PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

Corrigés des applications et Initiation au logiciel MS - Project

Licence 1 Sciences Economiques

Cédrick TOMBOLA Muke

Assistant au CCAM/UPC

[Février 2013]

LABORATOIRE D'ANALYSE - RECHERCHE EN ECONOMIE QUANTITATIVE
LAREQ
Production LAREQ

The door of opportunity won’t open unless you do some pushing

L’auteur

Cédrick TOMBOLA Muke est diplômé, depuis juillet 2011, de l’Université Protestante au Congo (UPC) en Sciences économiques, option économie mathématique. Il est actuellement assistant chargé des travaux pratiques dans les cours de Mathématique, Statistique inférentielle, Microéconomie, Macroéconomie de long terme, Econométrie, Recherche opérationnelle et Séminaire 1 d’Economie mathématique à l’UPC et au Centre Congolais – Allemand de Microfinance (Frankfurt School – UPC). Il est aussi membre de la Cellule de Réflexions Economiques et Sociales (CRES) et chercheur au Laboratoire d’Analyse – Recherche en Economie Quantitative (LAREQ). Auteur de plusieurs papiers, ses recherches universitaires couvrent plusieurs domaines, notamment la macroéconomie DSGE, l’économétrie bayésienne, la topologie, la cointégration non linéaire, la modélisation GARCH multivarié et la recherche opérationnelle.

Avant – propos

Deux raisons principales justifient la rédaction de ce manuel des corrigés. Tout d'abord, ma détermination et ma foi en l'avenir font que je fais partie de ceux qui cherchent à progresser. J'ai horreur d'avoir le sentiment de faire du sur – place. Ensuite, je crois fermement, comme Einstein, que les amères leçons du passé doivent être réapprises sans arrêt.

En novembre 2011, quand on m'a chargé des travaux pratiques dans le cours de Recherche opérationnelle, je ne concevais pas que ma tâche se résume, simplement, à résoudre des applications. J'estimais, que si ce n'était que cela le travail d'un chargé des TP, certains logiciels – que les étudiants sauraient manipuler – seraient, dans une certaine mesure, plus efficaces. Pour échapper à cette trappe, je préférais allouer plus de temps à l'abstraction et à la théorie qu'à la résolution des exercices. Ce n'est pas à dire que j'étais un assistant spécial, mais mon objectif était de parvenir à hisser les étudiants à mon diapason, pour qu'ils soient capables de résoudre eux – mêmes toutes les applications. Une année après, je dois reconnaître que ce modèle n'a pas bien fonctionné. Le taux d'échec (une moyenne d'environ 80%), à toutes les épreuves composées l'année passée, était ahurissant et abasourdissant. Et puisqu'il est important d'avancer en apprenant des erreurs du passé, ce manuel des corrigés est ma façon d'apprendre de cette expérience.

Mon style d'enseignement n'ayant pas changé, j'ai décidé, à travers ce papier, d'inaugurer une vague des manuels des corrigés des exercices non résolus de mon premier support, qui devront servir à relayer mes séances de TP. Les résolutions sont détaillées pour permettre un véritable entrainement et une bonne préparation à l'examen final.

A ce dernier propos, j'ai l'obligation de prévenir un danger que j'ai perçu avec l'expérience. Lors d'un contrôle, mes étudiants ne devraient pas s'attendre à revoir l'un ou l'autre des exercices résolus dans ce manuel, moins encore « les bats ». Je suis farouchement opposé à ce système, car je suis persuadé qu'il ne favorise ni la réflexion ni l'innovation devant un problème nouveau. Et je crois, sincèrement, que les enseignants qui s'y complaisent, ont atteint leur *steady state*; ce qui, à défaut d'un effet de niveau[1], est fort déplorable pour une Université œuvrant dans l'objectif de former une élite compétitive.

Aussi, j'ai préféré inaugurer cette vague des manuels des corrigés par les problèmes d'ordonnancement. Cela, d'une part, parce qu'ils ont une portée pratique très élevée, et de l'autre parce qu'ils ont fait partie, l'année passée, des chapitres qui ont eu une pondération modale, en termes des questions, lors des épreuves de RO. J'ai également trouvé, dans ce guide, assez d'espace et l'occasion de résoudre toutes les interrogations et tous les examens de RO posés en 2012.

Le manuel termine par une initiation au logiciel MS – Project, largement utilisé dans les institutions et organismes pour faire du suivi et évaluation des projets. Cette initiation a pour objectif pour ainsi dire de joindre l'utile à l'agréable. En même temps, elle donnera aux étudiants une idée sur la façon de manager les projets dans la pratique. Un élément essentiel qui frappera, certainement, leur attention est qu'avec cette

[1] Ce concept est emprunté à la théorie de croissance, il est utilisé ici par comparaison. Dans le modèle néoclassique de Solow (1956), un relèvement du taux d'épargne n'exerce qu'un effet de niveau, c'est – à – dire qu'il modifie le sentier de croissance mais laisse inchangé son rythme. D'après les enseignements de ce modèle, seul le progrès technique, supposé exogène (c'est une manne tombant du ciel), peut modifier le rythme de croissance. Cependant, pour le cas de nos universités, je pense qu'un effet de niveau suffirait déjà à nous faire avancer.

initiation, il est montré comment intégrer les ressources humaines dans l'ordonnancement. Il en ressort que les moyens matériels et humains, dans l'exécution d'une tâche, jouent considérablement sur la durée du projet.

La seule récompense que j'attends de ce papier – dont la rédaction m'a fait payer un lourd tribut – est qu'il serve à plusieurs et imprime en mes étudiants un sens élevé du sacrifice et de l'effort. A ce jour, je suis convaincu, comme Jean – Paul II, que *régner c'est servir et servir c'est régner*.

In fine, tout en restant seul responsable d'éventuelles coquilles contenues dans ce manuel, je remercie et dédie cet effort au Coordonnateur Michel – Ange LOKOTA et à tous les chercheurs co – accomplis (Dandy MATATA, Foura MAYEMBA, Israël MAKAMBO et Jean – Paul TSASA) du Laréq dont je ne peux me passer du soutien et de l'amitié.

Cédrick Tombola M.
cdktbl@yahoo.fr

1

Exercices et corriges sur les problèmes d'ordonnancement

EXERCICE 1

M. Dan KANIKI, expert en multimédias, veut installer un atelier d'informatique. Les tâches à réaliser pour son projet sont les suivantes :

Tâches		Nombre de jours	Antériorité
A	Information des commerciaux	20	-
B	Embauche d'un technicien	30	-
C	Formation d'un technicien	3	B
D	Formation des commerciaux	10	A, C
E	Aménagement de la salle	2	A
F	Commande et livraison du mobilier	5	E
G	Livraison des ordinateurs et des imprimantes	1	F
H	Installation du matériel	1	G, D
I	Installation des logiciels	1	H
J	Tests et mise en route	2	I

Travail à faire [méthode PERT] :

(a) Indiquez le délai minimum de mise en route de ce projet.

(b) Le fournisseur du mobilier a en fait indiqué deux délais possibles selon l'état des stocks à la commande : 5 jours si les meubles sont en magasin et 25 jours si les meubles doivent être commandés. Indiquez les répercussions éventuelles sur le déroulement du projet.

RESOLUTION 1

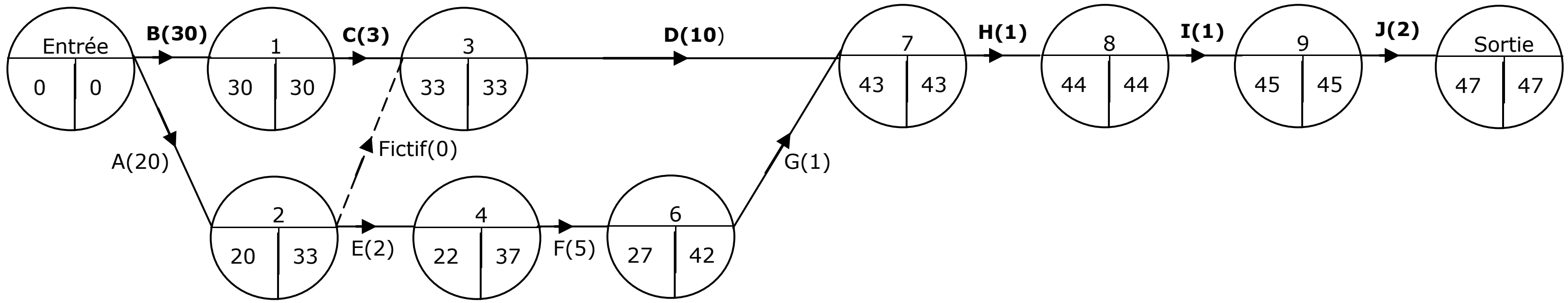
Sous – question (a)

Afin de répondre à cette question, trois étapes sont nécessaires, à savoir : (i) définition des niveaux (ou rangs) des sommets ; (ii) construction du digraphe potentiel – étapes et (iii) application de la méthode PERT.

Connaissant les précédences, on dégage 7 niveaux ci – après :

C_0={A, B} C_1={C, E} C_2={D, F} C_3={G} C_4={H} C_5={I} C_6={J}.

Après partage du graphe à niveaux et application de la méthode PERT, on a le réseau suivant :

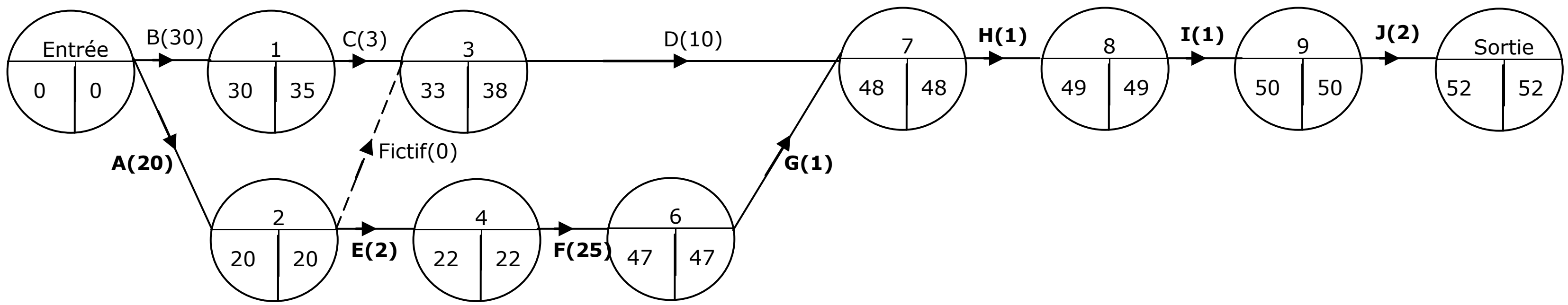


Le chemin critique est **BCDHIJ** et sa durée, qui est au fait le délai minimum de mise en route du projet, est de **47** jours. Et après un calcul élémentaire, on trouve, sur chaque opération, les marges suivantes :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Marge Totale	13	0	0	0	15	15	15	0	0	0
Marge Libre	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0
Marge Certaine	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Sous – question (b)

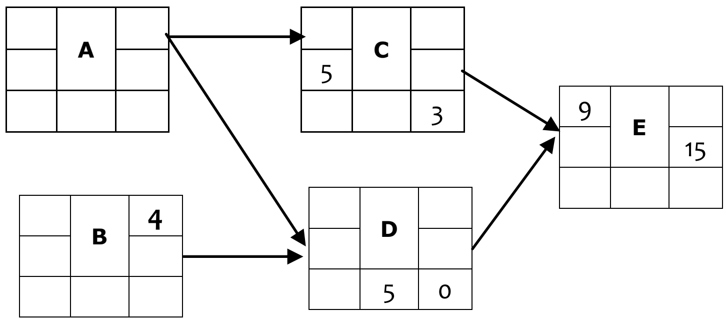
Pour répondre à cette sous – question, il suffit, dans le réseau ci – dessus, de changer la durée de la tâche F (Commande et livraison du mobilier), soit 25 au lieu de 5, puis de refaire tous les calculs. Ainsi obtient – on :



Après calcul, on constate que ce changement, dans la durée de livraison du mobilier, a eu pour conséquence de modifier le chemin critique et sa durée. A présent, le chemin critique est AEFGHIJ. Et sa durée est passée de 47 à 52 jours.

EXERCICE 2

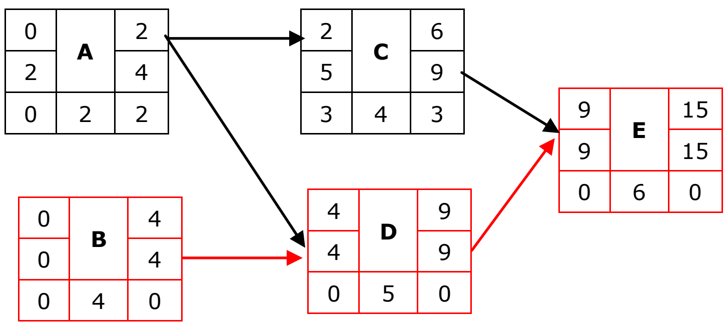
Pour un projet composé en 5 tâches élémentaires [A, B, C, D et E] dont les durées sont en semaines, M. Samyon MANDO, projet manager à SEP-Congo, a fourni les calculs incomplets ci-dessous :



On demande de compléter ces cases afin de déterminer le chemin critique et sa durée.

RESOLUTION 2

Les principes d'applications de la méthode CPM étant connus, compléter ces cases ne présente aucune difficulté.



Le chemin critique est, par conséquent, BDE et le projet dure 15 semaines.

EXERCICE 3

Mme M. NGULUNGU est coordonnatrice d'un projet de construction d'une centrale électrique comprenant 10 opérations [A, B, C, D, E, F, G, H, I et J]. En voulant savoir les marges de manœuvre qu'elle avait sur chaque activité, son adjoint lui fournit les calculs suivants :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Marge Totale	0	0	2	5	3	0	1	0	0	4
Marge Libre	0	0	1	2	2	0	2	0	0	1
Marge Certaine	0	0	3	2	4	1	1	0	0	4

En tant que chercheur opérationnel, en regardant ces chiffres, vous concluez que les calculs sont incontestablement faux, dites pourquoi.

RESOLUTION 3

Ces calculs sont incontestablement faux parce que la condition **MC ≤ ML ≤ MT** n'est pas respectée sur les tâches C, E, F, G et J.

EXERCICE 4

Soit le projet d'acquisition d'une imprimante à codes barres composé en 10 activités ci-après :

Tâches		Antériorité
A	Collecte de la documentation sur les imprimantes	-
B	Choix du matériel	C
C	Etude de la documentation, démonstration par les fabricants	A
D	Installation de l'imprimante, test de fonctionnement	F
E	Passation du marché, commande	B
F	Délai de livraison du matériel	E
G	Commande des étiquettes et livraison	I
H	Etablissement d'un projet d'étiquette	B
I	Mise au point des étiquettes	H
J	Formation des opérateurs	D, G

En utilisant la méthode CPM, M. Jean-Paul ELONGA, un des acteurs du projet, détermine le chemin critique suivant : **BDEGHI**, et attire l'attention du chef du projet sur les tâches le composant.

Travail demandé

Sans avoir à refaire les calculs, dire pourquoi il y a probablement erreur de calcul quant au chemin critique proposé par M. Jean-Paul ELONGA.

RESOLUTION 4

Il y a probablement erreur de calcul, dans la solution proposée par M. Jean – Paul ELONGA, simplement parce que la tâche initiale (sans précédents) A ne fait, curieusement, pas partie du chemin critique.

Exercice 5

Soit un projet donné, découpé en 7 tâches. On en propose trois organisations possibles.

Organisation 1

Tâches	Durée	Antécédents
A	5	-
B	3	-
C	4	A
D	1	B, C
E	2	D
F	5	E
G	4	E, F

Organisation 2

Tâches	Durée	Antécédents
A	5	-
B	3	A
C	4	B
D	1	B, C
E	2	-
F	5	E
G	4	F

Organisation 2

Tâches	Durée	Antécédents
A	5	-
B	3	A
C	4	A
D	1	B, C
E	2	D
F	5	D, E
G	4	E

On demande :

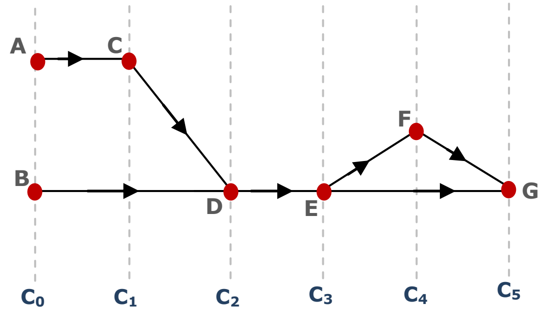
- D'établir le digraphe potentiel-tâches correspondant à chaque organisation.
- De déterminer le chemin critique pour les trois organisations de ce projet [méthode CPM].
- De dire quel constat se dégage dans les résultats finaux.

RESOLUTION 5

Organisation 1
Définition des niveaux :

C_0={A, B}; C_1={C}; C_2={D}; C_3={E} ;C_4={F}; C_5={G}

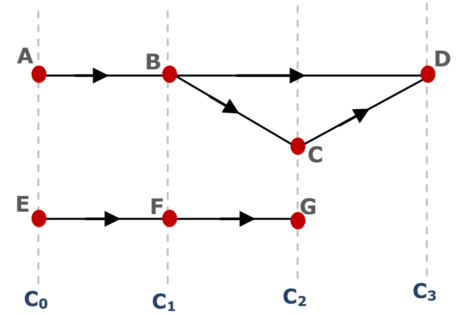
Digraphe potentiel – tâche correspondant



Organisation 2
Définition des niveaux :

C_0={A, E}; C_1={B, F}; C_2={C, G}; C_3={D}

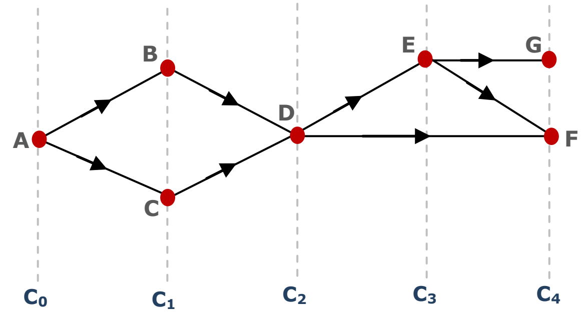
Digraphe potentiel – tâche correspondant



Organisation 3
Définition des niveaux :

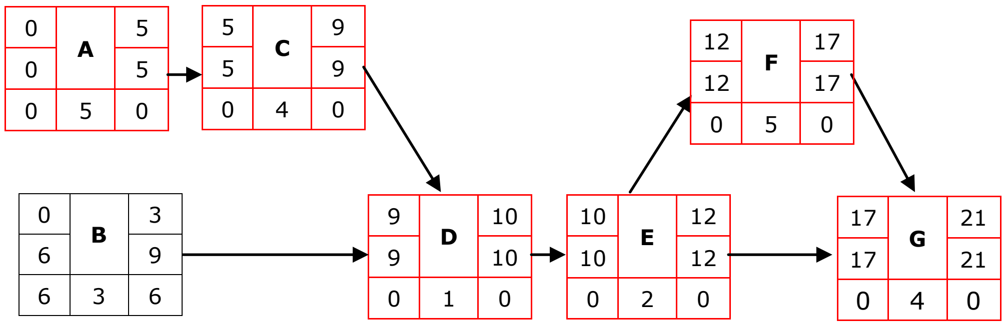
C_0={A}; C_1={B, C}; C_2={D}; C_3={E} ;C_4={F, G}

Digraphe potentiel – tâche correspondant

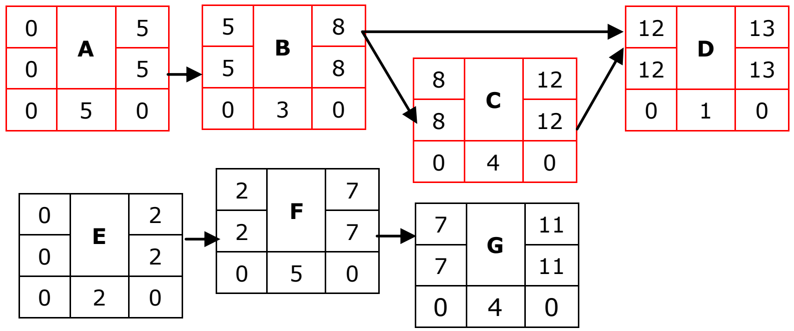


Détermination du chemin critique

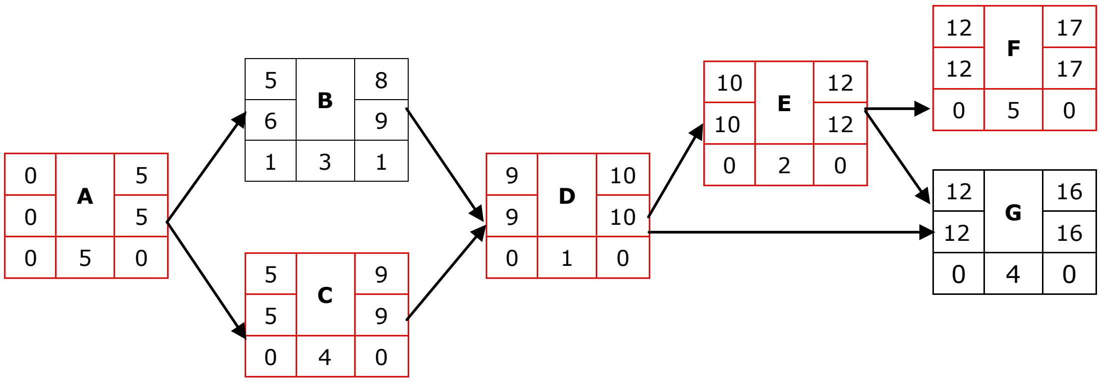
Organisation 1



Organisation 2



Organisation 3



Organisation 1
Si le chef de projet opte pour la première organisation de ce projet, le chemin critique serait **ACDEFG** et sa durée serait de 21.

Organisation 2
Ici, le chemin critique est **ABCD** et sa durée est de 13.

Rappelons que le chemin critique n'est autre que le chemin de valeur maximale, car il doit être le chemin qui prend le plus de temps. A la date qui correspond à sa durée, on est sûr que toutes les tâches sont terminées. Du reste, compte tenu de la deuxième organisation, le chef de projet est appelé à rester tout aussi vigilant sur les tâches E, F et G puisqu'il n'existe aucune marge sur elles.

Organisation 3
En exploitant le commentaire précédent, il vient que le chemin critique, de l'organisation 3, est composé des tâches **ACDEF** et vaut 17.

Le constat qui se dégage de ces résultats est simple : pour un même nombre de tâches, les mêmes durées, c'est l'organisation du projet (la définition des précédences) qui fait la différence au niveau de la détermination du chemin critique et de sa durée.

EXERCICE 6
Un étudiant de G3 a pu planifier son projet de rédaction du travail de fin de cycle en 9 tâches élémentaires reprises dans le tableau suivant :

Tâches		Durée en semaines	Antériorité
A	Recherche du Directeur	4	**-**
B	Proposition du thème et rédaction de l'Introduction	6	A
C	Revue de la littérature	4	-
D	Recherche des moyens financiers	12	-
E	Rédaction du 1^{er} et $2^{ème}$ chapitre	10	B, C, D
F	Correction du Directeur	24	B, C
G	Réception des ouvrages spécifiques auprès du Directeur	7	A
H	Elaboration du $3^{ème}$ chapitre et de la conclusion	10	E, G
I	Dernière correction et avis du Directeur	3	F, H

<u>Travail demandé</u>

- Sans tracer le graphe, déterminez le chemin critique.

- Si l’année académique démarre le 24 octobre 2011, à quelle date cet étudiant peut espérer commencer la saisie de son travail, toute chose égale par ailleurs ?
- Quelles sont les tâches que cet étudiant devra gérer avec prudence pour ne pas dépasser la date de fin de travail ?

RESOLUTION 6

Il s’agit d’appliquer la méthode sans digraphe de Bernard Roy. Les antériorités étant connues, on a le tableau suivant.

Tâche	0	A	4	B	0	C	0	D	12	E	10	F	4	G	22	H	34	I	41	Fin
Antériorité	0	d:0	0	**A**:4	0	d:0	0	d:0	4	B:6	4	**B**:6	0	A:4	12	E:10	10	**F**:24	34	**I**:3
									0	C:4	0	C:4			4	G:7	22	H:10		
									0	D :12										

Le chemin critique est **ABFI** et le projet de rédaction de cet étudiant de G3 dure 41 semaines, soit 287 jours. Si l’année académique démarre le 24 octobre 2011, en prenant les dates réelles, cet étudiant peut espérer commencer la saisie de son travail le lundi 06 août 2012, ceteris paribus. Quant aux tâches, qu’il devra gérer avec prudence, il s’agit des tâches critiques (A, B, F et I).

EXERCICE 7

La réalisation d’un projet exige que soient effectuées 10 opérations A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Les conditions d’antériorité qui relient ces tâches figurent dans la matrice associée ci-dessous :

		DEPART									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ARRIVEE	A										
	B	1									
	C	1									
	D										
	E	1		1							
	F	1		1		1					
	G	1	1	1							1
	H				1						
	I	1	1	1	1	1	1	1	1		1
	J	1		1							

Les durées, en jour, des tâches sont les suivantes :

Tâches	Durée en jour
A	4
B	8
C	5
D	2
E	12
F	4
G	7
H	10
I	6
J	5

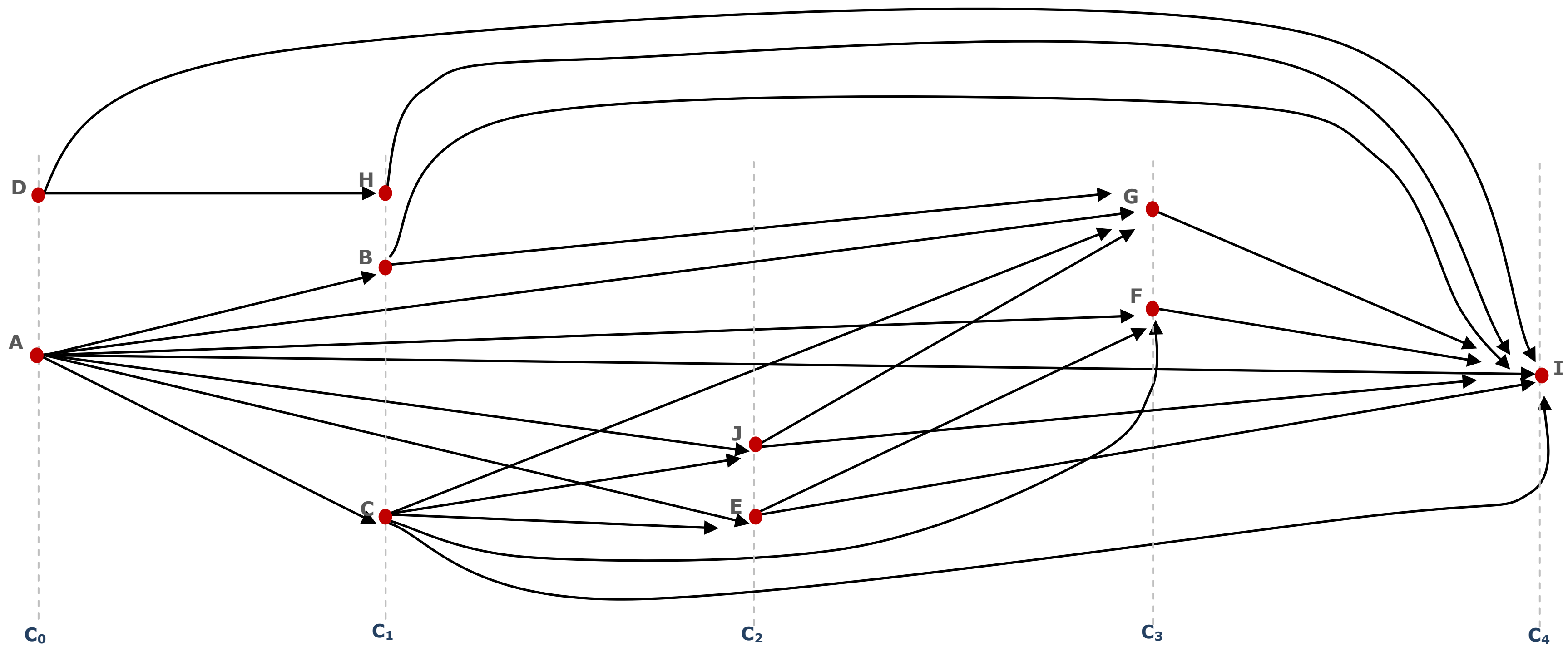
Déterminer la durée minimum de réalisation de ce projet en utilisant la méthode PERT.

RESOLUTION 7

Au regard de la matrice qui est donnée, les dictionnaires des précédents et des suivants correspondants sont constitués ligne par ligne et colonne par colonne, respectivement. Ainsi obtient – on :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
P(X)	–	A	A	–	A, C	A, C, E	A, B, C, J	D	A, B, C, D, E, F, G, H, J	A, C
S(X)	B, C, E, F, G, I, J	G, I	E, F, G, I, J	H, I	F, I	I	I	I	–	I, G

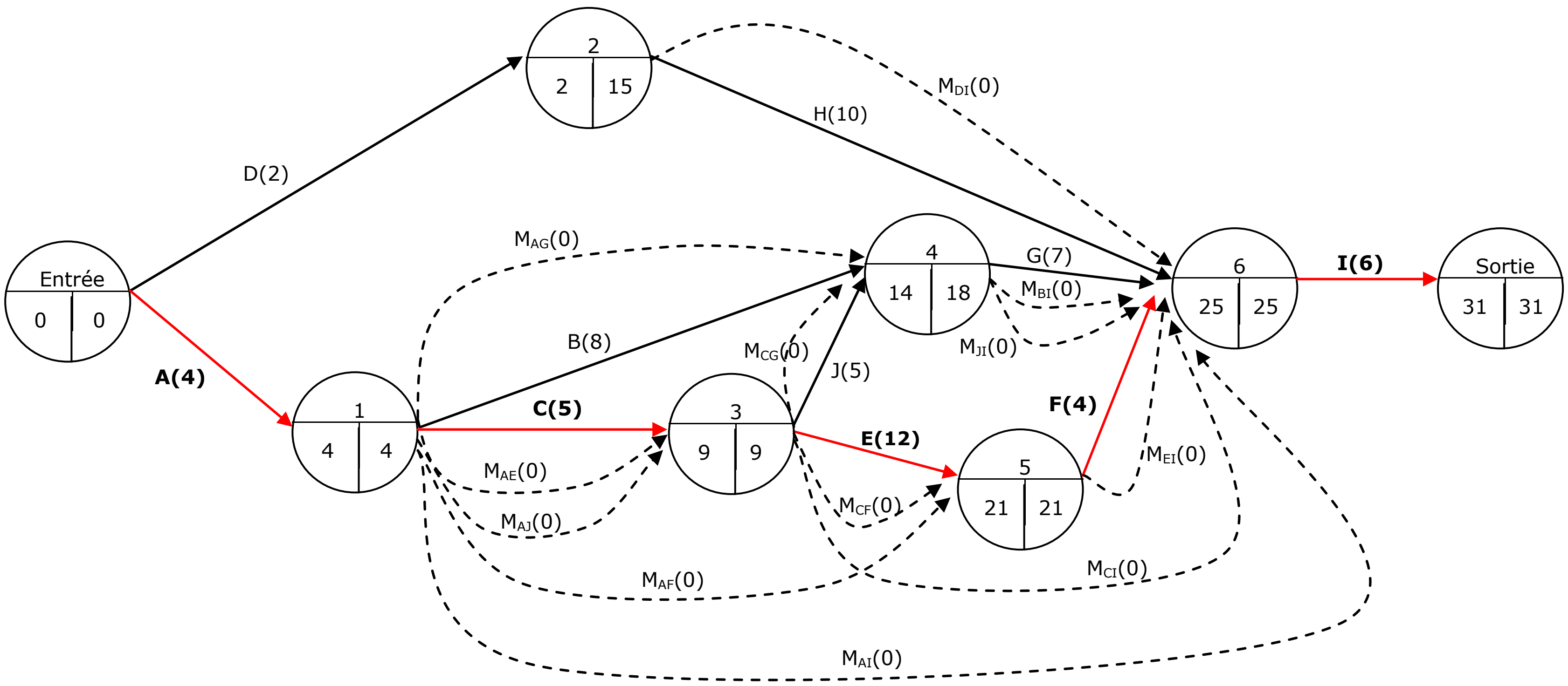
Vu le niveau de complexité de l'application, il est sage de commencer par le partage du graphe à niveau. Une manipulation simple permet de définir 5 niveaux ou rangs ci – après : C_0= {A, D} ; C_1= {B, C, H} ; C_2= {E, J} ; C_3= {F, G} ; C_4= {I}. Après partage et classement, on obtient le **digraphe potentiel – tâches** ci – dessous.



Remarquons que cette représentation n'est pas la meilleure possible. Avec un peu plus d'effort, on peut réussir une représentation où il y aurait beaucoup moins (voire pas du tout) d'arcs qui se coupent. En revanche, pour répondre à la question posée, il nous faut plutôt dessiner un digraphe potentiel – étapes. Le digraphe ci – dessus a été réalisé simplement dans le but de conduire, plus facilement, à la réponse.

Avant tout, rappelons les principes nécessaires à la construction du digraphe potentiel – étapes : (i) deux activités successives sont représentées par deux arcs, l'un à la suite de l'autre ; (ii) chaque tâche est représentée par un arc. Si la tâche A précède la tâche B, l'extrémité terminale de l'arc A coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc B ; (iii) le digraphe doit posséder un sommet sans précédents, appelé **entrée**, qui est le sommet de départ des arcs associés aux tâches sans précédents. De même, le digraphe doit posséder un sommet pendant, appelé **sortie**, qui est le sommet d'arrivée des arcs associés aux tâches sans suivants ; (iv) chaque tâche doit correspondre à un arc et un seul. En cas de dépendances multiples, il convient d'introduire dans le réseau des tâches fictives (muettes, artificielles ou encore fantômes), de durée nulle, afin de forcer certaines antériorités, mieux pour représenter les relations de dépendance entre opérations qui ne pourraient être représentées autrement. Bref, il faut fixer l'attention sur les liaisons essentielles, les autres pouvant être prises en charge par les tâches fictives.

Après application de ces principes et en représentant chaque sommet par un cercle (méthode PERT), on a les résultats suivants.



Où M_{ij} est la tâche muette représentant la liaison ij

Le chemin critique est composé des tâches **ACEFI**. Et La durée minimum de réalisation du projet, qui au fait la durée du projet, est de 31 jours.

Faisons remarquer, au passage, que plusieurs présentations équivalentes de ce projet en digraphe potentiel-étapes sont possibles. Seulement l'on devra veiller à ce que toutes les tâches et leurs relations de dépendance s'y figurent, peu importe que l'on soit contraint à introduire des tâches fantômes afin de forcer certaines précédences. Il faudrait également veiller, lors de l'introduction éventuelle de ces tâches artificielles, à ne pas créer des circuits, ce qui interdirait l'application de la méthode PERT.

EXERCICE 8

La construction d'un entrepôt peut se décomposer en 10 tâches suivantes :

Tâches		Nombre de jours	Antériorité
A	Acceptation des plans par le propriétaire	2	-
B	Préparation du terrain	2	-
C	Commande des matériaux	1	A
D	Creusage de fondation	1	A, B
E	Commande des portes et fenêtres	2	A
F	Livraison des matériaux	2	C
G	Coulage de fondation	2	D, F
H	Livraison des portes et fenêtres	7	E
I	Pose des murs	4	G
J	Mise en place des fenêtres	1	H, I

<u>Travail demandé</u> : - Dresser le diagramme de GANTT, sachant que les durées du tableau sont des prévisions et que les réalisations sont données par le tableau suivant pour les tâches qui ont connu des retards, pour les autres tâches les prévisions étaient égales aux réalisations.

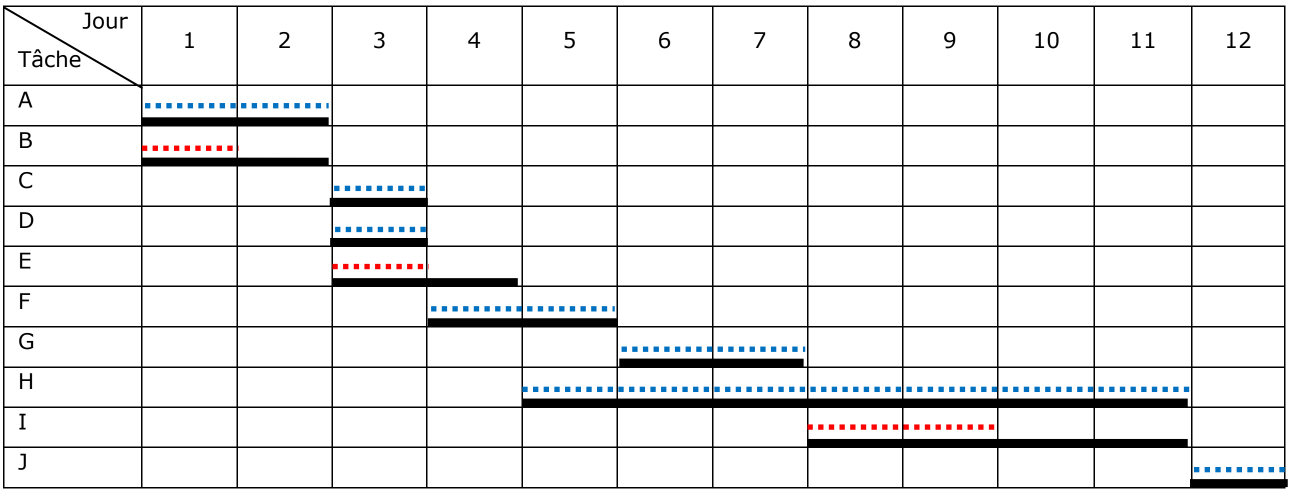
Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Réalisations	-	1	-	-	1	-	-	-	2	-

Faire un commentaire quant à la date de finissage des travaux.

- Appliquer la méthode MPM [sans graphe] afin de déterminer le chemin critique.

RESOLUTION 8

Diagramme de GANTT



Selon le diagramme de GANTT, les travaux finiront dans 12 jours.

Méthode MPM [sans graphe]

Tâche	0	A	0	B	2	C	2	D	2	E	3	F	5	G	4	H	7	I	11	J	12	Fin
Antériorité	0	d:0	0	d:0	0	A:2	0	A:2	0	A:2	2	C:1	2	D:1	2	E:2	5	G:2	4	H:7	11	J:1
							0	B:2					3	F:2					7	I:4		

Ce projet contient deux chemins critiques, à durée identique (12 jours). Le premier est composé des tâches **AEHJ** et le second des tâches **ACFGIJ**.

EXERCICE 9

Le responsable du projet de construction d'une centrale a recueilli et rassemblé dans le tableau ci-après les informations relatives aux temps estimés (en mois) :

Tâches		Antériorité	Temps estimé		
			a	**m**	**b**
Eu	Etude de l'usine	-	10	12	16
Cs	Choix du site	Eu	2	8	36
Cf	Choix du fournisseur	Eu	1	4	5
Cp	Choix du personnel	Eu	2	3	4
Ps	Préparation du site	Cs	8	12	20
Fg	Fabrication du générateur	Cf	15	18	30
Pm	Préparation des manuels	Cf	3	5	8
Ig	Installation du générateur	Ps, Fg	2	4	8
Fo	Formation des générateurs	Pm, Cp	6	9	12
Oa	Obtention des autorisations	Ig, Fo	4	6	14

Travail demandé :

a) Déterminer le chemin critique
b) Déterminer la durée moyenne prévue du projet ainsi que les intervalles de confiance à 90 % et 95 %
c) Quelle est la probabilité pour que le projet soit achevé dans un délai de 4 ans.
d) Quelle est la probabilité pour qu'il prenne plus de 55 mois ?

RESOLUTION 9

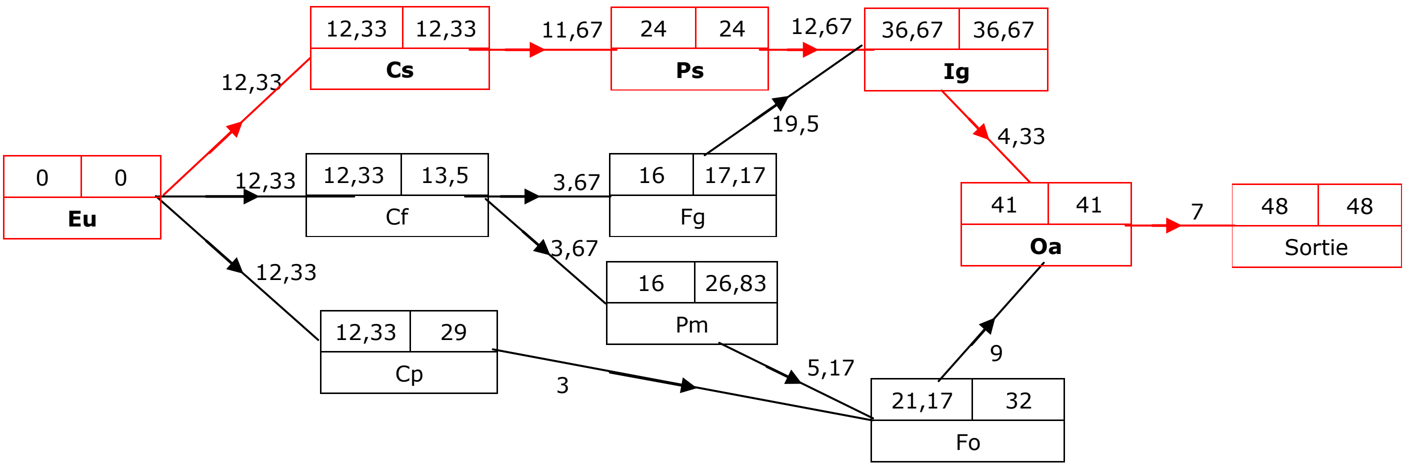
Le projet étant défini en situation d'incertitude, il faut calculer successivement l'espérance mathématique t_e et σ^2 et la variance. On va ensuite partager le graphe à niveaux et appliquer la MPM (c'est notre choix, le lecteur peut, bien entendu, appliquer une autre méthode) pour déterminer le chemin critique et sa durée.

Les niveaux sont :

$C_0 = \{E_u\}$; $C_1 = \{Cs, Cf, Cp\}$; $C_2 = \{Ps, Fg, Pm\}$; $C_3 = \{Ig, Fo\}$; $C_4 = \{Oa\}$

Tâches	Antériorité	Temps estimé			te	σ^2
		a	m	b		
Eu	-	10	12	16	12,33	1
Cs	Eu	2	8	36	11,67	32,11
Cf	Eu	1	4	5	3,67	0,44
Cp	Eu	2	3	4	3	0,11
Ps	Cs	8	12	20	12,67	4
Fg	Cf	15	18	30	19,5	6,25
Pm	Cf	3	5	8	5,17	0,69
Ig	Ps, Fg	2	4	8	4,33	1
Fo	Pm, Cp	6	9	12	9	1
Oa	Ig, Fo	4	6	14	7	2,78

Connaissant les t_e et en appliquant la MPM, on a le réseau ci – après.



a) Le chemin critique est : $E_uC_sP_sI_gO_a$

b) La durée moyenne prévue du projet (T_E) est de 48 mois. Cette valeur est également obtenue en additionnant les espérances mathématiques (te) des tâches critiques.

Pour les calculs des intervalles de confiance dans lesquels peut varier la durée prévue du projet, les calculs préalables ci – après sont nécessaires.

$$\sigma = \sqrt{\Sigma\sigma^2_{cc}} = 1 + 32{,}11 + 4 + 1 + 2{,}78 = \sqrt{40{,}89} = 6{,}4 \text{ mois.}$$

Valeur lue dans la table de la loi de Student à ∞ degrés de liberté		
Seuil / Valeur	5%	10%
	1,96	1,65

Après calcul, les intervalles de confiance à 90 et à 95% sont respectivement : $[48 \mp 1{,}65(6{,}4)]$ et $[48 \mp 1{,}96(6{,}4)]$, soit [37,44 ; 58,56] et [35,46 ; 60,54]. Ainsi, il y a 90% (95%) de chance pour que la durée du projet soit inférieure à 58,56 (60,54) mois et supérieure à 37,44 (35,46) mois.

c) Sachant que Tx = 4 ans = 48 mois, on a :

$$Z = \frac{T_X - T_E}{\sqrt{\Sigma\sigma^2_{cc}}} = \frac{48-48}{6{,}4} = 0{,}00$$

Cette valeur de Z, dans la table de la loi normale, correspond à 0,0000. Ainsi, la probabilité que le projet soit achevé dans un délai de 4 ans est de P(X>Tx) = 0,5 – 0,0000 = 0,5000, soit de 50% de chance.

d) On a : Z= $\frac{55-48}{6{,}4} = 1{,}09$

Cette valeur de Z, dans la table de la loi normale, correspond à 0,3621. Ainsi, la probabilité que le projet prenne plus de 55 mois est de P(X>Tx) = 0,5 – 0,3621 = 0,1379, soit de 14%.

2

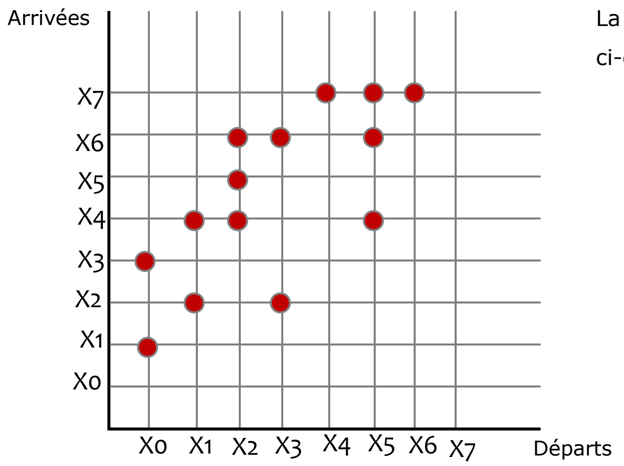
Corriges des interrogations et examens

INTERROGATION N°1 DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

Année académique : 2011 – 2012

Série A

I. Soit un projet dont les précédences sont données à l'aide de la grille suivante :



La durée, en jour, de chaque tâche est reprise ci-dessous :

Tâches	Durée
X_0	4
X_1	8
X_2	5
X_3	2
X_4	12
X_5	9
X_6	7
X_7	10

Trouver, en utilisant la méthode sans tracer le graphe de B. Roy, le chemin critique et la durée minimale du projet. Si ce projet démarre le lundi 27 février 2012, à quelle date peut-on espérer le voir achever ?

RESOLUTION I_A

Pour appliquer la méthode sans tracer le graphe de B. Roy, on a besoin du dictionnaire des précédents. A partir de la grille donnée, ligne par ligne, on dégage le dictionnaire des précédents ci – après.

Tâche	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
P(X)	–	X_0	X_1, X_3	X_0	X_1, X_2, X_5	X_2	X_2, X_3, X_5	X_4, X_5, X_6

L'application de la méthode de Roy conduit au tableau suivant :

Tâche	0	X_0	4	X_1	12	X_2	4	X_3	26	X_4	17	X_5	26	X_6	38	X_7	48	**Fin**
Antériorité	0	d:0	0	X_0:4	4	X_1:8	0	X_0:4	4	X_1:8	12	X_2:5	12	X_2:5	26	X_4:12	38	X_7:10
					4	X_3:2			12	X_2:5			4	X_3:2	17	X_5:9		
									17	X_5:9			17	X_5:9	26	X_6:7		

Ce projet sera donc achevé dans **48** jours, soit exactement le dimanche **15 avril 2012** et le chemin critique est **X_0 X_1 X_2 X_5 X_4 X_7**.

II. Soit le projet ci-après, découpé en 7 opérations. Après l'avoir résolu, un étudiant de L1 Sciences Economiques propose le chemin critique suivant : **EBFG**.

Tâches	Antécédents
A	-
B	A
C	B
D	B, C
E	C
F	E
G	F

<u>Travail demandé</u>

Ce chemin peut-il vraiment être critique ? [Cochez la bonne réponse]

a. Oui, il l'est forcément
b. C'est possible
c. Non, il ne peut pas l'être

RESOLUTION II$_A$

c. Non, il ne peut pas l'être

III. Soit le graphe orienté-valué G = (X, U) avec X= $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

On donne les correspondances suivantes :

$\Gamma(x_0) = \{x_3, x_6\}$
$\Gamma(x_1) = \{x_0, x_2\}$
$\Gamma(x_3) = \{x_5\}$
$\Gamma(x_4) = \{x_2, x_5\}$
$\Gamma(x_5) = \{x_2\}$
$\Gamma(x_6) = \{x_4, x_5\}$
Le sommet x_2 est pendant

- Etablir le graphe partagé à niveaux.
- Connaissant les valeurs du tableau ci-contre, rechercher, en appliquant l'algorithme de Ford, le chemin le plus court allant de x_1 à x_2.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0				3			4
x_1	5		12				
x_3						1	
x_4			6			2	
x_5			1				
x_6					1	2	

RESOLUTION III$_A$

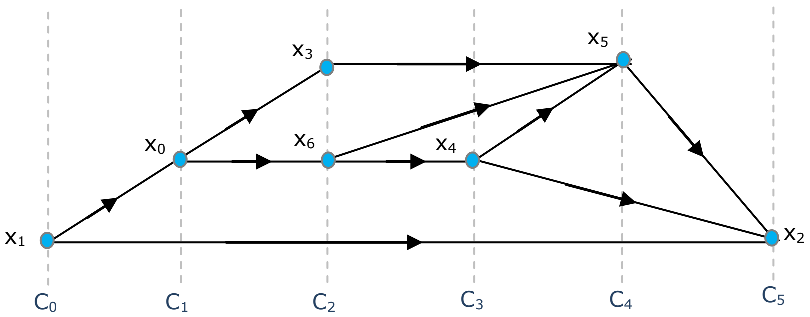
Partage du graphe à niveaux

Les dictionnaires des précédents et des suivants correspondant à ce graphe sont :

X	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
P(X)	x_1	–	x_1, x_4, x_5	x_0	x_6	x_3, x_4, x_6	x_0
S(X)	x_3, x_6	x_0, x_2	–	x_5	x_2, x_5	x_2	x_4, x_5

Les niveaux des sommets sont : $C_0 = \{x_1\}$; $C_1 = \{x_0\}$; $C_2 = \{x_3, x_6\}$; $C_3 = \{x_4\}$; $C_4 = \{x_5\}$; $C_5 = \{x_2\}$.
Ainsi obtient – on le digraphe partagé à niveaux de la figure ci – dessous.

Ass. Cédrick TOMBOLA M.

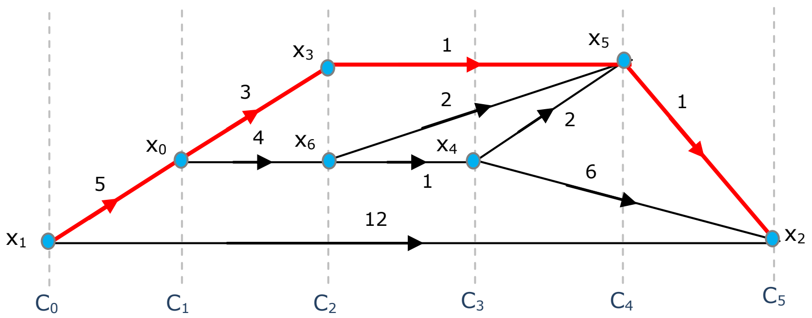


Application de l'algorithme de Ford

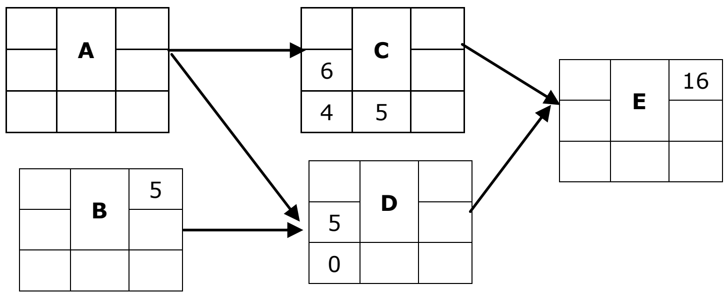
Posons $t_1 = 0$, $t_i = \infty$ $(i=0, 2, 3, 4, 5, 6)$

- De x_1 partent 2 arcs (x_1, x_0) et (x_1, x_2)
  - (x_1, x_0) $e_{01} = t_0 - t_1 = \infty > 5 \rightarrow t_0' = 0+5=5$
  - (x_1, x_2) $e_{21} = t_2 - t_1 = \infty > 12 \rightarrow t_2' = 0+12=12$
- De x_0 partent 2 arcs (x_0, x_3) et (x_0, x_6)
  - (x_0, x_3) $e_{30} = t_3 - t_0' = \infty > 3 \rightarrow t_3' = 5+3=8$
  - (x_0, x_6) $e_{60} = t_6 - t_0' = \infty > 4 \rightarrow t_6' = 5+4=9$
- De x_3 part 1 arc (x_3, x_5)
  - (x_3, x_5) $e_{53} = t_5 - t_3' = \infty > 1 \rightarrow t_5' = 8+1=9$
- De x_6 partent 2 arcs (x_6, x_4) et (x_6, x_5)
  - (x_6, x_4) $e_{46} = t_4 - t_6' = \infty > 1 \rightarrow t_4' = 9+1=10$
  - (x_6, x_5) $e_{56} = t_5' - t_6' = 0 < 2 \rightarrow t_5' = 9$
- De x_4 partent 2 arcs (x_4, x_5) et (x_4, x_2)
  - (x_4, x_5) $e_{54} = t_5' - t_4' = -1 < 2 \rightarrow t_5' = 9$
  - (x_4, x_2) $e_{24} = t_2' - t_4' = 2 < 6 \rightarrow t_2' = 12$
- De x_5 part 1 arc (x_5, x_2)
  - (x_5, x_2) $e_{25} = t_2' - t_5' = 3 > 1 \rightarrow t_2'' = 9+1=10$
- **Vérification** [on va sonder tous les arcs aboutissant directement à x_2]
  - (x_1, x_2) $e_{21} = t_2'' - t_1 = 10 < 12 \rightarrow t_2'' = 10$
  - (x_4, x_2) $e_{24} = t_2'' - t_4' = 0 < 6 \rightarrow t_2'' = 10$
  - (x_5, x_2) $e_{25} = t_2'' - t_5' = 1 = 1 \rightarrow t_2'' = 10$

Le chemin le plus court recherché est $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{(x_1\ x_0\ x_3\ x_5\ x_2)}$ et il mesure $l(\theta) = \sum_{\theta_h \in \theta} l(\theta_h) = 5+3+1+1=10$.



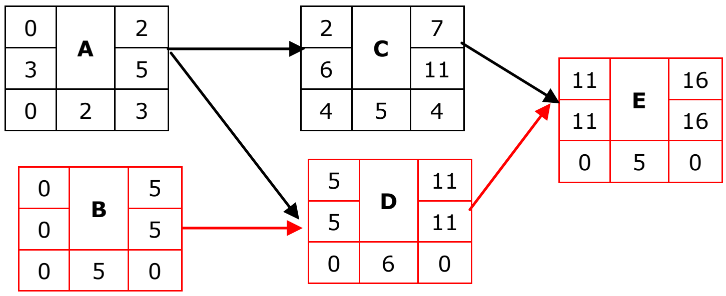
IV. Pour un projet décomposé en 5 tâches élémentaires [A, B, C, D et E] dont les durées sont en jours, on fournit les calculs incomplets ci-dessous :



On demande de compléter ces cases afin de déterminer le chemin critique et sa durée.

RESOLUTION IV$_A$

Il s'agit d'appliquer la méthode CPM. On a ainsi le réseau ci – après.



Le chemin critique est **BDE** et il dure 16 jours.

V. On donne la matrice des débits suivante d'un problème de transport. On demande de proposer un plan de transport à moindre frais [utiliser la règle du coin supérieur gauche et la méthode des marchepieds escaliers]

	G	K	Ka	B	Ma	Qté disponible
Bo	8	27	17	14	9	60
L	8	5	10	2	10	75
T	7	21	18	14	10	80
M	23	9	12	18	25	35
Qté demandée	75	20	15	25	40	

RESOLUTION V$_A$

Avant d'envisager la solution, il convient d'équilibrer le problème, c'est – à – dire, pour le cas d'espèce, de créer **un client fictif (fic)**.

Ensuite, en recourant à la règle supérieure gauche, on a la **première SBA** suivante :

	G	**K**	**K$_a$**	**B**	**M$_a$**	**Fic**	**Offre**
B$_o$	8 **60**	27	17	14	9	0	60
L	8 **15**	5 **20**	10 **15**	2 **25**	10	0	75
T	7	21	18	14	10 **40**	0 **40**	80
M	23	9	12	18	25	0 **35**	35
Dde	75	20	15	25	40	75	250

On constate qu'il y a dégénérescence, c'est – à – dire qu'il n'y a pas exactement (m + n – 1) cases remplies. En corrigeant le problème, il vient :

	G	K	K_a	B	M_a	Fic	Offre
B_o	8 **60**	27	17	14	9	0	60
L	8 **15**	5 **20**	10 **15**	2 **25**	10 **0**	0	75
T	7	21	18	14	10 **40**	0 **40**	80
M	23	9	12	18	25	0 **35**	35
Dde	75	20	15	25	40	75	250

CT=60(8) + 15(8) + 20(5) + 15(10) + 25(2) 0(0) + 40(10) + 40(0) + 35(0) = 1300

Test d'optimalité 1

Connaissant les principes de la méthode des marchepieds escaliers, les indices d'évaluation sont calculés ci – dessous.

$\Delta_{Bo,\ K} = 22$; $\Delta_{Bo,\ Ka} = 7$; $\Delta_{Bo,\ B} = 12$; $\Delta_{Bo,\ Ma} = -1$; $\Delta_{Bo,\ Fic} = 0$; $\Delta_{L,\ Fic} = 0$; $\Delta_{T,\ G} = -1$; $\Delta_{T,\ K} = 16$;

$\Delta_{T,\ Ka} = 8$; $\Delta_{T,\ B} = 12$; $\Delta_{M,\ G} = 15$; $\Delta_{M,\ K} = 4$; $\Delta_{M,\ Ka} = 2$; $\Delta_{M,\ B} = 16$; $\Delta_{M,\ Ma} = 15$.

Puisque $\Delta_{Bo,\ Ma}$ et $\Delta_{T,\ G}$ sont négatifs, la solution proposée n'est pas optimale, il y a donc lieu de trouver une substitution économiquement plus intéressante. Nous choisissons la case TG (le lecteur peut choisir Bo, Ma) pour effectuer les transferts de quantités.

La nouvelle SBA est :

	G	K	K_a	B	M_a	Fic	Offre
B_o	8 **60**	27	17	14	9	0	60
L	8	5 **20**	10 **15**	2 **25**	10 **15**	0	75
T	7 **15**	21	18	14	10 **25**	0 **40**	80
M	23	9	12	18	25	0 **35**	35
Dde	75	20	15	25	40	75	250

Test d'optimalité 2

$\Delta_{Bo,\ K} = 21$; $\Delta_{Bo,\ Ka} = 6$; $\Delta_{Bo,\ B} = 11$; $\Delta_{Bo,\ Ma} = -2$; $\Delta_{Bo,\ Fic} = -1$; $\Delta_{L,\ G} = 1$; $\Delta_{L,\ Fic} = 0$; $\Delta_{T,\ K} = 16$;

$\Delta_{T,\ Ka} = 8$; $\Delta_{T,\ B} = 12$; $\Delta_{M,\ G} = 16$; $\Delta_{M,\ K} = 4$; $\Delta_{M,\ Ka} = 2$; $\Delta_{M,\ B} = 16$; $\Delta_{M,\ Ma} = 15$.

A cette étape non plus la solution n'est pas optimale. L'indice $\Delta_{Bo,\ Ma}$ est le plus négatif, c'est donc à cet endroit qu'on va effectuer le transfert. Ce qui conduit au tableau suivant.

	G	K	K_a	B	M_a	Fic	Offre
B_o	8 **35**	27	17	14	9 **25**	0	60
L	8	5 **20**	10 **15**	2 **25**	10 **15**	0	75
T	7 **40**	21	18	14	10	0 **40**	80
M	23	9	12	18	25	0 **35**	35
Dde	75	20	15	25	40	75	250

Test d'optimalité 3

$\Delta_{Bo,\,K} = 23$; $\Delta_{Bo,\,Ka} = 8$; $\Delta_{Bo,\,B} = 13$; $\Delta_{Bo,\,Fic} = -1$; $\Delta_{L,\,G} = -1$; $\Delta_{L,\,Fic} = -2$; $\Delta_{T,\,K} = 18$;

$\Delta_{T,\,Ka} = 10$; $\Delta_{T,\,B} = 14$; $\Delta_{T,\,Ma} = 2$; $\Delta_{M,\,G} = 16$; $\Delta_{M,\,K} = 6$; $\Delta_{M,\,Ka} = 4$; $\Delta_{M,\,B} = 18$; $\Delta_{M,\,Ma} = 17$.

En effectuant les transferts, partant de la case (L, Fic), il vient :

	G	K	K_a	B	M_a	Fic	Offre
B_o	8 **20**	27	17	14	9 **40**	0	60
L	8	5 **20**	10 **15**	2 **25**	10	0 **15**	75
T	7 **55**	21	18	14	10	0 **25**	80
M	23	9	12	18	25	0 **35**	35
Dde	75	20	15	25	40	75	250

Test d'optimalité 4

$\Delta_{Bo,\,K} = 21$; $\Delta_{Bo,\,Ka} = 1$; $\Delta_{Bo,\,B} = 11$; $\Delta_{Bo,\,Fic} = -1$; $\Delta_{L,\,G} = 1$; $\Delta_{L,\,Ma} = 2$; $\Delta_{T,\,K} = 16$;

$\Delta_{T,\,Ka} = 8$; $\Delta_{T,\,B} = 12$; $\Delta_{T,\,Ma} = 2$; $\Delta_{M,\,G} = 16$; $\Delta_{M,\,K} = 4$; $\Delta_{M,\,Ka} = 2$; $\Delta_{M,\,B} = 16$; $\Delta_{M,\,Ma} = 17$.

L'indice $\Delta_{Bo,\,Fic}$, étant négatif, nous oblige à cherche une autre substitution économiquement plus intéressante. Un calcul simple conduit au tableau qui suit.

	G	K	K_a	B	M_a	Fic	Offre
B_o	8	27	17	14	9 / **40**	0 / **20**	60
L	8	5 / **20**	10 / **15**	2 / **25**	10	0 / **15**	75
T	7 / **75**	21	18	14	10	0 / **5**	80
M	23	9	12	18	25	0 / **35**	35
Dde	75	20	15	25	40	75	250

CT = 40(9) + 20(0) + 20(5) + 15(10) + 25(2) + 15(0) + 75(7) + 5(0) + 35(0)= 1185

Test d'optimalité 5

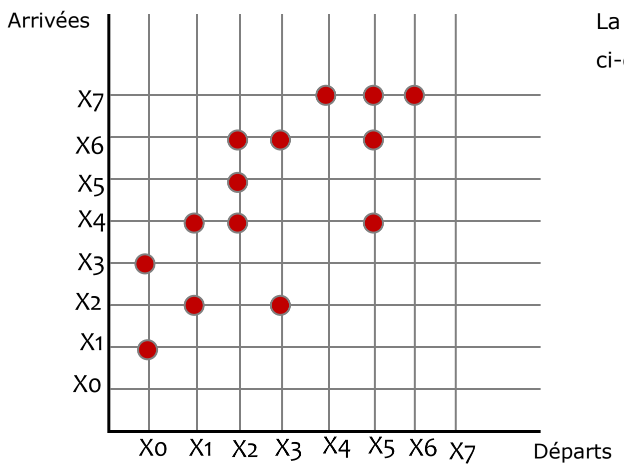
$\Delta_{Bo,\,G} = 1$; $\Delta_{Bo,\,K} = 22$; $\Delta_{Bo,\,Ka} = 7$; $\Delta_{Bo,\,B} = 12$; $\Delta_{L,\,G} = 1$; $\Delta_{L,\,Ma} = 1$; $\Delta_{T,\,K} = 16$;

$\Delta_{T,\,Ka} = 8$; $\Delta_{T,\,B} = 12$; $\Delta_{T,\,Ma} = 1$; $\Delta_{M,\,G} = 16$; $\Delta_{M,\,K} = 4$; $\Delta_{M,\,Ka} = 2$; $\Delta_{M,\,B} = 16$; $\Delta_{M,\,Ma} = 16$.

Tous les Δ_{ij} calculés étant non négatifs, la solution obtenue est optimale.

Série B

I. Soit un projet dont les précédences sont données à l'aide de la grille suivante :



La durée, en jour, de chaque tâche est reprise ci-dessous :

Tâches	Durée
X_0	4
X_1	8
X_2	5
X_3	2
X_4	12
X_5	**4**
X_6	7
X_7	10

Trouver, en utilisant la méthode sans tracer le graphe de B. Roy, le chemin critique et la durée minimale du projet. Si ce projet démarre le lundi 27 février 2012, à quelle date peut-on espérer le voir achever ?

RESOLUTION I_B

Pour appliquer la méthode sans tracer le graphe de B. Roy, on a besoin du dictionnaire des précédents. A partir de la grille donnée, ligne par ligne, on dégage le dictionnaire des précédents ci – après.

Tâche	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
P(X)	–	X_0	X_1, X_3	X_0	X_1, X_2, X_5	X_2	X_2, X_3, X_5	X_4, X_5, X_6

L'application de la méthode de Roy conduit au tableau suivant :

Tâche	0	X_0	4	X_1	12	X_2	4	X_3	21	X_4	17	X_5	21	X_6	33	X_7	43	**Fin**
Antériorité	0	d:0	0	**X_0**:4	4	**X_1**:8	0	X_0:4	4	X_1:8	12	**X_2**:5	12	X_2:5	21	**X_4**:12	33	**X_7**:10
					4	X_3:2			12	X_2:5			4	X_3:2	17	X_5:4		
									17	**X_5**:4			17	X_5:4	21	X_6:7		

Ce projet sera donc achevé dans **43** jours, soit exactement le mardi **10 avril 2012** et le chemin critique est **X_0 X_1 X_2 X_5 X_4 X_7**.

II. Soit le projet ci-après, découpé en 7 opérations. Après l'avoir résolu, un étudiant de L1 Sciences Economiques propose le chemin critique suivant : **EBFG**.

Tâches	Antécédents
A	-
B	A
C	B
D	B, C
E	-
F	E
G	F

Travail demandé

Ce chemin peut-il vraiment être critique ? [Cochez la bonne réponse]

a. Oui, il l'est forcément
b. C'est possible
c. Non, il ne peut pas l'être

RESOLUTION II$_B$

b. C'est possible

III. Soit le graphe orienté-valué G = (X, U) avec X= {x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6}.

On donne les correspondances suivantes :

$\Gamma(x_0)$ = {x_3, x_6}
$\Gamma(x_1)$ = {x_0, x_2}
$\Gamma(x_3)$ = {x_5}
$\Gamma(x_4)$ = {x_2, x_5}
$\Gamma(x_5)$ = {x_2}
$\Gamma(x_6)$ = {x_4, x_5}
Le sommet x_2 est pendant

- Etablir le graphe partagé à niveaux.
- Connaissant les valeurs du tableau ci-contre, rechercher, en appliquant l'algorithme de Ford, le chemin le plus court allant de x_1 à x_2.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0				3			4
x_1	5		12				
x_3						**5**	
x_4			6			2	
x_5			**5**				
x_6					1	2	

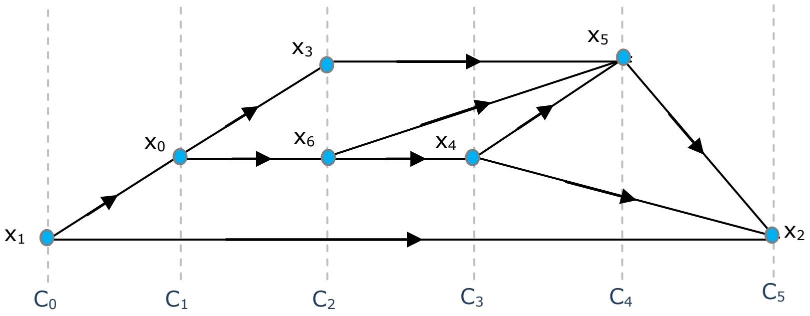
RESOLUTION III_B

Partage du graphe à niveaux

Les dictionnaires des précédents et des suivants correspondant à ce graphe sont :

X	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
P(X)	x_1	–	x_1, x_4, x_5	x_0	x_6	x_3, x_4, x_6	x_0
S(X)	x_3, x_6	x_0, x_2	–	x_5	x_2, x_5	x_2	x_4, x_5

Les niveaux des sommets sont : $C_0 = \{x_1\}$; $C_1 = \{x_0\}$; $C_2 = \{x_3, x_6\}$; $C_3 = \{x_4\}$; $C_4 = \{x_5\}$; $C_5 = \{x_2\}$.
Ainsi obtient – on le digraphe partagé à niveaux de la figure ci – dessous.

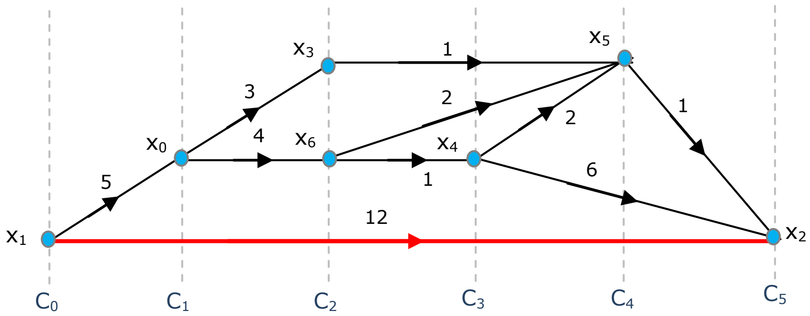


Application de l'algorithme de Ford

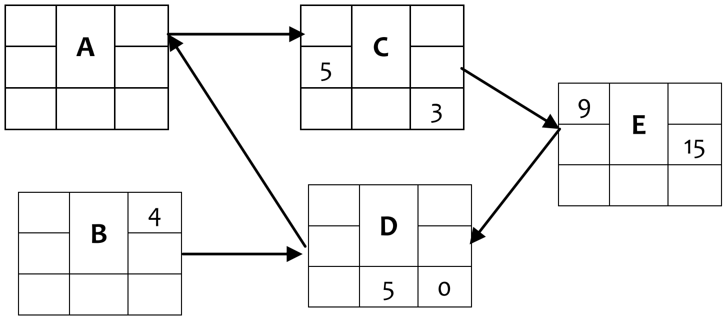
Posons $t_1 = 0$, $t_i = \infty$ (i=0, 2, 3, 4, 5, 6)

- De x_1 partent 2 arcs (x_1, x_0) et (x_1, x_2)
  - (x_1, x_0) $e_{01} = t_0 - t_1 = \infty > 5$ → $t_0' = 0+5 = 5$
  - (x_1, x_2) $e_{21} = t_2 - t_1 = \infty > 12$ → $t_2' = 0+12 = 12$
- De x_0 partent 2 arcs (x_0, x_3) et (x_0, x_6)
  - (x_0, x_3) $e_{30} = t_3 - t_0' = \infty > 3$ → $t_3' = 5+3 = 8$
  - (x_0, x_6) $e_{60} = t_6 - t_0' = \infty > 4$ → $t_6' = 5+4 = 9$
- De x_3 part 1 arc (x_3, x_5)
  - (x_3, x_5) $e_{53} = t_5 - t_3' = \infty > 5$ → $t_5' = 8+5 = 13$
- De x_6 partent 2 arcs (x_6, x_4) et (x_6, x_5)
  - (x_6, x_4) $e_{46} = t_4 - t_6' = \infty > 1$ → $t_4' = 9+1 = 10$
  - (x_6, x_5) $e_{56} = t_5' - t_6' = 4 > 2$ → $t_5'' = 9+2 = 11$
- De x_4 partent 2 arcs (x_4, x_5) et (x_4, x_2)
  - (x_4, x_5) $e_{54} = t_5'' - t_4' = 1 < 2$ → $t_5'' = 11$
  - (x_4, x_2) $e_{24} = t_2' - t_4' = 2 < 6$ → $t_2' = 12$
- De x_5 part 1 arc (x_5, x_2)
  - (x_5, x_2) $e_{25} = t_2' - t_5'' = 1 = 1$ → $t_2' = 12$
- **Vérification** [on va sonder tous les arcs aboutissant directement à x_2]
  - (x_1, x_2) $e_{21} = t_2' - t_1 = 12 = 12$ → $t_2' = 12$
  - (x_4, x_2) $e_{24} = t_2' - t_4' = 2 < 6$ → $t_2' = 12$
  - (x_5, x_2) $e_{25} = t_2' - t_5'' = 1 < 5$ → $t_2' = 12$

Le chemin le plus court recherché est **θ = (x_1x_2)** et il mesure $l(\theta) = \sum_{\theta_h \in \theta} l(\theta_h) = 12$.



IV. Pour un projet décomposé en 5 tâches élémentaires [A, B, C, D et E] dont les durées sont en jours, on fournit les calculs incomplets ci-dessous :



On demande de compléter ces cases afin de déterminer le chemin critique et sa durée.

RESOLUTION IV$_B$

Le digraphe représentant ce projet, contient un circuit. Or, nous savons que c'est l'absence de circuit qui est garant de la faisabilité du projet. Autrement, c'est l'absence de circuit qui rend possible l'application de la méthode CPM. En conséquence, il n'est pas possible de compléter ces cases ni de déterminer le chemin critique.

V. On donne la matrice des débits suivante d'un problème de transport. On demande de proposer un plan de transport à moindre frais [utiliser la règle du coin supérieur gauche et la méthode des marchepieds escaliers]

	G	K	Ka	B	Ma	Qté disponible
Bo	8	27	17	14	9	60
L	8	5	10	2	10	75
T	7	21	18	14	10	80
M	23	9	12	18	25	35
Qté demandée	75	20	15	25	40	

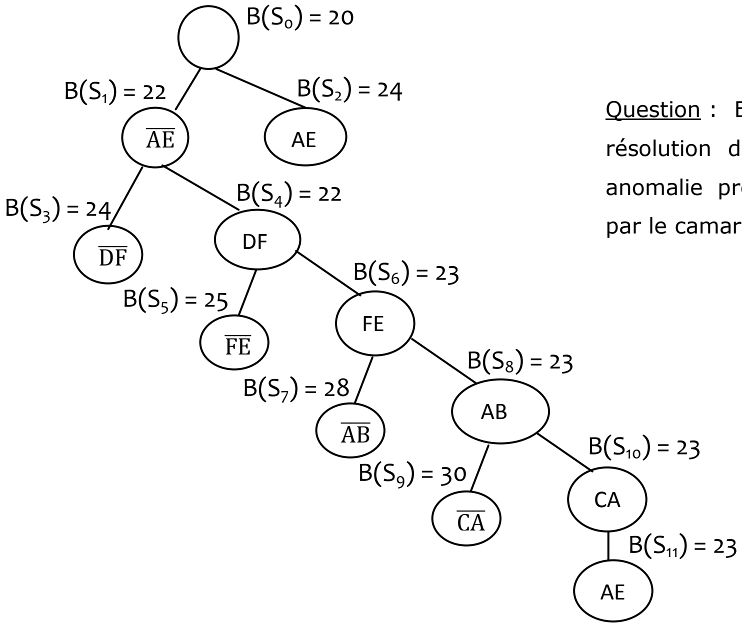
RESOLUTION V$_B$

Voir la résolution V$_A$.

INTERROGATION N°2 DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

Année académique : 2011 – 2012

I. L'étudiant Delphes KUMBA, très brillant en RO, a été consulté par un homme d'affaires désirant effectuer un voyage d'inspection de ses affaires situées dans les villes A, B, C, D, E et F. Après un travail de longues heures, KUMBA lui propose l'itinéraire donné par l'arborescence ci-après.



<u>Question</u> : En vous basant sur les principes de résolution d'un PVC vus en classe, dites quelle anomalie présente la solution ci-contre proposée par le camarade KUMBA.

RESOLUTION I

Absence d'un **<u>itinéraire cyclique</u>** (ou **<u>d'un circuit hamiltonien</u>**) alors que la résolution d'un PVC consiste justement à en proposer un.

II. Répondre par Vrai (V) ou Faux (F) aux propositions suivantes :

- Dans un PVC, il faut toujours rendre la matrice carrée avant d'en envisager la solution ....
- Le principe de bi-univocité facilite la compréhension des problèmes d'affectation ....
- Les PVC sont résolus en appliquant l'algorithme « Divide ut Regnes » ....
- Tous les PVC sont des problèmes ouverts parce que conduisant à une explosion combinatoire.........
- La paramétrisation concerne les problèmes de post-optimisation...

RESOLUTION II

- Faux
- Vrai
- Faux
- Faux
- Vrai

III. Soit la matrice des coûts suivante :

	1	2	3	4
F	24	10	21	11
M	14	22	10	15
O	15	17	20	19
P	11	19	14	13

En appliquant la méthode hongroise, trouver l'affectation minimale.

RESOLUTION III

Etape 1 : Réduction de la matrice

	1	2	3	4	CR
F	24	10	21	11	10
M	14	22	10	15	10
O	15	17	20	19	15
P	11	19	14	13	11

➡

	1	2	3	4
F	14	0	11	1
M	4	12	0	5
O	0	2	5	4
P	0	8	3	2
CR				1

➡

	1	2	3	4
F	14	0	11	0
M	4	12	0	4
O	0	2	5	3
P	0	8	3	1

Etape 2 : Détermination de la solution optimale

	1	2	3	4
F	14	$\boxed{0}$	11	$\cancel{0}$
M	4	12	$\boxed{0}$	4
O	$\boxed{0}$	2	5	3
P	$\cancel{0}$	8	3	1

Le nombre de zéros encadrés n'étant pas égal au format de la matrice, il convient d'améliorer la solution.

Etape 3 : Amélioration de la solution

	1	2	3	4
F	14	$\boxed{0}$	11	$\cancel{0}$
M	4	12	$\boxed{0}$	4
O	$\boxed{0}$	2	5	3
P	$\cancel{0}$	8	3	1

S/M $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ CR $\to 1$

En soustrayant cette valeur (1) de toutes les cases non couvertes (ou traversées) par un trait, et en l'ajoutant aux cases situées à l'intersection de deux traits. On obtient ainsi la solution optimale.

Solution optimale

	1	2	3	4
F	15	$\boxed{0}$	11	~~0~~
M	5	12	$\boxed{0}$	4
O	$\boxed{0}$	1	4	2
P	~~0~~	7	2	$\boxed{0}$

Matrice booléenne associée

	1	2	3	4
F	0	1	0	0
M	0	0	1	0
O	1	0	0	0
P	0	0	0	1

Affectation		Coût
F	1	15
M	2	10
O	3	10
P	4	13
		48

Vérification

ΣCR=10+10+15+11+1+1=48

IV. Le professeur Paul Anthony Samuelson possède quatre bibliothèques situées dans quatre villes différentes A, B, C et D. Le 12 décembre 2011, il compte visiter une et une seule fois chaque bibliothèque. Il dispose, pour ce faire, de la matrice ci-dessous donnant la durée en jours du voyage entre deux villes [y compris le temps de la visite].

	A	B	C	D
A	∞	4	10	11
B	4	∞	8	5
C	10	8	∞	9
D	11	5	9	∞

a) Combien y a - t-il d'itinéraires cycliques ?
b) Quel itinaire devra-t-il prendre pour regagner rapidement son domicile qui se trouve dans la ville B ?
c) A quelle date peut – il espérer rentrer chez lui ?

RESOLUTION IV

a) Il y a 0,5(3!), soit 3 itinéraires cycliques.

b)

	A	B	C	D	CR
A	∞	4	10	11	4
B	4	∞	8	5	4
C	10	8	∞	9	8
D	11	5	9	∞	5

➡

	A	B	C	D
A	∞	0	6	7
B	0	∞	4	1
C	2	0	∞	1
D	6	0	4	∞
CR			4	1

	A	B	C	D
A	∞	0 $\theta_{max} = 2$	2	6
B	0 $\theta = 2$	∞	0 $\theta = 0$	0 $\theta = 0$
C	2	0 $\theta = 0$	∞	0 $\theta = 0$
D	6	0 $\theta = 0$	0 $\theta = 0$	∞

Choix du couple **AB**

On constate qu'il y a deux θ_{max}, on est donc libre de choisir un de deux couples.

Après suppression de la ligne A et de la colonne B, il vient :

	A	C	D
B	∞	0	0
C	2	∞	0
D	6	0	∞
CR	2		

	A	C	D
B	∞	0 $\theta = 0$	0 $\theta = 0$
C	0 $\theta_{max} = 4$	∞	0 $\theta = 0$
D	4	0 $\theta = 4$	∞

Choix du couple **CA**

Ici également il y a deux θ_{max}, nous choisissons le couple CA pour garantir un itinéraire cyclique, mais n'empêche aussi de choisir le DC, ça reviendrait au même à la fin.

	C	D
B	∞	0 $\theta = 0$
D	0 $\theta = 0$	∞

Choix successifs des couples BD et DC.

L'itinéraire que devra prendre le professeur Paul Anthony Samuelson afin de regagner rapidement son domicile est : BDCAB dont la durée est de 28 jours.

$B(S_0) = \Sigma CR = 26$

$B(S_1) = B(S_0) + \theta_{max} = 26 + 2 = 28$

$B(S_2) = B(S_0) + R(S_2) = 28$ où $R(S_2) = 2$

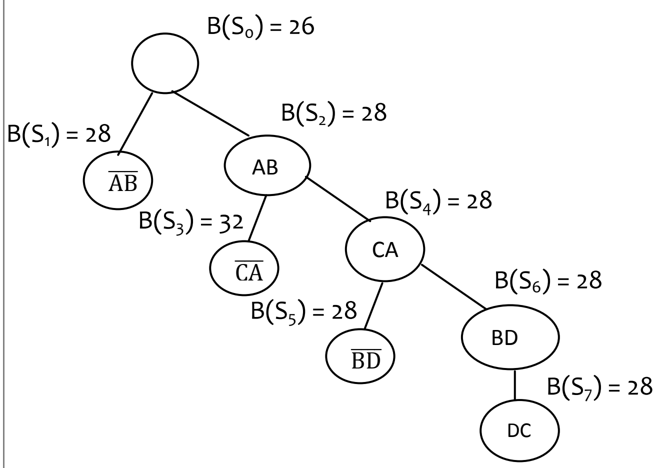
$B(S_3) = B(S_2) + \theta_{max} = 28 + 4 = 32$

$B(S_4) = B(S_2) + R(S_4) = 28$ où $R(S_4) = 0$

$B(S_5) = B(S_4) + \theta_{max} = 28$

$B(S_6) = B(S_4) + R(S_6) = 28$ où $R(S_4) = 0$

$B(S_7) = B(S_6) + \theta_{max} = 28$



c) Ainsi, il peut espérer rentrer chez lui le 9 janvier 2012.

Série A

I. Un éditeur veut passer commande d'un ouvrage technique à un écrivain scientifique. Les opérations à accomplir – symbolisées par des lettres – et leurs durées en jours sont indiquées dans le tableau ci-après.

		DEPART									
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**Durée**
ARRIVEE	**A**										5
	B	1									7
	C										5
	D										13
	E		1	1	1						11
	F		1	1							25
	G	1									8
	H					1					11
	I						1		1		4

A. En appliquant la méthode sans digraphe de Bernard Roy, dire dans combien de temps peut être achevé ce projet de rédaction qui a commencé le 19 septembre 2012.

B. Entre temps, Mlle Marie CURIE vous propose, dans le tableau synthétique ci-dessous, les calculs des marges concernant ce projet qu'elle a effectués.

Tâche	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Marge Totale	0	0	2	5	3	0	1	0	0
Marge Libre	0	0	1	2	2	0	2	0	0
Marge Certaine	0	0	3	2	4	1	1	0	0

Sans tenir compte de votre solution précédente, donnez les raisons qui vous poussent à avancer que ces calculs sont faux.

RESOLUTION I_A

Ligne par ligne du tableau donné, on dégage les dictionnaires des précédents et des suivants ci - après :

X	A	B	C	D	E	F	G	H	I
P(X)	**–**	**A**	**–**	**–**	**B, C, D**	**B, C**	**A**	**E**	**F, H**
S(X)	**B, G**	**E, F**	**E, F**	**E**	**H**	**I**	**–**	**I**	**–**

A. L'application de la méthode de Roy conduit au tableau suivant :

Tâche	0	**A**	5	**B**	0	**C**	0	**D**	13	**E**	12	**F**	5	**G**	24	**H**	37	**I**	41	**Fin**
Antériorité	0	d:0	0	**A**:5	0	d:0	0	d:0	5	B:7	5	**B**:7	0	A:5	13	E:11	12	**F**:25	5	G:8
									0	C:5	0	C:5					24	H:11	37	**I**:4
									0	D :13										

Ce projet sera donc achevé dans **41** jours, soit exactement le **30/octobre/2012 et le chemin critique est ABFI**.

B. Ces calculs sont faux parce que la condition **MC ≤ ML ≤ MT** n'est pas respectée sur les tâches C, E, F et G.

II. Soit un problème de transport avec exactement *3* lignes *et 4* colonnes*.* En le résolvant, un étudiant de L1 ECODEV arrive à la solution suivante :

	C_1	C_2	C_3	C_4
E_1	9 / **15**	4 / **20**	6	6 / **5**
E_2	10	5	7 / **10**	8 / **50**
E_3	4 / **15**	7	3 / **45**	5

A. Sans avoir à calculer, vous êtes convaincu qu'il y a erreur. Dites de quoi il s'agit.

B. Considérant l'énoncé de la question ci-haut, répondre par **V**rai ou **F**aux aux affirmations suivantes. En principe, ce problème contient exactement :

- **7** variables
- **12** relations
- **3** et **4** équations, respectivement en ligne et en colonne
- **6** variables de base et **7** variables nulles
- **6** variables hors base et **6** variables positives

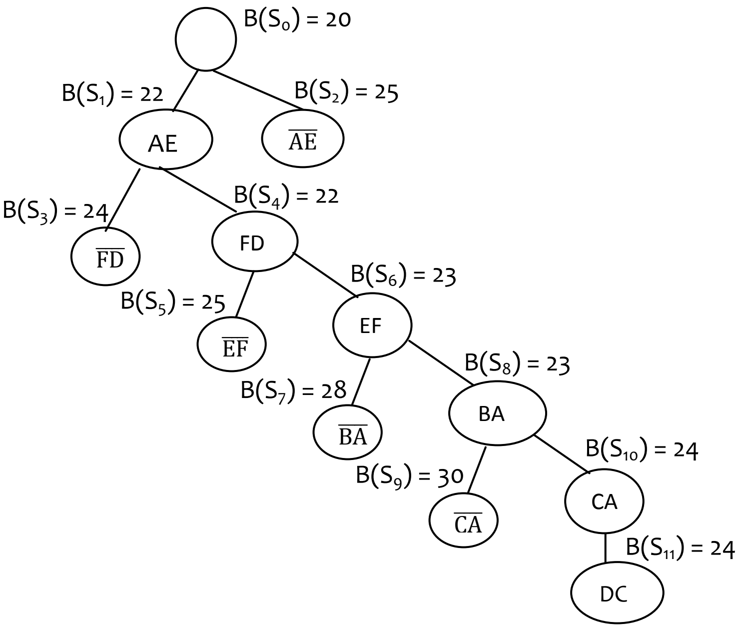
RESOLUTION II_A

A. Il y a 7 cases remplies au lieu de m + n – 1, soit 6.

B.

- Faux
- Faux
- Vrai
- Faux
- Vrai

III. Ci-après la résolution, par l'algorithme BB, d'un PVC. Dites quelle anomalie contient-elle.



RESOLUTION III$_A$

Absence d'un **itinéraire cyclique** (ou **d'un chemin hamiltonien**) alors que la résolution d'un PVC consiste justement à en proposer un.

Série B

I. Un éditeur veut passer commande d'un ouvrage technique à un écrivain scientifique. Les opérations à accomplir – symbolisées par des lettres – et leurs durées en jours sont indiquées dans le tableau ci-après.

		DEPART									
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**Durée**
ARRIVEE	**A**										5
	B	1									7
	C										5
	D										13
	E		1	1	1						15
	F		1	1							25
	G	1									8
	H					1					11
	I						1		1		4

A. En appliquant la méthode sans digraphe de Bernard Roy, dire dans combien de temps peut être achevé ce projet de rédaction qui a commencé le 19 septembre 2012.

B. Entre temps, Mlle Marie CURIE vous propose, dans le tableau synthétique ci-dessous, les calculs des marges concernant ce projet qu'elle a effectués.

Tâche	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Marge Totale	0	0	2	5	3	0	1	0	0
Marge Libre	0	1	1	2	2	0	2	0	0
Marge Certaine	0	0	1	2	4	1	1	0	0

Sans tenir compte de votre solution précédente, donnez les raisons qui vous poussent à avancer que ces calculs sont faux.

RESOLUTION I$_B$

Ligne par ligne du tableau donné, on dégage les dictionnaires des précédents et des suivants ci - après :

X	A	B	C	D	E	F	G	H	I
P(X)	**–**	**A**	**–**	**–**	**B, C, D**	**B, C**	**A**	**E**	**F, H**
S(X)	**B, G**	**E, F**	**E, F**	**E**	**H**	**I**	**–**	**I**	**–**

A. L'application de la méthode de Roy conduit au tableau suivant :

Tâche	0	**A**	5	**B**	0	**C**	0	**D**	13	**E**	12	**F**	5	**G**	28	**H**	39	**I**	43	**Fin**
Antériorité	0	d:0	0	A:5	0	d:0	0	d:0	5	B:7	5	B:7	0	A:5	13	E:15	12	F:25	5	G:8
									0	C:5	0	C:5					28	H:11	39	I:4
									0	D :13										

Ce projet sera achevé dans **43** jours, soit exactement le 01/novembre/2012 et **le chemin critique est DEHI**.

B. Ces calculs sont faux parce que la condition **MC ≤ ML ≤ MT** n'est pas respectée sur les tâches B, E, F et G.

II. Soit un problème de transport avec exactement *3* lignes *et 4* colonnes*.* En le résolvant, un étudiant de L1 ECODEV arrive à la solution suivante :

	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**
E_1	9 **15**	4 **20**	6	6 **5**
E_2	10	5	7 **10**	8 **50**
E_3	4 **15**	7	3 **45**	5

A. Sans avoir à calculer, vous êtes convaincu qu'il y a erreur. Dites de quoi il s'agit.

B. Considérant l'énoncé de la question ci-haut, répondre par **V**rai ou **F**aux aux affirmations suivantes.
En principe, ce problème contient exactement :

- **7** variables
- **7** relations
- **4** et **3** équations, respectivement en ligne et en colonne
- **6** variables de base et **7** variables nulles
- **6** variables hors base et **6** variables positives

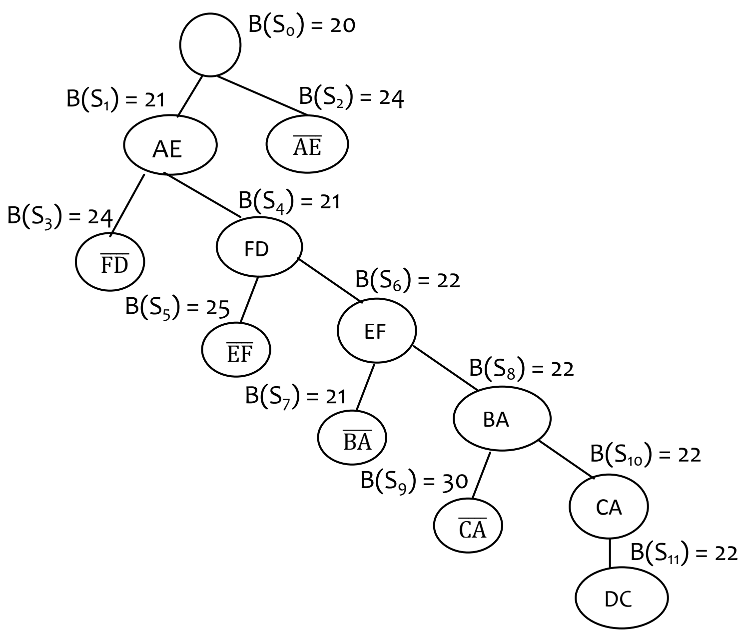
RESOLUTION II$_B$

A. Il y a 7 cases remplies au lieu de m + n – 1, soit 6.

B.

- Faux
- Vrai
- Faux
- Faux
- Vrai

III. Ci-après la résolution, par l'algorithme BB, d'un PVC. Dites quelle anomalie contient-elle.



RESOLUTION III$_B$

- Absence d'un **itinéraire cyclique** (ou **d'un chemin hamiltonien**) alors que la résolution d'un PVC consiste justement à en proposer un.

- Problème au niveau de B(S8). L'arborescence devrait descendre du côté de B(S7) qui présente une valeur inférieure.

INTERROGATION DE RECHERCHE OPERATIONNELLE N°1

Année académique : 2012 – 2013

I. Un étudiant de L2 sciences économiques a pu planifier un avant-projet de rédaction de son mémoire, décomposé en sept tâches (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7) à accomplir avant de rencontrer son directeur pour discussion et orientation éventuelle. Le digraphe représentant cet avant-projet est donné par la matrice d'incidence suivante :

$$I(\vec{G}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A. En considérant les valeurs du tableau ci – après, proposer (méthode sans digraphe de B. Roy) le chemin critique et sa durée. Si cet étudiant démarre son avant-projet le samedi 02 février 2013, à partir de quelle date peut-il espérer rencontrer son directeur.

Tâche	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Durée en jours	5	3	4	1	2	5	4

B. Montrer à présent, en utilisant l'algorithme de Ford, que le chemin critique proposé en (A) n'est rien d'autre que le chemin de valeur maximale allant du début vers la fin. (Pour rappel, il faut commencer par partager le graphe à niveaux).

RESOLUTION I

A partir de la matrice d'incidence donnée, on dégage aisément le dictionnaire des précédents ci – dessous.

Tâche	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Précédences	–	T_1	T_1	T_2, T_3	T_4	T_4, T_5	T_5

A. L'application de la méthode de Roy conduit au tableau suivant :

Tâche	0	T_1	5	T_2	5	T_3	9	T_4	10	T_5	12	T_6	12	T_7	17	Fin
Antériorité	0	d:0	0	T_1:5	0	**T_1**:5	5	T_2:3	9	**T_4**:1	9	T_4:1	10	T_5:2	12	**T_6**:5
							5	**T_3**:4			10	**T_5**:2			12	T_7:4

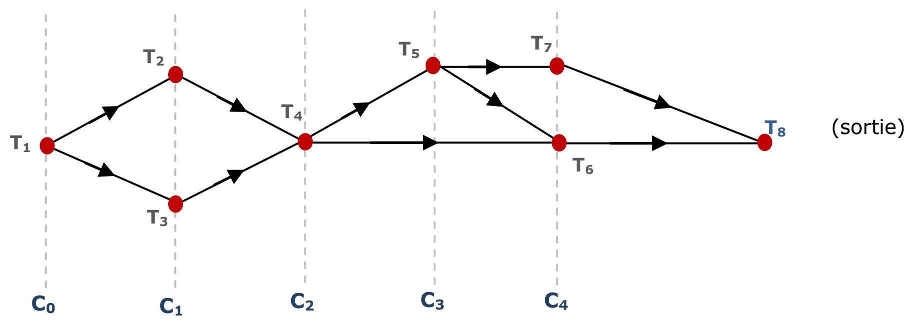
Ce projet sera achevé dans **17** jours et **le chemin critique est T_1 T_3 T_4 T_5 T_6**. Si cet étudiant démarre son avant-projet le samedi 02 février 2013, il peut espérer rencontrer son directeur le 19 février 2013.

B. Pour répondre à cette question, commençons par partager le digraphe à niveaux et fermons le réseau en ajoutant une tâche (T_8) non élémentaire.

Définition des niveaux :

$C_0 = \{T_1\}$; $C_1 = \{T_2, T_3\}$; $C_2 = \{T_4\}$; $C_3 = \{T_5\}$; $C_4 = \{T_6, T_7\}$

Digraphe potentiel – tâche correspondant

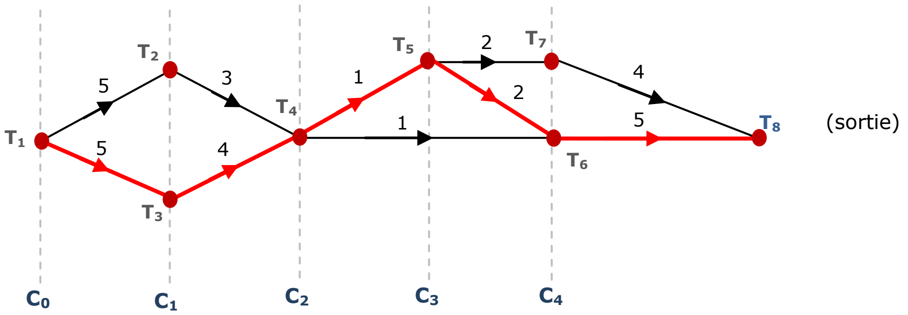


Application de l'algorithme de Ford

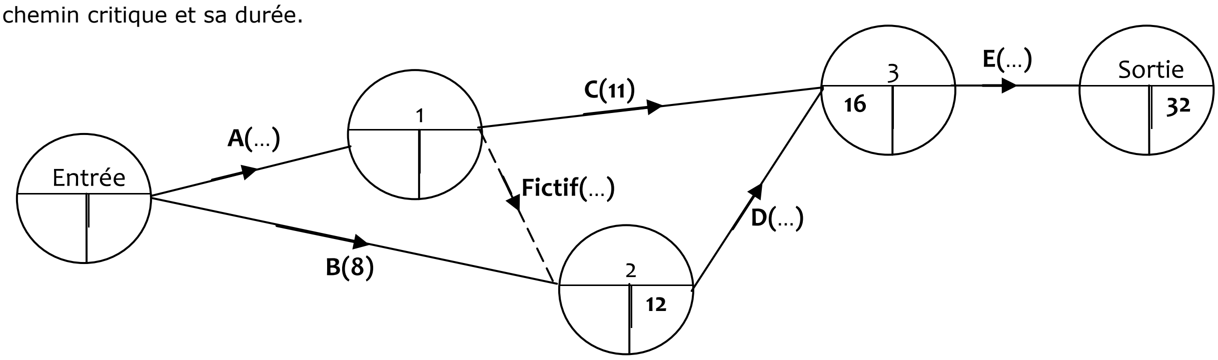
Posons t_i=0 (i=1 à 8)

- De T_1 partent 2 arcs (T_1, T_2) et (T_1, T_3)
  - (T_1, T_2) $e_{21} = t_2 - t_1 = 0<5 \rightarrow t_2' = 0+5 = 5$
  - (T_1, T_3) $e_{31} = t_3 - t_1 = 0<5 \rightarrow t_3' = 0+5 = 5$
- De T_2 part 1 arc (T_2, T_4)
  - (T_2, T_4) $e_{42} = t_4 - t_2' = -5<3 \rightarrow t_4' = 5+3 = 8$
- De T_3 part 1 arc (T_3, T_4)
  - (T_3, T_4) $e_{43} = t_4' - t_3' = 3<4 \rightarrow t_4'' = 5+4 = 9$
- De T_4 partent 2 arcs (T_4, T_5) et (T_4, T_6)
  - (T_4, T_5) $e_{54} = t_5 - t_4'' = -9<1 \rightarrow t_5' = 9+1 = 10$
  - (T_4, T_6) $e_{64} = t_6 - t_4'' = -9<1 \rightarrow t_6' = 9+1 = 10$
- De T_5 partent 2 arcs (T_5, T_6) et (T_5, T_7)
  - (T_5, T_6) $e_{65} = t_6' - t_5' = 0<2 \rightarrow t_6'' = 10+2 = 12$
  - (T_5, T_7) $e_{75} = t_7 - t_5' = -10<2 \rightarrow t_7' = 10+2 = 12$
- De T_6 part 1 arc (T_6, T_8)
  - (T_6, T_8) $e_{86} = t_8 - t_6'' = -12<5 \rightarrow t_8' = 12+5 = 17$
- De T_7 part 1 arc (T_7, T_8)
  - (T_7, T_8) $e_{87} = t_8' - t_7' = 5>4 \rightarrow t_8' = 17$
- **Vérification** [on va sonder tous les arcs aboutissant directement à T_8]
  - (T_6, T_8) $e_{86} = t_8' - t_6'' = 5 = 5 \rightarrow t_8' = 17$
  - (T_7, T_8) $e_{87} = t_8' - t_7' = 5>4 \rightarrow t_8' = 17$

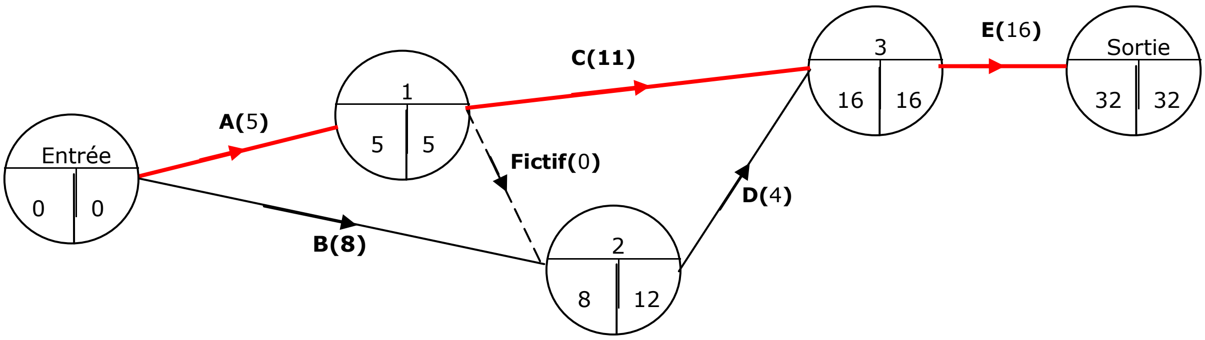
Le chemin le plus long recherché est **θ = (T_1 T_3 T_4 T_5 T_6)** et il mesure l(θ) = $\sum_{\theta_h \in \theta} l(\theta_h)$=17. On a ainsi monté que le chemin critique trouvé en (A) n'est autre que le chemin le plus long dans le réseau associé au projet.



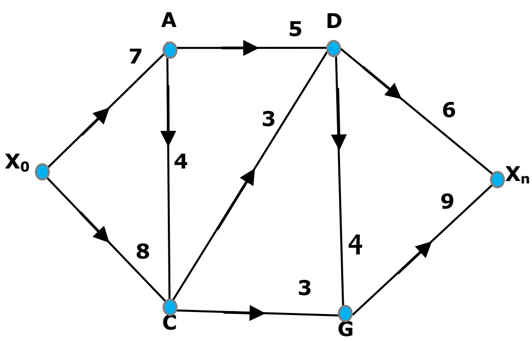
II. Soit le réseau PERT ci-dessous. Il est demandé de compléter les pointillés et les cases vides et d'indiquer le chemin critique et sa durée.



RESOLUTION II

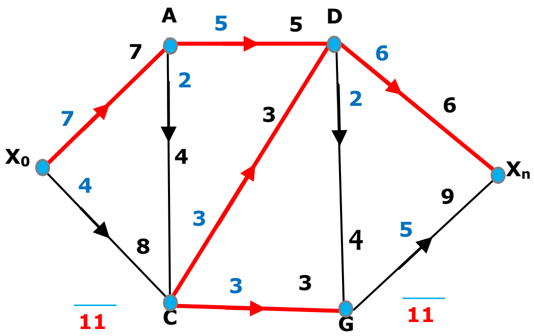


III. Soit le réseau de transport ci-dessous. Déterminer le flot maximal qu'il est possible d'acheminer depuis l'entrée x_0 jusqu'à la sortie x_n.



RESOLUTION III

Etape 1 : Flot au jugé



Etape 2 : Flot complet

Le flot trouvé est complet et il est de 11.

Etape 3 : Flot maximal

Le flot trouvé est également maximal. Donc, le flot qu'il est possible d'écouler dans ce réseau, depuis l'entrée jusqu'à la sortie est de 11.

IV. Une société d'import-export dispose dans les ports de Matadi, Pointe noire et Luanda des stocks de minerais, respectivement de 600 tonnes, 400 tonnes et 1 400 tonnes, pour lesquels elle a reçu des commandes d'importations de Pretoria (400 tonnes), Pays d'Afrique d'Ouest (700 tonnes) et de l'Union Européenne (1300 tonnes). Divers bateaux se rendent des ports (considérés comme places d'origines) vers les différentes destinations (considérées comme points de vente). Le coût de transport de ces minerais, sur chaque liaison, est donné par la grille suivante (coûts par tonne transportée).

	Pretoria	P.A.O	UE
Matadi	7	8	10
Pointe-Noire	5	10	8
Luanda	10	8	9

Proposer un plan de transport à cout minimal. [Méthode VAM et méthode des paliers]

RESOLUTION IV

Proposition d'une SBA (Par la méthode VAM)

Destination / Origine	Pretoria	P.A.O	UE	Dispo.	Δ_L
Matadi	7	8	10	600	1
Pointe - Noire	5	10	8	400	3
Luanda	10	8	9	1400	1
Dde	400	700	1300	2400	
Δ_C	2	2	1		

$X_{\text{Pointe – Noire, Pretoria}} = 400$

Destination / Origine	P.A.O	UE	Dispo.	Δ_L
Matadi	8	10	600	2
Luanda	8	9	1400	1
Dde	700	1300	2000	
Δ_C	8	1		

$X_{\text{Luanda, PAO}} = 700$

Destination / Origine	UE	Dispo.	Δ_L
Matadi	10	600	10
Luanda	9	700	9
Dde	1300	1300	
Δ_C	1		

$X_{\text{Matadi, UE}} = 600$

Destination / Origine	UE	Dispo.
Luanda	9	700
Dde	700	700

$X_{\text{Luanda, UE}} = 700$

Première SBA

Destination / Origine	Pretoria	P.A.O	UE	Dispo.
Matadi	7	8	10 **600**	600
Pointe - Noire	5 **400**	10	8	400
Luanda	10	8 **700**	9 **700**	1400
Dde	400	700	1300	2400

On constate une dégénérescence dans la solution initiale, apparue lors de la suppression simultanée de la ligne Pointe – Noire et de la colonne Pretoria. En conséquence, on a moins de (m + n – 1) cases remplies. Pour contourner ce problème, il convient d'ajouter une quantité nulle à n'importe quelle case de la ligne Pointe – Noire **ou** de la colonne Pretoria. Ainsi obtient – on :

Deuxième SBA

Destination / Origine	Pretoria	P.A.O	UE	Dispo.
Matadi	7 **0**	8	10 **600**	600
Pointe - Noire	5 **400**	10	8	400
Luanda	10	8 **700**	9 **700**	1400
Dde	400	700	1300	2400

CT = 0(7) + 600(10) + 400(5) + 700(8) + 700(9) = 19900 F

Test d'optimalité 1 (Méthode des paliers)

$\Delta_{\text{Matadi, PAO}} = -1$; $\Delta_{\text{Pointe - Noire, PAO}} = 3$; $\Delta_{\text{Pointe - Noire, UE}} = 0$; $\Delta_{\text{Luanda, Pretoria}} = 4$

$\Delta_{\text{Matadi, PAO}}$ étant négatif, il y a lieu d'améliorer cette solution. En faisant le transfert de quantités, partant de la case (Matadi, PAO), il vient :

Solution optimale

Destination / Origine	Pretoria	P.A.O	UE	Dispo.
Matadi	7 **0**	8 **600**	10	600
Pointe - Noire	5 **400**	10	8	400
Luanda	10	8 **100**	9 **1300**	1400
Dde	400	700	1300	2400

CT = 0(7) + 600(8) + 400(5) + 100(8) + 1300(9) = 19300 F

Test d'optimalité 2 (Méthode des paliers)

$\Delta_{\text{Matadi, UE}} = 1$; $\Delta_{\text{Pointe - Noire, PAO}} = 4$; $\Delta_{\text{Pointe - Noire, UE}} = 1$; $\Delta_{\text{Luanda, Pretoria}} = 3$

Tous les indices d'évaluation étant non négatifs, la solution est bel et bien optimale.

3

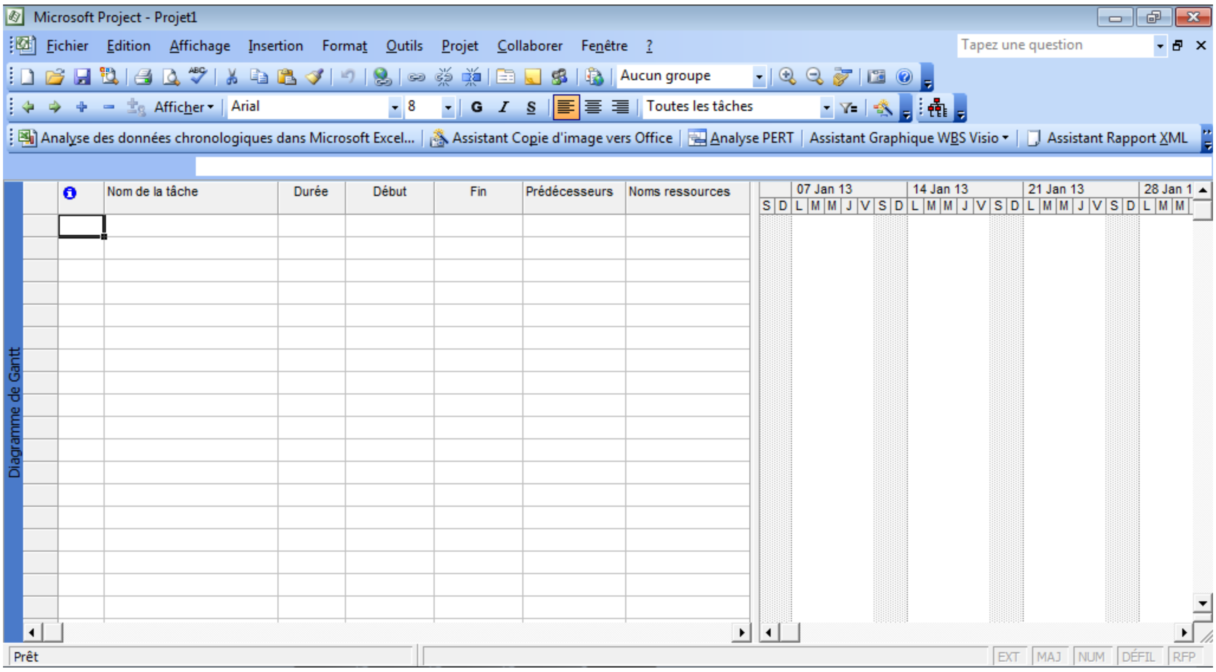
Initiation au logiciel MS – Project

MS – Project est un des vieux produits bureautiques de Microsoft à côté de Word et Excel. Il a été essentiellement conçu comme un outil devant guider le chef de projet depuis la planification, dans l'exécution, jusqu'à la fin d'un projet.

La version présentée[1] ici (MS – Project 2003) permet : (i) de planifier un projet ; (ii) d'en contrôler l'avancement ou d'en assurer le suivi et évaluation ; (iii) de gérer et d'auditer les ressources humaines intervenant dans le projet et (iv) d'analyser et de gérer les coûts (cash – flow) associés à chaque tâche ou l'ensemble du projet.

Notons que les versions ultérieures de MS – Project, contrairement à la version que nous présentons, permettent, en plus, le reporting, la gestion du portefeuille des projets, de la collaboration, etc.

Au démarrage de MS – Project, hormis la barre de menu, on peut distinguer deux zones :



la première contient plusieurs champs et plusieurs cellules, elle attend le projet (les tâches, les durées et l'organisation du projet) ; et la deuxième, une fois le projet saisi, génère automatiquement le graphique de GANTT ou, si on le souhaite, le chemin critique et, au moment du suivi, l'état d'avancement du projet.

Puisque le projet doit être exécuté à un moment précis, dans un environnement et un pays donnés, avant toute chose, il faut commencer par contextualiser MS – Projet, c'est – à – dire le rendre compatible à son

[1] Il s'agit simplement d'une initiation dans ce support. Le lecteur désireux d'avoir davantage d'informations (analyse PERT, analyse avancée des cash – flow, etc.) est invité à consulté l'auteur (cdktbl@yahoo.fr).

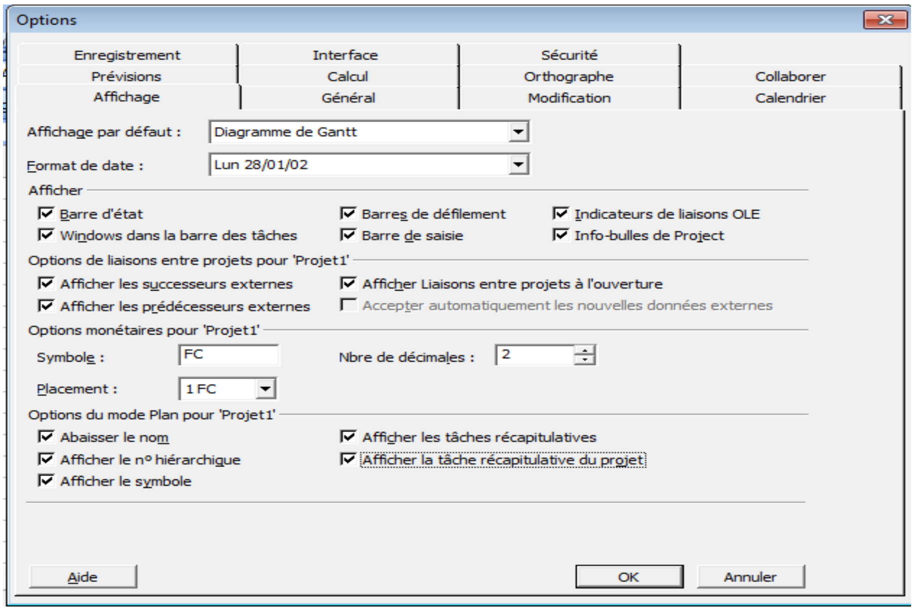
environnement d'exécution et aux règles et coutumes (moyenne d'heures de travail par jour, jours chômés, etc.) en vigueur.

Contextualisation

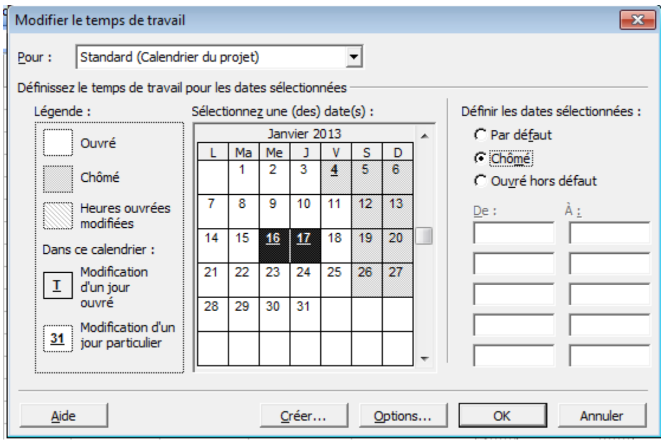
La contextualisation concerne notamment l'unité monétaire utilisée, l'unité de temps utilisée pour les tâches du projet, les heures ouvrées le samedi (si c'est une journée de travail), les fériés, etc.

Pour ce faire, il faut aller successivement dans :

- *Outils → Options…* Puis cocher *Afficher le n° hiérarchique* et Afficher *la tâche récapitulative du projet*. On peut ensuite défiler dans les différents onglets (Général, Modification, Calendrier, etc.) de la boîte de dialogue pour faire les contextualisations nécessaires.



- *Outils → Modifier le temps de travail…* Comme montré ci – dessous, on peut par exemple signaler, puisque le projet démarre le 01 janvier, qu'en RD. Congo, le 04, le 16 et le 17 janviers sont chômés. Pour ce faire, sélectionner la date concernée et cocher *Chômé*.



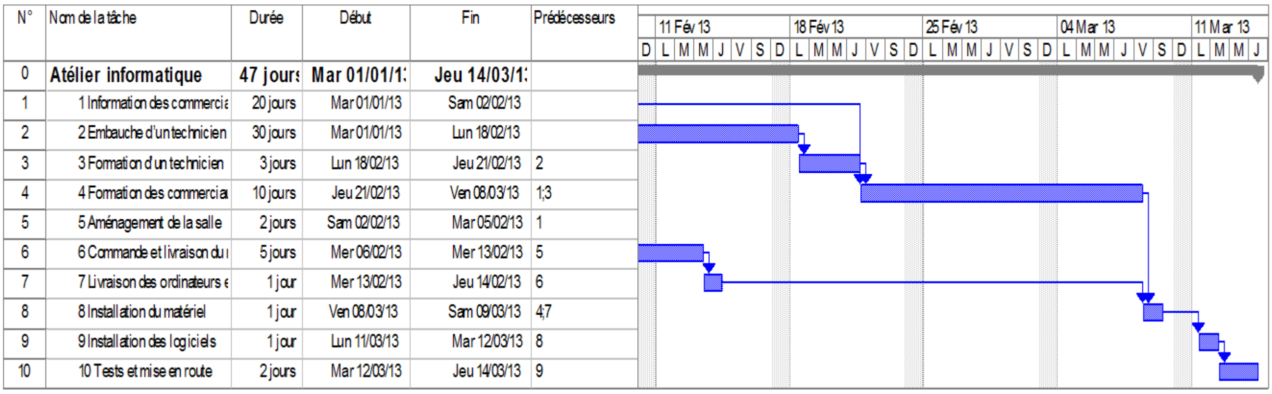
Par défaut, MS – Project considère le samedi, en plus de dimanche, comme chômé (semaine anglaise). On peut changer cela en pointant le curseur sur samedi et en marquant, après sélection, *Ouvré hors défaut* (puis modifier l'heure, mettre par exemple demi – journée).

Saisie du projet, diagramme de GANTT et Chemin critique

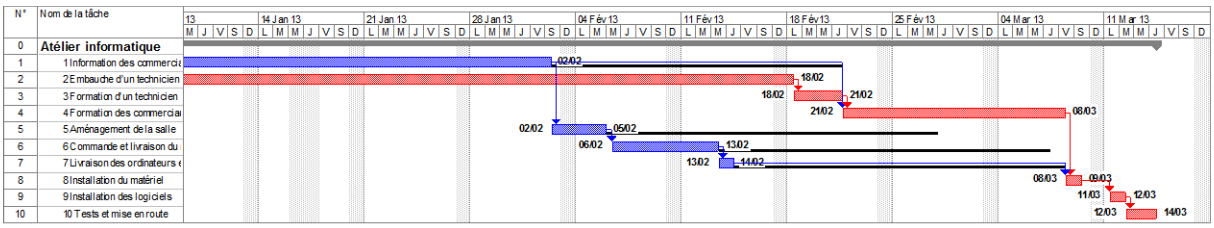
Soit le projet suivant sur l'installation d'un atelier informatique.

Tâches		Nombre de jours	Antériorité
A	Information des commerciaux	20	-
B	Embauche d'un technicien	30	-
C	Formation d'un technicien	3	B
D	Formation des commerciaux	10	A, C
E	Aménagement de la salle	2	A
F	Commande et livraison du mobilier	5	E
G	Livraison des ordinateurs et des imprimantes	1	F
H	Installation du matériel	1	G, D
I	Installation des logiciels	1	H
J	Tests et mise en route	2	I

Sur MS – Project, on peut soit saisir chaque opération, soit faire du copier – coller. La durée de chaque tâche étant indiquée et l'organisation du projet (ou les antériorités) étant définie, Project génère automatiquement la durée totale du projet (ou la valeur du chemin critique), ainsi que ses dates de début et de fin. Chaque tâche est représentée par un jalon, comme le montre la figure ci – dessus.



Pour connaître les tâches et le chemin critiques, ainsi que la marge totale dont dispose le chef de projet sur chaque tâche, aller dans *Format → Assistant Diagramme de GANTT*, puis cliquer sur *suivant* afin de personnaliser l'affichage.



Le chemin critique apparaît en rouge.

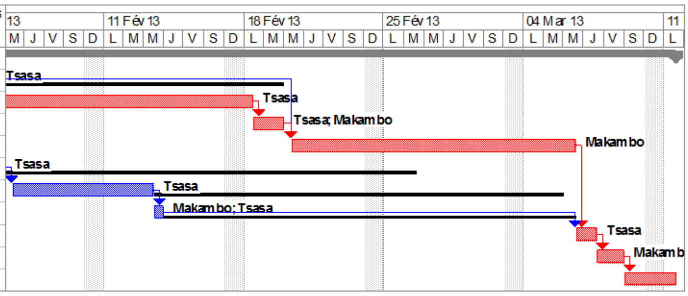
Depuis l'onglet *Affichage*, en cliquant sur *Organigramme des tâches*, il apparaît un organigramme un peu plus facile à lire. Notons, en passant, qu'après avoir planifié son projet sur MS – Project, il faut éviter tous les détails superflus lors de la présentation d'un rapport. En général, les bailleurs de fonds ou les clients cherchent plutôt à avoir une vue synthétique du projet, dans son organisation, ses ressources et ses coûts. Et MS – Project est également conçu pour faciliter énormément ce travail de synthèse.

Affectation des Ressources

Une autre des particularités de Project est la possibilité d'affecter des ressources humaines aux tâches et de veiller à ne pas les surutiliser. Aussi, il est possible, à tout moment, auditer les ressources humaines à partir de Project et de résoudre les problèmes éventuels de leur surutilisation.

Supposons que pour le projet ci – haut, on ait deux ressources humaines (Tsasa et Makambo). En les affectant aux tâches, on peut observer la modification que cela apporte au niveau de la durée et de la date de fin du projet.

N°	Nom de la tâche	Durée	Début	Fin	Prédéces
0	**Atélier info**	**44,5 jour**	**Mar 01/01/1**	**Lun 11/03/1**	
1	1 Informati	20 jours	Mar 01/01/13	Sam 02/02/13	
2	2 Embauch	30 jours	Mar 01/01/13	Lun 18/02/13	
3	3 Formatic	1,5 jours	Lun 18/02/13	Mar 19/02/13	2
4	4 Formatic	10 jours	Mer 20/02/13	Mer 06/03/13	1;3
5	5 Aménage	2 jours	Sam 02/02/13	Mar 05/02/13	1
6	6 Comman	5 jours	Mer 06/02/13	Mer 13/02/13	5
7	7 Livraison	0,5 jour	Mer 13/02/13	Mer 13/02/13	6
8	8 Installatic	1 jour	Mer 06/03/13	Jeu 07/03/13	4;7
9	9 Installatic	1 jour	Jeu 07/03/13	Ven 08/03/13	8
10	10 Tests e	1 jour	Ven 08/03/13	Lun 11/03/13	9



A présent, depuis l'onglet *Affichage* et en cliquant sur *Rapports* → *Affectations* → *Qui fait quoi quand*, on peut demander à Project de nous renseigner sur l'utilisation des ressources dans ce projet ou, en cliquant, depuis l'onglet *Affichage*, sur *Rapports* → *Affectations* → *Ressources surutilisées,* sur les ressources qui doivent faire l'objet d'un audit quotidien parce que surutilisées.

Ressources surutilisées à partir du Mar 01/01/13
Atélier informatique

N°		Nom de la ressource	Travail
2		Tsasa	488 hr

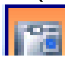
N°	Nom de la tâche	Unités	Travail	Retard	Début
1	Information des commerciaux	100%	160 hr	0 jour	Mar 01/01/13
2	Embauche d'un technicien	100%	240 hr	0 jour	Mar 01/01/13
3	Formation d'un technicien	100%	12 hr	0 jour	Lun 18/02/13
5	Aménagement de la salle	100%	16 hr	0 jour	Sam 02/02/13
6	Commande et livraison du mobilier	100%	40 hr	0 jour	Mer 06/02/13
8	Installation du matériel	100%	8 hr	0 jour	Mer 06/03/13
10	Tests et mise en route	100%	8 hr	0 jour	Ven 08/03/13
7	Livraison des ordinateurs et des imprimantes	100%	4 hr	0 jour	Mer 13/02/13
			488 hr		

Exploiter MS – Project pour rédiger un rapport

Comme dit précédemment, MS – Project a été également conçu pour faciliter la rédaction des rapports concernant un projet.

Tous les types de rapports (d'informations synthétiques) qu'il est possible d'obtenir avec MS – Project se trouvent sous l'onglet *Affichage* → *Rapports.*

Pour exporter ces informations dans Excel, afin notamment de réaliser des tableaux croisés et graphiques dynamiques, sous l'onglet Affichage, il suffit d'aller dans *Barres d'outils* → *Analyse* → *Analyse des données chronologiques dans Microsoft Excel*.

Pour exporter un rapport dans Microsoft Word, on peut soit utiliser le copier – coller, soit (si on veut conserver la mise en forme de Project), après avoir sélectionné une cellule, cliquer sur l'icône . Dans la boîte de dialogue qui paraît, cocher *Telle qu'à l'écran*, ensuite faire coller dans Microsoft Word.

Contrôle de l'avancement du projet (le suivi et évaluation)

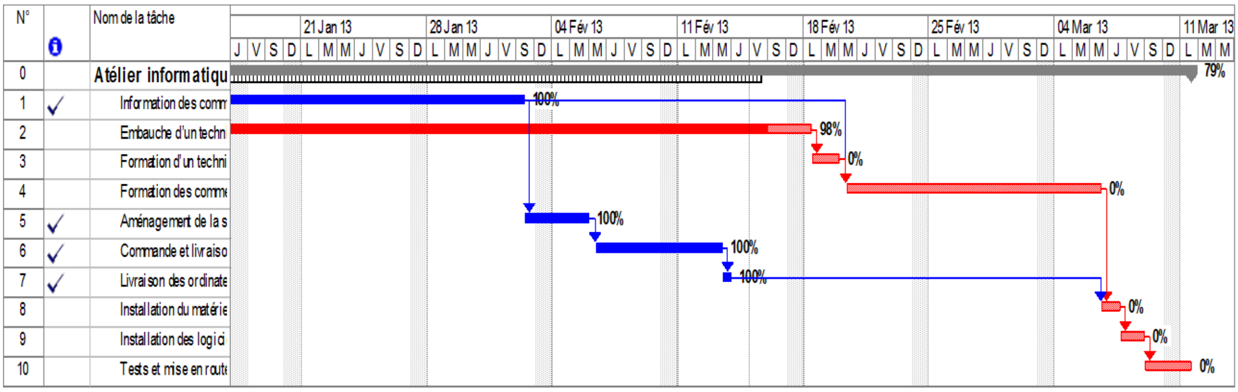
Le projet est planifié et enregistré[1], il démarre le 01 janvier 2013 et termine le 11 mars 2013. Bref, on a une idée d'ensemble sur le projet, notamment sur son organisation, ses ressources humaines et éventuellement son coût.

Plusieurs jours après, on est le 15 février 2013, on souhaite en contrôler l'état d'avancement (les tâches achevées, les tâches au point de commencer, etc.). Alors MS – Project s'avère également, dans ce cas, particulièrement approprié. Pour le cas d'espèce, le 15 février 2013 est une *date d'état*, c'est – à – dire une date qui correspond à la fin de la période considérée par le rapport de suivi.

Par conséquent, avant d'envisager un quelconque suivi, il convient de mettre le projet à jour conformément à la *date d'état*. Pour ce faire, sous l'onglet *Outils*, aller dans *Suivi* → *Mettre à jour le projet*. Dans la boîte de dialogue qui apparaît, cocher *Mettre à jour le projet comme étant achevé jusqu'au*, puis indiquer la *date d'état*.

A présent, il est possible de contrôler l'avancement du projet. On peut le faire de plusieurs façons différentes.

- Une première façon de contrôler, sous l'onglet *Affichage*, l'état d'exécution des tâches est de cliquer sur *Gantt suivi*. On obtient ainsi, comme le montre la figure ci – dessous, le pourcentage d'exécution de chaque tâche et de l'ensemble du projet.



- Une autre façon, bien plus intéressante, est d'utiliser les *rapports*, sous l'onglet *Affichage*. Pour illustrer, allons dans *Affichage* → *Rapports* → *Activités en cours* → *Tâches achevées.* En validant, on lit sans difficulté toutes les tâches achevées. On peut générer la même information pour les tâches sur le point de commencer, les tâches en cours de réalisation, les tâches non commencées, etc.

[1] Pour enregistrer un projet planifié dans MS – Projet, il n'est pas besoin d'explication. Les habitués des produits bureautiques de Microsoft le feront instinctivement.

Tâches en cours de réalisation à partir du Ven 15/02/13
Atélier informatique

N°	Nom de la tâche	Durée	Début	Fin	Prédécesse	Noms ressources
Janvier 2013						
2	Embauche d'un technicien	30 jours	Mar 01/01/13	Lun 18/02/13		Tsasa

N°	Nom de la ressource	Unités	Travail	Retard	Début	Fin
2	Tsasa	100%	240 hr	0 jour	Mar 01/01/13	Lun 18/02/13

N°	Nom de la tâche	Durée	Début	Fin	Prédécesse	Noms ressources
Février 2013						
2	Embauche d'un technicien	30 jours	Mar 01/01/13	Lun 18/02/13		Tsasa

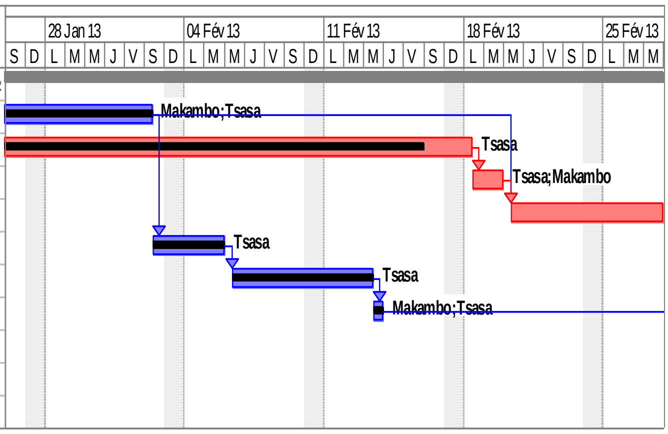
N°	Nom de la ressource	Unités	Travail	Retard	Début	Fin
2	Tsasa	100%	240 hr	0 jour	Mar 01/01/13	Lun 18/02/13

Tâches achevées à partir du Ven 15/02/13
Atélier informatique

N°	Nom de la tâche	Durée	Début	Fin	% achevé	Coût	Travail
Janvier 2013							
1	Information des commerciaux	20 jours	Mar 01/01/13	Sam 02/02/13	100%	0,00 FC	320 hr
Février 2013							
1	Information des commerciaux	20 jours	Mar 01/01/13	Sam 02/02/13	100%	0,00 FC	320 hr
5	Aménagement de la salle	2 jours	Sam 02/02/13	Mar 05/02/13	100%	0,00 FC	16 hr
6	Commande et livraison du mobilier	5 jours	Mer 06/02/13	Mer 13/02/13	100%	0,00 FC	40 hr
7	Livraison des ordinateurs et des imprin	0,5 jour	Mer 13/02/13	Mer 13/02/13	100%	0,00 FC	8 hr

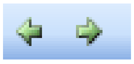
- Toujours sous l’onglet Affichage, on peut également aller dans *Table : Suivi → Suivi.*

N°	Nom de la tâche	Début réel	Fin réelle	% achevé	% phys. achevé	Durée réelle
0	**Atélier informatiqu**	**Mar 01/01/1:**	**NC**	**79%**	**0%**	**35,07 jour:**
1	1 Information des com	Mar 01/01/13	Sam 02/02/13	100%	0%	20 jours
2	2 Embauche d’un tech	Mar 01/01/13	NC	98%	0%	29,25 jours
3	3 Formation d’un tech	NC	NC	0%	0%	0 jour
4	4 Formation des comr	NC	NC	0%	0%	0 jour
5	5 Aménagement de la	Sam 02/02/13	Mar 05/02/13	100%	0%	2 jours
6	6 Commande et livrais	Mer 06/02/13	Mer 13/02/13	100%	0%	5 jours
7	7 Livraison des ordina	Mer 13/02/13	Mer 13/02/13	100%	0%	0,5 jour
8	8 Installation du matér	NC	NC	0%	0%	0 jour
9	9 Installation des logi	NC	NC	0%	0%	0 jour
10	10 Tests et mise en rc	NC	NC	0%	0%	0 jour

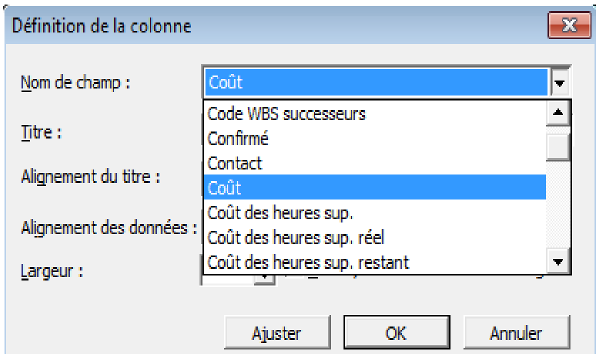


Quelques autres trucs

1. Certains projets sont décomposés en tâches et en sous – tâches, voire en sous sous-tâches. Pour hausser ou abaisser une tâche, il suffit de sélectionner la tâche concernée et d’utiliser les deux icônes ci – dessous :



2. Pour faire l’analyse des coûts, il faut commencer par insérer une nouvelle colonne. Mais attention dans la manière d’insérer ! Faisons remarquer que dans MS – Project, les colonnes ont des attributs prédéfinis qu’on ne peut changer. On peut changer le titre qui apparaît comme nom de la colonne mais pas les attributs. Après avoir *cliqué droit* sur une colonne existante, choisir insérer une colonne, puis dans la boîte de dialogue qui apparaît, dérouler le menu *Nom de champ* et cocher *Coût*.



Remplir ensuite la nouvelle colonne créée en associant à chaque opération son coût correspondant. On peut dès lors faire l’analyse de cash flow.

En conclusion, remarquons qu’un des secrets pour apprendre les produits bureautiques de Microsoft (qui s’utilisent essentiellement avec des clics) est de ne pas avoir peur de cliquer !

Bibliographie

TOMBOLA Cédrick, 2012, “Recherche Opérationnelle. Résumé du cours et recueil d’exercices”, *Guide Laréq pour étudiant*, (mars 2012), 70p.

Annexe

Laboratoire *d'*Analyse – Recherche *en* Economie Quantitative

One pager | Novembre 2012 | Vol. 4 – Num. 005

http://www.lareq.com

CONSTRUCTION DE LA MATRICE D'INCIDENCE ET DE LA MATRICE LAPLACIENNE:

Comment représenter intelligemment un graphe

Cédrick Tombola Muke

" La difficulté réside, non pas dans la naissance de nouvelles idées, mais dans l'abandon des anciennes qui se ramifient… dans tous les recoins de notre esprit."

-John Maynard Keynes

Avertissement

Le niveau du recours, à ce jour, à l'algèbre linéaire en analyse économique d'une part (voir par exemple Simon et Blume, 1998), et le nombre d'applications de la théorie des graphes en économie et en gestion d'autre part (lire Berge, 1970 ; Faure, 1999 ou Pelle, 2005), ne font que conforter et renforcer l'importance et le caractère incontournable des mathématiques pures et abstraites dans la formation d'un économiste sérieux. Quoique la présentation de la théorie des graphes et le recours abondant au calcul mathématique en général, puissent constituer, fort malheureusement, une pilule amère pour la plupart d'étudiants en économie, il s'avère pourtant qu'il s'agit là du prix à payer en vue de mieux cerner et prédire les phénomènes économiques.

S'inscrivant dans ce cadre, ce papier discute sur deux matrices (d'incidence et laplacienne) qui représentent intelligemment un graphe, auxquelles, curieusement, la plupart d'étudiants en économie et en gestion de nos institutions ne sont pas habitués. Suivant Tombola (2012), ce papier adopte une approche de synthèse et s'articule autour de trois points. Dans un premier temps, il présente la construction de la matrice d'incidence, précédée d'un petit rappel. Il fait ensuite le point sur la matrice laplacienne avant de terminer par la relation existant entre ces matrices.

I. Construction de la matrice d'incidence

Bref aperçu sur le graphe

A titre de rappel, un graphe fini G=(X, U) est le couple qui fédère un ensemble fini $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et une famille $U=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ d'éléments du produit cartésien $X\times X=\{(i, j)/i\in X, j\in X\}$. G est dit digraphe ou multigraphe, d'après la terminologie de Berge (1970), respectivement lorsque les éléments de U sont des arcs ou des arêtes.

Considérons le digraphe non régulier[4] ci-après, tiré de Tombola (2012), dont le cardinal des ensembles X et U est respectivement 5 et 6,

$$\vec{G}= \{(A, B), (A, E), (B, D), (C, D), (E, D), (E, C)\}$$

et dont la représentation sagittale est :

[4] Un digraphe est dit régulier si tous ses nœuds ont même degré.

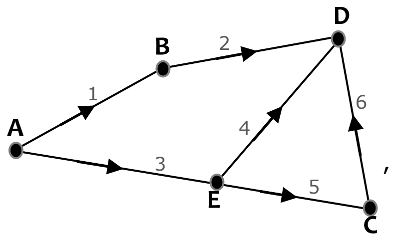


Figure 1. Digraphe d'ordre 5

la matrice d'adjacences, notée A(G), associée à ce digraphe est donnée par la matrice carrée ci-dessous :

$$A(\vec{G})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant une matrice creuse, on peut lui préférer sa forme condensée ou simplement, puisque chaque arc porte un numéro, une matrice SIF (sommet initial sommet final) suivante :

Forme condensée de la matrice A(G)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & m_G^+(i,j) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B & 1 \\ A & E & 1 \\ B & D & 1 \\ C & D & 1 \\ E & C & 1 \\ E & D & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice SIF

$$\begin{array}{cc} Arc & \begin{array}{cc} Si & Sf \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \\ A & E \\ E & D \\ E & C \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}$$

où $m_G^+(i,j)$, appelé multiplicité d'une paire (i, j), est le nombre d'arcs de G ayant i comme source et j comme cible ; Si le sommet initial et Sf le sommet terminal.

Matrice d'incidence

La matrice d'incidence d'un graphe G=(X, U), notée I(G), est une matrice *n×m* qui met en relation les ensembles X et U de G telle que chaque ligne de I(G) représente un sommet et chaque colonne une ligne. En outre, lorsqu'on considère, sur cette matrice, une ligne correspondant à un sommet i, on retrouve aisément l'ensemble des arcs incidents à ce sommet.

La matrice I(G) est construite différemment selon qu'il s'agit d'un digraphe ou d'un multigraphe. Pour distinguer les deux cas, on parle de *matrice d'incidence orientée* dans le premier et de *matrice d'incidence non orientée* dans le second. Notez également que cette matrice est ternaire dans les deux cas, contrairement à la matrice d'adjacences qui, en général, est booléenne.

Soit un digraphe G=(X, $\vec{U}$) *sans boucle*. En considérant la ligne i et la colonne j, sa matrice d'incidence est construite comme suit :

$$I(G)=\begin{cases} 1 & si\ l'arc\ u_j\ est\ incident\ au\ sommet\ x_i\ vers\ l'intérieur \\ -1 & si\ l'arc\ u_j\ est\ incident\ au\ sommet\ x_i\ vers\ l'extérieur \\ 0 & dans\ les\ autres\ cas \end{cases}$$

Si l'on considère le digraphe de la figure 1 ci-dessus, sa matrice d'incidence est montée comme suit.

$$I(\vec{G}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un moyen de s'assurer que cette matrice est bien construite est de vérifier que chaque colonne ait une somme arithmétique nulle, puisqu'un arc est forcément incident intérieurement à un sommet et extérieurement à un autre. A partir de cette matrice, un regard attentif et intelligent permet de retrouver les précédences, et par conséquent la matrice d'adjacences. Il suffit, pour y arriver, de considérer les colonnes de $I(\vec{G})$ qui restituent, pour chaque arc du digraphe, sa source et sa cible. Pour l'exemple ci – haut, on obtient :

x	A	B	C	D	E
Précédences	-	A	E	B, C, E	A

Soit, à présent, un multigraphe G=(X, U), sa matrice d'incidence est également ternaire et chaque élément de celle-ci, au croisement de la ligne i et de la colonne j, vaut :

$$I(G) = \begin{cases} 1 & si\ le\ sommet\ x_i\ \ est\ incident\ à\ l'arête\ u_j \\ 2 & si\ l'arête\ u_j\ est\ une\ boucle\ sur\ x_i \\ 0 & dans\ les\ autres\ cas \end{cases}$$

Si l'on considère le multigraphe associé au digraphe de la figure 1, obtenue en occultant l'orientation des lignes – d'après la convention que pour appliquer un concept orienté (non orienté) à un multigraphe (un digraphe), il suffit de considérer le digraphe (le multigraphe) associé (voir Pelle, 2005) –, on a la matrice d'incidence non orientée suivante.

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien construite si chaque colonne a une somme égale à deux, puisque chaque arête a deux extrémités.

II. Construction de la matrice laplacienne

La matrice laplacienne ou matrice de Laplace[5] est une matrice *n*×*n*, symétrique et de même format que la matrice d'adjacences, représentant un graphe. Elle est ternaire et sa construction se fonde essentiellement sur la taille du voisinage (ou degré) de ses sommets. Dans son architecture, la matrice laplacienne ne diffère que faiblement selon qu'il s'agit d'un digraphe ou un multigraphe.

Si l'on note le degré[6] du sommet x_i par $d(x_i)$, et en choisissant une ligne i et une colonne j, la matrice laplacienne, notée L(G), est construite de la sorte :

[5] Du nom du célèbre mathématicien et physicien français Pierre – Simon de Laplace (1749 – 1827).
[6] Le degré d'un sommet est le cardinal de l'ensemble des arcs (ou arêtes) incidents à ce sommet. Une boucle étant comptée deux fois.

Pour un digraphe

$$L(\vec{G})=\begin{cases} d(x_i) & si\ i=j \\ -1 & s'il\ existe\ un\ lien\ entre\ les\ sommets\ x_i\ et\ x_j \\ 0 & dans\ les\ autres\ cas \end{cases}$$

Pour un multigraphe

$$L(G)=\begin{cases} d(x_i) & si\ i=j \\ 1 & s'il\ existe\ un\ lien\ entre\ les\ sommets\ x_i\ et\ x_j \\ 0 & dans\ les\ autres\ cas \end{cases}$$

Pour le seul exemple considéré jusque là, on a les matrices carrées ci-après.

Matrice laplacienne du digraphe de la figure 1

$$L(\vec{G})=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice laplacienne du multigraphe associé

$$L(G)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

III. Relation existant entre ces matrices

Matrice d'incidence et matrice laplacienne

Si l'on connait I(G), la matrice d'incidence d'un graphe, sa matrice laplacienne L(G) est déduite en multipliant I(G) par sa transposée $I(G)^t$, soit $L(G)= I(G)I(G)^t$. Pour le digraphe de la figure 1, on a :

$$L(G)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut aisément vérifier que cette dernière relation s'établit également pour le cas non orienté.

Matrice d'adjacences, matrice de degrés et matrice laplacienne

Pour rappel, la matrice de degrés d'un graphe fini G=(X, U), notée D(G), est une matrice diagonale, de même format que la matrice booléenne et définie de la sorte :

$$D(G)=\begin{cases} d(x_i) & si\ i=j \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Connaissant cette dernière matrice et la matrice d'adjacences A(G), il est possible de déduire, uniquement pour un graphe non orienté, la matrice laplacienne par la relation L(G)=A(G)+D(G).

Pour le multigraphe associé au digraphe de la figure 1, on obtient successivement :

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(G)=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix},$$

et la somme arithmétique de ces deux matrices donne :

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&1&1&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0&1\\1&2&0&1&0\\0&0&2&1&1\\0&1&1&3&1\\1&0&1&1&3\end{pmatrix}.$$

■