Die Geometrische Brownsche Bewegung und Anwendungen

Inhalt

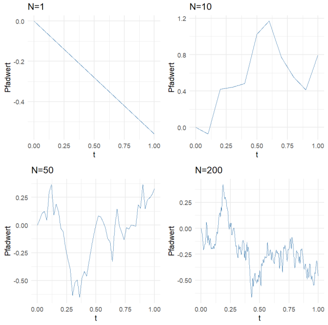
- Grundlagen zu Stochastischen Prozessen und der Brownschen Bewegung
- Herleitung der geometrischen Brownschen Bewegung aus dem Binomialmodell
- Modellierung von Finanzzeitreihen mit der geometrischen Brownschen Bewegung
- Bewertung von Aktienoptionen mit Black Scholes

Stochastische Prozesse

- Zeitdiskrete Modelle: Zufallsspaziergang, Binomialmodell
- Zeitstetige Grenzprozesse: Brownsche Bewegung als Limit
- Filtration, bedingter Erwartungswert, Adaptierung (Information über Zeit)

Die diskrete Brownsche Bewegung

- Konstruktion durch aufsummierte unabhängige Normalvariablen
- Skaliertes Interpolationsverfahren (N-ter Ordnung) ($\rightarrow$ Varianz $\rightarrow$ t)
- Martingal-Eigenschaft und Varianzwachstum linear in der Zeit

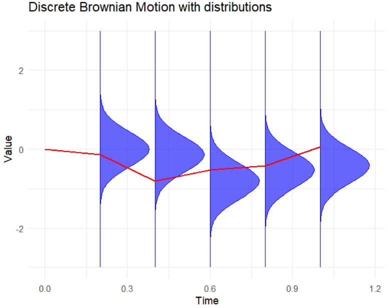


Die Brownsche Bewegung

- Klassische Axiome
  - $W_0 = 0$, Pfade fast-sicher stetig
  - unabhängige, stationäre Normalinkremente
- Brownsche Bewegung als Grenzwert
  - Donsker / Zentrale Grenzwertsatz für Prozesse
  - Existenz der endlich-dimensionalen Verteilungen und Kontinuität

Kovarianzstruktur der Brownschen Bewegung

- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$
- Unabhängigkeit der Inkremente $\Rightarrow$ Varianz wächst linear
- Grundlage für Simulation und Modellierung von Zeitreihen



Eigenschaften der Brownschen Bewegung

- Martingal-Eigenschaft
- stationäre, unabhängige Inkremente, Normalverteilung
- Pfade zwar nicht differenzierbar, aber stetig
- Somit eignet sich die Brownsche Bewegung zur Modellierung von Rauschen

Diskretes Modell

- Multiplikatives Modell: $S_{k+1} = S_k(1 + X_{k+1})$
- Annahme: $X_{k+1} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{k+1}$
- Dies kann man als diskrete stochastische Differenzengleichung (SDE) interpretieren.
- Genauer: Euler–Maruyama-Approximation der SDE

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$$

Geschlossene Formel

- Geschlossene Lösung der SDE / Grenzwert der diskreten Übergangsvariablen
- $S_T = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)$
- S_T ist log-normalverteilt; Erwartungswert und Varianz bekannt

Beweisskizze

- Logarithmierung: $\log S_n = \log S_0 + \sum \log(1 + X_j)$
- Taylor-Entwicklung bis 2. Ordnung, Quadratterm liefert $-\frac{1}{2}\sigma^2 T$
- ZGWS f. Summe der Zufallsvariablen $\Rightarrow \sigma W_T$; GGZ f. Quadratterm

Eigenschaften

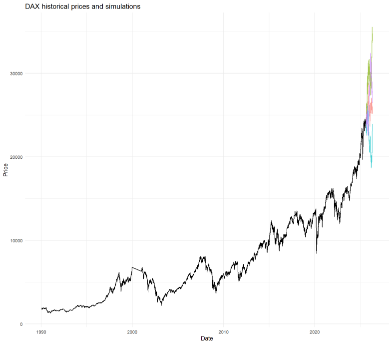
- Positivität: $S_t > 0$ fast sicher
- Log-Normalverteilung: einfache Momente für Risikoanalyse
- Skalierungseigenschaften; analytische Preise für einfache Derivate

Kalibrierung

- Schätzung von μ, σ über Log-Returns
- Konfidenzintervalle und Unsicherheitsschätzung (Bootstrap)

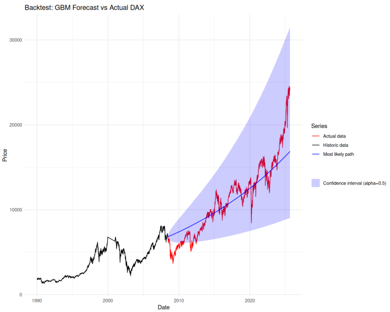
Simulation

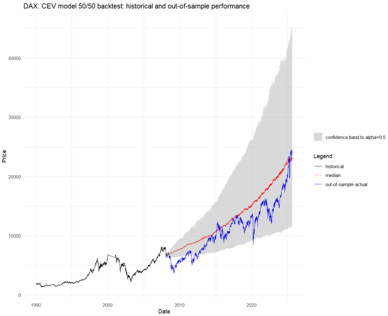
- Exakte Pfadsimulation für GBM via geschlossene Formel
- Monte-Carlo-Simulation für Optionspreise und Konfidenzbänder
- Numerik: Euler–Maruyama für verallgemeinerte Modelle (CEV etc.)



Backtests

- Evaluierung von Handelsstrategien auf historischen Daten (DAX, Lufthansa, ...)
- Vergleich von Modellen (GBM vs. CEV) mittels Backtests und Performance-Metriken
- Visualisierung der Backtests und Confidence Bands





Optionen

- Europäische Call- und Put-Option: Recht, nicht Pflicht
- Auszahlung: $\max(S_T - K, 0)$ (Call), $(K - S_T)^+$ (Put)
- Unterscheidung: europäisch vs. amerikanisch (Ausübungsrechte)

Risikoneutrale Bewertung

- Diskontierter Aktienkurs ist unter dem risikoneutralen Maß Q ein Martingal
- Erwartungswert unter Q des diskontierten Auszahlungsstroms gibt den fairen Preis
- Hedging-Interpretation: Replikation via dynamischem Portfolio (Delta-Hedging)

Der faire Preis von Optionen

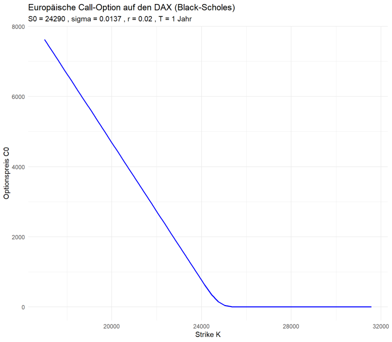
- Für europäische Calls: Black-Scholes-Formel
- $C = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$ mit $d_{1,2}$ standardmäßig definiert
- Keine Arbitrage, perfekte Replikation unter Modellannahmen

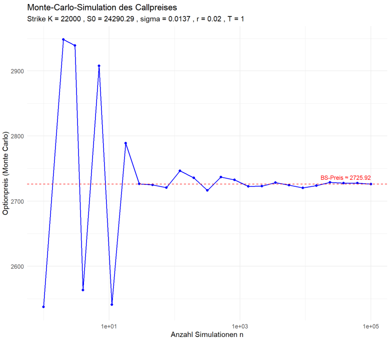
Das Black-Scholes Modell

- Modellannahmen: GBM für Underlier, konstante r, σ, keine Transaktionskosten
- PDE-Herleitung führt zur geschlossenen Preislösung für europäische Optionen
- Praktische Limitationen: Volatilitätsstruktur, Marktfriktionen

Beispiele

- Numerische Bewertung vs. geschlossene Formel: Vergleich für DAX-Calls
- Monte-Carlo- vs. Black-Scholes-Ergebnisvergleiche





Ausblick

- Stochastische Differentialgleichungen

Schlusswort

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit