



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA  
E TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

**Elaborato finale corso di  
Complementi di controllo automatici**

# Controllo del pitch di un veicolo terrestre

Studente  
Fabrizio Di Rosa  
P38/57

Anno Accademico 2020/2021

# Contents

List of Figures	ii
1 Modello	1
1.1 Analisi del modello a ciclo aperto	3
1.1.1 Risposte al gradino	3
1.2 Proprietà strutturali	3
1.2.1 Controllabilità	3
1.2.2 Osservabilità	3
1.3 Modellazione disturbo	4
1.4 Obiettivi del controllo	6
1.5 Creazione sistema in Matlab	6
2 State Feedback	7
2.0.1 Limiti dell'azione	7
2.1 Codice Matlab	8
2.2 Risultati Ottenuti	8
3 State Feedback con Integratore	10
3.1 Codice Matlab	11
3.2 Risultati ottenuti	11
4 State Feedback con Integratore ed osservatore	14
4.1 Risultati ottenuti	15
4.2 Codice Matlab	15
5 Controllo LQI	18
5.0.1 Scelta matrici $Q$ ed $R$	18
5.1 Codice Matlab	19
6 Controllo LQG	21
6.0.1 Filtro di Kalman	21
6.0.2 Controllore	22
6.0.3 Implementazione sistema totale	22
6.1 Codice Matlab	23
6.2 Risultati in Matlab	23
7 Comparazione Finale	27
7.0.1 Valutazione numerica performances	27

# List of Figures

1.1	Modello utilizzato . . . . .	1
1.2	Risposta al gradino di ampiezza 0.1 [m] . . . . .	4
2.1	Schema matlab Retroazione di stato . . . . .	7
3.1	Schema matlab retroazione di stato con integratore . . . . .	10
4.1	Schema matlab azione integrale ed osservatore . . . . .	14
5.1	Schema Matlab controllo LQI . . . . .	18
6.1	Schema Matlab controllo LQG . . . . .	21
6.4	Errore utilizzo filtro Kalman . . . . .	26
7.2	Comparazione ingressi . . . . .	29

# 1

## Modello

In questo capitolo verrà analizzato il modello che è stato utilizzato per effettuare i controlli.

Il modello preso in considerazione è quello prende il nome di "half car model" e considera la dinamica di pitch di un veicolo.

La figura 1.1 mostra il modello "half car model"

- una massa sospesa  $m_2$  che si riferisce all'auto che è sostenuta dal gruppo ammortizzatori e pneumatico.
- due masse  $m_{1f}, m_{1r}$  che forniscono due sistemi equivalenti dei due gruppi ruota
- La sospensione e lo pneumatico sono modellati da molle lineari  $k_f, k_r$  in parallelo con degli smorzatori  $C_f, C_r$ .
- Lo pneumatico è stato sostituito con la sua rigidità equivalente  $k_{tr}$ ,  $k_{tf}$ , e lo smorzamento dello pneumatico è trascurato
- Il corpo ha momento d'inerzia pari a  $J$
- $\phi$  è l'angolo di pitch, cioè la rotazione intorno all'asse y (uscente dal foglio)
- $q_f, q_r$  sono rispettivamente lo scostamento della strada anteriore e posteriore- questi due parametri saranno interpretati con edisturbi non misurabili
- $z_{1f}, z_{1r}$  sono rispettivamente lo scostamento delle masse  $m_{1f}, m_{1r}$  rispetto alla posizione di riposo
- $z_{2f}, z_{2r}$  sono rispettivamente gli scostamenti della parte anteriore e posteriore del veicolo rispetto alla posizione di riposo

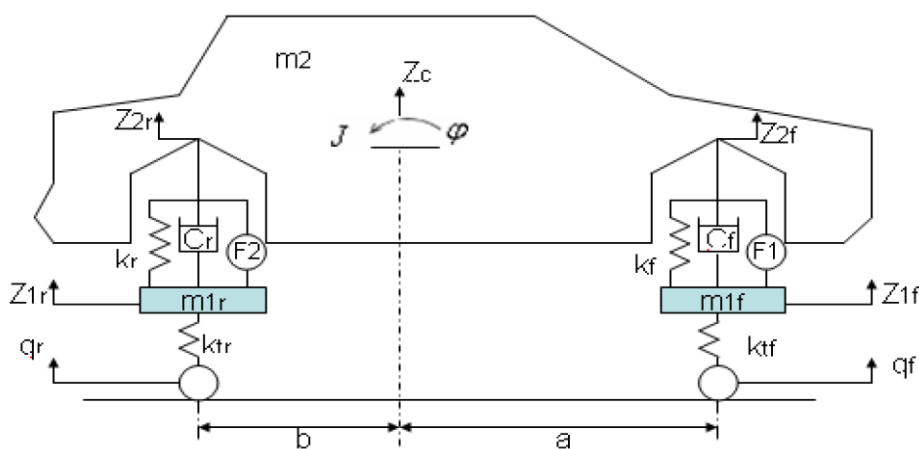


Figure 1.1: Modello utilizzato

- $z_c$  è lo scostamento verticale del veicolo rispetto alla posizione di riposo
- $F_1, F_2$  sono i due ingressi di controllo, in forza
- $a$  e  $b$  sono le due carreggiate

Con riferimento 1.1, utilizzando la seconda legge del moto di Newton e il concetto di diagramma a corpo libero, le equazioni del moto per il corpo dell'auto sono così derivate:

$$\begin{aligned}
 m_{1f}\ddot{z}_{1f} - k_f(z_{2f} - z_{1f}) - c_f(\dot{z}_{2f} - \dot{z}_{1f}) - F_1 + k_{tf}(z_{1f} - q_f) &= 0 \\
 m_{1r}\ddot{z}_{1r} - k_r(z_{2r} - z_{1r}) - c_r(\dot{z}_{2r} - \dot{z}_{1r}) - F_2 + k_{tr}(z_{1r} - q_r) &= 0 \\
 m_2\ddot{z}_c + k_f(z_{2f} - z_{1f}) + c_f(\dot{z}_{2f} - \dot{z}_{1f}) + F_1 + k_r(z_{2r} - z_{1r}) + c_r(\dot{z}_{2r} - \dot{z}_{1r}) + F_2 &= 0 \\
 J\ddot{\phi} + b[k_r(z_{2r} - z_{1r}) + c_r(\dot{z}_{2r} - \dot{z}_{1r}) + F_2] - d[k_f(z_{2f} - z_{1f}) + c_f(\dot{z}_{2f} - \dot{z}_{1f}) + F_1] &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

La relazioni tra lo scostamento verticale delle masse  $m_{1f}, m_{1r}$  e il veicolo  $m_2$  sono espresse dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 z_{2f} &= z_c - a \tan \varphi \\
 z_{2r} &= z_c + b \tan \varphi
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

utilizzando l'approssimazione che  $\tan \varphi \approx \varphi$  valida per  $|\varphi| < 10^\circ$ . Quindi il primo obiettivo di controllo è far sì che  $|\varphi|$  non esca dal suddetto range affinché l'approssimazione sia valida.

Usando le seguenti relazioni si può riscrivere la 1.2 come segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{2f} &= \dot{z}_c - a\dot{\varphi} \\
 \dot{z}_{2r} &= \dot{z}_c + b\dot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sostituendo le variabili appena ricavate, il sistema può essere riscritto in forma "state-space" come segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu + Lw \\
 y &= Cx + Du \\
 x &\in \mathbb{R}^{(8 \times 1)}, \quad u \in \mathbb{R}^{(2 \times 1)} \\
 w &\in \mathbb{R}^{(2 \times 1)}, \quad y \in \mathbb{R}^{(4 \times 1)}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 x &= (z_{1f}, z_{1r}, z_c, \varphi, \dot{z}_{1f}, \dot{z}_{1r}, \dot{z}_c, \dot{\varphi})^T \\
 y &= (z_c, \varphi, \dot{z}_c, \dot{\varphi})^T \\
 u &= (F_1, F_2)^T \\
 w &= (q_f, q_r)^T
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

con  $x, y, u, w$  rispettivamente le variabili di stato, le uscite, gli ingressi di controllo ed i disturbi. Le matrici  $A, B, C$  e  $D$  sono così definite:

$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 -\frac{k_f + k_{tf}}{m_{1f}} & 0 & \frac{k_f}{m_{1f}} & -\frac{ak_f}{m_{1f}} & -\frac{c_f}{m_{1f}} & 0 & \frac{c_f}{m_{1f}} & -\frac{ac_f}{m_{1f}} \\
 0 & -\frac{k_r + k_{tr}}{m_{1r}} & \frac{k_r}{m_{1r}} & \frac{bk_r}{m_{1r}} & 0 & \frac{c_r}{m_{1r}} & \frac{c_r}{m_{1r}} & \frac{bc}{m_{1r}} \\
 \frac{k_f}{m_2} & \frac{k_r}{m_2} & -\frac{k_f + k_r}{m_2} & \frac{ak_f - bk_r}{m_2} & \frac{c_f}{m_2} & \frac{c_r}{m_2} & -\frac{c_f + c_r}{m_2} & \frac{ac_f - bc}{m_2} \\
 -\frac{ak_f}{J} & \frac{bk_r}{J} & \frac{ak_f - bk_r}{J} & -\frac{a^2k_f + b^2k_r}{J} & -\frac{ac_f}{J} & \frac{bc}{J} & \frac{ac_f - bc}{J} & -\frac{a^2c_f + b^2c_r}{J}
 \end{bmatrix}$$

$m_{1f}$	53( kg)	$m_{1r}$	117( kg)
$m_2$	663( kg)	$J$	1067( kgm <sup>2</sup> )
$k_f$	58636(N/m)	$k_r$	58636(N/m)
$k_{tf}$	310000( N/m)	$k_{tr}$	310000( N/m)
$c_f$	4165( Ns/m)	$c_r$	4165( Ns/m)
$a$	1.233( m)	$b$	1.327( m)

Table 1.1: Parametri utilizzati per il modello

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_{1f}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{1f}} \\ -\frac{1}{m_2} & -\frac{1}{m_2} \\ \frac{a}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_{tf}}{m_{1f}} & 0 \\ 0 & \frac{k_{tr}}{m_{1r}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [0];$$

## 1.1. Analisi del modello a ciclo aperto

Andando a valutare numericamente i poli del sistema a ciclo aperto (tabella 1.1), si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p_1 = -44.0967 - 10.8565i & p_2 = -44.0967 + 10.8565i \\ p_3 = -19.3174 - 48.9339i & p_4 = -19.3174 + 48.9339i \\ p_5 = -5.05958 - 12.3175i & p_6 = -5.05958 + 12.3175i \\ p_7 = -1.3041 - 9.5156i & p_8 = -1.3041 + 9.5156i \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Dalla eqn.1.6 si nota che il sistema a ciclo chiuso ha tutti poli a parte reale negativa, seppur con dinamiche lente. Per andare a valutare al meglio i tempi di assestamento bisognerebbe considerare le funzioni di trasferimento, ma per brevità si è saltata quest'analisi. Si sono quindi valuate le risposte al gradino.

### 1.1.1. Risposte al gradino

Come si può notare dalle risposte al gradino di ampiezza  $-0.1 [m]$  del sistema a ciclo aperto (1.2), il sistema risulta essere asintoticamente stabile (cosa che abbiamo già verificato precedentemente) ma il problema principale è che i valori di  $\varphi$  arrivano a toccare i  $20^\circ$  cosa non accettabile e che il tempo di assestamento è nell'ordine dei 4 [sec]

## 1.2. Proprietà strutturali

### 1.2.1. Controllabilità

Affinchè sia possibile allocare gli autovalori in qualunque posizione nel semipiano sinistro è necessario che il sistema sia stabilizzabile. Ovviamente il fatto che il sistema sia stabilizzabile è una condizione meno forte rispetto alla controllabilità che andremo quindi a valutare:

$$\mathcal{C} = [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \quad (1.7)$$

Andando a valutare numericamente il rango della matrice di controllabilità abbiamo che il  $rank(\mathcal{C}) = 8$  quindi il sistema risulta essere completamente controllabile.

### 1.2.2. Osservabilità

Valutiamo ora la proprietà di osservabilità per il nostro sistema. Sappiamo che se il sistema è rivelabile allora è possibile andare ad effettuare una stima dello stato. Affinchè il sistema sia rivelabile è necessario

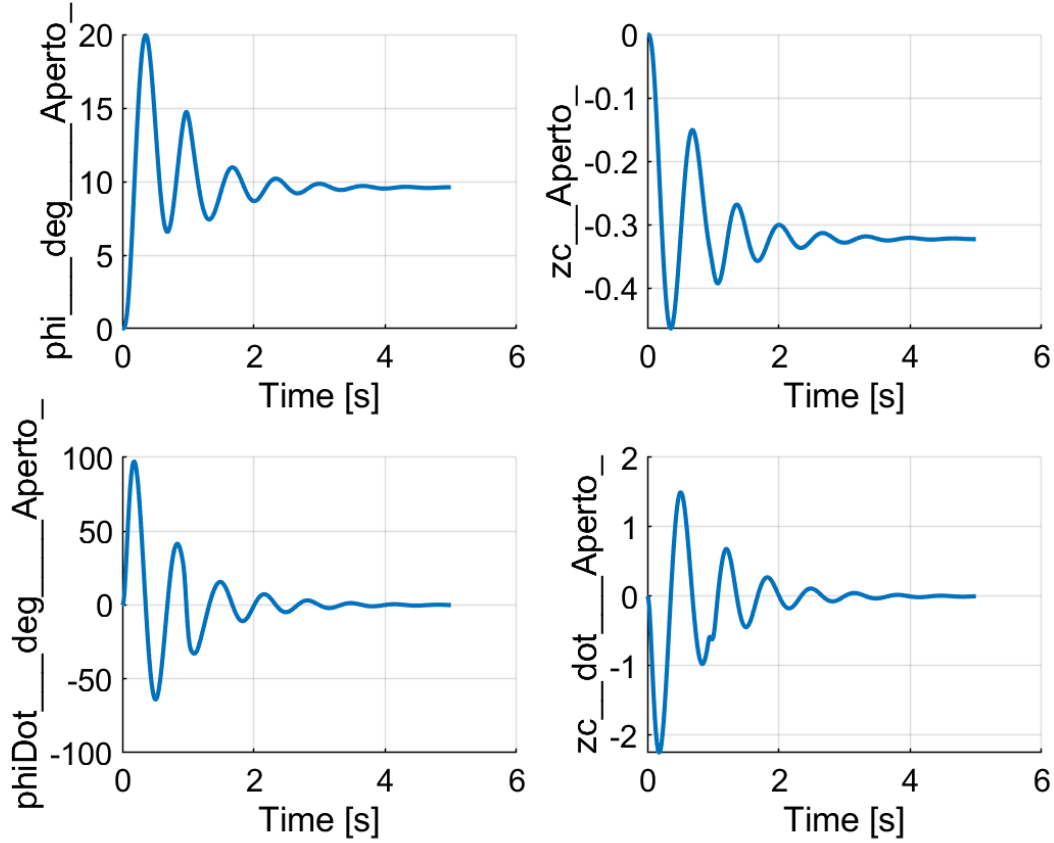


Figure 1.2: Risposta al gradino di ampiezza 0.1 [m]

che gli autovalori della parte non rivelabile siano tutti a parte reale negativa. Andiamo a valutare la matrice di osservabilità.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

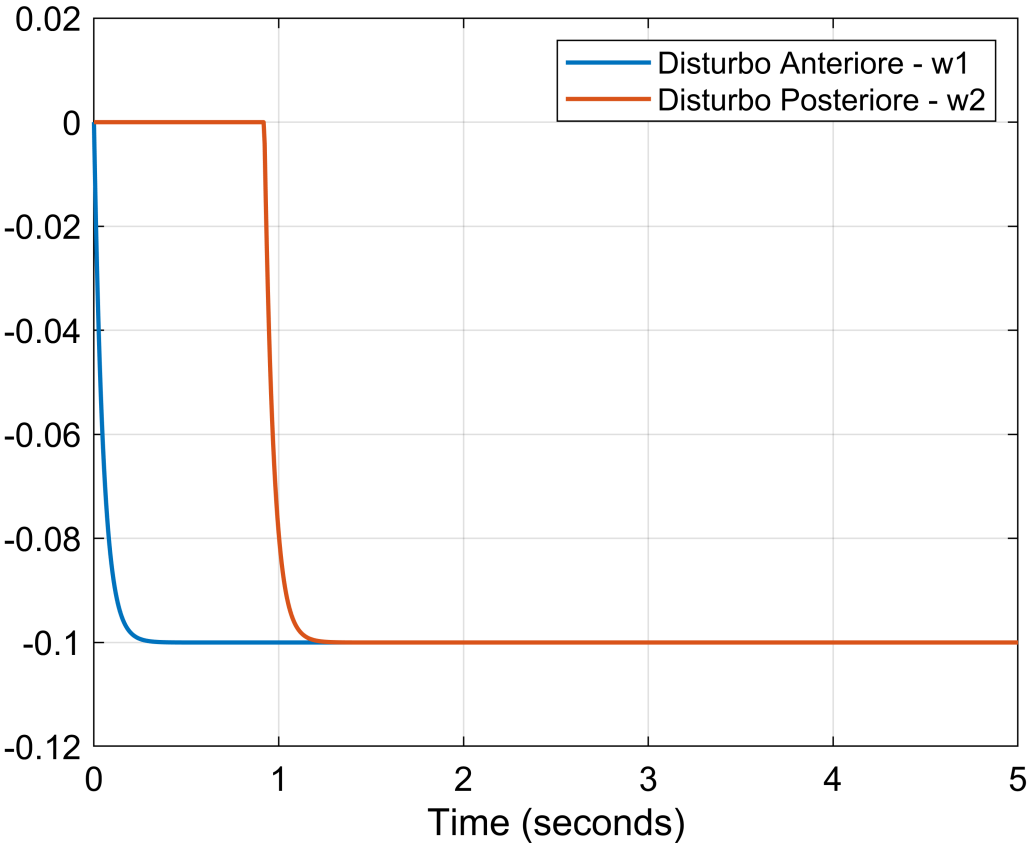
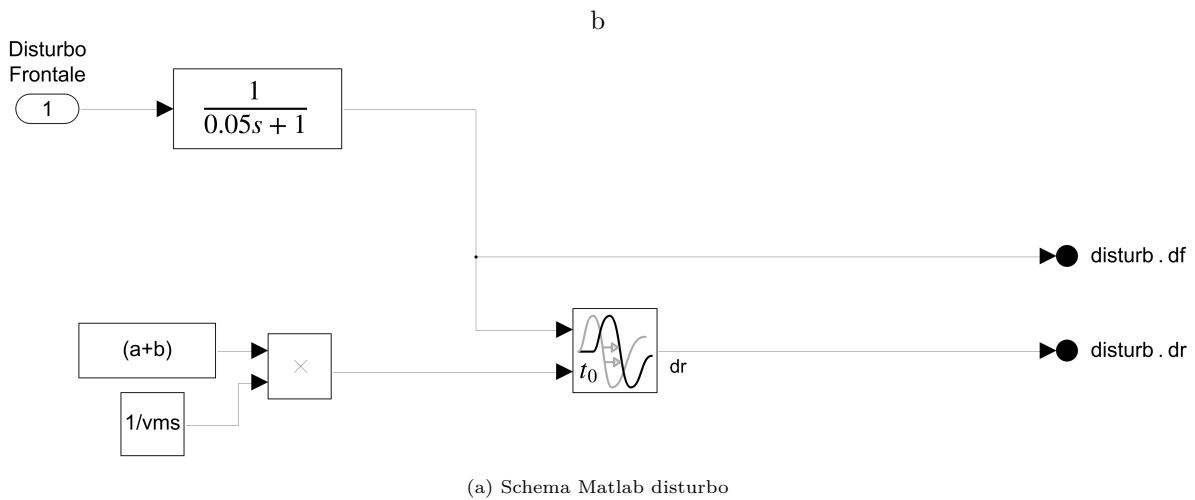
parametrizzandola:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 46.9375 & 0 & -48.1713 & 1 \\ -698.538 & 46.9375 & 475.9693 & -48.1713 \\ -53235.2059 & -698.538 & 64738.3785 & 469.3981 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

e il  $\text{rank}(\mathcal{O}) = 4$ , quindi il sistema risulta essere completamente osservabile.

### 1.3. Modellazione disturbo

Il disturbo  $w$  indicato in (1.4) è stato modellando supponendo che il veicolo si muova con una velocità costante e pari a 2.7778 [m/s] cioè 10 [km/h] ed incontri un disassamento stradale pari a  $-0.1$  [m]. Ovviamente il disturbo agirà prima sulla ruota anteriore e poi, successivamente, considerando la lunghezza e velocità del veicolo, sulla ruota posteriore. Per modellare lo pneumatico il disturbo  $w$  è stato filtrato come mostrato in figura 1.3b. Lo schema Matlab è illustrato in figura 1.3a.



(b) Disturbi rispetto al tempo



## 1.4. Obiettivi del controllo

Considerando lo scenario in cui il veicolo si muove con velocità costante pari a  $v = 10 \text{ [km/h]}$  e supponendo che ci sia un dissestamento del manto stradale pari a  $0.1 \text{ [m]}$ , si scelgono i seguenti obiettivi di controllo:

- Tempo di assestamento nell'ordine dei  $1 \text{ [s]}$
- Far sì che  $|\varphi| < 10^\circ$
- Ridurre eventuali sottoelongazioni/sovraelongazioni effettuando un trade-off con l'ampiezza della legge di controllo
- $\varphi = 0$  a regime con errore nullo
- $z_c = 0$  a regime con errore nullo

## 1.5. Creazione sistema in Matlab

```

1 %% Matrici sistema
2 veicoloConDisturbi = ss(A,[B,L],C,0);
3 veicoloPerControllo = ss(A,B,C,0);
4
5 %% ProprietàStrutturali
6 ContrMatrix = ctrb(veicoloPerControllo.A,veicoloPerControllo.B);
7 if rank(ContrMatrix) ≠ max(size(veicoloPerControllo.A))
8     disp('Sistema non completamente controllabile');
9     return
10 else
11     disp('Sistema completamente controllabile');
12 end
13
14 ObsvMa = obsv(veicoloPerControllo.A,veicoloPerControllo.C);
15 if rank(ObsvMa) ≠ max(size(veicoloPerControllo.A))
16     disp('Sistema non completamente osservabile');
17     return
18 else
19     disp('Sistema completamente osservabile');
20 end

```

# 2

## State Feedback

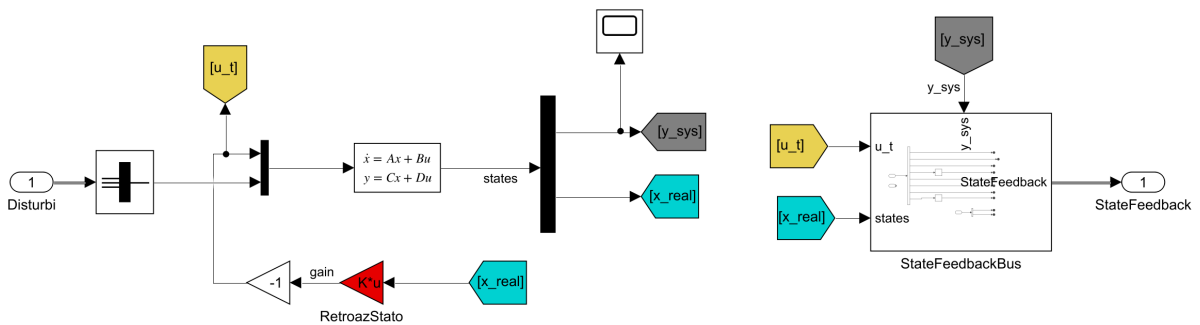


Figure 2.1: Schema matlab Retroazione di stato

In questo capitolo verrà mostrato il controllo del sistema mediante allocazione degli autovalori. Questo tipo di controllore ha una dipendenza lineare dallo stato esprimibile secondo la legge:

$$u = -Kx + r \quad (2.1)$$

Dato che nel capitolo 1.2.1 abbiamo valutato che il sistema è completamente controllabile allora possiamo scegliere gli autovalori affinché le specifiche definite nella 1.4 siano soddisfatte. Affinché il controllore 2.1 possa essere implementato è necessario calcolare la matrice  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 8}$ . Per la scelta degli altri poli si è scelto di non far discostare molto i poli del sistema ad anello aperto dai poli desiderati a ciclo chiuso (per evitare eventuali sottoelongazioni/sovraelongazioni), l'unico polo che è stato sostanzialmente modificato è la coppia posta in  $-4$ . La scelta, quindi è stata fatta prevalentemente utilizzando una tecnica di trial and error.

La matrice  $K$  ottenuta è la seguente che corrisponde ai seguenti poli:

$$P = (-4 \quad -4.01 \quad -20.0596 - 12.3175i \quad -20.0596 + 12.3175i \quad -44.0967 - 10.8565i \quad -44.0967 + 10.8565i \quad -20 + 48.9339i \quad -20 - 48.9339i)$$

$$K = \begin{pmatrix} 57655.4218 & -116583.9144 & -26569.9593 & -17489.0609 & -2600.4589 & -1088.019 & -14371.0738 & 22126.617 \\ 98055.6693 & 28717.8139 & 32669.6763 & 91519.328 & 146.8973 & 1601.7745 & -9648.5804 & 4975.1478 \end{pmatrix}$$

### 2.0.1. Limiti dell'azione

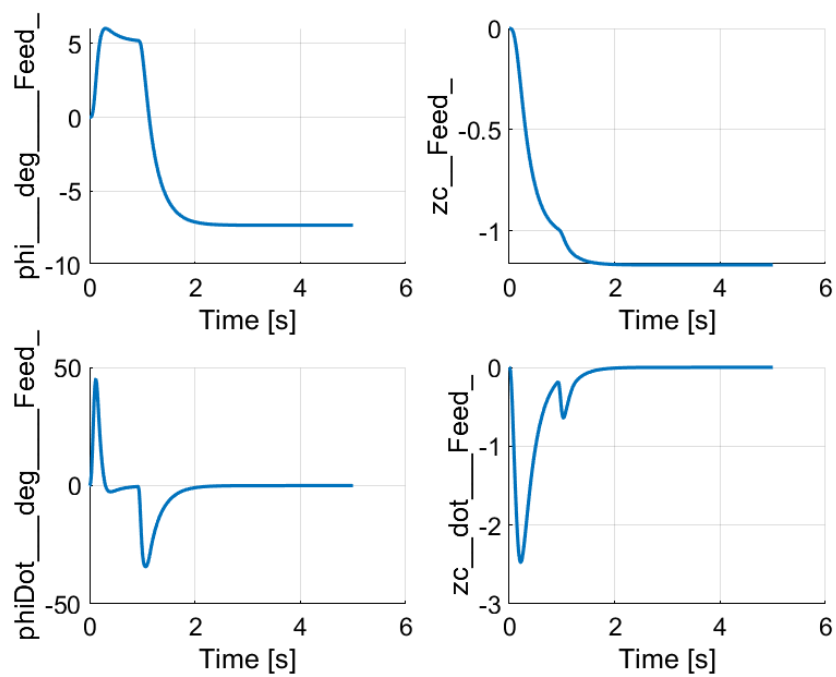
Come si evincerà dai grafici evidentemente dato un disturbo (non misurabile)  $d(t)$  diverso da zero non si può soddisfare la specifica sull'errore a regime riguardante  $z_c$  e  $\varphi$  ed inoltre dato che i disturbi sono stati assunti come non misurabili, non si è potuta progettare un'azione compensatrice.

## 2.1. Codice Matlab

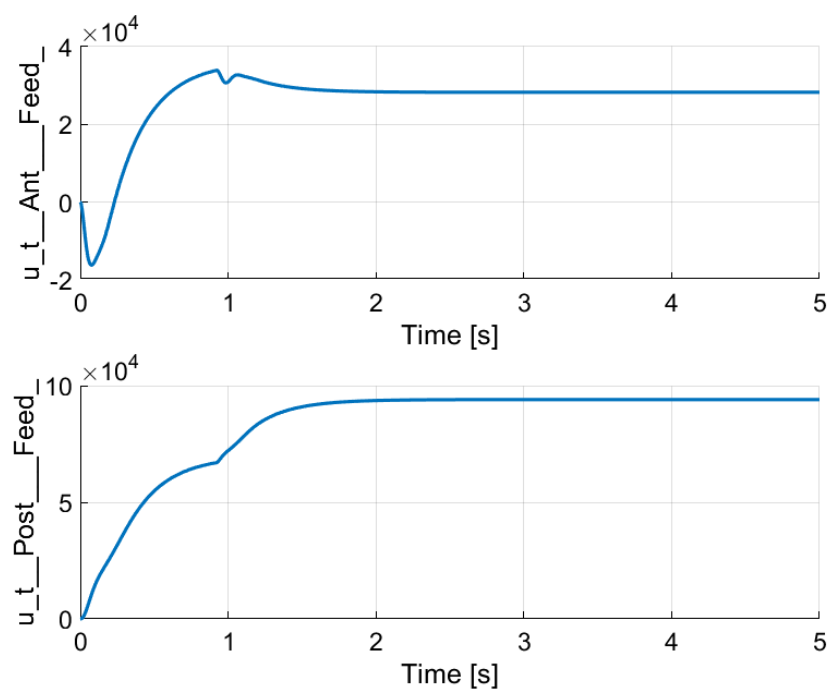
```
1 % 1-Auovalore dominante
2 P = [ -4, -4.01, -20.0596-12.3175i, -20.0596+12.3175i, -44.0967-10.8565i, ...
        -44.0967+10.8565i, -20+48.9339i, -20-48.9339i ];
3 KFeedb = place(veicoloPerControllo.A, veicoloPerControllo.B, P);
4 Kfeedback = struct('Kf', KFeedb(:, 1:8), 'P', P);
5 eig(veicoloAutovalori);
```

## 2.2. Risultati Ottenuti

In figura (2.2b, 2.2a) sono mostrati gli ingressi e le uscite di controllo



(a) Risposte retroazione di stato



(b) Ingressi di controllo retroazione di stato

# 3

## State Feedback con Integratore

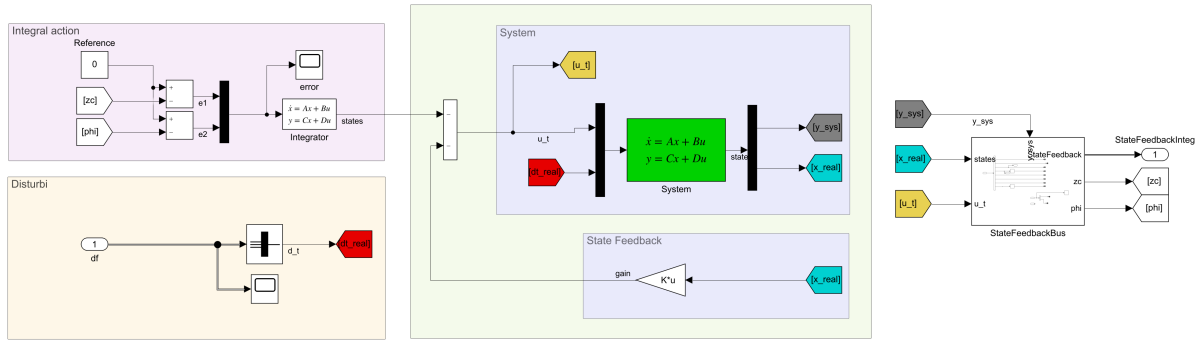


Figure 3.1: Schema matlab retroazione di stato con integratore

Per ottenere l'inseguimento dello scostamento e rotazione desiderata effettuiamo la retroazione di stato su un sistema ampliato a causa dell'inserimento di un integratore e delle retroazioni dell'uscita riferite alle due variabili di stato  $z_c, \phi$ . Allo spazio dello stato si aggiungono due nuove variabili  $x_{i,1}$  ed  $x_{i,2}$  che portano al nuovo sistema allargato, caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A_{aug} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C(1:2,:) & 0 \end{pmatrix} \quad B_{aug} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{aug} = (C(1:2,) \quad 0) \quad D_{aug} = (0;)$$

$$x_{aug} \in \mathbb{R}^{(10 \times 1)}$$

Affinché la coppia  $(A_{aug}, B_{aug})$  sia stabilizzabile è necessario che:

1. La coppia  $(A, B)$  deve essere completamente controllabile;
2.  $\text{rank}([A, 0; -C, 0]) = n + p$  ;

dove  $n$  è il numero di stati e  $p$  è il numero di uscite che si vogliono controllare.

Si è poi proceduto con l'individuazione della posizione degli autovalori nel semipiano complesso negativo. Considerando i 10 autovalori da dover allocare, si è ritenuto opportuno allocare una coppia di autovalori complessi coniugati oltre a quelli già scelta per il controllo in retroazione di stato (2). in conclusione gli autovalori scelti sono i seguenti:

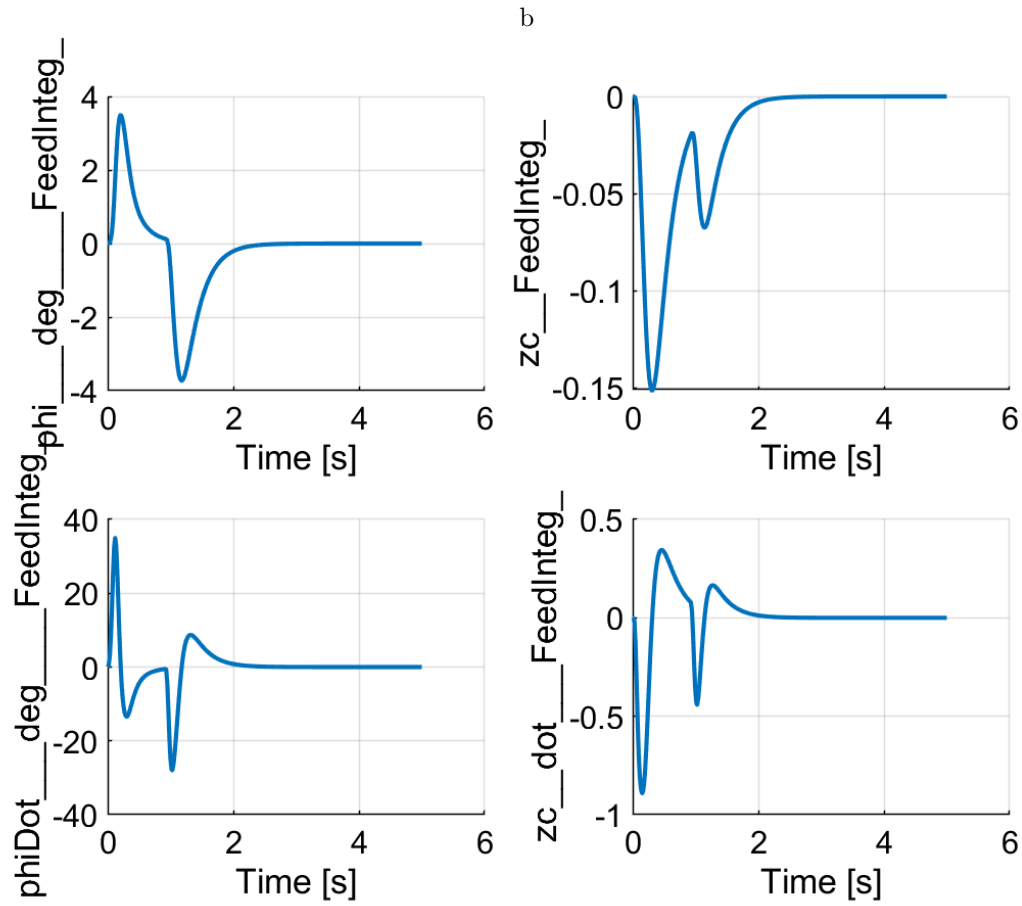
$$P_{aug} = ([K_{feedback}.P, -12.5 - 0.1i, -12.5 + .1i])$$

dove  $K_{feedback}.P$  sono gli autovalori allocati per il caso precedente. La scelta per gli ultimi due autovalori si è fatta andando a valutare la variazione della risposta al variare dei due poli.

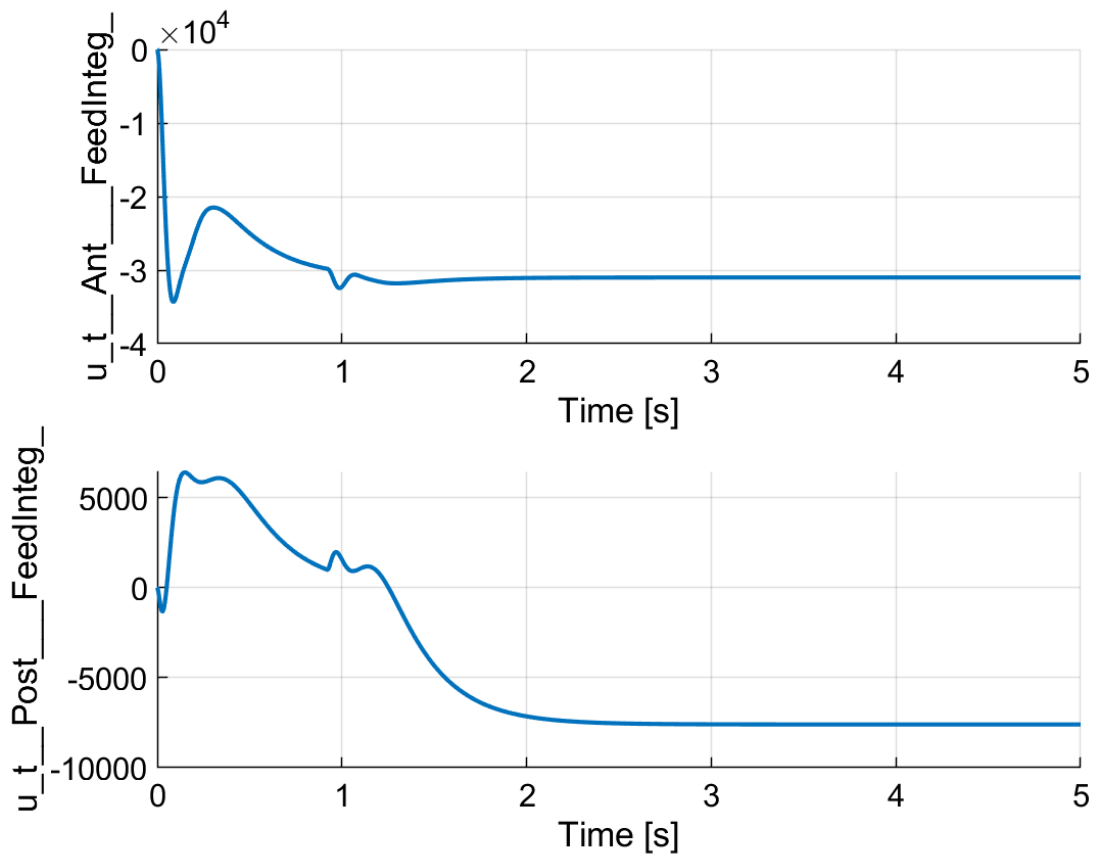
### 3.1. Codice Matlab

```
1 sysItg=ss(zeros(2,2),eye(2),eye(2),0); %Integratore
2 Controllo = [veicoloPerControllo.A,zeros(8,2);veicoloPerControllo.C(1:2,:),zeros(2,2)]; ...
   %Condizioni per il sys esteso
3 if (rank(Controllo) <8)
4     return;
5 end;
6
7 Aa = [veicoloPerControllo.A,zeros(8,2);-veicoloPerControllo.C(1:2,:),sysItg.A];
8 Ba = [veicoloPerControllo.B(:,1:2);zeros(2,2)];
9 Ca = [veicoloPerControllo.C(1:2,:),zeros(2,2)];
10
11 P = [ -4, -4.01,-20.0596-12.3175i,-20.0596+12.3175i,-44.0967-10.8565i, ...
        -44.0967+10.8565i,-20+48.9339i, -20-48.9339i];
12 K = place(Aa,Ba,[Kfeedback.P,-12.5-0.1i,-12.5+.1i]);
13 KFeedbIntegratore = struct('Kfe',K(:,1:8),'Ki',K(:,9:10),'P',[P,-15-0.1i,-15+.1i]);
```

### 3.2. Risultati ottenuti

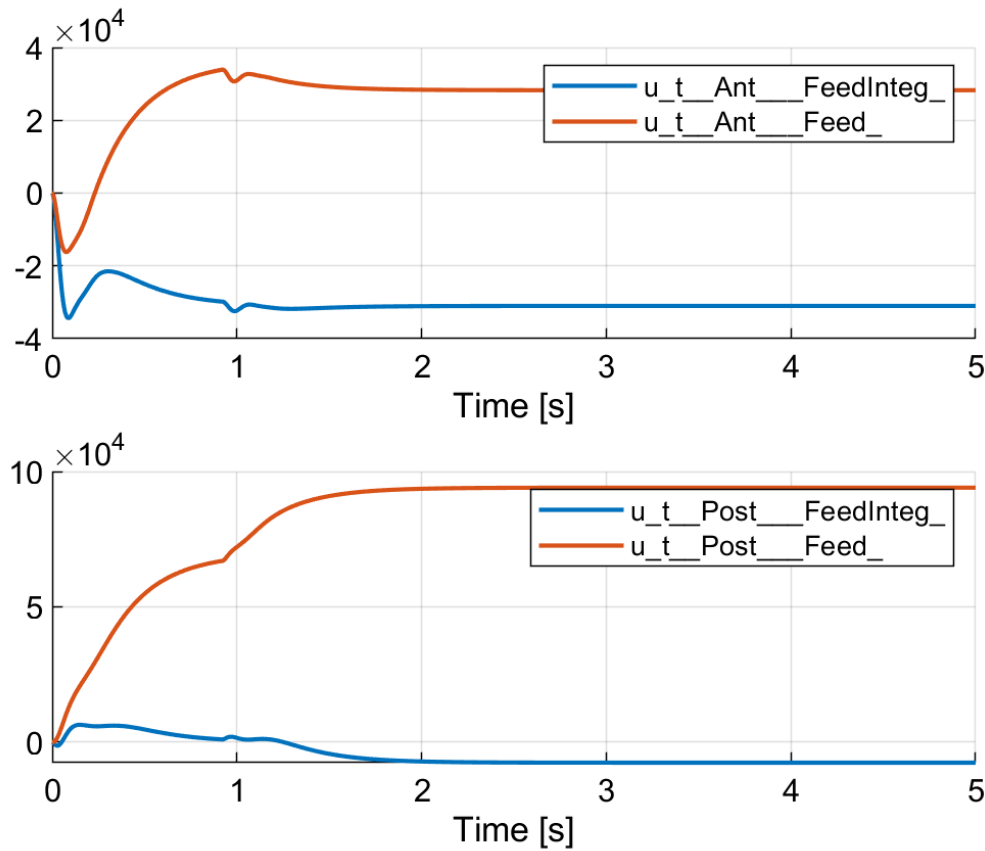


(a) Risposte retroazione di stato con integratore.

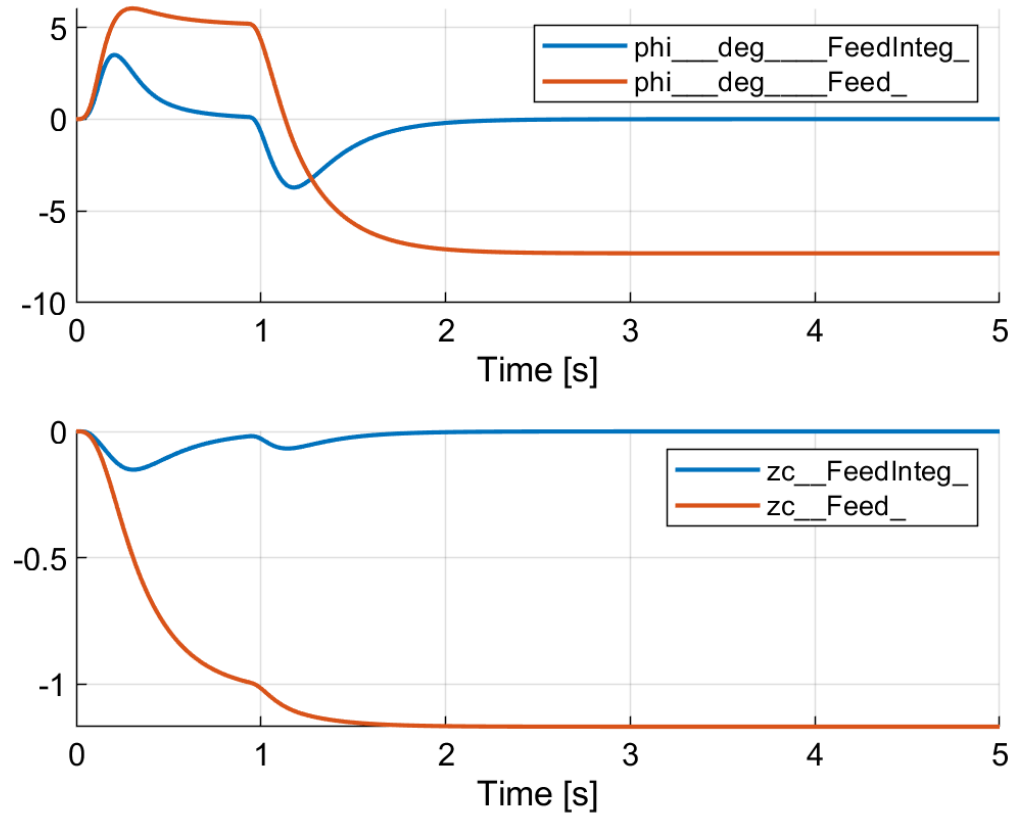


(b) Ingressi di controllo sistema con integratore.

b



(a) Comparazione uscite



(b) Comparazione ingressi di controllo



# 4

## State Feedback con Integratore ed osservatore

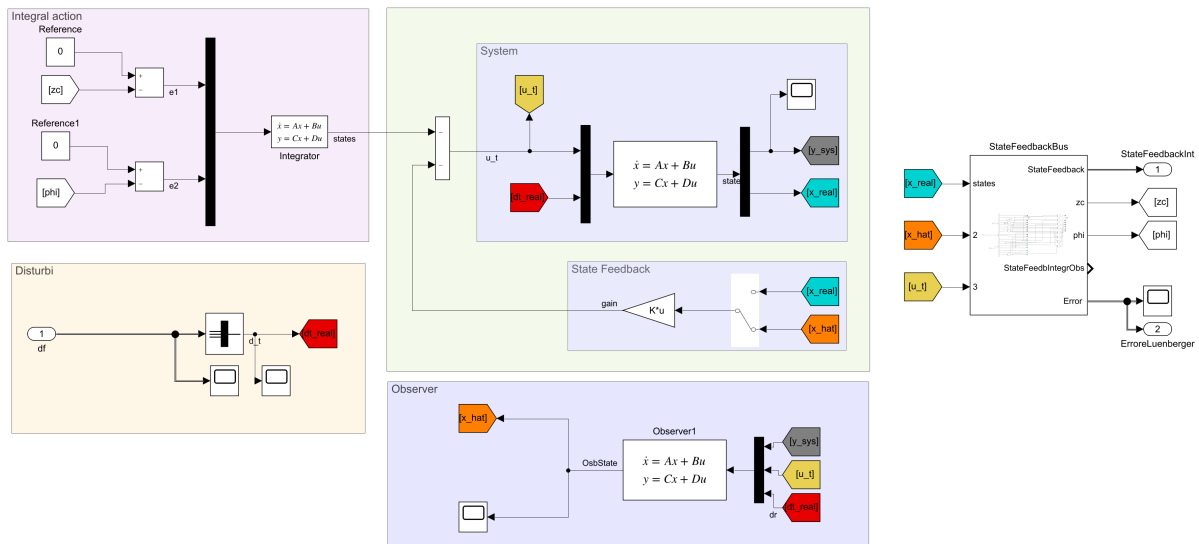


Figure 4.1: Schema matlab azione integrale ed osservatore

Un ulteriore assunzione che potrebbe essere fatta è che lo stato non risulti essere accessibile, per cui è necessario progettare un osservatore. Verificata la completa osservabilità della coppia  $(A, C)$  è possibile inserire nel sistema allargato un osservatore di Luenberger rappresentato da:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \quad (4.1)$$

Che assicura che se  $\hat{x}_0 = x_0$  allora  $\hat{x}(t) = x(t) \quad \forall t > 0$ .

Il calcolo della matrice di guadagno dell'osservatore  $L$  tramite la medesima tecnica di allocazione degli autovalori, scelti con una costante di tempo pari ad  $\frac{1}{4}$  rispetto a quelli assegnati a ciclo chiuso via reazione di stato. In tal modo è stato possibile realizzare in simulink un blocco state-space che rappresenti l'osservatore descritto dalle seguenti matrici

$$\begin{aligned} A_{obs} &= [A - LC] & B_{obs} &= [L \quad B - LD] \\ C_{obs} &= [I_{8 \times 8}] & D_{obs} &= [0_{8 \times 8}] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Per poter valutare il corretto funzionamento dell'osservatore si considera lo stato iniziale:

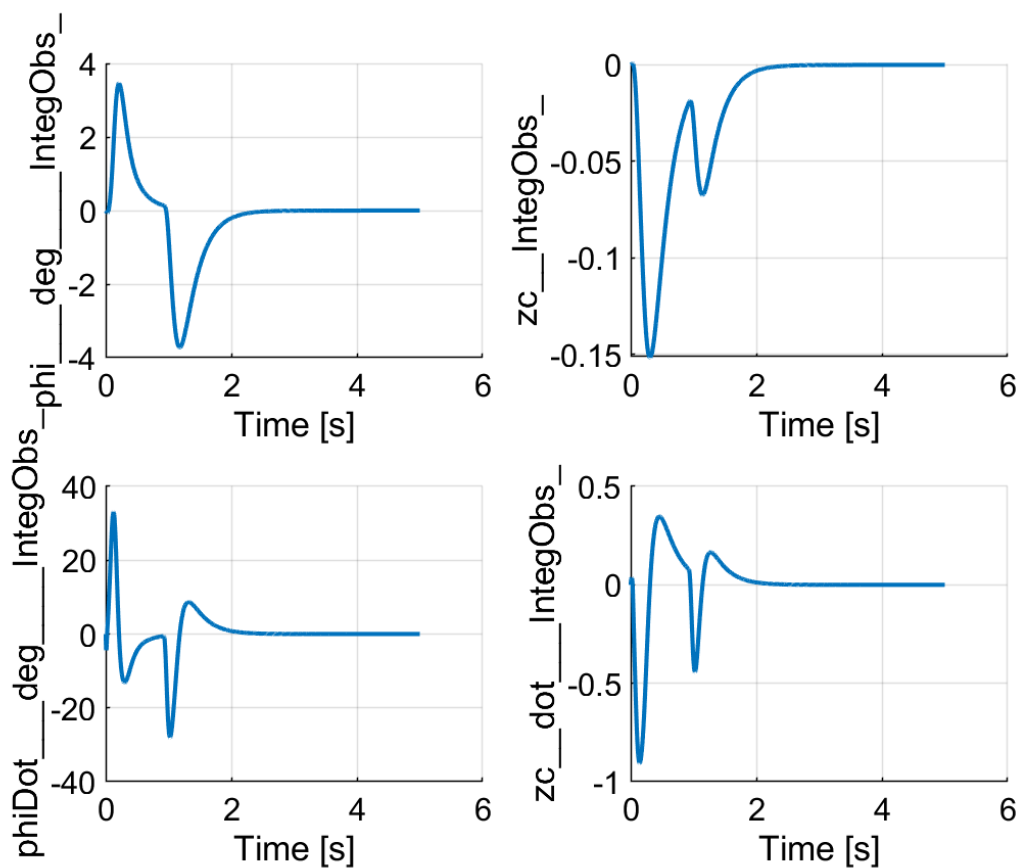
$$x_0 - \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.0644 & -0.05 & 0.03 & 0.01 & -0.08 & -0.06 & -0.072 & 0.03 \end{bmatrix}$$

## 4.1. Risultati ottenuti

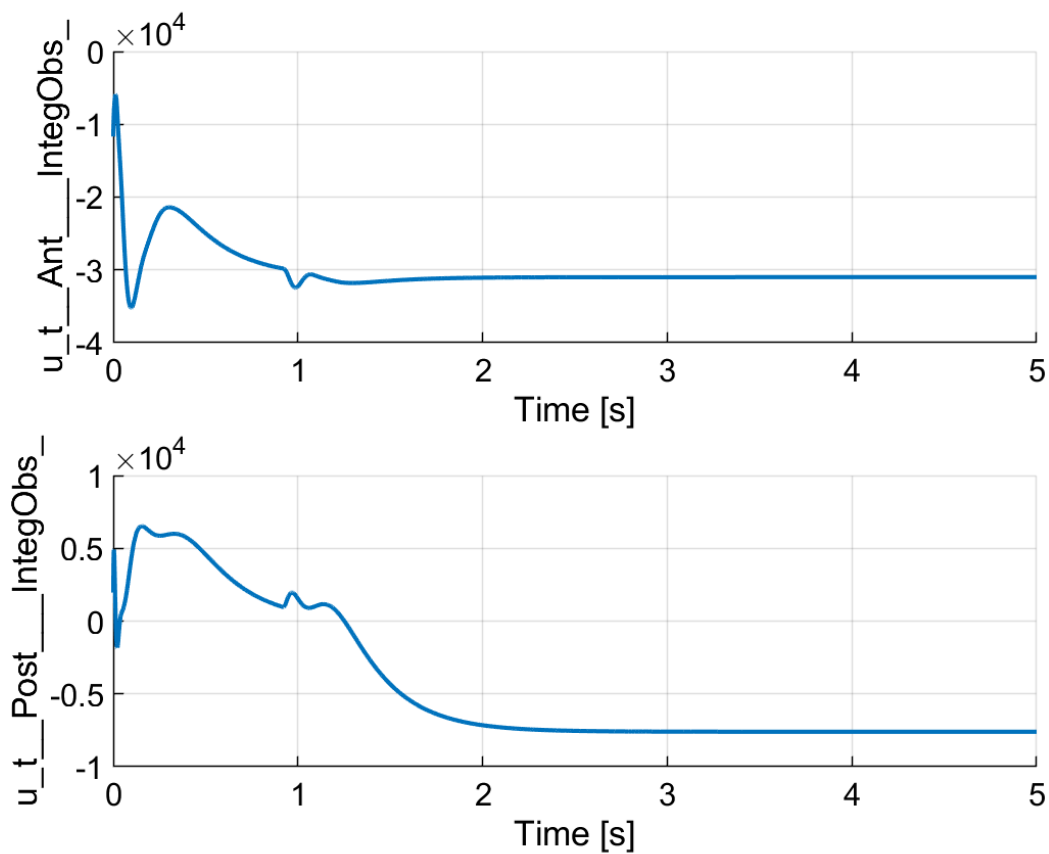
I risultati Matlab ottenuti sono mostrati nelle figure (4.2a,4.2b,4.3a,4.3b)

## 4.2. Codice Matlab

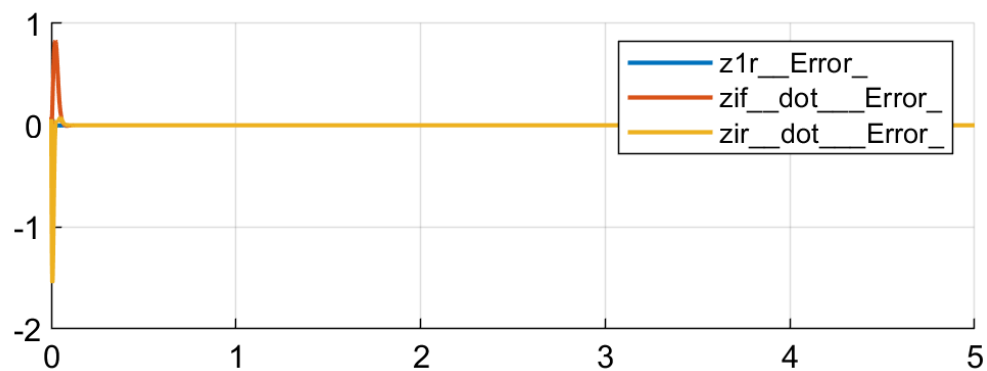
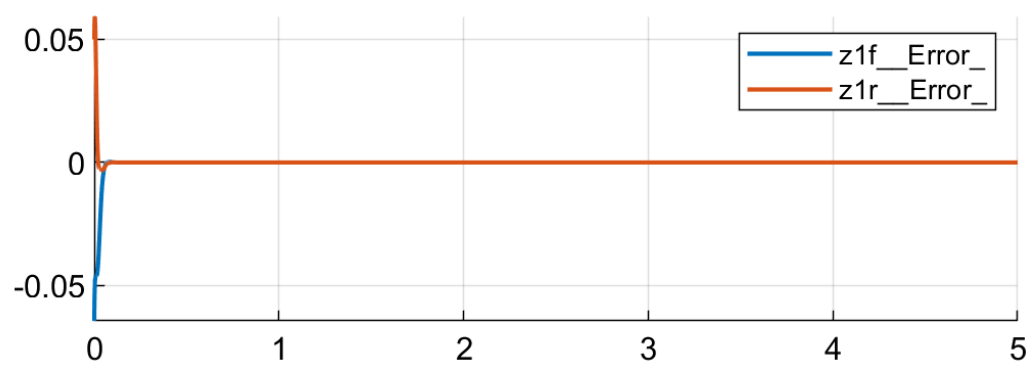
```
1 EstFactor=4;
2 poleFeedb = Kfeedback.P;
3 L=place(veicoloConDisturbi.A',veicoloConDisturbi.C',poleFeedb*EstFactor)';
4 Aobs=veicoloConDisturbi.A -L*veicoloConDisturbi.C;
5 Bobs=[L, veicoloConDisturbi.B];
6 Cobs=eye(8);
7 Dobs=zeros(8,8);
8 Observer = ss(Aobs,Bobs,Cobs,Dobs);
```



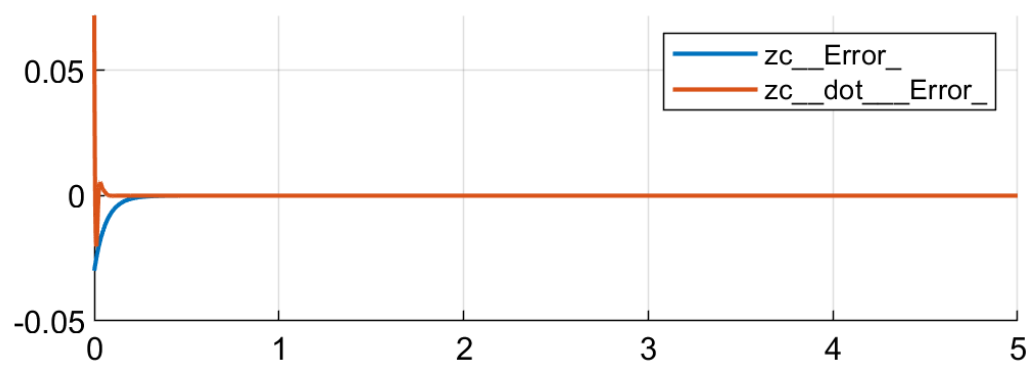
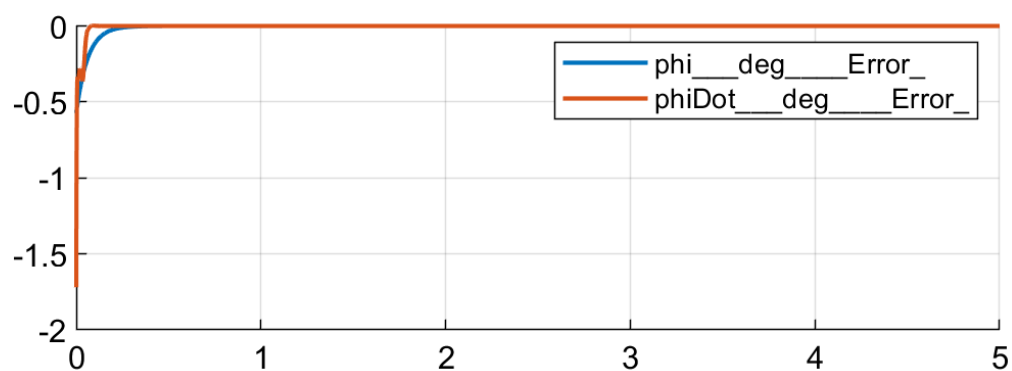
(a) Risposte retroazione di stato con integratore ed osservatore



(b) Ingressi di controllo sistema con integratore ed osservatore.



(a) Errore osservatore 1



(b) Errore osservatore 2

# 5

## Controllo LQI

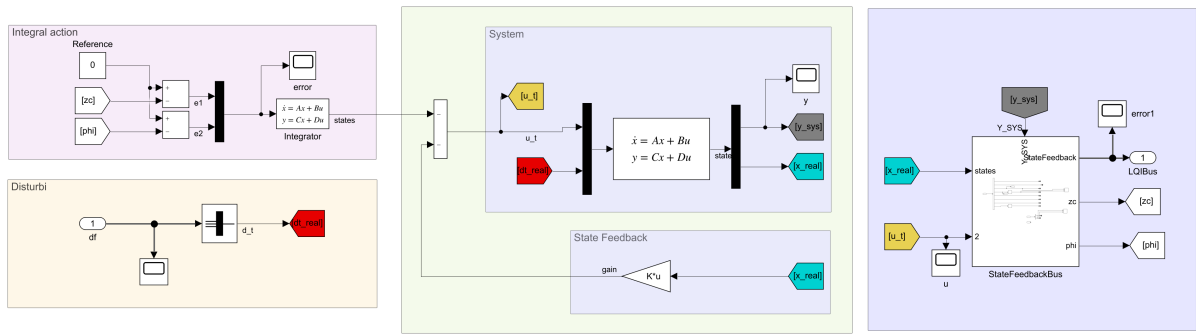


Figure 5.1: Schema Matlab controllo LQI

Il controllo LQ partecolarizza il controllo ottimo al caso in cui si vuole controllare un sistema lineare con un indice di qualità di tipo quadratico. L'indice di qualità è rappresentato da:

$$J(x_0, u) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5.1)$$

Sulla base della  $(A, B)$  stabilizzabilità e  $(A, C)$  velabilità (con  $Q = C^T C$ ) consente di ottenere un sistema con retroazione di stato  $A - BK$  asintoticamente stabile. Dove la matrice di guadagno è:  $K = R^{-1} B^T P$ , con  $P \geq 0$  soluzione dell'equazione algebrica di Riccati  $A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$ .

Per il progetto del controllore LQ si è scelto di progettare un controllo LQI. Si è fatto quindi riferimento all'impianto aumentato con l'aggiunta dell'azione integrale. Affinché si possa progettare questo controllore è necessario che la coppia

$$\left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C(1:2,:) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

sia stabilizzabile.

### 5.0.1. Scelta matrici $Q$ ed $R$

Per progettare un controllore LQI è necessario scegliere le matrici di peso. Nel caso in considerazione le matrici  $Q \in \mathbb{R}^{(10 \times 10)}$  ed  $R \in \mathbb{R}^{(2 \times 2)}$ ;

Salteremo le scelte banali perché le grandezze sono troppo diverse tra di loro ed è evidente che tale scelta non porterebbe ad alcun risultato.

Le matrici scelte sono state:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1e-09 & 0 \\ 0 & 1e-09 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

## 5.1. Codice Matlab

```

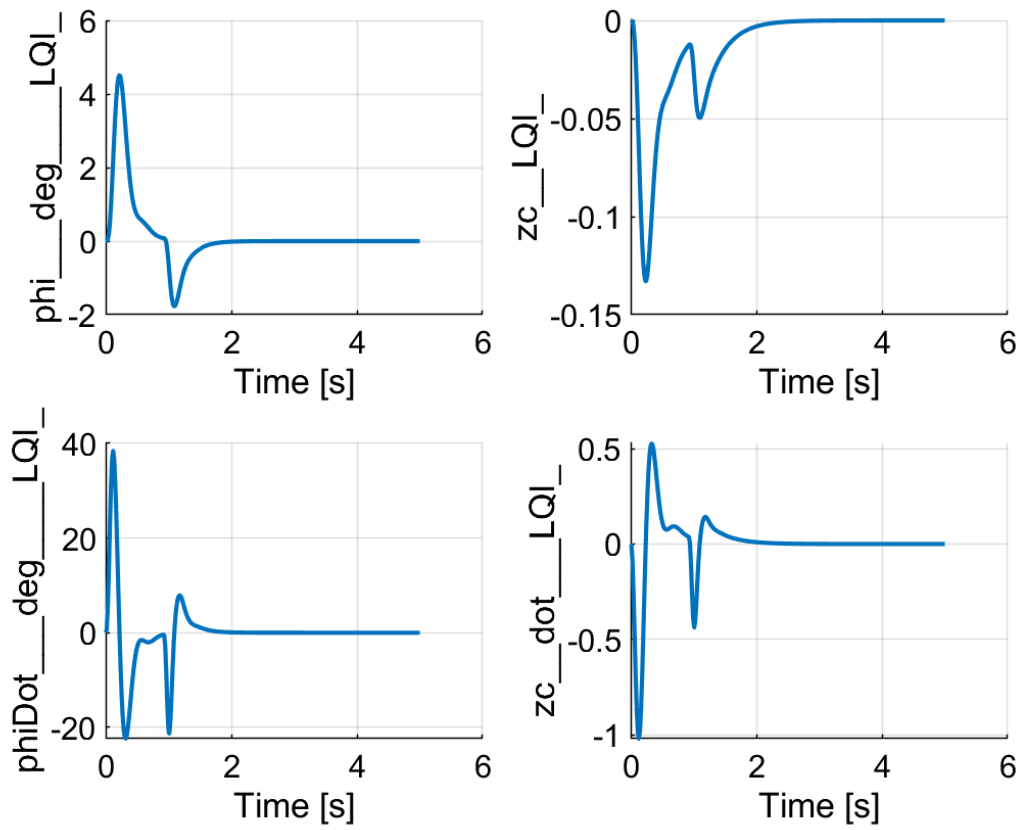
1 VeicoloDueUscite = ...
    ss(veicoloPerControllo.A,veicoloPerControllo.B,veicoloPerControllo.C(1:2,:),0);
2 Q=diag([0,0,45,280,0,0,0,0,600,2000]);
3 R=diag([1e-8,1e-8]);
4
5 [KLQInt,~,CLP] = lqi(VeicoloDueUscite,Q,R);
6 KLQI = struct('KfLQR',KLQInt(:,1:8),'KfLQR',KLQInt(:,9:10),'CLP',CLP);

```

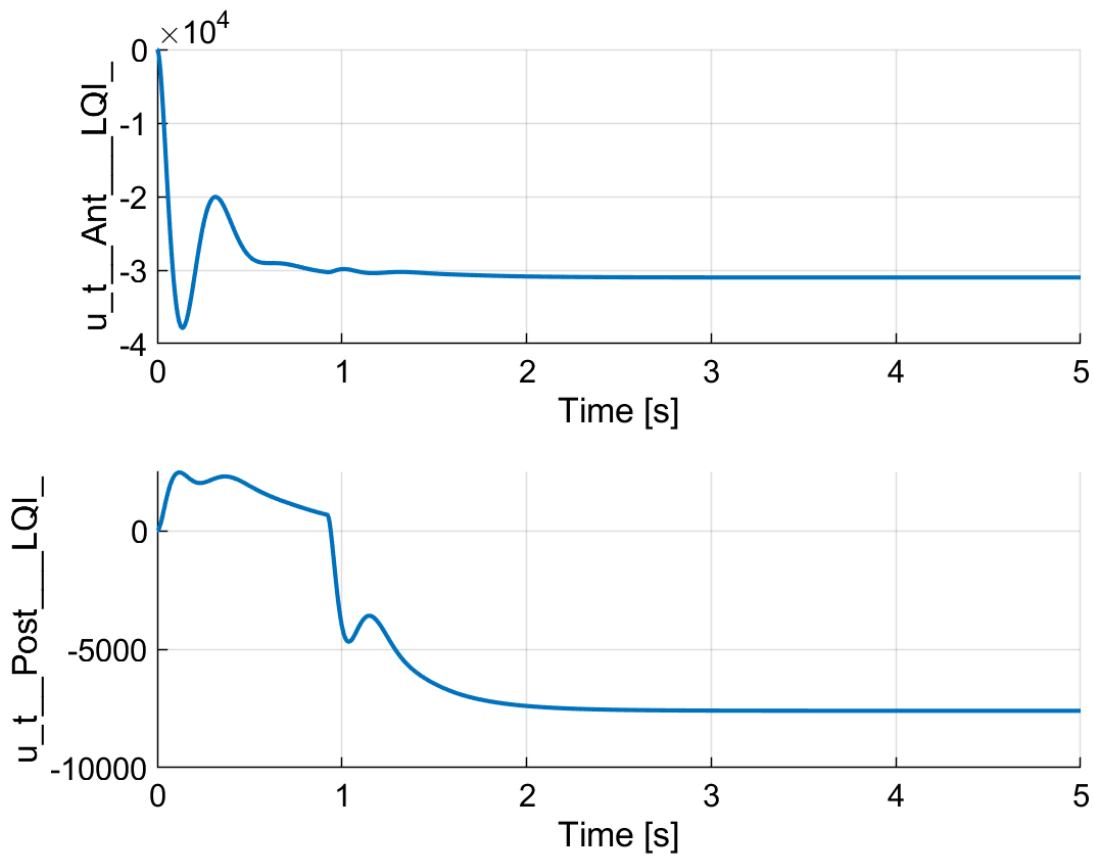
I poli del sistema a ciclo chiuso ottenuti sono i seguenti(5.4) :

$$P_{qi} = \begin{pmatrix} -3.1556 \\ -5.409 \\ -7.83339 + 15.8258i \\ -7.83339 - 15.8258i \\ -13.5953 + 17.9174i \\ -13.5953 - 17.9174i \\ -19.7687 + 49.1231i \\ -19.7687 - 49.1231i \\ -45.9254 + 13.8152i \\ -45.9254 - 13.8152i \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

b



(a) Risposte LQI



(b) Ingressi di controllo sistema LQI





Il problema (6.1), se la coppia  $(A, B)$  (con  $\tilde{Q} = B^T B$ ) è stabilizzabile e  $(A, C)$  è rivelabile, permette di ricavare un osservatore dello stato  $(A - LC)$  asintoticamente stabile. La matrice di guadagno dell'osservatore è  $L = PC^T \tilde{R}^{-1}$  dove  $P$  è soluzione dell'equazione algebrica di Riccati (ARE)

$$AP + PA^T + \tilde{Q} - PC^T \tilde{R}^{-1} CP = 0$$

che per le ipotesi fatte ammette un'unica soluzione  $P > 0$

### 6.0.2. Controllore

Per il progetto del controllore si è invece considerata la seguente funzione di costo (che considera il fatto che  $x$  è un processo stocastico):

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[ \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \right] \quad (6.2)$$

Il problema (6.2) consente di ottenere un sistema con retroazione di stato  $A - BK$  asintoticamente stabile se le coppie  $(A, B)$  e  $(A, C)$  (con  $Q = C^T C$ ) sono rispettivamente stabilizzabili e rivelabili. La matrice di guadagno  $K = R^{-1} B^T P$ , con  $P > 0$  soluzione dell'equazione algebrica di Riccati (ARE)  $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

### 6.0.3. Implementazione sistema totale

A questo punto sfruttando il principio di separazione si procede nel seguente modo:

- Guadagno del filtro di Kalman  $L$ : dipende dalle caratteristiche (matrici di covarianza) delle variabili stocastiche  $\tilde{Q}, \tilde{R}$ .
- Controllore  $LQ$ : dipende dalle matrici di peso  $Q$  ed  $R$  della funzione obiettivo

Per l'implementazione del controllo LQI si sono utilizzate le stesse matrici definite in precedenza (5.2), (5.3).

Per l'implementazione del filtro di Kalman si sono invece ipotizzate le seguenti matrici di covarianza:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

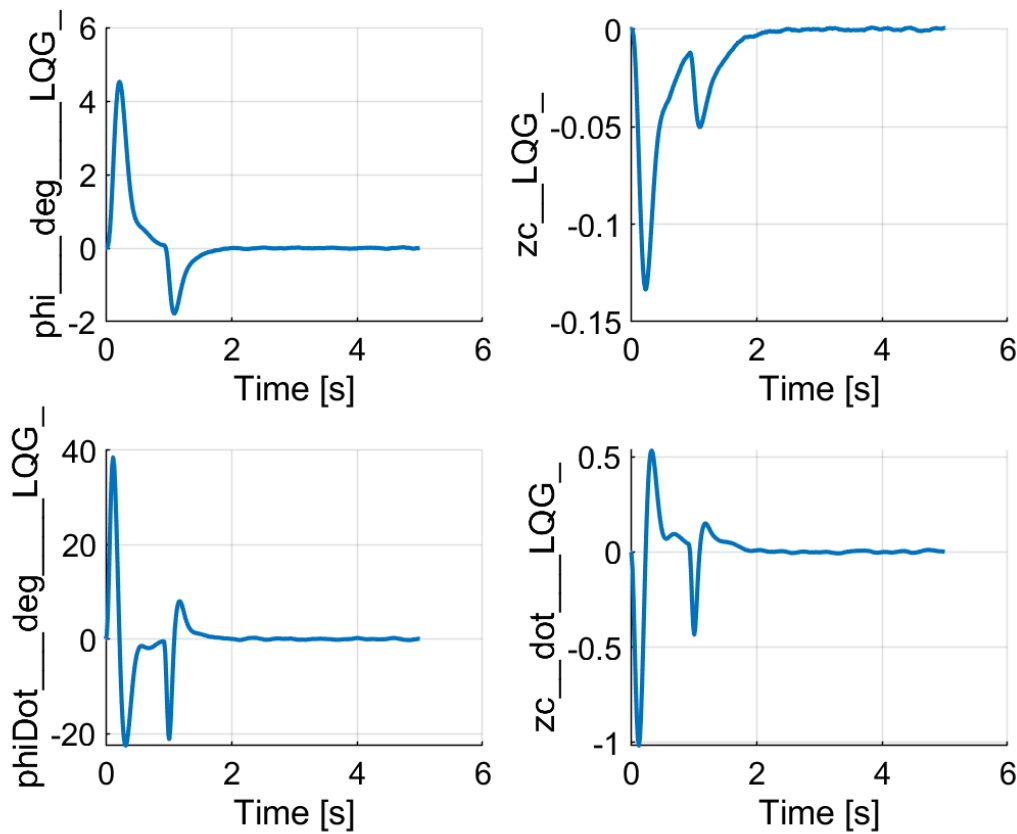
$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

## 6.1. Codice Matlab

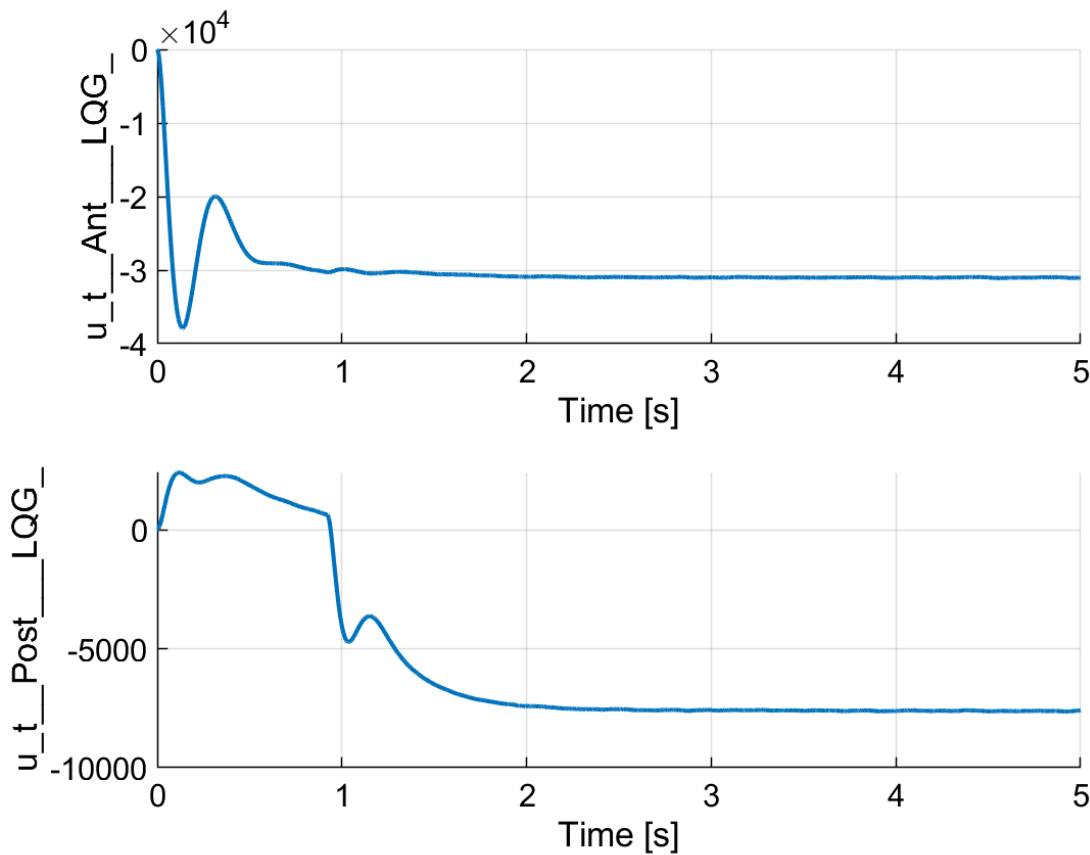
```
1  varZc=1.0000e-3;  
2  varZcDot=1.0000e-3;  
3  varPhi=1.0000e-4;  
4  varPhiDot=1.0000e-4;  
5  Q_kalman = diag([0,0,varZc,varPhi,0,0,varZcDot,varPhiDot]);  
6  R_kalman = diag([varZc,varPhi,varZcDot,varPhiDot]);  
7  [L_kalman,P_kalman,-] = ...  
    lqe(veicoloConDisturbi.A,eye(8),veicoloConDisturbi.C,Q_kalman,R_kalman);  
8  
9  A_kalman=veicoloConDisturbi.A-L_kalman*veicoloConDisturbi.C;  
10 B_kalman=[L_kalman ,veicoloConDisturbi.B];  
11 C_kalman=eye(8);  
12 D_kalman=0;  
13  
14 kalmanFilter = ss(A_kalman,B_kalman,C_kalman,D_kalman);  
15 KkalmanFilter = ...  
    struct('KalmanFilter',kalmanFilter,'CLP',P_kalman,'Q',Q_kalman,'R',R_kalman);
```

## 6.2. Risultati in Matlab

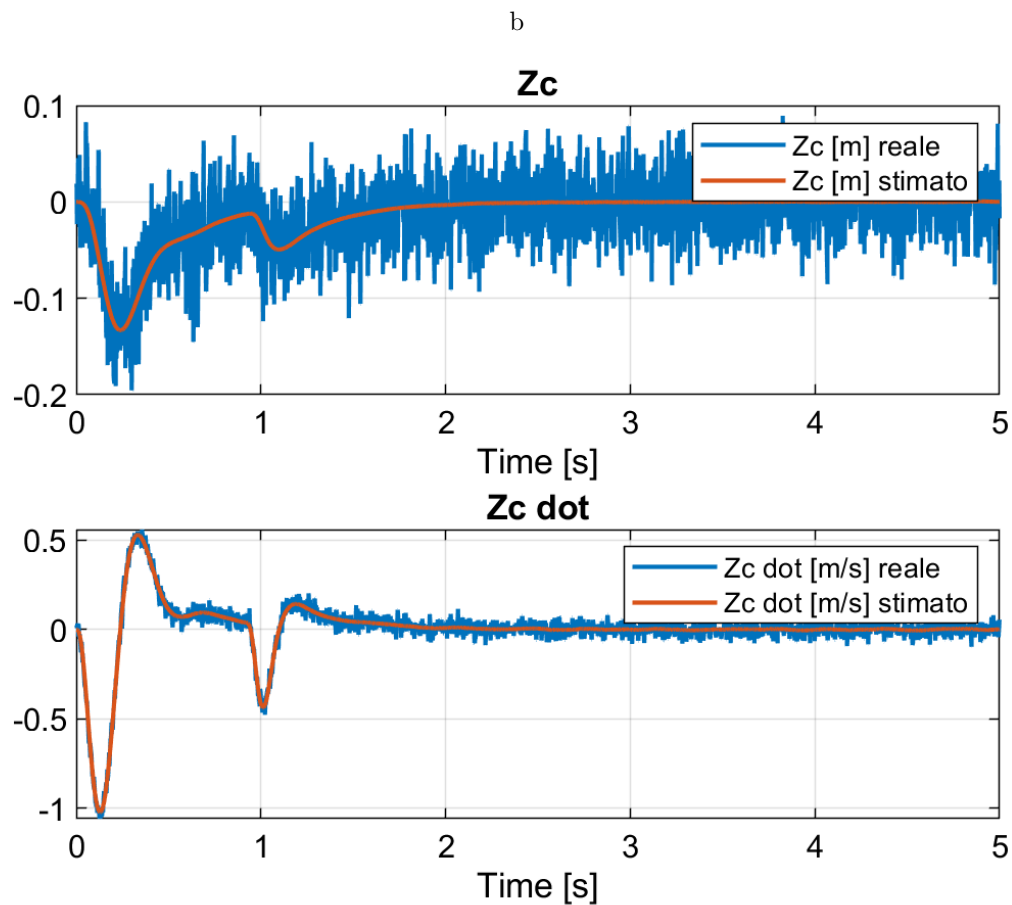
b



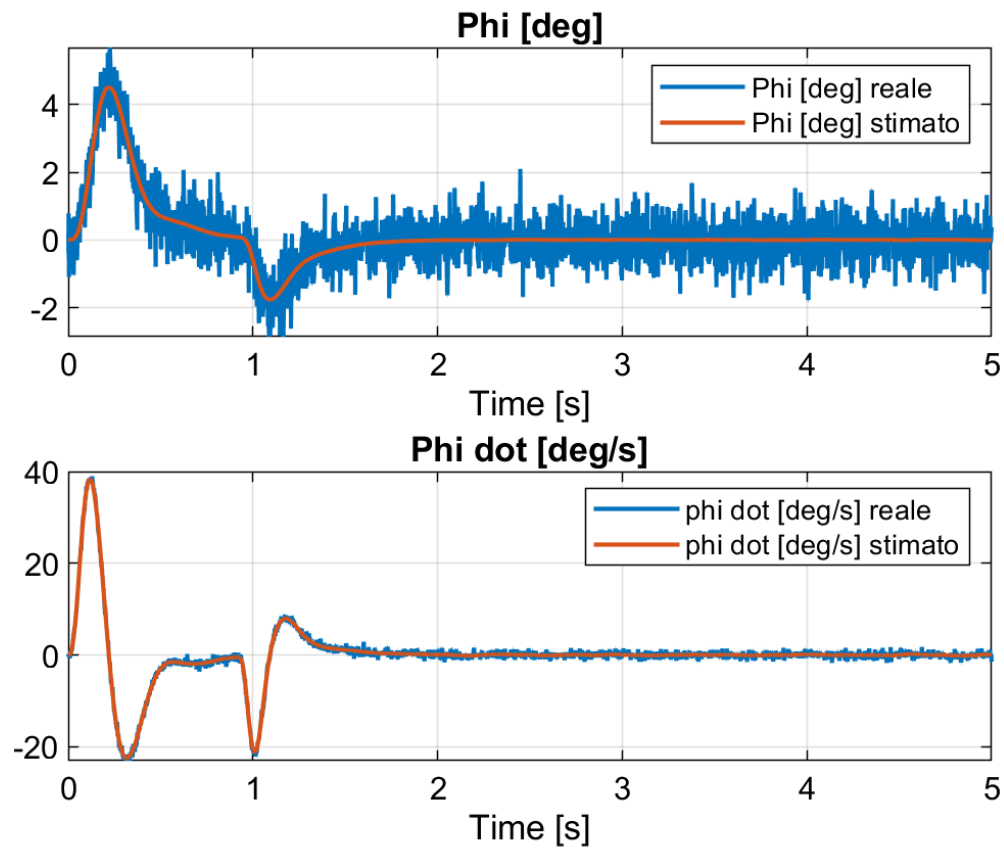
(a) Risposte LQG



(b) Ingressi di controllo sistema LQG



(a) Stima Kalman Zc



(b) Stima Kalman Phi

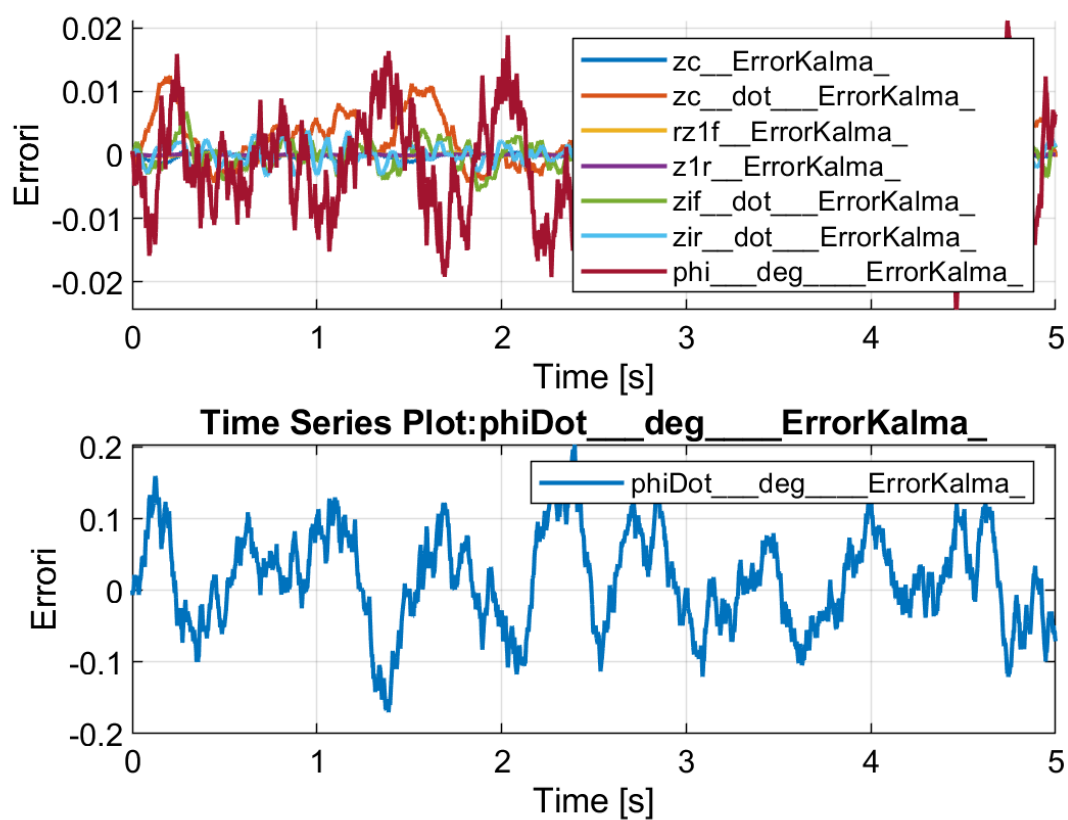


Figure 6.4: Errore utilizzo filtro Kalman

## Comparazione Finale

Obiettivo di questo elaborato non è stato certamente quello di trovare un regolatore performante per limitare la dinamica di pitch di un veicolo, ma quello di mostrare l'implementazione di diverse tecniche di controllo mettendo in risalto le differenze di performance date. Con tutti i controllori presentati siamo stati capaci di garantire le prestazioni richieste.

Nei seguenti grafici è riportata una comparazione delle tecniche di controllo utilizzate:

### 7.0.1. Valutazione numerica performances

Per valutare le performance si è utilizzata la seguente funzione di costo:

$$J = \text{ITAE}_{Zc} + \text{ITAE}_{\text{PhiDeg}} + \int_0^{\bar{t}} u_{ant}(\tau) d\tau + \int_0^{\bar{t}} u_{post}(\tau) d\tau \quad (7.1)$$

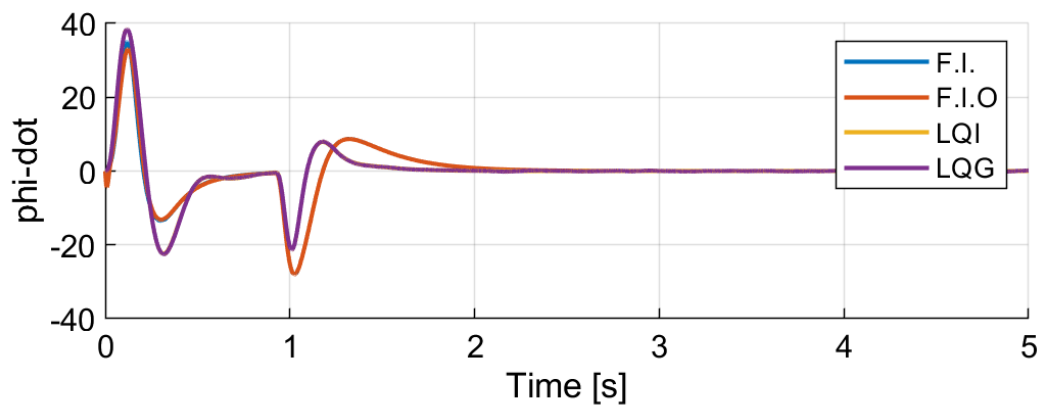
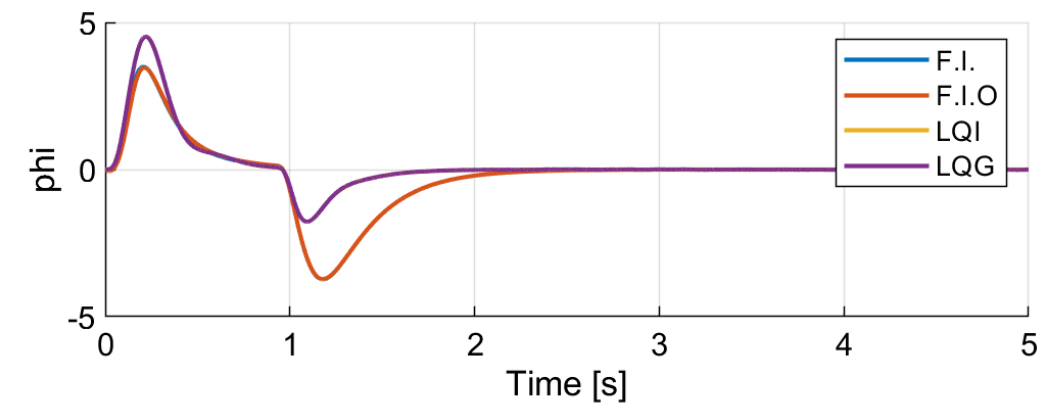
dove  $\bar{t}$  è il tempo di simulazione e  $\text{ITAE}_{\phi(\cdot)} = \int_0^{\bar{t}} \tau |ref - \phi(\tau)| d\tau$  dove nel nostro caso  $ref = 0$  per entrambe le variabili.

I risultati numerici sono i seguenti:

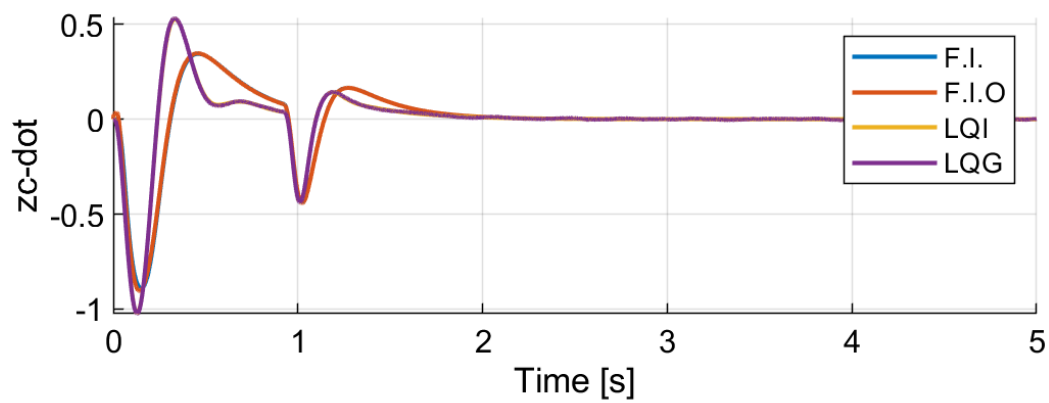
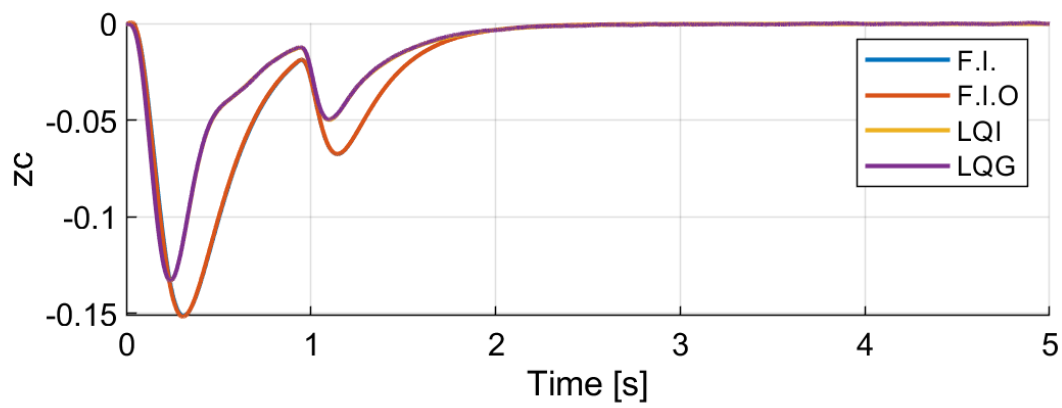
$$\begin{pmatrix} J_{feedbInt} & = & 42131 \\ J_{feedbIntObs} & = & 42122 \\ J_{feedbLQI} & = & 35420 \\ J_{feedbLQG} & = & 35485 \end{pmatrix}$$

Allora è evidente che le performance con gli stati stimati degradano, ma il controllo ottimo è migliore rispetto ad un controllore con allocazione degli autovalori.

b



(a) Comparazione stati 1



(b) Comparazione stati 2

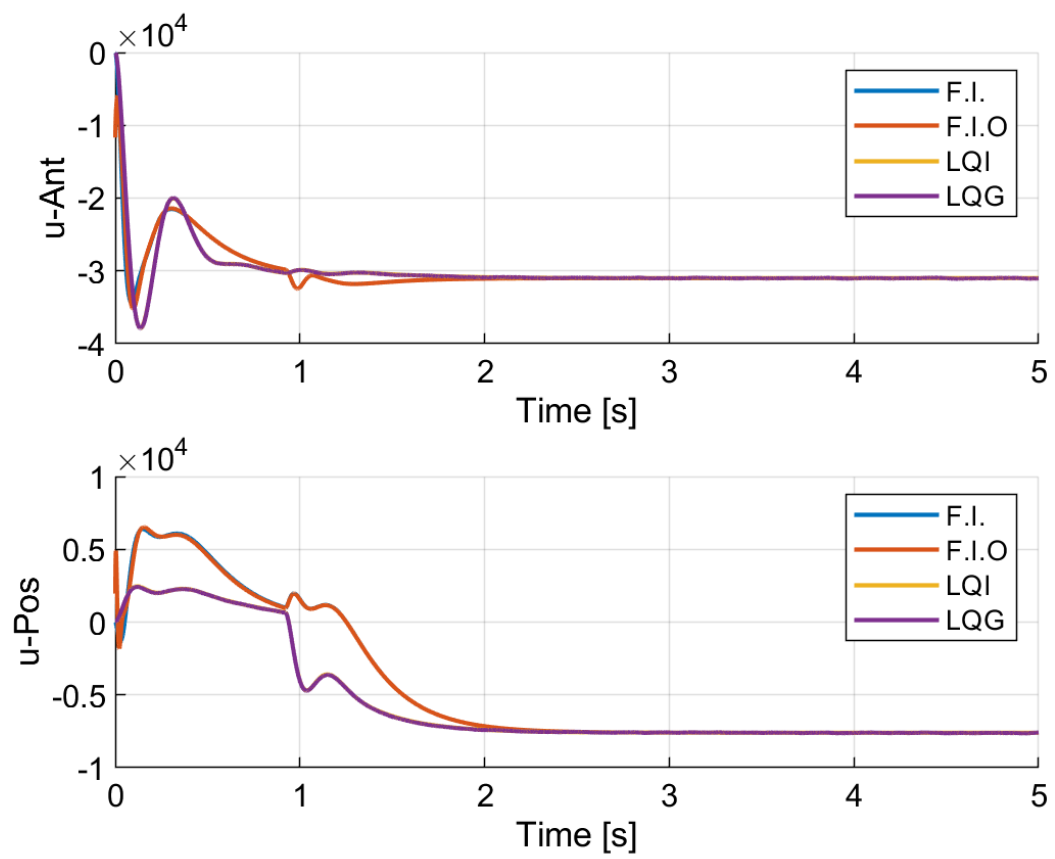


Figure 7.2: Comparazione ingressi