

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

PROYECTO FINAL DE CARRERA: “ANÁLISIS E IMPLEMENTACIÓN DE UN
MÉTODO PARA LA PROYECCIÓN DE SOLUCIONES EN PROBLEMAS DE
INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA CON MALLAS NO COINCIDENTES”

Entregable N°2: Desarrollo y codificación del método de proyección directa

Autores:

Fabrizio J. PIVA

Pablo S. VERA

Director:

Dr. Gustavo RÍOS

co-Director:

Dr. Luciano GARELLI

Ingeniería Informática



Resumen

El presente documento es un breve informe que contiene, entre otros aspectos, una ~~breve~~ descripción de los conceptos que se adquirieron en la etapa del cronograma denominada “Desarrollo y codificación del método de proyección directa”. Es de destacar que los términos “proyección directa” y “proyección geométrica” refieren a lo mismo, por lo cual pueden utilizarse indistintamente a lo largo del informe.


1. Introducción

Este informe tiene como objetivo desarrollar brevemente los conceptos adquiridos a lo largo de la segunda etapa del proyecto, que consiste en abordar el método de proyección geométrica en su completitud junto con sus diversas variantes: proyección geométrica simple, proyección geométrica con promediado de normales unitarias y proyección geométrica con promediado de normales no unitarias.

Se comenzará dando una explicación teórica breve del método y sus variantes, para luego analizar las estructuras de datos necesarias a la hora de su codificación y por último se probará el mismo ante un caso de prueba propuesto por Augustina De Boer.



2. Métodos de proyección geométrica

En ésta sección del documento se presentarán los ~~diversos~~  métodos de proyección geométrica que se han implementado en la etapa 2 del proyecto. Para unificar ideas, se realizarán las diversas explicaciones sobre una ~~determinada~~ gráfica que simula una interfaz fluido-estructura en una única dimensión (1D). ~~A continuación, puede observarse la estructura geométrica en cuestión.~~

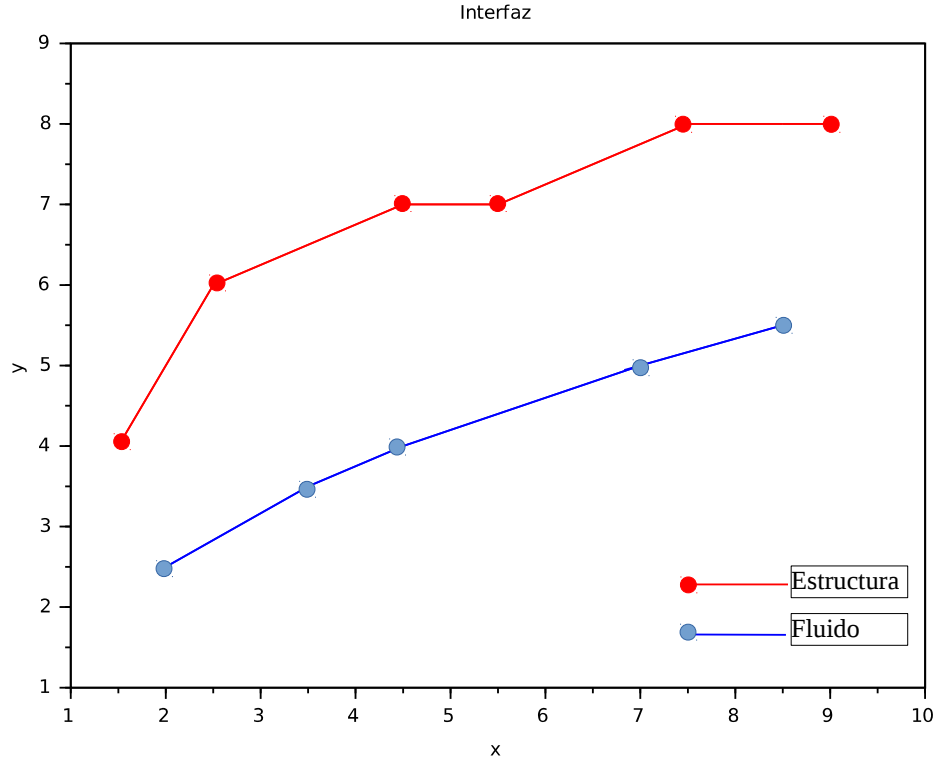


Figura 1: Interfaz fluido-estructura en 1D

En la fig. (1) puede verse el contorno del dominio perteneciente al fluido, en color azul, debajo del contorno perteneciente a la estructura sólida, en color rojo. Sobre los puntos nodales, denotados con \vec{n}_i , se conoce alguna cantidad física, como \vec{v}_i ha explicado en el entregable número 1 presentado en la etapa anterior del proyecto. El principal objetivo de los métodos de proyección que se exponen en ésta etapa es proporcionar un conjunto de procedimientos que permitan transferir los datos conocidos en una de las dos estructuras discretas (fluido o estructura), hacia la estructura adyacente, siempre considerando las características geométricas del dominio.

A continuación, se presentarán las tres clases de proyecciones analizadas durante la etapa.

- Proyección geométrica simple.
- Proyección geométrica mediante promediado de normales unitarias.
- Proyección geométrica de normales no unitarias.

2.1. Proyección geométrica simple

Supongamos que, en la fig.(1), se conocen los estados \vec{v}_f sobre los N_f nodos correspondientes a la estructura de la malla del fluido, de esta manera para el i -ésimo nodo \vec{n}_i existe un estado (o dato) asociado \vec{v}_i . El dato puede ser, por ejemplo, una medida de la presión en la frontera de un fluido. Entonces, la presión del fluido, conlleva una alteración del estado en la frontera del sólido, es decir, produce una cierta presión semiente del lado del sólido. Para poder determinar en qué medida se produce la alteración del estado en la frontera de la estructura, hemos

desarrollado un pequeño procedimiento de proyección de estados que utiliza la información geométrica de ambas estructuras nodales.

En términos generales, el método lleva a cabo la operación vista en la

Va sin acento! Fig. ó fig, pero no

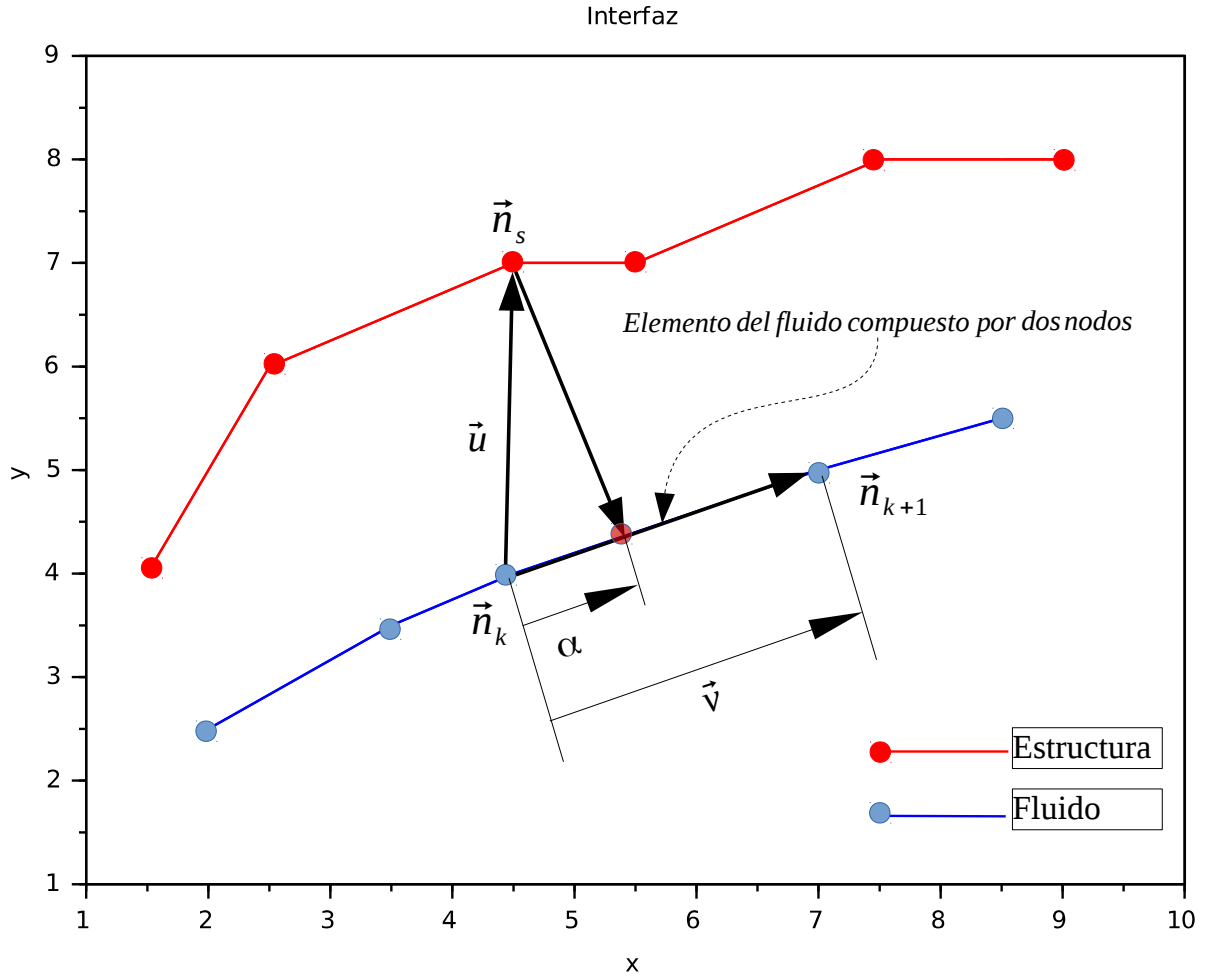


Figura 2: Descripción del método de proyección geométrica simple

Lo que puede observarse en la figura, es parte de todo un procedimiento algorítmico donde, por cada nodo de la estructura del sólido, se realiza una proyección vectorial en función de las coordenadas espaciales de cada nodo. De esta manera, para un determinado nodo de la estructura, se recorre cada elemento que constituye la frontera del fluido; éstos elementos están compuestos por nodos adyacentes, digamos \vec{n}_k y \vec{n}_{k+1} .

Luego, se construye el vector

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k}{\|\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k\|}$$

sobre el cual, a su vez, se proyecta el vector $\vec{u} = \vec{n}_s - \vec{n}_k$, de la siguiente manera

$$\vec{w} = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Con este último vector generado, ya es posible determinar si la proyección del nodo \vec{n}_s sobre elemento en cuestión del fluido pertenece o no a éste. Simplemente, preguntamos si se cumple que

$$0 \leq \alpha \leq \|\vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k\| \quad (1)$$

Donde $\alpha = \vec{w} \cdot \vec{v}$.

Cuando la condición de la ec. (1) se cumple, procedemos a interpolar linealmente los estados asociados a \vec{n}_k y \vec{n}_{k+1} , es decir \vec{v}_k y \vec{v}_{k+1} , respectivamente para asignarle éste valor al estado desconocido del nodo \vec{n}_s . Para llevar a cabo la interpolación, simplemente tomamos el valor calculado (α) como peso de interpolación y aplicamos la ecuación

$$\vec{v}_s = (1 - \alpha)\vec{v}_k + \alpha\vec{v}_{k+1} \quad (2)$$

Cuando la proyección NO pertenece a ningún elemento, simplemente avanzamos hasta encontrar alguno que si lo contenga.

2.2. Proyección geométrica mediante promediado de normales

A diferencia del método de proyección presentado en la sección anterior (sec. 2.1), éste se basa en un razonamiento distinto porque no realiza una proyección vectorial sino que trata de determinar la intersección entre dos rectas; luego si el punto de intersección cumple con un requisito preestablecido, éste constituye el punto proyectado.

En primer lugar, para cada nodo de la estructura, denominado \vec{n}_s , se determinan sus nodos vecinos que eventualmente serán denominados \vec{n}_{iz} , para el nodo que se encuentra a la izquierda, y \vec{n}_{de} , para el nodo que se encuentra a la derecha. Para que el lector pueda comprender correctamente lo que se acaba de explicar, así como también el resto del procedimiento, podrá recurrir a la siguiente figura (fig. 3)



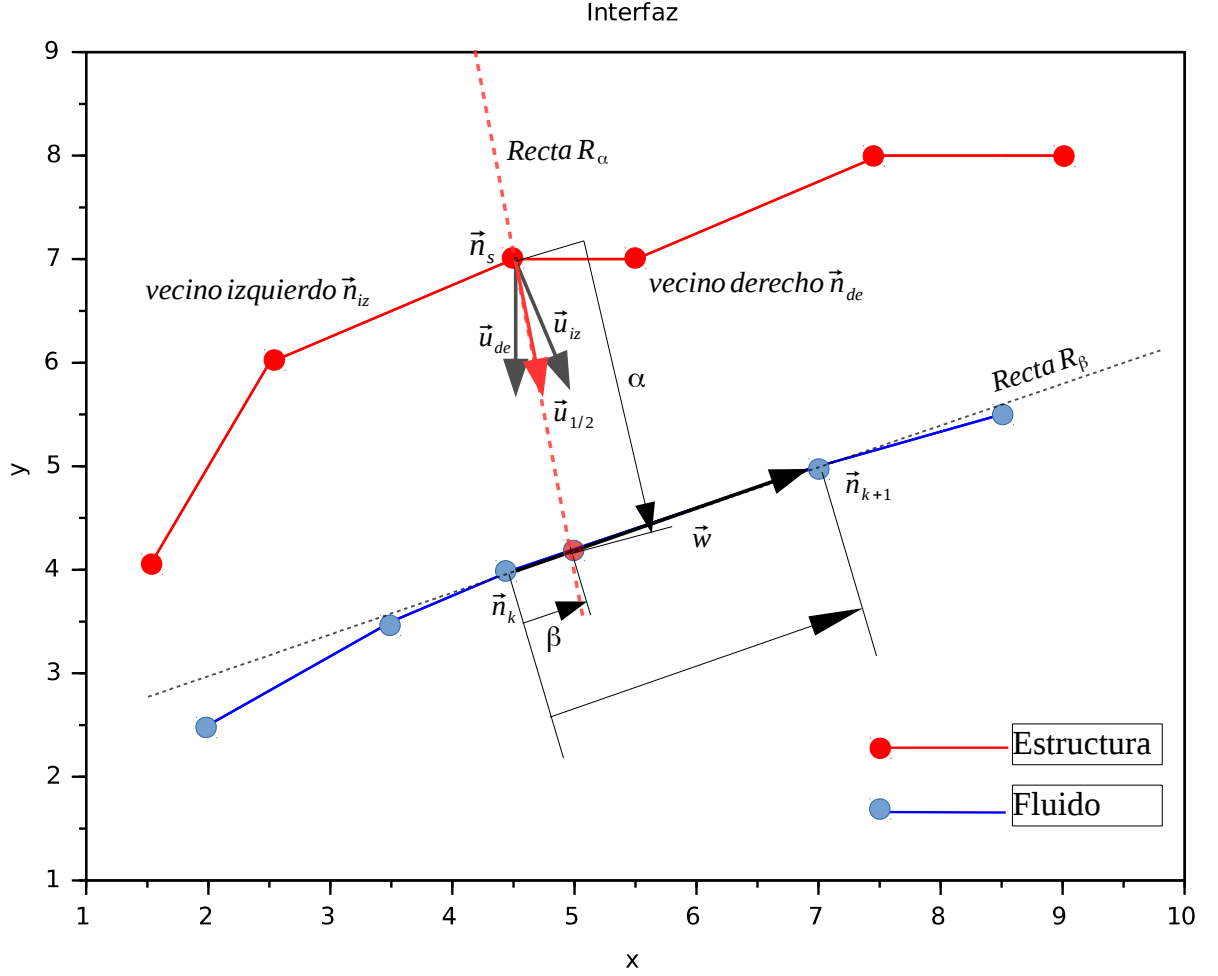


Figura 3: Interpretación geométrica del procedimiento y las variables involucradas en el mismo

En la figura 3, pueden observarse los dos vecinos mencionados en el párrafo anterior. Con cada uno de tales vecinos se construyen los vectores normales unitarios \vec{u}_{iz} y \vec{u}_{de} , es decir



$$\vec{u}_{iz} = \frac{\vec{n}_s - \vec{n}_{iz}}{\|\vec{n}_s - \vec{n}_{iz}\|} \quad (3)$$

$$\vec{u}_{de} = \frac{\vec{n}_s - \vec{n}_{de}}{\|\vec{n}_s - \vec{n}_{de}\|}$$

Con los vectores normales unitarios calculados, se realiza un promedio de ambas direcciones, se renormaliza el resultado y se obtiene un vector unitario promedio denominado $\vec{u}_{1/2}$. Matemáticamente, este procedimiento se expresa como sigue

$$\vec{u}_{1/2} = \frac{0,5(\vec{u}_{iz} + \vec{u}_{de})}{\|0,5(\vec{u}_{iz} + \vec{u}_{de})\|} \quad (4)$$

Continuando, con $\vec{u}_{1/2}$ calculado, es posible obtener la ecuación paramétrica de la recta que lo contiene como versor.

$$\vec{R}_\alpha = \vec{n}_s + (\alpha) \vec{u}_{1/2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ahora, es necesario calcular la segunda recta, la que contiene al elemento del fluido, para determinar si la proyección del nodo \vec{n}_s se encuentra dentro de dicho elemento. Para comenzar éste cálculo, primero se obtiene el vector dirección de la recta haciendo, simplemente, $\vec{w} = \vec{n}_{k+1} - \vec{n}_k$. Entonces, la recta que contiene al elemento en cuestión es la siguiente

$$\vec{R}_\beta = \vec{n}_k + (\beta) \vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6)$$

La ventaja de definir la recta \vec{R}_β de ésta manera radica en que sabremos si el punto proyectado se encuentra dentro del elemento, porque en tal caso $0 \leq \beta \leq 1$.

Para poder obtener el valor de α y β , se busca **aquel** punto que se encuentre en ambas rectas. Así, igualando las ecuaciones eq.(5) y eq.(6) se deduce que

$$\begin{aligned} \vec{n}_s + (\alpha) \vec{u}_{1/2} &= \vec{n}_k + (\beta) \vec{w} \\ (\alpha) \vec{u}_{1/2} - (\beta) \vec{w} &= \vec{n}_s - \vec{n}_k \end{aligned}$$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$[\vec{u}_{1/2}, -\vec{w}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \vec{n}_s - \vec{n}_k \quad (7)$$

Cuando se determina el valor de β , es posible verificar si el punto proyectado es **válido** interrogando si $0 \leq \beta \leq 1$, como ya se ha mencionado anteriormente. Si se cumple éste requisito, llevamos a cabo la interpolación lineal que se explico en la ecuación eq.(2), es decir.

$$\vec{v}_s = (1 - \beta) \vec{v}_k + \beta \vec{v}_{k+1} \quad (8)$$

Por otra parte, si β no pertenece a $[0; 1]$, entonces continuamos la búsqueda de aquel elemento al que pertenezca el punto \vec{n}_s .

2.3. Proyección geométrica de normales no unitarias

Por último, otro método que representa una variante **de aquel explicado** en la sección (2.2), consiste en realizar un promediado de las normales **NO** unitarias, para luego transformar el resultado en un vector unitario. Un efecto que produce el hecho de promediar las normales no unitarias, es el de ponderar o dar mayor peso a aquella normal que se vea asociada a un elemento vecino de \vec{n}_s , de gran magnitud.

Como punto en común entre éste método y el anterior, debemos destacar que también se realiza la búsqueda de un punto de intersección entre dos rectas \vec{R}_α y \vec{R}_β para aplicar, sobre el punto proyectado, la verificación de pertenencia al elemento constituido por \vec{n}_k y \vec{n}_{k+1} ; y, si tal verificación es superada, interpolar linealmente los estados de los nodos que conforman al elemento en cuestión como en la ecuación (8).

Debe tenerse en cuenta que, si bien todas las explicaciones desarrolladas en éste apartado se han desarrollado suponiendo que los estados del fluido **son los** e brindan como dato, también es posible aplicar todos estos procedimientos en el sentido inverso, cuando se conocen los datos de la estructura pero no los del fluido. Para tal situación, sólo es necesario proyectar los nodos del fluido sobre los elementos de la estructura.

3. Estructuras de datos


En la presente sección se analizarán las estructuras de datos necesarias para poder poner en práctica los métodos de proyección descriptos en la sección 2.

Si analizamos los tres métodos de proyección expuestos ~~allí~~, podemos observar que el método de proyección geométrica simple (a diferencia de los dos restantes), con ~~sólo~~ contar con las matrices ICONE y XNODE de ambas mallas de la interfaz fluido-estructura, puede realizar la proyección geométrica de manera satisfactoria. Pero no sucede lo mismo con los restantes métodos porque al utilizar vectores normales en el proceso de proyección, indefectiblemente el cálculo de la normal trae aparejado el uso de elementos vecinos para poder obtener la orientación de la misma. Por tal motivo, se hace necesario agregar una estructura de datos que permita saber, para cada nodo, quienes son los elementos vecinos de la misma.

Tentativamente se podría pensar en agregar una matriz NEIGHBORS para expresar los elementos vecinos de cada nodo, aparte de las matrices ICONE y XNODE con las que ya se cuenta por defecto para caracterizar cada malla. Pero ya vimos que dependiendo del método de proyección a utilizar, puede que la información de las vecindades no sea utilizada. Por lo cual, introducir una matriz adicional a las que ya se cuenta para expresar una malla sería un error, porque estaríamos introduciendo redundancia, algo que luego se traduce en un mayor costo computacional a la hora de la ejecución de los códigos y desperdicio de memoria.

Una solución alternativa sería generar esta matriz NEIGHBORS bajo demanda, es decir, cada vez que se utilice alguno de los métodos de proyección geométrica en los que interviene el uso de vectores normales, generar esta matriz de vecinos a partir de las XNODE y ICONE. Con esto evitaríamos los inconvenientes anteriormente mencionados.

Analizando la forma de la matriz NEIGHBORS, ésta debería tener N filas, donde N es la cantidad de nodos en la malla, y la fila i -ésima debería contener los índices de los elementos que son vecinos al nodo i . Pero esto trae un inconveniente implícito. Un nodo determinado puede tener un número indefinido de elementos vecinos (exceptuando el caso 1D), por lo que la cantidad de columnas de esta matriz variaría dependiendo de cada fila. Esto hace imposible determinar a priori el tamaño de la matriz, una propiedad indeseable a la hora de implementarla. Pero puede solucionarse mediante la utilización de un *mapa*.

Un *mapa* es un  asociativo utilizado para contener en orden una lista de parejas de valores únicos asociados como clave/valor. Cada clave, contiene una serie de valores cuya cantidad es indefinida. Esta propiedad hace al mapa una estructura de datos atractiva que nos permite tener para cada clave (nodo) un número indefinido de valores (vecinos).

Por lo tanto, a la hora de utilizar aquellos métodos de proyección geométrica que impliquen vectores normales, se tendría que generar el mapa a partir de las matrices ICONE y XNODE.

4. Caso de prueba: Test de De Boer

En la presente sección se analizará el comportamiento del método de proyección geométrica a partir del caso de prueba propuesto por ~~de Boer et. al.~~ puede verse con mayor profundidad en ref. [1].

El test consiste en una interfaz con forma de seno ~~de~~, donde ~~el fluido se encuentra~~ ~~la malla del fluido~~ aproximadamente un 20 % ~~más refinada~~ la estructura. A su vez, existen dos expresiones matemáticas que gobiernan la cantidad de puntos existentes en cada malla: la cantidad de nodos en la malla del sólido es ~~de~~ $n_s = 5 \cdot 2^k + 1$ mientras que en el fluido es ~~de~~ $n_f = 26 \cdot 2^k + 1$. Dicha interfaz puede observarse en la fig. (4) donde el sólido está coloreado rojo y el fluido azul.

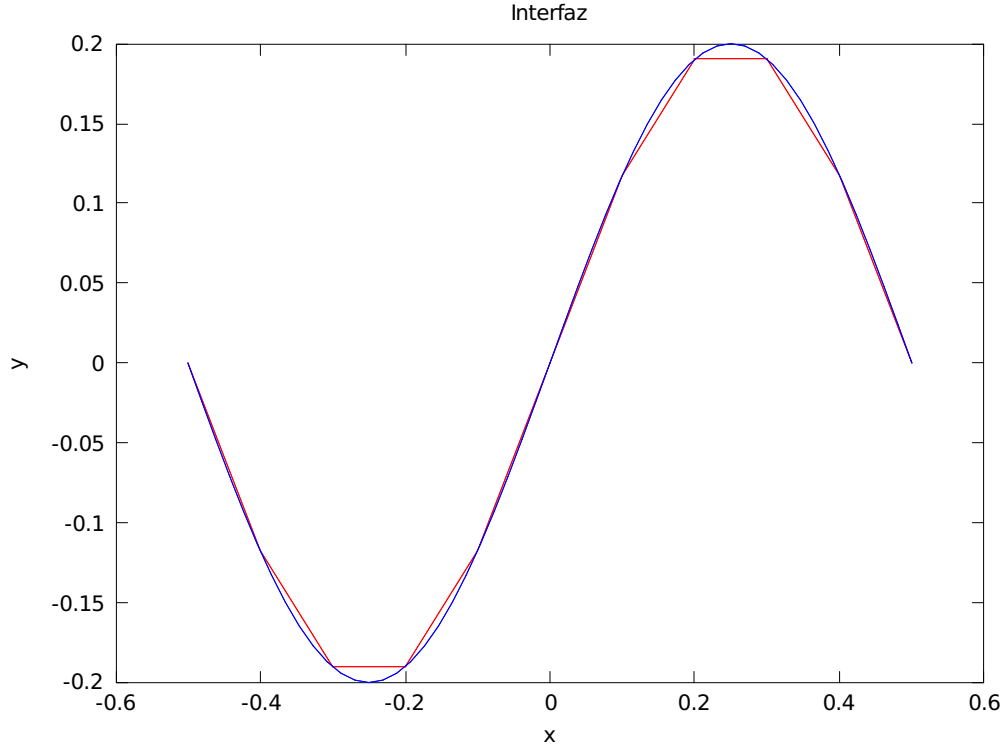


Figura 4: Interfaz fluido-estructura del test de De Boer, $k = 1$.

Por lo tanto, para cada valor de k se obtiene una interfaz. En particular, según ref. [1] este parámetro varía desde 0 a 5, por lo que es necesario para cada valor de k , proyectar los valores del sólido al fluido. En este test en particular, el sólido posee valores escalares de presión en cada nodo, que responden a la ecuación $w_s(x) = 0,01\cos(2\pi x)$. Por lo que, a modo de resumen, el test consiste en:

1. Tomar un valor de k , donde $0 \leq k \leq 5$.
2. Generar las mallas interfaz con dicho valor de k seleccionado.
3. Proyectar el campo de presiones desde el sólido al fluido.
4. Medir el error cuadrático medio (MSE) de la solución proyectada respecto a la solución exacta $w_f(x) = 0,01\cos(2\pi x)$.

Teniendo en cuenta los pasos anteriores, procedemos a variar el parámetro k como corresponde a los fines de medir el error cuadrático medio para cada una de las tres formas de proyección geométrica explicadas en la sección 2. Una vez obtenidos los errores, se procede a armar una tabla de los errores cuadráticos medios en función de k , para poder comparar los resultados obtenidos con los que obtiene el autor del caso de prueba. Las tablas que contienen los errores para cada método de proyección geométrica pueden observarse a continuación.

k	MSE simple	MSE PNU	MSE PNNU
0	0.16707	0.16949	0.16978
1	0.043912	0.044183	0.044198
2	0.011274	0.011285	0.011286
3	0.0028384	0.0028392	0.0028393
4	7.1174e-4	7.1179e-4	7.1179e-4
5	1.7818e-4	1.7818e-4	1.7818e-4

Cuadro 1: Error cuadrático medio en función de k , para las tres formas de proyección geométrica.

Vale la pena aclarar, para esta tabla que PNU refiere al método de proyección geométrica promediando normales unitarias, mientras que PNNU al método de proyección geométrica sin promediado de normales unitarias. Analizando la tabla 1 se puede decir que los tres métodos convergen al mismo error, pero el que posee un error mas bajo comparativamente al resto es el método de proyección geométrica simple, ya que en cada valor de k siempre mantiene el MSE mas bajo. Además, si graficamos estos valores en ejes logarítmicos, los resultados obtenidos son muy similares a los que obtuvo De Boer en su tesis doctoral, lo cual corrobora de alguna manera la correcta implementación de los mismos. Esto puede observarse en ref. [1].



Referencias

- [1] De Boer Augustina. *Computational fluid-structure interaction*. PhD thesis, Delft University of Technology, Netherlands, December 2008.