

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

PROYECTO FINAL DE CARRERA: “ANÁLISIS E  
IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO PARA LA PROYECCIÓN DE  
SOLUCIONES EN PROBLEMAS DE INTERACCIÓN  
FLUIDO-ESTRUCTURA CON MALLAS NO COINCIDENTES”

---

## Entregable N°1: Revisión bibliográfica básica

---

*Autores:*

Fabrizio J. PIVA

Pablo S. VERA

*Director:*

Dr. Gustavo RÍOS

*co-Director:*

Dr. Luciano GARELLI

Ingeniería Informática



## Resumen

El presente documento es un breve informe que contendrá, entre otros aspectos, una breve descripción de los conceptos que se adquirieron en la etapa del cronograma denominada “Revision bibliografica básica”.

## 1. Introducción

Este informe tiene como objetivo desarrollar brevemente cuáles han sido los conocimientos adquiridos a lo largo de esta primera etapa, entre los que se pueden mencionar: esquemas de discretización, métodos numéricos de aproximación de funciones en  $R^n$  por interpolación, mapeos de espacios euclideos en  $2D$  a espacios afines, estructuras de datos para representar las mallas relativas a los dominios discretos, etc.. A lo largo del mismo, se abordarán las diferentes temáticas; para luego finalizar con la muestra de algunos casos de prueba que permitan demostrar la correcta integración de todas estas herramientas desarrolladas.

## 2. Interpolación de funciones-estados

Comenzando con el primer tema abordado en esta etapa inicial del proyecto, estudiamos la interpolación de funciones-estados  $\vec{\phi}(x, y)$ , asociados a un elemento geométrico que se encuentra definido en el plano ( $R^2$ ), tales como: triángulos o cuadiláteros.

### 2.1. El caso del triángulo

Comenzando con el caso más sencillo, supongamos que contamos con tres puntos definidos en el plano:  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  y  $\vec{P}_3$  no colineales. Éstos puntos, definen un triángulo, como puede verse en la figura 1.

Además, cada uno de ellos puede contener información relativa a cualquier cantidad fisica de interés, es decir, sobre  $\vec{P}_1$  por ejemplo, podría encontrarse definida una cantidad vectorial cualquiera  $\vec{v}_1$ , y para el resto de los puntos cualquier otra cantidad  $\vec{v}_{i=2,3}$ . Por lo tanto, si sólo se conocen las magnitudes físicas sobre tales posiciones espaciales, ¿cómo podremos hallar la cantidad

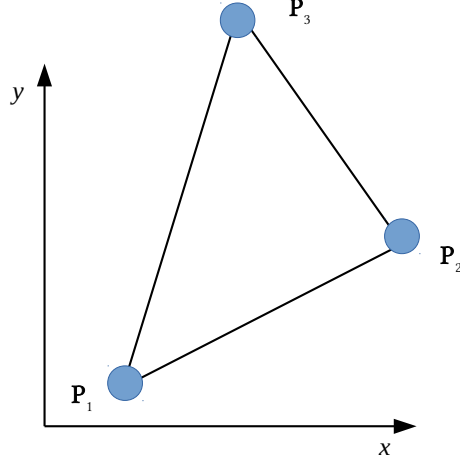


Figura 1: Triángulo formado por tres puntos  $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$

$\vec{v}_p$  correspondiente a un punto  $\vec{p}$  que se encuentre dentro del triángulo definido por  $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$ ? Para responder a ésto, utilizamos un método de interpolación que consiste en la utilización de coordenadas de áreas, también denominadas coordenadas baricentricas, para luego obtener  $\vec{v}_p$  simplemente ponderando cada  $\vec{v}_{i=1,2,3}$  de acuerdo a su posición relativa a  $\vec{p} = \{x, y\}$ , como se muestra en la ecuación (1).

$$\vec{v}_p = N_1(\vec{p}) \cdot \vec{v}_1 + N_2(\vec{p}) \cdot \vec{v}_2 + N_3(\vec{p}) \cdot \vec{v}_3 \quad (1)$$

Las funciones de (1),  $N_i(\vec{p})$ , se denominan funciones de forma y deben hallarse de tal manera que, cuando  $\vec{p} = \vec{P}_i$ , la salida de (1) sea exactamente  $\vec{v}_i$ . Si bien es correcto trabajar con las funciones  $N_i(\vec{p})$  basadas en las coordenadas  $(x, y)$ , nosotros hemos decidido realizar un cambio de variables, ya que realizamos un mapeo de las coordenadas definidas en el plano  $(x, y)$ , hacia coordenadas  $(\xi, \eta) \in [0, 1]$  (ver figura 2).

Entonces, para cualesquiera 3 puntos  $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$ , tendremos que el mapeo nos producirá las relaciones definidas en (2).

$$\vec{P}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

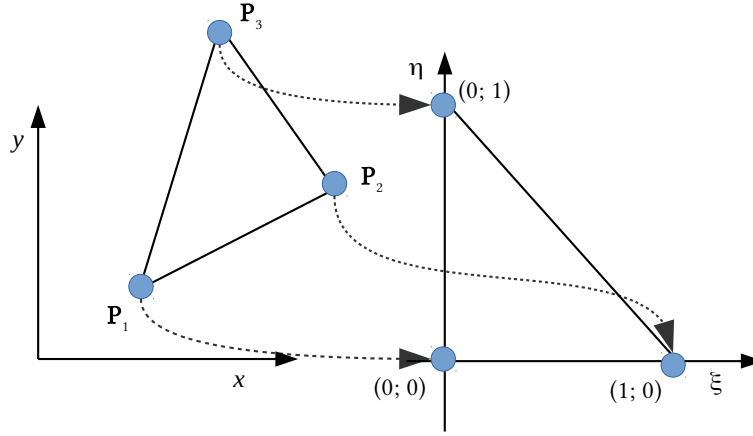


Figura 2:  
Mapeo de un triángulo definido en  $(x, y)$  a  $(\xi, \eta) \in [0; 1]$ .

La ventaja de llevar a cabo el cambio de variables, radica en que podremos tratar a todo triángulo definido por tres puntos cualquiera, como un único triángulo estandar (denominado elemento máster), que se encuentra acotado al intervalo  $[0; 1]$ . En futuras aplicaciones de ésta técnica, se hará visible con mayor facilidad la ventaja, ya que a la hora de llevar a cabo integraciones numéricas, éstas operaciones no dependerán de la forma del triángulo, sino que harán uso del elemento máster.

Ahora, teniendo en cuenta (2), vemos que las coordenadas  $x$  e  $y$ , necesitan relacionarse funcionalmente con  $\xi$  y  $\eta$ , y lo inverso también es cierto, es decir:  $x = x(\xi, \eta)$ ;  $y = y(\xi, \eta)$ ;  $\xi = \xi(x, y)$  y  $\eta = \eta(x, y)$ . Éstas relaciones son importantes, ya que nos permiten trasladarnos de un espacio a otro, pero por el momento estamos interesados en determinar  $\xi = \xi(x, y)$  y  $\eta = \eta(x, y)$ , para luego evaluar las funciones de forma sobre los parámetros  $(\xi, \eta)$ . Sin profundizar en su obtención, llegamos a

$$\begin{aligned}
\xi(x, y) &= \frac{x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + y_1x_3 - y_3x_1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (y_1 - y_2)(x_3 - x_1)} \\
\eta(x, y) &= \frac{x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + y_2x_1 - y_1x_2}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (y_1 - y_2)(x_3 - x_1)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, con las consideraciones mencionadas anteriormente y sin ahondar en los pasos algebraicos necesarios, llegamos a obtener las siguientes igualdades para las funciones de forma.

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\
N_2(\xi, \eta) &= \xi \\
N_3(\xi, \eta) &= \eta
\end{aligned} \tag{4}$$

Así, (1) se puede reescribir como sigue.

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= N_1(\xi, \eta) \cdot \vec{v}_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot \vec{v}_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot \vec{v}_3 \\
&= (1 - \xi - \eta) \cdot \vec{v}_1 + \xi \vec{v}_2 + \eta \vec{v}_3
\end{aligned} \tag{5}$$

Con éstas simples ecuaciones, ahora es posible determinar, cuál es el valor de la magnitud física que se desea medir sobre el punto  $\vec{p}$  perteneciente al triángulo en cuestión.

Una situación que debemos tener en cuenta es cuando el punto  $\vec{p}$  no se encuentra dentro del triángulo mencionado. En primer lugar, para determinar si el punto pertenece o no a dicha figura geométrica, debemos analizar las coordenadas  $\xi = \xi(x, y)$  y  $\eta = \eta(x, y)$ . El procedimiento de verificación, básicamente, es el siguiente: cuando  $\xi$  o  $\eta$  son menores que cero ya podemos descartar el hecho de que  $\vec{p}$  se encuentre en el interior de triángulo; si se encuentran por encima de la recta definida por  $1 - \xi - \eta$  entonces tampoco pertenece al triángulo; así, en cualquier otro caso, el punto está en el interior de la figura.

## 2.2. El caso del cuadrilátero

Como en el caso del triángulo, cuando es conocida una magnitud física sobre los vertices de un cuadrilátero definido por los puntos  $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4\}$ ,

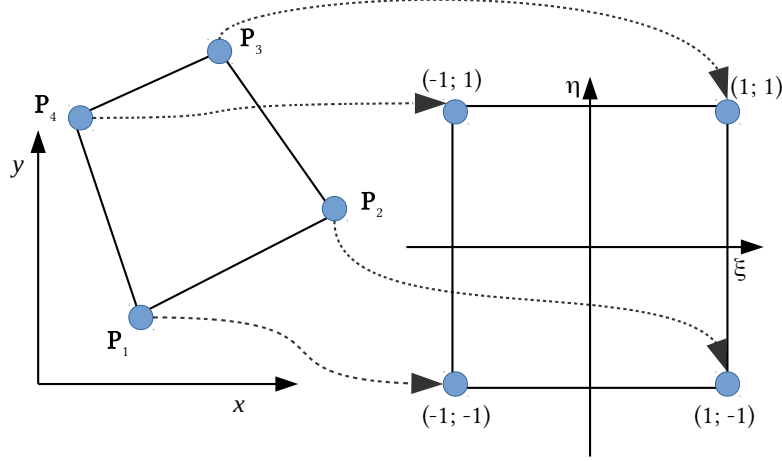


Figura 3:  
Mapeo de un cuadrilátero definido en  $(x, y)$  a  $(\xi, \eta) \in [-1; 1]$ .

puede hallarse el valor numérico en cualquier punto del interior de la figura haciendo

$$\vec{v} = N_1(\vec{p}) \cdot \vec{v}_1 + N_2(\vec{p}) \cdot \vec{v}_2 + N_3(\vec{p}) \cdot \vec{v}_3 + N_4(\vec{p}) \cdot \vec{v}_4 \quad (6)$$

Como puede observarse, ésta forma de calcular  $\vec{v}_p$  es similar a la utilizada para el triángulo, sólo que debe añadirse un término más para contemplar la presencia de un vértice adicional.

También, llevamos a cabo un cambio de variables, pero aquí las nuevas variables  $(\xi, \eta)$  van a estar contenidas en la región cuadrada  $[-1; 1]$ . Así, estamos mapeando un cuadrilátero de forma irregular a un cuadrado estandar de magnitud 2 en sus lados y centrado en el origen (características deseables para llevar a cabo integración numérica mediante cuadratura Gaussiana sobre una tal región) (ver figura 3).

Para poder mapear puntos definidos sobre el plano  $(x, y)$  al plano  $(\xi, \eta)$ , es necesario resolver el sistema dado por

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta \end{aligned} \quad (7)$$

Donde  $(a_1, b_1) = \frac{(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4)}{4}$ ;  $(a_2, b_2) = \frac{(\vec{P}_2 - \vec{P}_1 + \vec{P}_3 - \vec{P}_4)}{4}$ ;  $(a_3, b_3) = \frac{(\vec{P}_3 - \vec{P}_2 + \vec{P}_4 - \vec{P}_1)}{4}$ ;  $(a_4, b_4) = \frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{P}_3 - \vec{P}_4)}{4}$ .

Como la forma cerrada de  $\xi = \xi(x, y)$  y  $\eta = \eta(x, y)$  que se obtiene al resolver (7) es algo extensa, preferimos no incluirlas para mantener la legibilidad del documento.

Nuevamente, para determinar si un punto dado definido en el plano  $(x, y)$  se encuentra dentro del cuadrado  $[-1; 1]$ , es necesario aplicar un método de verificación sencillo: básicamente, si  $[(\xi, \eta) < -1]$  ó  $[(\xi, \eta) > 1]$ , el punto no se encuentra dentro del cuadrilátero y no deberá calcularse ninguna magnitud sobre él. En cuanto a las funciones de forma, las cuales se modifican para calcularse sobre las nuevas variables  $(\xi, \eta)$ , poseen las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1 - \eta)(1 - \xi)}{4} \\ N_2 &= \frac{(1 + \eta)(1 - \xi)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1 + \eta)(1 + \xi)}{4} \\ N_4 &= \frac{(1 - \eta)(1 + \xi)}{4} \end{aligned} \tag{8}$$

Las funciones de forma en (8) permiten modificar a la ecuación (6), para reescribirla de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{(1 - \eta)(1 - \xi)}{4} \cdot \vec{v}_1 + \frac{(1 + \eta)(1 - \xi)}{4} \cdot \vec{v}_2 + \frac{(1 + \eta)(1 + \xi)}{4} \cdot \vec{v}_3 + \frac{(1 - \eta)(1 + \xi)}{4} \cdot \vec{v}_4 \tag{9}$$

### 3. Mallado y estructuras de datos

Para poder representar un conjunto de polígonos (triángulos, cuadrados, etc) conectados entre sí, necesitamos una forma de expresar los puntos y la manera que se conectan entre sí. Para esto, necesitamos representar los puntos en una matriz; y las conectividades entre ellos en otra, y esto podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{M1} & \cdots & n_{MN} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz (10) es conocida en la literatura como XNODE, mientras que la (11) se denomina ICONe. Ambas, representan perfectamente un conjunto de polígonos en el espacio, porque condensan tanto la información de los puntos como las conectividades entre sí. Mediante ellas, podemos representar mallas como la que se observa en la figura 4, en la cual puede observarse que con la utilización de una misma estructura de datos pueden representarse mallas de diferentes características. Ahora supongamos que la malla coloreada de rojo, contiene en sus nodos alguna cantidad física como temperaturas, mientras que la malla azul no tiene sus temperaturas o posee valores desactualizados. En primer instancia podríamos decir que aquellos nodos donde ambas mallas tienen coincidencia exacta, no necesitan actualización ya que se encuentran espacialmente en el mismo lugar. Sin embargo, ¿qué sucede con aquellos puntos como el (3;2.5) de la malla triangular? Necesitamos de alguna manera saber la temperatura en ese punto en función de los puntos mas cercanos de la malla cuadrada, que es la que contiene la información física. Para conseguir esto, se utilizará la denominada interpolación bilineal para cuadriláteros, donde a partir de los nodos del cuadrilátero que contiene al punto de interés, se mapea el punto resolviendo la ecuación (7), y luego con las coordenadas naturales se interpolan las temperaturas con (9).

Estas mismas ideas pueden aplicarse sin inconvenientes para, por ejemplo, mallas formadas por segmentos de recta (es decir, polígonos de dos vértices). En este caso, la interpolación, se efectúa mediante la fórmula lineal:

$$\vec{P} = (1 - \alpha)\vec{P}_1 + \alpha\vec{P}_2 \quad \alpha \in [0, 1] \quad (12)$$

Obsérvese en la ecuación que se está interpolando entre las coordenadas de dos puntos, pero esta misma expresión puede aplicarse para interpolar las temperaturas que tienen esos dos puntos. Una pregunta que podría surgir en este punto es ¿cómo representar las cantidades físicas de los nodos en una



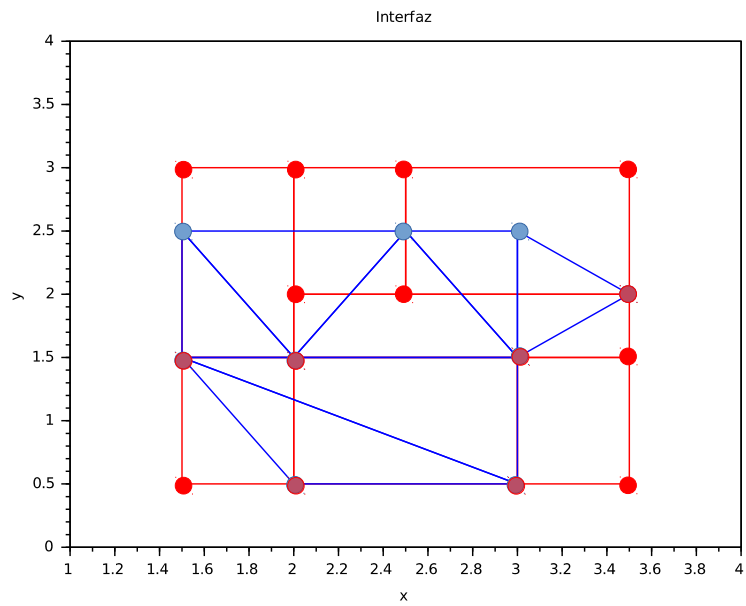


Figura 4:  
Dos mallas de diferentes características.

mallá? Pues con las matrices XNODE e ICONÉ podemos conocer perfectamente la estructura de la mallá, así que podríamos agregar una tercer matriz que indique para cada nodo, la cantidad física que le corresponde:

$$\begin{bmatrix} n'_1 & \vec{e}_1 \\ \vdots & \vdots \\ n'_{MN} & \vec{e}_{MN} \end{bmatrix} \quad \vec{e}_i \in \mathbb{R}^k, 1 \leq i \leq MN, k \in \mathbb{N} \quad (13)$$

La primer columna de esta matriz indica los nodos, donde es necesario aclarar que la numeración de los mismos puede no seguir un orden consecutivo; es por esto que es necesario explicitar el número de nodo. Este, dice el número de fila de la matriz XNODE, donde están las coordenadas del nodo en cuestión.

## 4. Introducción a la Mecánica de Fluídos

En Mecánica de fluídos, se suelen estudiar diversos temas que se centran en lo que se denomina *flujo*. Según [1] el flujo es una cantidad fundamental asociada a una variable  $U$  y definida como la cantidad de  $U$  que atraviesa una determinada superficie por unidad de tiempo. Básicamente, los flujos pueden presentarse en dos regímenes completamente diferentes: flujo laminar o flujo turbulento. Los laminares se caracterizan porque las partículas de fluído se mueven de manera ordenada, en láminas, en la dirección de la corriente y sin generar flujos ni movimientos transversales. Este tipo de flujos aparece cuando la viscosidad es el fenómeno de transporte dominante, lo cual permite atenuar cualquier tipo de perturbación que puede alterar al flujo. Por el contrario, los flujos tubulentos se caracterizan por presentar fluctuaciones aleatorias de los campos de presión y velocidad, tanto en el tiempo como en el espacio. Estas fluctuaciones provienen de inestabilidades del flujo que en forma de cascada de energía generan vórtices cada vez más pequeños hasta que se disipan en forma de calor por la acción de la viscosidad.

## 5. Análisis de librerías estándar C++

Según la investigación bibliográfica que se ha llevado a cabo, se considera que la librería Eigen es la mejor candidata a ser seleccionada para codificar de manera eficiente las distintas herramientas detalladas anteriormente. Es de

destacar, que la elección ha sido basada en benchmarks publicados en internet [3] [4], donde se han puesto a prueba las distintas librerías de manejo de sistemas lineales algebraicos. Otros criterios que se utilizaron para seleccionar la misma son: vigencia, soporte, y proyección a futuro.

## Referencias

- [1] HIRSCH,C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, segunda edición, Elsevier, USA, Burlingtom, 2007.
- [2] ORO,J.M.F, «Técnicas numéricas en ingeniería de fluidos», *Introducción a la dinámica de flúidos computacional (CFD) por el método de volúmenes finitos*, primera edición, REVERTÉ, España, Barcelona, 2012, págs. 46–47.
- [3] HO,N. (2012). *www.nghiaho.com/?p=1726*, 4 de septiembre de 2016.
- [4] HO,N. (2015). *http://www.360doc.com/content/15/0325/15/21172899\_457940201.shtml*, 4 de septiembre de 2016.