

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

PROYECTO FINAL DE CARRERA: “ANÁLISIS E  
IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO PARA LA PROYECCIÓN DE  
SOLUCIONES EN PROBLEMAS DE INTERACCIÓN  
FLUIDO-ESTRUCTURA CON MALLAS NO COINCIDENTES”

---

## Entregable N°2: Desarrollo y codificación del método de proyección directa

---

*Autores:*

Fabrizio J. PIVA

Pablo S. VERA

*Director:*

Dr. Gustavo RÍOS

*co-Director:*

Dr. Luciano GARELLI

Ingeniería Informática



## **Resumen**

El presente documento es un informe que contiene, entre otros aspectos, una breve descripción de los conceptos que se adquirieron en la etapa del cronograma denominada “Desarrollo y codificación del método de proyección directa”. Es de destacar que los términos “proyección directa” y “proyección geométrica” refieren a lo mismo, por lo cual pueden utilizarse indistintamente a lo largo del informe.

## **1. Introducción**

Este informe tiene como objetivo desarrollar brevemente los conceptos adquiridos a lo largo de la segunda etapa del proyecto, que consiste en abordar el método de proyección geométrica en su completitud junto con sus diversas variantes: proyección geométrica simple, proyección geométrica con promediado de normales unitarias y proyección geométrica con promediado de normales no unitarias.

Se comenzará dando una explicación teórica breve del método y sus variantes, para luego analizar las estructuras de datos necesarias a la hora de su codificación y por último se probará el mismo ante un caso de prueba propuesto por de Boer et. al (2008).

## **2. Métodos de proyección geométrica**

En ésta sección del documento se presentarán los distintos métodos de proyección geométrica que se han implementado en la etapa 2 del proyecto. Para unificar ideas, se realizarán las diversas explicaciones sobre una gráfica que simula una interfaz fluido-estructura en una única dimensión (1D).

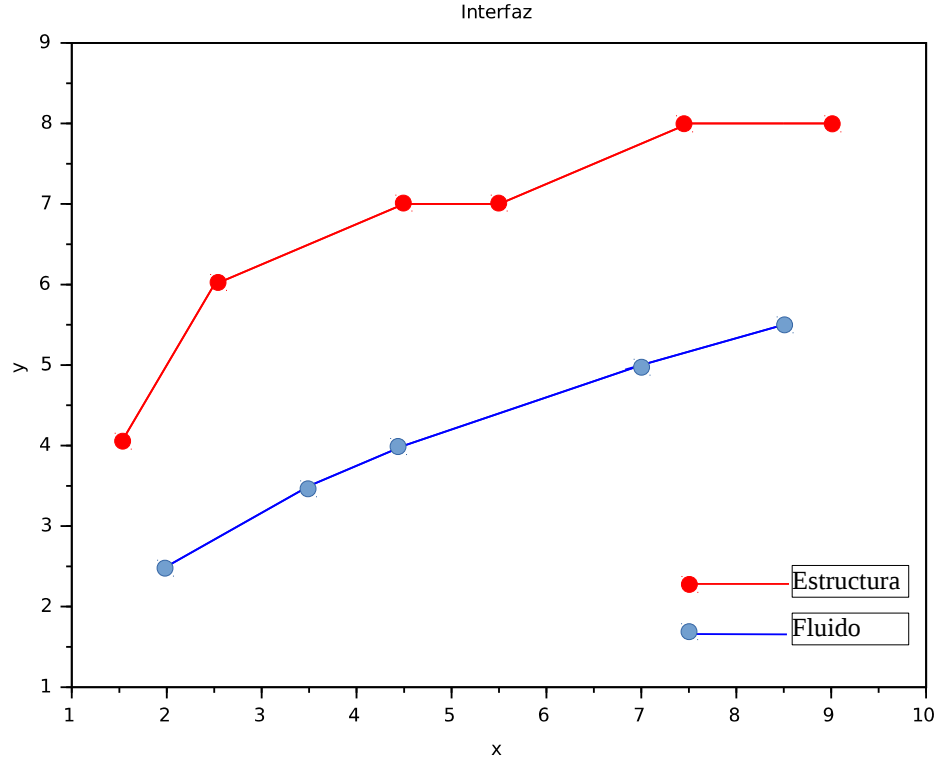


Figura 1: Interfaz fluido-estructura en 1D

En la figura (1) puede verse el contorno del dominio perteneciente al fluido, en color azul, debajo del contorno perteneciente a la estructura, en color rojo. Sobre los puntos nodales, denotados con círculos, se conoce alguna cantidad física. El principal objetivo de los métodos de proyección que se exponen en ésta etapa es proporcionar un conjunto de procedimientos que permitan transferir los datos conocidos en alguno de los contornos discretos (fluido o estructura), hacia el contorno adyacente, siempre considerando las características geométricas del dominio.

A continuación, se presentarán las tres clases de proyecciones analizadas durante la etapa.

- Proyección geométrica.
- Proyección geométrica mediante promediado de normales unitarias.
- Proyección geométrica de normales no unitarias.

## 2.1. Proyección geométrica

Supongamos que, en la figura (1), se conocen los estados  $\vec{v}_f$  sobre los  $N_f$  nodos correspondientes a la malla del fluido, de esta manera para el  $i$ -ésimo nodo  $\vec{n}_i$  existe un estado (o dato) asociado  $\vec{v}_i$ . El dato puede ser, por ejemplo, la presión en la frontera. Entonces, conociendo la presión en el fluido, se debe determinar qué valores de dicha magnitud se asignarán a cada nodo presente en el contorno de la estructura.

En términos generales, el método lleva a cabo la operación vista en la figura. (2).

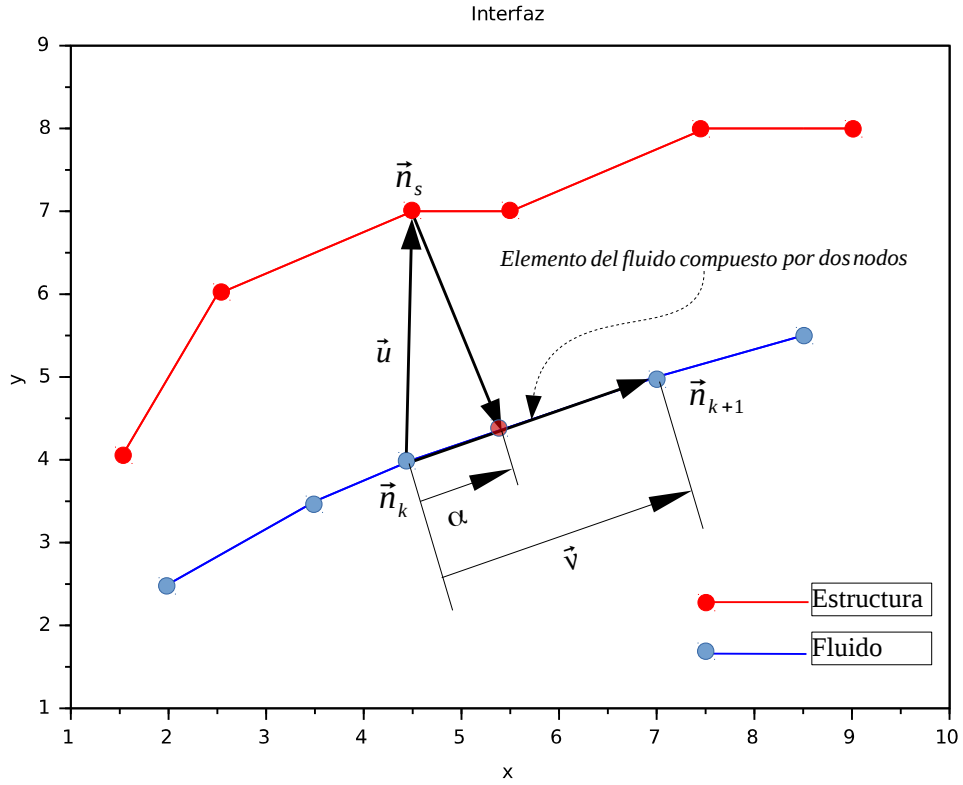


Figura 2: Descripción del método de proyección geométrica

Lo que puede observarse en la figura, es que por cada nodo de la estructura, se realiza una proyección sobre cada elemento de la frontera del fluido; éstos elementos están compuestos por nodos adyacentes, digamos  $\vec{n}_k$  y  $\vec{n}_{k+1}$ . Luego, se construye el vector

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k}{\|\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k\|}$$

sobre el cual, a su vez, se proyecta el vector  $\vec{u} = \vec{n}_s - \vec{n}_k$ , de la siguiente manera

$$\vec{w} = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Con éste último vector generado, ya es posible determinar si la proyección del nodo  $\vec{n}_s$  sobre el elemento del fluido pertenece o no a éste. Simplemente, preguntamos si se cumple la siguiente condición

$$0 \leq \alpha \leq \|\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k\| \quad (1)$$

Donde  $\alpha = \vec{w} \cdot \vec{v}$  y  $\|\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k\|$  es la longitud del elemento.

Cuando la condición de la ec. (1) se cumple, procedemos a interpolar linealmente los estados asociados a  $\vec{n}_k$  y  $\vec{n}_{k+1}$ , es decir  $\vec{v}_k$  y  $\vec{v}_{k+1}$ , respectivamente para asignarle éste valor al estado desconocido del nodo  $\vec{n}_s$ . Para llevar a cabo la interpolación, simplemente tomamos el valor calculado ( $\alpha$ ) como peso de interpolación y aplicamos la ecuación

$$\vec{v}_s = (1 - \alpha)\vec{v}_k + \alpha\vec{v}_{k+1} \quad (2)$$

Cuando la proyección NO pertenece a ningún elemento, simplemente avanzamos (en una búsqueda exhaustiva) hasta encontrar alguno que si lo contenga.

## 2.2. Proyección geométrica mediante promediado de normales

A diferencia del método de proyección presentado en la sección anterior (sec. 2.1), éste se basa en un razonamiento distinto porque no realiza una proyección vectorial sino que:

1. Trata de determinar el punto de intersección entre dos rectas.
2. Si el punto de intersección se encuentra dentro de un elemento en la malla del fluido, éste constituye el punto proyectado y sobre él se interpolan linealmente los estados conocidos.

Por lo tanto, para cada nodo de la estructura ( $\vec{n}_s$ ), se determinan sus nodos vecinos que eventualmente serán denominados  $\vec{n}_{iz}$ , para el nodo que

se encuentra a la izquierda, y  $\vec{n}_{de}$ , para el nodo que se encuentra a la derecha (ver fig. 3).

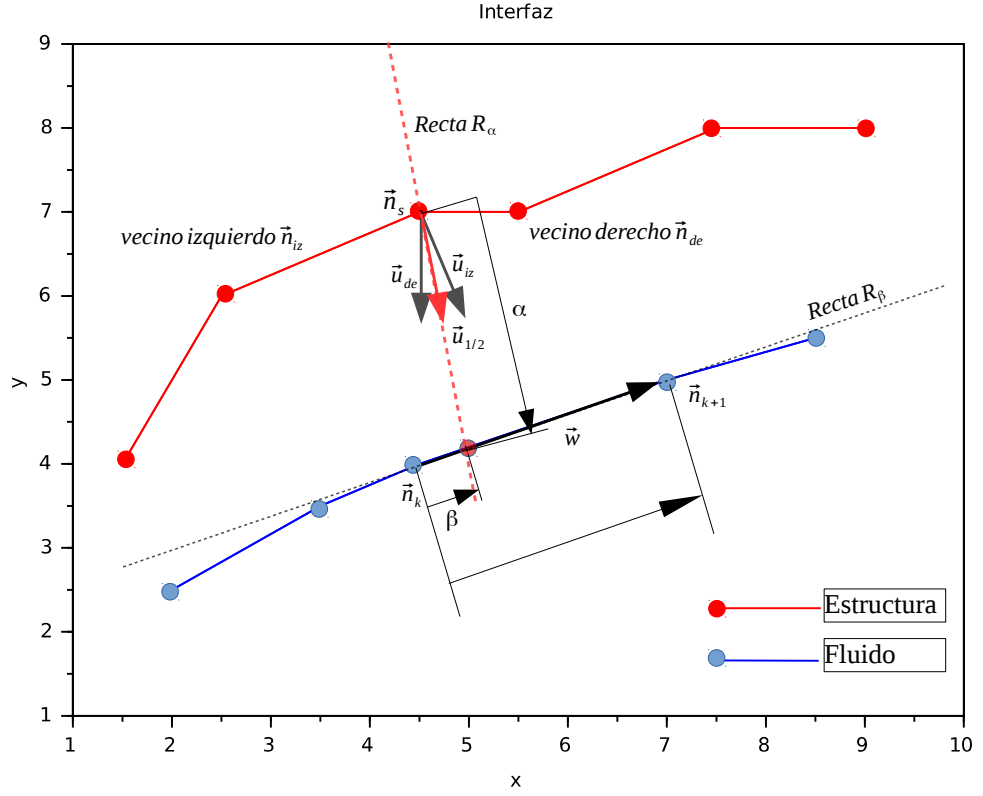


Figura 3: Interpretación geométrica del procedimiento y las variables involucradas en el mismo

En la imagen 3, pueden observarse los dos nodos vecinos a  $\vec{n}_s$ . Con cada uno de ellos se construyen los vectores normales unitarios  $\vec{u}_{iz}$  y  $\vec{u}_{de}$ , haciendo, en primer lugar

$$\vec{u}'_{iz} = \frac{\vec{n}_s - \vec{n}_{iz}}{\|\vec{n}_s - \vec{n}_{iz}\|}$$

$$\vec{u}'_{de} = \frac{\vec{n}_s - \vec{n}_{de}}{\|\vec{n}_s - \vec{n}_{de}\|}$$

Y luego rotando  $90^\circ$ , en sentido anti-horario, a  $\vec{u}'_{iz}$  y  $\vec{u}'_{de}$  realizando

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

Así se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{u}_{iz} &= \begin{bmatrix} u'_{iz}{}^y \\ -u'_{iz}{}^x \end{bmatrix} \\ \vec{u}_{de} &= \begin{bmatrix} u'_{de}{}^y \\ -u'_{de}{}^x \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Con los vectores normales unitarios calculados, se realiza un promedio de ambas direcciones, se renormaliza el resultado y se obtiene un vector unitario promedio denominado  $\vec{u}_{1/2}$ . Matemáticamente, esto significa que

$$\vec{u}_{1/2} = \frac{0,5(\vec{u}_{iz} + \vec{u}_{de})}{\|0,5(\vec{u}_{iz} + \vec{u}_{de})\|} \tag{4}$$

De esta manera, con  $\vec{u}_{1/2}$  calculado, es posible obtener la ecuación paramétrica de la recta que lo contiene como dirección.

$$\vec{R}_\alpha = \vec{n}_s + (\alpha) \vec{u}_{1/2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahora, es necesario calcular la segunda recta, la que pasa por  $\vec{n}_k$  y  $\vec{n}_{k+1}$ , para determinar si la proyección del nodo  $\vec{n}_s$  se encuentra dentro del elemento formado por ambos nodos. Para ello, se obtiene el vector dirección de la recta haciendo  $\vec{w} = \vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k$ . Entonces, la recta que contiene al elemento en cuestión es la siguiente

$$\vec{R}_\beta = \vec{n}_k + (\beta) \vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{6}$$

La ventaja de definir  $\vec{R}_\beta$  de ésta manera es que sabremos si el punto proyectado se encuentra dentro del elemento, ya que en tal caso  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Para poder obtener el valor de  $\alpha$  y  $\beta$ , se busca la intersección entre  $\vec{R}_\alpha$  y  $\vec{R}_\beta$ . Así, igualando las ecuaciones eq.(5) y eq.(6) se deduce que

$$\begin{aligned} \vec{n}_s + (\alpha) \vec{u}_{1/2} &= \vec{n}_k + (\beta) \vec{w} \\ (\alpha) \vec{u}_{1/2} - (\beta) \vec{w} &= \vec{n}_s - \vec{n}_k \end{aligned}$$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$[\vec{u}_{1/2}, -\vec{w}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \vec{n}_s - \vec{n}_k \quad (7)$$

Cuando se determina el valor de  $\beta$ , es posible verificar si el punto proyectado es valido interrogando si  $0 \leq \beta \leq 1$ , como ya se ha mencionado. Si se cumple éste requisito, llevamos a cabo la interpolación lineal que se explico en la ecuación eq.(2) con el parámetro  $\beta$ .

Por otra parte, si  $\beta$  no pertenece a  $[0; 1]$ , entonces continuamos la búsqueda de manera exhaustiva de aquél elemento al que pertenezca la proyección del nodo  $\vec{n}_s$ .

### 2.3. Proyección geométrica de normales no unitarias

Por último, otro método que representa una variante adicional al explicado anteriormente en la sección (2.2), consiste en realizar un promediado de las normales NO unitarias, para luego transformar el resultado en un vector unitario. Un efecto que produce el hecho de promediar las normales no unitarias, es el de ponderar o dar mayor peso a aquella normal que se vea asociada a un elemento vecino de  $\vec{n}_s$ , de gran magnitud.

Como punto en común entre éste método y el anterior, debemos destacar que también se realiza la búsqueda de un punto de intersección entre dos rectas  $\vec{R}_\alpha$  y  $\vec{R}_\beta$  para aplicar, sobre el punto proyectado, la verificación de pertenencia al elemento constituido por  $\vec{n}_k$  y  $\vec{n}_{k+1}$ ; y, si tal verificación es superada, interpolar linealmente los estados de los nodos que conforman al elemento en cuestión como en la ecuación (2).

Debe tenerse en cuenta que, si bien todas las explicaciones desarrolladas en éste apartado se han realizado suponiendo que los estados del fluido son los que se brindan como dato, también es posible aplicar todos estos procedimientos en el sentido inverso, cuando se conocen los datos de la estructura pero no los del fluido. Para tal situación, sólo es necesario proyectar los nodos del fluido sobre los elementos de la estructura como se ha explicado.

## 3. Estructuras de datos

En la presente sección se analizarán las estructuras de datos necesarias para poner en práctica los métodos de proyección descriptos en la sección 2.

Si analizamos los tres métodos de proyección expuestos allí, podemos observar que el método de proyección geométrica simple (a diferencia de los dos restantes), con sólo contar con las matrices ICONE y XNODE de



ambas mallas de la interfaz fluido-estructura, puede realizar la proyección geométrica de manera satisfactoria. Pero no sucede lo mismo con los restantes métodos porque al utilizar vectores normales en el proceso de proyección, indefectiblemente el cálculo de la normal trae aparejado el uso de elementos vecinos para poder obtener la orientación de la misma. Por tal motivo, se hace necesario agregar una estructura de datos que permita saber, para cada nodo, quienes son los elementos vecinos de la misma.

Tentativamente se podría pensar en agregar una matriz NEIGHBORS para expresar los elementos vecinos de cada nodo, aparte de las matrices ICONO y XNODE con las que ya se cuenta por defecto para caracterizar cada malla. Pero ya vimos que dependiendo del método de proyección a utilizar, puede que la información de las vecindades no sea utilizada. Por lo cual, introducir una matriz adicional a las que ya se cuenta para expresar una malla sería un error, porque estaríamos introduciendo redundancia, algo que luego se traduce en un mayor costo computacional a la hora de la ejecución de los códigos y desperdicio de memoria.

Una solución alternativa sería generar esta matriz NEIGHBORS bajo demanda, es decir, cada vez que se utilice alguno de los métodos de proyección geométrica en los que interviene el uso de vectores normales, generar esta matriz de vecinos a partir de las XNODE y ICONO. Con esto evitaríamos los inconvenientes anteriormente mencionados.

Analizando la forma de la matriz NEIGHBORS, ésta debería tener  $N$  filas, donde  $N$  es la cantidad de nodos en la malla, y la fila  $i$ -ésima debería contener los índices de los elementos que son vecinos al nodo  $i$ . Pero esto trae un inconveniente implícito. Un nodo determinado puede tener un número indefinido de elementos vecinos (exceptuando el caso 1D), por lo que la cantidad de columnas de esta matriz variaría dependiendo de cada fila. Esto hace imposible determinar a priori el tamaño de la matriz, una propiedad indeseable a la hora de implementarla. Pero puede solucionarse mediante la utilización de un *mapa*.

Un *mapa* es un contenedor asociativo utilizado para contener en orden una lista de parejas de valores únicos asociados como (clave,valor). Cada clave, contiene una serie de valores cuya cantidad es indefinida. Pero también hay un par de restricciones indeseables del mapa: la primera es que requiere que las claves (nodos) estén ordenados de manera ascendente y la segunda es que cada par (clave,valor) debe ser único, lo que nos restringe a que cada nodo (clave) tenga un único elemento vecino (valor), si es que el campo valor se setea como un dato de tipo elemento. Los *multi-maps* solucionan el segundo inconveniente, ya que permiten que una pareja (clave,valor) aparezca varias veces, aunque sigue manteniendo el orden de las claves de manera ascendente.

La mejor solución para ambas restricciones sería utilizar contenedores

asociativos múltiples no ordenados como los *hash-multimap* o *unordered-multimap*, los cuales no requieren que los pares se almacenen de forma ordenada ni tampoco restringen el número de parejas almacenadas. Por lo tanto, a la hora de utilizar aquellos métodos de proyección geométrica que impliquen vectores normales, se tendría que generar el hash-multimap o unordered-multimap a partir de las matrices ICONE y XNODE.

## 4. Caso de prueba: Test de De Boer

En la presente sección se analizará el comportamiento del método de proyección geométrica a partir del caso de prueba propuesto por de Boer et. al., el cual puede verse con mayor profundidad en ref. [1].

El test consiste en una interfaz con forma de seno, donde la malla del fluido se encuentra aproximadamente un 20 % mas refinada que la estructura. A su vez, existen dos expresiones matemáticas que gobiernan la cantidad de puntos existentes en cada malla: la cantidad de nodos en la malla del sólido es  $n_s = 5 \cdot 2^k + 1$  mientras que en el fluido es  $n_f = 26 \cdot 2^k + 1$ . Dicha interfaz puede observarse en la fig. (4) donde el sólido está coloreado rojo y el fluido azul.

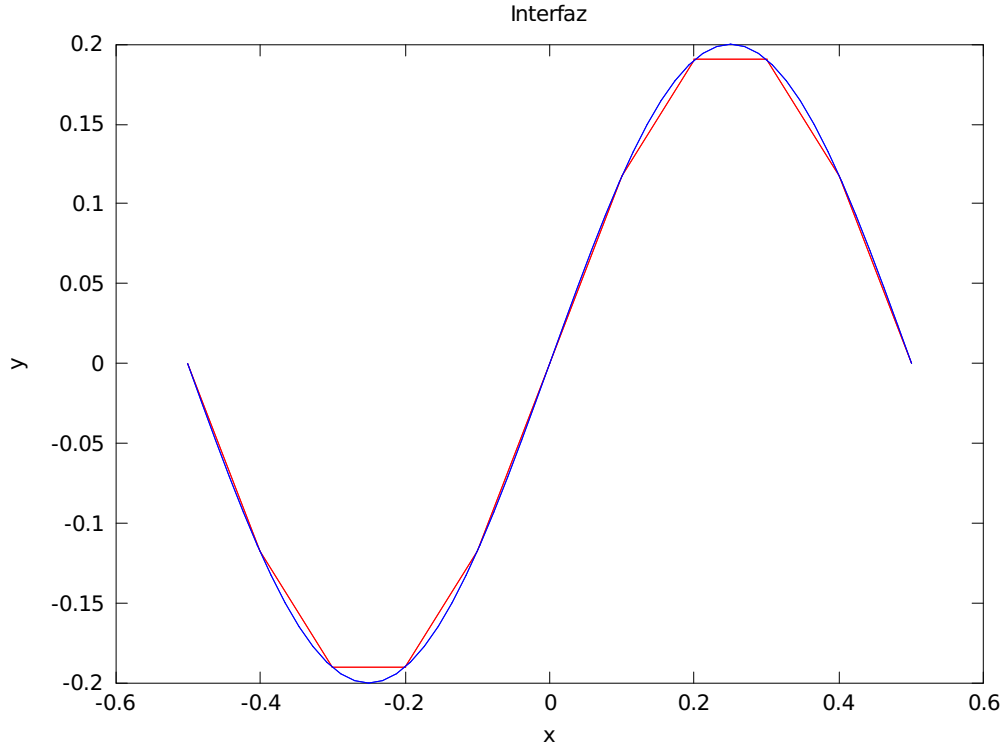


Figura 4: Interfaz fluido-estructura del test de De Boer,  $k = 1$ .

Por lo tanto, para cada valor de  $k$  se obtiene una interfaz. En particular, según ref. [1] este parámetro varía desde 0 a 5, por lo que es necesario para cada valor de  $k$ , proyectar los valores del sólido al fluido. En este test en particular, el sólido posee valores escalares de presión en cada nodo, que responden a la ecuación  $w_s(x) = 0,01\cos(2\pi x)$ . Por lo que, a modo de resumen, el test consiste en:

1. Tomar un valor de  $k$ , donde  $0 \leq k \leq 5$ .
2. Generar las mallas de interfaz con dicho valor de  $k$  seleccionado.
3. Proyectar el campo de presiones desde el sólido al fluido.
4. Medir el error cuadrático medio (MSE)<sup>1</sup> de la solución proyectada res-

---

<sup>1</sup>El error cuadrático medio es una medida estadística que mide el promedio de los errores al cuadrado, es decir, la diferencia entre el estimador y lo que se estima. El autor del caso de prueba lo define de una manera ligeramente diferente, matemáticamente hablando si  $\hat{\mathbf{y}}$  es un vector de  $n$  valores estimados, y  $\mathbf{y}$  es el vector de los valores exactos, entonces el error cuadrático medio (MSE) es  $MSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i^2)}}$ .

pecto a la solución exacta  $w_f(x) = 0,01\cos(2\pi x)$ .

Teniendo en cuenta los pasos anteriores, procedemos a variar el parámetro  $k$  como corresponde a los fines de medir el error cuadrático medio para cada una de las tres formas de proyección geométrica explicadas en la sección 2. Una vez obtenidos los errores, se procede a armar una tabla de los errores cuadráticos medios en función de  $k$ , para poder comparar los resultados obtenidos con los que obtiene el autor del caso de prueba. Las tablas que contienen los errores para cada método de proyección geométrica pueden observarse a continuación.

$k$	MSE Proy. Geo.	MSE PNU	MSE PNNU
0	0.16707	0.16949	0.16978
1	0.043912	0.044183	0.044198
2	0.011274	0.011285	0.011286
3	0.0028384	0.0028392	0.0028393
4	7.1174e-4	7.1179e-4	7.1179e-4
5	1.7818e-4	1.7818e-4	1.7818e-4

Cuadro 1: Error cuadrático medio en función de  $k$ , para las tres formas de proyección geométrica.

Vale la pena aclarar, para esta tabla que PNU refiere al método de proyección geométrica promediando normales unitarias, mientras que PNNU al método de proyección geométrica sin promediado de normales unitarias. La gráfica de estos errores para los tres métodos de proyección geométrica puede observarse en la fig. (5).

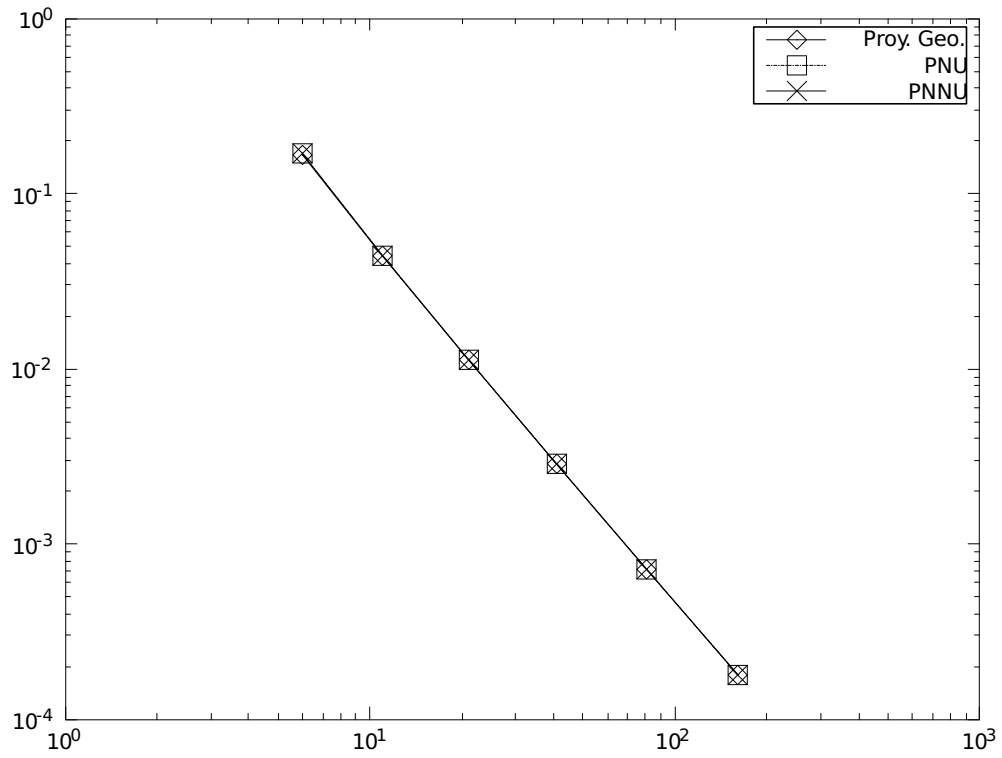


Figura 5: Errores cuadráticos medios para los tres métodos de proyección geométrica, en ejes logarítmicos.

Por otra parte, podemos analizar también los tiempos de ejecución de estos métodos en función de  $k$ , lo que puede observarse en la fig. (6).

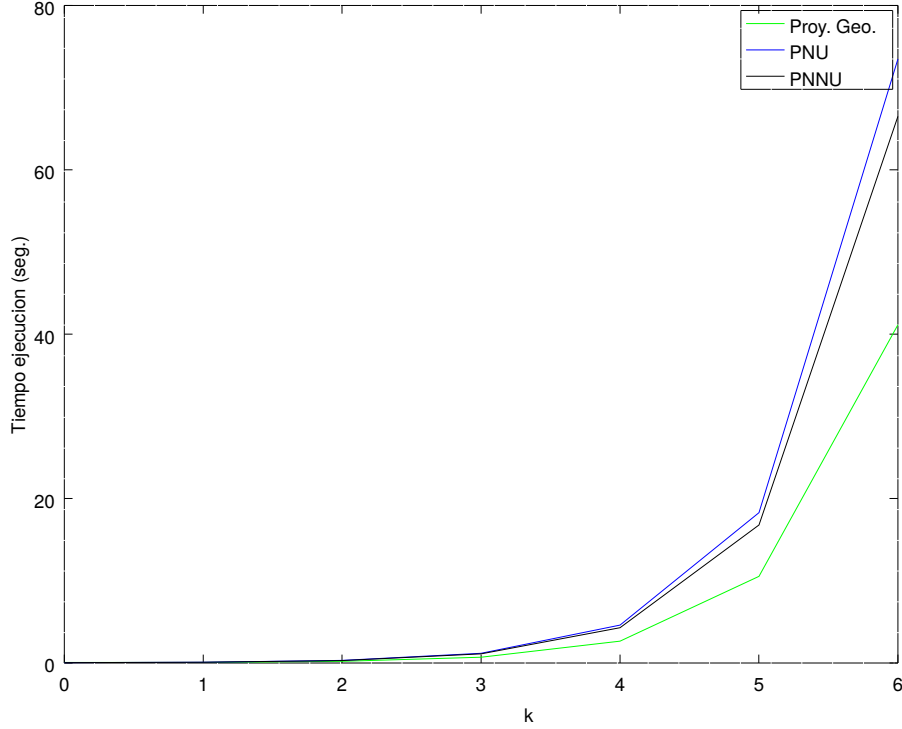


Figura 6: Tiempos de ejecución medido en segundos para los tres métodos de proyección geométrica.

Analizando la tabla 1 se puede decir que los tres métodos convergen al mismo error, pero el que posee un error mas bajo comparativamente al resto es el método de proyección geométrica simple, ya que en cada valor de  $k$  siempre mantiene el MSE mas bajo. Además, observando la gráfica de los tiempos de ejecución, se puede concluir que el método de proyección geométrica es más rápido comparativamente a los restantes, aunque esto no debería sorprendernos ya que necesita menor cantidad de información a la hora de proyectar. Por otra parte, los resultados obtenidos son muy similares a los que obtuvo De Boer en su tesis doctoral, lo cual corrobora de alguna manera la correcta implementación de los mismos. Esto puede observarse en ref. [1].

## 5. Conclusiones

Analizando el método de proyección directa, y a partir del caso de prueba desarrollado en la sección 4, podemos ver que los tres métodos de proyección

directa no poseen grandes diferencias entre sí, aunque si es de destacar que el método de proyección geométrica que no utiliza normales es mas simple en su implementación y además utiliza menor cantidad de información para realizar la proyección, algo que se traduce en un menor tiempo de ejecución global. Debe recordarse que los tres métodos fueron implementados utilizando una búsqueda *exhaustiva*, es decir, dado un nodo a proyectar, buscar elemento por elemento en la otra malla para saber en cuál de ellos cae. Una mejora a considerar es cambiar este algoritmo de búsqueda por otro no-exhaustivo (por ejemplo, mediante la utilización de bounding-boxes o con el algoritmo Nearest Neighbor) para que el tiempo de ejecución se reduzca.

## Referencias

- [1] De Boer Augustina. *Computational fluid-structure interaction*. PhD thesis, Delft University of Technology, Netherlands, December 2008.