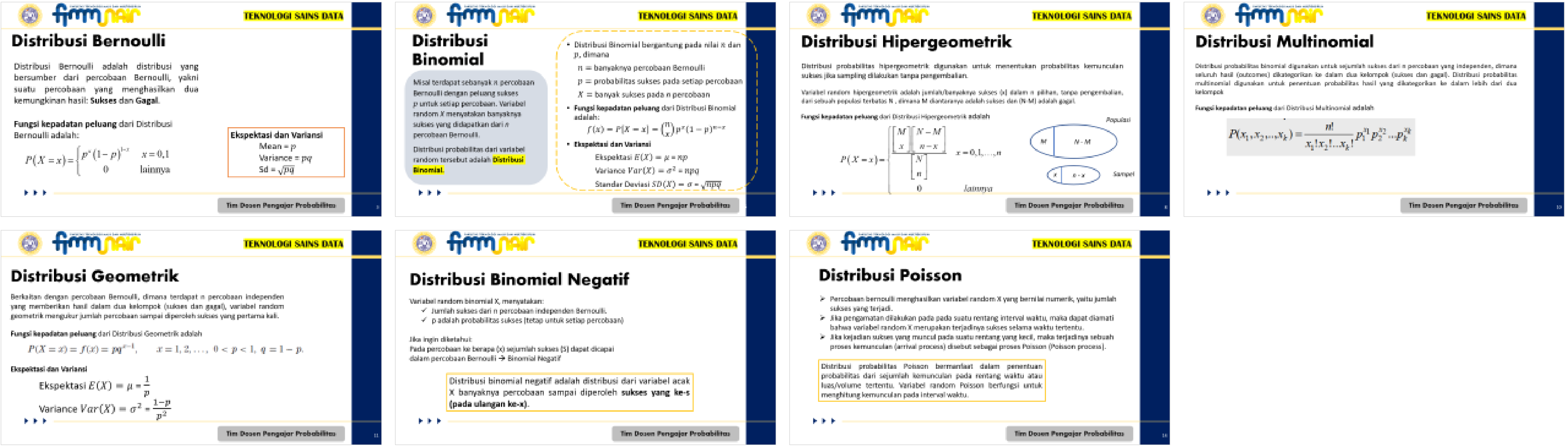
PROBABILITAS (MAS106)

Distribusi Diskrit

Tim Dosen Pengajar Probabilitas

Outline


Distribusi Bernoulli
Distribusi Binomial
Distribusi Hipergeometrik
Distribusi Multinomial
Distribusi Geometrik
Distribusi Binomial Negatif
Distribusi Poisson

Distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli adalah distribusi yang bersumber dari percobaan Bernoulli, yakni suatu percobaan yang menghasilkan dua kemungkinan hasil: **Sukses** dan **Gagal**.

Fungsi kepadatan peluang dari Distribusi Bernoulli adalah:

$$P(X=x)=\begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Ekspektasi dan Variansi

Mean = p

Variance = pq

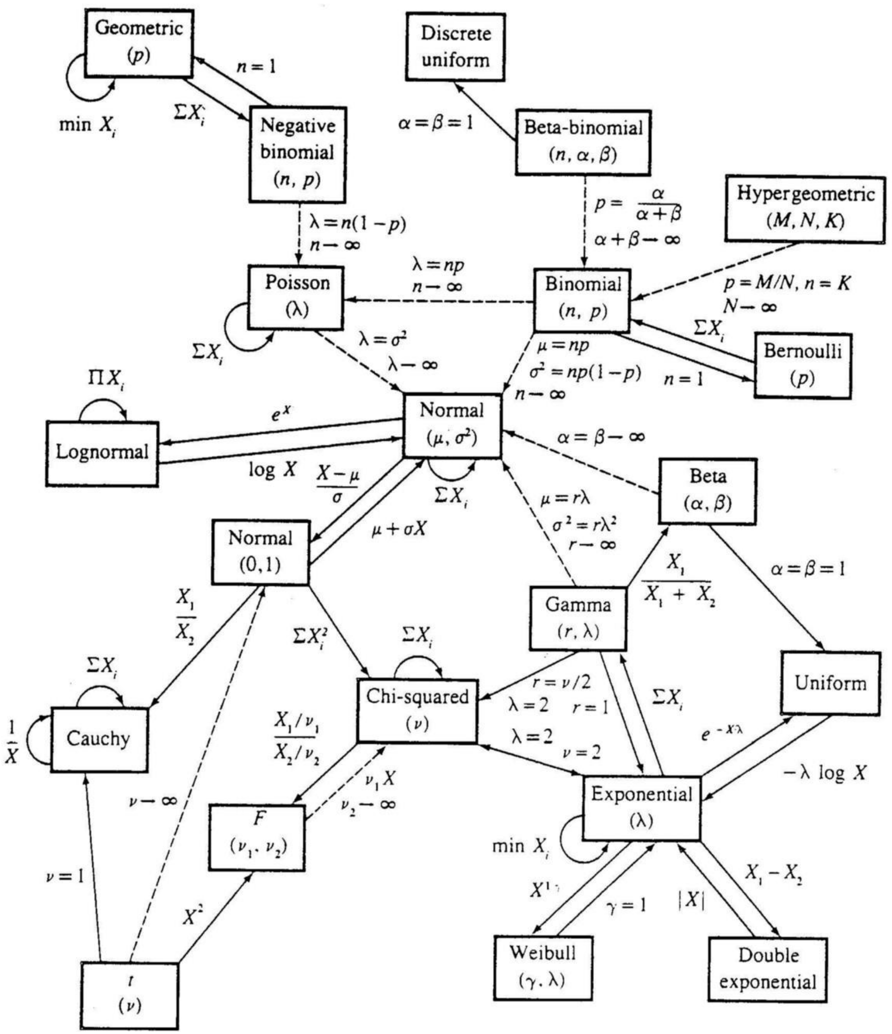
Sd = $\sqrt{pq}$

Funfact!

Beberapa distribusi didasari oleh proses Bernoulli, diantaranya adalah:

- ✓ Distribusi Binomial
- ✓ Distribusi Geometrik
- ✓ Distribusi Hipergeometrik
- ✓ Distribusi Multinomial

630 *Table of Common Distributions*



Relationships among common distributions. Solid lines represent transformations and special cases, dashed lines represent limits. Adapted from Leemis (1986).

Distribusi Binomial

Misal terdapat sebanyak n percobaan Bernoulli dengan peluang sukses p untuk setiap percobaan. Variabel random X menyatakan banyaknya sukses yang didapatkan dari n percobaan Bernoulli.

Distribusi probabilitas dari variabel random tersebut adalah **Distribusi Binomial.**

- Distribusi Binomial bergantung pada nilai n dan p, dimana

  n = banyaknya percobaan Bernoulli

  p = probabilitas sukses pada setiap percobaan

  X = banyak sukses pada n percobaan

- **Fungsi kepadatan peluang** dari Distribusi Binomial adalah:

$$f(x) = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

- **Ekspektasi dan Variansi**

  Ekspektasi $E(X) = \mu = np$

  Variance $Var(X) = \sigma^2 = npq$

  Standar Deviasi $SD(X) = \sigma = \sqrt{npq}$

Persyaratan Percobaan Binomial

1. Percobaan/eksperimen terdiri dari n yang berulang
2. Setiap percobaan memberikan hasil yang dapat ditentukan, yaitu sukses atau gagal
3. Probabilitas sukses, dinyatakan dengan p, tidak berubah dari percobaan yang satu ke percobaan yang berikutnya
4. Tiap percobaan bebas/tidak bergantung dengan percobaan yang lainnya

Tables of the Binomial Cumulative Distribution

The table below gives the probability of obtaining at most x successes in n independent trials, each of which has a probability p of success. That is, if X denotes the number of successes, the table shows

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

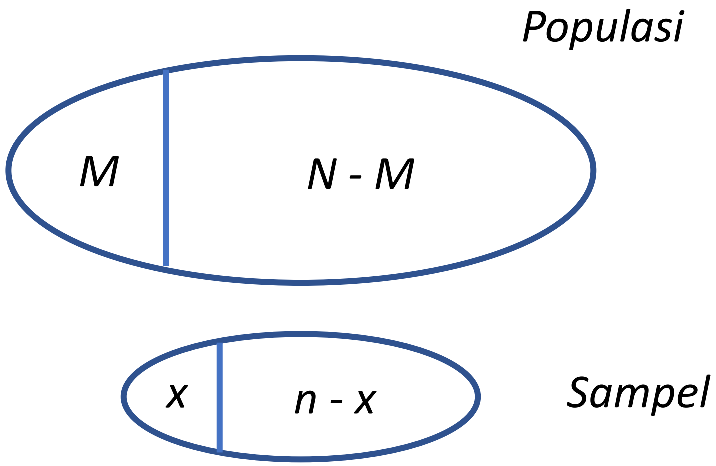
Distribusi Hipergeometrik

Distribusi probabilitas hipergeometrik digunakan untuk menentukan probabilitas kemunculan sukses jika sampling dilakukan tanpa pengembalian.

Variabel random hipergeometrik adalah jumlah/banyaknya sukses (x) dalam n pilihan, tanpa pengembalian, dari sebuah populasi terbatas N , dimana M diantaranya adalah sukses dan (N-M) adalah gagal.

Fungsi kepadatan peluang dari Distribusi Hipergeometrik adalah

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{\begin{bmatrix} M \\ x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N-M \\ n-x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}} & x=0,1,\ldots,n \\ 0 & lainnya \end{cases}$$



Jika X~Hipergeometri(N, M, n)

Ekspektasi dan Variansi

Ekspektasi $E(X) = \mu = \frac{Mn}{N}$

Variance $Var(X) = \sigma^2 = \frac{Mn}{N} \frac{(N-M)}{N} \frac{(N-n)}{N-1}$

Distribusi Multinomial

Distribusi probabilitas binomial digunakan untuk sejumlah sukses dari n percobaan yang independen, dimana seluruh hasil (outcomes) dikategorikan ke dalam dua kelompok (sukses dan gagal). Distribusi probabilitas multinomial digunakan untuk penentuan probabilitas hasil yang dikategorikan ke dalam lebih dari dua kelompok

Fungsi kepadatan peluang dari Distribusi Multinomial adalah

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

Distribusi Geometrik

Berkaitan dengan percobaan Bernoulli, dimana terdapat n percobaan independen yang memberikan hasil dalam dua kelompok (sukses dan gagal), variabel random geometrik mengukur jumlah percobaan sampai diperoleh sukses yang pertama kali.

Fungsi kepadatan peluang dari Distribusi Geometrik adalah

$$P(X = x) = f(x) = pq^{x-1}, \qquad x = 1, 2, \ldots, \;\; 0 < p < 1, \;\; q = 1 - p.$$

Ekspektasi dan Variansi

Ekspektasi $E(X) = \mu = \frac{1}{p}$

Variance $Var(X) = \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Distribusi Binomial Negatif

Variabel random binomial X, menyatakan:

- ✓ Jumlah sukses dari n percobaan independen Bernoulli.
- ✓ p adalah probabilitas sukses (tetap untuk setiap percobaan)

Jika ingin diketahui:
Pada percobaan ke berapa (x) sejumlah sukses (S) dapat dicapai dalam percobaan Bernoulli → Binomial Negatif

Distribusi binomial negatif adalah distribusi dari variabel acak X banyaknya percobaan sampai diperoleh **sukses yang ke-s (pada ulangan ke-x)**.

Distribusi Binomial Negatif

Fungsi kepadatan peluang dari Distribusi Binomial Negatif adalah

$$P(X = x) = f(x) = \binom{x-1}{s-1} p^s (1-p)^{(x-s)}$$

Ekspektasi dan Variansi

Ekspektasi $E(X) = \mu = \frac{s}{p}$

Variance $Var(X) = \sigma^2 = \frac{s(1-p)}{p^2}$

Distribusi Poisson

- Percobaan bernoulli menghasilkan variabel random X yang bernilai numerik, yaitu jumlah sukses yang terjadi.
- Jika pengamatan dilakukan pada pada suatu rentang interval waktu, maka dapat diamati bahwa variabel random X merupakan terjadinya sukses selama waktu tertentu.
- Jika kejadian sukses yang muncul pada suatu rentang yang kecil, maka terjadinya sebuah proses kemunculan (arrival process) disebut sebagai proses Poisson (Poisson process).

Distribusi probabilitas Poisson bermanfaat dalam penentuan probabilitas dari sejumlah kemunculan pada rentang waktu atau luas/volume tertentu. Variabel random Poisson berfungsi untuk menghitung kemunculan pada interval waktu.

Distribusi Poisson

Fungsi kepadatan peluang dari Distribusi Poisson adalah

$$P(X=x)=f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x=0,1,\ldots, \; \lambda>0.$$

Ekspektasi dan Variansi

Ekspektasi $E(X) = \mu = \lambda$

Variance $Var(X) = \sigma^2 = \lambda$

Terima Kasih ...