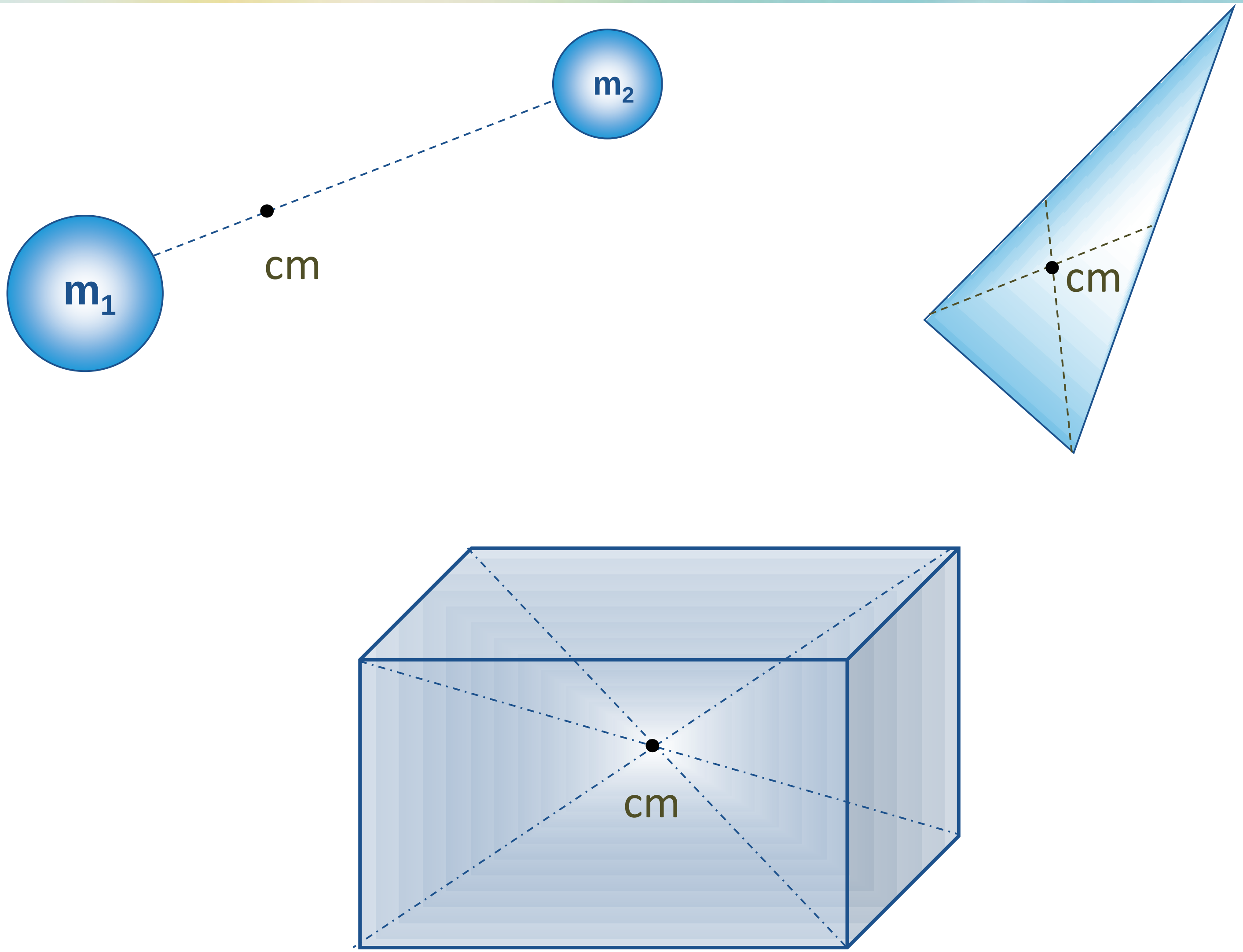
Sistem Partikel *dan* *Kekekalan Momentum*

Sistem partikel adalah sistem dengan jarak antar partikel-partikel penyusunnya tidak selalu tetap

- **Meninjau benda besar sebagai sistem partikel-partikel titik**
- **Asumsi : Hukum Newton berlaku bagi tiap partikel**
- **Terdapat satu titik pusat massa dalam sistem**
- **Gerakan benda atau sistem dianggap sbg gerakan pusat massa**
- **Gerakan masing2 partikel dalam sistem relatif thd pusat massa**

PUSAT MASSA



Posisi pusat massa

Sistem Diskrit

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = x_{cm}\,\hat{i} + y_{cm}\,\hat{j} + z_{cm}\,\hat{k}}$$

Posisi pusat massa

Sistem Kontinu (Benda Tegar)

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \rho \, \vec{r} dr}{\int \rho \, dr}$$

$$x_{cm} = \frac{\int \rho \, xdx}{\int \rho \, dx} \qquad y_{cm} = \frac{\int \rho \, ydy}{\int \rho \, dy} \qquad z_{cm} = \frac{\int \rho \, zdz}{\int \rho \, dz}$$

benda berbentuk garis

$$x_{cm} = \frac{\int \rho \, xdA}{\int \rho \, dA} \qquad y_{cm} = \frac{\int \rho \, ydA}{\int \rho \, dA} \qquad z_{cm} = \frac{\int \rho \, zdA}{\int \rho \, dA}$$

benda berbentuk bidang

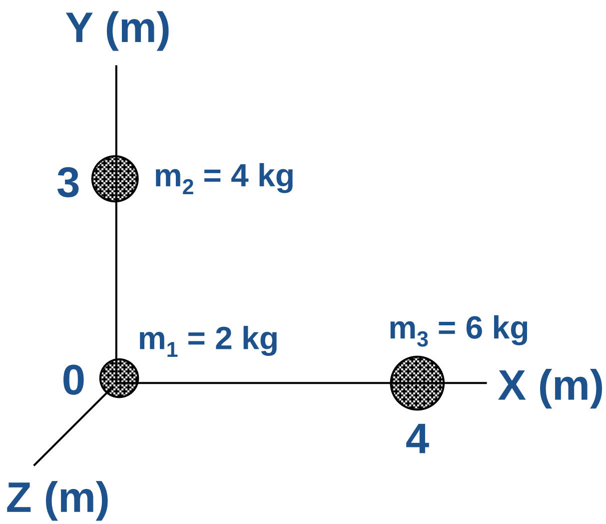
$$x_{cm} = \frac{\int \rho \, xdV}{\int \rho \, dV} \qquad y_{cm} = \frac{\int \rho \, ydV}{\int \rho \, dV} \qquad z_{cm} = \frac{\int \rho \, zdV}{\int \rho \, dV}$$

benda berbentuk 3 dimensi

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = x_{cm} \, \hat{i} + y_{cm} \, \hat{j} + z_{cm} \, \hat{k}}$$

contoh

Menentikan posisi pusat massa sistem 3 partikel



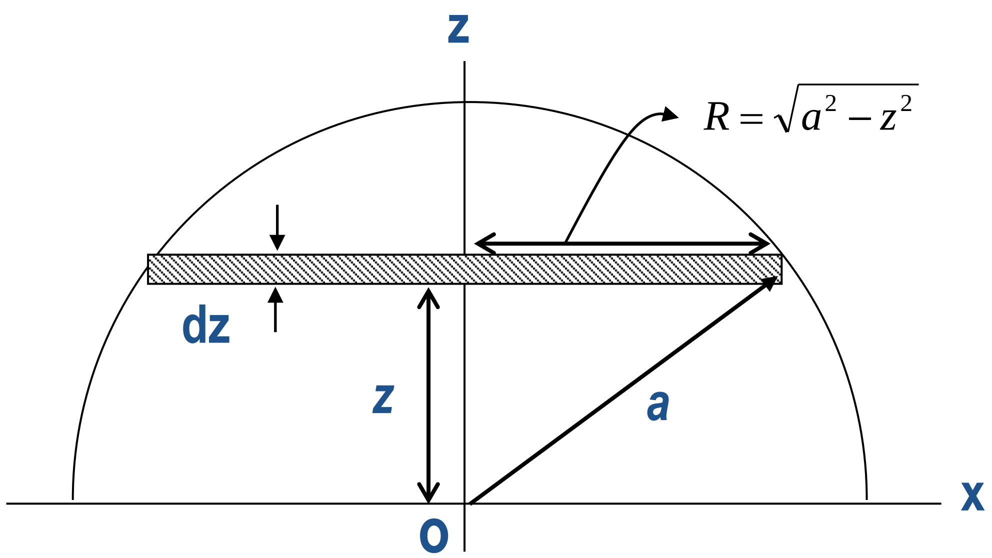
$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{(2)(0) + (4)(0) + (6)(4)}{12} = 2\text{m}$$

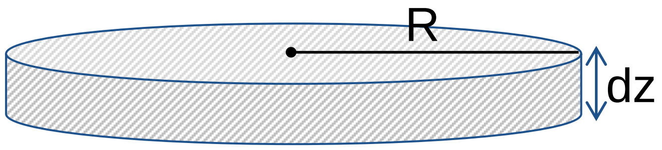
$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{(2)(0) + (4)(3) + (6)(0)}{12} = 1\text{m}$$

$$\vec{r}_{cm} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

Contoh :

Setengah bola padat (3D)



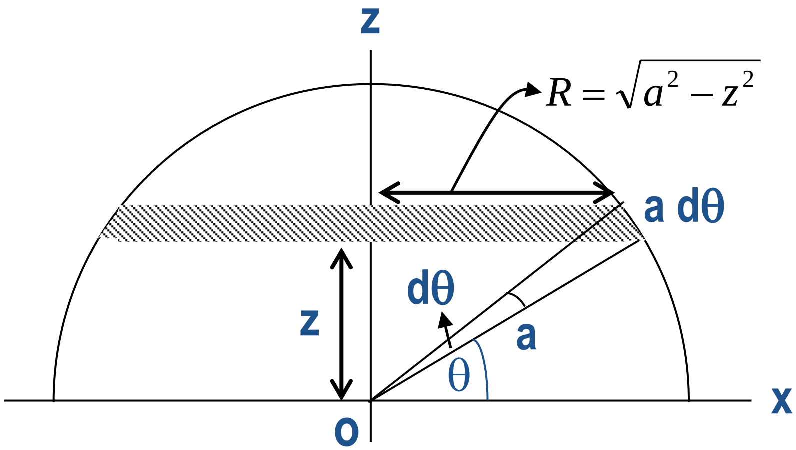


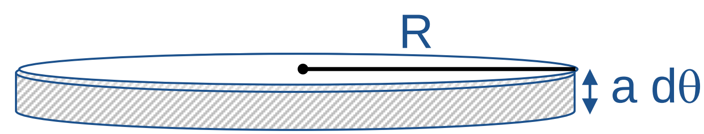
elemen volume : $$dV=\pi R^2 dz=\pi\left(a^2-z^2\right)\,dz$$

$$z_{cm}=\frac{\int \rho z dv}{\int \rho dv}=\frac{\int_0^a \rho\pi\left(a^2-z^2\right)z dz}{\int_0^a \rho\pi\left(a^2-z^2\right)dz}=\frac{3}{8}a$$

dapat dihitung $\rightarrow$ $x_{cm}=y_{cm}=0$

Kulit setengah bola (2D)





elemen luas : $ds = 2\pi Ra\, d\theta$

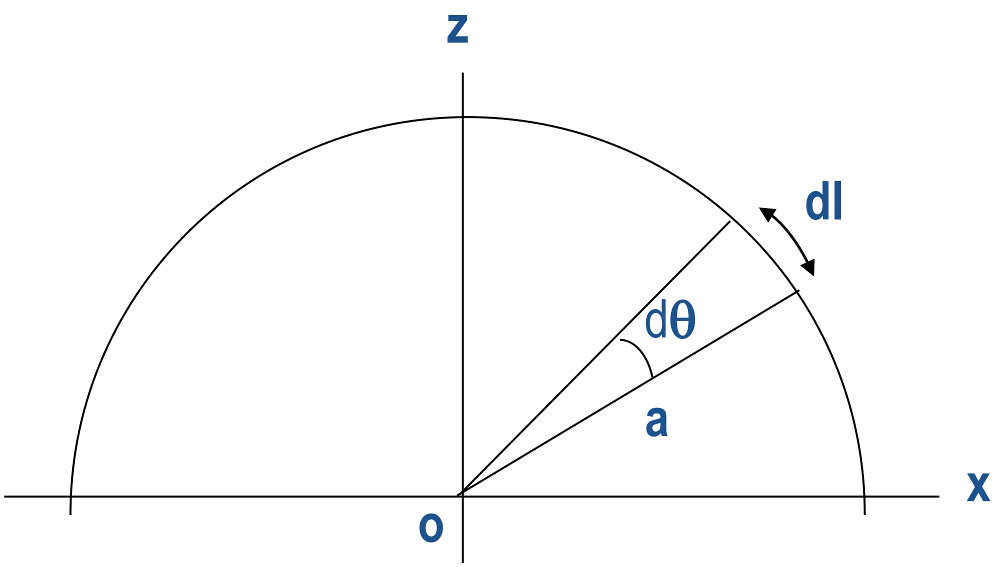
$$ds = 2\pi a\sqrt{a^2 - z^2}\;\; d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{z}{a} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

$$ds = 2\pi a\; dz$$

$$z_{cm} = \frac{\int \rho z ds}{\int \rho ds} = \frac{\int_0^a \rho z 2\pi a dz}{\int_0^a \rho 2\pi a dz} = \frac{a}{2}$$

Kawat setengah lingkaran (1D)

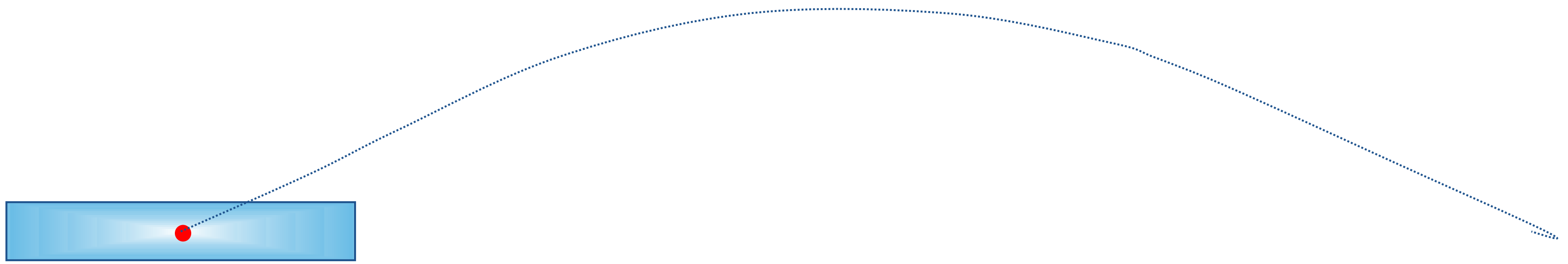


elemen panjang : $dl = a\ d\theta$

$$z = a\ \sin\theta$$

$$z_{cm} = \frac{\int \rho z dl}{\int \rho dl} = \frac{\int_0^{\pi} \rho a^2 \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} \rho a d\theta} = \frac{2a}{\pi}$$

Gerakan Pusat Massa



Untuk gerakan benda besar seperti contoh di atas terlalu rumit diamati dan digambarkan, tetapi gerakan pusat massanya (titik berwarna merah) mudah diamati dan digambarkan. Karena itu besaran-besaran dari benda besar (sistem partikel/benda tegar) yang bergerak bergerak secara rumit ditentukan/diamati melalui gerakan pusat massanya

Persamaan posisi pusat massa : $$M\vec{r}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

kecepatan pusat massa : $$M\vec{v}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

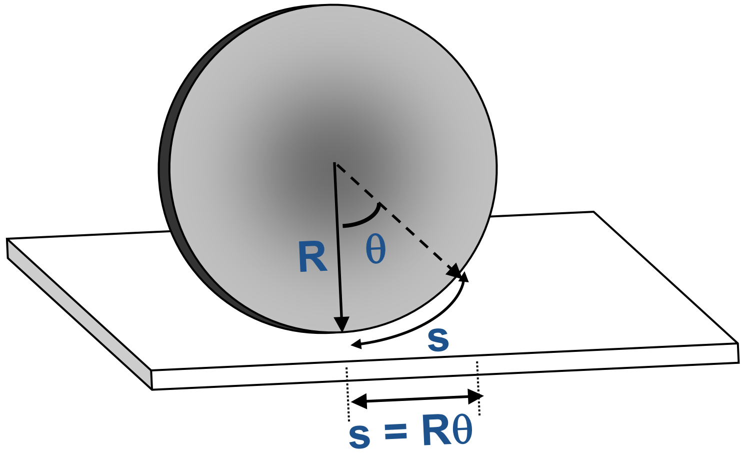
percepatan pusat massa : $$M\vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

gaya-gaya yang bekerja pada sistem partikel :

$$\vec{F}_T = M\vec{a}_{cm} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,int}}_{=0} + \sum_i \vec{F}_{i,ekst} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{T,ekst} = M\vec{a}_{cm}}$$

Benda Menggelinding

Jika lantai kasar, maka akan terjadi proses menggelinding → perpaduan gerak translasi (linier) dan rotasi.



pusat massa tepat berada di atas titik kontak sehingga pergeseran benda dapat diwakili oleh pusat massanya.

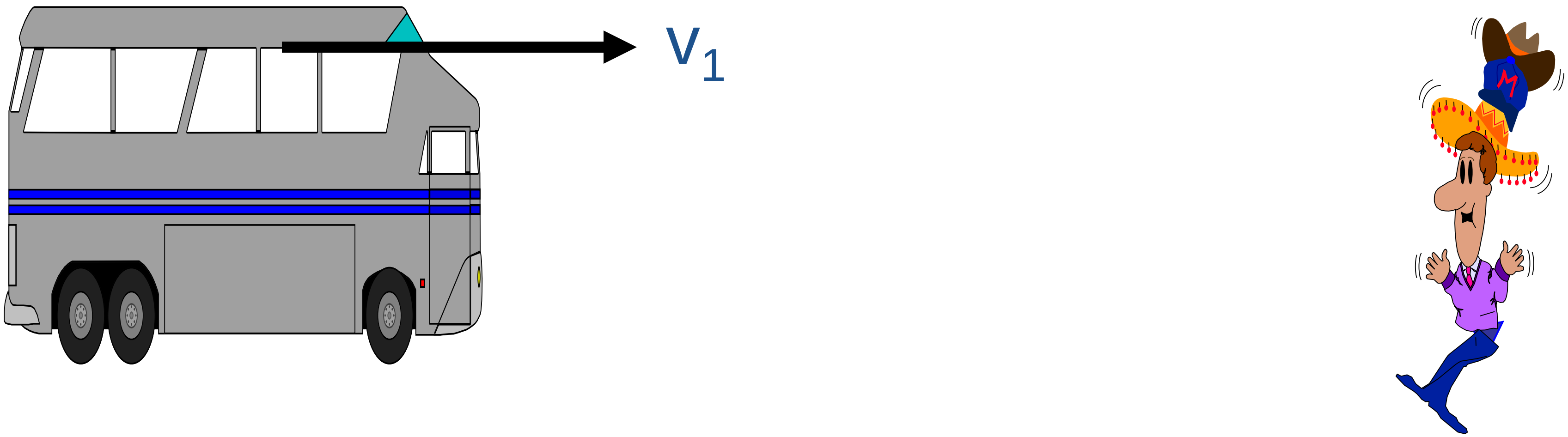
Hubungan antara besaran gerak translasi dan rotasi :

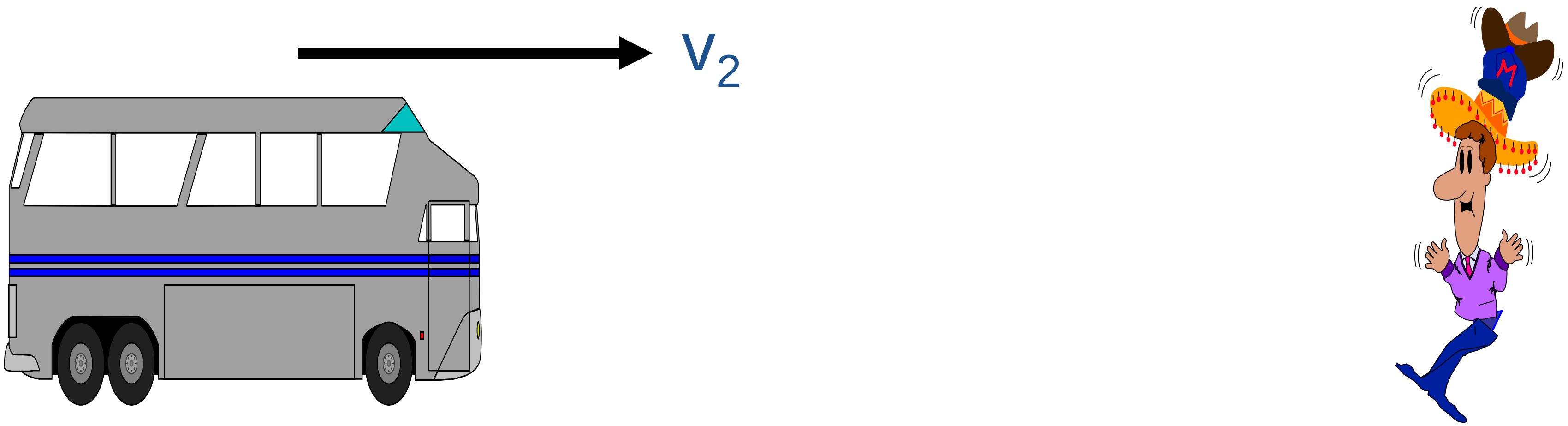
$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

catatan **: untuk gerak menggelinding, yang bergerak translasi adalah pusat massanya**

MOMENTUM





Momentum : hasil massa benda dengan kecepatannya

merupakan kuantitas gerak yang berkaitan dengan besarnya efek jika bertumbukan

besaran fisis yang penting selain energi

rumus : $\vec{p} = m\,\vec{v}$ ➡ besaran vektor

$p = m\,v$ ➡ besaran skalar

Satuan (SI) : kg m/s

laju perubahan momentum sebuah benda sama dengan gaya yang diberikan pada benda tersebut

Bentuk lain dari hukum Newton II

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ekst}$$

Jika tidak ada gaya luar yang bekerja pada kedua benda yang bertumbukan selain gaya yang diberikan oleh masing-masing benda, maka berlaku hukum kekekalan momentum bagi kedua benda

$$\vec{F}_{ekst} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt}$$

$$\vec{F}_{ekst} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} = 0$$

$$d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = c \ (konstan)$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'}$$

Untuk sistem partikel

momentum total sistem partikel :

$$\vec{p}_T = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

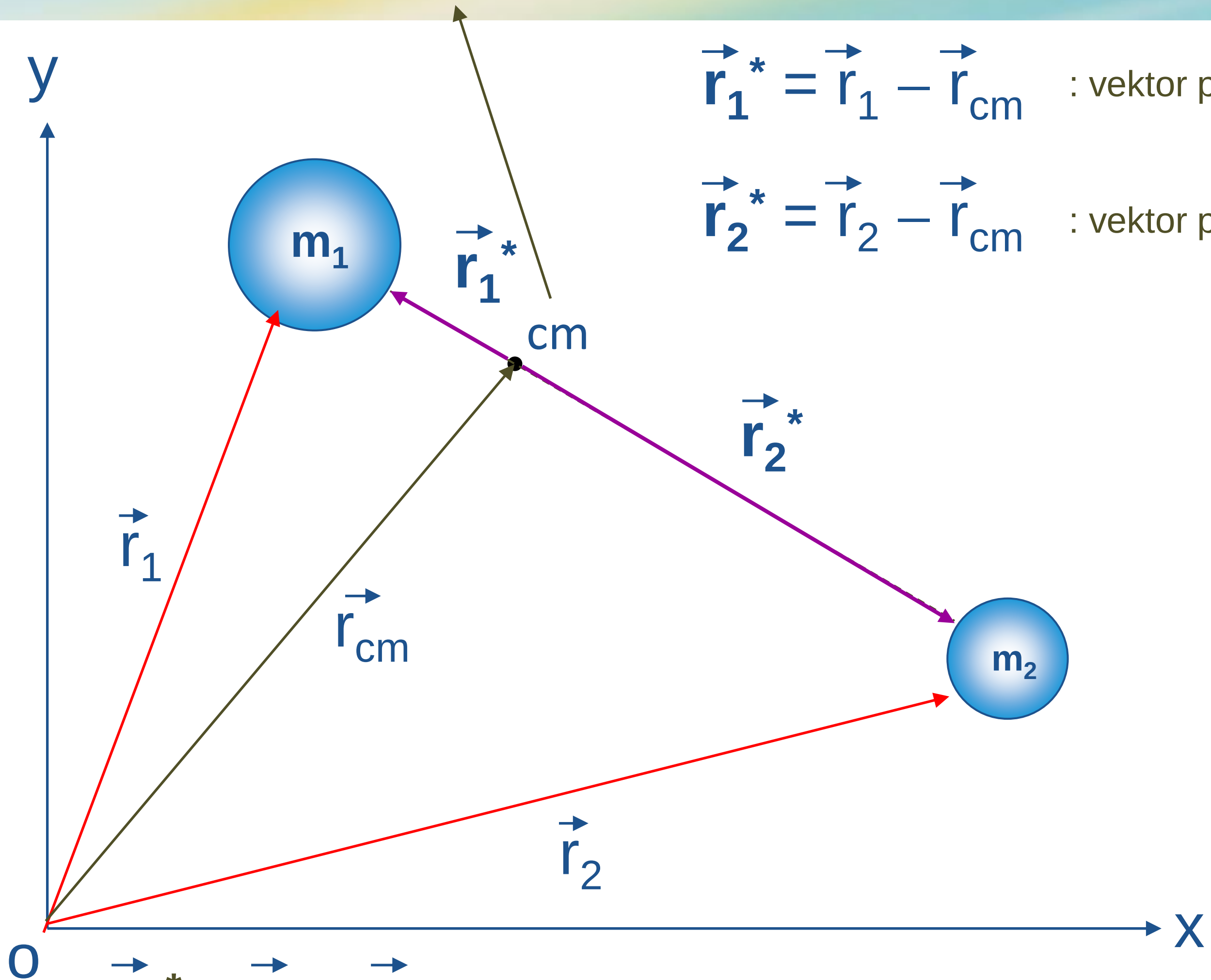
$$M\vec{v}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{p}_T = M\vec{v}_{cm}$$

jika gaya luar yang bekerja pada sistem partikel = 0, maka :

$$\vec{p}_T = M\vec{v}_{cm} = c\ (konstan)$$

Kerangka Acuan Pusat Massa



$\vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}$: vektor posisi partikel 1 relatif thd cm

$\vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm}$: vektor posisi partikel 2 relatif thd cm

$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm}$: kecepatan partikel 1 relatif thd cm

$\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm}$: kecepatan partikel 2 relatif thd cm

Energi Kinetik Sistem Partikel

$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^{\,*}$$

$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^{\,*}\right) \cdot \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^{\,*}\right)$$

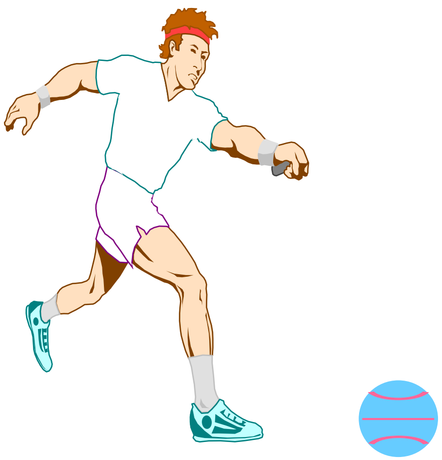
$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^{*\,2} + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_i \underbrace{m_i \vec{v}_i^{\,*}}_{=0}$$

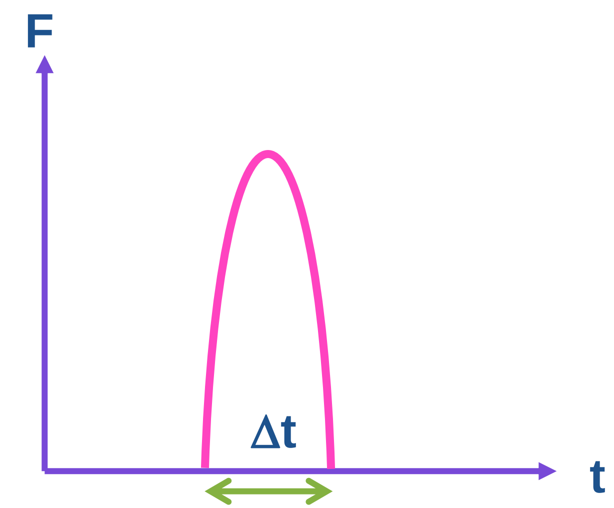
$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^{*\,2}$$

$$E_k = \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + E_{k,\text{gerak relatif thd pusat massa}}$$

energi kinetik gerak translasi sistem

tumbukan senantiasa melibatkan gaya (gaya antar benda) yang bekerja dalam waktu yang sangat singkat





$$\Delta \vec{p} = \underbrace{\vec{F}\,\Delta t}$$

Impuls : gaya yang bekerja pada benda dalam waktu yang sangat singkat (gaya tidak konstan)

KEKEKALAN MOMENTUM dan ENERGI PADA TUMBUKAN

- ✓ jika tidak ada gaya luar yang bekerja pada kedua benda yang bertumbukan ⇨ MOMENTUM KEKAL

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \quad \text{(1)}$$

arah kecepatan benda ditentukan oleh tanda (+) atau (–)

- ✓ jika selama proses tumbukan tidak menghasilkan energi panas (tumb. lenting) ⇨ ENERGI KEKAL

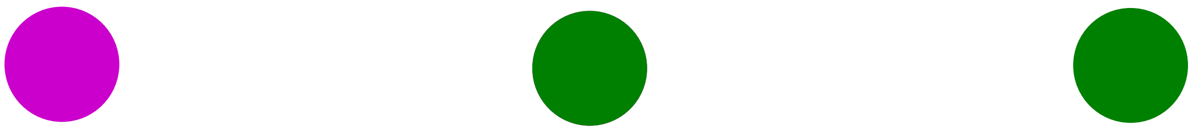
$$\tfrac{1}{2} m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1v'^2_1 + \tfrac{1}{2} m_2v'^2_2$$

$$m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 (v'^2_2 - v_2^2)$$

$$m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \quad \text{(2)}$$

persamaan (2)/(1) :

$$\boxed{v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)} \tag{3}$$



tumbukan berlawanan arah

$$\boxed{v_1 + v_2 = v'_2 - v'_1} \tag{4}$$

tumbukan searah

contoh :

$v'_2 = ?$

pers. (1) : $mv = mv'_1 + mv'_2 \rightarrow v = v'_1 + v'_2$

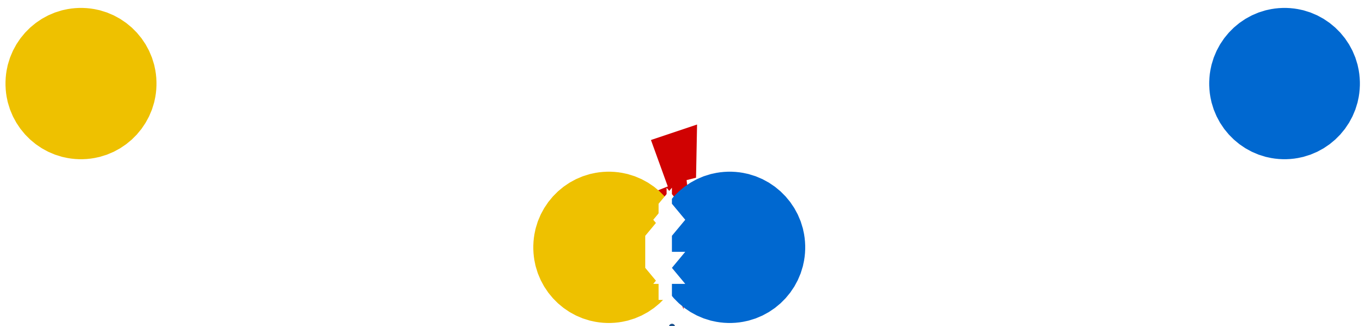
pers. (3) : $\rightarrow v = v'_2 - v'_1$ $-$

$$0 = 2v'_1 \Rightarrow v'_1 = 0$$

$$v'_2 = v$$

TUMBUKAN TAK LENTING

$$EK_1 + EK_2 = EK_1' + EK_2' + \text{energi panas}$$

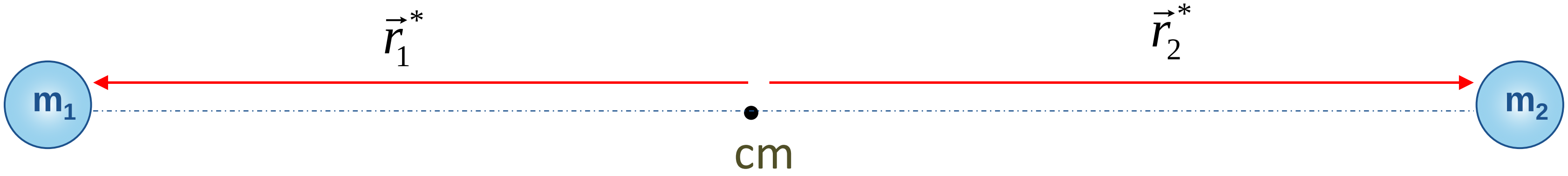


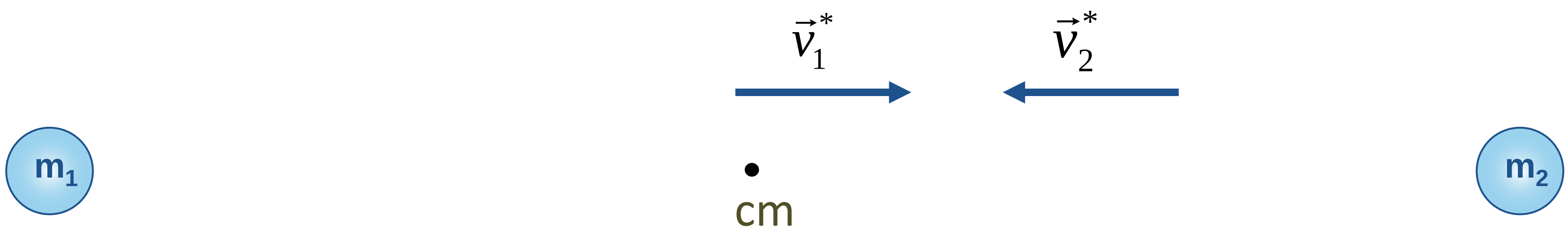
energi panas

$$v'_2 - v'_1 = e\,(v_1 - v_2)$$

koefisien kelentingan/restitusi

Tumbukan dalam kerangka acuan pusat massa





$$\vec{v}_1^{\,*} = -\vec{v}_2^{\,*}$$

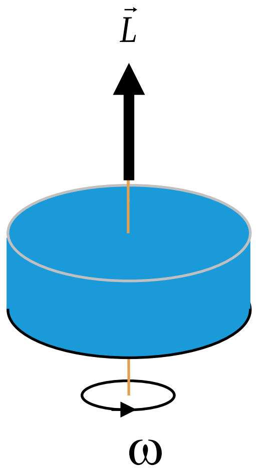
$$v_1^{*} = v_2^{*}$$

Momentum Sudut (untuk gerak rotasi)

$$\vec{F}_{ekst} = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow$$ gerak translasi

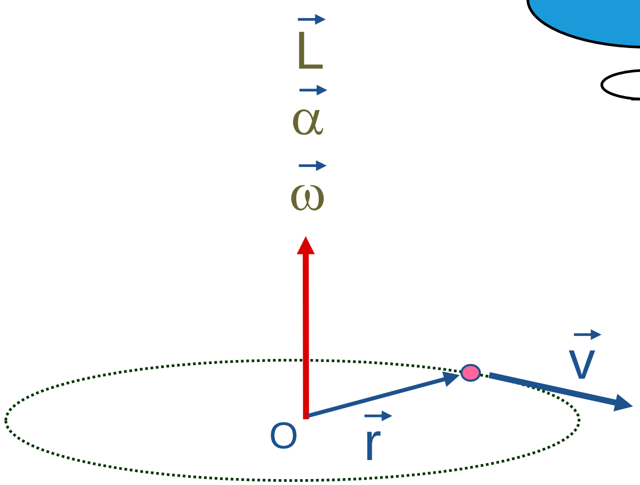
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{ekst} \longrightarrow$$ gerak rotasi

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow$$ momentum sudut

$$\vec{L} = I\ \omega$$



Jika torsi eksternal yang bekerja adalah nol :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = konstan$$

kekekalan momentum sudut

Momentum sudut untuk gerak rotasi SISTEM PARTIKEL

vektor posisi partikel ke i relatif terhadap pusat massa : $\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}$

vektor kecepatan partikel ke i relatif terhadap pusat massa : $\vec{v}_i^{\,*} = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$

momentum sudut total sistem partikel : $\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i^{\,*}\right) \times m_i \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^{\,*}\right)$$

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i^{\,*}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i^{\,*} \times m_i \vec{v}_{cm}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i^{\,*} \times m_i \vec{v}_i^{\,*}\right)$$

$$\vec{L} = \vec{r}_{cm} \times \left(\sum_i m_i\right) \vec{v}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,*}\right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*}\right) \times \vec{v}_{cm} + \sum_i \left(\vec{r}_i^{\,*} \times m_i \vec{v}_i^{\,*}\right)$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}\right) = \sum_i m_i \vec{r}_i - m \vec{r}_{cm} = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,*} = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_{cm} = 0$$

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{r}_{cm} \times m \vec{v}_{cm}}_{\text{orbital}} + \sum_i \underbrace{\vec{r}_i^{\,*} \times m_i \vec{v}_i^{\,*}}_{\text{spin}}$$

Thank You !