Kolloquium

Die geometrische Brownsche Bewegung und Anwendungen

Ablauf

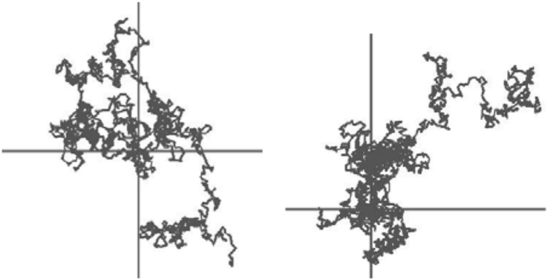
- Presentation der Inhalte der Bachelorarbeit
  - Grundlagen zu Stochastischen Prozessen und der Brownschen Bewegung
  - Motivation der geometrischen Brownschen Bewegung
  - Modellierung von Finanzzeitreihen mit der geometrischen Brownschen Bewegung
  - Bewertung von Aktienoptionen mit dem Black-Scholes-Modell
  - Weiterführende Themen: Stochastische Differentialgleichungen und das CEV-Modell
- Diskussion

Stochastische Prozesse

- Folgen bzw. Familien von Zufallsvariablen

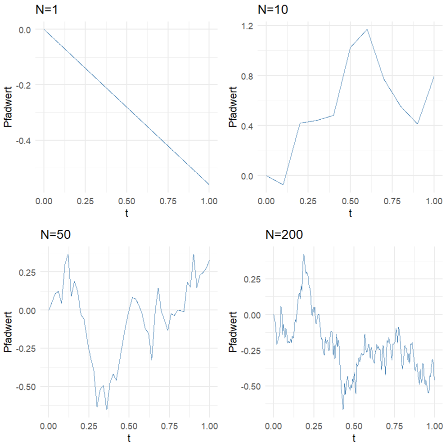
$$X_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad \text{bzw.} \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

- Zeitdiskrete Prozesse: Wiederholter Münzwurf, Zufallsspaziergang
- Zeitstetige Prozesse: Brownsche Bewegung



Die diskrete Brownsche Bewegung

- Konstruktion durch aufsummierte unabhängige Normalvariablen
- Skaliertes Interpolationsverfahren (N-ter Ordnung)



Die Brownsche Bewegung

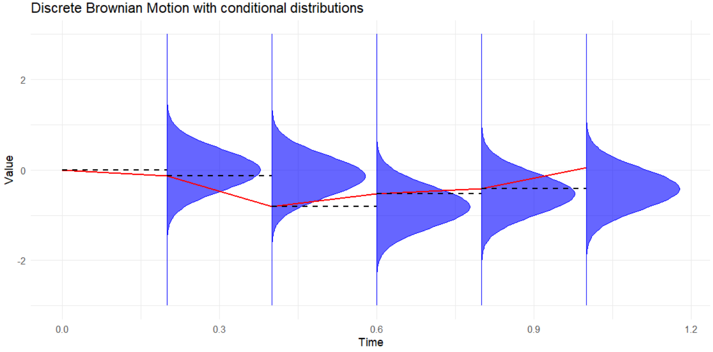
- Klassische Axiome
  1. $W_0 = 0$ (fast-sicher)
  2. Die Pfade $t \mapsto W_t$ sind (fast-sicher) stetig
  3. Für Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_1 \ldots$ sind die Zuwächse $W_{t_1} - W_{t_0}$ unabhängig
  4. Die Zuwächse sind normalverteilt mit $W_{t_1} - W_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$

Die Brownsche Bewegung

- Klassische Axiome
  1. $W_0 = 0$ (fast-sicher)
  2. Die Pfade $t \mapsto W_t$ sind (fast-sicher) stetig
  3. Für Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_1 \ldots$ sind die Zuwächse $W_{t_1} - W_{t_0}$ unabhängig
  4. Die Zuwächse sind normalverteilt mit $W_{t_1} - W_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$
- Brownsche Bewegung als Grenzwert
  - Diskrete Brownsche Bewegung und dann $N \to \infty$
  - Um die Axiome Nachzuweisen und Verteilungskonvergenz im Funktionenraum: Satz von Donsker
  - In der Arbeit: Existenz der endlich-dimensionalen Verteilungen (mit Cramér-Wold) und Nachweis der Stetigkeit

Kovarianzstruktur der Brownschen Bewegung

- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$
- Bedingte Verteilung: $W_t \mid W_s \sim \mathcal{N}(W_s,\, t - s)$



Eigenschaften der Brownschen Bewegung

- Martingal-Eigenschaft
  - $E(W_t|W_s = v) = v$ bzw. $E(W_t|W_s) = W_s$
  - folgt aus der bedingten Verteilung
- Stationäre, unabhängige Inkremente, normalverteilt
- Pfade sind stetig aber nicht differenzierbar (fast-sicher)
- Somit eignet sich die Brownsche Bewegung zur Modellierung von Rauschen (Zufälliges Element in einem Prozess)

Die geometrische Brownsche Bewegung

- Multiplikatives Modell: $S_{k+1} = S_k(1 + X_{k+1})$
- Annahme: $X_{k+1} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{k+1}$
- ε_k i.i.d mit $E(\varepsilon_k) = 0$, $V(\varepsilon_k) = 1$. (Z. B. $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilt)
- Dies kann man als diskrete stochastische Differenzengleichung (SDE) interpretieren.
- Genauer: Euler-Maruyama-Approximation der SDE

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

Geschlossene Formel

- Geschlossene Lösung der SDE / Grenzwert der diskreten Übergangsvariablen
  - Limes: $\Delta t \to 0$ (Zeit-Schritt) und $n \to \infty$ (Anzahl der Messungen)
- $S_T = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)$
- S_T ist log-normalverteilt

Beweisskizze

- Ausgangspunkt: $S_{k+1} = S_k(1 + X_{k+1})$ mit $X_{k+1} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{k+1}$
- Logarithmierung: $\log S_n = \log S_0 + \sum \log(1 + X_j)$
- Taylor-Entwicklung bis 2. Ordnung, danach

$$\log S_n \approx \log S_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_j}_{X_j} - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\varepsilon_j}_{-\frac{1}{2}X_j^2} \right)$$

$$= \log S_0 + \mu T + \underbrace{\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j}_{[\text{ZGWS}] \quad \to \sigma W_T} - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{n}\Delta t\varepsilon_j^2}_{[\text{GGZ}] \quad \to \frac{1}{2}\sigma^2 T}$$

- Letztlich $\log S_T \stackrel{d}{=} \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W_T$ $\square$

Fazit und Eigenschaften

- Positivität: $S_t > 0$ fast sicher
- fast sicher stetige Pfade
- Log-Normalverteilt mit $\log S_t \sim N(\log S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$

Kalibrierung

- Schätzung von μ, σ über Log-Returns
  - Daten sind zu einem festen Δt gegeben
  - Aus $\log S_{t+\Delta t} | \log S_t \sim N(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sqrt{\Delta t}\sigma^2)$ folgt der Schätzer
  - $\sigma^2 = s(\Delta \log S_t)$ und $\mu = m(\Delta \log S_t)$ wobei s die empirische Varianz und m das Mittel ist

Kalibrierung

- Schätzung von μ, σ über Log-Returns
  - Daten sind zu einem festen Δt gegeben
  - Aus $\log S_{t+\Delta t} | \log S_t \sim N(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sqrt{\Delta t}\sigma^2)$ folgt der Schätzer
  - $\sigma^2 = s(\Delta \log S_t)$ und $\mu = m(\Delta \log S_t)$ wobei s die empirische Varianz und m das Mittel ist
- Konfidenzintervalle und Unsicherheitsschätzung (Bootstrap)
  - Die Daten sind ggf. unrein
  - Schätze μ und σ wiederholt aus einer Teilmenge der Daten schätzt
  - Resultat ist ein Konfidenzintervall für μ und σ

Simulation

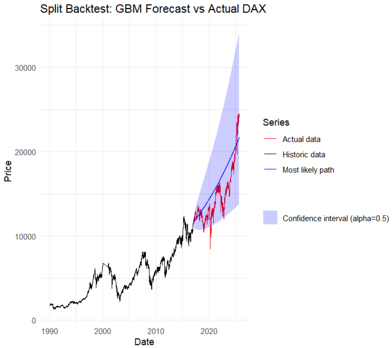
- Exakte Pfadsimulation für GBM mit der geschlossenen Formel und der diskreten Brownsche Bewegung
- Anwendung z. B. Monte-Carlo-Simulation für Optionspreise
- Numerik: Euler–Maruyama für verallgemeinerte Modelle (CEV etc.)

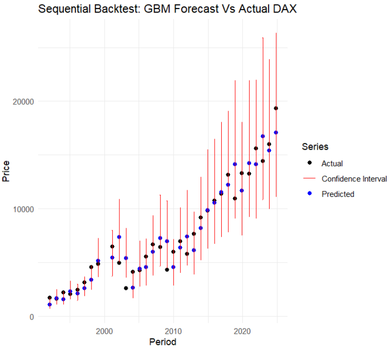
Backtests

- Validierung eines Modells anhand historischer Daten
- Metriken zur Bewertung

Hitratio	MSE
% im Konfidenzintervall	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$
NRMSE	MAPE
$\frac{\sqrt{\text{MSE}}}{y_{max}-y_{min}}$	$\frac{100\%}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}\right\rvert$

Visualisierung von Backtests





Optionen

- Eine europäische Call Option gibt dem Käufer das Recht, aber nicht die Pflicht, eine Aktie am Zeitpunkt T zum Ausübungspreis K zu kaufen.
- Put Option: Recht auf Verkauf (an den Anbieter der Option)
    - Beispiel: Absicherung von Getreide-Ernte
- Auszahlungsfunktion $\max(S_T - K, 0)$ (Call), $\max(K - S_T, 0)$ (Put)
- Amerikanische Optionen: jederzeit Einlösbar
- Es gibt viele weitere Optionstypen mit anderen Auszahlungen

Bewertung von Optionen

- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM

Bewertung von Optionen

- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM
- Was ist mehr Wert? 100€ jetzt oder 100€ in einem Jahr?

Bewertung von Optionen

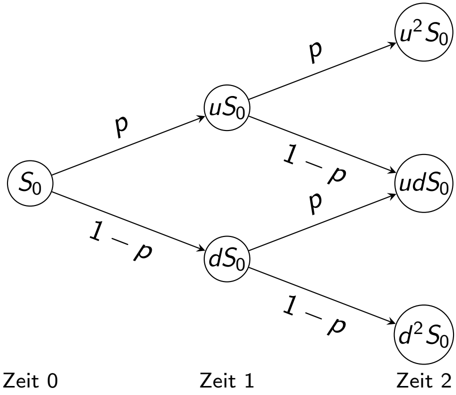
- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM
- Was ist mehr Wert? 100€ jetzt oder 100€ in einem Jahr?
- 100€ jetzt, denn man könnte das Geld anlegen, und 2% Zinsen erhalten
- Modellerweiterung: Bank bietet risikofreien Zinssatz r

Herleitung des Black-Scholes Modells

1. Diskretes Modell: Binomialmodell
2. Options-Bewertung Binomialmodell
3. Black-Scholes als Limes $N \to \infty$

Diskretes Modell: Binomialmodell

$$S_{t+1} = \begin{cases} d \cdot S_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ u \cdot S_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$$



Parameter:
Aufstieg $u > 1$
Abstieg $0 < d < 1$
Wkt. $p \in (0,1)$

Risikoneutrale Bewertung von Optionen

- Unterschiedliche Investoren haben unterschiedliche Risikopräferenzen
- Modellannahme risiko-neutrale Welt: Der Investor braucht keine Prämien (Anreize) um riskante Positionen einzugehen
- Das Bankkonto hat in der physikalischen Welt den Vorteil, das kein Risiko besteht.
- Interpretation: Der Trend der Aktie μ ist eine Risiko-Prämie.

Risikoneutrale Bewertung von Optionen

- Unter Beachtung des risikofreien Zinssatzes wird der Kurs diskontiert: $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$
- Der risikofreie Kurs kann nun keinen größeren Erwartungswert haben als das Bankkonto, sonst würde niemand zur Bank gehen.
- Also hat der diskontierte Kurs (in der risiko-freien-Welt) den Erwartungswert 0, sogar:
- Die Martingal-Eigenschaft: für $s < t$ gilt

$$E(e^{-rt} S_t | S_s = v) = e^{-rs} v$$

Risikoneutrale Bewertung von Optionen

- Unter Beachtung des risikofreien Zinssatzes wird der Kurs diskontiert: $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$
- Der risikofreie Kurs kann nun keinen größeren Erwartungswert haben als das Bankkonto, sonst würde niemand zur Bank gehen.
- Also hat der diskontierte Kurs (in der risiko-freien-Welt) den Erwartungswert 0, sogar:
- Die Martingal-Eigenschaft: für $s < t$ gilt

$$E(e^{-rt} S_t | S_s = v) = e^{-rs} v$$

- Man konstruirt das risikoneutrale Maß Q, um die Martingaleigenschaft des diskontierten Kurses zu garantieren, und nutzt dieses zur Bewertung der Option

Beispiel: risikoneutrale ein-Schritt-Wahrscheinlichkeit

Frage: wie muss p aussehen, damit $e^{-rt}S_t$ im Binomialmodell ein Martingal ist? Diese Wahrscheinlichkeit wird im folgenden q genannt.

$$E(e^{-r(n+1)\Delta t}S_{n+1} \mid S_n = v) = e^{-rn\Delta t}v$$
$$\iff E(e^{-r\Delta t}S_{n+1} \mid S_n = v) = v.$$

Setzt man die möglichen Werte für S_{n+1} ein ($S_{n+1} = uS_n$ mit Wahrscheinlichkeit q, $S_{n+1} = dS_n$ mit Wahrscheinlichkeit $1-q$) folgt

$$e^{-r\Delta t}(quS_n + (1-q)dS_n) = v.$$
$$e^{-r\Delta t}(qu + (1-q)d) = 1$$
$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

$\square$

Bewertung von Optionen im Binomialmodell

- Zum Zeitpunkt N der Auszahlung ist der Wert der Option genau die Auszahlungsfunktion, z. B. $\max(S_T - K, 0)$
- Zum Zeitpunkt $N-1$ und davor durch Rückwärtsinduktion gilt mit der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit q

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= E_Q(e^{-r\Delta t} C_n \mid S_{n-1}) \\ &= e^{-r\Delta t}\left(qC_n^{\text{up}} + (1-q)C_n^{\text{down}}\right) \end{aligned}$$

Das Black-Scholes Modell

- Modellannahmen: GBM, konstante r, σ, keine Transaktionskosten
- Die diskrete Zeit im Binomialmodell wird stetig durch den Limes $N \to \infty$
- In der Arbeit wird gezeigt, dass S_t unter Q wieder eine GBM ist. Damit kann man Aktien direkt durch Simulation bewerten (Monte-Carlo-Verfahren)
- Für europäische Optionen gilt darüber hinaus die explizite Formel

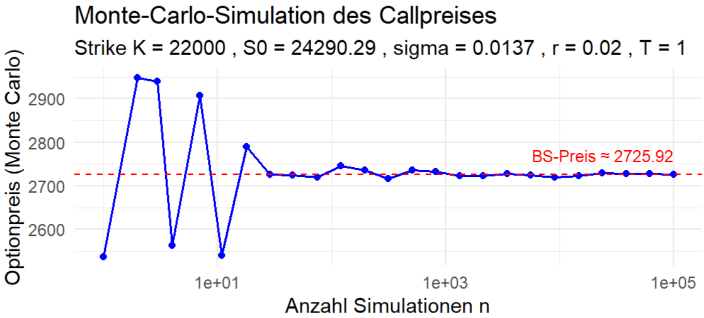
$$C_0^{\mathrm{BS}} = S_0\,\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Beispiele

- Numerische Bewertung vs. geschlossene Formel: Vergleich für DAX-Calls
- Monte-Carlo- vs. Black-Scholes-Ergebnisvergleiche



CEV-Modell

- Alternative zur GBM
- Stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t \;=\; \mu S_t \, dt \;+\; \sigma \, S_t^{\beta} \, dW_t$$

- Diskretisierung:

$$\Delta S_i := S_{t_{i+1}} - S_{t_i} \approx \mu S_{t_i} \Delta t + \sigma S_{t_i}^{\beta} \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\Delta S_i \mid S_{t_i} \sim \mathcal{N}\left(\mu S_{t_i} \Delta t,\, \sigma^2 S_{t_i}^{2\beta} \Delta t\right)$$

Kalibrierung des CEV-Modell

- Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\Delta S_i \mid S_{t_i} \sim \mathcal{N}\left(\mu S_{t_i} \Delta t,\ \sigma^2 S_{t_i}^{2\beta} \Delta t\right)$$

- Dichte:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right), \quad m = \mu S_{t_i}, v = \sigma^2 S_{t_i}^{2\beta}$$

- ML-Schätzer: Betrachte alle Realisierungen der Zeitreihe, und maximiere die Dichte in Abhängigkeit der Parameter

$$L(\mu, \sigma, \beta) = \prod_{i=0}^{n-1} p(\Delta S_i \mid S_{t_i})$$

- Dies wurde in der Arbeit implementiert und mit der GBM verglichen

Schlusswort

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit