FAKULTAS TEKNOLOGI MAJU DAN MULTIDISIPLIN

PROBABILITAS

Tim Dosen Pengantar Statistika

PROBABILITAS

Topik Bahasan

01 Definisi Probabilitas

02 Probabilitas Peristiwa

03 Konsep Probabilitas

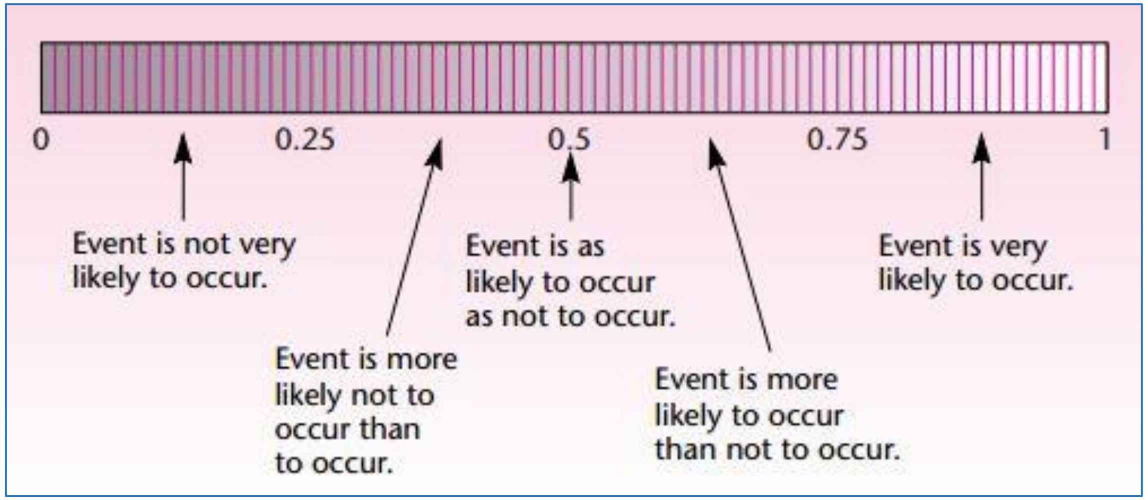
04 Operasi Dasar Peristiwa dan Aturan Probabilitas

05 Probabilitas Bersyarat dan Independendensi

06 Teorema Bayes

01. Definisi Probabilitas

- **Probabilitas** adalah ukuran ketidakpastian. Probabilitas peristiwa A adalah ukuran numerik dari kemungkinan peristiwa yang terjadi.
- **Probabilitas bernilai 0-1**. Semakin mendekati nilai 1, maka peluang terjadinya suatu peristiwa *(event)* semakin besar, begitu sebaliknya.



02. Probabilitas Peristiwa *(probability of an event)*

- **Probabilitas peristiwa** adalah ukuran numerik dari kemungkinan peristiwa akan terjadi.
- Sebelum memahami probabilitas lebih lanjut, kita review kembali istilah ruang sampel *(sample space)*, hasil (*outcome*), dan peristiwa (*event*).

Probability of event A:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

where

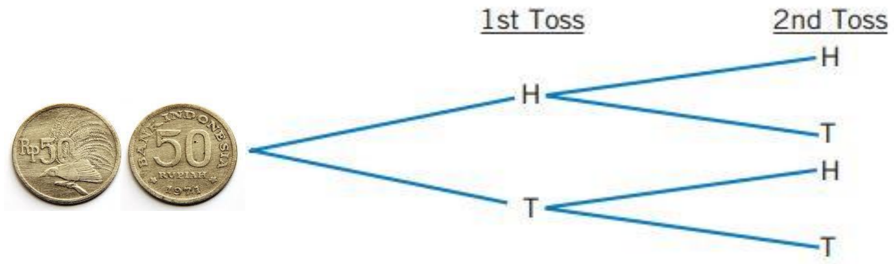
$n(A)$ = the number of elements in the set of the event A
$n(S)$ = the number of elements in the sample space S

02. Probabilitas Peristiwa *(probability of an event)*

- **Eksperimen** adalah proses mengamati fenomena yang memiliki variasi dalam hasil-hasilnya *(outcomes).*
- **Ruang sampel** *(sample space)* adalah kumpulan dari semua kemungkinan hasil percobaan.
- **Hasil** *(outcomes)* dari eksperimen adalah beberapa observasi atau pengukuran. Setiap *outcome* disebut *elementary outcome*, *simple event*, atau anggota dari ruang sampel.
- **Peristiwa** *(event)* adalah bagian dari ruang sampel. Peristiwa adalah sekumpulan hasil dasar (*elementary outcome*) yang memiliki ciri khusus.

02. Probabilitas Peristiwa *(probability of an event)*

Contoh 1



$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

Misal A adalah kejadian mendapatkan tepat satu *head*, yang ditulis:

$A = \{HT, TH\}$

Maka peluang kejadian A adalah $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = 0.5$

Contoh 2

Pada Sabtu sore, 135 pelanggan supermarket diamati saat akan membayar belanjaanya. Mereka membayar menggunakan kartu kredit ataupun debit. Identifikasilah ruang sampel *(sample space)* dan peristiwa *(event)* di mana lebih dari 50% pembayaran menggunakan kartu debit.

$S = \{1,2,3, \cdots, 135\}$

A adalah *event* di mana lebih dari 50% pembayaran menggunakan kartu debit : $50\% \times 135 = 67.5$

$A = \{68,69, \cdots, 135\}$

02. Probabilitas Peristiwa *(probability of an event)*

Sifat Probabilitas

Probability must satisfy:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ for all events A
2. $P(A) = \sum_{\text{all } e \text{ in } A} P(e)$
3. $P(S) = \sum_{\text{all } e \text{ in } S} P(e) = 1$

Keterangan:
S = Ruang sampel
e = Hasil/*outcome* (e)
A = Kejadian/peristiwa/*event*

03. Konsep Probabilitas

1. Model Probabilitas Seragam (*The Uniform Probability Model*)

Ketika hasil *(outcome)* eksperimen dimodelkan sebagai kemungkinan yang sama.

Jika ada hasil k di ruang sampel S, masing-masing hasil diberikan probabilitas $\frac{1}{k}$.

Sebuah peristiwa A yang terdiri dari hasil-hasil m maka probabilitasnya:

$$P(A) = \frac{m}{k} = \frac{\#hasil\ di\ A}{\#hasil\ di\ S}$$

Contoh:

Pelemparan sebuah dadu memiliki peluang $\frac{1}{6}$ untuk setiap sisinya.

Sedangkan untuk peluang mendapatkan angka > 4 maka peluangnya: $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

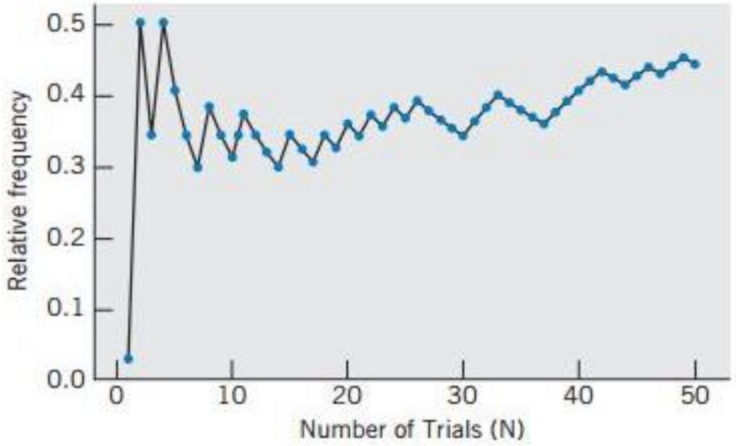
03. Konsep Probabilitas

2. Probabilitas Sebagai Frekuensi-Relatif Jangka Panjang

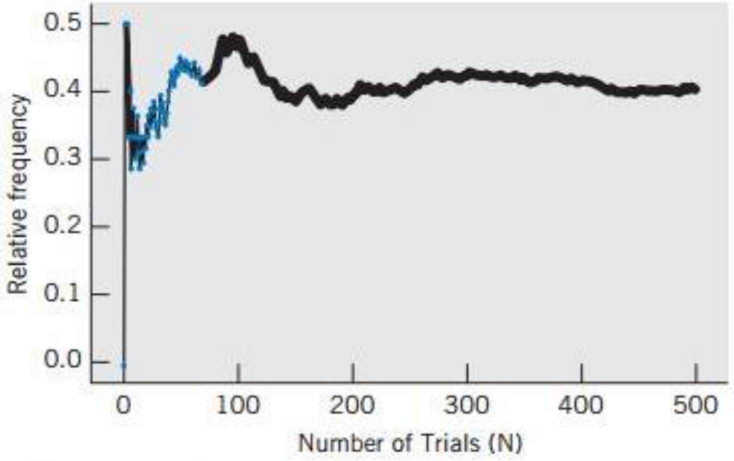
$P(A)$ adalah probabilitas *event* A, sebagai nilai **frekuensi relatif** yang stabil dengan **meningkatnya jumlah percobaan**. Meskipun kita tidak akan pernah mengetahui $P(A)$ secara tepat, hal itu dapat diperkirakan secara akurat dengan mengulang percobaan berkali-kali.

Contoh: $P(A)$ adalah peluang meninggalnya pria usia 30 tahun. Eksperimen untuk mengetahui probabilitas pria usia 30 tahun perlu dilakukan berulang kali (misal kita meneliti 10000 pria usia 30 tahun) agar bisa mendapatkan peluangnya dengan lebih akurat.

$$Freq.relatif\ event\ A\ di\ \ N\ percobaan = \frac{\#hasil\ terjadi\ di\ A\ dalam\ N\ percobaan}{N}$$



(*a*) Relative frequency versus number of trials. First 1–50.



(*b*) Relative frequency versus number of trials. First 500 trials.

04. Operasi Dasar Peristiwa dan Aturan Probabilitas

Operasi dasar peristiwa/kejadian (*event*):

1. **Complement** peristiwa *A* dilambangkan $\bar{A}$. Adalah himpunan yang semua elemennya bukan *A*.
2. **Union** dua peristiwa *A* dan *B* dilambangkan $A \cup B$. Adalah himpunan dari semua hasil yang ada di *A*, *B*, atau keduanya.
3. **Intersection** dua peristiwa *A* dan *B* dilambangkan AB atau $A \cap B$. Adalah himpunan semua hasil yang ada di *A* dan *B*.
4. **Disjoint / mutually exclusive / incompatible** dua peristiwa *A* dan *B* jika tidak memiliki intersection.

FIGURE 2–1 A Set A and Its Complement $\bar{A}$

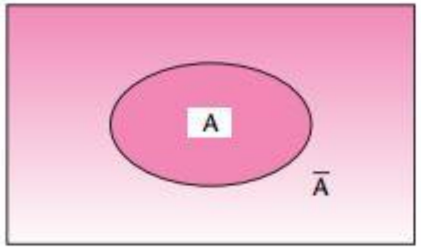


FIGURE 2–2 Sets A and B and Their Intersection

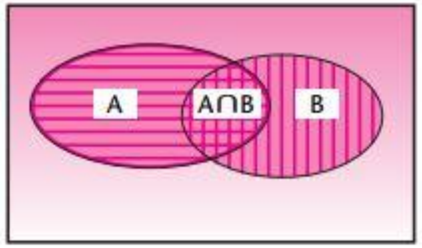


FIGURE 2–3 The Union of A and B

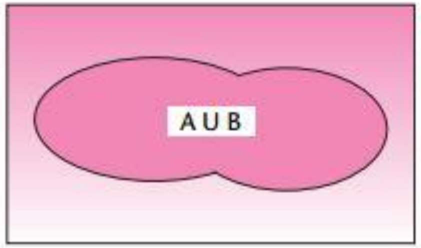
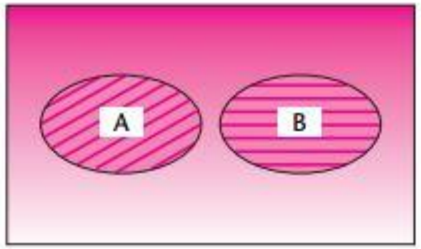


FIGURE 2–4 Two Disjoint Sets



04. Operasi Dasar Peristiwa dan Aturan Probabilitas

Aturan untuk **Complement**

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Aturan untuk **Union**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Aturan untuk **Disjoint / Mutually Excluisve Event**

$$P(AB) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

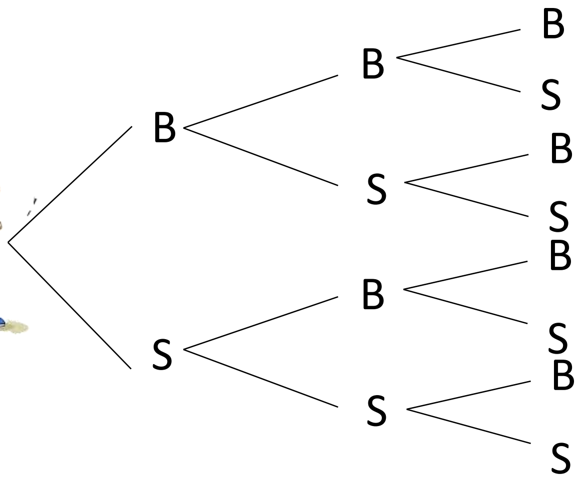
04. Operasi Dasar Peristiwa dan Aturan Probabilitas

Contoh Aturan untuk **Complement**

1. Peluang besok hujan adalah 0.3. Maka peluang besok tidak hujan adalah $1 - 0.3 = 0.7$.

2. Seorang anak dihadapkan 3 soal dimana setiap jawabannya memiliki peluang untuk Benar (B) atau Salah (S). Hitung peluang anak tersebut berhasil menjawab minimal 1 soal benar!

Jawab :



$S = \{BBB, BBS, BSB, BSS, SBB, SBS, SSB, SSS\}$

Terdapat 8 hasil dari percobaan anak tersebut seperti dalam ruang sampel.

Karena masing-masing hasil **equally likely**, maka peluang setiap peristiwa adalah $\frac{1}{8}$.

Jika A adalah peluang anak tersebut berhasil menjawab minimal 1 soal dengan benar. Maka $P(\bar{A}) = P\{SSS\} = \frac{1}{8}$. Sehingga $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

05. Probabilitas Bersyarat dan Independensi

Conditional probability (probabilitas bersyarat) dari A dengan syarat B dilambangkan $P(A|B)$ dan dirumuskan :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Leftrightarrow P(AB) = P(B)P(A|B)$$

Peristiwa A dan B saling bebas / independent jika

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

Bukti!

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

06. Teorema Bayes

Aturan perkalian probabilitas mengarah pada hasil yang disebut aturan probabilitas total. Peristiwa A dapat terjadi saat peristiwa B terjadi atau tidak terjadi. Artinya, A dapat ditulis sebagai disjoint union dari AB dan $A\bar{B}$. Akibatnya,

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

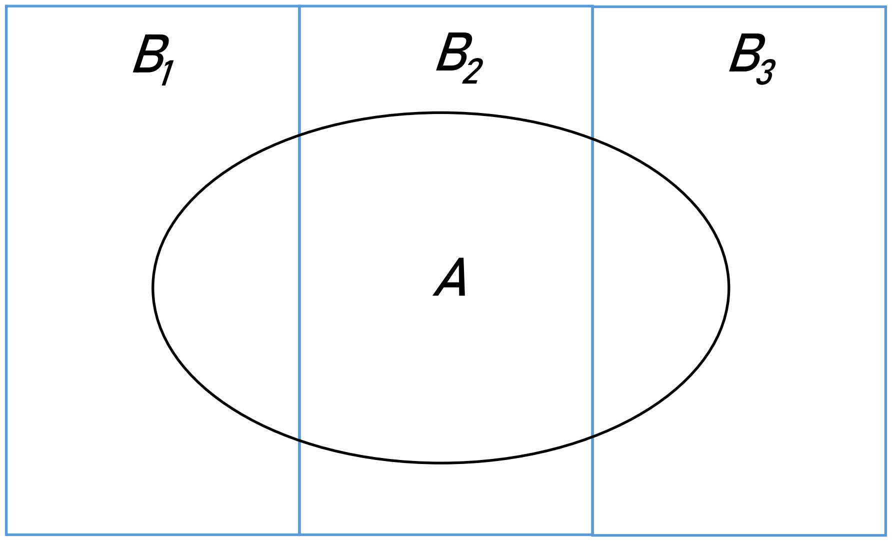
Dengan aturan perkalian probabilitas, maka aturan probabilitas total :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

06. Teorema Bayes

Jika ada tiga peristiwa B_1, B_2, dan B_3 yang mutually exclusive dan union nya adalah seluruh ruang sampel seperti gambar ilustrasi. Maka A adalah union peristiwa *(event)* yang mutually exclusive yaitu AB_1, AB_2, dan AB_3. Sehingga aturan probabilitas total menjadi :

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$



Event *A* and mutually exclusive events B_1, B_2, B_3 with $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$

06. Teorema Bayes

Misalkan peristiwa A dan B dapat terjadi bersamaan dan, sebelum mengamati keduanya, kita mengetahui probabilitas $P(B)$ sehingga $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ juga diketahui.

Kami menyebut kedua probabilitas ini sebagai **probabilitas prior** karena keduanya mewakili probabilitas yang terkait dengan B dan $\bar{B}$ sebelum kita mengetahui status peristiwa A atau peristiwa lainnya.

Ketika kita juga mengetahui dua probabilitas bersyarat $P(A|B)$ dan $P(A|\bar{B})$, probabilitas B dapat diperbarui ketika kita mengamati status A.

Setelah kita mengetahui A telah terjadi, probabilitas yang diperbarui atau **probabilitas posterior** dari B diberikan oleh probabilitas bersyarat

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

06. Teorema Bayes

Substitusikan $P(AB) = P(B)P(A|B)$ serta $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$ ke dalam persamaan $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Sehingga didapatkan Teorema Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

Probabilitas posterior dari $\bar{B}$ adalah $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

06. Teorema Bayes

Contoh :

Misal A adalah peristiwa dimana saat seseorang di tes positif COVID-19 dan B peristiwa dimana seseorang benar-benar terinfeksi virus SARS-CoV-2. Misalkan virus tersebut benar-benar ada sebanyak 1,4% dari populasi (true positif). Karena tes medis terkadang salah, kita coba memodelkan ketidakpastian dengan menetapkan probabilitas. Misalkan probabilitas bersyarat bahwa tes tersebut positif, dengan syarat orang tersebut memiliki virus $0.995 = P(A|B)$ dan $0.01 = P(A|\bar{B})$ adalah probabilitas bersyarat bahwa seseorang yang tidak terkena virus saat dites positif (false positive). Tentukan probabilitas seseorang akan dites positif $P(A)$.

Jawab :

$$P(B) = 0.014 \text{ maka } P(\bar{B}) = 1 - 0.014 = 0.986$$
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$
$$P(A) = 0.995 \times 0.014 + 0.01 \times 0.986$$
$$P(A) = 0.024$$

06. Teorema Bayes

Contoh (Lanjutan)

Misalkan seseorang dites positif. Gunakan Teorema Bayes untuk menghitung kemungkinan bahwa orang tersebut terkena virus. Dengan kata lain, tentukan probabilitas posterior $P(B|A)$

Jawab :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

$$P(B|A) = \frac{0.995 \times 0.014}{0.995 \times 0.014 + 0.01 \times 0.986}$$

$$P(B|A) = 0.586$$

Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa peluang seseorang tersebut positif terinfeksi virus naik secara drastic, dari 0.014 menjadi 0.586.

DAFTAR PUSTAKA

- Richard, A.J. and Bhattacharyya, G.K., 2010, *Statistics: Principles and Methods*, 6th *Edition*, John Wiley and Sons, USA.
- Aczel, A. and Sounderpandian, J., 2008, *Complete Business Statistics*, 7th *Edition*, McGraw-Hill/Irwin, USA.

THANK YOU