TEKNIK INTEGRASI

MATEMATIKA LANJUT
Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin

Outline

1. Integrasi Fungsi Trigonometri
2. Integral Tak Wajar
3. Integrasi Numerik

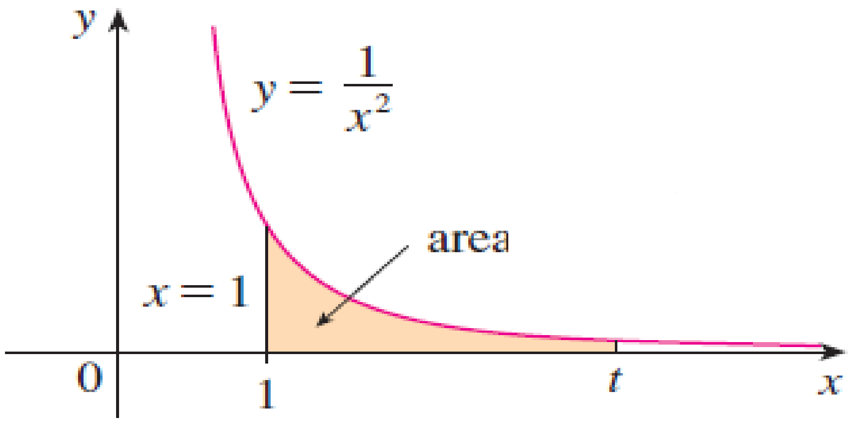
2. INTEGRAL TAK WAJAR

Pengantar

Tentukan luas area di bawah kurva $y = \frac{1}{x^2}$, di atas sumbu x antara $x = 1$ dan $x = t$ untuk $1 < t < \infty$

Jawab:

Gambar area dimaksud

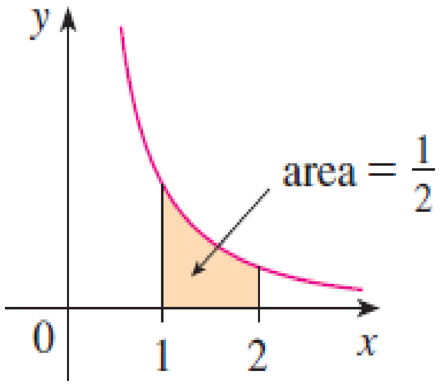


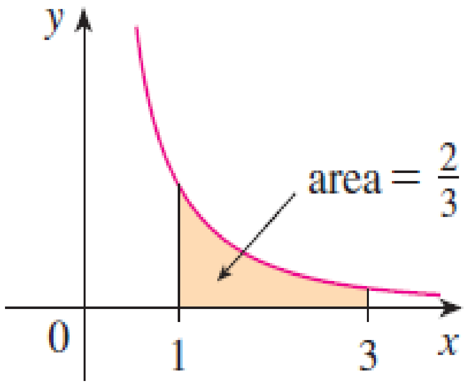
Luas area dimaksud

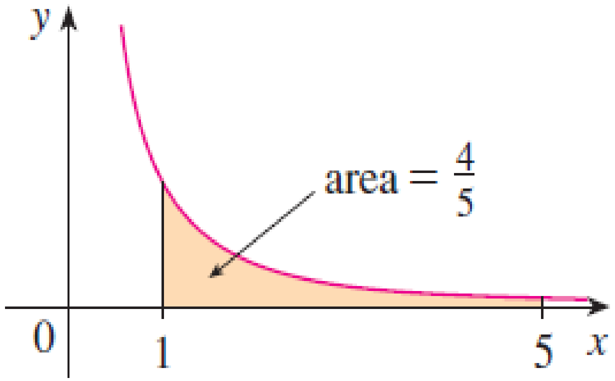
$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Tentukan luas area di bawah kurva $y = \frac{1}{x^2}$, di atas sumbu x antara $x = 1$ dan $x = t$ untuk $1 < t < \infty$

Misalkan dipilih beberapa nilai untuk t







Untuk t =2
Luas:
$A(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Untuk t =3
Luas:
$A(3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Untuk t =5
Luas:
$A(5) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

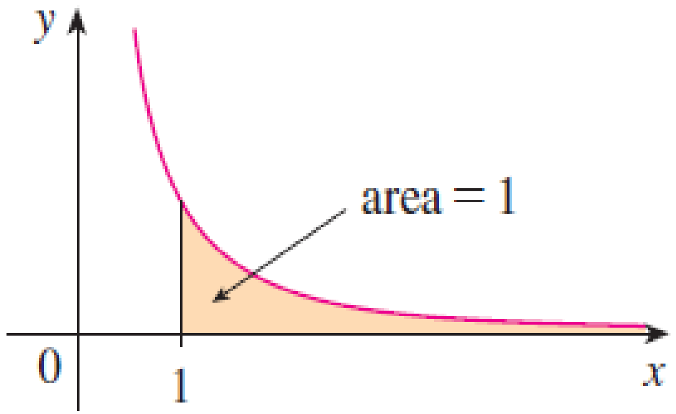
Fakta: t semakin besar maka luas $A(t)$ semakin besar, namun selalu berlaku $A(t) < 1$.

Tentukan luas area di bawah kurva $y = \frac{1}{x^2}$, di atas sumbu x antara $x = 1$ dan $x = t$ untuk $1 < t < \infty$

Untuk nilai t semakin besar, yaitu $t \to \infty$, diperoleh

Luas area:

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$



Jadi luas area di bawah kurva $y = \frac{1}{x^2}$, di atas sumbu x antara $x = 1$ dan $x = t$ untuk $t \to \infty$ adalah

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Integral Tak Wajar Tipe 1

1 Jika $\int_a^t f(x)dx$ ada untuk setiap $t \geq a$, maka

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

2 Jika $\int_t^b f(x)dx$ ada untuk setiap $t \leq b$, maka

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

Integral tak wajar $\int_a^{\infty} f(x)dx$ dan $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ dikatakan:

- **konvergen** jika limit integralnya ada
- **divergen** jika limit integralnya tidak ada

3 Jika $\int_a^{\infty} f(x)dx$ dan $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ keduanya konvergen maka didefinisikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

untuk sebarang bilangan real ***a***

Contoh

Hitunglah $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\ dx$

Penyelesaian.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\ dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^{x}\ dx$$

Dengan integrasi pasial,

$$\int_{t}^{0} xe^{x}\ dx = xe^{x} - e^{x}\Big]_{t}^{0} = 0 - 1 - (te^{t} - e^{t}) = e^{t} - te^{t} - 1$$

sehingga

$$\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^{x}\ dx = \lim_{t\to-\infty} (e^{t} - te^{t} - 1) = \lim_{t\to-\infty} e^{t} - \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} - 1 = 0 - 0 - 1 = -1$$

Diperoleh

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\ dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^{x}\ dx = -1.$$

Contoh

Hitunglah $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Penyelesaian.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Selanjutnya

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \arctan x\Big]_{0}^{t} = \lim_{t\to\infty} \arctan t \; - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \arctan x\Big]_{t}^{0} = \lim_{t\to-\infty} (0 \; - \; \arctan t) = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

Diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Integral Tak Wajar Tipe 2

1 Jika f kontinu pada [a,b) dan diskontinu pada ***b***, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

2 Jika Jika f kontinu pada (a,b] dan diskontinu pad ***a***, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Integral tak wajar $\int_a^b f(x)dx$ di atas dikatakan:

- **konvergen** jika limit integralnya ada
- **divergen** jika limit integralnya tidak ada

3 Jika f diskontinu di ***c*** untuk ***a < c < b*** dan integral $\int_a^c f(x)dx$ dan $\int_c^b f(x)dx$ keduanya konvergen maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

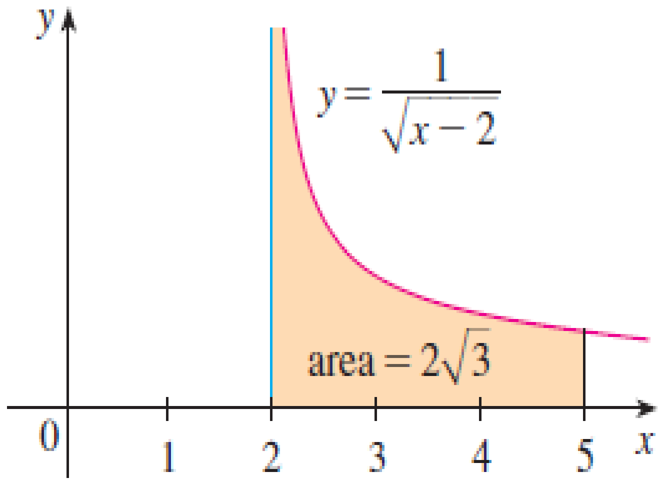
Contoh

Hitunglah $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$

Penyelesaian.

Integran diskontinu di $x = 2$.

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$



Diperoleh:

- $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$ konvergen
- Luas area di bawah kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, di atas sumbu x pada $2 < x \le 5$ adalah $2\sqrt{3}$.

Contoh

Apakah $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ konvergen ataukah divergen?

Penyelesaian.

Karena $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec x \; dx = \infty$ maka

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \ln |\sec x + \tan x| \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to (\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty$$

Catatan: jika $t \to (\pi/2)^-$ maka $\sec t \to \infty$ dan $\tan t \to \infty$

Jadi $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ **divergen**.

Contoh

Apakah $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ konvergen ataukah divergen?

Penyelesaian.

Karena integran diskontinu di x =1, maka

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

Jadi $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$ divergen. Akibatnya $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ **divergen**.

AWAS: $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$, tetapi ini **SALAH** **(tidak memperhatikan diskontinuitas)**

Latihan

1. Jelaskan mengapa integral di bawah ini merupakan integral tak wajar.

(a) $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. Manakah di antara integral di bawah ini merupakan integral tak wajar?

(a) $\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\,dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{1 + x^2}\,dx$ (d) $\int_1^2 \ln(x - 1)\,dx$

Selesaikan integral berikut

3. $\int_0^1 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

4. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x}$

5. $\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\,dx$

Latihan

7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}\, dw$

8. $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx$

9. $\int_{4}^{\infty} e^{-y/2}\, dy$

10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\, dt$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} (2-v^4)\, dv$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$

14. $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

15. $\int_{2\pi}^{\infty} \sin\theta\, d\theta$

16. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\, dt$

17. $\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x}\, dx$

18. $\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z^2+3z+2}$

19. $\int_{0}^{\infty} se^{-5s}\, ds$

20. $\int_{-\infty}^{6} re^{r/3}\, dr$

Latihan

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

24. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$

25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

30. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Latihan

33. $\int_0^{33} (x-1)^{-1/5}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{4y-1}\,dy$

35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$

36. $\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\,dx$

37. $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

END