



# Riset Operasi

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023

Pertemuan 8

## Assignment Problem

Chandrawati P. Wulandari, Ph.D.

contact me at: chandrawati.p.w@ftmm.unair.ac.id

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

1

## Pendahuluan (1/2)

- *Assignment Problem* (Permasalahan Penugasan) klasik dikenal juga dengan nama *Hungarian Method*.
  - Metode ini diperkenalkan dan dikembangkan oleh 2 orang matematikawan Hungaria: Dénes König and Jenő Egerváry
- Perkembangan:
  - Banyak digunakan untuk masalah-masalah penugasan yang berkaitan dengan pemberian tugas atau pekerjaan kepada karyawan/operator (dengan berbagai keahlian)
- Model penugasan merupakan kasus khusus dari model transportasi, di mana karyawan merepresentasikan *sources* (sumber) dan pekerjaan (*jobs*) merepresentasikan *destinations* (tujuan), dengan kapasitas total adalah 1 (1 pekerjaan hanya dapat dilakukan oleh 1 orang)
- Asumsi:
  - Perbedaan *skill* (keahlian) mempengaruhi biaya penyelesaian suatu pekerjaan (*the cost of completing a job*).
  - Selain itu, adanya kesulitan tersendiri untuk mengalokasikan pekerja dengan pekerjaannya



Dénes König



Jenő Egerváry

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

2

2



## Pendahuluan (2/2)

- Alokasi karyawan atau mesin tidak bisa dilakukan sembarangan
  - Perbedaan cara pengalokasian mempengaruhi hasil (konsekuensi) yang didapatkan
- Konsep model penugasan (*assignment problem*):
  - *Equal numbers of jobs and workers (or jobs and machines, or ...)*
  - *We want to assign the jobs to the workers in a one-to-one manner*
  - *Different job/worker combinations have different costs (or completion times)*
  - *We want to minimize total cost (time)*
- Tujuan dari model penugasan (*assignment problem*):
  - Memaksimumkan atau meminimumkan hasil (biasanya diukur dengan uang atau waktu)
  - Meminimumkan pengorbanan:
    - biaya, waktu, pemborosan, dsb.
  - Memaksimumkan manfaat:
    - profit, output produksi, dsb.



# 1.

## Konsep Dasar

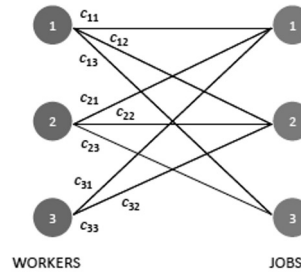
### Assignment Problem

## Konsep Dasar

## Model Penugasan (1/2)

The general assignment model with  $n$  workers and  $n$  jobs is represented below (left) and network representation (right):

	Jobs				
	1	2	...	$n$	
1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	1
2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	1
...	...	...	...	...	...
$N$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nn}$	1
	1	1	...	1	



The element  $c_{ij}$  represents the cost of assigning worker  $i$  to job  $j$  (where  $i, j = 1, 2, \dots, n$ )

## Konsep Dasar

## Model Penugasan (2/2)

The general assignment model in mathematical formulation:

Source (worker)	Destination (Job)				Total Capacity
	$D_1$	$D_2$	...	$D_n$	
$S_1$	$X_{11}$ $c_{11}$	$X_{12}$ $c_{12}$	...	$X_{1n}$ $c_{1n}$	1
$S_2$	$X_{21}$ $c_{21}$	$X_{22}$ $c_{22}$	...	$X_{2n}$ $c_{2n}$	1
...	...	...	...	...	...
$S_m$	$X_{m1}$ $c_{m1}$	$X_{m2}$ $c_{m2}$	...	$X_{mn}$ $c_{mn}$	1
Total Source	$t_1$	$t_2$	...	$t_n$	$\sum t_j$ $\sum S_i$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m$$

Where:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if worker } i \text{ is assigned to job } j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X_{ij}$  = assign worker  $i$  to job  $j$

$c_{ij}$  = cost assigning worker  $i$  to job  $j$

# 2.

## Hungarian Algorithm

### Assignment Problem

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

7

## Contoh Kasus: *Minimum Cost*

- PT. Airlangga baru saja menerima empat orang karyawan yang akan ditugaskan untuk menyelesaikan 4 proyek baru. Keempat orang karyawan tersebut memiliki perbedaan keterampilan, pemahaman, latar belakang pendidikan, pengalaman, dll., sehingga upah pekerjaannya akan berbeda-beda, sebagaimana tersaji pada tabel di bawah ini.

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23
4	24	11	30	20

- Bagaimana alokasi karyawan dan pekerjaan yang terbaik yang dapat memperoleh hasil penugasan yang optimal dengan biaya minimum?



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

8

8

# Linear Programming

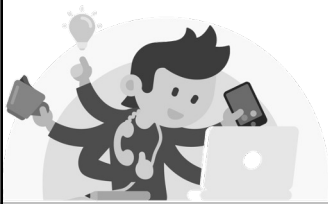
Jika diselesaikan dengan pemrograman linear, maka:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij} \\ & \text{Min}(20X_{11} + 15X_{12} + 10X_{13} + 25X_{14} + \\ & \quad 28X_{21} + 13X_{22} + 21X_{23} + 20X_{24} + \\ & \quad 25X_{31} + 13X_{32} + 20X_{33} + 23X_{34} + \\ & \quad 24X_{41} + 12X_{42} + 30X_{43} + 20X_{44}) \end{aligned}$$

St.

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} &= 1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} &= 1 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} &= 1 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} &= 1 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} &= 1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} &= 1 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} &= 1 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} &= 1 \end{aligned}$$

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23
4	24	11	30	20



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

9

9

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

Step 1: Membuat *Opportunity Cost Matrix* (minimization)

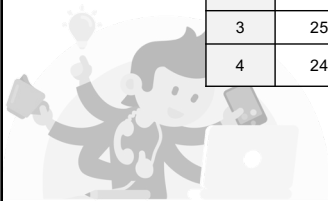
- Mengurangkan nilai-nilai dalam setiap baris dengan nilai terkecil pada baris tersebut (row reduction).

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23
4	24	11	30	20



Opportunity Cost Matrix

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20 - 10 = 10$	$15 - 10 = 5$	0	15
2	15	0	8	7
3	12	0	7	10
4	13	0	19	9



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

10

10

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (2/7)

### Step 2: Membuat *Total Opportunity Cost Matrix*

- ▷ Pastikan semua kolom mengandung nilai 0
- ▷ Jika ada yang belum memiliki nilai 0, maka lakukan hal yang sama pada step 1 (tetapi untuk setiap kolom) >> (*column reduction*).
- ▷ Dalam hal ini, kolom *A* dan *D* belum memiliki nilai 0

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	10	5	0	15
2	15	0	8	7
3	12	0	7	10
4	13	0	19	9

➔

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	5	0	8
2	5	0	8	0
3	2	0	7	3
4	3	0	19	2

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

11

11

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (3/7)

### Step 3: Menggambar Garis untuk yang Meliputi Angka 0

- ▷ Menarik garis pada setiap kolom maupun baris yang mengandung angka 0 semimum mungkin (disebut garis minimum) >> menghubungkan setiap angka 0 yang ada
- ▷ Jumlah garis minimum setidaknya sama dengan jumlah baris atau jumlah kolom dalam *opportunity cost matrix*, jika belum, tabel harus dimodifikasi kembali

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	5	0	8
2	5	0	8	0
3	2	0	7	3
4	3	0	19	2

----- Jika menambah garis ini, tidak lagi menjadi garis minimum (bukan kondisi yang diminta/diharapkan)

Jumlah garis minimum = 3, jumlah kolom = jumlah baris = 4 → perlu modifikasi

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

12

12

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (4/7)

### Step 4: Memodifikasi *Total Opportunity Cost Matrix*

#### ▶ Step-by-step modifikasi:

- Pilih nilai terkecil di antara semua angka yang belum terkena garis minimum
- Semua angka yang belum terkena garis dikurangi dengan nilai terkecil diantaranya
- Angka yang sebelumnya sudah terkena garis sebanyak 2x, dijumlahkan dengan nilai terkecil tadi
- Angka yang hanya terkena garis minimum sebanyak 1x, tidak berubah

*Total Opportunity Cost Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	5	0	8
2	5	0	8	0
3	2	0	7	3
4	3	0	19	2

updated

*Modified Total Opportunity Cost Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	7	0	8
2	5	2	8	0
3	0	0	5	1
4	1	0	17	0

13

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

13

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (5/7)

### Step 5: Membuat Alokasi Penugasan

- ▶ Buat garis minimum lagi untuk *Modified Total Opportunity Cost Matrix*
- ▶ Lakukan penugasan pertama pada baris/kolom yang memiliki jumlah nilai 0 paling minimum/sedikit

*Modified Total Opportunity Cost Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	7	0	8
2	5	2	8	0
3	0	0	5	1
4	1	0	17	0
	2	2	1	2

assign

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	7	0	8
2	5	2	8	0
3	0	0	5	1
4	1	0	17	0
	1	2	1	2

Jumlah garis minimum = 4, jumlah kolom = jumlah baris = 4 >> optimal

Maka, penugasan pertama: worker C pada Job 1

14

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

14

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (6/7)

### Step 5: Membuat Alokasi Penugasan

▶ Lanjutkan pada penugasan kedua, dst.!

Job	Worker				
	A	B	C	D	
1	0	7	0	5	2
2	5	2	0	0	1
3	0	0	5	1	2
4	1	0	17	0	2
	1	2		2	

continue

Job	Worker				
	A	B	C	D	
1	0	7	0	5	2
2	5	2	0	0	1
3	0	0	5	1	2
4	1	0	17	0	1
		2		2	

Maka, penugasan ketiga: Worker A pada Job 3  
dan penugasan keempat: Worker B pada Job 4

▶ Maka, penugasan kedua: Worker D pada Job 2

15

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

15

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (7/7)

### Step 6: Menghitung *total cost*

▶ Jumlahkan nilai-nilai biaya (*cost*) sesuai dengan hasil penugasan (*worker-job*) yang sudah didapatkan dari langkah sebelumnya

*Hasil Penugasan*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	0	7	0	8
2	5	2	8	0
3	0	0	5	1
4	1	0	17	0

Mapping Cost

*Original Cost Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	20	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23
4	24	11	30	20

*Conclusion*

Worker	Job	Cost
A	3	\$ 25
B	4	\$ 11
C	1	\$ 10
D	2	\$ 20
<b>Jumlah</b>		<b>\$ 66</b>

▶ Maka, total biaya penugasan yang paling optimal (minimum) adalah \$ 66

16

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

16



## Contoh Kasus: *Maximize Profit*

## Contoh Kasus: *Maximize Profit*

- PT. Airlangga baru saja menerima empat orang karyawan yang akan ditugaskan untuk menyelesaikan 4 target penjualan akhir tahun. Keempat orang karyawan tersebut memiliki perbedaan keterampilan, pemahaman, latar belakang pendidikan, pengalaman, dll., sehingga upah pekerjaannya akan berbeda-beda, sebagaimana tersaji pada tabel di bawah ini.

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	28	16	26
2	24	20	18	30
3	20	18	14	16
4	16	30	16	32

- Bagaimana alokasi karyawan dan pekerjaan yang terbaik yang dapat memperoleh profit/keuntungan penjualan yang optimal?



## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 1: Membuat *Opportunity Loss Matrix* (maximization)

- ▷ Mencari selisih nilai-nilai keuntungan (profit) pada tiap baris dengan **nilai terbesar dalam baris tersebut** (*row reduction*)
- ▷ Tujuannya mengidentifikasi keuntungan yang mungkin hilang (*opportunity loss*) jika dikerjakan oleh pekerja lain yang tidak dapat memperoleh profit maksimum

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	28	16	26
2	24	20	18	30
3	20	18	14	16
4	16	30	16	32



Job	Worker			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 28-20=8$	0	12	2
2	6	10	12	0
3	0	2	6	4
4	16	2	14	0

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 2: Membuat *Total Opportunity Loss Matrix*

- ▷ Pastikan semua kolom mengandung nilai 0
- ▷ Jika ada yang belum memiliki nilai 0, maka lakukan hal yang sama pada step 1 (tetapi untuk setiap kolom) >> (*column reduction*) >> **selisih dengan nilai minimum** pada kolom tersebut
- ▷ Dalam hal ini, kolom C belum memiliki nilai 0

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	8	0	12	2
2	6	10	12	0
3	0	2	6	4
4	16	2	14	0



Job	Worker			
	A	B	C	D
1	8	0	$12-6=6$	2
2	6	10	6	0
3	0	2	0	4
4	16	2	8	0

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 3: Menggambar Garis Minimum untuk yang Meliputi Angka 0

- ▷ Menarik garis pada setiap kolom maupun baris yang mengandung angka 0 semimum mungkin (disebut garis minimum) >> menghubungkan setiap angka 0 yang ada
- ▷ Jumlah garis minimum setidaknya sama dengan jumlah baris atau jumlah kolom dalam *opportunity loss matrix*, jika belum, tabel harus dimodifikasi kembali

Opportunity Loss Matrix

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	<del>8</del>	0	6	<del>2</del>
2	6	10	6	0
3	<del>0</del>	2	0	<del>4</del>
4	16	2	8	0

Modify

Jumlah garis minimum = 3, jumlah kolom = jumlah baris = 4 → perlu modifikasi

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 4a: Memodifikasi Total Opportunity Loss Matrix

- ▷ Step-by-step modifikasi:
  - Pilih nilai terkecil di antara semua angka yang belum terkena garis minimum
  - Semua angka yang belum terkena garis dikurangi dengan nilai terkecil diantaranya
  - Angka yang sebelumnya sudah terkena garis sebanyak 2x, dijumlahkan dengan nilai terkecil tadi
  - Angka yang hanya terkena garis minimum sebanyak 1x, tidak berubah

Opportunity Loss Matrix

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	<del>8</del>	0	6	<del>2</del>
2	6	10	6	0
3	<del>0</del>	2	0	<del>4</del>
4	16	2	8	0

Modify

Modified Opportunity Loss Matrix

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	8	0	6	2+2=4
2	6-2=4	8	4	0
3	0	2	0	4+2=6
4	14	0	6	0

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 4b: Memodifikasi *Total Opportunity Loss Matrix*

- ▶ Jumlah garis minimum masih < jumlah kolom atau jumlah baris → lakukan modifikasi lanjutan, ulangi langkah 4a
- ▶ Kemudian, membuat garis minimum kembali

*Modified Opportunity Loss Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	8	0	6	4
2	4	8	4	0
3	0	2	0	0
4	14	0	6	0

Modify

*Modified Opportunity Loss Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	4	0	2	2
2	0	0	0	0
3	0	2	0	4
4	10	0	2	0

Jumlah garis minimum = 4, jumlah kolom = jumlah baris = 4 → optimal

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 5a: Membuat Alokasi Penugasan

- ▶ Lakukan penugasan pertama pada baris/kolom yang memiliki jumlah nilai 0 paling minimum/sedikit

*Modified Opportunity Loss Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	4	0	2	2
2	0	8	0	0
3	0	6	0	8
4	10	0	2	0

Assign

*Modified Opportunity Loss Matrix*

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	4	0	2	2
2	0	8	0	0
3	0	6	0	8
4	10	0	2	0

Maka, penugasan pertama: worker B pada Job 1

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 5b: Membuat Alokasi Penugasan

▶ Lanjutkan pada penugasan kedua, dst.!

Modified Opportunity Loss Matrix

Job	Worker				
	A	B	C	D	
1	4	0	2	2	1
2	0	8	0	0	2
3	0	6	0	8	2
4	10	0	2	0	1
	2	2	2	2	

Continue

Modified Opportunity Loss Matrix

Job	Worker				
	A	B	C	D	
1	4	0	2	2	1
2	0	8	0	0	2
3	0	6	0	8	1
4	10	0	2	0	1
	2	2	1	2	

▶ Maka, penugasan kedua: Worker D pada Job 4

Maka, penugasan ketiga: Worker A pada Job 2  
dan penugasan keempat: Worker C pada Job 3

## Step-by-Step: Hungarian Algorithm (1/7)

### Step 6: Menghitung total profit

▶ Jumlahkan nilai-nilai keuntungan (*profit*) sesuai dengan hasil penugasan (*worker-job*) yang sudah didapatkan dari langkah sebelumnya

Modified Opportunity Loss Matrix

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	4	0	2	2
2	0	8	0	0
3	0	6	0	8
4	10	0	2	0

Mapping profit

Original Profit Matrix

Job	Worker			
	A	B	C	D
1	20	28	16	26
2	24	20	18	30
3	20	18	14	16
4	16	30	16	32

Conclusion

Worker	Job	Profit
A	2	\$ 24
B	1	\$ 28
C	3	\$ 14
D	4	\$ 32
Jumlah		\$ 98

▶ Maka, total profit dari penugasan yang paling optimal (maksimum) adalah \$ 98

# 3. Hungarian Algorithm for Imbalance Problem

## Assignment Problem

“

Bila jumlah *workers* dengan jumlah *jobs* berbeda, maka kita membutuhkan bantuan *dummy variable* (variabel semu) pada baris/kolom yang jumlahnya kurang (seperti pada *transportation problem*)

## Ilustrasi penggunaan *Dummy Variable*

- ▷ PT. Airlangga baru saja membeli **tiga jenis mesin baru** yang diperlukan untuk menjalankan proyek terbarunya. Ada **4 lokasi di dalam pabrik** yang potensial untuk memasang ketiga mesin tersebut. Beberapa lokasi ini merupakan tempat terbaik bagi beberapa mesin tertentu karena pertimbangan kedekatannya dengan pusat-pusat kerja yang memiliki arus kerja ke dan dari mesin-mesin tersebut. Maka, tujuan dari model penugasan ini adalah **meminimumkan total biaya penanganan material** (*material handling*). Estimasi biaya per satuan waktu untuk penanganan material dari setiap mesin di masing-masing lokasi terlihat pada tabel di samping. **Tentukan alokasi optimal mesin-lokasi tersebut!**

Machine	Location			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23
Dummy	0	0	0	0



Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

29

29

## Solve the problem

- ▷ Step 1:

Machine	Location			
	A	B	C	D
1	$c_{11} = 20$	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23
Dummy	0	0	0	0



Machine	Location			
	A	B	C	D
1	10	5	0	15
2	15	0	8	7
3	12	0	7	10
Dummy	0	0	0	0

\*Semua kolom dan baris sudah mengandung 0

- ▷ Step 2: Membuat garis minimum

Machine	Location			
	A	B	C	D
1	10	5	0	15
2	15	0	8	7
3	12	0	7	10
Dummy	0	0	0	0

jumlah garis minimum < jumlah kolom/baris



Machine	Location			
	A	B	C	D
1	3	5	0	8
2	8	0	8	0
3	5	0	7	3
Dummy	0	7	7	0

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

30

30

## Solve the problem

▷ Step 2: Membuat garis minimum

Machine	Location			
	A	B	C	D
1	3	5	0	8
2	8	0	8	0
3	5	0	7	3
Dummy	0	7	7	0

jumlah garis minimum = jumlah kolom/baris → **optimal**

Step 3: Melakukan penugasan

Machine	Location				
	A	B	C	D	
1	3	5	0	8	1
2	8	0	8	0	2
3	5	0	7	3	1
Dummy	0	7	7	0	2
	1	2	1	2	

▷ Kesimpulan:

Location	Machine	Cost
A	Not assigned	-
B	3	\$ 13
C	1	\$ 10
D	2	\$ 20
<b>Jumlah</b>		<b>\$ 43</b>

Original Cost Matrix

Machine	Location			
	A	B	C	D
1	20	15	10	25
2	28	13	21	20
3	25	13	20	23

31

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023 – Fakultas Teknologi Maju dan Multidisiplin – Universitas Airlangga

31

# Thanks!

## Any questions?

32

32