

Sistemas Lineares (SLs)

Álgebra Linear Computacional - Fabricio Murai

Aula anterior

- Fundamentos teóricos do PCA
 - Matriz de covariância
 - Mudança de base
 - Maximização da variância (minimização do ruído)
 - Relação entre SVD e PCA

Aula de hoje

- Existência e unicidade de soluções
- Perspectiva geométrica de SLs
- Perspectiva vetorial de SLs
- Exemplos de matrizes escalonadas
 - Matriz quadrada: posto, autovalores e determinante
- Solução de sistemas triangulares

Este sistema linear possui solução?

$$\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{array} \iff \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right|$$

Resposta: Sim, pois é possível obter um sistema equivalente do tipo $Ux=d$, onde U é triangular superior, cuja solução é única.

Teorema fundamental

Para qualquer SL de equações $Ax=b$, vale uma de 3 possibilidades:

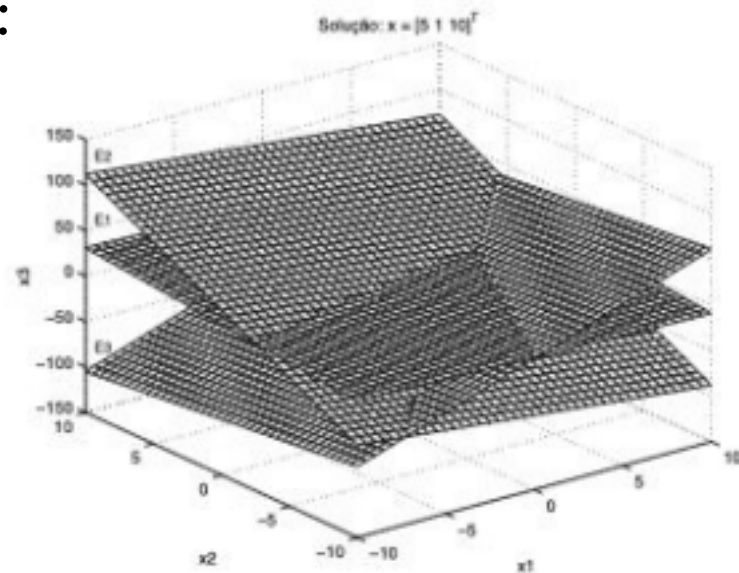
- É inconsistente (não possui solução)
- É consistente:
 - Possui uma única solução
 - Possui infinitas soluções

Objetivo de aprendizagem: entender a intuição geométrica de por que não existem sistemas com número finito (maior que 1) de soluções.

Perspectiva: interseção de hiperplanos

Sistema com 3 equações 3 variáveis:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & 1 \\ -20 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{vmatrix}$$



$$x = [5, 1, 10]^T$$

Perspectiva: SL como combinação linear

Encontrar a solução \mathbf{x} para $A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$ equivale a encontrar a combinação linear das colunas de A que satisfazem:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Pergunta: Quando existe solução?

Resposta: Quando \mathbf{b} está no espaço S de colunas de A

$$S = \{x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Objetivo de aprendizagem: entender a relação entre o espaço de colunas de A e a solução de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Quiz: posto e existência

Exemplos de matrizes escalonadas

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $Mx = b$
gorda; posto de linha completo; infinitas soluções p/ qualquer b (2 vars livres)
- $Nx = b$
magra; posto de coluna completo; inconsistente p/ alguns b e solução única p/ outros
- $Px = b$
quadrada; posto incompleto; inconsistente p/ alguns b e infinitas p/ outros

Objetivo de aprendizagem: entender a relação entre o posto de linha e a existência de solução e a relação entre posto de coluna e unicidade da solução.

Caso particular: matriz quadrada

Fatos importantes sobre matriz quadrada $A_{n \times n}$:

- Posto é igual ao número de autovalores não-nulos
- Produto dos autovalores é igual ao determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i$$

- Soma dos autovalores é igual ao traço(A)

$$\text{traço}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$$

Objetivo de aprendizagem: conhecer as relações entre determinante, traço, posto e autovalores de uma matriz quadrada.

Perguntas sobre matrizes quadradas

- Qual a relação entre posto e determinante?

$$\text{posto}(A) = n \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

- Para todo \mathbf{b} , $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ tem solução única. Qual $\text{posto}(A)$?
Qual a solução \mathbf{x} ?

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = n$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Determinante pela expansão de Laplace

Cofator i,j da matriz B : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

onde M_{ij} é o menor i,j de B (determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta ao deletar a linha i e coluna j)

Teorema. O determinante $|B|$ da matriz $B_{n \times n}$ é dado por

$$\begin{aligned} |B| &= b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \cdots + b_{in}C_{in} \\ &= b_{1j}C_{1j} + b_{2j}C_{2j} + \cdots + b_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{j'=1}^n b_{ij'}C_{ij'} = \sum_{i'=1}^n b_{i'j}C_{i'j} \end{aligned}$$

Objetivo de aprendizagem: conhecer a expansão de Laplace e a complexidade computacional do cálculo do determinante através dela.

Determinante pela expansão de Laplace

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Usando a Linha 1:

$$|B| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Usando a Coluna 2:

$$|B| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

COLA

$$\begin{aligned} |B| &= b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \cdots + b_{in}C_{in} \\ &= b_{1j}C_{1j} + b_{2j}C_{2j} + \cdots + b_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{j'=1}^n b_{ij'}C_{ij'} = \sum_{i'=1}^n b_{i'j}C_{i'j} \end{aligned}$$

O que podemos dizer sobre o posto de B?

Sistemas triangulares

$Lx=c$ é dito **sistema triangular inferior** quando L é triangular inferior.

Pode ser resolvido pelo método das substituições sucessivas.

$$x_1 = \frac{c_1}{l_{11}}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

$$\dots = \dots$$

$$x_i = \frac{c_i - l_{i1}x_1 - l_{i2}x_2 - \dots - l_{i,i-1}x_{i-1}}{l_{ii}}$$

Objetivo de aprendizagem: aprender a identificar e resolver sistemas triangulares.

Método das substituições sucessivas

Entrada: matriz triangular inferior $L_{n \times n}$, vetor $c_{n \times 1}$

Saída: vetor solução $x_{n \times 1}$

Para $i=1$ até n :

 Soma = 0

 Para $j=1$ até $i-1$:

 Soma += $L[i,j] \cdot x[j]$

$x[i] = (c[i] - \text{soma}) / L[i,i]$

Retorna x

Método das substituições sucessivas

Entrada: matriz triangular inferior $L_{n \times n}$, vetor $c_{n \times 1}$

Saída: vetor solução $x_{n \times 1}$

Para $i=1$ até n :

 soma = 0

 Para $j=1$ até $i-1$:

 soma += $L[i,j] * x[j]$

$x[i] = (c[i] - \text{Soma}) / L[i,i]$

Retorna x

Quantas adições,
multiplicações e
divisões?

Sistemas triangulares

$Ux=d$ é dito **sistema triangular superior** quando U é triangular superior.

Pode ser resolvido pelo método das substituições retroativas.

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{nn}}$$

$$\dots = \dots$$

$$x_i = \frac{d_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - u_{i,i+2}x_{i+2} - \dots - u_{i,n}x_{i,n}}{u_{ii}}$$

Quando $Ax=b$ possui solução?

Relação entre posto de $A_{m \times n}$ e posto da matriz aumentada $A|b$

- $\text{posto}(A) = \text{posto}(A|b)$: consistente (possui solução)
 - $\text{posto}(A) = n$: solução única
 - $\text{posto}(A) < n$: infinitas soluções
- $\text{posto}(A) < \text{posto}(A|b)$: inconsistente (não possui solução)

Aula anterior

- Existência e unicidade de soluções
- Perspectiva geométrica de SLs
- Perspectiva vetorial de SLs
- Exemplos de matrizes escalonadas
 - Matriz quadrada: posto, autovalores e determinante
- Solução de sistemas triangulares

Aula de hoje

- Como transformar $Ax=b$ em $Ux=d$?
 - Operações L-elementares
- Implementação da Eliminação de Gauss
 - Cálculo do número de operações
- Quando a Eliminação falha
 - Pivotação parcial

Como transformar $Ax=b$ em $Ux=d$?

Operações L-elementares

Usadas para transformar $Ax=b$ em um **sistema equivalente** $Bx=c$ (mesma solução):

- Trocar linhas i e j $\det(B) = -\det(A)$
- Multiplicar uma linha por $c \neq 0$ $\det(B) = c \det(A)$
- Adicionar s vezes linha i à linha j $\det(B) = \det(A)$

Quanto vale $\det(B)$ após Eliminação de Gauss?

Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

Dispositivo Prático (CAMPOS, filho 2018).

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0 0 <u>-12</u>	-36	$-3L_4 + L_5$

Qual o determinante?

Objetivo de aprendizagem: reconhecer os multiplicadores envolvidos na Eliminação de Gauss; calcular o determinante de uma matriz usando escalonamento.

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	pivô A	b	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2		-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
4				
5				
6				

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		$\underline{1} \quad -3 \quad 2$	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	$-2 \quad 8 \quad -1$	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	$4 \quad -6 \quad 5$	29	
4				
5				
6				

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		$\underline{1} \quad -3 \quad 2$	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	$-2 \quad 8 \quad -1$	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	$4 \quad -6 \quad 5$	29	
4				$2L_1 + L_2$
5				
6				

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5				
6				

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5		0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$
6				

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$
6				

Eliminação de Gauss: dispositivo prático

L	Multiplicador	A	b	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0 0 <u>-12</u>	-36	$-3L_4 + L_5$

Eliminação de Gauss: Implementação v l

Entrada: $A_{n \times n}$, $b_{n \times 1}$

Saída: $U_{n \times n}$, $d_{n \times 1}$

$U = A.copy()$

$d = b.copy()$

Para $j=1$ até $n-1$:

 Para $i=j+1$ até n :

$M = U[i,j]/U[j,j]$

 Para $k=j$ até n :

$U[i,k] = -M*U[j,k] + U[i,k]$

$d[i] = -M*d[j]+d[i]$

Retorna U,d

Objetivo de aprendizagem: aprender a implementar a Eliminação de Gauss.

Eliminação de Gauss: Implementação v l

Entrada: $A_{n \times n}$, $b_{n \times 1}$

Saída: $U_{n \times n}$, $d_{n \times 1}$

Como reduzir o
número de
divisões?

Posso pular $k=j$?

```
U=A.copy()
```

```
d=b.copy()
```

```
Para j=1 até n-1:
```

```
    R = 1/U[j,j]
```

```
    Para i=j+1 até n:
```

```
        m = U[i,j]*r
```

```
        for k=j+1 até n:
```

```
            U[i,k] = U[i,k]-m*U[j,k]
```

```
        d[i] = d[i]-m*d[j]
```

```
retorna triu(U), d
```

Objetivo de aprendizagem: reconhecer as diferenças nos custos de diferentes operações algébricas e oportunidades para otimização.

Eliminação de Gauss: Implementação v2

Entrada: $A_{n \times n}$, $b_{n \times 1}$

Saída: $U_{n \times n}$, $d_{n \times 1}$

$U = A.copy()$

$d = b.copy()$

Para $j=1$ até $n-1$:

$r = 1/U[j,j]$

Para $i=j+1$ até n :

$m = U[i,j]*r$

$U[i,j+1:] = U[i,j+1:] - m*U[j,j+1:]$

$d[i] = d[i] - m*d[j]$

retorna $\text{triu}(U)$, d

Como reduzir o
tempo de execução?

Eliminação de Gauss: Implementação v3

Entrada: $A_{n \times n}$, $b_{n \times 1}$

Saída: $U_{n \times n}$, $d_{n \times 1}$

$U = A.copy()$

$d = b.copy()$

Para $j = 1$ até $n - 1$:

$r = 1/U[j,j]$

Para $i = j + 1$ até n :

$m = U[i,j] * r$

$U[i,j+1:n] = U[i,j+1:n] - m * U[j,j+1:n]$

$d[i] = d[i] - m * d[j]$

retorna $\text{triu}(U)$, d

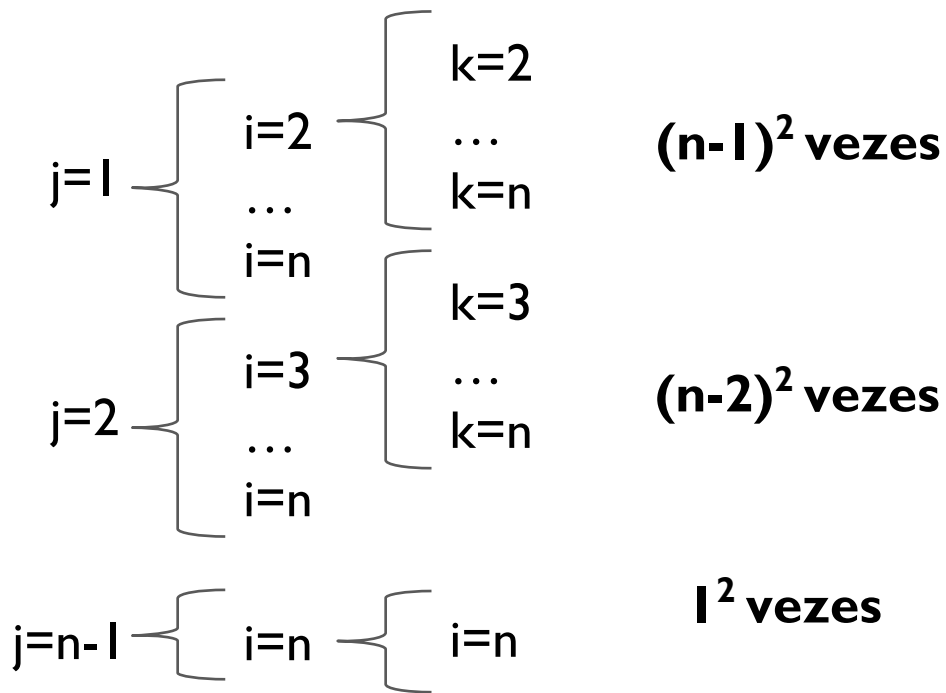
Complexidade da Eliminação de Gauss

Quantas divisões, adições (+ ou -) e multiplicações **no cálculo de U**?

Divisões: $n-1$

Adições:

$$\sum_{a=1}^{n-1} a^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$



Objetivo de aprendizagem: calcular o custo computacional da Eliminação de Gauss.

Complexidade da Eliminação de Gauss

Quantas divisões, adições (+ ou -) e multiplicações **no cálculo de U?**

Divisões: $n-1$

Adições: $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

$$j=1 \left\{ \begin{array}{l} i=2 \\ \dots \\ i=n \end{array} \right.$$

(n-1) vezes

Multiplicações:

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$j=2 \left\{ \begin{array}{l} i=3 \\ \dots \\ i=n \end{array} \right.$$

(n-2) vezes

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

$$j=n-1 \left\{ \begin{array}{l} i=n \end{array} \right.$$

1 vez

Quando a eliminação falha ou tem erro grande?

- Quando o pivô é zero, eliminação falha.
- Quando pivô é relativamente pequeno, temos $m > 1$, o que pode aumentar muito o erro de arredondamento.

Teórico: $\text{res} \leftarrow a_{21} - m \cdot a_{11}$

Real: $\widehat{\text{res}} \leftarrow \hat{a}_{21} - \hat{m} \cdot \hat{a}_{11}$

$rd(\text{res}) \leftarrow rd(a_{21}) - m \cdot a_{11} + \hat{m} \cdot \hat{a}_{11}$

Erro de

arredondamento: $rd(x) = x - \hat{x}$

Como m e \hat{m} são aproximadamente iguais,

$$rd(\text{res}) \leftarrow rd(a_{21}) - \hat{m} \cdot rd(a_{11})$$

$$|rd(\text{res})| \leftarrow |rd(a_{21}) - \hat{m} \cdot rd(a_{11})|$$

Quanto maior m , maior o erro de arredondamento.

Quando a eliminação falha ou tem erro grande?

Solução

Trocar linha de modo a tornar o pivô não-nulo.

Mas existem várias opções. Qual é a melhor?

O melhor é escolher como pivô elemento da coluna de maior valor absoluto (técnica chamada **pivotação parcial**).

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	Multiplicador	A	b	Operações
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1	-15	
3		<u>4</u> -6 5	29	
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0 -1,5 0,75	3,75	$-0,25L_3 + L_1$
5		0 <u>5</u> 1,5	-0,5	$0,5L_3 + L_2$
6		0 0 <u>1,2</u>	3,6	$0,3L_5 + L_4$

Aula anterior

- Como transformar $Ax=b$ em $Ux=d$?
 - Operações L-elementares
- Implementação da Eliminação de Gauss
 - Cálculo do número de operações
- Quando a Eliminação de Gauss falha
 - Solução: pivotação parcial

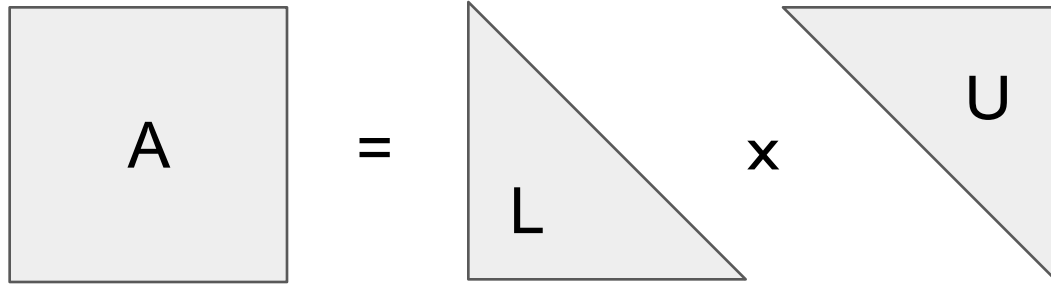
Aula de hoje

- Fatoração LU
 - Resolvendo $Ax=b$ usando fatoração $A=LU$
 - Como obter fatores LU
 - Implementando LU
 - Instabilidade numérica de $A=LU$
- Fatoração $PA=LU$
 - Como obter P
 - Resolvendo $Ax=b$ usando $PA=LU$
 - Implementando $PA=LU$

E se eu mudar o vetor b para b' ?
Qual o custo para resolver o novo sistema?

Fatoração LU (ou Decomposição LU)

É a decomposição $A_{n \times n} = L_{n \times n} U_{n \times n}$ onde L é triangular inferior e U é triangular superior.



Fatoração LU

Pode ser usada para resolver sistemas $Ax=b$

Como?

$$\begin{array}{c} Ax=b \\ LUx=b \\ \underbrace{}_y \end{array}$$

Qual o custo
para resolver
 $Ax=b$ assim?

Sistema tri. #1

$$Ly=b$$

Encontra y

Sistema tri. #2

$$Ux=y$$

Encontra x

Objetivo de aprendizagem: entender como resolver sistema $Ax=b$ a partir da fatoração LU e qual o custo da solução.

Como obter os fatores L e U?

Usando a própria eliminação de Gauss:

Zerar a coluna 1 equivale a pré-multiplicar A por matriz tri inf L_1 .

Quem é L_1 ?

Zerar a coluna 2 equivale a pré-multiplicar $L_1 A$ por matriz tri inf L_2 .

Quem é L_2 ?

...

Como obter os fatores L e U?

$$U = L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A$$

$$(L_{n-1} \cdots L_2 L_1)^{-1} U = A$$

$$\underbrace{L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_L U = A$$

Dois golpes de sorte:

- L_i^{-1} é obtida trocando-se o sinal da coluna não-nula de L_i abaixo da diagonal
- O produto L_i^{-1} e L_j^{-1} é obtido preenchendo-se as colunas i e j abaixo da matriz identidade com colunas dessas matrizes

Fatoração LU a partir da Eliminação de Gauss

L	Multiplicador	A
1		<u>1</u> -3 2
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 <u>8</u> -1
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 <u>5</u>
4		0 <u>2</u> 3
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3
6		0 0 <u>-12</u>

~~| b |
|-----|
| 11 |
| -15 |
| 29 |~~

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

A

L

U

Exemplo da resolução de $Ax=b$ usando LU

Sistema triangular inferior $Ly=b$

- Substituições sucessivas $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 11,$$

$$-2y_1 + y_2 = -15, \quad y_2 = -15 + 2(11) \leadsto y_2 = 7 \text{ e}$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 29, \quad y_3 = 29 - 4(11) - 3(7) \leadsto y_3 = -36.$$

- Vetor intermediário: $y = [11 \ 7 \ -36]^T$.

Exemplo da resolução de $Ax=b$ usando LU

Sistema triangular superior $Ux=y$

- Substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix},$$

$$-12x_3 = -36, x_3 = \frac{-36}{-12} \leadsto x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7, x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \leadsto x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2 \ -1 \ 3]^T$.

Eliminação de Gauss: Implementação v3

Entrada: $A_{n \times n}$, $b_{n \times 1}$

Saída: $U_{n \times n}$, $d_{n \times 1}$

Que mudanças
devemos fazer?

```
U=A.copy()
```

```
d=b.copy()
```

```
Para j=1 até n-1:
```

```
    r = 1/U[j,j]
```

```
    Para i=j+1 até n:
```

```
        m = U[i,j]*r
```

```
        U[i,j+1:n] = U[i,j+1:n]-m*U[j,j+1:n]
```

```
        d[i] = d[i]-m*d[j]
```

```
retorna triu(U), d
```

Implementando LU

Entrada: $A_{n \times n}$

Saída: $U_{n \times n}$

Uma diferença importante: não precisamos da coluna b

```
U=A.copy()
```

```
L=np.eye(n) # matriz identidade de ordem n
```

```
Para j=1 até n-1:
```

```
    r = 1/U[j,j]
```

```
    Para i=j+1 até n:
```

```
        L[i,j] = U[i,j]*r
```

```
        U[i,j+1:n] = U[i,j+1:n]-L[i,j]*U[j,j+1:n]
```

```
retorna L, triu(U)
```

LU tem mesmo problema que Eliminação

Como LU é essencialmente Eliminação de Gauss, pivôs pequenos também são problemáticos. Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix}.$$

Suponha $\varepsilon_{\text{machine}} = 10^{-16}$. Nesse caso, $1 - 10^{20}$ não será representado de forma exata:

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por que isso é ruim?

LU tem mesmo problema que Eliminação

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{L}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponha $b=(1,0)^\top$.

Qual a solução correta para $Ax=b$? $\tilde{x} = (-1, 1)^\top$

Qual a solução obtida? $x \approx (0, 1)^\top$

Como resolver
o problema?

Fatoração PA=LU

- Para resolver a instabilidade numérica da fatoração LU, podemos usar a **pivotação parcial** (permuta de linhas).
- É como permutar as linhas de A antes de fazer a fatoração:

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0 -1,5 0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6		0 0 <u>1,2</u>	$0,3L_5 + L_4$	<u>1</u>

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Diferença: não precisamos da coluna **b**

L	m	A	Operações	p
1		1 -3 2		1
2		-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4				
5				
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2		-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4				
5				
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4				
5				
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4				1
5				<u>2</u>
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4			$-0,25L_3 + L_1$	1
5				<u>2</u>
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4			$-0,25L_3 + L_1$	1
5			$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4		0 -1,5 0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5			$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4		0 -1,5 0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0 -1,5 0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6				

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0 -1,5 0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6			$0,3L_5 + L_4$	<u>1</u>

LU com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1 -3 2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2 8 -1		2
3		<u>4</u> -6 5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0 -1,5 0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6		0 0 <u>1,2</u>	$0,3L_5 + L_4$	<u>1</u>

Outro exemplo

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Outro exemplo

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4 -1 0 -1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1 -2 1 0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0 4 -4 1		3
4		<u>5</u> 0 5 -1		<u>4</u>

Outro exemplo

L	m	A	Operações	p
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4 -1 0 -1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1 -2 1 0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0 4 -4 1		3
4		<u>5</u> 0 5 -1		<u>4</u>
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0,25$	0 -1 -4 -0,2	$-0,8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0,5$	0 -2 0 0,2	$-0,2L_4 + L_2$	2
7		0 <u>4</u> -4 1	$0L_4 + L_3$	<u>3</u>
8		0 0 <u>-5</u> 0,05	$0,25L_7 + L_5$	<u>1</u>
9	$m_{23} = (-2)/(-5) = 0,4$	0 0 -2 0,7	$0,5L_7 + L_6$	2
10		0 0 0 <u>0,68</u>	$-0,4L_8 + L_9$	<u>2</u>

Resolvendo $Ax=b$ usando $PA=LU$

Pode ser usada para resolver sistemas $Ax=b$

Como?

$$Ax=b$$

$$PAx=Pb$$

$$LU \underbrace{x}_{y} = Pb$$

Qual o custo
para resolver
 $Ax=b$ assim?

Sistema tri. #1

$$Ly=Pb$$

Encontra y

Sistema tri. #2

$$Ux=y$$

Encontra x

Objetivo de aprendizagem: entender como resolver sistema $Ax=b$ a partir da fatoração $PA=LU$ e qual o custo da solução.

Aula anterior

- Fatoração LU
 - Resolvendo $Ax=b$ usando fatoração $A=LU$
 - Como obter fatores LU
 - Implementando LU
 - Instabilidade numérica de $A=LU$
- Fatoração $PA=LU$
 - Como obter P
 - Resolvendo $Ax=b$ usando $PA=LU$
 - Implementando $PA=LU$

Quiz: condições
necessárias à
LU

Aula de hoje

- Estabilidade numérica
- Uso da decomposição
 - Cálculo do determinante
 - Refinamento de solução
 - Cálculo da inversa
- Decomposição de Cholesky
 - Matrizes definidas positivas

Algoritmo preciso

Desejamos resolver problema f usando algoritmo \tilde{f} .

Algoritmo \tilde{f} pode ser visto como uma sequência de operações que transforma entrada A em saída $\tilde{f}(A)$.

Um bom algoritmo deve produzir erro relativo pequeno, ou seja,

$$\frac{|f(A) - \tilde{f}(A)|}{|f(A)|} = \mathcal{O}(\epsilon_{machine})$$

Neste caso, dizemos que o algoritmo \tilde{f} é **preciso**.

Estabilidade

Porém, a noção de algoritmo preciso pode ser um pouco ambiciosa em muitos contextos pois inevitavelmente cometeremos erros de arredondamento em ponto flutuante.

No lugar da precisão, requeremos que o algoritmo seja estável.

Algoritmo regressivamente estável: um algoritmo \tilde{f} usado para resolver um problema f é dito regressivamente estável (*backward stable*) se

$$f(\tilde{A}) = \tilde{f}(A)$$

para algum \tilde{A} com

$$\frac{|A - \tilde{A}|}{|A|} = \mathcal{O}(\epsilon_{machine})$$

Estabilidade vs. estabilidade retroativa

Seja $f(x)$ a resposta de um problema x . Um algoritmo \hat{f} retorna a solução aproximada $\hat{f}(x)$ para um problema x . Ele é denominado:

- **Estável:** quando retorna a resposta quase "exata" para um problema y quase igual a x .

$$\frac{\|\hat{f}(x) - f(y)\|}{\|f(y)\|} = \mathcal{O}(\varepsilon_{machine})$$

$$\frac{\|y - x\|}{\|y\|} = \mathcal{O}(\varepsilon_{machine})$$

- **Regressivamente estável:** quando retorna a resposta "exata" para um problema y quase igual a x

$$\hat{f}(x) = f(y)$$

$$\frac{\|y - x\|}{\|y\|} = \mathcal{O}(\varepsilon_{machine})$$

Estabilidade vs. estabilidade retroativa

Embora para o nosso problema "x" (decomposição de A), o PA=LU tenha retornado uma solução exata para uma matriz $\tilde{A} \approx A$, é possível escolher outros "x" onde isso não acontece.

Um algoritmo só é considerado regressivamente estável se ele satisfaz a condição para qualquer problema x.

Estabilidade de PA=LU

O erro da fatoração PA=LU, é descrito por

$$\hat{L}\hat{U} = \hat{P}A + \delta A, \quad \frac{\delta A}{A} = \mathcal{O}(\rho \varepsilon_{machine})$$

onde

$$\rho = \frac{\max_{i,j} |u_{ij}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}$$

é um fator de crescimento.

Portanto, PA=LU não é *backward stable* na teoria, mas na prática,

In fifty years of computing, no matrix problems that excite an explosive instability are known to have arisen under natural circumstances." [Trefethen]

Cálculo do determinante

Quiz: cálculo do determinante

Usando propriedades dos determinantes:

$$PA = LU$$

$$\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U)$$

$$\det(A) = \det(U)/\det(P)$$

$$\det(A) = (-1)^t \prod_i u_{ii}$$

onde t é o número de trocas de linhas necessárias para transformar P na matriz identidade. **Número de inversões** e t possuem mesma paridade.

Refinamento de solução

Devido a erros de arredondamento, a solução $x^{(0)}$ obtida para $Ax=b$ pode não ser exata. Podemos verificar calculando o resíduo

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

Assuma que exista um vetor $c^{(0)}$ tal que $x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)}$ é uma solução refinada. Como obter $c^{(0)}$?

Refinamento de solução

$$Ax^{(1)}=b$$

$$A(x^{(0)}+c^{(0)})=b$$

$$Ax^{(0)}+Ac^{(0)}=b$$

$$Ac^{(0)}=b-Ax^{(0)}$$

$$Ac^{(0)}=r^{(0)}$$

Podemos reutilizar uma decomposição de A para encontrar $c^{(0)}$ com custo $O(n^2)$. A nova solução aproximada é $x^{(1)}=x^{(0)}+c^{(0)}$.

Refinamento de solução usando $PA=LU$

1. Faça a decomposição $PA=LU$
2. Encontre x resolvendo $LUx^{(0)}=Pb$
3. Para $i=0,1,\dots$
 - a. Calcule o resíduo $r^{(i)}=b-Ax^{(i)}$
 - b. Encontre $c^{(i)}$ resolvendo $LUc^{(i)}=Pr^{(i)}$
 - c. Faça $x^{(i+1)}=x^{(i)}+c^{(i)}$
 - d. Se $|c^{(i)}| < TOL$; então retorne $x^{(i+1)}$

Exemplo

Resolver o sistema abaixo e refinar a solução até que $\|c\|_{\infty} < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Decomposição $PA=LU$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Ax^0 = b \longrightarrow LUx^0 = Pb, \\ Lt = Pb \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 19 \\ 8,73 \\ 13,6034 \end{bmatrix} \text{ e } Ux^0 = t \rightsquigarrow x^0 = \begin{bmatrix} 1,9731 \\ -0,9738 \\ 4,9647 \end{bmatrix}.$$

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0 \\ 0,0712 \end{bmatrix}, \quad LUc^0 = Pr^0 \rightsquigarrow c^0 = \begin{bmatrix} 0,0268 \\ -0,0262 \\ 0,0352 \end{bmatrix},$$

$$x^1 = x^0 + c^0 = \begin{bmatrix} 1,9999 \\ -1,0000 \\ 4,9999 \end{bmatrix},$$

$$r^1 = b - Ax^1 = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0 \\ 0,0002 \end{bmatrix}, \quad LUc^1 = Pr^1 \rightsquigarrow c^1 = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \end{bmatrix},$$

$$x^2 = x^1 + c^1 = \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0000 \end{bmatrix}.$$

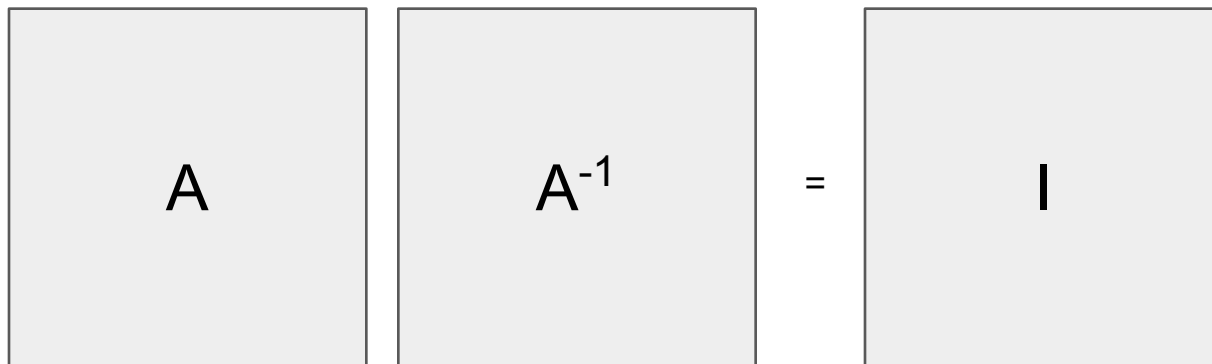
Refinamento interrompido: $\|c^1\|_\infty = 0,0001 < 10^{-3}$

Cálculo da inversa

Calcular a inversa de uma matriz A equivale a resolver n sistemas

$$Ax_1=e_1, Ax_2=e_2, \dots, Ax_n=e_n$$

A inversa A^{-1} é a concatenação dos vetores coluna x_1, x_2, \dots, x_n .



The diagram illustrates the relationship between a matrix A , its inverse A^{-1} , and the identity matrix I . It consists of three light gray rectangular boxes with black borders, each containing a label. The first box on the left contains the letter A . The second box in the middle contains A^{-1} . To the right of the second box is an equals sign $=$. The third box on the right contains the letter I .

Cálculo da inversa

Calcular a inversa de uma matriz A equivale a resolver n sistemas

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, \dots, Ax_n = e_n$$

A inversa A^{-1} é a concatenação dos vetores coluna x_1, x_2, \dots, x_n .

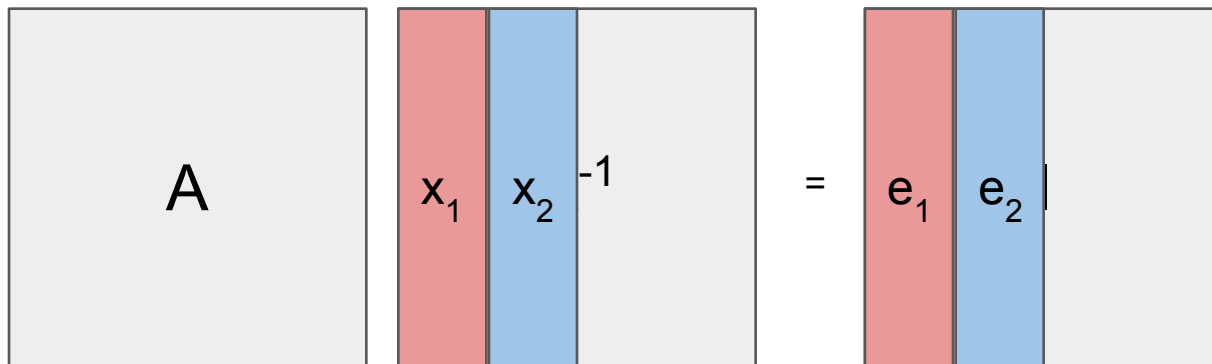
The diagram illustrates the process of finding the inverse of a matrix A . It shows the equation $A \begin{bmatrix} x_1 & A^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & I \end{bmatrix}$. In this representation, the first column of the matrices is highlighted in red. The matrix A is a square block. The matrix $\begin{bmatrix} x_1 & A^{-1} \end{bmatrix}$ consists of a red column labeled x_1 followed by a gray block labeled A^{-1} . The matrix $\begin{bmatrix} e_1 & I \end{bmatrix}$ consists of a red column labeled e_1 followed by a gray block labeled I . The equation is shown with an equals sign between the two sides.

Cálculo da inversa

Calcular a inversa de uma matriz A equivale a resolver n sistemas

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, \dots, Ax_n = e_n$$

A inversa A^{-1} é a concatenação dos vetores coluna x_1, x_2, \dots, x_n .



Cálculo da inversa

Calcular a inversa de uma matriz A equivale a resolver n sistemas

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, \dots, Ax_n = e_n$$

A inversa A^{-1} é a concatenação dos vetores coluna x_1, x_2, \dots, x_n .

Qual o custo
usando LU?

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & & e_n \end{bmatrix}$$

Decomposição de Cholesky

- Matrizes simétricas **definidas positivas** podem ser decompostas em fatores triangulares 2x mais rápido que matrizes gerais

- O algoritmo padrão para isso é a fatoração de Cholesky

$$A=LL^T,$$

que fatora A em uma triangular inferior L e uma triangular superior L^T . Ela opera do lado esquerdo e direito da matriz simultaneamente, preservando e explorando a simetria.

Matrizes simétricas

A é uma matriz simétrica se possui mesmas entradas abaixo e acima da diagonal, i.e., $a_{ij}=a_{ji}$, logo, $A=A^T$.

Matrizes simétricas podem ser classificadas segundo o sinal da forma quadrática $\phi(v)=v^TAv$, onde v é um vetor não-nulo arbitrário ou, equivalentemente, segundo seus autovalores:

Forma quadrática	Nome de A	Autovalores de A
$v^TAv > 0$	definida positiva	$\lambda_i > 0$
$v^TAv \geq 0$	semidefinida positiva	$\lambda_i \geq 0$
$v^TAv < 0$	definida negativa	$\lambda_i < 0$
$v^TAv \leq 0$	semidefinida negativa	$\lambda_i \leq 0$

Matrizes simétricas definidas positivas

Seja A uma matriz simétrica definida positiva. As seguintes afirmações são verdadeiras e equivalentes:

- Para todo vetor v não-nulo, $v^T A v > 0$.
- Os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A são positivos.

Teorema (Cholesky). Se A for uma matriz simétrica definida positiva, então existe uma única matriz triangular inferior L com elementos da diagonal positivos tal que $A = LL^T$.

Cálculo do fator

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Elemento l_{44}

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \rightarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} \rightsquigarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^3 l_{4k}^2}.$$

Elemento qualquer da diagonal de L

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Cálculo do fator

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Elemento l_{43}

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43} \rightarrow l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} \rightsquigarrow l_{43} = \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^2 l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

Elemento qualquer abaixo da diagonal principal

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } i = j+1, j+2, \dots, n.$$

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1			
2	-2	10		2			
3	2	-7	30	3			

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2			
3	2	-7	30	3			

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1		
3	2	-7	30	3			

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1		
3	2	-7	30	3	1		

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1		

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	5

Dispositivo prático

Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}$$

A				L			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Aula anterior

- Estabilidade numérica
- Uso da decomposição
 - Cálculo do determinante
 - Refinamento de solução
 - Cálculo da inversa
- Decomposição de Cholesky
 - Matrizes definidas positivas

Quiz: dispositivo
prático Cholesky

Aula de hoje

- Fatoração de Cholesky
 - Implementação
 - Complexidade
 - Estabilidade
- Número de condição

Implementação Fatoração de Cholesky v I

Entrada: $A_{n \times n}$ $L = \text{np.zeros}(n)$

Saída: $L_{n \times n}$

```
Para... Para j=1 ate n:  
retorna L soma = sum(L[j,1:j-1]**2)  
           L[j,j] = sqrt(A[j,j]-soma)  
           r = 1/L[j,j]  
           Para i=j+1 ate n:  
               soma2 = sum(L[i,:]*L[j,:])  
               L[i,j] = (A[i,j]-soma2)*r
```

Implementação Fatoração de Cholesky v1

Entrada: $A_{n \times n}$ $L = \text{np.zeros}(n)$

Saída: $L_{n \times n}$ Para $j=1$ até n :

$L[j,j] = \sqrt{A[j,j] - \sum(L[j,1:j-1])^2}$)

Para $i=j+1$ até n :

$L[i,j] = (A[i,j] - \sum(L[i,1:j-1] * L[j,1:j-1])) / L[j,j]$

retorna L

Como reduzir o
número de
divisões?

Implementação Fatoração de Cholesky v1

Entrada: $A_{n \times n}$ $L = \text{np.zeros}(n)$

Saída: $L_{n \times n}$ Para $j=1$ até n :

Operações: m

$$L[j,j] = \sqrt{A[j,j] - \sum_{l=1}^{j-1} L[j,l]^2}$$

$$r = 1/L[j,j]$$

Para $i=j+1$ até n :

$$L[i,j] = (A[i,j] - \sum_{l=1}^{j-1} L[i,l] * L[j,l]) * r$$

retorna L

Qual o custo de Cholesky?

$$j=1 \begin{cases} i=2 \Rightarrow 1 \\ i=n \Rightarrow 1 \end{cases}$$

$$j=2 \begin{cases} i=3 \Rightarrow 2 \\ i=n \Rightarrow 2 \end{cases}$$

$$0 + (n-1) \cdot 2$$

$$1 + (n-2) \cdot 2$$

$$(j-1) + (n-j) \cdot j$$

Custo da fatoração de Cholesky

Radiciações: n

Divisões: n

Multiplicações:

$$\sum_{j=1}^n (j-1) + (n-j)j =$$

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} //$$

Adições:

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + n =$$

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$$

$$j=1 \left\{ \begin{array}{l} i=2 \\ \dots \\ i=n \end{array} \right.$$

$0 + (n-1) * 1$ vezes

$$j=2 \left\{ \begin{array}{l} i=3 \\ \dots \\ i=n \end{array} \right.$$

$1 + (n-2) * 2$ vezes

$$j=n-1 \left\{ \begin{array}{l} i=n \end{array} \right.$$

$n-2 + 1 * (n-1)$ vezes

$$j=n$$

$n-1 + 0$ vezes

Resolução de sistema pela fatoração de Cholesky

Pode ser usada para resolver sistemas $Ax=b$

Como?

$$\begin{array}{c} Ax=b \\ LL^T x=b \\ \underbrace{\quad}_y \end{array}$$

Qual o custo
para resolver
 $Ax=b$ assim?

Sistema tri. #1

$$Ly=b$$

Encontra y

Sistema tri. #2

$$L^T x=y$$

Encontra x

Objetivo de aprendizagem: entender como resolver sistema $Ax=b$ a partir da fatoração LU e qual o custo da solução.

Estabilidade da fatoração de Cholesky

Fatoração de Cholesky é sempre estável.

Teorema: Seja A uma matriz definida positiva e $A=LL^T$ sua fatoração de Cholesky. Para todos $\epsilon_{\text{machine}}$ suficientemente pequenos, garante-se que o algoritmo executa até o final, gerando um fator \tilde{L} que satisfaz

$$\tilde{L}\tilde{L}^T = A + \delta A, \quad \frac{|\delta A|}{|A|} = \mathcal{O}(\epsilon_{\text{machine}})$$

Intuição: os elementos em L não podem ser muito grandes, pois $\|A\|_2 = \|L\|_2^2$

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \|L\|_2 \|L^T\|_2 \\ &= \|L\|_2^2 \end{aligned}$$

Condicionalmento de matrizes

Alguns sistemas $Ax=b$ são mais suscetíveis a erros de arredondamento (ou erros de medição) do que outros.

Exemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata: $x = [1 \ 1]^T$
- Vetor $b' = [1,99 \ 1,98]^T$
- Solução exata de $Ay = b' = [100 \ -99]^T$

Condicionalmento de matrizes

Alguns sistemas $Ax=b$ são mais suscetíveis a erros de arredondamento (ou erros de medição) do que outros.

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata: $x = [1 \ 1]^T$
- Matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,99 \end{bmatrix} \approx A$.
- Solução exata de $A'z=b = [2 \ -1/99]^T$

O que é que a matriz A tem de especial?

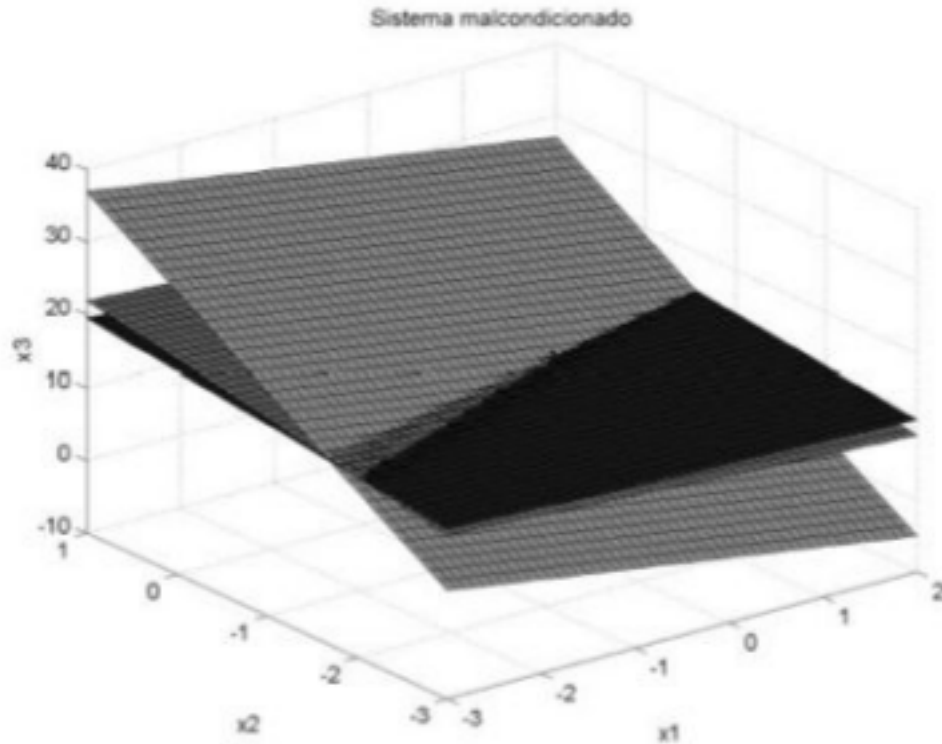
Malcondicionamento não está ligado ao determinante

- $\det(A) \approx 0$ não indica necessariamente malcondicionamento
- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,001 \\ -0,001 & 0,001 \end{bmatrix}$$

- $\det(A) = 2 \times 10^{-6}$, e é muito bem condicionada
- Note que podemos multiplicar $Ax=b$ por 10^3 e obter um sistema equivalente. Na prática não existe diferença entre os dois sistemas.

Interpretação geométrica de malcondicionamento



Número de condição

- Escalar associado a matriz A
- Determina a relação entre perturbações em A (ou b) e perturbações em x
- Dado por

$$\text{condição}(A) = \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

- $\| \cdot \|$ é uma norma matricial qualquer
- Valor depende da norma, mas não difere muito conforme a escolha
- Matriz é malcondicionada se $\kappa(A) \gg 1$ (e.g. $\kappa(A) = 10^6$)

Relembrando norma 2 matricial

Seja A uma matriz $n \times n$. Quando:

- A é simétrica, $\|A\|_2$ é λ_{\max} , o maior autovalor de A em módulo
- A não é simétrica, $\|A\|_2$ é σ_{\max} , o maior valor singular de A em módulo

$$\|A\|_2 = \begin{cases} \lambda_{\max} & \text{se } A = A^T \\ \sigma_{\max} & \text{se } A \neq A^T \end{cases}$$

É possível mostrar que:

- Os autovalores de A^{-1} são os recíprocos dos autovalores de A
- Os valores singulares de A^{-1} são os recíprocos dos valores singulares de A

$$\begin{aligned} A &= Q \Lambda Q^T \\ A^{-1} &= (Q \Lambda Q^T)^{-1} \\ &= (Q^T)^{-1} \Lambda^{-1} Q^{-1} \\ &= Q \Lambda^{-1} Q^T \end{aligned}$$

Número de condição com norma 2

$$\text{condição}(A) = \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \quad A = A^T$$

Ex.: Calcule $\kappa_2(A)$ e $\kappa_2(B)$ para

$$\lambda_{\max}(A) = 1.9801$$

$$\lambda_{\max}(A^{-1}) = 1/5.05 \times 10^{-5}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Quiz: número de condição

$$\lambda(A) = (1.9801, -5.0504 \times 10^{-5})$$

$$\lambda(A^{-1}) = 1/(1.9801, -5.0504 \times 10^{-5})$$

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$\kappa_2(A) = 1.9801 \times 1/(5.0504 \times 10^{-5}) \approx 3.92 \times 10^4$$

$$\sigma(B) = (1.7423 \times 10^2, 3.7222 \times 10^1, 2.4548 \times 10^1)$$

$$\sigma(B^{-1}) = 1/(1.7423 \times 10^2, 3.7222 \times 10^1, 2.4548 \times 10^1)$$

$$\kappa_2(B) = 1.7423 \times 10^2 \times 1/(2.4548 \times 10^1) \approx 2.6641$$