Statistika Non Parametrik
TSD - Ganjil 2021/2020

Pertemuan 9:
Uji Hipotesis k Sampel Independen

Outline

- ✓ Uji Kruskal Wallis
- ✓ Uji Johnkheere-Terpstra
- ✓ Uji Perbandingan Ganda

Uji Kruskal Wallis

Uji Kruskal Wallis

Uji ini merupakan anova satu arah yang dilakukan apabila persyaratan asumsi normalitas tidak terpenuhi, berdasarkan peringkat untuk menguji hipotesis nol yang menyatakan bahwa beberapa sampel diambil dari populasi-populasi yang sama atau identik.

Asumsi

- Data terdiri k sampel acak berukuran $n_1, n_2, \dots, n_k$.
- Antar pengamatan saling bebas baik dalam sampel maupun antar sampel.
- Variabel yang diamati adalah kontinu.
- Skala pengukuran minimal ordinal.
- Populasi identik kecuali dalam hal parameter lokasi yang mungkin berbeda untuk sekurang-kurangnya 1 populasi.

Uji Kruskal Wallis

Prosedur

- Gabungkan data semua sampel $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$
- Peringkatkan nilai semua pengamatan, jika ada yang sama maka dirata-rata
- Hitung jumlah peringkat untuk setiap sampel → R_i

Uji Kruskal Wallis

Hipotesis

H_0: Ke-k fungsi distribusi populasi adalah identik

H_1: Tidak semua dari ke-k populasi memiliki median yang sama (minimal 2 populasi memiliki median tidak sama)

Statistik Uji

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \left[R_i - \frac{n_i(N+1)}{2} \right]^2$$ atau $$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

dengan R_i = jumlah peringkat dari hasil pengamatan sampel ke-i

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Uji Kruskal Wallis

- **Koreksi untuk angka sama**

  Jika angka sama cukup banyak, kita mungkin harus menyesuaikan statistik uji kita sehingga didapatkan statistik uji yang telah dikoreksi adalah

$$H_c = \frac{H}{1 - \sum T/(N^3 - N)}$$

dengan $T = t^3 - t$ dan t adalah banyaknya nilai pengamatan yang sama dalam sekelompok skor yang berangka sama.

Uji Kruskal Wallis

Daerah Kritis

Tolak H_0, jika H > $Kw_{\alpha,\ n1,\ n2,\ n3}$

Jika n_i, i > 3 atau n_i > 5 maka : $H > \chi^2_{\alpha,k-1}$

k = banyak sampel, begitu pula halnya daerah tolak untuk H_c.

Uji Kruskal Wallis

Struktur data

Sampel			
1	2	. . .	k
x_{11}	x_{21}	. . .	x_{k1}
x_{12}	x_{22}	. . .	x_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1n_1}	x_{2n_2}	. . .	x_{kn_k}

	Sampel Peringkat			
	1	2	. . .	k
	R_{11}	R_{21}	. . .	R_{k1}
	R_{12}	R_{22}	. . .	R_{k2}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	R_{1n_1}	R_{2n_2}	. . .	R_{kn_k}
Jumlah	R_1	R_2	. . .	R_k

untuk melakukan perhitungan, data digabung dan dicari peringkat, kemudian peringkat tersebut dituliskan lagi ke masing-masing sampel

Uji Kruskal Wallis

CONTOH 1

Cawson dkk melaporkan data dalam tabel berikut tentang kadar kortisol dalam tiga kelompok pasien yang melahirkan pada usia kehamilan antara 38 dan 42 minggu. Pengamatan terhadap Kelompok I dilakukan sebelum proses bedah Caesar yang sengaja dipilih. Pengamatan terhadap Kelompok II dilakukan pada proses bedah Caesar yang terpaksa dipilih karena proses normal tidak berhasil. Kelompok III terdiri atas pasien-pasien yang dapat melahirkan secara normal, tetapi ada yang memilih melahirkan melalui bedah Caesar. Kita ingin tahu apakah data ini menyediakan bukti yang cukup untuk menunjukkan adanya perbedaan dalam median kadar kortisol di antara ketiga populasi yang diwakili.

Kelompok I	262	307	211	323	454	339	304	154	287	356
Kelompok II	465	501	455	355	468	362				
Kelompok III	343	772	207	1048	838	687				

Uji Kruskal Wallis

Jawab

- **Hipotesis**

  H_0: Ketiga populasi identik

  H_1: Minimal 2 populasi memiliki median yang berbeda

- **Statistik Uji**

Kelompok	Peringkat										Jumlah Peringkat
I	4	7	3	8	14	9	6	1	5	12	R_1=69
II	16	18	15	11	17	13					R_2=90
III	10	20	2	22	21	19					R_1=94

$$H = \frac{12}{22(22+1)}\left[\frac{69^2}{10} + \frac{90^2}{6} + \frac{94^2}{6}\right] - 3(22+1) = 9{,}232$$

Uji Kruskal Wallis

Jawab

- **Keputusan**

Karena semua ukuran sampel lebih dari 5, kita menggunakan tabel *chi-square* untuk memutuskan menolak H_0 atau tidak. Nilai *chi-square* dengan derajat bebas $k-1=3-1=2$ dan α=0,01 adalah 9,210. Jadi, dengan H=9,232 kita dapat menolak H_0 pada tingkat signifikansi 0,05. Kita dapat menyimpulkan bahwa median-median ketiga populasi tidak semua sama atau minimal ada 2 median populasi (sepasang) yang tidak sama, artinya ketiga kelompok pasien itu memiliki minimal sepasang median kadar kortisol yang tidak sama.

Uji Johnkheere-Terpstra

Uji Johnkheere-Terpstra

- Pengujian untuk hipotesis alternatif terurut dalam desain sampel independen (antara-peserta). Hal ini mirip dengan uji Kruskal-Wallis dalam hipotesis nol bahwa beberapa sampel independen berasal dari populasi yang sama.
- Uji Kruskal-Wallis tidak ada urutan apriori populasi dari mana sampel diambil. Ketika ada urutan apriori, uji Jonckheere-Terpstra memiliki kekuatan statistik yang lebih besar daripada uji Kruskal-Wallis.

$H_0: M_1 = M_2 = \cdots = M_k$

$H_1: M_1 \leq M_2 \leq \cdots \leq M_k$ → hipotesis alternatif terurut

Uji Johnkheere-Terpstra

Asumsi

- Data terdiri k sampel acak berukuran $n_1, n_2, \dots, n_k$ yang berturut-turut berasal dari populasi 1, 2, …, k.
- Antar pengamatan saling bebas baik dalam sampel maupun antar sampel.
- Variabel yang diamati adalah kontinu.
- Skala pengukuran minimal ordinal.
- Populasi asal sampel identik kecuali adanya kemungkinan perbedaan dalam parameter lokasi.

Uji Johnkheere-Terpstra

Hipotesis

H_0 : k sampel berasal dari populasi yang identik

H_1 : k sampel berasal dari populasi dengan median-median terurut

Statistik Uji

$$J = \sum_{i<j} U_{ij}$$

Dengan

U_{ij} : banyak pasangan hasil pengamatan (a, b) yang dalam hal ini $X_{ia} < X_{ib}$

artinya : membandingakn masing-masing nilai pengamatan sampel dengan nilai tiap pengamatan sampel II dan seterusnya.

Jika nilai sampel I < sampel II maka diberi skor 1

Jika nilai sampel I > sampel II maka diberi skor 0

Jika nilai sampel I = sampel II maka diberi skor ½

Uji Johnkheere-Terpstra

Keputusan

Tolak H_0 pada taraf α nyata, $J > J_{tabel}$

$J_{tabel\ (\alpha,\ k,\ n1,\ n2,\ ...,\ nk)}$

- **Aproksimasi Sampel Besar :**

$$Z_0 = \frac{J - \left[\left(N^2 - \sum_{I=1}^{K} n_i^2\right)/4\right]}{\sqrt{\left[N^2(2N+3) - \sum_{I=1}^{K} n_I^2(2n_I+3)\right]/72}}$$

Uji Johnkheere-Terpstra

CONTOH 2

Nappi menyelidiki perubahan-perubahan yang terjadi dalam hemosit larva selama ditumpangi oleh parasite. Dua puluh tujuh jam setelah ditumpangi parasit, hitungan plasmatosit diferensial (%) dilakukan terhadap ketiga kelompok larva tersebut, yang masing-masing adalah larva tuan rumah dengan reaksi yang berhasil (S), tidak berhasil (G), dan tidak nampak memberikan reaksi (N). Kita ingin menguji hipotesis nol yang menyatakan tidak adanya perbedaan di antara ketiga kelompok, dengan hipotesis altervatif yang menyatakan bahwa hitungan plasmatosit diferensial (%) dalam ketiga kelompok, dari kelompok N hingga S menurun.

Sukses (S)	Tidak Berhasil (G)	Tidak Nampak (N)
54,0	79,8	98,6
67,0	82,0	99,5
47,2	88,8	95,8
71,1	79,6	93,3
62,7	85,7	98,9
44,8	81,7	91,1
67,4	88,5	94,5
80,2		

Uji Johnkheere-Terpstra

Jawab

Hipotesis

H0: Sampel-sampel berasal dari populasi-populasi yang identik

H1: Nilai-nilai dalam populasi, dari N ke S cenderung menurun

Statistik Uji

$$J = U_{SG} + U_{SN} + U_{GN} = 54 + 56 + 49 = 159$$

Keputusan

Kita membandingkan J dengan nilai kritis untuk k=3 dan ukuran sampel 7, 7, 8 dalam Tabel untuk Uji Johnkheere-Terpstra, kita mendapatkan peluang untuk mendapatkan J sebesar 159 jika H0 benar kurang dari 0,00494 (karena 159 > 123). Jadi, kita menolak H0, artinya nilai plasmatosit diferensial (%) dalam ketiga kelompok, dari kelompok N hingga S menurun.

Uji Perbandingan Ganda

Uji Perbandingan Ganda

- ✓ Apabila terjadi keadaan tolak H_0 pada uji Kruskal Wallis, maka untuk mengetahui populasi mana yang memberi beda, lanjutkan uji dengan ”*perbandingan berganda*”.
- ✓ Pada perbandingan berganda ini, dilakukan pengamatan pada selisih peringkat/rank rata-rata antar sampel dipasangkan.

Uji Perbandingan Ganda

Hipotesis

$\mathrm{H}_0 : M_i = M_j$

$\mathrm{H}_1 : M_i \neq M_j$ dengan $i < j$; $i, j = 1, 2, \dots, k$

Statistik Uji

$$\left|\bar{R}_i - \bar{R}_j\right|$$

$\bar{R}_i$ adalah rata-rata peringkat dari sampel ke-i

$\bar{R}_j$ adalah rata-rata peringkat dari sampel ke-j

Biasanya kita memilih nilai α yang lebih besar ketimbang yang umum digunakan dalam prosedur-prosedur inferensi dengan perbandingan tuggal

Uji Perbandingan Ganda

Keputusan

Tolak H_0 apabila

$$\left|\bar{R}_i - \bar{R}_j\right| > z_{\{1-[\alpha/k(k-1)]\}} \sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Bila $n_i = n_j$ maka tolak H_0 apabila

$$\left|\bar{R}_i - \bar{R}_j\right| > z_{\{1-[\alpha/k(k-1)]\}} \sqrt{k(N+1)/6}$$

Uji Perbandingan Ganda

Apabila terdapat angka sama cukup banyak maka,

- Tolak H_0 apabila

$$\left|\bar{R}_i - \bar{R}_j\right| > z_{\{1-[\alpha/k(k-1)]\}} \sqrt{\frac{\left[N(N^2-1) - \left(\sum t^3 - \sum t\right)\right]\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}{12(N-1)}}$$

- Bila $n_i = n_j$ maka tolak H_0 apabila

$$\left|\bar{R}_i - \bar{R}_j\right| > z_{\{1-[\alpha/k(k-1)]\}} \sqrt{\frac{k\left[N(N^2-1) - \left(\sum t^3 - \sum t\right)\right]}{(N-1)6N}}$$

- Koreksi untuk angka yang sama biasanya tidak menimbulkan efek yang berarti terhadap hasil pengujian.

Uji Perbandingan Ganda

CONTOH 3

Di contoh 2 yang telah dianalisis dengan menggunakan uji Kruskal Wallis, nilai statistik uji $H = 9{,}232$ memungkinkan kita menolak H_0 pada tingkat signifikansi 0,01 sehingga dapat disimpulkan bahwa median kadar kortisol tidak sama untuk ketiga tipe pasien yang diteliti.

Untuk dapat melakukan semua perbandingan yang mungkin dalam upaya menentukan di mana sesungguhnya perbedaan itu terjadi. Dengan menggunakan $\alpha = 0{,}15$. Banyaknya sampel adalah $k = 3$ sehingga kita harus melakukan $\binom{3}{2} = \frac{3(2)}{2} = 3$ pembandingan dan $\frac{\alpha}{k(k-1)} = \frac{0{,}15}{3(2)} = 0{,}025$. Dengan menggunakan tabel distribusi normal standar, diperoleh $z_{0,975} = 1{,}96$.

Uji Perbandingan Ganda

CONTOH 3

Kelompok	Peringkat										Jumlah Peringkat	Rata-rata Peringkat
I	4	7	3	8	14	9	6	1	5	12	R_1=69	$\bar{R}_1$ = 69/10 = 6,9
II	16	18	15	11	17	13					R_2=90	$\bar{R}_2$ = 90/6 = 15
III	10	20	2	22	21	19					R_1=94	$\bar{R}_3$ = 94/6 = 15,67

I vs II

$$|6{,}9 - 15| = 8{,}1$$

$$1{,}96\sqrt{\frac{22(22+1)}{12}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\right)} = 6{,}57$$

$$|6{,}9 - 15| = 8{,}1 > 6{,}57$$

Tolak H_0, Median kadar kortisol kelompok I dan kelompok II berbeda secara signifikan, kelompok I cenderung memiliki kadar kortisol lebih rendah daripada kelompok II.

I vs III

$$|6{,}9 - 15{,}67| = 8{,}77$$

$$1{,}96\sqrt{\frac{22(22+1)}{12}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\right)} = 6{,}57$$

$$|6{,}9 - 15{,}67| = 8{,}77 > 6{,}57$$

Tolak H_0, Median kadar kortisol kelompok I dan kelompok III berbeda secara signifikan, kelompok I cenderung memiliki kadar kortisol lebih rendah daripada kelompok III.

II vs III

$$|15 - 15{,}67| = 0{,}67$$

$$1{,}96\sqrt{\frac{22(22+1)}{12}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)} = 7{,}35$$

$$|15 - 15{,}67| = 0{,}67 < 7{,}35$$

Gagal Tolak H_0, tidak dapat menyimpulkan bahwa populasi-populasi yang diwakili oleh sampel II dan sampel III berbeda dalam hal median kadar kortisol.

Uji Perbandingan Ganda

LATIHAN 1

Sebuah tim riset psikologi melaksanakan suatu pengujian yang dirancang untuk mengukur neurotisisme dalam empat kelompok subjek yang berbeda menurut kebiasaan merokok mereka. Hasil-hasil riset disajikan dalam tabel di bawah ini. Apakah data ini menunjukkan adanya perbedaan dalam taraf neurotisisme di antara keempat kelompok? Gunakan uji Kruskal-Wallis.

Bukan Perokok	7,6	7,7	7,5	7,8	7,6	7,3	7,1	8,0	7,5	8,0
Perokok Ringan	8,9	8,2	8,1	8,0	8,6	8,6	8,6	8,4		
Perokok Sedang	8,0	8,8	8,7	8,6	9,0	8,8	8,5			
Perokok Berat	9,9	9,1	9,8	9,8	9,9	9,6	9,2	9,8		

Terima Kasih

Statistika Non Parametrik
TSD - Ganjil 2023/2024

Pertemuan 09:

Uji Hipotesis k Sampel Dependen

Outline

- ✓ Uji Friedman
- ✓ Uji perbandingan ganda

Overview

- Jika subjek-subjek menunjukkan keragaman yang cukup tinggi, upaya mendeteksi perbedaan dalam hal variabel yang diminati di antara kelompok subjek menggunakan metode-metode dari pertemuan sebelumnya (pengujian hipotesis k sampel independen) mungkin sulit. Keragaman di antara subjek dalam kelompok yang sama bisa saja menyelubungi perbedaan dalam variabel yang diminati yang mungkin ada di antara kelompok.
- Kemampuan untuk mendeteksi perbedaan antara kelompok dalam hal variabel yang diminati seringkali berhasil ditingkatkan dengan cara membagi subjek ke dalam subkelompok yang homogen, yang masing-masing disebut **blok**, dan membuat perbandingan di antara subjek dalam subkelompok itu. Hal ini dapat dilakukan dengan rancangan eksperimen yang disebut **rancangan blok lengkap teracak (*randomized complete block design / RCBD*)**.

Overview

Teknik parametrik yang digunakan untuk menganalisis data dari rancangan blok lengkap teracak (RCBD) adalah teknik analisis variansi dua-arah (*two-way analysis of variance*).

1. Teknik nonparametrik dari analisis variansi dua-arah parametrik adalah analisis variansi dua-arah berdasarkan peringkat Friedman atau **uji Friedman**.
2. Teknik untuk melakukan **perbandingan berganda** menggunakan prosedur menggunakan prosedur penetapan peringkat yang sama.
3. **Uji Page**, yaitu prosedur yang cocok jika hipotesis tandingan berurut.
4. Rancangan blok tidak lengkap berimbang dengan **uji Durbin**.
5. Uji yang sesuai jika pengamatan memberikan hasil yang biner (dikotomus) dengan **uji Cochran**.

Uji Friedman

Uji Friedman

Uji ini adalah analog nonparametrik dari analisis variansi dua-arah parametrik. Prosedur perhitungannya menggunakan peringkat yang diperkenalkan oleh Friedman.

Prosedur ini dapat digunakan ketika satu dan lain hal analisis variansi dua-arah parametrik tidak dikehendaki. Sebagai contoh, seorang investigator mungkin tidak ingin berasumsi bahwa populasi-populasi asal sampel memiliki distribusi normal, yaitu persyaratan yang harus dipenuhi dalam menggunakan pengujian parametrik. Mungkin pula, hanya peringkat-peringkat yang tersedia untuk analisis.

	Perlakuan						
Blok	1	2	3	…	j	…	k
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1j}	…	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2j}	…	x_{2k}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3j}	…	x_{3k}
⋮							
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	…	x_{ij}	…	x_{ik}
⋮							
b	x_{b1}	x_{b2}	x_{b3}	…	x_{bj}	…	x_{bk}

Uji Friedman

Asumsi

- Data terdiri dari b sampel (blok) berukuran k yang saling bebas.
- Variabel yang diminati kontinu.
- Tidak ada interaksi antara blok dan perlakuan.
- Nilai-nilai pengamatan dalam masing-masing blok boleh diperingkat menurut besarnya.

Uji Friedman

Hipotesis

H_0: Populasi-populasi dalam suatu blok identik

H_1: Sekurang-kurangnya salah satu perlakuan cenderung menghasilkan nilai-nilai lebih besar dibanding sekurang-kurangnya salah satu perlakuan lain

Statistik Uji

$$\chi_r^2 = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} R_j^2 - 3b(k+1)$$

1. Mengubah nilai-nilai pengamatan yang asli menjadi peringkat (jika hasil pengamatan sudah berupa peringkat, langkah ini tidak diperlukan) untuk masing-masing blok sehingga masing-masing blok memiliki k peringkatnya sendiri-sendiri. Hal ini berbeda dengan uji Kruskal-Wallis yang semua nilai pengamatan digabungkan, lalu diperingkat.
2. Mendapatkan jumlah peringkat R_j di masing-masing kolom (perlakuan).

Uji Friedman

Keputusan

- Apabila b dan k kecil, kita membandingkan nilai χ_r^2 dengan nilai-nilai kritis dalam tabel distribusi eksak χ_r^2. H_0 ditolak, jika nilai perhitungan $\chi_r^2 >$ nilai χ_r^2 tabel dengan b, k, dan $\alpha = p$.
- Apabila b dan/atau k tidak tercantum dalam tabel distribusi eksak χ_r^2, kita dapat membandingkan nilai perhitungan χ_r^2 dengan nilai dari tabel chi-square dengan derajat bebas $k - 1$. H_0 ditolak pada taraf nyata α, jika nilai perhitungan $\chi_r^2 >$ nilai χ^2 dari tabel chi square dengan derajat bebas $k - 1$.

Uji Friedman

Angka Sama

- Untuk uji Friedman, angka sama yang diperhatikan adalah angka sama yang terjadi dalam suatu blok saja.
- Peringkat yang ditetapkan untuk bagi nilai-nilai pengamatan yang berangka sama ini adalah rata-rata dari peringkat-peringkat yang seharusnya diberikan jika angka sama tidak ada.
- Apabila terdapat angka sama, kita dapat menyesuaikan statistik uji agar angka sama tetap diperhitungkan dengan cara membagi χ_r^2 dengan

$$1 - \sum_{i=1}^{b} T_i / bk(k^2 - 1)$$

$T_i = \sum t_i^3 - \sum t_i$ dan t_i adalah banyaknya nilai pengamatan yang sama untuk suatu peringkat dalam blok ke-*i*

Uji Friedman

CONTOH 1

Hall dkk membandingkan tiga metode penentuan nilai-nilai amilase serum pada pasien-pasien penderita pankreatitis. Hasil-hasil penelitian seperti dalam tabel di samping. Kita ingin tahu apakah data ini menunjukkan adanya perbedaan di antara ketiga metode.

Spesimen	Metode Penelitian		
	A	B	C
1	4000	3210	6120
2	1600	1040	2410
3	1600	647	2210
4	1200	570	2060
5	840	445	1400
6	352	156	249
7	224	155	224
8	200	99	208
9	184	70	227

Uji Friedman

Jawab

- **Hipotesis**

  H_0: Ketiga metode memberikan hasil-hasil yang identik

  H_1: Sekurang-kurangnya salah satu metode cenderung menghasilkan nilai-nilai lebih besar dibanding sekurang-kurangnya salah satu metode lain

- **Statistik Uji**
  - Spesimen sebagai blok, b=9 dan metode sebagai perlakuan, k=3.

$$\chi_r^2 = \frac{12}{(9)(3)(3+1)}(19{,}5^2 + 9{,}5^2 + 25{,}5^2) - 3(9)(3+1) = 15{,}5$$

Ada angka sama pada specimen 7, $T_7 = 2^3 - 2 = 6$ sehingga didapatkan faktor koreksi adalah $1 - \frac{6}{9(3)(9-1)} = 0{,}9722$. Nilai χ_r^2 setelah dikoreksi adalah 15,94.

Spesimen	Metode Penelitian		
	A	B	C
1	2	1	3
2	2	1	3
3	2	1	3
4	2	1	3
5	2	1	3
6	3	1	2
7	2,5	1	2,5
8	2	1	3
9	2	1	3
Jumlah	$R_A = 19{,}5$	$R_B = 9$	$R_C = 25{,}5$

- **Keputusan**

  Tabel distribusi chi square dengan df=k-1=2 menunjukkan peluang untuk mendapatkan nilai $\chi_r^2 = 15{,}94$ jika H_0 benar adalah kurang dari 0,005. Nilai χ^2 tabel dengan df=2 dan taraf nyata 0,05 sebesar 7,378<15,94. Akibatnya, kita **menolak H_0** pada taraf nyata 0,05 dan disimpulkan bahwa tidak semua dari ketiga metode memberikan hasil identik.

Uji Friedman

LATIHAN 1

Sebuah studi yang mempelajari efek dari tiga jenis obat yang berkaitan dengan waktu reaksi yang diberikan subjek manusia. Apakah data ini menyediakan bukti yang cukup untuk menunjukkan bahwa ketiga jenis obat itu berbeda dalam hal efek yang ditimbulkan?

Subjek	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	10	10	11	8	7	15	14	10	9	10
B	10	15	15	12	12	10	12	14	9	14
C	15	20	12	10	9	15	18	17	12	16

Uji Perbandingan Ganda

Uji Perbandingan Ganda

- ✓ Apabila terjadi keadaan tolak H_0 pada uji Friedman, maka untuk mengetahui letak perbedaan itu terjadi, lanjutkan uji dengan *"perbandingan berganda"* sesudah uji Friedman.
- ✓ Bila kita membandingkan semua perbedaan yang mungkin antara pasangan-pasangan sampel, bila tingkat kesalahan percobaan adalah α, dan banyaknya blok cukup besar, maka kita menyatakan bahwa R_j dan $R_{j'}$ berbeda signifikan jika

$$|R_j - R_{j'}| > z\sqrt{\frac{bk(k+1)}{6}}$$

dengan R_j dan $R_{j'}$ adalah jumlah peringkat perlakuan ke-*j* dan ke-*j'*, dan z adalah nilai dari tabel distribusi normal standar yang luas di sebelah kanannya adalah $\alpha/k(k-1)$.

Uji Perbandingan Ganda

CONTOH 2

Pada contoh 1, kita menolak H0 sehingga kita ingin mengetahui metode mana yang berbeda dengan yang lain. Misalkan kita menggunakan α=0,1. Dengan k=3 dan $\alpha = 0{,}10\ (0{,}10/6 = 0{,}0167 \approx 0{,}02)$, kita menemukan dalam tabel distribusi normal standar bahwa z=2,05.

$$z\sqrt{\frac{bk(k+1)}{6}} = 2{,}05\sqrt{\frac{9(3)(3+1)}{6}} = 8{,}697$$

A vs B

$|19{,}5 - 9| = 10{,}5$

A vs C

$|19{,}5 - 25{,}5| = 6$

B vs C

$|9 - 25{,}5| = 16{,}5$

Jadi, metode A dan B memberi hasil yang berbeda, metode B dan C juga memberi hasil yang berbeda, tetapi metode A dan C tidak.

Uji Perbandingan Ganda

LATIHAN 2

Syme dan Pollard melakukan sebuah eksperimen untuk menyelidiki efek tingkat motivasi yang berbeda-beda terhadap banyaknya makanan yang dimakan oleh tikus di laboratorium. Data dalam tabel menunjukkan banyaknya makanan (dalam gram) yang dimakan oleh delapan ekor tikus yang diberikan perlakuan 0, 24, dan 72 jam berpuasa. Apakah data ini menyediakan bukti yang cukup untuk menunjukkan adanya perbedaan dalam efek-efek dari ketiga tingkat lama berpuasa. Lakukan perbandingan berganda dengan α=0,05.

Subjek	**Lama berpuasa**		
	0	**24**	**72**
1	3,5	5,9	13,9
2	3,7	8,1	12,6
3	1,6	8,1	8,1
4	2,5	8,6	6,8
5	2,8	8,1	14,3
6	2,0	5,9	4,2
7	5,9	9,5	14,5
8	2,5	7,9	7,9

Terima Kasih

Statistika Non Parametrik TSD - Ganjil 2023/2024

Pertemuan 10:

Uji Hipotesis k Sampel Dependen

Outline

- ✓ Uji Page
- ✓ Uji Durbin
- ✓ Uji Cochran

Uji Page

Uji Page

- Pada pertemua sebelumnya, uji Johnkheere-Terpstra digunakan untuk menguji hipotesis nol yang diperlawankan dengan hipotesis tandingan berurut manakala data yang tersedia memenuhi format untuk analisis variansi satu-arah.
- Dalam pembahasan ini, kita membahas prosedur serupa yang sesuai untuk pengujian hipotesis dengan analisis variansi dua-arah yang hipotesis tandingannya berurut. Prosedur ini disebut sebagai Uji Page.

Uji Page

Asumsi

- Data terdiri dari b sampel (blok) berukuran k yang saling bebas.
- Variabel yang diminati kontinu.
- Tidak ada interaksi antara blok dan perlakuan.
- Nilai-nilai pengamatan dalam masing-masing blok boleh diperingkat menurut besarnya.

Uji Page

Hipotesis

H_0 : Populasi-populasi dalam suatu blok identik

H_1 : Efek-efek perlakuan $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ memiliki urutan $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots \leq \tau_k$

Statistik Uji

$$L = \sum_{j=1}^{k} jR_j = R_1 + 2R_2 + \cdots + kR_k$$

Dengan $R_1, R_2, \dots, R_k$ adalah jumlah peringkat perlakuan yang diperoleh dengan cara seperti dalam Uji Friedman. Jika efek perlakuan memiliki urutan seperti dalam hipotesis alternatif, maka R_j cenderung lebih besar dari $R_{j'}$, untuk $j' < j$. Jika ada tiga perlakuan dan efek dari ketiga perlakuan itu memiliki urutan yang sesuai dengan H_1, maka R_1 cenderung lebih kecil dari R_2 dan R_2 cenderung lebih kecil dari R_3. Karena jumlah peringkat perlakuan diberi bobot berupa indeks posisinya masing-masing dalam urutan H_1, maka L cenderung besar jika H_1 benar.

Uji Page

Keputusan

Tolak H_0 pada taraf α nyata, jika nilai perhitungan L > nilai kritis L untuk k, b, dan α yang ada dalam tabel.

- **Aproksimasi Sampel Besar :**

$$z = \frac{L - [bk(k+1)^2/4]}{\sqrt{b(k^3-k)^2/144(k-1)}}$$

Uji Page

CONTOH 3

Cromer melaporkan skor-skor yang dibuat oleh 36 anak yang telah melaksanakan tugas khusus dalam rangka suatu eksperimen. Anak-anak itu, yang telah dipasang-pasangkan menurut usia dan jenis kelamin, dibagi menjadi 3 kelompok. Anak-anak dalam kelompok 1 telah buta sejak lahir, anak-anak dalam kelompok 2 adalah anak-anak normal yang menggunakan penutup mata ketika mengerjakan tugas, dan anak dalam kelompok 3 adalah anak-anak normal yang mengerjakan tanpa penutup mata. Kita ingin menguji hipotesis nol tentang hasil-hasil yang identik yang diperlawankan dengan hipotesis alternatif yang menyatakan bahwa anak-anak dalam kelompok 1 cenderung mendapat skor lebih rendah daripada skor anak yang ada di kelompok 2, dan skor anak yang ada di kelompok 2 cenderung lebih rendah dari anak yang ada di kelompok 3.

Blok	1	2	3
1	0	0	0
2	0	8	1
3	0	0	8
4	0	0	8
5	1	2	0
6	8	8	8
7	8	5	8
8	8	6	8
9	0	8	8
10	8	8	8
11	8	3	8
12	8	8	8

Uji Page

Jawab

Hipotesis

H_0: Populasi-populasi dalam blok yang sama identik

H_1: Efek-efek perlakuan berurut, yaitu $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$

Statistik Uji

$L = R_1 + 2R_2 + 3R_k = 22{,}5 + 2(22{,}5) + 3(27) = 148{,}5$

Keputusan

Nilai perhitungan L sebesar 148,5 kurang dari 153, yaitu nilai kritis L untuk $k = 3, b = 12,$ dan $\alpha = 0{,}05$. Oleh karena itu, kita **tidak dapat menolak H_0** pada taraf nyata 0,05 dan kita tidak dapat menyimpulkan bahwa hasil-hasil eksperimen memiliki urutan seperti yang dinyatakan dalam hipotesis tandingan.

Blok	1	2	3
1	2	2	2
2	1	3	2
3	1,5	1,5	3
4	1,5	1,5	3
5	2	3	1
6	2	2	2
7	2,5	1	2,5
8	2,5	1	2,5
9	1	2,5	2,5
10	2	2	2
11	2,5	1	2,5
12	2	2	2
	$R_1 = 22{,}5$	$R_2 = 22{,}5$	$R_3 = 27$

Tabel A.18 Harga-harga kritis L pilihan, untuk uji tandingan berurut Page

	k = 3			k = 4		
	α			α		
b	0.001	0.01	0.05	0.001	0.01	0.05
2			28		60	58
3		42	41	89	87	84
4	56	55	54	117	114	111
5	70	68	66	145	141	137
6	83	81	79	172	167	163
7	96	93	91	198	193	189
8	109	106	104	225	220	214
9	121	119	116	252	246	240
10	134	131	128	278	272	266
11	147	144	141	305	298	292
12	160	156	153	331	324	317
13	172	169	165			
14	185	181	178			
15	197	194	190			
16	210	206	202			
17	223	218	215			
18	235	231	227			
19	248	243	239			
20	260	256	251			

	k = 5			k = 6		
	α			α		
b	0.001	0.01	0.05	0.001	0.01	0.05
2	109	106	103	178	173	166
3	160	155	150	260	252	244
4	210	204	197	341	331	321
5	259	251	244	420	409	397
6	307	299	291	499	486	474
7	355	346	338	577	563	550
8	403	393	384	655	640	625
9	451	441	431	733	717	701
10	499	487	477	811	793	777
11	546	534	523	888	869	852
12	593	581	570	965	946	928

	k = 7			k = 8		
	α			α		
b	0.001	0.01	0.05	0.001	0.01	0.05
2	269	261	252	388	376	362
3	394	382	370	567	549	532
4	516	501	487	743	722	701
5	637	620	603	917	893	869
6	757	737	719	1090	1063	1037
7	876	855	835	1262	1232	1204
8	994	972	950	1433	1401	1371
9	1113	1088	1065	1603	1569	1537
10	1230	1205	1180	1773	1736	1703
11	1348	1321	1295	1943	1905	1868
12	1465	1437	1410	2112	2072	2036

Sumber: E. B. Page, "Ordered Hypotheses for Multiple Treatments: A Significance Test for Linear Ranks," *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58 (1963), 216–230

Uji Page

LATIHAN 3

Stern dkk melaporkan nilai-nilai bilirubin tidak langsung dalam serum untuk 10 bayi normal, seperti dalam tabel. Apakah data ini menyediakan bukti yang cukup untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai tersebut menurun sejalan dengan waktu pada usia antara 4 dan 10 hari?

Kasus	Usia, hari						
	4	5	6	7	8	9	10
1	10,80	6,15	4,10	5,00	5,00	3,40	2,60
2	12,50	11,80	13,20	11,00	8,20	6,80	6,00
3	13,70	16,80	16,80	15,60	11,70	12,50	10,55
4	11,50	6,80	4,00	3,50	1,66	1,60	1,60
5	10,20	6,40	3,10	3,00	2,60	2,20	1,98
6	8,00	7,85	7,45	7,00	3,60	4,00	3,00
7	10,80	11,10	6,15	7,00	3,80	4,30	5,60
8	14,90	10,80	9,90	9,40	10,50	7,70	7,60
9	16,20	16,40	15,40	10,20	8,30	10,70	7,40
10	10,80	10,00	6,80	4,60	4,20	3,80	3,50

Uji Durbin

Uji Durbin

- Ketika merencanakan suatu eksperimen, mungkin saja kita menjumpai kenyataan bahwa upaya membentuk suatu rancangan blok acak lengkap (RBAL) mustahil atau tidak praktis. Dengan demikian, rancangan yang terbentuk adalah rancangan blok tidak lengkap (*incomplete block design*). Rancangan yang akan dibahas adalah rancangan blok tidak lengkap berimbang (*balanced incomplete block design*).
- Dalam rancangan ini, rancangan mempersyaratkan bahwa masing-masing blok berisi subjek-subjek dengan dengan banyak yang sama dan masing-masing-masing perlakuan muncul dengan jumlah permunculan yang sama.

Uji Durbin

- Sebuah eksperimen yang memperbandingkan tujuh perlakuan dan menggunakan dan menggunakan tiga kelompok hewan seperindukan sebagai subjek-subjek. Tabel berikut menunjukkan salah satu kemungkinan tata letak data yang memenuhi persyaratan rancangan blok tidak lengkap berimbang.
- Tabel menunjukkan bahwa setiap pasangan perlakuan yang mungkin selalu muncul satu kali, masing-masing blok berisi tiga subjek, dan masing-masing perlakuan muncul tiga kali.

Blok	**Usia, hari**						
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1	x	x		x			
2		x	x		x		
3			x	x		x	
4				x	x		x
5	x				x	x	
6		x				x	x
7	x		x				x

x = reaksi subjek dalam suatu blok terhadap perlakuan yang diberikan

Uji Durbin

Pengujian hipotesis nol tentang tidak adanya perbedaan di antara perlakuan dalam rancangan blok tidak lengkap menggunakan teknik parametrik hanya valid/sahih apabila distribusi populasi yang diminati memenuhi asumsi tertentu. Namun, apabila distribusi tidak memenuhi asumsi, maka dapat menggunakan uji Durbin.

Asumsi

- Setiap blok saling bebas dari yang lain.
- Setiap nilai pengamatan dalam masing-masing blok dapat diperingkat berdasarkan urutan besarannya.

Uji Durbin

Hipotesis

H_0 : Semua perlakuan memberikan efek-efek yang sama

H_1 : Reaksi-reaksi terhadap sekurang-kurangnya salah satu perlakuan cenderung lebih besar daripada reaksi-rekasi terhadap sekurang-kurangnya sebuah perlakuan yang lain

Keputuasn

Menolak H_0 pada taraf nyata α, jika nilai statistik uji T hasil perhitungan lebih besar dari nilai chi-square tabel dengan α dan derajat bebas $t-1$.

Statistik Uji

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^{t} R_j^2 - \frac{3r(t-1)(k+1)}{k-1}$$

Dengan t = banyaknya perlakuan yang diamati

k = banyaknya subjek per blok ($k < t$)

r = banyaknya pemunculan masing-masing perlakuan

R_j = jumlah peringkat untuk perlakuan ke-j

- Setiap nilai pengamatan dalam masing-masing blok ditetapkan peringkatnya.
- Nilai-nilai pengamatan yang berangka sama diberi peringkat rata-rata dari posisi-posisi peringkat yang semestinya. Asalkan tidak terlalu banyak, kasus angka sama tidak terlalu berpengaruh terhadap hasil pengujian.

Uji Durbin

CONTOH 4

Moore dan Bliss membandingkan efek toksisitas masing-masing dari tujuh bahan kimia yang digunakan terhadap *Aphis rumicis*, tungau hitam yang terdapat pada tanaman *nasturtium*. Logaritma dari dosis (+3.806) yang dibutuhkan untuk membunuh 95% dari serangga yang disemprot dengan setiap bahan kimia merupakan pengukuran yang dilaporkan dari penelitian mereka. Karena dalam sehari peneliti hanya dapat menguji tiga jenis saja dari bahan kimia yang dipelajari, mereka menggunakan suatu rancangan blok tidak lengkap berimbang yang memerlukan waktu tujuh hari untuk menyelesaikan penelitian tersebut. Efek-efek toksisitas yang tercatat itu terdapat dalam tabel berikut. Kita ingin mengetahui apakah berdasarkan data ini kita boleh menyimpulkan bahwa efektivitas ketujuh insektisida itu berbeda-beda?

Bahan Kimia	**Hari-ke**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	0,465	0,602		0,423			
B	0,343				0,652		
C		0,873	0,875		1,142		
D	0,396		0,325				0,609
E		0,634				0,409	0,417
F				0,987	0,989		0,931
G			0,330	0,426		0,309	

Uji Durbin

Jawab

Hipotesis

H_0 : Semua bahan kimia memiliki efektivitas yang sama

H_1 : Sekurang-kurangnya salah satu insektisida lebih efektif dari paling tidak insektisida yang lain

Statistik Uji

Ada 7 blok (hari), t = 7 perlakuan (bahan kimia),
k =3 nilai pengamatan per blok, dan r = 3 pemunculan tiap perlakuan

Bahan Kimia	Hari-ke (blok) 1	2	3	4	5	6	7	R_j
A	3	1		1				5
B	1				1	3		5
C		3	3		3			9
D	2		1				2	5
E		2				2	1	5
F				3	2		3	8
G			2	2		1		5

$$T = \frac{12(7-1)}{3(7)(3-1)(3+1)}(5^2 + 5^2 + \cdots + 5^2) - \frac{3(3)(7-1)(3+1)}{3-1} = 7{,}71$$

Keputusan: Nilai chi-square tabel dengan derajat bebas $t - 1 = 7 - 1 = 6$, kita mendapat bahwa peluang untuk nilai T sebesar 7,71 bila H0 benar lebih besar dari 0,10 (atau nilai chi-square tabel (taraf nyata 0,1 dan df=6 adalah 12,592). Dengan demikian, nilai $P > 0{,}10$ dan 7,71<12,592 sehingga **H_0 gagal ditolak**, artinya data ini tidak menyediakan bukti yang cukup untuk menyimpulkan adanya perbedaan efektivitas di antara bahan-bahan kimia.

Uji Durbin

Latihan 4

Sebuah penelitian dilakukan untuk membandingkan efek cara penyimpanan dengan pendinginan (*cold storage*) terhadap keempukan dan citarasa daging sapi. Untuk itu, dilakukan pengujian terhadap daging sapi yang telah disimpan dengan enam masa penyimpanan yang berbeda (0, 1, 2, 4, 9, dan 18 hari). Skor-skor yang menyatakan keempukan daging dalam tabel di samping. Berdasarkan data ini, dapatkah kita simpulkan bahwa masa penyimpanan itu berpengaruh terhadap keempukan daging sapi?

Blok	**Lama penyimpanan (perlakuan)**					
	0	**1**	**2**	**4**	**9**	**18**
1	7	17				
2			26	25		
3					33	29
4	17		27			
5		23			27	
6				29		30
7	10			25		
8		26				37
9			24		26	
10	25				40	
11		25		34		
12			34			32
13	11					27
14		24	21			
15				26	32	

Uji Cochran

Uji Cochran

- Uji Cochran untuk menguji hipotesis nol tentang tidak adanya perbedaan di antara perlakuan-perlakuan untuk pengamatan yang berhubungan.

Asumsi

- Data untuk analisis terdiri dari reaksi-reaksi dari *r* blok terhadap *c* perlakuan yang diterapkan secara independen.
- Reaksi-rekasi itu dinyatakan dengan 1 untuk "sukses" atau 0 untuk "gagal". Hasil-hasil pengamatan ini bisa ditunjukkan dalam tabel kontingensi dengan X_{ij} yang menyatakan 0 atau 1.
- Blok-blok yang ditampilkan merupakan blok-blok yang dipilih secara acak dari suatu populasi yang teridi dari semua blok yang mungkin.

Uji Cochran

Tabel 1. Tabel kontingensi untuk data pada uji Q Cochran

	Perlakuan					
Blok	1	2	3	…	c	Total baris
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	…	X_{1c}	R_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	…	X_{2c}	R_2
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	…	X_{3c}	R_3
⋮						
r	X_{r1}	X_{r2}	X_{r3}	…	X_{rc}	R_r
Total kolom	C_1	C_2	C_3	…	C_c	N

Uji Cochran

Hipotesis

H_0 : Semua perlakuan mempunyai efek yang sama

H_1 : Tidak semua perlakuan mempunyai efek yang sama

Statistik Uji

$$Q = \frac{c(c-1)\sum_{j=1}^{c} C_j^2 - (c-1)N^2}{cN - \sum_{i=1}^{r} R_i^2}$$

Jika hipotesis nol benar, setiap perlakuan dianggap sama-sama memiliki peluang untuk menghasilkan salah satu dari skor 1 (sukses). Tujuan dari uji adalah menentukan apakah jumlah-jumlah reaksi untuk masing-masing perlakuan berbeda-beda secara bermakna.

Uji Cochran

Keputusan

- Apabila data sudah disajikan dalam Tabel 1, keluarkan semua blok yang berisi skor 0 dan skor 1.
- Dengan meningkatnya r, maka distribusi Q mendekati distribusi *chi-square* dengan derajat bebas $c-1$.

Jika hasil perkalian antara banyaknya blok yang masih ada (r) dan banyaknya perlakuan (c) adalah ≥ 24 dan $r \geq 4$,

bandingkan nilai Q hasil perhitungan dengan nilai *chi-square* dari tabel dengan derajat bebas $c-1$.
H_0 ditolak jika $Q > \chi^2_{c-1}$ dengan taraf nyata α dan derajat bebas $c-1$.

Jika hasil perkalian c dan r kurang 24, ($c \times r < 24$)

bandingkan nilai Q dengan nilai kritis dari tabel distribusi Q dengan nilai c dan r tertentu.

Uji Cochran

CONTOH 5

Gustafson dkk membandingkan kemampuan tiga sistem diagnostik dengan menggunakan komputer (model) dan kesimpulan yang dibuat oleh dokter (*majority opinion*) dalam diagnosis berdasarkan simpton, tanda-tanda fisik, informasi laboratorium. Tabel di samping menunjukkan hasil yang diperoleh dari pemeriksaan terhadap 11 pasien hipotiroid. Untuk menguji hipotesis nol yang menyatakan bahwa keempat metode diagnostik memberikan hasil yang sama, kita menggunakan uji Cochran sebagai berikut.

Kesalahan individu yang oleh dokter dan oleh model
Catatan: 1 = diagnosis benar, 0 = diagnosis salah

Pasien	Pendapat umum dokter	Actual PIP	Subjective PIP	Semi-PIP
1	1	0	0	0
2	1	1	1	1
3	0	0	0	0
4	0	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	0	0	1
7	1	0	1	1
8	1	0	0	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	0
11	1	1	1	1

Uji Cochran

Jawab

Hipotesis

H_0 : Keempat metode diagnostik memberikan hasil yang identik

H_1 : Keempat metode di atas berbeda dalam hal kemampuan membuat diagnosis yang benar

Statistik uji

Baris yang semua berisi skor 1 atau skor 0 dihilangkan (pasien 2, 3, 5, dan 11) sehingga didapatkan tabel yang baru sebagai berikut.

Pasien	Pendapat umum dokter	Actual PIP	Subjective PIP	Semi-PIP	Total
1	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	3
6	1	0	0	1	2
7	1	0	1	1	3
8	1	0	0	1	2
9	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	1
Total	6	1	2	4	13

$$Q = \frac{4(4-1)(6^2+1^2+2^2+4^2)-(4-1)(13^2)}{4(13)-(1^2+3^2+2^2+3^2+2^2+1^2+1^2)} = 7{,}70$$

Perkalian dari baris dan kolom yang sudah direduksi adalah $7 \times 4 = 28$, maka kita membandingkan nilai Q dengan nilai chi-square tabel dengan $df = 4 - 1 = 3$ diperoleh 9,34 pada taraf nyata 0,05. Dengan demikian, nilai $Q = 7{,}70$ lebih kecil dari 9,34 sehingga kita **tidak dapat menolak H_0** pada taraf nyata 0,05 artinya keempat metode diagnostik memberikan hasil yang sama.

Uji Cochran

Latihan 5

Sebuah pabrik mempertimbangkan pembelian empat mesin yang akan digunakan untuk merakit suatu produk tertentu. Suatu eksperimen dilakukan guna menentukan apakah mesin-mesin itu dapat diterima oleh para pekerja. Para peneliti memilih 10 orang pekerja untuk membentuk sebuah sampel acak, dan masing-masing pekerja tadi diminta mengoperasikan setiap mesin (dengan urutan yang acak) selama suatu siklus perakitan yang lengkap. Kepada setiap mesin, para pekerja memberi skor 0 bila mesin yang bersangkutan tidak disukai, dan skor 1 bila disukai. Apakah data ini menyediakan bukti yang cukup untuk menunjukkan bahwa keempat mesin itu tidak mendapatkan penerimaan yang sama?

Pekerja	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Mesin A	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
Mesin B	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
Mesin C	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
Mesin D	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0

Terima Kasih

Statistika Non Parametrik TSD - Ganjil 2023/2024

Pertemuan 11:

Uji Asosiatif

Outline

- ✓ Korelasi Peringkat Spearman
- ✓ Korelasi Tau Kendall
- ✓ Contingency tables

Overview

- Dua aspek analisis asosiasi
  - Apakah data sampel yang teramati menyediakan bukti yang cukup untuk menyimpulkan bahwa variabel-variabel dalam populasi asal sampel saling berkaitan (asosiasi antara variabel-variabel). Menentukan suatu ukuran yang dalam hal tertentu yang menyatakan derajat atau keeratan hubungan antara variabel-variabel. Ukuran-ukuran itu memiliki 3 tujuan:
    - Mengukur keeratan hubungan di antara hasil-hasil pengamatan dalam sampel.
    - Menyediakan estimasi titik untuk ukuran keeratan hubungan antara variabel-variabel dalam populasi.
    - Merupakan basis bagi pembentukan interval kepercayaan untuk ukuran keeratan hubungan antara variabel-variabel dalam populasi
  - Ukuran yang menyatakan keeratan hubungan di antara hasil-hasil pengamatan dari populasi-populasi yang memiliki 2 varian (bivariate), misalnya variabel X dan Y. Statistik yang sering digunakan adalah koefisien korelasi Pearson atau biasa dilambangkan dengan r untuk menduga koefisien korelasi populasi ρ, dengan mensyaratkan populasi asal sampel bivariate dan berdistribusi normal. Koefisien korelasi momen-momen Pearson memiliki karakteristik suatu ukuran korelasi.

Korelasi Peringkat Spearman

- Jika 2 variabel tidak memenuhi asumsi normal atau data berupa peringkat (skala ordinal), korelasi dapat dihitung dengan prosedur **nonparametrik**.
- Ukuran korelasi nonparametrik yang paling sering digunakan antara 2 variabel adalah **korelasi peringkat Spearman**. Koefisien korelasi peringkat Spearman terkadang disebut **rho-Spearman**.
- Misalkan memiliki data X dan Y yang berpasangan, (x_i, y_i).
  1. Memeringkat untuk observasi variabel pertama dari terkecil hingga terbesar
  2. Secara independen memeringkat observasi variabel kedua
  3. Menghitung nilai koefisien korelasi Spearman dengan rumus berikut, jika tidak ada observasi dengan nilai sama (*tie observation*)

Korelasi Peringkat Spearman

Asumsi

- Data yang digunakan merupakan sampel acak yang terdiri dari n pasangan hasil pengamatan numerik atau nonnumerik. Setiap pasangan hasil pengamatan yang berasal dari dua pengukuran terhadap objek atau individu yang sama disebut unit asosiasi.
- Jika data terdiri dari hasil-hasil pengamatan dari suatu populasi yang bivariate, kita menuliskannya (X1, Y1), (X2, Y2), …, (Xn, Yn).
- Setiap X dan Y ditetapkan peringkatnya relatif terhadap masing-masing semua nilai X lain dan Y lain yang teramati dari terkecil hingga terbesar. Notasi $R(X_i)$ sama dengan 1 untuk nilai X teramati yang terkecil, begitu juga untuk nilai Y.
- Jika di antara nilai-nilai X atau di antara nilai-nilai Y terdapat angka sama, masing-masing nilai yang sama diberi peringkat rata-rata dari posisisi-posisi yang seharusnya.
- Jika data terdiri dari hasil-hasil pengamatan nonnumerik bukan angka, data tersebut harus dapat diperingkat seperti yang dijelaskan.

Korelasi Peringkat Spearman

Hipotesis

- Dua Sisi

H0: X dan Y bebas

H1: X dan Y tidak bebas (pertalian langsung atau invers)

$$H_0 : \rho_s = 0$$
$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

- Satu Sisi

H0: X dan Y bebas

H1: Ada pertalian langsung antara X dan Y

$$H_0 : \rho_s \leq 0$$
$$H_1 : \rho_s > 0$$

- Satu Sisi

H0: X dan Y bebas

H1: Ada pertalian invers antara X dan Y

$$H_0 : \rho_s \geq 0$$
$$H_1 : \rho_s < 0$$

Statistik uji

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

dengan d_i, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah selisih antara peringkat dari x_i dan y_i serta $d_i = R(x_i) - R(y_i)$.

Statistik uji r_s merupakan ukuran asosiasi atau koefisien korelasi peringkat Spearman yang menunjukkan keeratan hubungan antara nilai X dan Y dalam sampel dan sebagai estimasi untuk keeratan hubungan antara X dan Y dalam populasi asal sampel.

Jika ada angka yang sama dalam nilai X atau nilai Y, tetapi jumlahnya kecil dibandingkan dengan *n*, persamaan di atas tetap berguna.

Statistik uji untuk sampel besar

$$z = r_s\sqrt{n-1}$$

Korelasi Peringkat Spearman

- Jika $R(X_i) = R(Y_i)$untuk setiap pasangan hasil pengamatan, semua d_i=0 dan r_s =+1 (pertalian langsung/lurus sempurna)
- Jika nilai peringkat salah satu variabel dalam masing-masing pasangan hasil pengamatan merupakan kebalikan peringkat yang lainnya (pertalian invers/ terbalik sempurna), pada umumnya r_s=-1
- Contoh hasil pengamatan (X_i, Y_i) :
  - (0, 10), (8, 3), (2, 9), (5, 6)
  - $R(X_i)$ 1 4 2 3
  - $R(Y_i)$ 4 1 3 2
  - d_i -3 3 -1 1
  - r_s=1-[6(20)/4(16-1)]=1-2=-1

Korelasi Peringkat Spearman

- Daerah penolakan:
  - 2-tailed test: H_0 ditolak jika $r_s \geq C$ atau $r_s \leq -C$
  - Right-tailed test: H_0 ditolak jika $r_s \geq C$
  - Left-tailed test: H_0 ditolak jika $r_s \leq -C$

C adalah nilai kritis dari koefisien korelasi Spearman

- Angka Sama

$$T_X = \frac{t_X^3 - t_X}{12} \qquad x^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \sum T_X \qquad r_s = \frac{\sum x^2 + \sum y^2 - \sum d_i^2}{2\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

$$T_Y = \frac{t_Y^3 - t_Y}{12} \qquad y^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \sum T_Y$$

t_X dan t_Y berturut-turut adalah banyaknya nilai pengamatan X dan banyaknya nilai pengamatan Y yang berangka sama untuk suatu peringkat.

CONTOH 1

Indeks S&P 100 adalah indeks 100 opsi saham yang diperdagangkan di Chicago Board Options Exchange. MMI adalah indeks 20 saham dengan opsi yang diperdagangkan di Bursa Efek Amerika. Karena opsi tidak stabil, asumsi distribusi normal mungkin tidak sesuai, dan koefisien korelasi peringkat Spearman dapat memberi kita informasi tentang hubungan antara dua indeks. Menggunakan data yang dilaporkan pada dua indeks, diberikan pada Tabel 14–6 , hitung statistik rs, dan uji hipotesis nol bahwa MMI dan S&P 100 tidak terkait dengan alternatif yang berkorelasi positif.

Jawab:

Data on the MMI and S&P 100 Indexes for Example 14–11

MMI	S&P 100	Rank(MMI)	Rank(S&P 100)	Difference
220	151	7	6	1
218	150	5	5	0
216	148	3	3	0
217	149	4	4	0
215	147	2	2	0
213	146	1	1	0
219	152	6	7	−1
236	165	9	10	−1
237	162	10	9	1
235	161	8	8	0

$$H_0: \rho_s \leq 0$$
$$H_1: \rho_s > 0$$

$$r_s = 1 - \frac{6(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{10}^2)}{10(10^2 - 1)} = 1 - \frac{24}{990} = 0.9758$$

dengan $\alpha = 0{,}005$ dan $n = 10$

Dari tabel diperoleh titik kritis 0,794

Nilai statistik 0,9758 > 0,794

sehingga **H_0 ditolak** pada tingkat signifikansi 0,005

CONTOH 2

Pincherle dan Robinson ingin meneliti variasi antarpengamat yang mencolok dalam pembacaan tekanan darah. Mereka menjumpai bahwa dokter-dokter yang mendapatkan angka tinggi pembacaan tekanan sistolik cenderung mendapatkan angka yang tinggi pada pembacaan angka diastolik. Tabel di bawah menunjukkan rata-rata pembacaan tekanan darah sistolik dan tekanan darah diastolik oleh 14 orang dokter. Kita ingin menghitung ukuran yang menyatakan kekuatan pertalian antara kedua variabel itu. Misalkan ke-14 dokter merupakah sebuah sampel acak dari suatu populasi dokter. Kita ingin tahu apakah kita dapat menyimpulkan adanya pertalian yang langsung/lurus antara pembacaan sistolik dan diastolik.

Dokter	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Sistolik	141,8	140,2	131,8	132,5	135,7	141,2	143,9
Diastolik	89,7	74,4	83,5	77,8	85,8	86,5	89,4
Dokter	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Sistolik	140,2	140,8	131,7	130,8	135,6	143,6	133,2
Diastolik	89,3	88,0	82,2	84,6	84,4	86,3	85,9

Korelasi Peringkat Spearman

- Hipotesis

H0: Pembacaan-pembacaan tekanan darah sistolik dan diastolik oleh para dokter bebas

H1: Ada pertalian lurus antara pembacaan-pembacaan tekanan darah sistolik dan diastolik oleh para dokter

Hipotesis alternatif menyatakan bahwa dokter-dokter yang mendapatkan angka tinggi pada pembacaan tekanan sistolik cenderung mendapatkan angka yang tinggi pula pada pembacaan tekanan diastolik.

Korelasi Peringkat Spearman

X_i	Y_i	$R(X_i)$	$R(Y_i)$	d_i	d_i^2
142	89,7	12	14	-2	4
140	74,4	8,5	1	7,5	56,25
132	83,5	3	4	-1	1
133	77,8	4	2	2	4
136	85,8	7	7	0	0
141	86,5	11	10	1	1
144	89,4	14	13	1	1
140	89,3	8,5	12	-3,5	12,25
141	88	10	11	-1	1
132	82,2	2	3	-1	1
131	84,6	1	6	-5	25
136	84,4	6	5	1	1
144	86,3	13	9	4	16
133	85,9	5	8	-3	9
				Jumlah	132,50

$$r_s = 1 - \frac{6(132{,}50)}{14(14^2 - 1)} = 0{,}71$$

Keputusan:

Dari tabel menunjukkan bahwa untuk n=14, peluang untuk mendapatkan suatu nilai rs sebesar atau lebih besar dari 0,71, jika H0 benar, adalah antara 0,001 dan 0,005 atau nilai 0,71 > 0,457 dengan tingkat signifikansi 0,05 dan derajat bebas 14. Oleh karena itu, kita menolak H0 dan menyimpulkan bahwa dokter yang mendapatkan pembacaan tekanan darah sistolik tinggi cenderung mendapatkan pembacaan tekanan darah diastolik yang tinggi juga.

Korelasi Tau Kendall

Korelasi Tau Kendall

- Korelasi Tau Kendall didasarkan pada peringkat-peringkat hasil pengamatan sama halnya dengan korelasi peringkat Spearman.
- Jika dihitung dari data yang sama, biasanya nilai $\hat{\tau}$ dan r_s biasanya memberikan nilai-nilai bilangan yang berbeda.
- Salah satu perbedaan yang penting antara $\hat{\tau}$ dan r_s adalah bahwa $\hat{\tau}$ merupakan suatu penduga tidak bias untuk parameter populasi, sedangkan r_s tidak memberikan dugaan untuk koefisien korelasi peringkat suatu populasi.
- Kita dapat mendefinisikan parameter yang diduga dengan $\hat{\tau}$ sebagai peluang konkordansi minus peluas diskordasi. Pasangan-pasangan pengamatan (X_i, Y_i) dan (X_j, Y_j) disebut konkordan, jika selisih antara X_i dan X_j memiliki arah yang sama dengan selisih selisih antara Y_i dan Y_j. Sebaliknya, jika arah selisih tidak sama, maka pasangan-pasangan hasil pengamatan (X_i, Y_i) dan (X_j, Y_j) disebut diskordan.

Korelasi Tau Kendall

Asumsi

- Data yang tersedia merupakan sampel acak yang terdiri dari n pasangan hasil pengamatan (X_i, Y_i) dan $\left(X_j, Y_j\right)$, baik numerik maupun nonnumerik.
- Masing-masing hasil pengamatan diperoleh dari dua pengukuran terhadap unit asosiasi yang sama.
- Sekurang-kurangnya skala ordinal

Korelasi Tau Kendall

Hipotesis

- Dua sisi

$H_0: \tau = 0$

$H_1: \tau \neq 0$

- Satu sisi

$H_0: \tau \leq 0$

$H_1: \tau > 0$

- Satu sisi

$H_0: \tau \geq 0$

$H_1: \tau < 0$

Statistik Uji

$$\hat{\tau} = \frac{S}{n(n-1)/2}$$

dengan n adalah banyaknya (X, Y) yang diamati atau banyaknya pangkat. Untuk mendapatkan S, selanjutnya bisa digunakan dalam menghitung $\hat{\tau}$ dengan prosedur sebagai berikut:

1. Susunlah pasangan (X_i, Y_i) dalam sebuah kolom menurut bersanya nilai X dari yang terkecil (*natural order*).
2. Bandingkan setiap nilai Y satu demi satu dengan setiap nilai Y yang ada di sebelah bawahnya.
   - Natural order: nilai Y yang di atas lebih kecil daripada yang di bawahnya
   - Reserve natural order: nilai Y yang di atas lebih besar dari yang di bawahnya
3. Tetapkan P sebagai banyaknya pasangan berurutan wajar dan Q banyaknya pasangan berurutan terbalik
4. Hitung $S = P - Q$

Korelasi Tau Kendall

Kaidah pengambilan keputusan

- Dua Sisi

Tolak H0 pada taraf nyata α jika nilai $\hat{\tau}$ hasil perhitungan > τ^* dalam Tabel untuk n dan $\frac{\alpha}{2}$ atau nilai $\hat{\tau} < \tau^*$ dalam Tabel untuk n dan $\frac{\alpha}{2}$

- Satu Sisi

Tolak H0 pada taraf nyata α jika nilai $\hat{\tau}$ hasil perhitungan > τ^* dalam Tabel untuk n dan $\frac{\alpha}{2}$

- Satu Sisi

Tolak H0 pada taraf nyata α jika nilai $\hat{\tau} < \tau^*$ dalam Tabel untuk n dan $\frac{\alpha}{2}$

CONTOH 3

Cravens dan Woodruff mengadakan sebuah studi untuk merancang dan menguji suatu metodologi untuk menentukan standar *sales performance* secara analitik. Untuk itu, mereka mengumpulkan data tentang *benchmark achievement (X)* dan *management rating (Y)* untuk 25 Kawasan penjualan seperti dalam tabel berikut. Mereka menghitung *sales performance* dengan cara membagi *sales volume* dengan *benchmark sales* dan *management rating* ditentukan dari motivasi dan usaha yang ditunjukkan oleh masing-masing tenaga penjual.

No	X	Y	No	X	Y
1	2	4	14	11	10
2	9	2	15	1	1
3	7	20	16	21	14
4	23	17	17	14	15
5	5	5	18	3	11
6	17	7	19	13	13
7	16	6	20	18	19
8	25	24	21	22	25
9	4	3	22	19	16
10	10	21	23	24	23
11	20	18	24	6	22
12	15	9	25	12	12
13	8	8			

CONTOH 3

Kita ingin menghitung $\hat{\tau}$ untuk melihat apakah data ini memberikan bukti yang cukup bagi kita untuk menyimpulkan bahwa *benchmark achievement* dan *management rating* memiliki pertalian yang lurus. Meskipun data yang dilaporkan adalah peringkat-peringkat, untuk menghitung $\hat{\tau}$ kita mengikuti prosedur yang sama seperti yang digunakan jika data yang dilaporkan adalah harga-harga absolut.

CONTOH 3

Hipotesis:

H0: Benchmark achievement dan management rating independen

H1: Benchmark achievement dan management rating memiliki pertalian yang lurus ($\tau > 0$)

Statistik uji

$$\hat{\tau} = \frac{218 - 82}{25(25-1)/2} = 0{,}45$$

Keputusan

Dengan n=25, nilai tabel menunjukkan bahwa kita dapat menolak H0 pada taraf nyata 0,005 karena $\hat{\tau}$=0,45 > τ^*=0,367. Jadi, kesimpulannya adalah terdapat pertalian lurus antara Benchmark achievement dan management rating.

(X_i, Y_i)	Urutan mundur	Urutan maju
(1, 1)	24	0
(2, 4)	21	2
(3, 11)	14	8
(4, 3)	20	1
(5, 5)	19	1
(6, 22)	3	16
(7, 20)	4	14
(8, 8)	14	3
(9, 2)	16	0
(10, 21)	3	12
(11, 10)	11	3
(12, 12)	10	3
(13, 13)	9	3

(X_i, Y_i)	urutan mundur	Urutan maju
(14, 15)	7	4
(15, 9)	8	2
(16, 6)	9	0
(17, 7)	8	0
(18, 19)	3	4
(19, 16)	5	1
(20, 18)	3	2
(21, 14)	4	0
(22, 25)	0	3
(23, 17)	2	0
(24, 23)	1	0
(25, 24)	0	0
	P=218	Q=82

Korelasi Tau Kendall

Angka Sama

Prosedur menghitung $\hat{\tau}$:

1. Susunlah hasil-hasil pengamatan dalam urutan yang wajar (meningkat), menurut besarnya nilai-nilai X.
2. Untuk pasangan-pasangan dengan harga X yang sama, nilai-nilai Y-nya yang disusun secara meningkat.
3. Hitunglah banyaknya pasangan Y yang berurutan wajar dan banyaknya pasangan Y yang berurutan terbalik, seperti yang dijelaskan sebelumnya. Namun, jangan bandingkan nilai-nilai Y yang pasangan nilai X-nya sama.

Korelasi Tau Kendall

Angka Sama

Jika angka sama sangat banyak, kita boleh menghitung $\hat{\tau}$ menggunakan rumus khusus sebagai berikut.

$$\hat{\tau} = \frac{S}{\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - T_x}\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - T_y}}$$

dengan

$T_x = \frac{1}{2}\sum t_x(t_x - 1)$ dan $T_y = \frac{1}{2}\sum t_y(t_y - 1)$

t_x = banyaknya nilai X yang sama untuk suatu peringkat

t_y = banyaknya nilai Y yang sama untuk suatu peringkat

CONTOH

Krippner melaporkan data yang ada di tabel di samping tentang 30 anak, terdiri dari 26 pria dan 4 wanita yang mengikuti pelajaran membaca tambahan yang diselenggarakan oleh suatu pusat penelitian anak di sebuah universitas. Data tersebut dikumpulkan untuk menentukan yang manakah dari beberapa variabel yang berkaitan dengan peningkatan kemampuan membaca terkait kegiatan penanganan khusus. Kita akan menghitung $\hat{\tau}$ dari data tersebut dan menguji hipotesis nol yang menyatakan tidak adanya asosiasi antara IQ (Y) dan peningkatan kemampuan membaca (X).

Klien	X	Y	Klien	X	Y
Alvin	0,6	86	Peter	1,6	104
Barry	0,2	107	Quincy	0,0	98
Chester	1,6	102	Ralph	1,6	115
Dick	0,5	104	Rita	0,2	109
Earl	0,9	104	Simon	0,3	94
Floyd	0,5	89	Tony	0,0	112
Gregg	0,8	109	Uriah	1,0	96
Harry	0,8	109	Victor	1,3	113
Ivan	0,8	101	Waldo	0,6	110
Jacob	0,4	96	Walter	0,6	97
Karl	1,8	113	Wanda	0,5	107
Lewis	0,1	85	Xavier	1,7	113
Marvin	0,9	100	York	1,6	109
Ned	0,2	94	Yvonne	2,2	98
Oscar	1,6	104	Zohra	1,5	106

Jawab

Hipotesis

H0: Peningkatan kemampuan membaca dan IQ bebas ($\tau = 0$)

H1: Ada suatu pertalian yang lurus atau terbalik antara peningkatan kemampuan membaca dan IQ ($\tau \neq 0$)

Statistik Uji

$$T_x = \frac{2(1) + 3(2) + 3(2) + 3(2) + 3(2) + 2(1) + 5(4)}{2} = 24$$

$$T_y = \frac{2(1) + 2(1) + 2(1) + 4(3) + 2(1) + 4(3) + 3(2)}{2} = 19$$

$$\hat{\tau} = \frac{250 - 144}{\sqrt{\frac{30(29)}{2} - 24}\sqrt{\frac{30(29)}{2} - 19}} = 0{,}26$$

Karena nilai $\hat{\tau}$ yang dihitung sebesar 0,26 lebih besar dari nilai $\hat{\tau}^*$ = 0,218 untuk n=30 sehingga kita dapat **menolak H0** pada taraf nyata 0,10. Jadi, ada suatu pertalian yang lurus atau terbalik antara peningkatan kemampuan membaca dan IQ.

X	Y	Pasangan Y dalam urutan maju	Pasangan Y dalam urutan mundur
0	98	19	8
0	112	4	24
0,1	85	27	0
0,2	94	21	2
0,2	107	8	15
0,2	109	5	16
0,3	94	21	2
0,4	96	19	2
0,5	89	18	1
0,5	104	9	7
0,5	107	8	11
0,6	86	16	0
0,6	97	15	1
0,6	110	4	12
0,8	101	10	3
0,8	109	4	8
0,8	109	4	8
0,9	100	9	2
0,9	104	6	3
1	96	10	0
1,3	113	1	6
1,5	106	4	4
1,6	102	2	1
1,6	104	2	1
1,6	104	2	1
1,6	109	2	1
1,6	115	0	3
1,7	113	0	1
1,8	113	0	1
2,2	98	0	0

Korelasi Tau Kendall

Aproksimasi bila sampel besar

$$z = \frac{3\hat{\tau}\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2(2n+1)}}$$

Statistik z mendekati distribusi nomal dengan mean 0 dan standar deviasi 1 (normal standar).

r_s atau $\hat{\tau}$?

Koefisien korelasi Spearman dan Tau Kendall adalah ukuran asosiasi yang paling sering ditemui antara variabel-variabel yang diukur pada skala ordinal. Biasanya kecil sekali landasan yang dapat digunakan untuk memilih salah satu dari keduanya. Berikut beberapa pertimbangan yang bisa digunakan.

1. Jika perhitungan harus dikerjakan tanpa kalkulator, perhitungan untuk mendapatkan $\hat{\tau}$ dianggap lebih menjemukan daripada mendapatkan r_s.
2. Distribusi $\hat{\tau}$ lebih cepat mendekati distribusi normal daripada distribusi r_s. Jadi, jika kita menggunakan aproksimasi normal untuk sampel berukuran sedang, statistik uji $\hat{\tau}$ mungkin lebih dapat diandalkan.
3. Pengujian-pengujian hipotesis yang menggunakan kedua statistik ini memiliki efisiensi relatif asimtotik yang sama jika dibandingkan dengan pengujian menggunakan koefisien korelasi moment-product Pearson dalam kondisi yang memungkinkan sahihnya uji Pearson.
4. Pada umumnya, dengan data yang sama, nilai r_s dan $\hat{\tau}$ memiliki nilai yang berbeda, tetapi dalam pengujian hipotesis biasanya membawa pada keputusan yang sama.
5. Statistik $\hat{\tau}$ dapat diartikan sebagai penduga parameter populasinya, sementara r_s tidak menduga suatu parameter populasi.

Statistik r_s dan $\hat{\tau}$ sering digunakan sebagai penguji kecenderungan atau bisa menjadi pengganti Uji kecenderungan Cox-Stuart.

Asosiasi Lain

- **Uji Asosiasi Sudut (Corner test of Association) Olmstead-Tukey**
  - Sering disebut dengan uji jumlah kuadran (quadrant sum test).
  - Untuk mendeteksi adanya korelasi antara dua variabel X dan Y, dan memberikan penekanan pada nilai-nilai ekstrem.
  - Bisa menjadi alternatif
- **Koefisien Konkordansi W Kendall**
- **Ukuran Asosiasi dalam Tabel Kontingensi**

Contingency Table

Uji Chi-Square (χ^2) Untuk Uji Independensi

- Dapat dihitung melalui **tabel kontingensi**, yaitu tabel data jumlah frekuensi yang muncul dari klasifikasi pengamatan sampel menurut dua atau lebih karakteristik
- Digunakan untuk mengetahui apakah dua variabel tersebut independent atau cenderung berasosiasi

Uji Chi-Square (χ^2)

- H0: Setiap probabilitas sel sama dengan perkalian probabilitas marginal baris dan kolom yang sesuai
- Statistik Uji:

$$\chi^2 = \sum_{\text{cells}} \frac{(O - E)^2}{E}$$

  Dengan

  O: observed cell frequency

  E: expected cell frequency = $\frac{row\ total\ x\ column\ total}{Grand\ total}$
- Degree of freedom (df): $(r-1)(c-1)$ dimana r adalah jumlah baris dan c adalah jumlah kolom tabel kontingensi
- Jika nilai statistik uji (χ^2) lebih besar dari nilai tabel (${\chi^2}_{\alpha}$), maka tolak H0.
- Jika nilai statistik uji lebih kecil dari nilai tabel, maka gagal tolak H0

Contoh Soal

- Lakukan analisis apakah terdapat hubungan antara tipe organisasi dengan kredit yang dirugikan sebagai akibat dari dibebaskannya data pribadi?

TABLE 12 Type of Oraganization and Fraudulent Use of Personal Information

	Government	Financial	Other Commercial	Total
Harm	30	24	21	75
No Harm	182	104	34	320
Total	212	128	55	395

H0 : setiap probabilitas sel adalah hasil perkalian antara probabilitas marginal pasangan baris dan kolom yang sesuai

Jawab

TABLE 12 Type of Oraganization and Fraudulent Use of Personal Information

	Government	Financial	Other Commercial	Total
Harm	30	24	21	75
No Harm	182	104	34	320
Total	212	128	55	395

1. Buatlah proporsi observasi pada masing-masing sel

TABLE 13(a) Proportion of Observations in Each Cell

	Government	Financial	Other Commercial	Total
Harm	.076	.061	.053	.190
No Harm	.461	.263	.086	.810
Total	.537	.324	.139	1.000

2. Untuk melakukan uji chi-square perlu menentukan frekuensi yang diharapkan (*expected cell frequency*)

$$\text{Expected cell frequency} = \frac{\text{Row total} \times \text{Column total}}{\text{Grand total}}$$

$$395\hat{p}_H\hat{p}_1 = 395 \times \frac{75}{395} \times \frac{212}{395}$$
$$= \frac{75 \times 212}{395} = 40.25$$

	Government	Financial	Other Commercial	Row Marginal Probability
Harm	p_{H1}	p_{H2}	p_{H3}	p_H
No Harm	p_{N1}	p_{N2}	p_{N3}	p_N
Column marginal probability	p_1	p_2	p_3	1

TABLE 14(a) The Observed and Expected Cell Frequencies for the Credit Fraud Data in Table 12

	Government	Financial	Other Commercial
Harm	30 (40.25)	24 (24.30)	21 (10.44)
No Harm	182 (171.75)	104 (103.70)	34 (44.56)

3. Hitung nilai $\frac{(O-E)^2}{E}$ pada masing-masing cell
4. Jumlahkan untuk mendapatkan nilai chi-square sebagai nilai statistik uji

$$\chi^2 = \sum_{\text{cells}} \frac{(O - E)^2}{E}$$

$$\begin{aligned} \text{d.f. of } \chi^2 &= rc - 1 - (r - 1) - (c - 1) \\ &= rc - r - c + 1 \\ &= (r - 1)(c - 1) \end{aligned}$$

TABLE 14(b) The Values of $(O - E)^2/E$

	Government	Financial	Other Commercial	Total
Harm	2.612	.004	10.672	
No Harm	.612	.001	2.501	
				$16.402 = \chi^2$

5. df = $(r-1)+(c-1)$ = (2-1)(3-1)=2 dan alpha=5%
6. $\chi^2 = 16{,}402$ dan $\chi^2{}_{\alpha,df}$= 5,99 sehingga $\chi^2 > \chi^2{}_{\alpha,df}$
7. Keputusannya adalah tolak H0. Artinya, terdapat kecenderungan asosiasi atau hubungan antara tipe organisasi dengan berbahaya atau tidaknya kredit yang dirugikan sebagai akibat dari dibebaskannya data pribadi

Uji χ^2 untuk Tabel Kontingensi 2 x 2

CONTOH

Untuk menentukan kemungkinan pengaruh perlakuan kimia terhadap kecepatan perkecambahan biji, 100 biji yang diberi perlakuan kimia dan 150 biji yang tidak diberi perlakuan ditaburkan. Jumlah benih yang berkecambah dicatat pada Tabel di bawah ini. Apakah data memberikan bukti kuat bahwa laju perkecambahan berbeda untuk benih yang diberi perlakuan dan tidak diberi perlakuan?

	Berkecambah	**Tidak berkecambah**	**Total**
Diperi perlakuan	84 (86,40)	16 (13,60)	100
Tidak diberi perlakuan	132 (129,60)	18 (20,40)	150
Total	216	34	250

Jawab

Misalkan p_1 dan p_2 menunjukkan probabilitas perkecambahan untuk benih yang diberi perlakuan kimia dan benih yang tidak diberi perlakuan, masing-masing, kami ingin menguji hipotesis nol $H_O: p_1 = p_2$ versus $H_1: p_1 \neq p_2$. Untuk uji χ^2, kami menghitung frekuensi yang diharapkan dengan cara biasa. Ini diberikan dalam tanda kurung pada tabel slide sebelumnya. Nilai χ^2 yang dihitung adalah

$$\chi^2 = \frac{(84 - 86{,}40)^2}{86{,}40} + \frac{(16 - 13{,}60)^2}{13{,}60} + \frac{(132 - 129{,}60)^2}{129{,}60} + \frac{(18 - 20{,}40)^2}{20{,}40}$$

$$= 0{,}067 + 0{,}424 + 0{,}044 + 0{,}282 = 0{,}817$$

$$df = (2-1)(2-1) = 1$$

Dengan menggunakan tabel distribusi chi-square, diperoleh nilai sebesar 3,84 untuk df=1 dan taraf nyata α=0,05. Nilai χ^2 yang dihitung sebesar 0,817 lebih kecil dari 3,84 sehingga H0 gagal ditolak pada α=0,05. Jadi, Kecepatan perkecambahan tidak berbeda nyata antara benih yang diberi perlakuan dan yang tidak diberi perlakuan.

Metode Lain Menganalisis Tabel Kontingensi 2 x 2

Mengingat Contoh sebelumnya, kami mencatat bahwa tabel kontingensi 2 x 2, dengan satu margin tetap, pada dasarnya adalah tampilan sampel acak independen dari dua populasi dikotomis (yaitu, dua kategori). Struktur ini ditunjukkan pada Tabel di bawah ini, di mana kami telah memberi label dua kategori "sukses" dan "gagal." Di sini X dan Y menunjukkan jumlah keberhasilan dalam sampel acak independen ukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari populasi 1 dan populasi 2, masing-masing.

	Banyaknya Sukses	**Banyaknya Gagal**	**Ukuran Sampel**
Populasi 1	X	$n_1 - X$	n_1
Populasi 2	Y	$n_2 - Y$	n_2

Misalkan p_1 dan p_2 menunjukkan probabilitas sukses populasi 1 dan 2, masing-masing, kami ingin menguji hipotesis nol $H_O: p_1 = p_2$.

Proporsi sampel berikut untuk mengestimasi p_1 dan p_2.

$\hat{p}_1 = \frac{X}{n_1}$ dan $\hat{p}_2 = \frac{Y}{n_2}$

Ketika ukuran sampel besar, uji dari $H_O: p_1 = p_2$ dapat menggunakan statistik uji z sebagai berikut:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ dengan $$\hat{p} = \frac{X + Y}{n_1 + n_2}$$

Daerah penolakan : $|Z| \geq z_{\alpha/2}$, $Z \leq -z_\alpha$, $Z \geq z_\alpha$ bergantung pada hipotesis alternatif, yaitu $p_1 \neq p_2$, $p_1 < p_2$, atau $p_1 > p_2$.

Meskipun uji statistik Z dan $\chi^2 = \frac{(O-E)^2}{E}$ tampaknya memiliki bentuk yang sangat berbeda, ada hubungan yang eksak di antara mereka — yaitu,

$$Z^2 = \chi^2 \text{ (untuk tabel kontingensi 2 x 2)}$$

Selain itu, $z_{\alpha/2}^2$ sama dengan titik α teratas dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas 1. Secara singkat, untuk $\alpha = 0{,}05$, $z_{0{,}025}^2 = (1{,}96)^2 = 3{,}8416$ (yaitu nilai dari χ^2 tabel dengan df=1)

Jadi, kedua prosedur pengujian tersebut **ekuivalen bila hipotesis alternatifnya adalah dua-sisi**. Namun, **jika hipotesis alternatif adalah satu sisi**, seperti $p_1 < p_2$, atau $p_1 > p_2$, **hanya uji Z yang sesuai**.

Terima Kasih