CONTROL PENDULO INVERTIDO

Considere el sistema del péndulo invertido de la Figura 1, el cual representa un diagrama de cuerpo libre del sistema. Asumimos que la varilla del péndulo no tiene masa y que la bisagra a la que está fijado el péndulo no tiene fricción. La masa del péndulo está concentrada en el centro de gravedad del péndulo que está ubicado en el centro de la bola del péndulo. La masa del carro se representa como *M* y la masa del péndulo se representa como *m*. La ley de control u(t) se aplica en la fuerza necesaria para actuar a lo largo de la dirección x del carro. La longitud de la varilla se representa como *l*. El ángulo con el que el péndulo está inclinado se representa como θ.

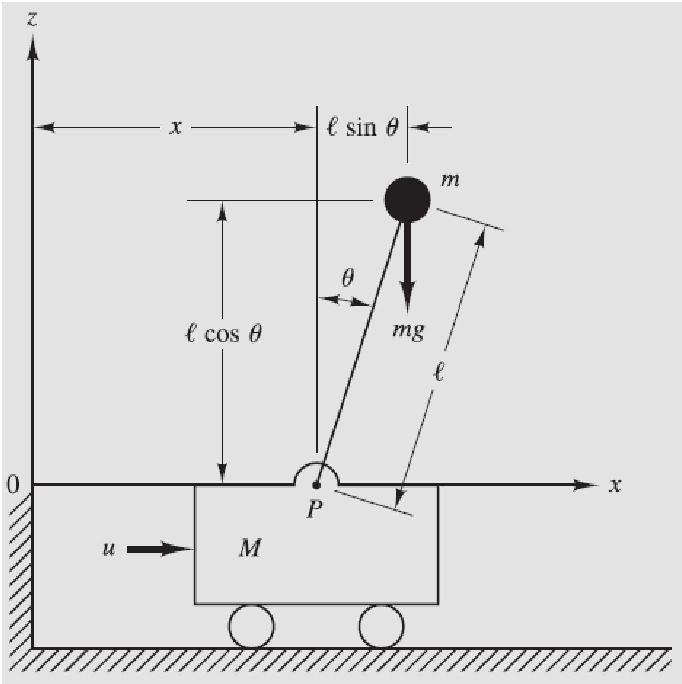

Figura 1. Diagrama del péndulo.

El modelo matemático del sistema es el siguiente:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \qquad (1)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser modificadas a:

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \qquad (3)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \qquad (4)$$

1. ***Deriva la función de transferencia (FT) del sistema a partir de las ecuaciones (3) y (4). Calcula las raíces del sistema para determinar su estabilidad inicial sin control.***

Estas ecuaciones 3 y 4 constituyen el modelo matemático del sistema (péndulo y carro respectivamente). Para poder hallar la relación entre la salida y la entrada del sistema debemos trabajar con la transformada de Laplace que nos permite simplificar el análisis matemático y nos ayudará en el diseño de los sistemas de control.

a) Para hallar la función de transferencia para el péndulo, a la ecuación:

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u$$

Vamos a aplicar la **transformada de Laplace**. Recordemos las propiedades de esta herramienta:

- La transformada de Laplace de $\ddot{\theta}$ es $s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0)$
- La transformada de Laplace de θ es $\Theta(s)$.
- La transformada de Laplace de u es $U(s)$.

Entonces aplicando Laplace:

$$L\left(Ml\ddot{\theta}\right) = L\left((M+m)g\theta - u\right)$$

Sustituyendo:

$$Ml\left(s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0)\right) = (M+m)g\Theta(s) - U(s)$$

Expandiendo los términos:

$$Mls^2\Theta(s) - Mls\theta(0) - Ml\dot{\theta}(0) = (M+m)g\Theta(s) - U(s)$$

Reorganizando:

$$Mls^2\Theta(s) - (M+m)g\Theta(s) - Mls\theta(0) - Ml\dot{\theta}(0) = -U(s)$$

En este punto necesitamos asumir que las condiciones iniciales son cero ($\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = 0$), ya que esto es común en sistemas lineales cuando derivamos funciones de transferencia.

$$Mls^2\Theta(s) - (M+m)g\Theta(s) = -U(s)$$

Factorizando:

$$\Theta(s)\left(Mls^2-(M+m)g\right)=-U(s)$$

La función de transferencia para el péndulo se calcula a partir de (a): $\dfrac{\Theta(s)}{-U(s)}$

Función de transferencia del péndulo: $\boxed{\dfrac{\Theta(s)}{-U(s)}=\dfrac{1}{\left(Mls^2-(M+m)g\right)}}$ …

(5)

b) Para hallar la función de transferencia del carro:

Recodemos que:

- La transformada de Laplace de $\ddot{x}$ es $s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$.
- La transformada de Laplace de θ es $\Theta(s)$.
- La transformada de Laplace de u es $U(s)$.

La transformada de Laplace de la ecuación (4) es:

$$L\left(M\ddot{x}\right)=L(u)-L(mg\theta)$$

$$M\left(s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right)=U(s)-mg\Theta(s)$$

Para expresar la ecuación como una **función de transferencia**, debemos considerar que las condiciones iniciales son cero ($x(0)=0$ y $\dot{x}(0)=0$). Esto simplifica la ecuación considerablemente.

$$Ms^2X(s)=U(s)-mg\Theta(s)$$

Sustituyendo $\Theta(s)$ de la ecuación (5):

$$Ms^2X(s)=U(s)-mg\left(\frac{-U(s)}{Mls^2-(M+m)g}\right)$$

Simplificando:

$$Ms^2X(s)=U(s)+\frac{mgU(s)}{Mls^2-(M+m)g}$$

Factorizando $U(s)$:

$$Ms^2X(s)=U(s)\left(1+\frac{mg}{Mls^2-(M+m)g}\right)$$

Finalmente, la función de transferencia del carro que relaciona $U(s)$ con $X(s)$ es:

$$\boxed{G_x(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ms^2\left(1+\dfrac{mg}{Mls^2-(M+m)g}\right)}} \qquad \dots \qquad (6)$$

Reduciendo:

$$G_x(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{Mls^2-(M+m)g}{M^2ls^4-M^2gs^2} \qquad \dots \qquad (7)$$

c) Cálculo de las raíces del sistema, considerando la FT péndulo:

Cambiando la forma del denominador de

$$\mathrm{Ml}s^2-(M+m)g=Ml\left(s^2-\frac{(M+m)g}{Ml}\right)$$

$$=\mathrm{Ml}\left(\mathrm{s}-\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right)\left(\mathrm{s}+\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right)$$

Entonces reemplazando:

$$\frac{\Theta(\mathrm{s})}{-\mathrm{U(s)}}=\frac{1}{\mathrm{Ml}\left(\mathrm{s}-\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right)\left(\mathrm{s}+\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right)}$$

Del denominador de la función de transferencia, las raíces del sistema son:

$$\boxed{s=\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}} \quad \text{y} \quad \boxed{s=-\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}}$$

La estabilidad de un sistema en lazo abierto o sin control depende de la ubicación de las raíces o polos de su función de transferencia en el plano complejo. Si una función de transferencia tiene una raíz negativa y otra positiva, esta situación nos indica que el sistema es ***inestable en lazo abierto***.