das médias amostrais para cada valor de n .
8. Calcular e registrar o valor médio e a variância das 1000 médias simuladas.

O que deve ser analisado:

- Como é a forma da distribuição das médias amostrais?
- A distribuição se aproxima da normal conforme n aumenta?
- A variância da média amostral diminui com o aumento de n ?

Antes de simular, o grupo deve calcular e justificar:

- O valor esperado da média amostral: $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(X)$.
- A variância teórica da média amostral: $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\text{Var}(X)}{n}$.

Perguntas que cada equipe deve obrigatoriamente responder com dados, gráficos e argumentos:

“O que acontece com a distribuição das médias amostrais quando o tamanho da amostra aumenta?”

“Qual o valor esperado das médias amostrais para cada tamanho n considerado?”

“Qual a variância esperada das médias amostrais para cada valor de n ? A variância diminui com o crescimento de n ?”

Resumo: a equipe deve comprovar o Teorema Central do Limite de forma experimental, usando programação, interpretação estatística e comunicação clara dos resultados.

3 Missão II — Corrida Contra o Relógio!

Uma empresa de logística de entregas quer revolucionar o mercado prometendo prazos incrivelmente rápidos. Para isso, ela afirma que consegue realizar entregas em menos de 1 dia em grande parte dos pedidos.

Mas... será que isso é mesmo verdade?

Sua equipe foi chamada para investigar os dados e avaliar a viabilidade dessa promessa. A empresa forneceu um conjunto de informações estatísticas que mostram que o **tempo de entrega (em dias)** de um pedido segue uma **distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = 1$** . Isso significa que o tempo médio de entrega é de 1 dia.

O desafio tem dois objetivos principais:

1. **Simular e analisar o comportamento da média amostral dos tempos de entrega**, usando diferentes tamanhos de amostra ($n = 10, 30, 50, 100$). A equipe deve verificar se, conforme aumenta o tamanho da amostra, a distribuição da média amostral se aproxima de uma distribuição normal — como prevê o **Teorema Central do Limite (TCL)**.
2. **Calcular a probabilidade de que a média amostral do tempo de entrega seja menor a 0,5 dia**, ou seja, menos de 12 horas. Esse valor é estratégico: se a média de entregas em um lote de pedidos for inferior a 0,5, a empresa pode, com confiança, manter o marketing agressivo de "entrega em menos de meio dia".

Sua equipe deverá:

- Simular 1000 amostras aleatórias com tamanhos $n = 10, 30, 50$ e 100.
- Calcular as médias amostrais e construir os histogramas correspondentes.
- Observar se a distribuição das médias amostrais se aproxima da distribuição normal conforme n cresce.
- Usar o Teorema Central do Limite para calcular, de forma aproximada, diferentes probabilidades envolvendo a média amostral \bar{X} , como por exemplo:

$$P(\bar{X} < c), \quad P(\bar{X} > c), \quad \text{ou} \quad P(c < \bar{X} < d)$$

As probabilidades devem ser escolhidas com base no contexto do problema e interpretadas de forma clara. A aproximação deve considerar que \bar{X} segue aproximadamente uma distribuição normal, com média e variância definidas pela distribuição original e pelo tamanho da amostra.

- Comparar os resultados teóricos com os obtidos na simulação.
- Discutir a partir de qual tamanho amostral a aproximação pela normal se torna confiável.

Um lembrete para você e sua equipe: entendam bem a variável antes de simular!

- **Variável aleatória X** : tempo de entrega de um pedido, medido em dias.
- **Distribuição**: $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, com $\lambda = 1$
- **Função densidade**:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{para } x \geq 0$$

- **Esperança**: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- **Variância**: $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Função usada para gerar os dados no R:

`rexp(n, rate = 1)` — Gera uma amostra de tamanho `n` com tempo médio de 1 dia entre entregas.

Exemplo no R:

```
set.seed(123)
amostra <- rexp(30, rate = 1)
mean(amostra)
```

Mensagem para a equipe

Pronto! Agora que vocês entenderam a base do problema, chegou o momento de colocar a simulação em ação e responder todos os questionamentos. **Todos os membros da equipe devem se dedicar com empenho, contribuir igualmente e agir com honestidade durante todo o processo.** O trabalho em grupo só funciona quando há colaboração de verdade. **Lembrem-se: o céu é o limite — vocês são capazes de ir muito além do que imaginam!** Aproveitem a oportunidade para aprender, explorar e brilhar como equipe.