# Analisis y diseño de algoritmos

Juan Gutiérrez

September 7, 2020

## 1 Inducción

Es una técnica de demostración muy usada para demostrar propiedades sobre secuencias discretas.

**Propiedad 1.1.** *Para todo número natural $n$, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.*

*Proof.* Por inducción en $n$. Cuando $n=1$, tenemos que $1+2+\ldots+n=1=\frac{1\cdot 2}{2}=n(n+1)/2$ (caso base).

Cuando $n>1$, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$1+2+\cdots+n-1=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Luego, $1+2+\ldots+n=(1+2+\ldots+n-1)+n=\frac{(n-1)n}{2}+n=n(\frac{n-1}{2}+1)=\frac{n(n+1)}{2}$. □

**Propiedad 1.2.** *Para todo número natural $n$, $1+2+2^2+\cdots 2^n=2^{n+1}-1$.*

*Proof.* Por inducción en $n$. Cuando $n=1$, tenemos que $1+2+2^2+\ldots+2^n=1+2=3=2^2-1=2^{n+1}-1$ (caso base). Cuando $n>1$, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$1+2+2^2+\cdots 2^{n-1}=2^n-1.$$

Luego, $1+2+2^2+\cdots+2^n=(1+2+2^2+\cdots 2^{n-1})+2^n=(2^n-1)+2^n=2^n+2^n-1=2(2^n)-1=2^{n+1}-1$. □

**Propiedad 1.3.** *Para todo número natural $n$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$..*

*Proof.* Por inducción en $n$. Cuando $n=1$, tenemos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}=\frac{n}{n+1}$ (caso base). Cuando $n>1$, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$$

Luego, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n})+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)}=\frac{(n^2-1)+1}{n(n+1)}=\frac{n^2}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. □

# 2 Sumatorias

Cuando un algoritmo tiene una instrucción iterativa (for o while), podemos expresar su tiempo de ejecución como la suma de los tiempos en cada iteración. Es importante conocer conceptos de sumatorias y encontrar límites superiores para ellas (upper bounds).

## 2.1 Fórmulas y propriedades básicas

Dada una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números, donde $n$ es un entero no negativo, podemos escribir la suma finita $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

.

Si $n = 0$ entonces el valor de la sumatoria es definida como 0.

Dada una secuencia infinita $a_1, a_2, \ldots$ de números, podemos escribir la suma infinita $a_1 + a_2 + \cdots$ como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si el límite no existe, la serie *diverge*, si no, esta *converge*.

#### Linearidad

Para cada número real $c$ y cualesquier secuencias $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k + b_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

#### Series aritméticas

Son series en donde la resta de cada dos términos consecutivos es la misma. Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

#### Suma de cuadrados y cubos

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

**Serie geométrica**

Son series en donde la división de cada dos términos consecutivos es la misma.

Por ejemplo, para cada número real $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Obs: cuando $x = 2$, tenemos $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

También $2^n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 1$

Cuando $|x| < 1$, se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

De lo anterior, podemos concluir que (ejercicio)

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

Obs: suponemos que $0^0 = 1$.

**Serie ármónica**

Es la serie

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$H(n)$ es llamado *número armónico*. Se sabe que $H(n) = \ln n + c$ para una constante $c \approx 0.5772$.

**Series telescópicas**

Para cada secuencia $a_0, a_1, \ldots, a_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

También,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n}$$

### Convirtiendo productorias a sumatorias

Podemos escribir el producto finito $a_1 a_2 \cdots a_n$ como $\prod_{k=1}^{n} a_k$ (cuando $n = 0$ el valor de producto es definido como 1).

Podemos hacer la siguiente conversión:

$$\log_b(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} \log_b a_k.$$

## 2.2 Acotando sumatorias

Existen muchas tećnicas para acotar sumatorias. Estas nos servirán al acotar las sumatorias que expresan los tiempos de ejecución de un algoritmo.

### Inducción

Probaremos por inducción en $n$ que $\sum_{k=1}^{n} k \leq \frac{1}{2}(n+1)^2$. Es fácil ver que la proiedad es cierta para $n = 1$ (caso base). Asumiremos por hipótesis de inducción que funciona para $n-1$. Osea, $\sum_{k=1}^{n-1} k \leq \frac{1}{2}(n-1+1)^2$.

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} &= \sum_{k=1}^{n-1} + n \\
&\leq \frac{1}{2}n^2 + n \text{ (por hipotesis de induccion)} \\
&\leq \frac{1}{2}n^2 + n + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Probaremos por inducción en $n$ que

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c3^n$$

para alguna constante $c$. Es fácil ver que cuando $n = 0$, tenemos que $\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1$. Luego para cualquier $c \geq 1$ la proposición es cierta. Por hipótesis de inducción, tenemos que existe $c$ tal que $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \leq c3^{n-1}$. Luego, cuando $c \geq 3/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 3^k &= \sum_{k=0}^{n-1} 3^k + 3^n \\
&\leq c3^{n-1} + 3^n \\
&= (\frac{1}{3} + \frac{1}{c})c3^n \\
&\leq c3^n.
\end{aligned}$$

Portanto, basta tomar $c = 3/2$.

### Acotando términos

Podemos acotar superiomente cada término de una serie, por ejemplo

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \sum_{k=1}^{n} n = n^2$$

En general, sea $a_{\max} = \max_{1 \leq k \leq n} a_k$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_{\max} = n \cdot a_{\max}$$

Supongamos que $a_{k+1}/a_k \leq r$ para todo $k \geq 0$, con $0 < r < 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= a_0 \cdot \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, acotaremos $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) = \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)/3^{k+1})$. Tenemos $a_0 = 1/3$, $\frac{(k+2)/3^{k+2}}{(k+1)/3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{k+2}{k+1} \leq \frac{2}{3} = r$.

Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 1$$

### Dividiendo sumatorias

Acotaremos $\sum_{k=1}^{n} k$. Note que (asuma que $n$ es par)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \\ &\geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} (n/2) \\ &= (n/2)^2 \end{aligned}$$

Para cualquier constante $k_0 > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k \\ &= c + \sum_{k=k_0}^{n} a_k.\end{aligned}$$

donde $c$ es una constante.

Acotaremos $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k$. Note que cuando $k \geq 3$, $\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \leq \frac{8}{9}$. Luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k &= \sum_{k=0}^{2} k^2/2^k + \sum_{k=3}^{\infty} k^2/2^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + 9/8 \sum_{k=0}^{\infty} (8/9)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + 9/8 \cdot (1/(1-8/9)) \\ &= c\end{aligned}$$

para alguna constante $c$.

Acotaremos $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Note que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i + j} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 1 \\ &\leq \lg n + 1\end{aligned}$$