TUGAS PROBABILITAS

1. Misalkan X_1 dan X_2 merupakan variabel acak independen yang berdistribusi $N(0,1)$. Jika didefinisikan $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ dan $W = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$. Dapatkan *joint pdf* dari V dan W.
2. Y_n merupakan suatu statistik order ke-n. Suatu sampel random berdistribusi Uniform dengan pdf

$$g_n(y_n) = \begin{cases} n\dfrac{y^{n-1}}{\lambda^n} & , \quad 0 < y < \theta \\ 0 & , \quad selainnya \end{cases}$$

   Suatu variabel random Z_n didefinisikan

$$Z_n = n(\lambda - Y_n).$$

   Dapatkan distribusi limit dari Z_n dan apakah hasilnya merupakan *degenerate function*?
3. $X \sim N(\mu, \sigma^2\ )$

   $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel random.

   Tunjukkan bahwa $\bar{S}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ konvergen stokastik ke σ^2.
4. Misalkan X_2, X_3, X_4 ... suatu barisan variabel random i.i.d. dengan CDF

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{nx} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad selainnya \end{cases}$$

   Tunjukkan bahwa X_n konvergen dalam distribusi ke $Exponential\ (1)$.
5. Misalkan bahwa $Y_n \sim \mathrm{POI}(n)$ dimana n adalah integer positif. Jika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, dengan $X_1, X_2, \dots, X_n$ independen, $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$. Berdasarkan CLT, tunjukkan bahwa

$$Z_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1), \text{ dengan } Y_n \sim \mathrm{N}(n, n) \text{ untuk } n \text{ yang besar.}$$

   Hitunglah $P(10 \leq Y_{20} \leq 30)$ jika $n = 20$.
6. Proses pembuatan tertentu menghasilkan tabung vakum yang masa pakainya dalam jam adalah variabel random independen dengan distribusi Eksponensial Negatif dengan rata-rata 1.500 jam. Berapa peluang umur total 50 tabung melebihi 60.000 jam? (Gunakan juga koreksi kontinuitas)