



UFU – Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Apostila de Lógica Proposicional ***(Fundamentos Básicos)***

Prof. Luiz Gustavo Almeida Martins

Fundamentos Básicos da Lógica

INTRODUÇÃO

1.1 Definição de Lógica

A lógica é o estudo sobre a natureza do raciocínio e do conhecimento. Ela é usada para formalizar e justificar os elementos do raciocínio empregados nas demonstrações / provas de teoremas.

A lógica clássica se baseia em um mundo bivalente ou binário (visão restrita do mundo real), onde os conhecimentos são representados por sentenças que só podem assumir dois valores verdade (verdadeiro ou falso). Portanto, nesse contexto, uma demonstração é um meio de descobrir uma verdade pré-existente deste mundo.

1.2 Lógica Proposicional

A lógica proposicional é a forma mais simples de lógica. Nela os fatos do mundo real são representados por sentenças sem argumentos, chamadas de **proposições**.

Ex:

MUNDO REAL	PROPOSIÇÃO LÓGICA
Hoje está chovendo	P
A rua está molhada	Q
Se está chovendo, então a rua está molhada.	$P \rightarrow Q$

Definição (proposição): uma proposição é uma sentença, de qualquer natureza, que pode ser qualificada de verdadeiro ou falso.

Ex: $1 + 1 = 2$ é uma proposição verdadeira da aritmética.

$0 > 1$ é uma proposição falsa da aritmética.

Se não é possível definir a interpretação (verdadeiro ou falso) da sentença, esta não é uma proposição. Alguns exemplos deste tipo de sentença são apresentados abaixo:

- Frases Interrogativas (ex: *Qual o seu nome?*).
- Frases Imperativas (ex: *Preste atenção!*).
- Paradoxos Lógicos (ex: *Esta frase é falsa*).

Exercício de Fixação

Verifique se as expressões abaixo são proposições. Justifique sua resposta.

- a) Boa sorte!
- b) Todas as mulheres possuem sua beleza.
- c) Márcio não é irmão do Mário.

- d) Não faça isto!
- e) Cecília é escritora.
- f) Quantos japoneses moram no Brasil?

1.3 Lógica e Informática

Na computação, a lógica pode ser utilizada, entre outras coisas, para:

- Conceber circuitos lógicos (o raciocínio do computador é um raciocínio lógico);
- Representar conhecimento (programação lógica);
- Validar algoritmos e corrigir programas (testes lógicos das especificações em engenharia de software).

2 Sintaxe

2.1 Linguagem e Alfabeto

O conjunto de fórmulas da lógica proposicional é denominado L_{\emptyset} (lógica de ordem \emptyset). Cada fórmula deste conjunto é uma proposição gerada pela concatenação de símbolos pertencentes ao alfabeto da lógica proposicional, definido inicialmente.

Este alfabeto é infinito, constituído por:

- **Símbolos verdade:** true e false;
- **Símbolos proposicionais:** P, Q, R, S, P_1 , P_2 , P_3 , etc;
- **Conectivos proposicionais:** \neg (não), \vee (ou inclusivo), \wedge (e), \rightarrow (implica ou “se, então”) e \leftrightarrow (equivalência, bi-implicação ou “se e somente se”); e
- **Símbolos de pontuação:** (e).

Vale ressaltar que, assim como na linguagem portuguesa, nem toda a concatenação é válida, ou seja, pertence à linguagem da lógica proposicional.

As fórmulas proposicionais são construídas, a partir do alfabeto proposicional, de acordo com as seguintes regras:

1. Todo símbolo verdade é uma fórmula;
2. Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
3. Se P é uma fórmula, então a sua negação ($\neg P$) também é uma fórmula;
4. Se P e Q são fórmulas, então:
 - 4.1. A disjunção de P e Q ($P \vee Q$) também é uma fórmula;
 - 4.2. A conjunção de P e Q ($P \wedge Q$) também é uma fórmula;
 - 4.3. A implicação de P em Q ($P \rightarrow Q$) também é uma fórmula;

4.4. A bi-implicação de P e Q ($P \leftrightarrow Q$) também é uma fórmula;

Nesta definição, as fórmulas mais elementares são os símbolos verdade e proposicionais. A partir destes e utilizando as regras 3 e 4, recursivamente, é possível obter um conjunto infinito de fórmulas.

Note que o conectivo \neg é unário (aplicado sobre uma única fórmula) e fica na ordem pré-fixa, enquanto que os demais conectivos são binários (aplicado sobre duas fórmulas) e fica na ordem infixa.

Exemplos de Fórmulas Válidas

$(P \vee Q)$ $((\neg R) \rightarrow X)$ $((P \leftrightarrow (\neg Y)) \vee (Q \rightarrow (R \wedge V)))$

As construções acima são fórmulas proposicionais, pois podem ser derivadas a partir da aplicação das regras de construção descritas.

Exemplos de Fórmulas Inválidas

PQR $(R \text{ True} \rightarrow)$ $(\text{False} \vee \wedge (\leftrightarrow Q P))$

As construções acima não constituem fórmulas proposicionais, pois não é possível derivá-las a partir das regras descritas.

Exercício: Dado os símbolos proposicionais P e Q. Mostre que $((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \rightarrow (\neg Q)))$ é uma fórmula proposicional.

Solução:	P e Q são fórmulas	(aplicando a Regra 2)
	$(P \wedge Q)$ é fórmula	(aplicando a Regra 4.2)
	$(\neg P)$ e $(\neg Q)$ são fórmulas	(aplicando a Regra 3)
	$((\neg P) \wedge (\neg Q))$ é fórmula	(aplicando a Regra 4.3)
	$((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q)))$ é fórmula	(aplicando a Regra 4.2)

2.2 Precedência dos Conectivos

Os símbolos de pontuação (parênteses), assim como na aritmética, são empregados para priorizar um “cálculo proposicional”. Esses símbolos podem ser omitidos quando isto não altera o significado da fórmula proposicional.

Ex: $((\neg(\neg P)) \rightarrow Q) \equiv \neg\neg P \rightarrow Q$

OBS: A fórmula $\neg(X \wedge Y)$ na pode ser escrita sem parênteses: $\neg(X \wedge Y) \neq \neg X \wedge Y$.

Se em uma fórmula, os parênteses não são usados, o cálculo proposicional deve seguir a seguinte ordem de prioridade:

\neg	(maior precedência)
\rightarrow e \leftrightarrow	(precedência intermediária)
\vee e \wedge	(menor precedência)

Ex: $P \vee Q \rightarrow R \equiv P \vee (Q \rightarrow R)$

$$\neg P \wedge Q \leftrightarrow R \equiv (\neg P) \wedge (Q \leftrightarrow R)$$

Além da precedência, também existem as regras de associatividade, que definem a prioridade no cálculo para conectivos de mesma precedência. São elas:

$$\vee \text{ e } \wedge \quad (\text{conectivos associativos à esquerda})$$

$$\rightarrow \text{ e } \leftrightarrow \quad (\text{conectivos associativos à direita})$$

Ex: $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge R$

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

Exercício: Elimine o maior número possível de parênteses da fórmula, sem alterar seu significado original: $((\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z))$.

Solução: $(\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z)$

$$\neg X \vee (\neg(X \vee Y) \vee Z)$$

Exercício de Fixação

Identifique quais fórmulas pertencem à lógica proposicional. Justifique sua resposta, apresentando as regras de construção utilizadas ou apontando uma concatenação inválida. Para as fórmulas válidas, remova os símbolos de pontuação sem afetar a sua interpretação.

- a) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee (\neg(\neg R)))$
- b) $\vee Q \rightarrow R$
- c) $(P \vee R) \rightarrow (Q \leftrightarrow ((\neg T) \wedge R))$
- d) $(PQ \vee \text{True})$
- e) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$
- f) $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

2.3 Comprimento de Fórmula

O comprimento de uma fórmula proposicional H , denotado $\text{COMP}[H]$, é definido como segue:

- Se H é um símbolo verdade ou proposicional, então $\text{COMP}[H] = 1$;
- Se $\neg H$ é uma fórmula proposicional, então $\text{COMP}[\neg H] = \text{COMP}[H] + 1$;
- Se $(P \odot Q)$ é uma fórmula proposicional, sendo \odot um dos conectivos binários, então $\text{COMP}[P \odot Q] = \text{COMP}[P] + \text{COMP}[Q] + 1$.

Note que o comprimento de uma fórmula é obtido através da contagem dos conectivos e dos símbolos verdade e proposicionais, desconsiderando o símbolo de pontuação.

Ex: $\text{COMP}[(P \wedge Q) \leftrightarrow R] = \text{COMP}[P \wedge Q] + \text{COMP}[R] + 1 = \text{COMP}[P] + \text{COMP}[Q] + 1 + 1 + 1 =$
 $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.$

Este conceito é muito utilizado em demonstrações lógicas pelo princípio da indução finita.

2.4 Subfórmulas

O conjunto formado pelas subfórmulas de uma fórmula proposicional contém todos os pedaços válidos desta fórmula, inclusive ela mesma. Este conjunto é formado pelas seguintes regras:

- H é uma subfórmula de H ;
- Se $H = (\neg P)$, então P é uma subfórmula de H ;
- Se $H = (P \odot Q)$, sendo \odot um dos conectivos binários, então P e Q são subfórmulas de H ;
- Se P é subfórmula de H , então toda subfórmula de P também é subfórmula de H .

Definição informal: Todo pedaço de H que é uma fórmula proposicional válida, é uma subfórmula de H , inclusive ela mesma.

Exercício de Fixação

Determine o comprimento e as subfórmulas das seguintes fórmulas proposicionais:

- $((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge \text{True}$
- $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
- $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$
- $\neg(P \rightarrow \neg Q)$

3 Semântica

A semântica associa um significado a cada objeto sintático. Assim, quando se escreve a fórmula $P \wedge Q$, dependendo dos valores de P e Q , esta fórmula pode ser *verdadeira* ou *falsa*.

3.1 Interpretação

O significado (semântica) dos elementos sintáticos da linguagem da lógica proposicional é determinado por uma **função binária total**, denominada **interpretação**. Esta função associa a cada fórmula um valor verdade (verdadeiro ou falso), que pode ser representado por $\{T, F\}$ ou $\{0, 1\}$ (notação da álgebra booleana).

Formalizando o conceito de interpretação, temos:

Definição (função binária): uma função é binária se seu contradomínio possui apenas 2 elementos.

Definição (função total): uma função é completa se é definida em todos os elementos de seu domínio.

Definição (interpretação): na lógica proposicional, uma interpretação I é uma função binária total, tal que:

- O **domínio de I** é constituído pelo conjunto das fórmulas da lógica proposicional;
- O **contradomínio de I** é o conjunto $\{T, F\}$.

3.2 Cálculo Proposicional

O cálculo proposicional define a semântica da fórmula segundo uma interpretação. Ele associa a cada fórmula uma aplicação do tipo:

$$\{T, F\}^N \Rightarrow \{T, F\}$$

sendo N , o número de símbolos proposicionais e verdade da fórmula.

3.3 Semântica do Alfabeto Proposicional

A definição da interpretação dos símbolos do alfabeto proposicional é dada abaixo:

- **Símbolos verdade:** sua interpretação é fixa, como segue:

$$I[True] = T \text{ e } I[False] = F$$

- **Símbolos proposicionais:** dado um símbolo proposicional P , ele pode assumir qualquer valor do contradomínio de I . Assim:

$$I[P] \in \{T, F\}$$

- **Conectivos proposicionais:** não possuem significado isoladamente. Entretanto, por simplificação, a interpretação de uma fórmula poderá ser denotada como significado do conectivo. A descrição da interpretação dos conectivos é apresentada a seguir:

Dadas duas fórmulas proposicionais H e G .

- **Negação** – Se $E = \neg H$, então:

$$I[E] = F, \text{ para } I[H] = T.$$

$$I[E] = T, \text{ para } I[H] = F.$$

- **Conjunção** (\wedge) – Se $E = (H \wedge G)$, então:

$$I[E] = F, \text{ para } I[H] = F \text{ e/ou } I[G] = F.$$

$$I[E] = T, \text{ para } I[H] = T \text{ e } I[G] = T.$$

- **Disjunção** (\vee) – Se $E = (H \vee G)$, então:

$$I[E] = F, \text{ para } I[H] = F \text{ e } I[G] = F.$$

$$I[E] = T, \text{ para } I[H] = T \text{ e/ou } I[G] = T.$$

- **Implicação** (\rightarrow) – Se $E = (H \rightarrow G)$, então:

$$I[E] = F, \text{ para } I[H] = T \text{ e } I[G] = F.$$

$$I[E] = T, \text{ para } I[H] = F \text{ e/ou } I[G] = T.$$

OBS: O conectivo \rightarrow denota o conceito de “necessidade” (o conseqüente (G) indica o que é necessário para que o antecedente (H) ocorra). Uma condição “necessária” é um pré-requisito para que um fato ocorra, mas sua veracidade não é suficiente para garantir que o fato também seja verdade.

- **Equivalência** (\leftrightarrow) – Se $E = (H \leftrightarrow G)$, então:

$I[E] = F$, para $I[H] \neq I[G]$.

$I[E] = T$, para $I[H] = I[G]$.

OBS: O conectivo \leftrightarrow denota o conceito de “suficiência” (o conseqüente (G) indica o que é suficiente para que o antecedente (H) ocorra, ou seja, tudo que é necessário). Uma condição “suficiente” é o conjunto de todos os pré-requisitos necessários para que um fato ocorra. Assim, a veracidade desse conjunto garante a veracidade do fato.

Exercício: Sejam P e Q duas proposições. Demonstrar com a ajuda da definição de interpretação dos conectivos que: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$.

Solução: Para $I[P \rightarrow Q] = T \Rightarrow I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$

Se $I[P] = F \Rightarrow I[\neg P] = T \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = T$

Se $I[Q] = T \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = T$

Para $I[P \rightarrow Q] = F \Rightarrow I[P] = T$ e $I[Q] = F$

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F \Rightarrow I[\neg P] = F$ e $I[Q] = F \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = F$

Como para qualquer interpretação I , $I[P \rightarrow Q] = I[Q \vee \neg P]$, então $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$ é válido.

Exercício de Fixação

Sejam P e Q duas proposições. Demonstrar com a ajuda da definição de interpretação dos conectivos que:

- $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- $\neg (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$
- $P \wedge Q \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

4 Propriedades Semânticas

São relações obtidas no mundo semântico a partir das fórmulas sintáticas. O estudo destas relações entre os elementos sintáticos e semânticos, denominada *teoria dos modelos*, é uma das principais razões da aplicação da lógica à ciência da computação.

4.1 Tautologia

Uma fórmula H é uma tautologia ou é válida se e somente se $\forall I \mid I[H] = T$.

OBS: Note que validade é muito mais que veracidade. Uma fórmula pode ser verdadeira para uma determinada interpretação, mas não ser válida (existe outra interpretação onde a fórmula é falsa).

Exercício: Demonstrar através da definição do significado dos conectivos que $H = X \vee \neg X$ é uma tautologia.

Solução: Se H é uma tautologia, então $\forall I \mid I[H] = T$.

$$I[H] = T \Rightarrow I[X \vee \neg X] = T$$

$$\Rightarrow I[X] = T \text{ ou } I[\neg X] = T$$

$$\Rightarrow I[X] = T \text{ ou } I[X] = F$$

Como $I[X] \in \{T, F\}$, então $\forall I \mid I[H] = T$ c.q.d.

4.2 Fórmulas Factíveis

Uma fórmula H é factível ou satisfatível se e somente se $\exists I \mid I[H] = T$.

Observe que, por esta definição, tautologia é um subconjunto das fórmulas satisfatíveis.

Exercício: Demonstrar que $H = P \vee Q$ é satisfatível, mas não é uma tautologia.

Solução: Se H é satisfatível, então $\exists I \mid I[H] = T$.

$$I[H] = T \Rightarrow I[P \vee Q] = T \Rightarrow I[P] = T \text{ e/ou } I[Q] = T$$

Portanto, para $I[P] = T$ e/ou $I[Q] = T$, temos $I[H] = T$.

Entretanto, para $I[P] = F$ e $I[Q] = F$, temos $I[H] = F$.

Logo, **H é factível, mas não é tautologia.**

c.q.d.

4.3 Contradição

Uma fórmula H é contraditória se e somente se $\forall I \mid I[H] = F$.

Exercício: Demonstrar através da definição do significado dos conectivos que $H = X \wedge \neg X$ é uma contradição.

Solução: Se H é uma contradição, então $\forall I \mid I[H] = F$.

$$I[H] = F \Rightarrow I[X \wedge \neg X] = F$$

$$\Rightarrow I[X] = F \text{ e/ou } I[\neg X] = F$$

$$\Rightarrow I[X] = F \text{ e/ou } I[X] = T$$

Como I é uma função binária, tal que $I[X] \in \{T, F\}$, então $\forall I \mid I[H] = F$

c.q.d.

Exercício de Fixação

Determinar quais das fórmulas abaixo são tautologias, contradições ou fórmulas factíveis. Justifique sua resposta:

a) $(P \rightarrow (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$

b) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow Q$

c) $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \vee (P \rightarrow Q)$

d) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow \neg Q$

e) $(P \vee \neg P) \rightarrow (Q \vee \neg Q)$

4.4 Equivalência de Fórmulas

Sejam H e $G \in L_{\emptyset}$. Elas são equivalentes, semanticamente, se e somente se $\forall I \mid I[H] = I[G]$.

Notação: $H \Leftrightarrow G$ ou $H \equiv G$.

Exercício: Demonstrar através da definição do significado dos conectivos que $H = (\neg P \wedge \neg Q)$ e $G = \neg(P \vee Q)$ são equivalentes.

Solução: Se H e G são equivalentes, então $\forall I \mid I[H] = I[G]$.

$$\text{Para } I[H] = T \Rightarrow I[\neg P \wedge \neg Q] = T \Rightarrow I[\neg P] = T \text{ e } I[\neg Q] = T \Rightarrow I[P] = F \text{ e } I[Q] = F$$

$$\text{Se } I[P] = F \text{ e } I[Q] = F \Rightarrow I[P \vee Q] = F \Rightarrow I[\neg(P \vee Q)] = T$$

$$\text{Para } I[H] = F \Rightarrow I[\neg P \wedge \neg Q] = F \Rightarrow I[\neg P] = F \text{ e/ou } I[\neg Q] = F \Rightarrow I[P] = T \text{ e/ou } I[Q] = T$$

$$\text{Se } I[P] = T \Rightarrow I[P \vee Q] = T \Rightarrow I[\neg(P \vee Q)] = F$$

$$\text{Se } I[Q] = T \Rightarrow I[P \vee Q] = T \Rightarrow I[\neg(P \vee Q)] = F$$

H e G apresentam o mesmo valor para qualquer interpretação então, **elas são equivalentes**.

A tabela abaixo apresenta algumas das equivalências clássicas encontradas na literatura:

Tabela 1 - Equivalências Clássicas ($H \Leftrightarrow G$)

Identificação	Fórmula H	Fórmula G
Dupla Negativa	$\neg(\neg E)$	E
Propriedades de Identidade	$E \vee \text{False}$	E
	$E \wedge \text{True}$	E
Propriedades Complementares	$E \vee \neg E$	True
	$E \wedge \neg E$	False
Leis de Morgan	$\neg(E \wedge R)$	$\neg E \vee \neg R$
	$\neg(E \vee R)$	$\neg E \wedge \neg R$
Contraposição	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$
Propriedades de Substituição	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
Propriedades Comutativas	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
Propriedades Associativas	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
Propriedades Distributivas	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
Prova Condicional	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$

Exercício: Sejam P e $Q \in L_{\emptyset}$. Demonstre, com o auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes: $E = Q \rightarrow (Q \wedge P)$ e $G = (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$.

Solução: $Q \rightarrow (Q \wedge P)$

$$\Leftrightarrow \neg Q \vee (Q \wedge P) \quad (\text{aplicando a Propriedade de Substituição do } \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \quad (\text{aplicando a Propriedade Distributiva})$$

Exercício de Fixação

Demonstre, com auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes:

- a) $(E \leftrightarrow G) \Leftrightarrow (E \wedge G) \vee (\neg E \wedge \neg G)$
- b) $(\neg X \vee \neg Y) \rightarrow \neg Z \Leftrightarrow (Z \rightarrow X) \wedge (Z \rightarrow Y)$
- c) $(\neg(P \rightarrow Q) \vee S) \wedge \neg P \Leftrightarrow (P \vee S) \wedge ((Q \rightarrow S) \wedge \neg P)$

4.5 Implicação de Fórmulas

Sejam H e $G \in L_{\emptyset}$. H implica em G , se e somente se $\forall I$, quando $I[H] = T$, $I[G] = T$.

Notação: $H \Rightarrow G$ ou $\frac{H}{G}$.

Exercício: Demonstrar pela definição do significado dos conectivos que X implica em $Y \rightarrow X$.

Solução: Se X implica em $Y \rightarrow X$, então: quando $I[X] = T$, $I[Y \rightarrow X] = T$.

$$\text{Para } I[Y \rightarrow X] = T \Rightarrow I[Y] = F \text{ e/ou } I[X] = T$$

Isto significa que, sempre que $I[X] = T$, temos $I[Y \rightarrow X] = T$. Logo, $X \Rightarrow Y \rightarrow X$. c.q.d.

O conceito de implicação de fórmulas ($G \Rightarrow H$) **NÃO** quer dizer que $\forall I$, $I[G] = I[H]$; ou que quando $I[H] = T$, $I[G] = T$. **A implicação semântica só nos permite concluir $I[H] = T$ quanto $I[G] = T$.** Nos demais casos, nada pode ser concluído.

A implicação de fórmulas é usada como **mecanismo de inferência na dedução** de novos conhecimentos.

Exercício de Fixação

Verifique se as fórmulas abaixo são implicações semânticas:

- a) $P \Rightarrow \text{True}$
- b) $(X \neq 0 \rightarrow X = Y) \wedge (X \neq Y) \Rightarrow (X = 0)$
- c) $P \vee (Q \wedge R \wedge S \wedge (G \rightarrow U)) \Rightarrow P \wedge \text{True}$
- d) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

OBS: Enquanto \rightarrow e \leftrightarrow são símbolos sintáticos para implicação e equivalência, \Rightarrow e \Leftrightarrow são elementos da metalinguagem para representar a implicação e equivalência semântica.

4.6 Outras Propriedades Semânticas

- Dada uma fórmula H e uma interpretação I , então I satisfaz H se e somente se $I[H] = T$.
- Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ é satisfatível se e somente se $\exists I \mid I[\beta] = T$, ou seja, $\exists I \mid I[H_1] = I[H_2] = \dots = I[H_N] = T$.

4.7 Proposições sobre as Propriedades Semânticas

A partir das propriedades apresentadas acima, podemos concluir as seguintes proposições:

1- Dada uma fórmula Q pertencente à lógica proposicional, então:

- Q é tautologia $\Rightarrow Q$ é factível.
- Q não é factível $\Leftrightarrow Q$ é contradição.
- Q é tautologia $\Leftrightarrow \neg Q$ é contradição.

Demonstração:

Se H é uma tautologia, então $\forall I \mid I[Q] = T$.

$$I[Q] = T \Rightarrow I[\neg Q] = F$$

Logo, $\forall I \mid I[\neg Q] = F$, ou seja, $\neg Q$ é uma contradição.

c.q.d

2- Se P e G são equivalentes ($P \Leftrightarrow G$), então $P \Leftrightarrow G$ é uma tautologia.

Demonstração:

Se $P \Leftrightarrow G$, então $\forall I \mid I[P] = I[G]$.

$$\text{Para } I[P] = I[G] = T \Rightarrow I[P \Leftrightarrow G] = T$$

$$\text{Para } I[P] = I[G] = F \Rightarrow I[P \Leftrightarrow G] = T$$

Logo, $\forall I \mid I[P \Leftrightarrow G] = T$, ou seja, $(P \Leftrightarrow G)$ é uma tautologia.

c.q.d.

3- Se P implica semanticamente em G ($P \Rightarrow G$), então $P \Rightarrow G$ é uma tautologia.

Demonstração:

Se $P \Rightarrow G$, então $I[G] = T$ quando $I[P] = T$.

$$\text{Para } I[P] = I[G] = T \Rightarrow I[P \Rightarrow G] = T$$

Se $P \Rightarrow G$ é tautologia, então $\forall I \mid I[P \Rightarrow G] = T$.

$$\text{Para } I[P \Rightarrow G] = T \Rightarrow I[P] = F \text{ e/ou } I[G] = T$$

Assim, quando $I[P] = T$, necessariamente $I[G] = T$ ($P \Rightarrow T$).

c.q.d.

4- Seja β um conjunto de fórmulas ($\beta = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$).

$$\beta \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_N) \text{ é satisfatível}$$

Demonstração:

Se β é satisfatível, então $\exists I \mid I[H_1] = I[H_2] = \dots = I[H_N] = T$.

$$\exists I \mid I[H_1] = I[H_2] = \dots = I[H_N] = T \Leftrightarrow \exists I \mid I[H_1] = T \text{ e } I[H_2] = T \text{ e } \dots \text{ e } I[H_N] = T$$

$$\text{Se } I[H_1] = T \text{ e } I[H_2] = T \Rightarrow I[H_1 \wedge H_2] = T$$

$$\text{Se } \Leftrightarrow I[H_1 \wedge H_2] = T \text{ e } I[H_3] = T \Rightarrow I[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3] = T$$

e assim sucessivamente até que $I[H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_N] = T$.

Logo, $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_N)$ é satisfatível

c.q.d.

5 Métodos de Validação de Fórmulas

Os métodos apresentados abaixo são utilizados para verificar a validade das fórmulas proposicionais. Além disso, eles também podem ser empregados na demonstração das demais propriedades apresentadas no capítulo anterior.

5.1 Tabela-Verdade

A tabela-verdade é um método de validação baseada na força bruta. Isso ocorre, porque devemos mapear todas as possíveis combinações dos símbolos/variáveis proposicionais.

Assim, seja P uma fórmula proposicional e α o conjunto de variáveis proposicionais existentes em P ($\alpha = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$). A tabela-verdade de P é uma tabela com pelo menos **N+1 colunas** e exatamente **2^N linhas**. As N primeiras colunas representam as variáveis proposicionais, enquanto a $(N+1)$ -ésima coluna representa a fórmula P . Cada linha representa uma possível combinação de valores (T ou F) das variáveis pertencentes a α e o valor verdade de P resultante desta combinação.

TABELA-VERDADE DOS CONECTIVOS

G	H	$G \wedge H$	$G \vee H$	$G \rightarrow H$	$G \leftrightarrow H$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Q	$\neg Q$
F	T
T	F

CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE

Dependendo do tamanho da fórmula proposicional, a construção direta da sua tabela-verdade não é uma tarefa trivial. Por isso, sugeriu-se a sua construção progressiva, através da representação, em colunas auxiliares, das subfórmulas da fórmula trabalhada. Tal artifício, apesar de aumentar o número de colunas, facilita o raciocínio para o preenchimento das linhas.

Exercício: Construa a tabela-verdade da fórmula $P = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$.

Solução:

X	Y	Z	$\neg X$	$(X \wedge Y)$	$(\neg X \wedge Z)$	P
F	F	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T

T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	F	T
T	T	T	F	T	F	T

Exercício de Fixação

Construa a tabela-verdade das fórmulas:

- a) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- b) $(P \rightarrow R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$
- c) $\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

TABELA-VERDADE X PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

- 1- Uma fórmula é uma tautologia se a última coluna de sua tabela-verdade contém somente valores T ou 1.
- 2- Uma fórmula é uma contradição se a última coluna de sua tabela-verdade contém somente valores F ou 0 (zero).
- 3- Uma fórmula é factível se a última coluna de sua tabela-verdade contém pelo menos um valor T ou 1.
- 4- Duas fórmulas são equivalentes semanticamente quando, para cada linha da tabela-verdade, suas colunas apresentam o mesmo valor.
- 5- Uma fórmula G implica semanticamente na fórmula H se, para toda linha cujo valor da coluna de G é verdadeiro, o valor da coluna de H também é verdadeiro.

Exercício de Fixação

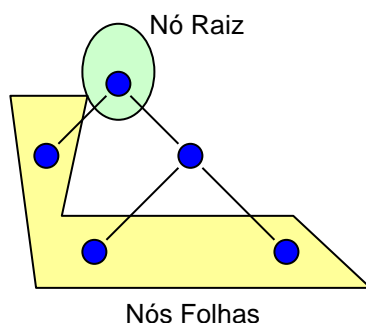
Determine, utilizando a tabela-verdade, se as fórmulas abaixo são tautologia, contradição ou factíveis; ou, ainda, se a equivalência e implicação semântica são válidas:

- a) $E \vee (G \wedge H) \leftrightarrow (E \vee G) \wedge (E \vee H)$
- b) $((P \rightarrow Q) \vee R) \rightarrow (Q \rightarrow (R \wedge P))$
- c) $((P \vee R) \wedge Q) \wedge ((P \rightarrow R) \wedge \neg Q)$
- d) $(Q \vee P) \rightarrow (E \wedge R) \leftrightarrow ((Q \rightarrow E) \wedge (P \rightarrow E)) \wedge ((Q \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow R))$
- e) $(P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \wedge P \Rightarrow (P \wedge \neg Q)$

5.2 Árvore Semântica

Este método determina a validade de uma fórmula a partir de uma estrutura denominada árvore. Uma árvore é um conjunto de nós (vértices) ligados por arestas. Os nós finais são chamados “folhas”, o nó inicial é denominado “raiz”, enquanto os demais nós são intermediários.

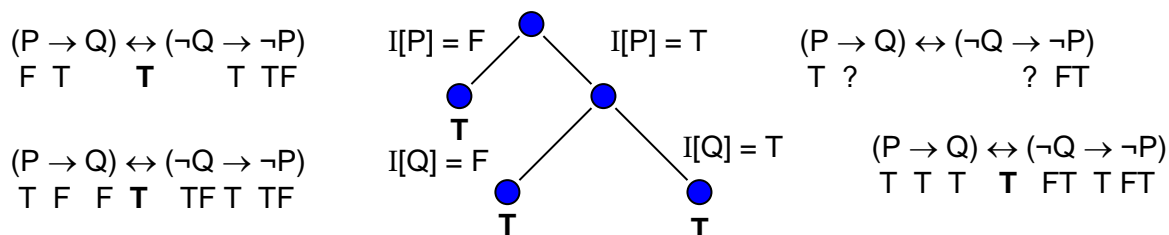
Exemplo de Árvore:



Durante a validação, as arestas que ligam o nó raiz aos outros nós recebem um rótulo, indicando os possíveis valores de uma determinada variável proposicional, escolhida aleatoriamente. Se a partir de uma interpretação for possível obter o valor da fórmula, este é associado ao nó folha correspondente. Caso não seja possível tal aferição, cria-se mais duas arestas, aumentando a ramificação da árvore. Para a rotulação dessas arestas, escolhemos uma outra variável proposicional. Este processo é repetido até que todos os nós folhas tenham valores associados à fórmula.

Exercício: Demonstre, através de árvores semânticas, a validade de $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg P)$.

Solução:



Como em todos os nós folhas $I[H] = T$, então a fórmula **H é válida**.

c.q.d.

Exercício de Fixação

Construa a árvore semântica das fórmulas:

- $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- $(P \leftrightarrow R) \rightarrow (\neg P \vee R) \vee (\neg R \vee P)$
- $X > 10 \rightarrow X^2 = Y \leftrightarrow X^2 \neq Y \wedge X \leq 10$

ÁRVORE SEMÂNTICA X PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

- Uma fórmula é uma tautologia se só têm valores T ou 1 em seus nós folhas.
- Uma fórmula é uma contradição se só têm valores F ou 0 (zero) em seus nós folhas.
- Uma fórmula é factível se pelo menos um nó folha com valor T ou 1.
- Duas fórmulas G e H são equivalentes semanticamente, se a árvore semântica correspondente à fórmula $G \leftrightarrow H$ for uma tautologia.

- 5- Uma fórmula G implica semanticamente na fórmula H , se a árvore semântica correspondente à fórmula $G \rightarrow H$ for uma tautologia.

5.3 Método da Negação ou Absurdo

O método da negação ou absurdo é um método geral de demonstração. Ele consiste em negar a afirmação que se deseja provar e, a partir de um conjunto de deduções, concluir um fato contraditório ou absurdo (ex: $I[P] = T$ e $I[P] = F$).

A aplicação deste método é recomendada nos casos onde a negação da afirmação nos leva a casos determinísticos, ou seja, com uma única possibilidade de interpretação para a fórmula, pois isto simplifica a demonstração. Tal situação ocorre quando a negação acarreta a falsidade dos conectivos \rightarrow e \vee e a veracidade do conectivo \wedge .

Exercício: Demonstrar, através do método da negação, a validade da Lei de Transitividade do conectivo \rightarrow : $H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Solução: validade = tautologia. Logo, devemos provar que $\forall I \mid I[H] = T$.

Supondo que H **NÃO** é tautologia, então $\exists I \mid I[H] = F$.

$$I[((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)] = F \Rightarrow I[((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))] = T \text{ e } I[(P \rightarrow R)] = F$$

$$\text{Para } I[(P \rightarrow R)] = F \Rightarrow I[P] = T \text{ e } I[R] = F$$

$$\text{Para } I[((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))] = T \Rightarrow I[P \rightarrow Q] = T \text{ e } I[Q \rightarrow R] = T$$

Se $I[P \rightarrow Q] = T \Rightarrow I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$, mas como $I[P] = T$, logo:

$$I[Q] = T$$

Se $I[Q \rightarrow R] = T \Rightarrow I[Q] = F$ e/ou $I[R] = T$, mas como $I[R] = F$, logo:

$$I[Q] = F$$

ABSURDO: Q **NÃO** pode assumir dois valores (T e F) no mesmo instante.

Portanto, a suposição inicial está errada e **H é tautologia**.

c.q.d.

O objetivo deste método é deduzir uma contradição / absurdo a partir da negação da fórmula em prova. Entretanto, nem sempre isto ocorre. Nestes casos, **NADA** se pode concluir sobre a veracidade da asserção inicial. Além disso, quando existem mais de uma possibilidade testada, originada de cláusulas **e/ou**, todas devem gerar uma contradição.

MÉTODO DA NEGAÇÃO OU ABSURDO X PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

- 1- Uma fórmula H é uma tautologia se a suposição $\exists I \mid I[H] = F$ gerar contradição.
- 2- Uma fórmula H é uma contradição se a suposição $\exists I \mid I[H] = T$ gerar contradição.
- 3- Uma fórmula H é factível quando ela não for tautologia, nem contradição. Neste caso, basta apresentar duas interpretações para H (I e J), onde $I[H] = T$ e $J[H] = F$.
- 4- Duas fórmulas G e H são equivalentes semanticamente, se for possível provar que a fórmula $G \leftrightarrow H$ for uma tautologia.
- 5- Uma fórmula G implica semanticamente na fórmula H , se for possível provar que a fórmula $G \rightarrow H$ for uma tautologia.

Exercício de Fixação

Demonstre, utilizando os três métodos de validação estudados, que as fórmulas a seguir são tautologias:

- a) $((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$
- b) $(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$
- c) $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \wedge (\neg G))$
- d) $((\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \rightarrow (R \rightarrow P)$

6 Princípio da Indução Finita

Apesar de não fazer parte da lógica, este princípio é um dos principais métodos utilizados na demonstração de resultados. Na ciência da computação, tal princípio é usado para demonstrar resultados em linguagens formais, teoria de algoritmos, teoria dos códigos, etc.

6.1 Paradigma da Indução

Considere um conjunto de peças de dominó enfileiradas e enumeradas. Elas estão dispostas de modo que, se o dominó 1 é derrubado para direita, então o subsequente (dominó 2) também cai, e assim sucessivamente.

Diante disto, surge a pergunta: “O que é suficiente para um dominó N cair?”

Resposta: que qualquer um dos dominós que o antecede caia para direita, ou seja, existem $(N-1)$ condições suficientes.

Suponhamos que o dominó 1 caia para direita, logo o dominó N também cai. Agora surge outra pergunta: “Qual é a condição necessária para que o dominó 1 possa cair para direita?”.

Resposta: que os dominós subsequentes possam ser derrubados.

A partir deste cenário, observamos que existem várias condições suficientes para que todos os dominós sejam derrubados. Exemplo:

Se o dominó 1 é derrubado para direita, então o dominó N cai, ou simplesmente, $D_1 \rightarrow D_N$.

Dentre eles, destacamos 2 conjuntos:

1º conjunto:

- Condição básica: O dominó 1 é derrubado para direita.
- Condição indutiva: Seja N um nº arbitrário. Se o dominó N é derrubado para direita, então o dominó $N+1$ também cai.

2º conjunto:

- Condição básica: O dominó 1 é derrubado para direita.
- Condição indutiva: Seja N um nº arbitrário. Se todos os dominós até N são derrubados para direita, então o dominó $N+1$ também cai.

Note, que ambos tem a mesma condição básica. Entretanto, a condição indutiva é ligeiramente modificada.

O princípio da indução finita possui 2 formas que correspondem a estes conjuntos. Neste curso iremos abordar apenas a 1ª forma.

6.2 1ª Forma de Indução

Suponha que para cada N ($N \geq 1$), seja dada a asserção $A(N)$. Para concluirmos que $A(N)$ é verdadeira para todo inteiro N , deve ser possível demonstrar as seguintes propriedades:

- **Base da Indução:** A asserção $A(1)$ é verdadeira.
- **Passo Indutivo:** Dado um inteiro N ($N \geq 1$), se $A(N)$ é verdadeira, então $A(N+1)$ também é verdadeira.

Exercício: Demonstre, através do princípio da indução finita, que: dada a progressão aritmética $a_{i+1} = a_i q$, para $q \neq 1$. A soma dos N primeiros termos desta progressão pode ser calculada por:

$$S_N = \frac{a_n q - a_0}{q - 1}$$

Solução:

Base da Indução: $S_0 = \frac{a_0 q - a_0}{q - 1} = \frac{a_0(q - 1)}{q - 1} = a_0$

Passo Indutivo: Assumindo $S_l = \frac{a_l q - a_0}{q - 1}$ como verdade, então:

$$S_{l+1} = \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1} \Leftrightarrow S_l + a_{l+1} = \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1} \Leftrightarrow \frac{a_l q - a_0}{q - 1} + a_{l+1} = \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1}$$

Como $a_{l+1} = a_l q$, podemos reescrever a expressão como:

$$\Leftrightarrow \frac{a_{l+1} - a_0}{q - 1} + a_{l+1} = \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1} \Leftrightarrow \frac{a_{l+1} - a_0 + a_{l+1} q - a_{l+1}}{q - 1} = \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1} = \frac{a_{l+1} q - a_0}{q - 1} \quad \text{c.q.d.}$$

Exercício de Fixação

Demonstre, utilizando o princípio da indução finita, que:

- $\forall X \in \mathbb{N} \mid (1+2+\dots+X) = \frac{X^2 + X}{2}$
- $\forall X \in \mathbb{N} \mid X \geq 5 \Rightarrow 2^X > X^2$
- $\forall X \in \mathbb{N} \mid 3 \text{ divide } X^3 - X$
- $\forall X \in \mathbb{N} \mid 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^X = 2^{X+1} - 1$

7 Relações Semânticas entre os Conectivos

7.1 Conectivos Completos

Um conjunto de conectivos proposicionais φ é completo se e somente se, é possível expressar, equivalentemente, os conectivos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e \leftrightarrow utilizando apenas os conectivos de φ .

Este conceito é muito utilizado em ciência da computação e lógica, como por exemplo, para simplificar os conectivos empregados em um projeto de circuitos lógicos.

Ex: Demonstre que $\varphi = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo.

Solução: dada uma fórmula H , do tipo $(\neg P)$, $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \rightarrow Q)$ ou $(P \leftrightarrow Q)$. Podemos gerar uma fórmula G , equivalente a H e só contenha conectivos de φ .

Para $H = (\neg P)$ ou $(P \vee Q)$, temos $G = H$, pois os $\{\neg, \vee\} \in \varphi$.

Para $H = (P \wedge Q)$, temos $G = \neg(\neg P \vee \neg Q)$, pela aplicação da Lei de Morgan.

Para $H = (P \rightarrow Q)$, temos $G = (\neg P \vee Q)$, pela aplicação da propriedade de substituição do \rightarrow .

Para $H = (P \leftrightarrow Q)$, temos $G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$, pela seqüência explicada abaixo:

$$\begin{aligned} (P \leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P), \text{ pela aplicação da propriedade de substituição do } \leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P), \text{ pela aplicação da propriedade de substituição do } \rightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)), \text{ pela aplicação da Lei de Morgan.} \end{aligned}$$

Logo, $\varphi = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo

c.q.d.

OBS: A demonstração que G equivale a H , através de tabela-verdade, fica como exercício.

7.2 Formas Normais

As fórmulas da lógica proposicional podem ser expressas utilizando vários conjuntos de conectivos completos. Além disso, também podemos representá-las através de estruturas pré-definidas, denominadas formas normais. São elas:

- **Forma Normal Disjuntiva (FND):** se a fórmula é uma disjunção de conjunções de literais (símbolos proposicionais ou suas negações).
- **Forma Normal Conjuntiva (FNC):** se a fórmula é uma conjunção de disjunções de literais.

Ex: $H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$

FND

$G = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$

FNC

OBTENÇÃO DAS FORMAS NORMAIS

Considere a fórmula: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$. Podemos escrever H_1 e H_2 , de modo que H_1 seja H na **FND** e H_2 seja H na **FNC**, com segue:

1º Passo: Construção da tabela-verdade de H .

P	Q	R	H	Linha
F	F	F	F	1
F	F	T	T	2
F	T	F	F	3
F	T	T	T	4
T	F	F	F	5
T	F	T	F	6
T	T	F	F	7
T	T	T	T	8

2º Passo: Geração de H_1 (FND).

- Extrair as linhas da tabela-verdade onde $I[H] = T$. Para cada linha N , gerar uma fórmula Y_N , formada apenas pela conjunção de literais, de modo que $I[Y_N] = T$, como apresentado abaixo:

2ª linha: $I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = T \Rightarrow Y_2 = (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$.

4ª linha: $I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = T \Rightarrow Y_4 = (\neg P \wedge Q \wedge R)$.

8ª linha: $I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = T \Rightarrow Y_8 = (P \wedge Q \wedge R)$.

- Gerar H_1 a partir da disjunção das fórmulas geradas no item anterior.

$$H_1 = (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

3º Passo: Geração de H_2 (FNC).

- Extrair as linhas da tabela-verdade onde $I[H] = F$. Para cada linha N , gerar uma fórmula X_N , formada apenas pela disjunção de literais, de modo que $I[X_N] = T$, como apresentado abaixo:

1ª linha: $I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = F \Rightarrow X_1 = (P \vee Q \vee R)$.

3ª linha: $I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = F \Rightarrow X_3 = (P \vee \neg Q \vee R)$.

5ª linha: $I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = F \Rightarrow X_5 = (\neg P \vee Q \vee R)$.

6ª linha: $I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = T \Rightarrow X_6 = (\neg P \vee Q \vee \neg R)$.

7ª linha: $I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = F \Rightarrow X_7 = (\neg P \vee \neg Q \vee R)$.

- Gerar H_2 a partir da conjunção das fórmulas geradas no item anterior.

$$H_2 = (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

Exercício de Fixação

Dada a fórmula $H = ((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \vee \neg P)$.

- Construa a fórmula equivalente utilizando apenas os conectivos do conjunto $\phi = \{\neg, \vee\}$.
- Gere as fórmulas equivalentes na FND e FNC.

8 Dedução de Teoremas

O processo de prova por dedução consiste em demonstrar que, dadas algumas expressões como verdadeiras (hipóteses ou premissas), uma nova sentença também é verdadeira. Quando isso ocorre, dizemos que a sentença provada é um teorema com respeito às hipóteses.

A prova de um teorema consiste em derivar a expressão desejada H a partir das hipóteses β , utilizando os recursos disponíveis em algum dos sistemas de dedução válidos ($\beta \vdash H$).

Definição (sistemas de dedução): também denominados sistemas formais, são completos (se $\beta \Rightarrow H$, então $\beta \vdash H$) e corretos (se $\beta \vdash H$, então $\beta \Rightarrow H$) e estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento.

TIPOS DE SISTEMAS DE DEDUÇÃO

Os sistemas de dedução podem ser divididos em 2 grupos, como segue:

- Sistemas de difícil implementação computacional:
 - Sistema Axiomático
 - Dedução Natural
- Sistemas mais adequados para implementação computacional:
 - Tableaux Semânticos
 - Resolução

Neste curso, apresentaremos o sistema axiomático e a resolução.

8.1 Sistema Axiomático

O sistema axiomático é uma estrutura para representação e dedução do conhecimento baseado em axiomas. Ele é definido pela composição de 4 elementos:

- Alfabeto da lógica proposicional;
- Conjunto de fórmulas proposicionais (Hipóteses)
- Subconjunto de fórmulas, denominados axiomas; e
- Conjunto de regras de inferência.

HIPÓTESES

As hipóteses ou premissas são fórmulas proposicionais **tidas** (assumidas) como verdadeiras. Assim, caso se descubra que uma das hipóteses pode ser falsa, toda prova feita a partir desta hipótese perde sua validade.

AXIOMAS

Os axiomas representam o conhecimento dado a priori. No caso do sistema axiomático, este conhecimento é representado por tautologias.

O conjunto de fórmulas axiomáticas pode variar entre os sistemas axiomáticos. Porém, independente do conjunto adotado, o mesmo deve assegurar o sistema axiomático seja completo e correto.

Neste curso, adotaremos um sistema cujos axiomas são determinados pelos esquemas:

- $Ax1 = \neg(H \vee H) \vee H \Leftrightarrow (H \vee H) \rightarrow H$
- $Ax2 = \neg H \vee (G \vee H) \Leftrightarrow H \rightarrow (G \vee H)$
- $Ax3 = (\neg(\neg H \vee G)) \vee ((\neg(E \vee H)) \vee (G \vee E)) \Leftrightarrow (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$

sendo, H , G e E quaisquer fórmulas proposicionais.

REGRAS DE INFERÊNCIA

As regras de inferência são implicações semânticas. Elas são utilizadas para fazer inferências, ou seja, executar os “passos” de uma demonstração ou dedução.

Assim como os axiomas, o conjunto de regras de inferência adotado em um sistema axiomático pode variar, desde que mantenham as propriedades de completude e correção. Quanto menor o conjunto de regras de inferência, mais elegante é o sistema axiomático.

Abaixo serão listadas algumas regras de inferência que podem ser utilizadas em um sistema axiomático:

- **Adição:** $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{Q}{P \vee Q}$
- **Conjunção:** $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
- **Simplificação Disjuntiva:** $\frac{(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)}{P}$
- **Absorção:** $\frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow (P \wedge Q)}$
- **Modus Ponens:** $\frac{P \wedge (P \rightarrow Q)}{Q}$
- **Modus Tollens:** $\frac{\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)}{\neg P}$
- **Silogismo Hipotético:** $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)}{P \rightarrow R}$
- **Silogismo Disjuntivo:** $\frac{(P \vee Q) \wedge \neg P}{Q} \quad \frac{(P \vee Q) \wedge \neg Q}{P}$
- **Dilema Construtivo:** $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((P \vee R) \rightarrow (Q \vee G))} \quad \frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge G))}$

- **Dilema Destrutivo:** $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((\neg Q \vee \neg G) \rightarrow (\neg P \vee \neg R))} \quad \frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((\neg Q \wedge \neg G) \rightarrow (\neg P \wedge \neg R))}$
- **Absurdo:** $\frac{P \rightarrow Q}{\neg P}$

OBS: A maioria dos sistemas axiomáticos costuma utilizar apenas o **Modus Ponens (MP)** como regra de inferência.

PROVA EM UM SISTEMA AXIOMÁTICO

Uma prova ou demonstração através do sistema axiomático consiste em apresentar a sequência de passos necessários para derivar a fórmula desejada a partir das hipóteses. Cada passo pode ser a geração de um axioma ou a aplicação de uma regra de inferência.

Proposição: dado um teorema com as hipóteses H_1, H_2, \dots, H_N e a fórmula a ser provada C . Ele é verdadeiro sempre que:

$$\frac{H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_N}{C} \quad \text{ou} \quad H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_N \wedge C = T$$

Exercício 1: Prove $P \rightarrow (S \vee G)$ através de um sistema axiomático que utiliza todas as regras de inferência apresentadas acima e com o seguinte conjunto de hipóteses:

$$P \rightarrow (Q \vee R)$$

$$Q \rightarrow S$$

$$R \rightarrow G$$

Solução:

- considerando as hipóteses:

$$P \rightarrow (Q \vee R) \quad (1)$$

$$Q \rightarrow S \quad (2)$$

$$R \rightarrow G \quad (3)$$

- Aplicando o **dilema construtivo** entre (2) e (3), temos:

$$(Q \vee R) \rightarrow (S \vee G) \quad (4)$$

- Aplicando o **silogismo hipotético** entre (1) e (4), temos:

$$P \rightarrow (S \vee G) \quad \text{c.q.d}$$

Exercício 2: A partir das hipóteses abaixo e utilizando apenas o Modus Ponens (MP) como regra de inferência, prove que $(S \vee P)$.

$$(P \wedge R) \rightarrow P$$

$$Q \rightarrow P_4$$

$$P_1 \rightarrow Q$$

$$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$$

$$(P_3 \wedge R) \rightarrow R$$

$$P_4 \rightarrow P$$

$$P_1$$

$$P_3 \rightarrow P$$

$$P_2$$

Solução:

- Gerar um axioma que possua S (pois esta variável não existe no conjunto de hipóteses) e que esteja mais próximo possível da fórmula a ser provada:

- Usando **Ax2** com $H = P$ e $G = S$, temos:

$$P \rightarrow (S \vee P) \quad (1)$$

- Derivar a fórmula desejada. Para isso, é preciso isolar P (necessário para aplicar **MP** em (1)):

- Considerando as hipóteses:

$$(P \wedge R) \rightarrow P \quad (2)$$

$$Q \rightarrow P_4 \quad (3)$$

$$P_1 \rightarrow Q \quad (4)$$

$$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q \quad (5)$$

$$(P_3 \wedge R) \rightarrow R \quad (6)$$

$$P_4 \rightarrow P \quad (7)$$

$$P_1 \quad (8)$$

$$P_3 \rightarrow P \quad (9)$$

$$P_2 \quad (10)$$

- Aplicando MP entre (8) e (4), temos:

$$Q \quad (11)$$

- Aplicando MP entre (11) e (3), temos:

$$P_4 \quad (12)$$

- Aplicando MP entre (12) e (7), temos:

$$P \quad (13)$$

- Aplicando MP entre (13) e (1), temos:

$$S \vee P \quad \text{c.q.d.}$$

PROVA POR ABSURDO

Neste tipo de prova, nega-se a fórmula que se deseja provar, a inclui no conjunto de hipóteses e aplica as regras de inferência até se obter um absurdo.

Exercício: A partir das hipóteses abaixo e utilizando apenas o Modus Ponens (MP) como regra de inferência, prove P .

$$\neg S \rightarrow P$$

$$R \vee \neg P$$

$$\neg S$$

Solução:

- Considerando as hipóteses:

$$\neg S \rightarrow P \quad (1)$$

$$R \vee \neg P \quad (2)$$

$$\neg S \quad (3)$$

$$\neg P \quad (4) \quad \text{Negação do teorema}$$

- Aplicando a equivalência ($G \rightarrow H \Leftrightarrow \neg H \rightarrow \neg G$) em (1), temos:

$$\neg P \rightarrow S \quad (5)$$

- Aplicando **MP** entre (4) e (5), temos:

$$S \quad (6)$$

Como (6) contradiz (3), conclui-se que a suposição inicial ($\neg P$) é falsa. Logo $\beta \vdash P$ **c.q.d.**

OBS: Como já visto, nada pode ser concluído se o absurdo não for encontrado.

DERIVAÇÃO SEM HIPÓTESES

Além das provas onde uma fórmula G é derivada a partir de um conjunto de hipóteses β ($\beta \vdash G$), existem casos onde o sistema axiomático não possui hipóteses (β é vazio) e a fórmula desejada é derivada somente a partir dos axiomas, denotamos: $\vdash G$.

Ex: Utilizando um sistema axiomático sem hipóteses e apenas com Modus Ponens como regra de inferência, prove ($P \vee \neg P$).

- Para gerar uma sentença que contenha a fórmula a ser derivada, utilizamos o **Ax3** com $H = (P \vee P)$, $E = \neg P$ e $G = P$, temos:

$$((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P)) \quad (1)$$

- Note que a parte antecedente de (1) pode ser gerada a partir de **Ax1** para $H = P$:

$$(P \vee P) \rightarrow P \quad (2)$$

- Aplicando **MP** entre (2) e (1), temos:

$$((\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P)) \quad (3)$$

- A parte antecedente de (3) pode ser gerada a partir de **Ax2** para $H = P$ e $G = P$:

$$\neg P \vee (P \vee P) \quad (4)$$

- Aplicando **MP** entre (4) e (3), temos:

$$(P \vee \neg P) \quad \text{c.q.d.}$$

Exercício de Fixação

Prove os teoremas abaixo, através do sistema axiomático:

- a) Hipóteses: *hoje não é domingo ou Manuel está feliz.*
Se Manuel está feliz, ele é amoroso.
Maria está feliz ou Manuel não é amoroso.
Hoje é domingo.

Regra de Inferência: *Modus Ponens*

Teorema: *Maria está feliz.*

b) Hipóteses:

$$\begin{aligned} &\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ &\neg S \vee Q \\ &\neg P \\ &G \rightarrow S \\ &P \vee G \end{aligned}$$

Regra de Inferência: *Modus Ponens*

Teorema: R

c) Hipóteses:

$$\begin{aligned} &P \rightarrow (Q \vee R) \\ &Q \rightarrow \neg S \\ &R \rightarrow \neg S \end{aligned}$$

Regra de Inferência: *Livre escolha* (descrever na solução o conjunto escolhido)

Teorema: $P \rightarrow \neg S$

8.2 Resolução

Ao contrário do sistema axiomático, no método de resolução não se tem axiomas. Portanto, este método é definido pela composição dos seguintes elementos:

- Alfabeto da lógica proposicional;
- Conjunto de cláusulas, geradas a partir de fórmulas proposicionais (Hipóteses)
- Regra de inferência.

A resolução é um método de prova aplicado sobre fórmulas que estão na forma de conjunções de disjunções, conhecida como **forma normal conjuntiva (FNC)**.

Ex: $H = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (R \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee \neg P)$

Cada fórmula é, então, representada na **forma de conjunto de cláusulas (FCC)**. Nesta notação, cada disjunção é um subconjunto (cláusula), onde o conectivo **ou** é trocado por uma vírgula. Além disso, as vírgulas entre os subconjuntos representam a conjunção (conectivo **e**) das disjunções.

Ex: $H = \{\{P, \neg Q, R\}, \{R, Q\}, \{\neg P, \neg R\}\}$

Note que no exemplo acima, $\{\neg P, \neg R\}$ representa $(\neg P \vee \neg R \vee \neg P)$. Isto ocorre, pois não se representa duplicidade na notação de conjuntos (FCC).

REGRA DE INFERÊNCIA

O mecanismo de inferência da resolução utiliza apenas uma regra, denominada regra de resolução, como segue:

• **Resolução:**
$$\frac{(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)}{(Q \vee R)}$$

Ex: Considere as fórmulas:

	Original	FNC	FCC
$H_1 =$	$P \vee Q$	$P \vee Q$	$\{P, Q\}$
$H_2 =$	$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$	$\{\neg P, R\}$
Res(H_1, H_2) =	$Q \vee R$	$Q \vee R$	$\{Q, R\}$

MÉTODOS DE PROVA POR RESOLUÇÃO

Na resolução, assim como no sistema axiomático, podemos provar os teoremas de forma direta ou por refutação.

- **Resolução Direta:** após converter as fórmulas proposicionais para a forma de conjunto de cláusulas (FCC), aplica-se repetidamente a regra de resolução sobre as hipóteses até se obter a fórmula desejada.

Ex: Prove por resolução direta o teorema abaixo:

Hipóteses: $A \vee B$
 $A \rightarrow C$
 $\neg B$

Teorema: C

Solução:

- Considerando as hipóteses:

$A \vee B$ $\{A, B\}$ (1)

$A \rightarrow C$ (2)

$\neg B$ $\{\neg B\}$ (3)

- Aplicando a **propriedade de substituição do \rightarrow** em (2), temos:

$(\neg A \vee C)$ $\{\neg A, C\}$ (4)

- Aplicando a **regra de resolução** entre (1) e (4), temos:

$(B \vee C)$ $\{B, C\}$ (5)

- Aplicando a **regra de resolução** entre (3) e (5), temos:

C $\{C\}$ **c.q.d.**

- **Resolução por Refutação:** neste método utiliza-se a prova por absurdo. Para isto, nega-se a fórmula desejada e acrescenta a nova fórmula no conjunto de hipóteses. Então, após convertê-las para o FCC, aplica-se repetidamente a regra de resolução até se obter uma cláusula vazia, gerada a partir de uma contradição do tipo P e $\neg P$.

Ex: Prove o teorema do exemplo anterior, através da resolução por refutação:

Solução:

- Negando o teorema, temos:

$\neg C$ $\{\neg C\}$ (1)

- Considerando as hipóteses:

$A \vee B$ $\{A, B\}$ (2)

$A \rightarrow C \Leftrightarrow (\neg A \vee C)$ $\{\neg A, C\}$ (3)

$\neg B$ $\{\neg B\}$ (4)

- Aplicando a **regra de resolução** entre (2) e (3), temos:

$(B \vee C)$ $\{B, C\}$ (5)

- Aplicando a **regra de resolução** entre (3) e (5), temos:

$$C \qquad \{C\} \qquad (6)$$

- Aplicando a **regra de resolução** entre (1) e (6), temos:

$$\{\} \qquad \text{c.q.d.}$$

OBS: O método de resolução por refutação também pode ser utilizado para provar a validade de fórmulas proposicionais a partir de um conjunto de hipóteses vazio.

Ex: Dada $H = (P \vee Q \vee R) \wedge (P \rightarrow G) \wedge (Q \rightarrow G) \wedge (R \rightarrow G) \rightarrow G$. Prove H .

Solução:

- Negando H , temos:

$$\neg((P \vee Q \vee R) \wedge (P \rightarrow G) \wedge (Q \rightarrow G) \wedge (R \rightarrow G) \rightarrow G) \qquad (1)$$

- Aplicando a **propriedade de substituição do \rightarrow** em (1), temos:

$$\neg(\neg((P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee G) \wedge (\neg Q \vee G) \wedge (\neg R \vee G)) \vee G) \qquad (2)$$

- Aplicando a **Lei de Morgan** em (2), temos:

$$((P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee G) \wedge (\neg Q \vee G) \wedge (\neg R \vee G)) \wedge (\neg G) \qquad (3)$$

- Representando (3) na FCC, temos:

$$\{P, Q, R\}, \{\neg P, G\}, \{\neg Q, G\}, \{\neg R, G\}, \{\neg G\} \qquad (4)$$

- Rotulando as cláusulas de (4):

$$\{P, Q, R\} \qquad (4.1)$$

$$\{\neg P, G\} \qquad (4.2)$$

$$\{\neg Q, G\} \qquad (4.3)$$

$$\{\neg R, G\} \qquad (4.4)$$

$$\{\neg G\} \qquad (4.5)$$

- Aplicando a regra de resolução entre (4.1) e (4.2), temos:

$$\{Q, R, G\} \qquad (5)$$

- Aplicando a regra de resolução entre (4.3) e (5), temos:

$$\{R, G\} \qquad (6)$$

- Aplicando a regra de resolução entre (4.4) e (6), temos:

$$\{G\} \qquad (7)$$

- Aplicando a regra de resolução entre (4.5) e (7), temos:

$$\{\}$$

Logo, **H é válida.**

c.q.d.

OBS: Quando não se consegue chegar ao conjunto de cláusulas vazio pela prova por refutação, assim como nos casos anteriores, nada se pode concluir sobre o teorema.

Exercícios de Fixação

1- Prove os teoremas abaixo, através do método de resolução:

- a) Hipóteses: *hoje não é domingo ou Manuel está feliz.*
Se Manuel está feliz, então ele é amoroso.

*Maria está feliz ou Manuel não é amoroso.
Hoje é domingo.*

Teorema: *Maria está feliz.*

b) Hipóteses: $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
 $\neg S \vee Q$
 $\neg P$
 $G \rightarrow S$
 $P \vee G$

Teorema: R

c) Hipóteses: $P \rightarrow (Q \vee R)$
 $Q \rightarrow \neg S$
 $R \rightarrow \neg S$

Teorema: $P \rightarrow \neg S$

2- Através da prova por refutação, mostre que a fórmula $H = (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ é válida.