



# Riset Operasi

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023

Pertemuan 11&12

## Teori Antrean (1)

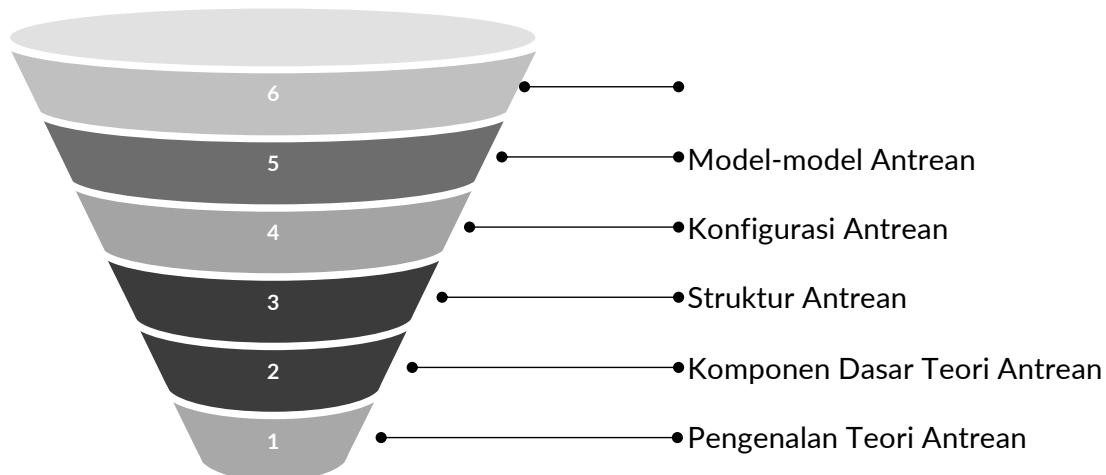
Chandrawati P. Wulandari, Ph.D.  
contact me at: chandrawati.p.w@ftmm.unair.ac.id

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

1



## Course Outline



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

2

2

# 1.

## *Pengenalan Teori Antrean*



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

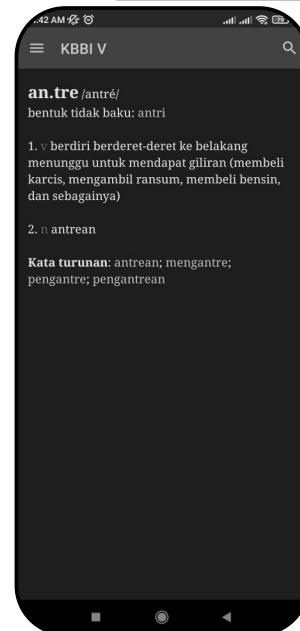
3

Pengenalan Teori Antrean

## **Teori Antrean (1/8)**

- ▷ **Definisi Antre/ Antrean:**  
Menunggu giliran untuk mendapatkan pelayanan dari suatu fasilitas
- ▷ **Contoh dalam kehidupan sehari-hari:**
  - Antre membeli karcis/tiket di loket bioskop
  - Antre mengambil uang di ATM Center
  - Antre berobat ke dokter
  - Kemacetan lalu lintas/ antrean saat *traffic light*
  - Antre pesan makanan (*drive thru*), dsb.
- ▷ **Antrean terjadi karena:**  
Kemampuan pelayanan tidak bisa mengimbangi kebutuhan pelayanan

pelanggan > kapasitas fasilitas layanan



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

4

## Teori Antrean (2/8)

- ▷ Teori antrean pertama kali dikemukakan oleh **Agner Kraup Erlang**, seorang ahli matematika kebangsaan Denmark, melalui **publikasi makalah tentang Queueing Theory pada tahun 1909**
- ▷ Tahun 1917, A.K. Erlang menuangkan pemikirannya terkait teori antrean ke dalam bukunya yang berjudul "*Solution of Some Problem in the Theory of Probability of Significance in Automatic Telephone Exchange*".
- ▷ Kontribusinya diawali dengan pengalamannya bekerja di *Copenhagen Telephone Exchange* saat mengamati permasalahan yang dihadapi terkait kepadatan penggunaan telepon di *Copenhagen Telephone*.
  - Permintaan pelayanan telepon **masih dilakukan manual** oleh operator untuk menghubungkan ke nomor yang dituju oleh pengguna
  - Pengguna **harus menunggu** akibat **kepadatan lalu lintas komunikasi**



5

## Teori Antrean (3/8)

- ▷ Dampak dari Antrean
  - Keterlambatan pelayanan
  - Kekecewaan pelanggan
- ⇒ Konsekuensi Kerugian
- ⇒ Pelanggan mencari Pelayanan lain
- ▷ Sebaliknya:
- pelanggan < kapasitas fasilitas layanan
- ⇒ Konsekuensi Pemborosan
- ▷ Tingkat kedatangan orang/barang ke dalam suatu sistem antrean bersifat **random** → tidak bisa diduga secara tepat/ probabilitas tidak bisa ditentukan dengan pasti



6

## Teori Antrean (4/8)

▷ Tujuan penggunaan teori antrean

- merancang fasilitas pelayanan dengan permintaan pelayanan yang berfluktuasi sehingga bisa diperoleh fasilitas pelayanan yang memiliki keseimbangan antara biaya pelayanan dan biaya antre.
- Meminimumkan jumlah seluruh biaya, baik biaya-biaya yang disebabkan oleh:
  - fasilitas menganggur, maupun
    - Investasi untuk pengadaan fasilitas berlebih
    - Biaya upah operator fasilitas pelayanan
  - biaya karena pelanggan menunggu pelayanan
    - Kompensasi untuk pelanggan agar tetap bersedia menunggu
- Meminimumkan kerugian akibat tertundanya pelayanan pelanggan
  - Biaya tunggu, berpindahnya pelanggan ke pihak lain



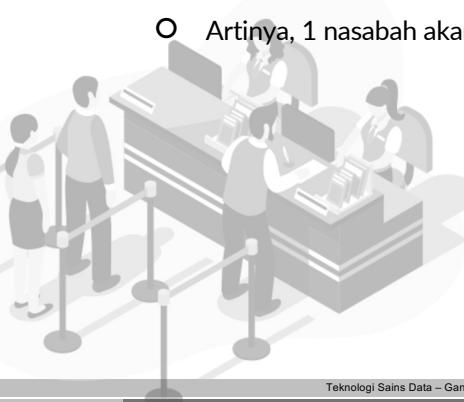
7

## Teori Antrean (5/8)

**Contoh Ilustrasi:**

▷ Informasi pelayanan nasabah Bank Airlangga diketahui sebagai berikut:

- Kapasitas pelayanan rata-rata adalah 10 nasabah per jam (dengan 3 operator/petugas)
- Artinya, 1 nasabah akan dilayani kurang lebih 6 menit waktu pelayanan
  - Rata-rata tingkat kedatangan nasabah ke dalam bank adalah 6 orang per jam
  - Waktu kedatangan bersifat **random**
  - Ilustrasi seperti tabel pada slide berikutnya:



8

## Teori Antrean (6/8)

### Contoh Ilustrasi:



Nasabah ke-	Jam Datang	Jam Pelayanan		Idle Time	Waiting Time	Panjang Antrean
		Mulai	Selesai			
1	8:07	8:07	8:13	-	-	-
2	8:14	8:14	8:20	1 menit	-	-
3	8:25	8:25	8:31	5 menit	-	-
4	8:39	8:39	8:45	8 menit	-	-
5	8:43	8:45	8:51	-	2 menit	-
6	8:56	8:56	9:02	5 menit	-	-

Banyak waktu menganggur → perlu kurangi jumlah petugas/fasilitas

**Pros:** biaya gaji petugas berkurang, biaya investasi fasilitas berkurang

**Cons:** pelanggan bisa menunggu lebih lama, antrean lebih panjang

9

## Teori Antrean (7/8)

### Contoh Ilustrasi:

#### Skenario baru:

- Petugas dikurangi menjadi 2 orang
- Waktu pelayanan menjadi 9 menit/pelanggan



Nasabah ke-	Jam Datang	Jam Pelayanan		Idle Time	Waiting Time	Panjang Antrean
		Mulai	Selesai			
1	8:07	8:07	8:16	-	-	-
2	8:14	8:16	8:25	-	2 menit	1
3	8:25	8:25	8:34	-	-	-
4	8:39	8:39	8:48	5 menit	-	-
5	8:43	8:48	8:57	-	2 menit	1
6	8:56	8:57	9:06	-	1 menit	1

Waktu menganggur berkurang

pelanggan lebih banyak menunggu

antrean lebih sering terjadi

10

## Teori Antrean (8/8)

### Contoh Ilustrasi:

#### Skenario awal:

- Petugas pelayanan ada 3 orang
- Waktu pelayanan semula 6 menit/pelanggan



#### Risiko:

- Banyak waktu menganggur
- Biaya investasi penyediaan pelayanan, seperti biaya gaji petugas tetap harus ditanggung walau banyak petugas menganggur

#### Skenario baru:

- Petugas dikurangi menjadi 2 orang
- Waktu pelayanan menjadi 9 menit/pelanggan

#### Risiko:

- Waktu menganggur berkurang
- Biaya investasi penyediaan pelayanan, seperti biaya gaji petugas berkurang
- Antrian dan waktu tunggu menjadi lebih banyak

Pilih alternatif skenario yang dapat **meminimumkan biaya yang harus dikeluarkan**

11

# Komponen Dasar Teori Antrean

12

## 1. Channel

- ▷ Channel adalah jalur dimana objek/input bisa mendapatkan pelayanan
- ▷ Ada antrean yang memiliki lebih dari satu jalur untuk jenis pelayanan yang sama
- ▷ Contoh:
  - Kasir di supermarket
    - Pelanggan bisa memilih salah satu kasir yang kosong atau paling sedikit antreannya



13

13

## 2. Fase Pelayanan

- ▷ Fase pelayanan adalah tahap pelayanan
- ▷ Dalam permasalahan antrean, pelanggan/objek/input yang dilayani **bisa memiliki satu fase pelayanan atau lebih**
  - Satu fase pelayanan: objek yang masuk hanya dilayani 1 kali dalam 1 kesempatan pelayanan
  - Lebih dari satu fase pelayanan: objek yang masuk akan dilayani akan melalui beberapa tahap pelayanan
- ▷ Contoh:
  - Layanan perpanjangan/pembuatan SIM

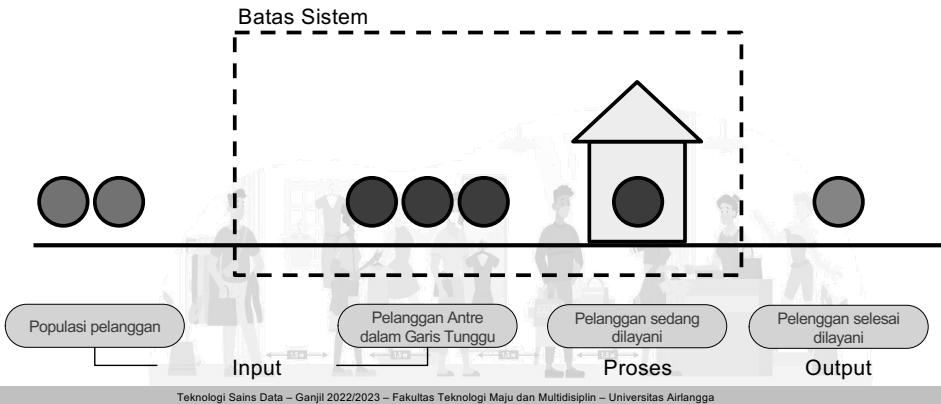


14

14

### 3. Sistem Antrean

- ▷ Sistem: terdiri dari **input – process – output**
- ▷ Sistem antrean adalah keseluruhan dari kegiatan atau pelayanan yang diberikan kepada objek/input, sejak datang hingga selesai dilayani.
- ▷ Contoh sederhana (1 channel – 1 fase):



15

15

### 4. Masukan (Input)

- ▷ Masukan (input) adalah objek yang datang atau masuk ke dalam sistem untuk mendapatkan pelayanan
- ▷ Masukan (input) dapat berupa:
  - Orang, barang, atau kertas kerja, dll.
- ▷ Banyak atau sedikitnya masukan (input) bersifat relatif dibandingkan pada kapasitas pelayanan yang ada



16

16

## 5. Pola Kedatangan (*arrival pattern*) (1/3)

- ▷ Merupakan **sifat** dari kedatangan objek yang masuk untuk mendapatkan pelayanan
- ▷ Sifat kedatangan, contohnya:
  - **Konstan**
    - Setiap jangka waktu tertentu pasti ada satu objek yang datang
    - Misal:  
barang yang harus dilayani oleh mesin-mesin secara berkesinambungan dalam proses produksi (pasti muncul pada jangka waktu tertentu)



17

17

## 5. Pola Kedatangan (*arrival pattern*) (2/3)

- ▷ Sifat kedatangan, contohnya:
  - **Random (acak)** → paling umum digunakan/terjadi dalam teori antrean
    - Waktu kedatangan objek **tidak teratur**
    - Probabilitas kedatangannya mengikuti **distribusi Poisson**
    - Kedatangan pelanggan antar selang waktu **tidak saling mempengaruhi**
    - Misal:  
banyaknya panggilan telepon yang masuk di suatu kantor



18

18

## 5. Pola Kedatangan (*arrival pattern*) (3/3)

### Perilaku Kedatangan

Ada 3 jenis perilaku kedatangan:

1. **Reneaging** menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam suatu antrean, namun belum memperoleh pelayanan kemudian meninggalkan antrean tersebut
2. **Balking** menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrean dan langsung meninggalkan tempat antrean
3. **Jockeying** menggambarkan orang-orang yang berpindah-pindah antrean



19

19

## 6. Rata-rata Kedatangan (1/2)

- ▷ Rata-rata kedatangan adalah rata-rata banyaknya masukan/objek yang memerlukan pelayanan pada setiap jangka waktu tertentu
- ▷ Mengikuti distribusi Poisson
- ▷ Disebut juga sebagai laju kedatangan atau tingkat kedatangan
- ▷ Biasanya dinotasikan dengan simbol  $\lambda$  (lambda)
- ▷ Misalnya:
  - Setiap jam ada 5 pelanggan yang datang ke sebuah kantor pos ( $\lambda = 5$ )

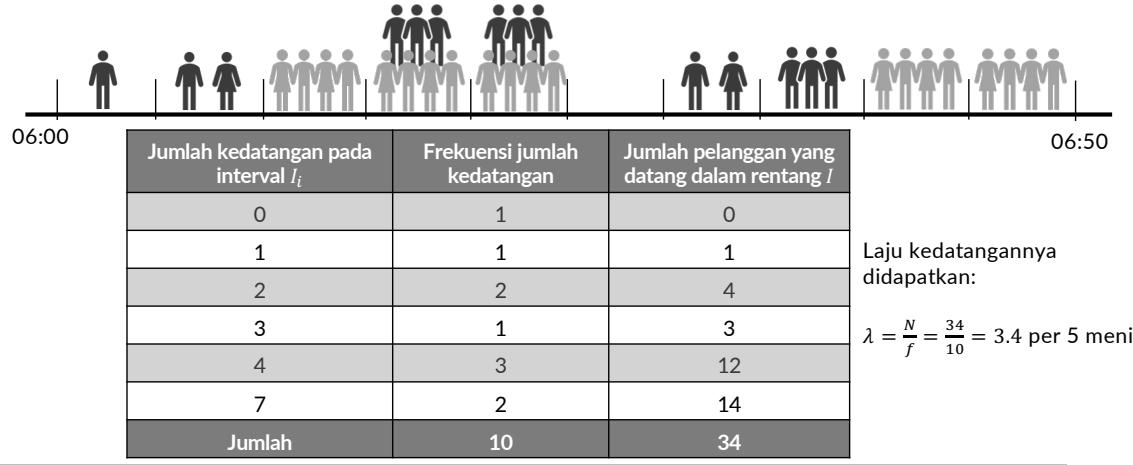


20

20

## 6. Rata-rata Kedatangan (2/2)

- ▷ Contoh mendapatkan laju kedatangan atau tingkat kedatangan (adopsi pengamatan A.K. Erlang):
- ▷ Misalkan dalam rentang 50 menit, dibagi menjadi 10 interval masing-masing 5 menit



21

21

## 7. Jarak antar Kedatangan

- ▷ Jarak antar kedatangan adalah jangka waktu mulai kedatangan dari objek satu dengan kedatangan objek berikutnya
- ▷ Dikenal juga dengan waktu antar kedatangan
- ▷ Biasanya diformulasikan dengan hubungan  $\frac{1}{\lambda}$
- ▷ Misalnya:
  - Setiap jam ada 5 pelanggan yang datang ke sebuah kantor pos ( $\lambda = 5$ )
  - Maka, jarak antar kedatangan dengan objek selanjutnya adalah  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$  jam
- ▷ Mengikuti **distribusi eksponensial**



22

22

## 8. Disiplin Antrean (*Queue Discipline*) (1/2)

- ▷ Disiplin antrean adalah aturan mengenai bagaimana urutan pelayanan dilakukan
  - Ketentuan mengenai objek mana yang sebaiknya dilayani terlebih dahulu
- ▷ **Disiplin preemptive** menggambarkan situasi dimana pelayan sedang melayani seseorang, kemudian beralih melayani orang yang diprioritaskan meskipun belum selesai melayani orang sebelumnya.
- ▷ **Disiplin non-preemptive** menggambarkan situasi dimana pelayan akan menyelesaikan pelayanannya baru kemudian beralih melayani orang yang diprioritaskan



23

23

## 8. Disiplin Antrean (*Queue Discipline*) (2/3)

- ▷ Macam-macam disiplin antrean:
  - *First Come First Served* (FCFS) = FIFO
    - Objek yang datang pertama yang akan dilayani terlebih dahulu
  - *Last Come First Served* (LCFS) = LIFO
    - Objek yang datang terakhir yang akan dilayani terlebih dahulu
  - *Served It Random Order* (SIRO)
    - Pelayanan objek secara random (tidak memandang urutan kedatangan)



24

24

## 8. Disiplin Antrean (*Queue Discipline*) (3/3)

- Ada pula yang tidak menggunakan salah satu dari 3 disiplin antrean yang telah disebutkan
- Misal:
  - Layanan Prioritas
    - Antrean masuk kabin pesawat, mengutamakan first class, lansia, atau ibu dengan anak-anak
    - Antrean pelayanan di rumah sakit: pasien dengan keadaan gawat akan ditangani terlebih dahulu
    - dsb.



25

25

## 9. Antrean (*Queue*)

- ▷ Antrean adalah kumpulan dari objek yang menunggu untuk dilayani oleh server/operator
- ▷ Kapasitas antrean ada yang terbatas maupun tidak.
- ▷ Untuk kapasitas antrean tidak terbatas, maka fasilitas layanan mampu menampung objek untuk menunggu dilayani
- ▷ Misal kapasitas antrean terbatas:
  - *Pre-order* atau *waiting list*



26

26

## 10. Panjang Antrean & Tingkat Pelayanan

### Panjang Antrean

- ▷ Panjang antrean adalah banyaknya objek yang menunggu pelayanan karena fasilitas pelayanan masih melayani objek yang datang sebelumnya (*busy*)

### Tingkat Pelayanan

- ▷ Tingkat pelayanan (*service rate*) adalah kemampuan fasilitas pelayanan untuk melayani objek selama satu periode tertentu
  - Biasanya diberi simbol  $\mu$  (miu)
- ▷ Rata-rata waktu pelayanan (*service time*) adalah waktu rata-rata yang dibutuhkan oleh fasilitas pelayanan untuk melayani satu objek
  - Biasanya diberi simbol  $\frac{1}{\mu}$
- ▷ Contoh:
  - Jika suatu fasilitas pelayanan mampu melayani 8 orang per jam ( $\mu = 8$ ), maka waktu pelayanan rata-ratanya adalah  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{8}$  jam

27

27

## 11. Traffic Intensity & Keluaran (output)

### Traffic Intensity

- ▷ Traffic Intensity adalah perbandingan antara rata-rata kedatangan dan rata-rata kemampuan pelayanan terhadap suatu objek selama jangka waktu tertentu
- ▷ Diformulasikan sebagai berikut:  $\frac{\lambda}{\mu}$

### Keluaran (output)

- ▷ Keluaran adalah objek yang telah selesai dilayani dan bisa meninggalkan sistem



28

28

## 12. Jumlah Server (*Service Mechanism*)

- ▷ Pelayanan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan (fasilitas pelayanan)
- ▷ Contohnya:
  - jalan tol dapat memiliki beberapa pintu tol.
  - Praktek dokter hanya memiliki satu server yaitu dokter itu sendiri
- ▷ Beberapa sistem antrian memiliki **server yang disusun seri**. Hal ini terjadi jika pelayanan yang dibutuhkan **konsumen dilayani secara bertahap**
- ▷ Misal: medical check up, pembuatan SIM, dll.



29

29

## 2. *Struktur Antrean*

## Struktur Antrean

- ▷ Struktur antrean pada dasarnya dapat diklasifikasikan menjadi:
  1. Banyaknya channel (jalur)
  2. Banyaknya fase pelayanan yang ada
- ▷ Secara prinsip, struktur antrean terbagi menjadi 4 macam, yaitu:
  1. Single Channel Single Phase
  2. Single Channel Multi-phase
  3. Multi-channel Single Phase
  4. Multi-channel Multi-phase



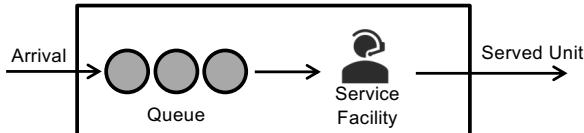
Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

31

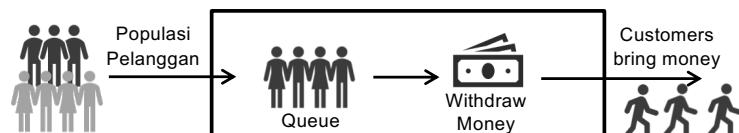
31

## Single Channel – Single Phase

- ▷ Struktur antrean jenis ini hanya memiliki satu jalur pelayanan, yang terdiri dari satu tahapan pelayanan saja.
- ▷ Konsep:



- ▷ Contoh: Pelayanan di mesin ATM



32

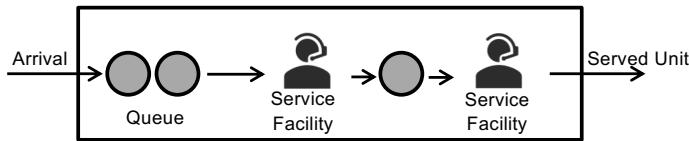
32

## Struktur Antrian

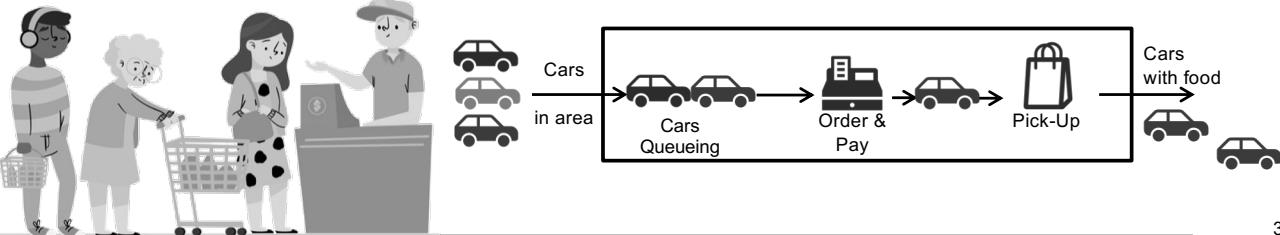


## Single Channel – Multi Phase

- ▷ Struktur antrean jenis ini hanya memiliki satu jalur pelayanan, yang terdiri dari beberapa tahapan pelayanan.
- ▷ Konsep:



▷ Contoh: McDonald's Drive Thru Service



33

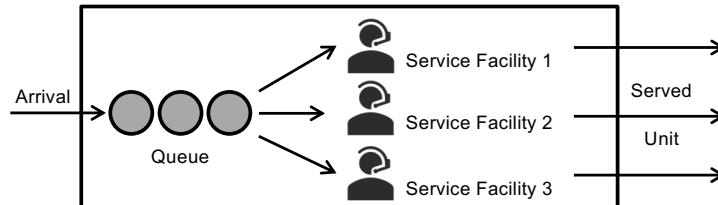
33

## Struktur Antrian



## Multi Channel – Single Phase

- ▷ Struktur antrean jenis ini memiliki beberapa jalur pelayanan, yang terdiri dari satu tahapan pelayanan saja.
- ▷ Konsep:



▷ Contoh:

- Pelayanan Kasir di supermarket
- Pelayanan Teller di bank
- Pengecekan paspor oleh petugas imigrasi di bandara (untuk perjalanan int'l)
- Antrean pelayanan SPBU

34

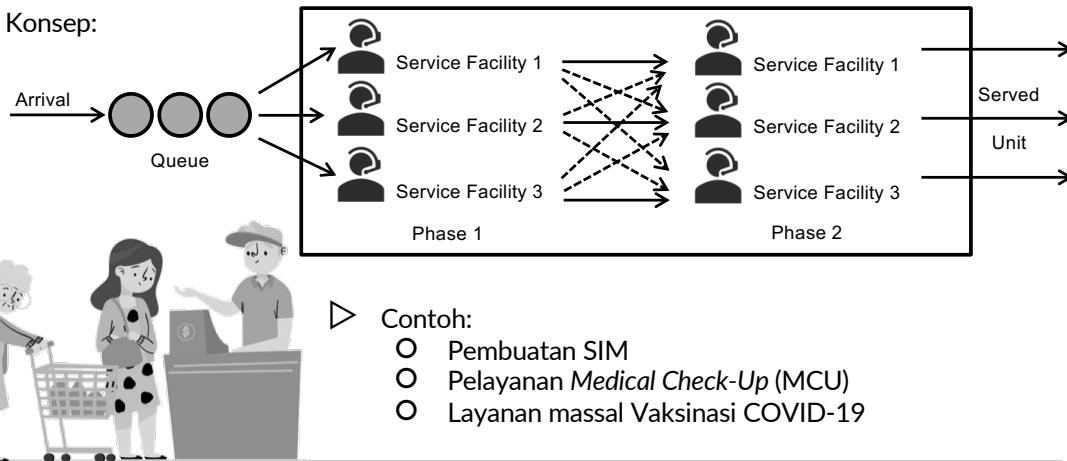
34

## Struktur Antrean



## Multi Channel – Multi Phase

- ▷ Struktur antrean jenis ini memiliki beberapa jalur pelayanan, dan terdiri dari beberapa tahapan pelayanan.
- ▷ Konsep:



- ▷ Contoh:

- Pembuatan SIM
- Pelayanan Medical Check-Up (MCU)
- Layanan massal Vaksinasi COVID-19

35

35

## Struktur Antrean



## Struktur Antrean

- ▷ Selain dengan menerapkan salah satu dari 4 struktur antrean tersebut, bisa juga terjadi struktur antrean yang bersifat campuran (*mixed arrangement*)
- ▷ ***mixed arrangement*** → menerapkan dua atau lebih struktur antrean

- ▷ Misal:

- Pelayanan di toko-toko (misalnya elektronik) bersifat *multichannel* (dengan banyak sales/pelayan). Namun, pada saat pembayaran, hanya fokus pada satu server (*cashier*)



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

36

36

# Konfigurasi Antrean

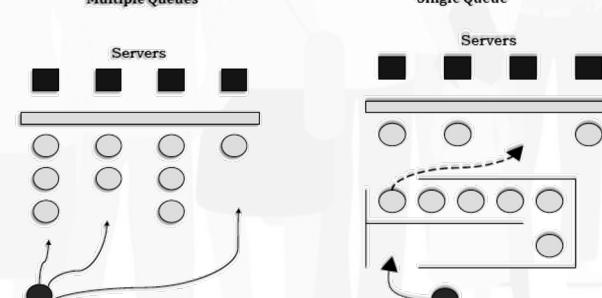
37

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

37

## Konfigurasi Antrean (1/3)

- ▷ **Definisi:**
  - Menentukan banyaknya jalur antrean dan pelayan (server/operator)
- ▷ **Kapasitas antrean** yaitu banyaknya konsumen mengantre yang dapat ditampung pada sistem antrean.
- ▷ Menyambung dari struktur antrean, konfigurasi antrean bisa berupa ***multiple queues*** atau ***single queue***



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

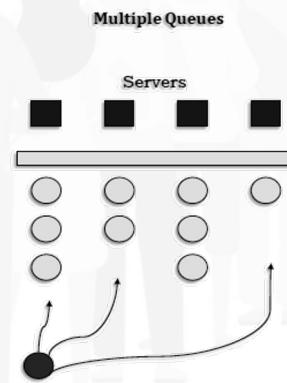
38

38

## Konfigurasi Antrean (2/3)

### Multiple Customer Queues

- ▷ Memungkinkan server untuk memberikan pelayanan yang berbeda.
- ▷ Misal :
  - server 1 melayani penarikan tunai, server 2 melayani setor tunai, server 3 melayani pembayaran tagihan
- ▷ Dapat mencegah **Balking** yaitu konsumen meninggalkan antrean karena merasa akan terlalu lama mengantre.
- ▷ Membagi antrean menjadi beberapa jalur **membuat antrean tampak tidak panjang**.

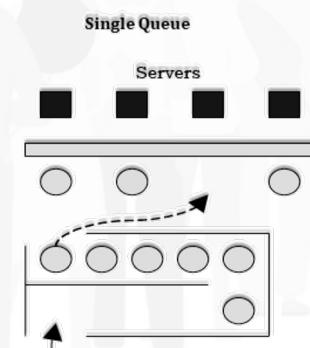


39

## Konfigurasi Antrean (3/3)

### Single Customer Queue

- ▷ Menjamin **fairness**
- ▷ Dalam **multiple queue** ada kemungkinan konsumen yang datang lebih awal tidak mendapat pelayanan yang lebih awal juga.
- ▷ Konsumen **tidak bisa memilih server** sehingga semua server mendapat beban kerja yang sama



40

### 3. Model-Model Antrean

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

41

### Model Antrean (1/4)

- ▷ Dalam memecahkan permasalahan antrean, terdapat beberapa model antrean yang biasanya digunakan sebagai acuan untuk menyelesaikannya.
- ▷ Model tersebut menyesuaikan situasi masalah antrean yang dihadapi: **sederhana, lebih sulit, atau sangat kompleks**
  - ▷ Perkiraan performa dari sistem antrean dapat digambarkan, misalnya:
    - Rata-rata jumlah kedatangan dalam antrean
    - Rata-rata waktu tunggu dari suatu kedatangan dan persentase waktu luang dari pelayanan
  - ▷ Ukuran performansi ini dapat digunakan untuk:
    - Memutuskan jumlah pelayanan yang harus diberikan
    - Perubahan yang harus dilakukan dalam kecepatan pelayanan
    - Perubahan lain dalam sistem antrean

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

42

## Model Antrean (2/4)

- ▷ Faktor-faktor yang menentukan macam-macam model antrean, antara lain:

### Distribusi Kedatangan (*arrival distribution*)

- ▷ Distribusi kedatangan objek/input berhubungan dengan peluang terdapat  $n$  kedatangan palanggan dalam suatu sistem antrean pada interval waktu tertentu
  - Dapat mengikuti distribusi Poisson (Markovian) yang dinotasikan dengan  $M$
  - Dapat pula mengikuti distribusi Erlang yang dinotasikan dengan  $E$
  - Dapat bersifat deterministik

### Distribusi Pelayanan (*service time distribution*)

- ▷ Distribusi kemampuan pelayanan dapat bersifat deterministik, mengikuti distribusi Poisson, **distribusi eksponensial**, atau mengikuti distribusi Erlang



43

## Model Antrean (3/4)

- ▷ Faktor-faktor yang menentukan macam-macam model antrean, antara lain:

### Banyaknya jalur pelayanan (*channel/server*)

- ▷ Banyaknya jalur pelayanan atau *channel* dinyatakan dengan angka, sesuai dengan banyaknya jalur pelayanan yang ada.

### Banyaknya objek/input (*calling population*)

- ▷ Banyaknya objek/input yang nantinya akan memasuki sistem antrean
- ▷ Dapat bersifat tak terhingga, dinotasikan  $I$  atau  $\infty$
- ▷ (atau) dapat bersifat terbatas, dinotasikan  $F$



44

## Model Antrean (4/4)



### Kapasitas Jalur Antrean

- ▷ Kapasitas jalur antrean (*system capacity*) adalah kemampuan jalur antrean untuk menampung objek/input yang menunggu untuk dilayani
- ▷ Dapat bersifat tak terhingga, dinotasikan **I** atau  $\infty$
- ▷ (atau) dapat bersifat terbatas, dinotasikan **F**

## Notasi Kendall ( *Kendall's Notation* )

### Deskripsi sistem antrean dengan Notasi Kendall

**A/B/c/K/m/Z**

M: Markovian (Poisson Dist.)

D: Deterministic

E: Erlang

G: General

Arrival Distribution

Service Time Distribution

M: Markovian (Exponential Dist.)  
D: Deterministic  
E: Erlang  
G: General

Number of Channels/Servers

Queueing Discipline

Umumnya dianggap **FIFS** (*First In First Served*)

Calling Population

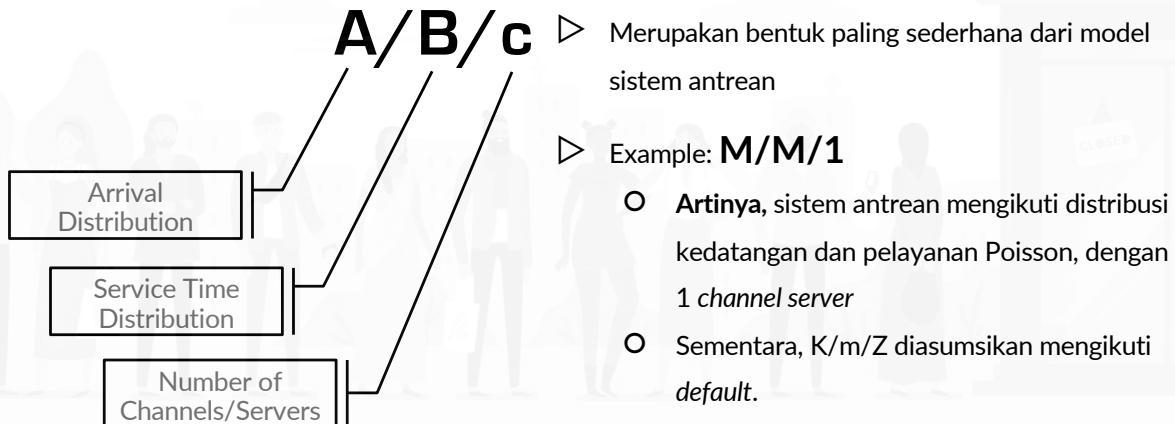
Umumnya dianggap **infinite** (tak terbatas)

System Capacity

Umumnya dianggap **infinite** (tak terbatas)

## Notasi Kendall (*Kendall's Notation*)

### Deskripsi sistem antrean dengan Notasi Kendall



47

47



Thanks!  
Any questions?



48

48