

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

PROYECTO FINAL DE CARRERA: “ANÁLISIS E
IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO PARA LA PROYECCIÓN DE
SOLUCIONES EN PROBLEMAS DE INTERACCIÓN
FLUIDO-ESTRUCTURA CON MALLAS NO COINCIDENTES”

Entregable N°1: Revisión bibliográfica básica

Autores:

Fabrizio J. PIVA

Pablo S. VERA

Director:

Dr. Gustavo RÍOS

co-Director:

Dr. Luciano GARELLI

Ingeniería Informática



Resumen

El presente documento es un breve informe que contendrá, entre otros aspectos, una breve descripción de los conceptos que se adquirieron en la etapa del cronograma denominada “Revision bibliografica básica”.

1. Introducción

Este informe tiene como objetivo desarrollar brevemente cuáles han sido los conocimientos adquiridos a lo largo de esta primera etapa, entre los que se pueden mencionar: esquemas de discretización, métodos numéricos de aproximación de funciones en R^n por interpolación, mapeos de espacios euclideos en $2D$ a espacios afines, estructuras de datos para representar las mallas relativas a los dominios discretos, etc.. A lo largo del mismo, se abordarán las diferentes temáticas; para luego finalizar con la muestra de algunos casos de prueba que permitan demostrar la correcta integración de todas estas herramientas desarrolladas.

2. Interpolación de funciones-estados

Comenzando con el primer tema abordado en esta etapa inicial del proyecto, estudiamos la interpolación de funciones-estados $\vec{\phi}(x, y)$, asociados a un elemento geométrico que se encuentra definido en el plano (R^2), tales como: triángulos o cuadiláteros.

2.1. El caso del triángulo

Comenzando con el caso más sencillo, supongamos que contamos con tres puntos definidos en el plano: \vec{P}_1 , \vec{P}_2 y \vec{P}_3 no colineales. Éstos puntos, definen un triángulo, como puede verse en la figura 1.

Además, cada uno de ellos puede contener información relativa a cualquier cantidad fisica de interés, es decir, sobre \vec{P}_1 por ejemplo, podría encontrarse definida una cantidad vectorial cualquiera \vec{v}_1 , y para el resto de los puntos cualquier otra cantidad $\vec{v}_{i=2,3}$. Por lo tanto, si sólo se conocen las magnitudes físicas sobre tales posiciones espaciales, ¿cómo podremos hallar la cantidad

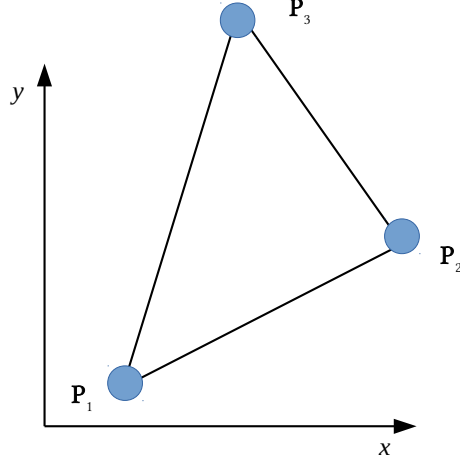


Figura 1: Triángulo formado por tres puntos $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$

\vec{v}_p correspondiente a un punto \vec{p} que se encuentre dentro del triángulo definido por $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$? Para responder a ésto, utilizamos un método de interpolación que consiste en la utilización de coordenadas de áreas, también denominadas coordenadas baricentricas, para luego obtener \vec{v}_p simplemente ponderando cada $\vec{v}_{i=1,2,3}$ de acuerdo a su posición relativa a $\vec{p} = \{x, y\}$, como se muestra en la ecuación (1).

$$\vec{v}_p = N_1(\vec{p}) \cdot \vec{v}_1 + N_2(\vec{p}) \cdot \vec{v}_2 + N_3(\vec{p}) \cdot \vec{v}_3 \quad (1)$$

Las funciones de (1), $N_i(\vec{p})$, se denominan funciones de forma y deben hallarse de tal manera que, cuando $\vec{p} = \vec{P}_i$, la salida de (1) sea exactamente \vec{v}_i . Si bien es correcto trabajar con las funciones $N_i(\vec{p})$ basadas en las coordenadas (x, y) , nosotros hemos decidido realizar un cambio de variables, ya que realizamos un mapeo de las coordenadas definidas en el plano (x, y) , hacia coordenadas $(\xi, \eta) \in [0, 1]$ (ver figura 2).

Entonces, para cualesquiera 3 puntos $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$, tendremos que el mapeo nos producirá las relaciones definidas en (2).

$$\vec{P}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

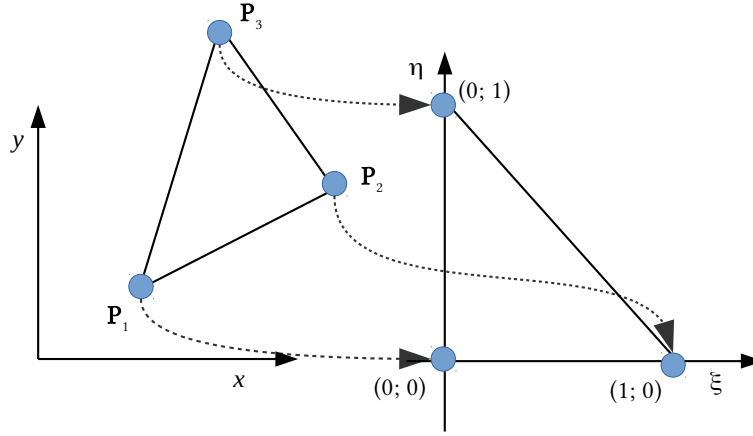


Figura 2:
Mapeo de un triángulo definido en (x, y) a $(\xi, \eta) \in [0; 1]$.

La ventaja de llevar a cabo el cambio de variables, radica en que podremos tratar a todo triángulo definido por tres puntos cualquiera, como un único triángulo estandar (denominado elemento máster), que se encuentra acotado al intervalo $[0; 1]$. En futuras aplicaciones de ésta técnica, se hará visible con mayor facilidad la ventaja, ya que a la hora de llevar a cabo integraciones numéricas, éstas operaciones no dependerán de la forma del triángulo, sino que harán uso del elemento máster.

Ahora, teniendo en cuenta (2), vemos que las coordenadas x e y , necesitan relacionarse funcionalmente con ξ y η , y lo inverso también es cierto, es decir: $x = x(\xi, \eta)$; $y = y(\xi, \eta)$; $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$. Éstas relaciones son importantes, ya que nos permiten trasladarnos de un espacio a otro, pero por el momento estamos interesados en determinar $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$, para luego evaluar las funciones de forma sobre los parámetros (ξ, η) . Sin profundizar en su obtención, llegamos a

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= \frac{x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + y_1x_3 - y_3x_1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (y_1 - y_2)(x_3 - x_1)} \\ \eta(x, y) &= \frac{x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + y_2x_1 - y_1x_2}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (y_1 - y_2)(x_3 - x_1)}\end{aligned}\tag{3}$$

Por otra parte, con las consideraciones mencionadas anteriormente y sin ahondar en los pasos algebraicos necesarios, llegamos a obtener las siguientes igualdades para las funciones de forma.

$$\begin{aligned}N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta\end{aligned}\tag{4}$$

Así, (1) se puede reescribir como sigue.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= N_1(\xi, \eta) \cdot \vec{v}_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot \vec{v}_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot \vec{v}_3 \\ &= (1 - \xi - \eta) \cdot \vec{v}_1 + \xi \vec{v}_2 + \eta \vec{v}_3\end{aligned}\tag{5}$$

Con éstas simples ecuaciones, ahora es posible determinar, cuál es el valor de la magnitud física que se desea medir sobre el punto \vec{p} perteneciente al triángulo en cuestión.

Una situación que debemos tener en cuenta es cuando el punto \vec{p} no se encuentra dentro del triángulo mencionado. En primer lugar, para determinar si el punto pertenece o no a dicha figura geométrica, debemos analizar las coordenadas $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$. El procedimiento de verificación, básicamente, es el siguiente: cuando ξ o η son menores que cero ya podemos descartar el hecho de que \vec{p} se encuentre en el interior de triángulo; si se encuentran por encima de la recta definida por $1 - \xi - \eta$ entonces tampoco pertenece al triángulo; así, en cualquier otro caso, el punto está en el interior de la figura.

2.2. El caso del cuadrilátero

Como en el caso del triángulo, cuando es conocida una magnitud física sobre los vertices de un cuadrilátero definido por los puntos $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4\}$,

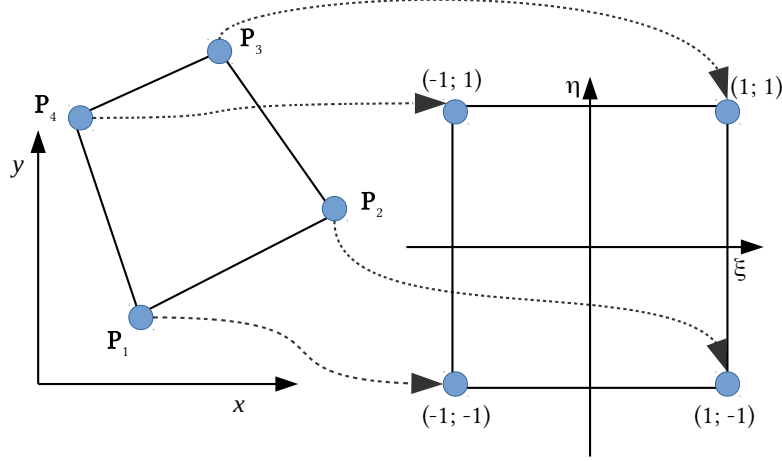


Figura 3:
Mapeo de un cuadrilátero definido en (x, y) a $(\xi, \eta) \in [-1; 1]$.

puede hallarse el valor numérico en cualquier punto del interior de la figura haciendo

$$\vec{v} = N_1(\vec{p}) \cdot \vec{v}_1 + N_2(\vec{p}) \cdot \vec{v}_2 + N_3(\vec{p}) \cdot \vec{v}_3 + N_4(\vec{p}) \cdot \vec{v}_4 \quad (6)$$

Como puede observarse, ésta forma de calcular \vec{v}_p es similar a la utilizada para el triángulo, sólo que debe añadirse un término más para contemplar la presencia de un vértice adicional.

También, llevamos a cabo un cambio de variables, pero aquí las nuevas variables (ξ, η) van a estar contenidas en la región cuadrada $[-1; 1]$. Así, estamos mapeando un cuadrilátero de forma irregular a un cuadrado estandar de magnitud 2 en sus lados y centrado en el origen (características deseables para llevar a cabo integración numérica mediante cuadratura Gaussiana sobre una tal región) (ver figura 3).

Para poder mapear puntos definidos sobre el plano (x, y) al plano (ξ, η) , es necesario resolver el sistema dado por

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta \end{aligned} \quad (7)$$

Donde $(a_1, b_1) = \frac{(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4)}{4}$; $(a_2, b_2) = \frac{(\vec{P}_2 - \vec{P}_1 + \vec{P}_3 - \vec{P}_4)}{4}$; $(a_3, b_3) = \frac{(\vec{P}_3 - \vec{P}_2 + \vec{P}_4 - \vec{P}_1)}{4}$;
 $(a_4, b_4) = \frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{P}_3 - \vec{P}_4)}{4}$.

Como la forma cerrada de $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$ que se obtiene al resolver (7) es algo extensa, preferimos no incluirlas para mantener la legibilidad del documento.

Nuevamente, para determinar si un punto dado definido en el plano (x, y) se encuentra dentro del cuadrado $[-1; 1]$, es necesario aplicar un método de verificación sencillo: básicamente, si $[(\xi, \eta) < -1]$ ó $[(\xi, \eta) > 1]$, el punto no se encuentra dentro del cuadrilátero y no deberá calcularse ninguna magnitud sobre él. En cuanto a las funciones de forma, las cuales se modifican para calcularse sobre las nuevas variables (ξ, η) , poseen las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1 - \eta)(1 - \xi)}{4} \\ N_2 &= \frac{(1 + \eta)(1 - \xi)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1 + \eta)(1 + \xi)}{4} \\ N_4 &= \frac{(1 - \eta)(1 + \xi)}{4} \end{aligned} \tag{8}$$

Las funciones de forma en (8) permiten modificar a la ecuación (6), para reescribirla de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{(1 - \eta)(1 - \xi)}{4} \cdot \vec{v}_1 + \frac{(1 + \eta)(1 - \xi)}{4} \cdot \vec{v}_2 + \frac{(1 + \eta)(1 + \xi)}{4} \cdot \vec{v}_3 + \frac{(1 - \eta)(1 + \xi)}{4} \cdot \vec{v}_4 \tag{9}$$

3. Aplicación de desenrollado de ciclos

En esta sección se pondrá en manifiesto como aplicar la técnica de desenrollado de ciclos en un algoritmo. La misma consiste en, dado un ciclo iterativo común y corriente, disminuir la cantidad de repeticiones mediante la codificación explícita de algunas o todas las iteraciones. Esta técnica produce una mejora significativa en el tiempo de ejecución del algoritmo, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Supongamos que tenemos una matriz de $N \times 3$, donde cada fila contiene un vector en el espacio tridimensional. Ahora supongamos que necesitamos un algoritmo que calcule el módulo de cada vector que está almacenado en esta matriz, y que el resultado se almacene en un vector de $N \times 1$. Este algoritmo podría implementarse en C++ de la siguiente manera:

Para aplicar el método de desenrollado de ciclos, podríamos deshacernos del ciclo interno simplemente escribiendolo de manera explícita como se hizo en la función *modulos_vectores_desenrollado*:

A continuación se hará una prueba comparativa de estos dos algoritmos, con matrices de tamaño 10, 100, y 1000. Los resultados de los tiempos de ejecución pueden verse en la tabla 1, donde podemos observar que el desenrollado tiene un desempeño notablemente mejor considerando el tiempo de ejecución.

Sin desenrollado	Con desenrollado
1.9E-05	1E-05
1.13E-04	8.1E-05
8.71E-04	6.57E-04

Cuadro 1: Tabla comparativa de tiempos de ejecución en segundos.

4. Conclusiones

Haciendo un análisis de los resultados obtenidos en las secciones ?? y 3 podemos concluir que las técnicas de reordenamiento y desenrollado de ciclos son muy útiles a la hora de programar, ya que en este informe se ha puesto en evidencia mediante sencillos ejemplos que los tiempos de ejecución mejoran notablemente cuando se utilizan las mismas. Además, estos tiempos de ejecución podrían mejorarse aun mas si se aplicaran ambas técnicas de manera simultánea o si se complementaran con otras técnicas que se han visto a lo largo de esta unidad temática.