PROBABILITAS (MAS106)

Teknik Menghitung, Probabilitas Bersyarat, dan Independensi

Tim Dosen Pengajar Probabilitas

OUTLINE

- Teknik Menghitung:
  Aturan Perkalian, Permutasi, Kombinasi
- Probabilitas Bersyarat
  Independensi
- Formula Bayes

Equally Likely

Dalam interpretasi klasik probabilitas, semua hasil percobaan memiliki kemungkinan yang sama (*equally likely*), dan probabilitas suatu peristiwa diperoleh sebagai frekuensi relatif hasil yang mendukung peristiwa ini (menyiratkan terjadinya).

Ketika asumsi yang sama kemungkinannya (*equally likely*) dibuat untuk ruang sampel berhingga (*finite sample space*), peluang terjadinya setiap peristiwa A diberikan oleh rasio jumlah elemen milik A dengan jumlah elemen milik S. Untuk kasus seperti itu, berguna untuk dapat menghitung jumlah elemen milik himpunan yang diberikan.

Misal S = $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ menjadi ruang sampel berhingga. Misalkan $p_i = 1/m$ untuk semua i = 1, 2, . . ., m dan untuk semua himpunan bagian A dari S, definisikan

$$P(A) = \sum_{x_i \epsilon A} \frac{1}{m} = \frac{n(A)}{m} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

di mana n(A) menunjukkan jumlah elemen dalam A dan n(S) menunjukkan jumlah elemen dalam S.

Contohnya meliputi:

- ✓ Flip koin yang adil;
- ✓ Lima kartu diambil dari setumpuk 52 kartu yang dikocok dengan baik;
- ✓ Spinner yang adil dengan angka 1 hingga 36 di atasnya;
- ✓ Permukaan atas lemparan sepasang dadu seimbang.

Untuk setiap eksperimen ini, seperti yang dinyatakan dalam definisi, kita hanya perlu mengetahui jumlah elemen dalam suatu peristiwa untuk menghitung probabilitas dari peristiwa itu.

Misalnya, seorang pemain kartu mungkin tertarik pada kemungkinan mendapatkan sepasang (dua sejenis) di tangan lima kartu yang dibagikan dari setumpuk 52 kartu yang dikocok dengan baik. Untuk menghitung probabilitas ini, kita perlu mengetahui jumlah lima tangan kartu dan jumlah tangan tersebut yang berisi pasangan.

Karena kasus yang sama sering menarik, selanjutnya kita mengembangkan beberapa aturan penghitungan yang dapat digunakan untuk menghitung probabilitas kejadian yang menarik.

Aturan Perkalian

Teknik yang sangat sederhana yang sering berguna dalam menghitung masalah disebut prinsip perkalian. Hal ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

DEFINISI

Jika operasi pertama dapat dilakukan dengan salah satu n_1 cara dan operasi kedua kemudian dapat dilakukan dengan salah satu dari n_2 cara, kedua operasi dapat dilakukan (yang kedua segera setelah yang pertama) dalam $n_1 . n_2$ cara.

CONTOH

1. Jika kita dapat melakukan perjalanan dari kota A ke kota B dengan 3 cara dan dari kota B ke kota C dengan 4 cara, maka kita dapat melakukan perjalanan dari A ke C dengan total 3 x 4 = 12 cara.
2. Jika operasi pelemparan dadu menghasilkan 1 dari 6 kemungkinan hasil dan operasi pelemparan dadu kedua menghasilkan 1 dari 6 kemungkinan hasil, maka operasi pelemparan sepasang dadu menghasilkan 6 x 6 = 36 hasil yang mungkin.

Pengembangan teknik untuk menghitung elemen dari himpunan tertentu (misalnya, himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan). Cabang matematika yang berurusan dengan metode semacam itu disebut kombinatorik, atau analisis kombinatorial.

Permutasi

$$P_k^n = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Kombinasi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Probabilitas Bersyarat

Misalkan B dan A adalah kejadian dengan P(A) > 0. Kemudian kami mendefinisikan probabilitas bersyarat dari B yang diberikan A sebagai

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Peristiwa *A* dan *B* saling bebas / independent jika

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

Bukti!

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Example 1.4.4. Four cards are to be dealt successively, at random and without replacement, from an ordinary deck of playing cards. The probability of receiving a spade, a heart, a diamond, and a club, in that order, is $(\frac{13}{52})(\frac{13}{51})(\frac{13}{50})(\frac{13}{49}) = 0.0044$. This follows from the extension of the multiplication rule. ■

Consider k mutually exclusive and exhaustive events $A_1, A_2, \ldots, A_k$ such that $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$; i.e., $A_1, A_2, \ldots, A_k$ form a partition of $\mathcal{C}$. Here the events $A_1, A_2, \ldots, A_k$ do *not* need to be equally likely. Let B be another event such that $P(B) > 0$. Thus B occurs with one and only one of the events $A_1, A_2, \ldots, A_k$; that is,

$$\begin{aligned} B &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_k) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_k). \end{aligned}$$

Since $B \cap A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, are mutually exclusive, we have

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k).$$

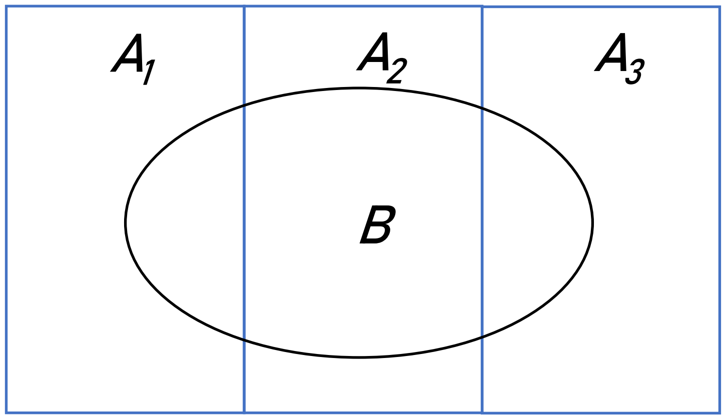
However, $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$; so

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i). \qquad (1.4.2) \end{aligned}$$

This result is sometimes called the **law of total probability** and it leads to the following important theorem.

Jika ada tiga peristiwa A_1, A_2, dan A_3 yang mutually exclusive dan union nya adalah seluruh ruang sampel seperti gambar ilustrasi. Maka B adalah union peristiwa *(event)* yang mutually exclusive yaitu $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, dan $B \cap A_3$. Sehingga aturan probabilitas total menjadi :

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$



Event B and mutually exclusive events A_1, A_2, A_3 with $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$

Teorema Bayes

Theorem 1.4.1 (Bayes). *Let $A_1, A_2, \ldots, A_k$ be events such that $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Assume further that $A_1, A_2, \ldots, A_k$ form a partition of the sample space $\mathcal{C}$. Let B be any event. Then*

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}, \tag{1.4.3}$$

Proof: Based on the definition of conditional probability, we have

$$P(A_j|B) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}.$$

The result then follows by the law of total probability, (1.4.2). ■

This theorem is the well-known **Bayes' Theorem**. This permits us to calculate the conditional probability of A_j, given B, from the probabilities of $A_1, A_2, \ldots, A_k$ and the conditional probabilities of B, given A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. The next three examples illustrate the usefulness of Bayes Theorem to determine probabilities.

Misalkan peristiwa A dan B dapat terjadi bersamaan dan, sebelum mengamati keduanya, kita mengetahui probabilitas $P(B)$ sehingga $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ juga diketahui.

Kami menyebut kedua probabilitas ini sebagai **probabilitas prior** karena keduanya mewakili probabilitas yang terkait dengan B dan $\bar{B}$ sebelum kita mengetahui status peristiwa A atau peristiwa lainnya.

Ketika kita juga mengetahui dua probabilitas bersyarat $P(A|B)$ dan $P(A|\bar{B})$, probabilitas B dapat diperbarui ketika kita mengamati status A.

Setelah kita mengetahui A telah terjadi, probabilitas yang diperbarui atau **probabilitas posterior** dari B diberikan oleh probabilitas bersyarat : $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

Substitusikan $P(AB) = P(B)P(A|B)$ serta $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$ ke dalam persamaan $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Sehingga didapatkan Teorema Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

Probabilitas posterior dari $\bar{B}$ adalah $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

Aturan perkalian probabilitas mengarah pada hasil yang disebut aturan probabilitas total. Peristiwa A dapat terjadi saat peristiwa B terjadi atau tidak terjadi. Artinya, A dapat ditulis sebagai disjoint union dari AB dan $A\bar{B}$. Akibatnya,

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

Dengan aturan perkalian probabilitas, maka aturan probabilitas total :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

Teorema Bayes

Contoh :

Misal A adalah peristiwa dimana saat seseorang di tes positif COVID-19 dan B peristiwa dimana seseorang benar-benar terinfeksi virus SARS-CoV-2. Misalkan virus tersebut benar-benar ada sebanyak 1,4% dari populasi (true positif). Karena tes medis terkadang salah, kita coba memodelkan ketidakpastian dengan menetapkan probabilitas. Misalkan probabilitas bersyarat bahwa tes tersebut positif, dengan syarat orang tersebut memiliki virus $0.995 = P(A|B)$ dan $0.01 = P(A|\bar{B})$ adalah probabilitas bersyarat bahwa seseorang yang tidak terkena virus saat dites positif (false positive). Tentukan probabilitas seseorang akan dites positif $P(A)$.

Jawab :

$$P(B) = 0.014 \text{ maka } P(\bar{B}) = 1 - 0.014 = 0.986$$
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$
$$P(A) = 0.995 \times 0.014 + 0.01 \times 0.986$$
$$P(A) = 0.024$$

Teorema Bayes

Contoh (Lanjutan)

Misalkan seseorang dites positif. Gunakan Teorema Bayes untuk menghitung kemungkinan bahwa orang tersebut terkena virus. Dengan kata lain, tentukan probabilitas posterior $P(B|A)$

Jawab :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

$$P(B|A) = \frac{0.995 \times 0.014}{0.995 \times 0.014 + 0.01 \times 0.986}$$

$$P(B|A) = 0.586$$

Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa peluang seseorang tersebut positif terinfeksi virus naik secara drastic, dari 0.014 menjadi 0.586.

Independensi

Sometimes it happens that the occurrence of event A does not change the probability of event B; that is, when $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = P(B).$$

In this case, we say that the events A and B are *independent*. Moreover, the multiplication rule becomes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B). \tag{1.4.4}$$

This, in turn, implies, when $P(B) > 0$, that

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Note that if $P(A) > 0$ and $P(B) > 0$, then by the above discussion, independence is equivalent to

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1.4.5}$$

What if either $P(A) = 0$ or $P(B) = 0$? In either case, the right side of (1.4.5) is 0. However, the left side is 0 also because $A \cap B \subset A$ and $A \cap B \subset B$. Hence, we take Equation (1.4.5) as our formal definition of independence; that is,

Definition 1.4.2. *Let A and B be two events. We say that A and B are* **independent** *if $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.* ■

Suppose A and B are independent events. Then the following three pairs of events are independent: A^c and B, A and B^c, and A^c and B^c. We show the first and leave the other two to the exercises; see Exercise 1.4.11. Using the disjoint union, $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, we have

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = [1 - P(A)]P(B) = P(A^c)P(B). \quad (1.4.6)$$

Hence, A^c and B are also independent.

Remark 1.4.1. Events that are *independent* are sometimes called *statistically independent*, *stochastically independent*, or *independent in a probability sense*. In most instances, we use *independent* without a modifier if there is no possibility of misunderstanding. ■

LATIHAN:

Sebuah kotak berisi 8 kartu, 3 kartu merah dan 5 kartu biru.
Diambil 2 kartu secara acak tanpa pengembalian.
Hitung peluang kartu pertama adalah merah dan kartu kedua adalah biru!

$P(A) = 3/8$ -> merah
$P(B|A) = 5/7$ -> biru
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 3/8 \times 5/7 = 15/56$