PROBABILITAS (MAS106)

Variabel Random Kontinu dan Fungsi Distribusinya

Tim Dosen Pengajar Probabilitas

OUTLINE

Distribusi Variabel Acak Kontinu
(+Distribusi khusus)

Fungsi Kepadatan Peluang
(*Probability Density Function*)

Fungsi Distribusi Kumulatif
(*Cumulative Distribution Function*)

Variabel Acak Kontinu

- Variabel acak disebut variabel acak kontinu jika fungsi distribusi kumulatifnya $F_X(x)$ adalah fungsi kontinu untuk semua $x \in R$.
- Ingat dari Teorema 1.5.3 bahwa $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$, untuk sembarang variabel acak X. Oleh karena itu, untuk variabel acak kontinu X, tidak ada titik massa diskrit; yaitu, jika X kontinu, maka $P(X = x) = 0$ untuk semua $x \in R$. Kebanyakan variabel acak kontinu benar-benar kontinu; yaitu

CDF

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X\,(t)}_{\text{PDF}}\, dt$$

$F_X(x)$ adalah *cumulative distribution function* dari X

PDF

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X\,(x)$$

$f_X(t)$ adalah *probability density function* dari X

Fungsi Distribusi Kumulatif (CDF)

Theorem 1.5.1. *Let X be a random variable with cumulative distribution function $F(x)$. Then*

(a) *For all a and b, if $a < b$, then $F(a) \le F(b)$ (F is nondecreasing).*

(b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *(the lower limit of F is 0).*

(c) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ *(the upper limit of F is 1).*

(d) $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ *(F is right continuous).*

Theorem 1.5.2. *Let X be a random variable with the cdf F_X. Then for $a < b$, $P[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$.*

Theorem 1.5.3. *For any random variable,*

$$P[X = x] = F_X(x) - F_X(x-), \tag{1.5.8}$$

for all $x \in R$, where $F_X(x-) = \lim_{z \uparrow x} F_X(z)$.

Sifat CDF

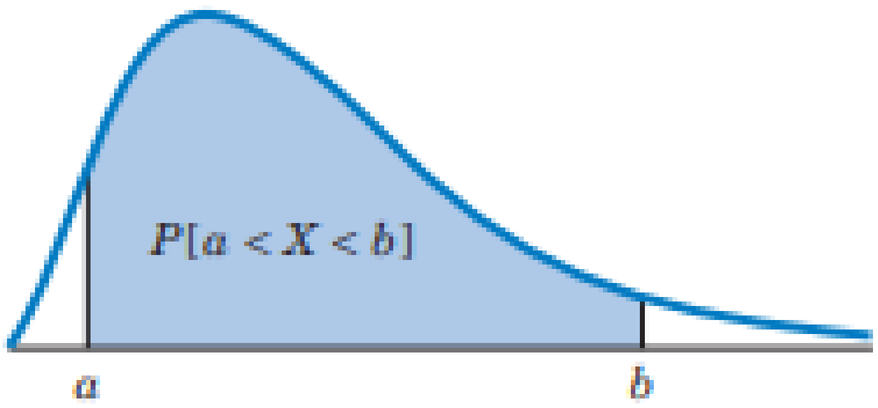
Jika X adalah variabel acak kontinu, maka **probabilitas** dapat diperoleh sbb:

- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X\,(t)\,dt$
- $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

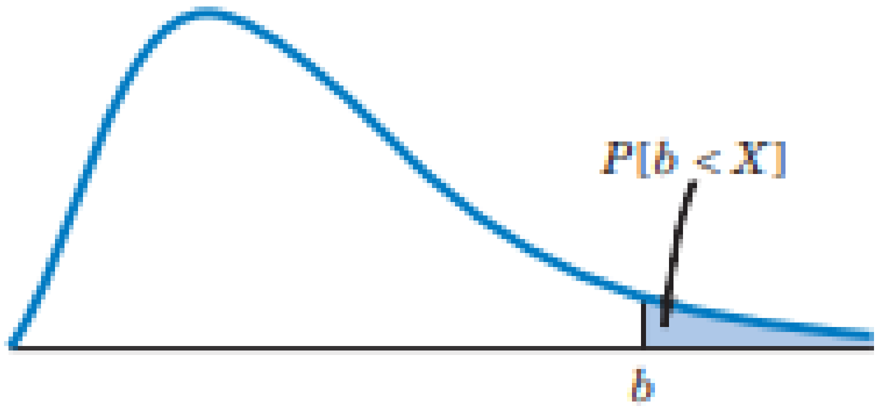
Sifat pdf

$-\infty < x < \infty$

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X\,(t)\,dt = 1$



$P[a < X < b]$ = (area kiri b) – (area kiri a)
= $P(X < b) - P(X < a)$
= $F(b) - F(a)$



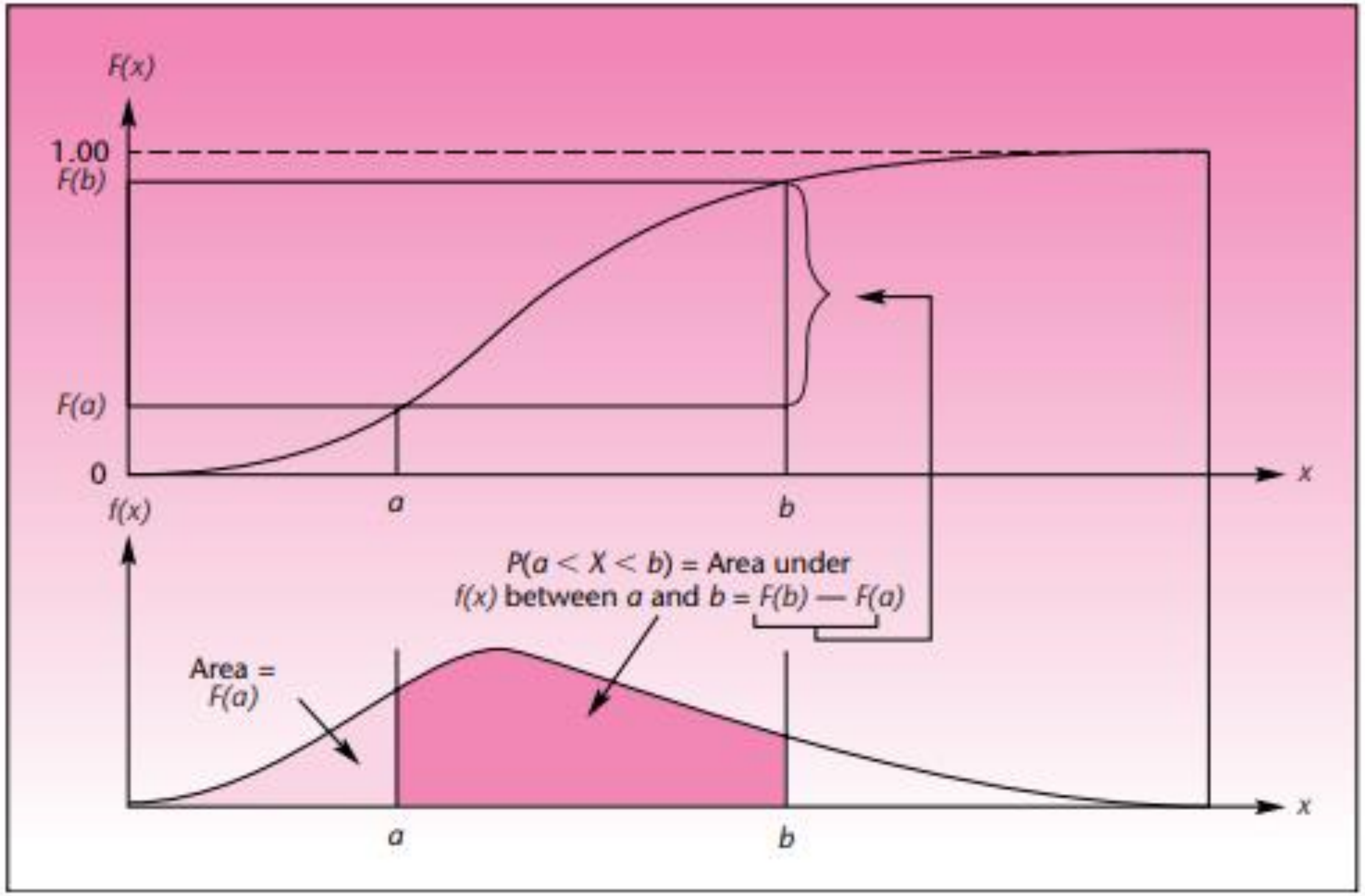
$P[b < X] = P[X > b]$= 1 – (area kiri b)
= $1 - P(X < b)$
= $1 - F(b)$

Keterangan

$F(x) = P(X \leq x)$ adalah area di bawah kurva $f(x)$ yang berada di antara nilai x terkecil yang mungkin (pada umumnya $-\infty$) dan titik x

Cumulative Distribution Function (CDF)

Hubungan Antara PDF dengan CDF



CDF

PDF

Contoh 1:

Percobaan acak dengan mengambil bilangan secara acak antara interval (0, 1). Bilangan yang terpilih, X, adalah variabel acak kontinu.

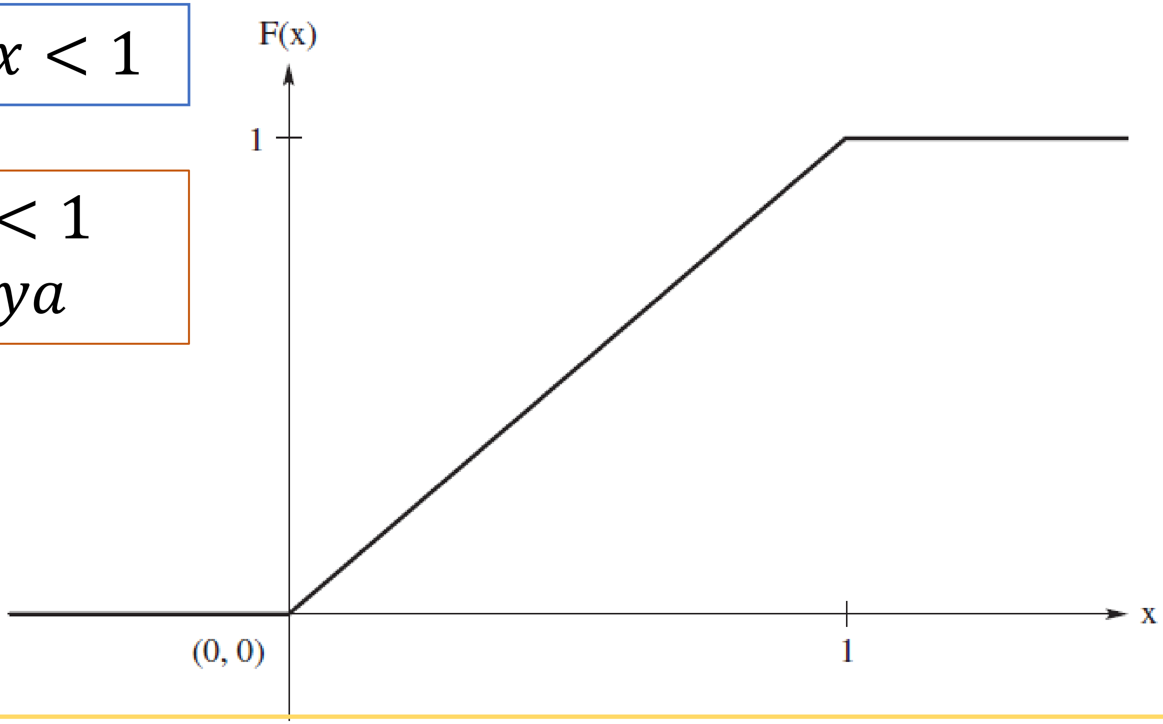
CDF

$F_X(x) = x$, untuk $0 < x < 1$

PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

UNIFORM DISTRIBUTION



Contoh 2:

Variabel acak X, yaitu waktu dalam detik antara panggilan telepon masuk di switchboard yang sibuk. Misalkan model probabilitas yang masuk akal untuk X diberikan oleh pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4} & 0 < x < \infty \\ 0 & lainnya. \end{cases}$$

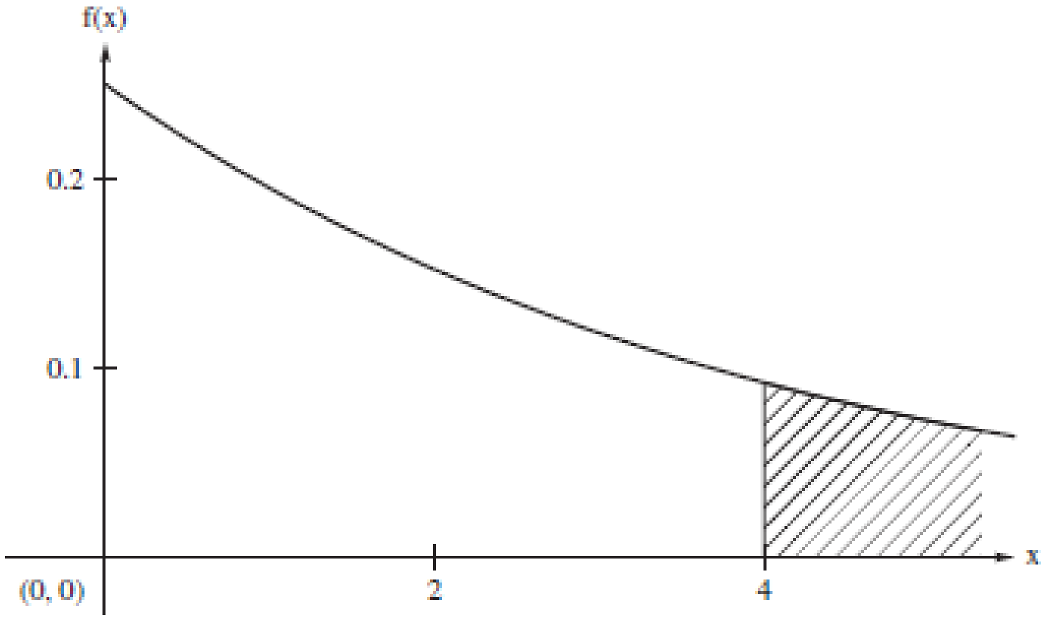
Diketahui bahwa f_X memenuhi 2 sifat dari pdf.

Probabilitas bahwa waktu antara panggilan telepon berturut-turut melebihi 4 detik adalah

$$P(X > 4) = \int_4^{\infty} \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx = e^{-1} = 0{,}3679$$

Contoh 2:

- Dari gambar, pdf memiliki **ekor kanan (*right tail*)** yang panjang dan tidak ada ekor kiri **(*left tail*)**. Kami mengatakan bahwa distribusi ini miring ke kanan (*skewed right*) atau miring positif (*positively skewed*). Ini adalah contoh **distribusi gamma**.



LATIHAN

Diberikan variabel random X dengan fungsi probabilitas adalah

$f_X(x) = cx^2\, I_{(0,1)}(x)$

atau

$f_X(x) = cx^2$ untuk $0 < x < 1$

a) Dapatkan nilai c
b) Tunjukkan bahwa $f_X(x)$ adalah suatu fungsi densitas probabilitas (pdf) dari X
c) Dapatkan $F_X(x)$ dan tunjukkan bahwa $F_X(x)$ memenuhi sifat-sifat cdf dari X
d) Hitunglah probabilitas $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$ dan $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$

LATIHAN

1.7.12. Find the cdf $F(x)$ associated with each of the following probability density functions. Sketch the graphs of $f(x)$ and $F(x)$.

(a) $f(x) = 3(1-x)^2$, $0 < x < 1$, zero elsewhere.

(b) $f(x) = 1/x^2$, $1 < x < \infty$, zero elsewhere.

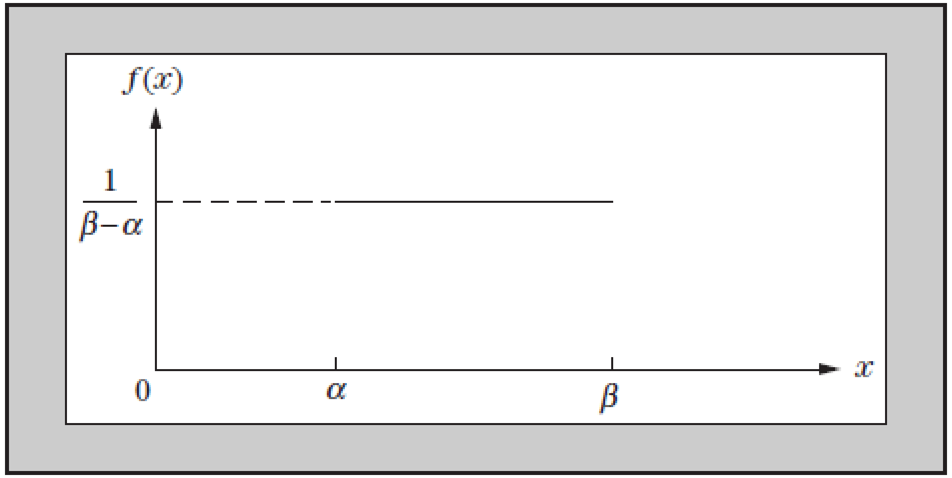
(c) $f(x) = \frac{1}{3}$, $0 < x < 1$ or $2 < x < 4$, zero elsewhere.

Distribusi Uniform

$$X \sim U(\alpha, \beta)$$

PDF

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & lainnya \end{cases}$$



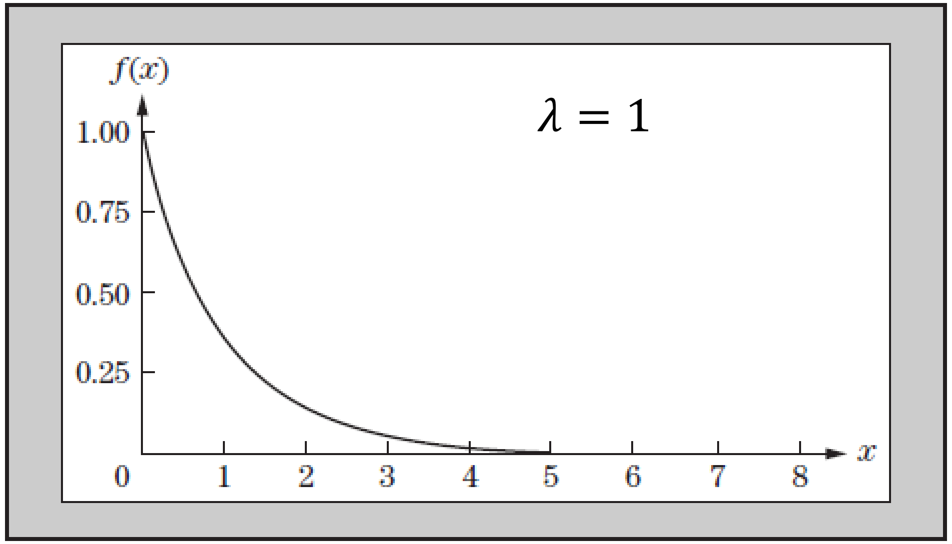
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}$$

Distribusi Eksponensial

$X \sim E(\lambda)$ dengan $\lambda > 0$

PDF

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & 0 < x < \infty \\ 0 & lainnya \end{cases}$$



Distribusi Gamma (Γ)

- Dukungan untuk distribusi gamma adalah himpunan bilangan real positif. Aplikasi ini mencakup penggunaannya dalam pemodelan lifetime, waktu kegagalan, waktu layanan, dan waktu tunggu.

- Fungsi gamma : $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy.$ untuk setiap $\alpha > 0$.

Jika $\alpha = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y}\, dy = 1.$$

Jika $\alpha > 1$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y}\, dy = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (3)(2)(1)\Gamma(1) = (\alpha - 1)!.$$

Distribusi Gamma (Γ)

Variabel acak kontinu, X, memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, atau biasa ditulis dengan $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

PDF

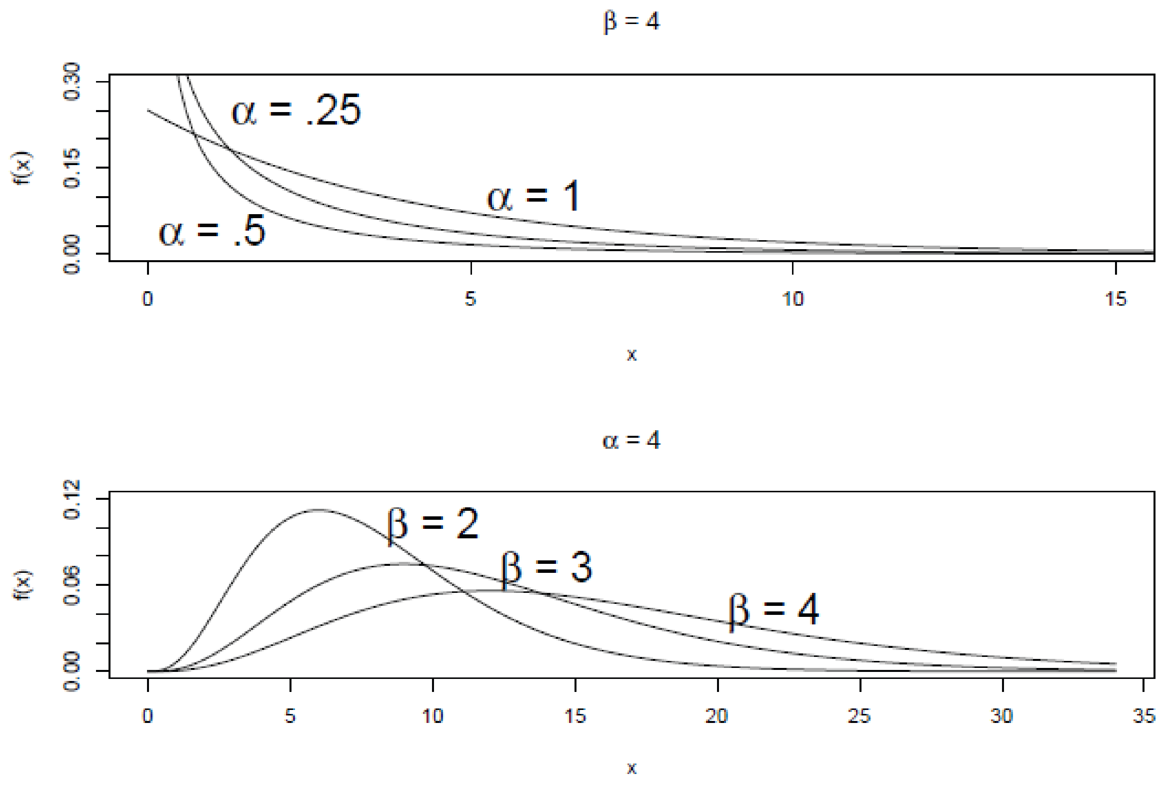
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

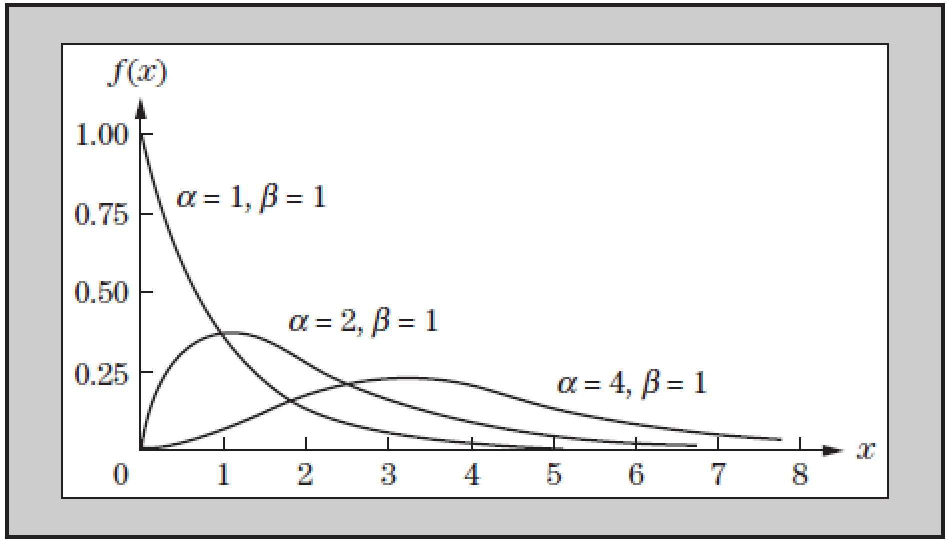
Menunjukkan fungsi $f(x)$ adalah suatu pdf

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty (\beta z)^{\alpha-1} e^{-z} \beta\, dz$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \beta^\alpha \Gamma(\alpha) = 1;$$

Sifat pdf terpenuhi

Distribusi Gamma (Γ)





Distribusi Chi-Square (χ^2)

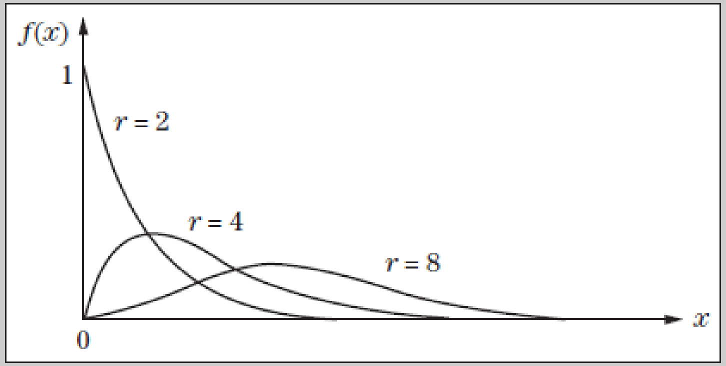
- Kasus khusus dari distribusi gamma di mana $\alpha = r/2$, di mana r adalah bilangan bulat positif, dan $\beta = 2$.

PDF

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

- Jika variabel acak X mengikuti distribusi chi-square dengan parameter r derajat bebas, dapat ditulis sebagai berikut

$$X \sim \chi^2(r)$$



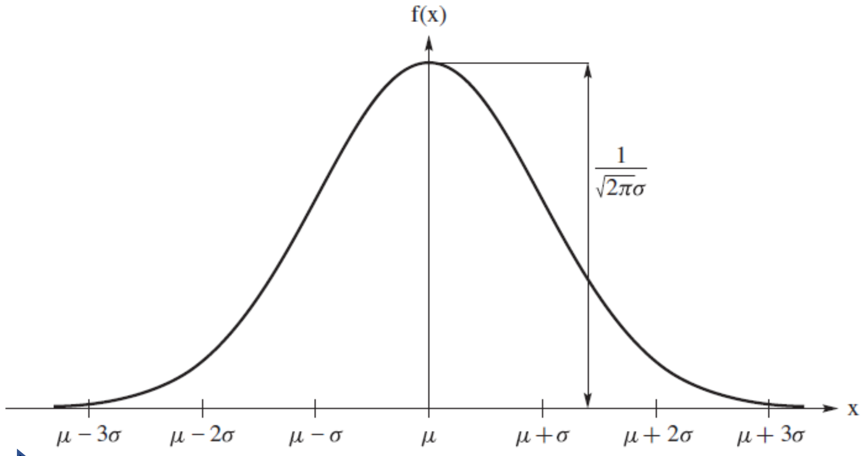
Distribusi Normal

Variabel acak X memiliki distribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2

atau $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

PDF

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$



$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dt.$$

Distribusi Normal Standar

$Z \sim N(0,1)$, variabel acak Z berdistribusi Normal Standar dengan mean 0 dan variansi 1.

Transformasi X ke Z

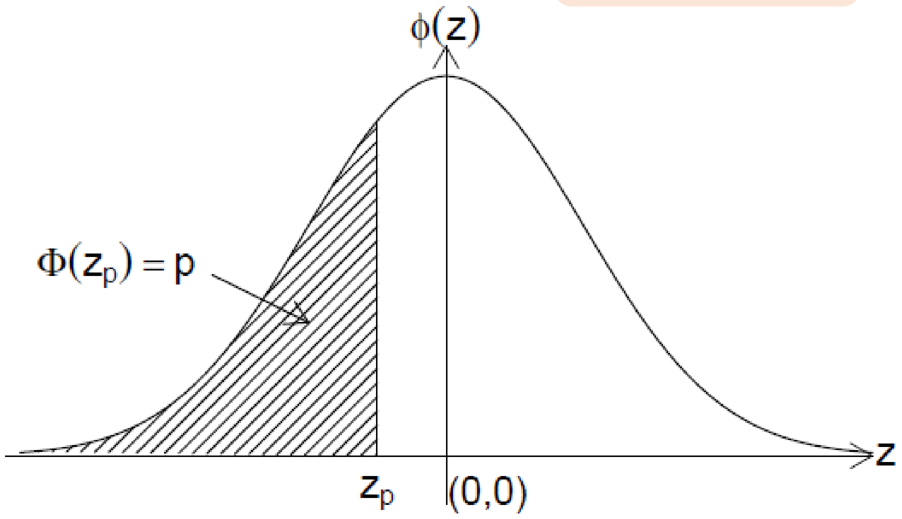
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

PDF

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right), \quad -\infty < z < \infty.$$

$$P(Z \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\boxed{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}$$



Menunjukkan bahwa fungsi $f(z)$ memenuhi sifat pdf, yaitu $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\ dz = 1$

1 $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz$$

2 $$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2+w^2}{2}\right) dzdw.$$

3 Koordinat polar (r, θ) dengan $z = r\cos\theta$ dan $w = r\sin\theta$

Jacobian $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

jadi
$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1. \end{aligned}$$
(normed)

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz$$
$$= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

dengan $z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma}$, $z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$, dan
Φ adalah cdf dari distribusi normal standar

-atau-

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \end{aligned}$$

Distribusi-t

Misalkan variabel acak *W* mengikuti distribusi Normal Standar dan *V* berdistribusi chi-square.

$$W \sim N(0,1) \text{ dan } V \sim \chi^2(r)$$

W dan *V* saling independen.

Variabel acak T atau ditulis $T = \frac{W}{\sqrt{V/r}}$ memiliki distribusi *t* dengan parameter *r* derajat bebas.

PDF

$$f(t) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \frac{1}{(1+t^2/r)^{(r+1)/2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

SOAL

1. Tunjukkan apakah fungsi $f(x)$ berikut adalah suatu pdf

   $a)\ f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$

   $b)\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty$

2. Dapatkan CDF dari fungsi probabilitas berikut

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & lainnya. \end{cases}$$