PROBABILITAS (MAS106)

Ekspektasi dan
Fungsi Pembangkit Momen

Tim Dosen Pengajar Probabilitas

OUTLINE

Ekspektasi
ekspektasi dan variansi dari suatu variabel random

Fungsi Pembangkit Momen
(*moment generating function*)

Ekspektasi

Ekspektasi atau harapan, atau nilai yang diharapkan dari variabel random, tidak dapat dirumuskan tanpa konsep **variabel random**.

DISKRIT

KONTINU

Variansi

- Ekspektasi itu sendiri bukanlah ukuran yang memadai untuk menggambarkan suatu distribusi. Diperlukan ukuran tambahan untuk dikaitkan dengan **penyebaran suatu distribusi**. Ukuran tersebut adalah variansi dari variabel acak atau variansi dari distribusinya.
- Jika lokasi x_i semakin jauh dari E(X), maka variansinya semakin besar, dan sebaliknya. Interpretasi yang sama juga berlaku untuk X bertipe kontinu.
- Variansi disebut juga sebagai **ukuran dispersi** dari distribusi yang mendasarinya.

Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi $M(t) = E(e^{tX})$, didefinisikan untuk semua t dalam R dimana $E(e^{tX})$ berhingga (*finite*), fungsi tersebut disebut dengan *moment generating function* (mgf) dari X.

Sifat MGF

$$M_{cX}(t) = M_X(ct)$$
$$M_{cX+d}(t) = e^{dt}M_X(ct)$$

di mana c dan d adalah konstanta.

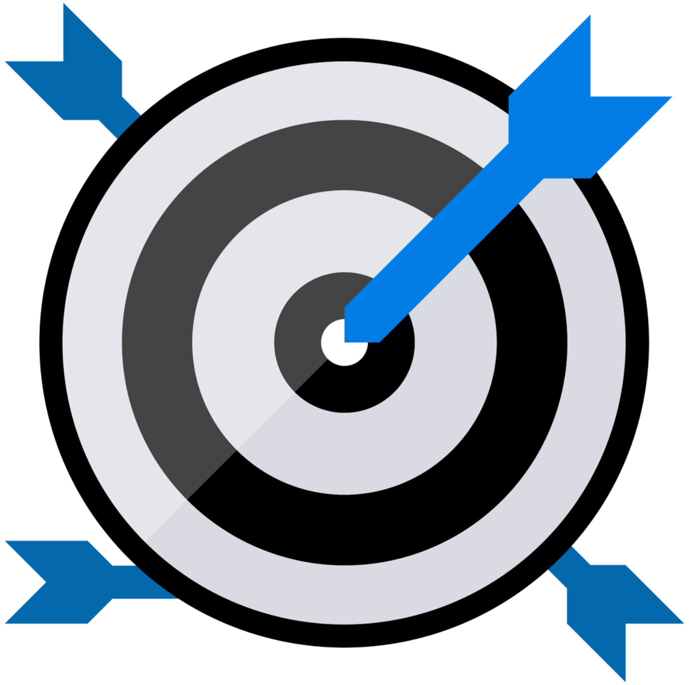
DEFINISI

Ekspektasi

Ekspektasi atau harapan, atau nilai yang diharapkan dari variabel random, tidak dapat dirumuskan tanpa konsep **variabel random**.

DISKRIT

KONTINU



- Misalkan terdapat variabel random X, yang didefinisikan pada beberapa ruang sampel S. Kemudian, terdapat eksperimen yang memilih titik s secara acak dari S, dan $X(s)$ diinterpretasikan sebagai keuntungan (kerugian, jika $X(s) < 0$).
- Jika eksperimen diulangi n kali, ruang sampel menjadi $S^n = S \times S \times \cdots \times S$ (sebanyak n kali). Hasilnya adalah $s^{(n)} = (s_1, \ldots, s_n)$ dengan $s_i \in S, i = 1, \ldots, n$.
- Keuntungan yang diakumulasikan menjadi $X(s_1) + X(s_2) + \cdots + X(s_n)$ atau umumnya ditulis $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ dengan $X_i = X(s_i)$ menjadi hasil dari uji (*trial*) ke-i. Rata-ratanya menjadi $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$.
- Ketika n menjadi lebih besar, fluktuasi rata-rata ini semakin sedikit, sehingga cenderung stabil pada beberapa nilai, yang kita sebut ekspektasi X dan dilambangkan dengan $E(X)$.

Nilai yang diekspektasikan (*Expected Value*)

Nilai yang diharapkan atau disebut juga dengan harapan, atau mean.

DISKRIT

Misalkan X adalah variabel random diskrit, yang memiliki nilai x_i dengan probabilitas $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, maka ekspektasi dari X dilambangkan dengan E(X).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Jika X adalah variabel random diskrit yang mengasumsikan nilai $x_1, x_2, \dots$,(*infinite*) dengan probabilitas $f(x_i) = P(X = x_1), i = 1, 2, \dots$, maka nilai yang diekspektasikan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{i} x_i f(x_i) = \sum_{i} x_i P(X = x_i) \quad (1)$$

dengan ketentuan

$$\sum_{i} |x_i| \, P(X = x_i) < \infty \quad (2)$$

Notasi alternatif yang sering digunakan: EX atau $\mu(X)$ atau μ_X

DEFINISI

Nilai yang diekspektasikan (*Expected Value*)

KONTINU

Jika X adalah variabel random kontinu dengan densitas $f(x)$, maka nilai yang diekspektasikan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (3)$$

dengan ketentuan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx < \infty \text{ (nilai integral ada)} \qquad (4)$$

DEFINISI

Sifat-Sifat Ekspektasi

Dari definisi ekspektasi dan sifat-sifat penjumlahan atau integral yang sudah dikenal, maka:

$$E(cX) = cE(X),$$
$$E(cX + d) = cE(X) + d,$$

di mana c dan d adalah konstanta.

$X \geq c$, menyiratkan $E(X) \geq c$, dan, khususnya, $X \geq 0$ menyiratkan $E(X) \geq 0$

Contoh 1

x merupakan banyaknya pesanan barang yang masuk selama seminggu dengan probabilitas pada tabel berikut:

x	0	1	2	3
Probabilitas	0.125	0.375	0.375	0.125

Hitung rata – rata banyaknya pesanan (pesanan yang diharapkan).

$$E(X) = 0(0.125) + 1(0.375) + 2(0.375) + 3(0.125) = 1{,}5$$

Latihan

1. Hitung ekspektasi dari variabel acak X berikut.

x	-1	1	2
f(x)	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

2. Hitung ekspektasi dari variabel acak Y berikut.

y	-10	10	20
f(y)	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Latihan

Variabel acak X memiliki fungsi probabilitas $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$.
Hitung ekspektasi dari X.

Latihan

Variabel acak X memiliki fungsi probabilitas $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1.$
Hitung ekspektasi dari X.

$$E(X) = \int_0^1 x\,(2x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Latihan

Variabel random/acak X memiliki dua nilai dan distribusinya sebagai berikut:

Nilai	0	1
Probabilitas	$1-p$	p

Hitung ekspektasi dari X.

Latihan

Variabel random/acak X memiliki dua nilai dan distribusinya sebagai berikut:

Nilai	0	1
Probabilitas	$1-p$	p

Hitung ekspektasi dari X.

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

Variansi

- Ekspektasi itu sendiri bukanlah ukuran yang memadai untuk menggambarkan suatu distribusi. Diperlukan ukuran tambahan untuk dikaitkan dengan **penyebaran suatu distribusi**. Ukuran tersebut adalah variansi dari variabel acak atau variansi dari distribusinya.
- Jika lokasi x_i semakin jauh dari E(X), maka variansinya semakin besar, dan sebaliknya. Interpretasi yang sama juga berlaku untuk X bertipe kontinu.
- Variansi disebut juga sebagai **ukuran dispersi** dari distribusi yang mendasarinya.

Variansi

Variansi dari variabel acak X dinotasikan dengan Var(X) dan didefinisikan dengan

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 \qquad (5)$$

Notasi lainnya yang sering digunakan adalah $\sigma^2(X)$ dan σ_X^2

Persamaan (5) dapat dinyatakan dengan formulasi sebagai berikut:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad (6)$$

DEFINISI

Sifat-Sifat Variansi

Berdasarkan persamaan (5), berlaku:

$$Var(cX) = c^2 Var(X),$$
$$Var(cX + d) = c^2 Var(X),$$

di mana c dan d adalah konstanta.

$$Y = g(X),$$

$$EY = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i) \quad \text{or} \quad EY = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f(x_i) \quad \text{or} \quad EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

$$EX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f(x_i) \quad \text{or} \quad EX^k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k f(x_i) \quad \text{or} \quad EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx.$$

Latihan

Dari Latihan sebelumnya,

$$f(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1$$

Hitung E(X), E(X^2), dan Var(X)

Latihan

Dari Latihan sebelumnya,

$$f(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1$$

Hitung E(X), E(X²), dan Var(X)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ E(x) &= \int_0^1 x2x\ dx \\ &= 2\int_0^1 x^2\ dx \\ &= 2\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{0}{3}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \int_0^1 x^2 2x\ dx \\ &= 2\int_0^1 x^3\ dx \\ &= 2\left(\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1\right) \\ &= \left(\frac{1^4}{2}-\frac{0^4}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ &= \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi $M(t) = E(e^{tX})$, didefinisikan untuk semua *t* dalam R dimana $E(e^{tX})$ berhingga (*finite*), fungsi tersebut disebut dengan *moment generating function* (mgf) dari X.

Sifat MGF

$$M_{cX}(t) = M_X(ct)$$
$$M_{cX+d}(t) = e^{dt} M_X(ct)$$

di mana c dan d adalah konstanta.

DEFINISI

Fungsi Pembangkit Momen

$$\frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0} = EX \quad \text{and} \quad \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\bigg|_{t=0} = EX^n, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt} Ee^{tX}\right)\bigg|_{t=0} = E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\bigg|_{t=0}\right) \\ &= E(Xe^{tX}|_{t=0}) = EX.\end{aligned}$$

Latihan

Jika,

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x > 0$$

Dapatkan $M_X(t)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} \\
M_X(t) &= E\left(e^{tx}\right) \\
&= \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} dx \\
&= \int_0^\infty e^{tx-x} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-(1-t)x} dx \\
&= -\frac{1}{(1-t)} e^{-(1-t)x} \Big|_0^\infty \\
&= \left(0 - \left(-\frac{1}{(1-t)}\right)\right) = \frac{1}{(1-t)}
\end{aligned}$$

Cara 1

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} \\
M_X(t) &= \frac{1}{(1-t)} = (1-t)^{-1} \\
\frac{dM_X(t)}{dt} &= \frac{d\left((1-t)^{-1}\right)}{dt} \\
&= -1(1-t)^{-2}(-1) \\
&= (1-t)^{-2} \\
E(X) &= \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = (1-0)^{-2} = 1
\end{aligned}$$

Cara 2

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} \\
E(X) &= \int_0^\infty x e^{-x} dx \\
&= uv - \int v du \\
&= -xe^{-x} - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right) dx \\
&= -xe^{-x} + \int_0^\infty \left(e^{-x}\right) dx \\
&= \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) - \left(-0e^{-0} - e^{-0}\right) \\
&= \left[(0-0) - (0-1)\right] = 1
\end{aligned}$$

TERIMA KASIH ...