Sistemas Lineares (SLs)

Álgebra Linear Computacional - Fabricio Murai

Aula anterior

- Fundamentos teóricos do PCA
  - Matriz de covariância
  - Mudança de base
  - Maximização da variância (minimização do ruído)
  - Relação entre SVD e PCA

Aula de hoje

- Existência e unicidade de soluções
- Perspectiva geométrica de SLs
- Perspectiva vetorial de SLs
- Exemplos de matrizes escalonadas
    - Matriz quadrada: posto, autovalores e determinante
- Solução de sistemas triangulares
- Eliminação de Gauss

Este sistema linear possui solução?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 3y + 4z &= -2 \end{aligned} \longleftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right| \longleftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right| \longleftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

Resposta: Sim, pois é possível obter um sistema equivalente do tipo Ux=d, onde U é triangular superior, cuja solução é única.

Teorema fundamental

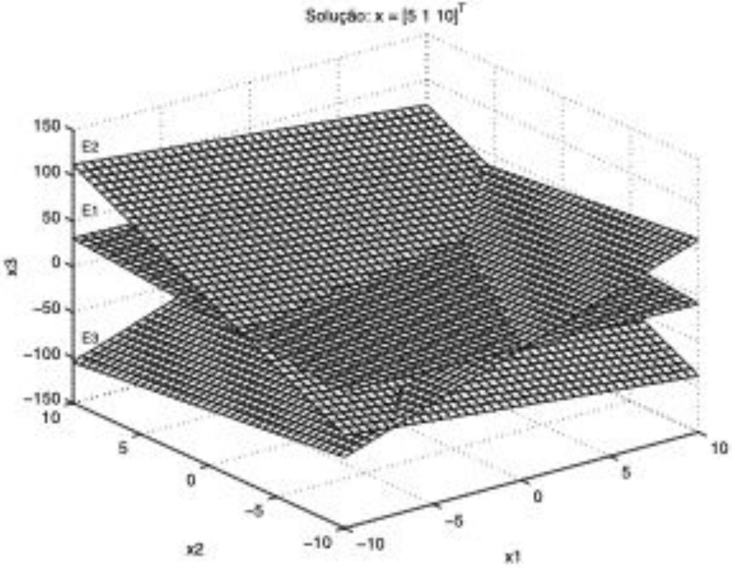
Para qualquer SL de equações Ax=b, vale uma de 3 possibilidades:

- É inconsistente (não possui solução)
- É consistente:
  - Possui uma única solução
  - Possui infinitas soluções

Perspectiva: interseção de hiperplanos

Sistema com 3 equações 3 variáveis:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & 1 \\ -20 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{vmatrix}$$



$$x = [5, 1, 10]^\top$$

Fonte: CAMPOS, filho. Algoritmos Numéricos. 3a. edição.

Perspectiva: SL como combinação linear

Encontrar a solução x para $A_{mxn}x_{nx1} = b_{mx1}$ equivale a encontrar a combinação linear das colunas de A que satisfazem:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Pergunta: Quando existe solução?

Resposta: Quando b está no espaço S de colunas de A

$$S = \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Exemplos de matrizes escalonadas

Hora do quiz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Mx = b

  gorda; posto de linha completo; infinitas soluções p/ qualquer b (2 vars livres)

- Nx = b

  magra; posto de coluna completo; inconsistente p/ alguns b e solução única p/ outros

- Px = b

  quadrada; posto incompleto; inconsistente p/ alguns b e infinitas p/ outros

Caso particular: matriz quadrada

Fatos importantes sobre matriz quadrada A_{nxn}:

- Posto é igual ao número de autovalores não-nulos
- Produto dos autovalores é igual ao determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i$$

- Soma dos autovalores é igual ao traço(A)

$$\text{traço}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$$

Perguntas sobre matrizes quadradas

- Qual a relação entre posto e determinante?

$$\text{posto}(A) = n \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

- Para todo b, Ax=b tem solução única. Qual posto(A)? Qual a solução x?

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = n$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Determinante pela expansão de Laplace

Cofator i,j da matriz B: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

onde Mij é o menor i,j de B (determinante da matriz (n-1)x(n-1) que resulta ao deletar a linha i e coluna j)

Teorema. O determinante |B| da matriz B_{nxn} é dado por

$$\begin{aligned} |B| &= b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \cdots + b_{in}C_{in} \\ &= b_{1j}C_{1j} + b_{2j}C_{2j} + \cdots + b_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{j'=1}^{n} b_{ij'}C_{ij'} = \sum_{i'=1}^{n} b_{i'j}C_{i'j} \end{aligned}$$

Determinante pela expansão de Laplace

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Usando a Linha 1:

$$|B| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Usando a Coluna 2:

$$|B| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

COLA

$$\begin{aligned} |B| &= b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \cdots + b_{in}C_{in} \\ &= b_{1j}C_{1j} + b_{2j}C_{2j} + \cdots + b_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{j'=1}^{n} b_{ij'}C_{ij'} = \sum_{i'=1}^{n} b_{i'j}C_{i'j} \end{aligned}$$

O que podemos dizer sobre o posto de B?

Sistemas triangulares

Lx=c é dito **sistema triangular inferior** quando L é triangular inferior.

Pode ser resolvido pelo método das substituições sucessivas.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{c_1}{l_{11}} \\
x_2 &= \frac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} \\
\ldots &= \ldots \\
x_i &= \frac{c_i - l_{i1}x_1 - l_{i2}x_2 - \ldots l_{i,i-1}x_{i-1}}{l_{ii}}
\end{aligned}
$$

Método das substituições sucessivas

Entrada: matriz triangular inferior L_{nxn}, vetor c_{nx1}

Saída: vetor solução x_{nx1}

Solução aqui

Método das substituições sucessivas

Entrada: matriz triangular inferior L_{nxn}, vetor c_{nx1}

Saída: vetor solução x_{nx1}

```
Para i=1 até n:
    soma = 0
    Para j=1 até i-1:
        soma += L[i,j]*x[j]
    x[i] = (c[i]-Soma)/L[j,j]
Retorna x
```

Quantas adições, multiplicações e divisões?

Sistemas triangulares

Ux=d é dito **sistema triangular superior** quando U é triangular superior.

Pode ser resolvido pelo método das substituições retroativas.

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{nn}}$$

$$\ldots = \ldots$$

$$x_i = \frac{d_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - u_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots u_{i,n}x_{i,n}}{u_{ii}}$$

Como transformar $Ax=b$ em $Ux=d$?

Operações L-triangulares

Usadas para transformar $Ax=b$ em um **sistema equivalente** $Bx=c$ (mesma solução):

- Trocar linhas i e j   det(B) = -det(A)
- Multiplicar uma linha por $c \neq 0$ det(B) = c det(A)
- Adicionar s vezes linha i à linha j   det(B) = det(A)

Quanto vale det(B) após Eliminação de Gauss?

Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

Dispositivo Prático (CAMPOS, filho 2018).

pivô

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		$\underline{1}$	-3	2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2	8	-1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4	-6	5	29	
4		0	$\underline{2}$	3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0	6	-3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	$\underline{-12}$	-36	$-3L_4 + L_5$

Qual o determinante?

Eliminação de Gauss: Implementação v1

Entrada: A_{nxn}, b_{nx1}

Escrever solução aqui

Saída: U_{nxn}, d_{nx1}

Eliminação de Gauss: Implementação v1

Entrada: A_{nxn}, b_{nx1}

Saída: U_{nxn}, d_{nx1}

Como reduzir o número de divisões?

Posso pular k=j?

```
U=A.copy()
d=b.copy()
Para j=1 até n-1:
    Para i=j+1 até n:
        m = U[i,j]/U[j,j]
        for k=j até n:
            U[i,k] = U[i,k]-m*U[j,k]
        d[i] = d[i]-m*d[j]
retorna U, d
```

Eliminação de Gauss: Implementação v2

Entrada: A_{nxn}, b_{nx1}

Saída: U_{nxn}, d_{nx1}

Como reduzir o tempo de execução?

```
U=A.copy()
d=b.copy()
Para j=1 até n-1:
    r = 1/U[j,j]
    Para i=j+1 até n:
        m = U[i,j]*r
        for k=j+1 até n:
            U[i,k] = U[i,k]-m*U[j,k]
        d[i] = d[i]-m*d[j]
retorna upper(U), d
```

Eliminação de Gauss: Implementação v3

Entrada: A_{nxn}, b_{nx1}

Saída: U_{nxn}, d_{nx1}

```
U=A.copy()
d=b.copy()
Para j=1 até n-1:
    r = 1/U[j,j]
    Para i=j+1 até n:
        m = U[i,j]*r
        U[i,j+1:n] = U[i,j+1:n]-m*U[j,j+1:n]
        d[i] = d[i]-m*d[j]
retorna upper(U), d
```

Complexidade da Eliminação de Gauss

Quantas divisões, adições (+ ou -) e multiplicações **no cálculo de U**?

Divisões: n-1

Adições:

$$\sum_{a=1}^{n-1} a^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$j=1 \begin{cases} i=2 \begin{cases} k=2 \\ \dots \\ k=n \end{cases} \\ \dots \\ i=n \end{cases} \qquad \mathbf{(n\text{-}1)^2\ vezes}$$

$$j=2 \begin{cases} i=3 \begin{cases} k=3 \\ \dots \\ k=n \end{cases} \\ \dots \\ i=n \end{cases} \qquad \mathbf{(n\text{-}2)^2\ vezes}$$

$$j=n\text{-}1 \begin{cases} i=n \begin{cases} i=n \end{cases} \end{cases} \qquad \mathbf{1^2\ vezes}$$

Complexidade da Eliminação de Gauss

Quantas divisões, adições (+ ou -) e multiplicações **no cálculo de U**?

Divisões: n-1

Adições: $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

Multiplicações:

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

$$j=1 \left\{ \begin{array}{l} i=2 \\ \dots \\ i=n \end{array} \right.$$

(n-1) vezes

$$j=2 \left\{ \begin{array}{l} i=3 \\ \dots \\ i=n \end{array} \right.$$

(n-2) vezes

$$j=n-1 \left\{ \; i=n \right.$$

1 vez

Quando a eliminação falha ou tem erro grande?

- Quando o pivô é zero, eliminação falha.
- Quando pivô é relativamente pequeno, temos m > 1, o que pode aumentar muito o erro de arredondamento.

Teórico: $\text{res} \leftarrow a_{21} - m \cdot a_{11}$

Real: $\widehat{\text{res}} \leftarrow \hat{a}_{21} - \hat{m} \cdot \hat{a}_{11}$

$$rd(\text{res}) \leftarrow rd(a_{21}) - m \cdot a_{11} + \hat{m} \cdot \hat{a}_{11}$$

Como m e $\hat{m}$ são aproximadamente iguais,

$$rd(\text{res}) \leftarrow rd(a_{21}) - \hat{m} \cdot rd(a_{11})$$

$$|rd(\text{res})| \leftarrow |rd(a_{21}) - \hat{m} \cdot rd(a_{11})|$$

Erro de arredondamento: $rd(x) = x - \hat{x}$

Quanto maior m, maior o erro de arred.

Fonte:https://ocw.mit.edu/courses/chemical-engineering/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2005/lecture-notes/lecturenotes123.pdf

Quando a eliminação falha ou tem erro grande?

Solução

Trocar linha de modo a tornar o pivô não-nulo.
Mas existem várias opções. Qual é a melhor?

O melhor é escolher como pivô elemento da coluna de maior valor absoluto (técnica chamada **pivotação parcial**).

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

L	m	A			Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1	-3	2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0{,}5$	-2	8	-1		2
3		$\underline{4}$	-6	5		$\underline{3}$
4	$m_{12} = (-1{,}5)/5 = -0{,}3$	0	$-1{,}5$	$0{,}75$	$-0{,}25L_3 + L_1$	1
5		0	$\underline{5}$	$1{,}5$	$0{,}5L_3 + L_2$	$\underline{2}$
6		0	0	$\underline{1{,}2}$	$0{,}3L_5 + L_4$	$\underline{1}$

Quando Ax=b possui solução?

Relação entre posto de A_{mxn} e posto da matriz aumentada A|b

- posto(A) = posto(A|b): consistente (possui solução)
  - posto(A) = n: solução única
  - posto(A) < n: infinitas soluções
- posto (A) < posto(A|b): inconsistente (não possui solução)

O que é posto de uma matriz?