

# Kolloquium

## Die geometrische Brownsche Bewegung und Anwendungen

# Ablauf

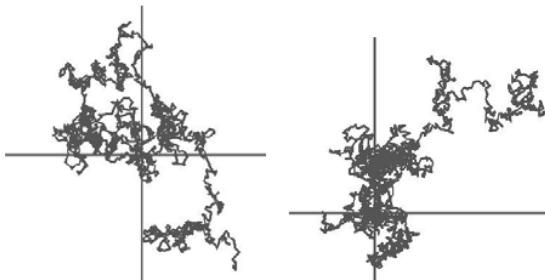
- Presentation der Inhalte der Bachelorarbeit
  - Grundlagen zu Stochastischen Prozessen und der Brownschen Bewegung
  - Herleitung der geometrischen Brownschen Bewegung aus dem Binomialmodell
  - Modellierung von Finanzzeitreihen mit der geometrischen Brownschen Bewegung
  - Bewertung von Aktienoptionen mit Black Scholes
  - Weiterführende Themen: Stochastische Differentialgleichungen und das CEV-Modell
- Diskussion

# Stochastische Prozesse

- Folgen bzw. Familien von Zufallsvariablen

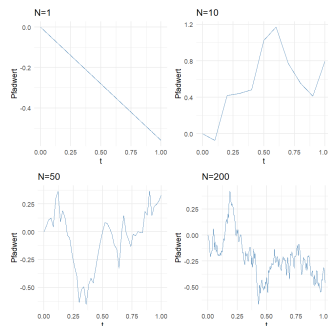
$$X_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad \text{bzw.} \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

- Zeitdiskrete Prozesse: Wiederholter Münzwurf, Zufallsspaziergang
- Zeitstetige Prozesse: Brownsche Bewegung



# Die diskrete Brownsche Bewegung

- Konstruktion durch aufsummierte unabhängige Normalvariablen
- Skaliertes Interpolationsverfahren (N-ter Ordnung) ( $\rightarrow$  Varianz  $\rightarrow t$ )
- Martingal-Eigenschaft und Varianzwachstum linear in der Zeit



# Die Brownsche Bewegung

- Klassische Axiome

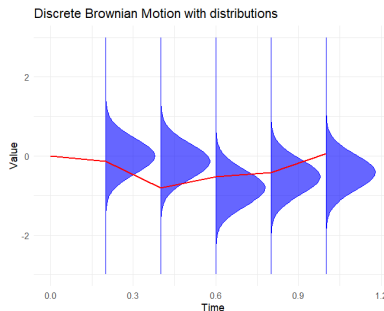
1.  $W_0 = 0$  (fast-sicher)
2. Die Pfade  $t \mapsto W_t$  sind (fast-sicher) stetig
3. Für Zeitpunkte  $0 \leq t_0 < t_1 \dots$  sind die Zuwächse  $W_{t_1} - W_{t_0}$  unabhängig
4. Die Zuwächse sind normalverteilt mit  $W_{t_1} - W_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$

# Die Brownsche Bewegung

- Klassische Axiome
  1.  $W_0 = 0$  (fast-sicher)
  2. Die Pfade  $t \mapsto W_t$  sind (fast-sicher) stetig
  3. Für Zeitpunkte  $0 \leq t_0 < t_1 \dots$  sind die Zuwächse  $W_{t_1} - W_{t_0}$  unabhängig
  4. Die Zuwächse sind normalverteilt mit  $W_{t_1} - W_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$
- Brownsche Bewegung als Grenzwert
  - Diskrete Brownsche Bewegung und dann  $N \rightarrow \infty$
  - Um die Axiome Nachzuweisen und Verteilungskonvergenz im Funktionenraum: Satz von Donsker
  - In der Arbeit: Existenz der endlich-dimensionalen Verteilungen (mit Cramér-Wold) und Nachweis der Stetigkeit

# Kovarianzstruktur der Brownschen Bewegung

- Kovarianz:  $\text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$
- Bedingte Verteilung:  $W_t \mid W_s \sim \mathcal{N}(W_s, t - s)$



# Eigenschaften der Brownschen Bewegung

- Martingal-Eigenschaft
- Stationäre, unabhängige Inkremente, normalverteilt
- Pfade sind stetig aber nicht differenzierbar (fast-sicher)
- Somit eignet sich die Brownsche Bewegung zur Modellierung von Rauschen (Zufälliges Element in einem Prozess)



# Die geometrische Brownsche Bewegung

- Multiplikatives Modell:  $S_{k+1} = S_k(1 + X_{k+1})$
- Annahme:  $X_{k+1} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{k+1}$
- $\varepsilon_k$  i.i.d mit  $E(\varepsilon_k) = 0$ ,  $V(\varepsilon_k) = 1$ . (Z. B.  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilt)
- Dies kann man als diskrete stochastische Differenzengleichung (SDE) interpretieren.
- Genauer: Euler-Maruyama-Approximation der SDE

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

# Geschlossene Formel

- Geschlossene Lösung der SDE / Grenzwert der diskreten Übergangsvariablen
  - Limes:  $\Delta t \rightarrow 0$  (Zeit-Schritt) und  $n \rightarrow \infty$  (Anzahl der Messungen)
- $S_T = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right)$
- $S_T$  ist log-normalverteilt

# Beweisskizze

- Ausgangspunkt:  $S_{k+1} = S_k(1 + X_{k+1})$  mit  $X_{k+1} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{k+1}$
- Logarithmierung:  $\log S_n = \log S_0 + \sum \log(1 + X_j)$
- Taylor-Entwicklung bis 2. Ordnung, danach

$$\begin{aligned}
 \log S_n &\approx \log S_0 + \sum_{j=1}^n \left( \underbrace{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_j}_{X_j} - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\varepsilon_j^2}_{-\frac{1}{2}X_j^2} \right) \\
 &= \log S_0 + \mu T + \underbrace{\sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j}_{\text{[ZGWS]} \rightarrow \sigma W_T} - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{j=1}^n \Delta t \varepsilon_j^2}_{\text{[GGZ]} \rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 T}
 \end{aligned}$$

- Letztlich  $\log S_T \stackrel{d}{=} \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W_T$



# Fazit und Eigenschaften

- Positivität:  $S_t > 0$  fast sicher
- fast sicher stetige Pfade
- Log-Normalverteilt mit  $\log S_t \sim N(\log S_0 + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$

# Kalibrierung

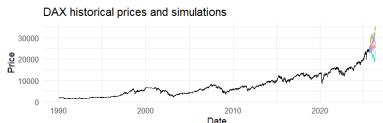
- Schätzung von  $\mu, \sigma$  über Log>Returns
  - Daten sind zu einem festen  $\Delta t$  gegeben
  - Aus  $\log S_{t+\Delta t} | \log S_t \sim N(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sqrt{\Delta t}\sigma^2)$  folgt der Schätzer
  - $\sigma^2 = s(\Delta \log S_t)$  und  $\mu = m(\Delta \log S_t)$  wobei  $s$  die empirische Varianz und  $m$  das Mittel ist

# Kalibrierung

- Schätzung von  $\mu, \sigma$  über Log>Returns
  - Daten sind zu einem festen  $\Delta t$  gegeben
  - Aus  $\log S_{t+\Delta t} | \log S_t \sim N(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sqrt{\Delta t}\sigma^2)$  folgt der Schätzer
  - $\sigma^2 = s(\Delta \log S_t)$  und  $\mu = m(\Delta \log S_t)$  wobei  $s$  die empirische Varianz und  $m$  das Mittel ist
- Konfidenzintervalle und Unsicherheitsschätzung (Bootstrap)
  - Die Daten sind ggf. unrein
  - Schätze  $\mu$  und  $\sigma$  wiederholt auf einer Teilmenge der Daten schätzt
  - Ein Konfidenzband ergibt probabilistische Schätzung von  $\mu$  und  $\sigma$

# Simulation

- Exakte Pfadsimulation für GBM mit der geschlossenen Formel und der diskreten Brownsche Bewegung
- Anwendung z. B. Monte-Carlo-Simulation für Optionspreise
- Numerik: Euler–Maruyama für verallgemeinerte Modelle (CEV etc.)



# Backtests

- Validierung eines Modells anhand historischer Daten
- Metriken zur Bewertung

Hitratio

% im Konfidenzintervall

NRMSE

$$\frac{\sqrt{\text{MSE}}}{y_{\max} - y_{\min}}$$

MSE

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

MAPE

$$\frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

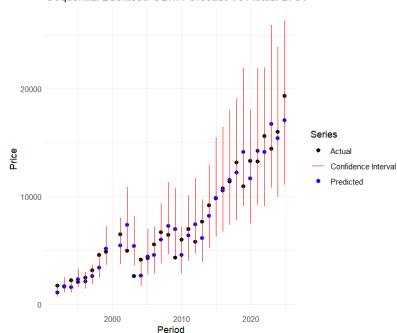


# Visualisierung von Backtests

Split Backtest: GBM Forecast vs Actual DAX



Sequential Backtest: GBM Forecast Vs Actual DAX



# Optionen

- Eine europäische Call Option gibt dem Käufer das Recht, aber nicht die Pflicht, eine Aktie am Zeitpunkt  $T$  zum Ausübungspreis  $K$  zu kaufen.
- Put Option: Recht auf Verkauf (an den Anbieter der Option)
  - Beispiel: Absicherung von Getreide-Ernte
- Auszahlungsfunktion  $\max(S_T - K, 0)$  (Call),  $\max(K - S_T, 0)$  (Put)
- Amerikanische Optionen: jederzeit Einlösbar
- Es gibt viele weitere Optionstypen mit anderen Auszahlungen

# Bewertung von Optionen

- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM

# Bewertung von Optionen

- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM
- Was ist mehr Wert? 100€ jetzt oder 100€ in einem Jahr?

# Bewertung von Optionen

- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM
- Was ist mehr Wert? 100€ jetzt oder 100€ in einem Jahr?
- 100€ jetzt, denn man könnte das Geld anlegen, und 2% Zinsen erhalten
- Modellerweiterung: Bank bietet risikofreien Zinssatz  $r$

# Bewertung von Optionen

- Naiver Ansatz: Erwartungswert der Ausübungsfunktion unter einem Aktienkursmodell wie der GBM
- Was ist mehr Wert? 100€ jetzt oder 100€ in einem Jahr?
- 100€ jetzt, denn man könnte das Geld anlegen, und 2% Zinsen erhalten
- Modellerweiterung: Bank bietet risikofreien Zinssatz  $r$
- Arbitrage-Prinzip: Der Trend der Aktie muss beim Preis der Option beachtet werden

# Herleitung des Black-Scholes Modells

1. Diskretes Modell: Binomialmodell
2. Options-Bewertung Binomialmodell
3. Black-Scholes als Limes  $N \rightarrow \infty$

# Diskretes Modell: Binomialmodell

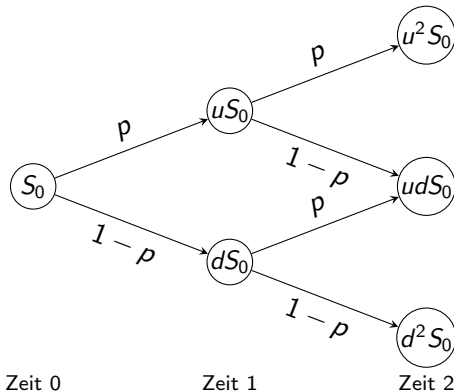
$$S_{t+1} = \begin{cases} d \cdot S_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ u \cdot S_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

Parameter:

Aufstieg  $u > 1$

Abstieg  $0 < d < 1$

Wkt.  $p \in (0, 1)$





# Bewertung von Optionen

- Unter Beachtung des risikofreien Zinssatzes wird der Kurs diskontiert:  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$

# Bewertung von Optionen

- Unter Beachtung des risikofreien Zinssatzes wird der Kurs diskontiert:  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$
- Arbitrage-Prinzip: Der Preis der Option muss unabhängig vom Trend der Aktie sein
- Mathematisch Formuliert: Martingal-Eigenschaft: für  $s < t$  gilt

$$E(e^{-rt} S_t | S_s = v) = e^{-rs} v$$

# Bewertung von Optionen

- Unter Beachtung des risikofreien Zinssatzes wird der Kurs diskontiert:  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$
- Arbitrage-Prinzip: Der Preis der Option muss unabhängig vom Trend der Aktie sein
- Mathematisch Formuliert: Martingal-Eigenschaft: für  $s < t$  gilt

$$E(e^{-rt} S_t | S_s = v) = e^{-rs} v$$

- Man konstruiert das risikoneutrale Maß  $Q$ , um die Martingaleigenschaft des diskontierten Kurses zu garantieren, und nutzt dieses zur Bewertung der Option

# Beispiel: risikoneutrale ein-Schritt-Wahrscheinlichkeit

Frage: wie muss  $p$  aussehen, damit  $e^{-rt}S_t$  im Binomialmodell ein Martingal ist? Diese Wahrscheinlichkeit wird im folgenden  $q$  genannt.

$$\begin{aligned} E(e^{-r(n+1)\Delta t} S_{n+1} \mid S_n = v) &= e^{-rn\Delta t} v \\ \iff E(e^{-r\Delta t} S_{n+1} \mid S_n = v) &= v. \end{aligned}$$

Setzt man die möglichen Werte für  $S_{n+1}$  ein ( $S_{n+1} = uS_n$  mit Wahrscheinlichkeit  $q$ ,  $S_{n+1} = dS_n$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - q$ ) folgt

$$e^{-r\Delta t} (quS_n + (1 - q)dS_n) = v.$$

$$e^{-r\Delta t} (qu + (1 - q)d) = 1$$

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$



# Bewertung von Optionen im Binomialmodell

- Zum Zeitpunkt  $N$  der Auszahlung ist der Wert der Option genau die Auszahlungsfunktion, z. B.  $\max(S_T - K, 0)$
- Zum Zeitpunkt  $N - 1$  und davor durch Rückwärtsinduktion gilt mit der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit  $q$

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= E_Q(e^{-r\Delta t} C_n \mid S_{n-1}) \\ &= e^{-r\Delta t} (q C_n^{\text{up}} + (1 - q) C_n^{\text{down}}) \end{aligned}$$

# Das Black-Scholes Modell

- Modellannahmen: GBM, konstante  $r, \sigma$ , keine Transaktionskosten
- Die diskrete Zeit im Binomialmodell wird stetig durch den Limes  $N \rightarrow \infty$
- In der Arbeit wird gezeigt, dass  $S_t$  unter  $Q$  wieder eine GBM ist. Damit kann man Aktien direkt durch Simulation bewerten (Monte-Carlo-Verfahren)
- Für europäische Optionen gilt darüber hinaus die explizite Formel

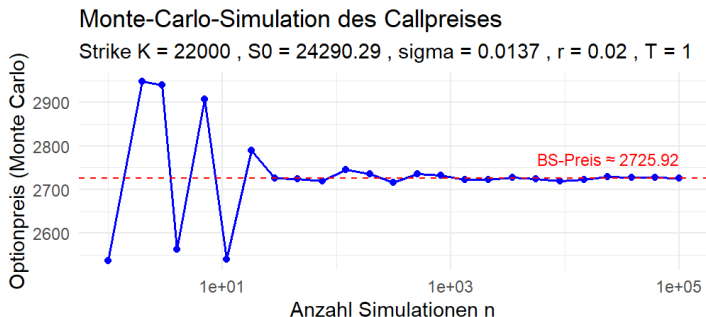
$$C_0^{\text{BS}} = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

# Beispiele

- Numerische Bewertung vs. geschlossene Formel: Vergleich für DAX-Calls
- Monte-Carlo- vs. Black-Scholes-Ergebnisvergleiche



# CEV-Modell

- Alternative zur GBM
- Stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\beta dW_t$$

- Diskretisierung:

$$\Delta S_i := S_{t_{i+1}} - S_{t_i} \approx \mu S_{t_i} \Delta t + \sigma S_{t_i}^\beta \sqrt{\Delta t} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\Delta S_i \mid S_{t_i} \sim \mathcal{N} \left( \mu S_{t_i} \Delta t, \sigma^2 S_{t_i}^{2\beta} \Delta t \right)$$



# Kalibrierung des CEV-Modell

- Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\Delta S_i \mid S_{t_i} \sim \mathcal{N} \left( \mu S_{t_i} \Delta t, \sigma^2 S_{t_i}^{2\beta} \Delta t \right)$$

- Dichte:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp \left( -\frac{(x - m)^2}{2v} \right), \quad m = \mu S_{t_i}, v = \sigma^2 S_{t_i}^{2\beta}$$

- ML-Schätzer: Betrachte alle Realisierungen der Zeitreihe, und maximiere die Dichte in Abhängigkeit der Parameter

$$L(\mu, \sigma, \beta) = \prod_{i=0}^{n-1} p(\Delta S_i \mid S_{t_i})$$

- Dies wurde in der Arbeit implementiert und mit der GBM verglichen

# Schlusswort

Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit