Riset Operasi

Teknologi Sains Data – Ganjil 2022/2023

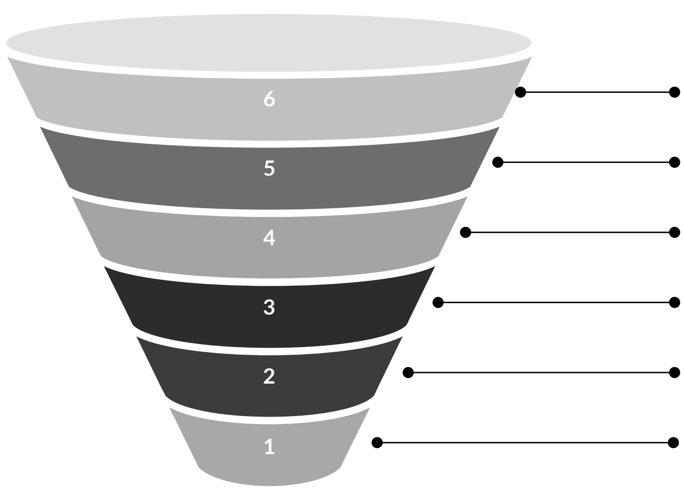
Pertemuan 13

Teori Antrean (2)

Chandrawati P. Wulandari, Ph.D.
contact me at: chandrawati.p.w@ftmm.unair.ac.id

1

Course Outline



Model Antrean: M/M/S

Model Antrean: M/M/1

Parameter Model Antrean

2

4.
Parameter Model Antrean

Parameter Model Antrean

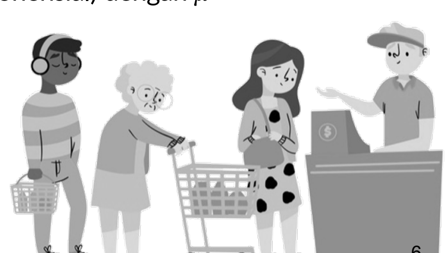
Symbol	Keterangan
λ	Rata-rata kecepatan kedatangan (jumlah kedatangan per satuan waktu) *(arrival rate)*
$\frac{1}{\lambda}$	Rata-rata waktu antar kedatangan
μ	Rata-rata kecepatan pelayanan (jumlah yang dilayani per satuan waktu) (*service rate)*
$\frac{1}{\mu}$	Rata-rata yang waktu yang dibutuhkan untuk pelayanan
P_n	Probabilitas bahwa terdapat n satuan (kedatangan) di dalam sistem **= rata-rata panjang antrean**
P_w	Probabilitas objek harus menunggu dalam antrean (faktor utilisasi fasilitas pelayanan)

Symbol	Keterangan
n	Jumlah pelanggan dalam sistem
L_q	Rata-rata jumlah objek dalam antrean
L_s	Rata-rata jumlah objek dalam sistem
W	Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem
W_q	Rata-rata waktu tunggu dalam antrean
W_s	Rata-rata waktu tunggu dalam sistem (termasuk dalam pelayanan)
P_0	Probabilitas tidak ada objek dalam sistem
$E(C_t)$	Jumlah biaya yang ditanggung dalam sistem
S	Jumlah *channel/server* (fasilitas pelayanan)

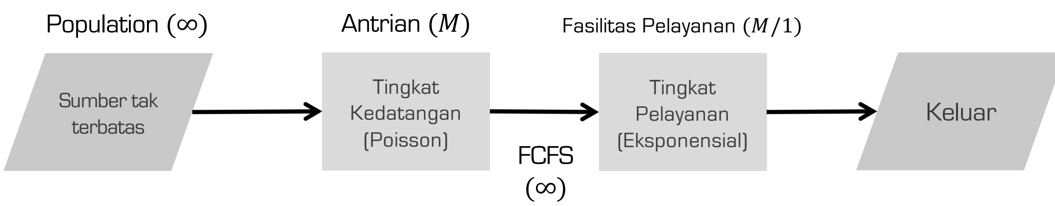
Model 1: **M/M/1**

Model 1: M/M/1 (1/3)

- Model antrean yang paling sederhana
- Merupakan ***Single-Channel Queuing Model*** yang didasarkan pada asumsi berikut:
  - Satu pelayanan satu tahap (***single-channel single-phase***)
  - **(M pertama)**
    - Jumlah kedatangan per unit waktu digambarkan oleh Markovian (Distribusi Poisson) dengan $\lambda =$ rata-rata kedatangan (*arrival rate*)
  - **(M kedua)**
    - Waktu pelayanan dengan Markovian (Distribusi Eksponensial) dengan $\mu =$ rata-rata kecepatan pelayanan (*service time*)
  - ***Default setting*:**
    - Disiplin antrian adalah ***First Come First Served***
    - Dimungkinkan panjang barisan yang **tak terhingga**
    - Populasi yang dilayani **tidak terbatas**, rata-rata kedatangan lebih kecil daripada rata-rata waktu pelayanan ($\lambda < \mu$)
  - Tidak ada *reneaging* dan atau *balking*



Model 1: M/M/1 (2/3)



Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:

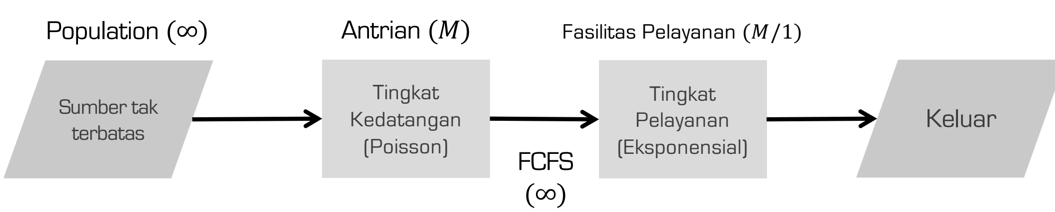
- Jumlah rata-rata objek dalam antrean:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Jumlah rata-rata objek dalam sistem:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

Model 1: M/M/1 (3/3)



Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:

- Rata-rata waktu tunggu dalam antrean

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Rata-rata waktu tunggu dalam sistem

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

Additional Formula (1/3)

Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:

- Probabilitas bahwa tidak ada objek di dalam sistem

$$\boldsymbol{P_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

- Probabilitas bahwa terdapat n satuan (kedatangan) di dalam sistem

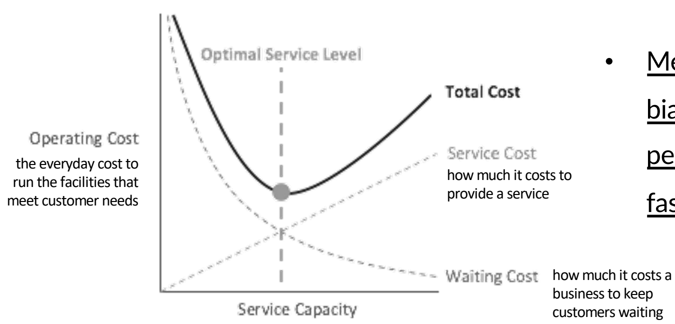
$$\boldsymbol{P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

- Jumlah biaya yang ditanggung selama berada dalam sistem

$$\boldsymbol{E(C_t) = SC_s + L_qC_q}$$

dimana:
$\boldsymbol{S}$ = jumlah fasilitas pelayanan/servers
$\boldsymbol{C_s}$ = biaya pelayanan setiap server/jam (*service cost*)
$\boldsymbol{C_q}$ = biaya yang timbul karena objek menunggu dalam antrean/jam (*waiting cost*)

Additional Formula (2/3)



- Meningkatkan pelayanan juga memerlukan biaya yang besar oleh karena sistem antrean perlu dianalisa untuk menentukan jumlah fasilitas pelayanan yang tepat.

- Jika antrean terlalu panjang sebagai akibat fasilitas pelayanan yang tersedia kurang mencukupi maka lama-kelamaan konsumen akan enggan mengantri dan pindah ke pesaing (*lost sales*)

Parameter Model Antrean

Additional Formula (3/3)

Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik sebagai berikut:

- Probabilitas objek harus menunggu dalam antrean
  - Tingkat kesibukan pelayanan (intensitas penggunaan layanan)
  - Sering disebut sebagai faktor utilisasi fasilitas pelayanan (*utilization factor*)
  - Terkadang dinotasikan juga dengan $\boldsymbol{\rho}$

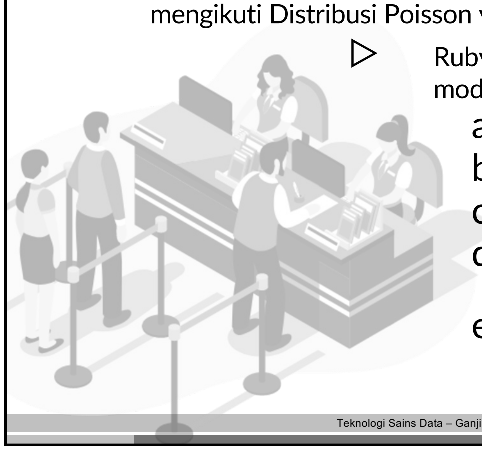
$$\boldsymbol{P_w} = \boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\mu}}$$

  - Saat nilai $\boldsymbol{P_w} > \mathbf{1}$, ini menunjukkan bahwa antrean akan terus terjadi tanpa batas karena fasilitas pelayanan tidak memiliki kapasitas yang cukup untuk mengatasi tingkat kedatangan objek

Model 1: M/M/1

Contoh Soal (1/4)

- UD. Makmur menjalankan usaha untuk mengoperasikan satu buah pompa bensin dengan mempekerjakan satu orang operator yaitu Ruby. Rata-rata tingkat kedatangan kendaraan mengikuti Distribusi Poisson yaitu 20 kendaraan/jam.



- Ruby dapat melayani rata-rata 25 kendaraan/jam. Jika diasumsikan model sistem antrean yang digunakan adalah M/M/1, **hitunglah:**
  a) Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan P_w
  b) Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem L_s
  c) Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrean L_q
  d) Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem (menunggu pelayanan) W_s
  e) Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrean W_q

Contoh Soal (2/4)

a) Intensitas Penggunaan Layanan

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0.80$$

▷ **Artinya:**
Ruby akan sibuk melayani pengisian bensin kendaraan selama 80% dari waktu kerjanya, sedangkan 20% dari waktunya $(1 - P_w)$ digunakan untuk istirahat

b) Jumlah rata-rata kendaraan dalam sistem

$$L_s = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{20}{(25-20)} = \frac{20}{5} = 4$$

Artinya:
Ruby dapat mengharapkan keberadaan setidaknya 4 kendaraan yang ada dalam sistem

Contoh Soal (3/4)

c) Jumlah rata-rata kendaraan dalam antrean

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20^2}{25(25-20)} = \frac{400}{125} = 3.2$$

▷ **Artinya:**
Jika ada antrean, jumlah rata-rata kendaraan yang menunggu dalam antrean untuk dilayani oleh Ruby adalah sekitar 3.2 kendaraan ~ 3 kendaraan

d) Rata-rata waktu tunggu kendaraan dalam sistem

$$W_s = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{1}{(25-20)} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ jam} \sim 12 \text{ menit}$$

▷ **Artinya:**
kendaraan akan berada dalam sistem selama rata-rata 12 menit

Contoh Soal (4/4)

e) Rata-rata waktu tunggu kendaraan dalam antrean

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{25(25-20)} = \frac{20}{125} = 0.16 \text{ jam} \sim 9.6 \text{ menit}$$

▷ **Artinya:**
Jika ada antrean, rata-rata waktu tunggu kendaraan yang selama dalam antrean adalah sekitar 9.6 menit ~ 10 menit

Model 2: ***M/M/S***

Model 2: M/M/S (1/6)

- Model ini identik dengan model 1 dengan perbedaan bahwa 2 atau lebih individu dapat dilayani pada waktu bersamaan oleh fasilitas-fasilitas palayanan yang berlainan
- Merupakan ***Multi-Channel Queuing Model*** yang didasarkan pada asumsi berikut:
  - Beberapa pelayanan dengan satu tahap (***multi-channel single-phase***)
  - **(M pertama)**
    - Jumlah kedatangan per unit waktu digambarkan oleh Markovian (Distribusi Poisson) dengan $\lambda =$ rata-rata kedatangan (*arrival rate*)
  - **(M kedua)**
    - Waktu pelayanan dengan Markovian (Distribusi Eksponensial) dengan $\mu =$ rata-rata kecepatan pelayanan (*service time*)
    - μ untuk masing-masing *channel* adalah sama
  - ***Default setting*:**
    - Disiplin antrian adalah ***First Come First Served***
    - Dimungkinkan panjang barisan yang **tak terhingga**
    - Populasi yang dilayani **tidak terbatas**, rata-rata kedatangan lebih kecil daripada rata-rata waktu pelayanan ($\lambda < \mu$)

Model 2: M/M/S (2/6)

- Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:
  - Probabilitas bahwa tidak ada objek di dalam sistem

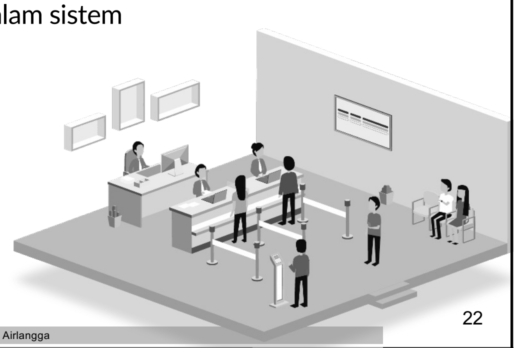
$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right) + \frac{(\lambda-\mu)^S}{S!}\left(\frac{S\mu}{S\mu-\lambda}\right)}$$

  - Probabilitas bahwa terdapat n satuan (kedatangan) di dalam sistem
    - $n \le S$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

    - $n > S$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{S!\, S^{n-S}}$$



Model 2: M/M/S (3/6)

▷ Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:

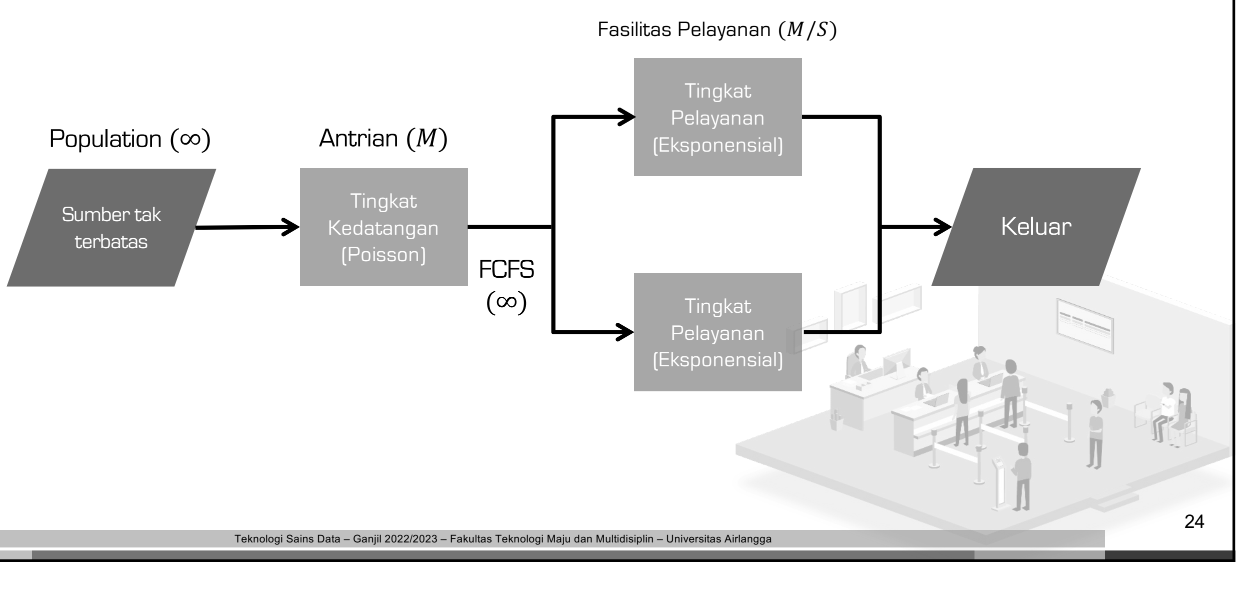
- Probabilitas objek harus menunggu dalam antrean
  - Tingkat kesibukan pelayanan (intensitas penggunaan layanan)
  - Sering disebut sebagai faktor utilisasi fasilitas pelayanan (*utilization factor*)
  - Terkadang dinotasikan juga dengan $\boldsymbol{\rho}$

$$P_w = \rho = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \left(\frac{S\mu}{S\mu - \lambda}\right) P_0$$

- Rata-rata banyaknya objek yang sedang dilayani

$$n_s = \frac{\lambda}{S\mu}$$

Model 2: M/M/S (4/6)



Model 2: M/M/S (5/6)

Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:

- Jumlah rata-rata objek dalam antrean:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^S(\lambda\mu)}{(S-1)!\,(S\mu-\lambda)^2} P_0$$

- Jumlah rata-rata objek dalam sistem:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Model 2: M/M/S (6/6)

Dari asumsi tersebut dapat diperoleh hasil secara statistik dari *operating characteristics* sebagai berikut:

- Rata-rata waktu tunggu dalam antrean

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- Rata-rata waktu tunggu dalam sistem

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Model 2: M/M/S

Contoh Soal (1/7)

▷ Di suatu taman wisata bermain terdapat 2 loket penjualan tiket. Para tamu yang datang untuk membeli tiket mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 0.75 orang per menit. Kapasitas pelayanan untuk melayani seorang tamu berdistribusi Eksponensial dengan rata-rata 1 orang per menit. **Hitunglah:**

a) Probabilitas ada 5 orang pembeli di depan loket P_n

b) Ekspektasi panjang antrean tidak termasuk yang sedang dilayani L_q

c) Ekspektasi panjang antrean termasuk yang sedang dilayani L_s

d) Ekspektasi waktu menunggu dalam taman wisata (tidak termasuk waktu pelayanan) W_q

e) Ekspektasi waktu menunggu dalam taman wisata (termasuk waktu pelayanan) W_s

Model 2: M/M/S

Contoh Soal (2/7)

a) Probabilitas terdapat 5 orang pembeli di depan loket

▷ Diketahui:

- $S = 2\,; n = 5;\ \lambda = 0.75\ orang/menit\ ;\ \mu = 1\ orang/menit$
- Probabilitas bahwa tidak ada objek di dalam sistem

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right) + \frac{(\lambda-\mu)^S}{S!}\left(\frac{S\mu}{S\mu-\lambda}\right)}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left(\frac{(0.75/1)^0}{0!} + \frac{(0.75/1)^1}{1!}\right) + \frac{(0.75-1)^2}{2!}\left(\frac{2(1)}{2(1)-0.75}\right)}$$

$$P_0 = \frac{1}{(1+0.75) + \left(\frac{0.0625}{2}\right)\left(\frac{2}{1.25}\right)} = \frac{1}{(1.75)+0.05} = \frac{1}{1.8} = 0.5555$$

Contoh Soal (3/7)

a) Probabilitas terdapat 5 orang pembeli di depan loket

- Diketahui:
  - $S = 2\,; n = 5;\ \lambda = 0.75\ orang/menit\ ;\ \mu = 1\ orang/menit$
  - Probabilitas bahwa tidak ada objek di dalam sistem
    $$P_0 = 0.5555$$
  - Probabilitas bahwa terdapat $n = 5$ satuan (kedatangan) di dalam sistem
    - $n > S$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{S!\,S^{n-S}}$$

$$P_n = (0.5555)\frac{(0.75/1)^5}{2!\,2^{5-2}} = (0.5555)\frac{(0.75)^5}{2\times 8}$$

$$P_n = \frac{(0.5555)(0.5625)}{16} = 0.0195$$

Contoh Soal (4/7)

b) Ekspektasi panjang antrean tidak termasuk yang sedang dilayani

- Diketahui:
  - $S = 2\,; n = 5;\ \lambda = 0.75\ orang/menit\ ;\ \mu = 1\ orang/menit$
  - Ekspektasi panjang antrean tidak termasuk yang sedang dilayani

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^S(\lambda\mu)}{(S-1)!\,(S\mu-\lambda)^2}P_0$$

$$L_q = \frac{(0.75/1)^5(0.75(1))}{(2-1)!\,(2(1)-0.75)^2}(0.5555)$$

$$L_q = \frac{(0.5625)(0.75)}{(1)!\,(1.5625)}(0.5555)$$

$$L_q = \frac{0.4218}{1.5625}(0.5555) = 0.1499\ \text{orang}$$

Contoh Soal (5/7)

c) Ekspektasi panjang antrean termasuk yang sedang dilayani

- Diketahui:
  - $S = 2\,; n = 5;\ \lambda = 0.75\ orang/menit\ ;\ \mu = 1\ orang/menit$
  - Ekspektasi panjang antrean termasuk yang sedang dilayani

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_s = 0.1499 + \frac{0.75}{1}\ \text{orang}$$

$$L_s = 0.8999\ \text{orang}$$

Contoh Soal (6/7)

d) Ekspektasi waktu menunggu dalam taman wisata (tidak termasuk pelayanan)

- Diketahui:
  - $S = 2\,; n = 5;\ \lambda = 0.75\ orang/menit\ ;\ \mu = 1\ orang/menit$
  - Ekspektasi waktu menunggu dalam taman wisata (tidak termasuk waktu pelayanan)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{0.1499}{0.75} = 0.1198\ menit$$

Model 2: M/M/S

Contoh Soal (7/7)

e) Ekspektasi waktu menunggu dalam taman wisata (termasuk pelayanan)

- Diketahui:
  - $S = 2$; $n = 5$; $\lambda = 0.75$ *orang/menit* ; $\mu = 1$ *orang/menit*
  - Ekspektasi waktu menunggu dalam taman wisata (termasuk waktu pelayanan)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = 0.1198 + \frac{1}{1} = 1.1198 \; menit$$

Thanks!

Any questions?