定理 3.7 の後半の証明

3.4 節で用いた関数 $\rho(\varepsilon, t)$ とそのフーリエ変換を

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\varepsilon^2}, \quad \hat{\rho}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2 t^2/2}$$

と表記する．以下の証明では 3.8 節の結果と次の定理を用いる．特に，$*$ は「たたみこみ」を表す (定義 3.4 を参照).

定理. $g_\varepsilon(t)$ **を定理 3.4 の条件 (i) と (ii) を満たす有界連続関数とする．このとき，任意の有界可積分関数** φ **に対して次式が成立する．**

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varphi - g_\varepsilon * \varphi\| = 0$$

注意. ρ_ε **は定理の条件を満たす．**

証明. 定理 3.4 の条件 (i) より

$$\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t) - \varphi(t-s)) g_\varepsilon(s) ds$$

と書ける．$C = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g_\varepsilon(t)| dt < M$ とおくと，

$$|\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)| \le C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds$$

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $b^2 \ge a^2 + 2a(b-a)$ であり，これに

$$a = C \int_{-\infty}^{\infty} |(\varphi(t) - \varphi(t-s))| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds, \quad b = C|\varphi(t) - \varphi(t-s)|$$

を代入して，$|g_\varepsilon(s)|/C$ をかけて積分すると，次式が得られる．

$$|\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)|^2 \le C^2 \int_{-\infty}^{\infty} |(\varphi(t) - \varphi(t-s))|^2 \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds$$

ここで，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds = 1$ であることを用いた．上式を積分し，$T_s\varphi(t) = \varphi(t-s)$ と表記すると，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)|^2 dt \le & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(\varphi(t) - \varphi(t-s))|^2 |g_\varepsilon(s)| ds dt \\ \le & C \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi - T_s\varphi\|^2 |g_\varepsilon(s)| ds \qquad (1)\end{aligned}$$

補題. $\lim_{s\to 0} \|\varphi - T_s\varphi\| = 0$

証明. 定理 3.12 の証明のように，関数 φ を階段関数

$$\varphi_N(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{I_j}(t), \quad I_j = [a_j, b_j], \quad c_j \in \mathbb{C}$$

により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|\varphi - \varphi_N\| < \varepsilon/3$ を満たすように近似する．ここで，χ_I は区間 I の定義関数で

$$\chi_I = \begin{cases} 1 & (x \in I) \\ 0 & (x \notin I) \end{cases}$$

である．明らかに，$|s| < \delta$ ならば，$\|\varphi_N - T_s\varphi_N\| < \varepsilon/3$ となる $\delta > 0$ が存在する．よって，$\|T_s\varphi - T_s\varphi_N\| = \|\varphi - \varphi_N\|$ であることに注意すれば，$|s| < \delta$ のとき

$$\|\varphi - T_s\varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_N\| + \|\varphi_N - T_s\varphi_N\| + \|T_s\varphi_N - T_s\varphi\| < \varepsilon$$

となり，補題が示される． □

定理 3.4 の条件 (ii) を用いて，任意の $\nu > 0$ に対して，$|s| < \delta$ のとき $\|\varphi - T_s\varphi\| < \sqrt{\nu/2C}$ を満たすように $\delta > 0$ を，

$$\int_{|t|\geq\delta} |g_\varepsilon(t)|dt < \frac{\nu}{4C\|\varphi\|^2}$$

を満たすように $\varepsilon > 0$ を選ぶ．$\|\varphi - T_s\varphi\|^2 \leq 2\|\varphi\|^2$ であることに注意すれば，式 (1) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - g_\varepsilon{*}\varphi(t)|^2 dt \leq C\left(\int_{|s|<\delta} + \int_{|s|\geq\delta}\right)\|\varphi - T_s\varphi\|^2 |g_\varepsilon(s)|ds < \nu$$

となり，定理の結論が得られる． □

定理 3.7 の後半部の証明に入る．仮定より f は有界連続かつ可積分であるから，命題 3.13 より

$$\rho_\varepsilon{*}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(s) f(t-s)ds$$

も有界連続かつ可積分となる．また，命題 3.2 により $\hat{f}$ も有界連続であるから，

$$\widehat{\rho_\varepsilon{*}f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)$$

も有界連続かつ可積分となる．よって，定理 3.5 により

$$\rho_\varepsilon{*}f(t) = \sqrt{2\pi}\,\mathfrak{F}^*(\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}\,\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

が成立する．したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\rho_\varepsilon{*}f(t)}\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi}\,\overline{\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)}\,d\xi\right)dt \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}dt\right)\overline{\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)}\,d\xi \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\,\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\,d\xi \qquad (2)
\end{aligned}$$

シュワルツの不等式により

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\overline{f(t) - \rho_\varepsilon{*}f(t)})\,dt \leq \|f\|\,\|f - \rho_\varepsilon{*}f\|$$

であるから，上の定理により，$\varepsilon \to 0$ のとき，上式の右辺は 0 に収束する．よって，$\varepsilon \to 0$ のとき，式 (2) の左辺は $\|f\|^2$ に収束する．一方，$R_\varepsilon = \sqrt{2\log 2}/\varepsilon$ とおくと，$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon = \infty$ であり，$|t| < R_\varepsilon$ のとき $\sqrt{2\pi}\hat{\rho}_\varepsilon(t) > 1/2$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\rho_\varepsilon{*}f(t)}\,dt > \frac{1}{2}\int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi$$

が成立する．上式において $\varepsilon \to 0$ とすれば，$|\hat{f}(\xi)|^2$ は可積分であることがわかる．よって，十分大きな $R > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \rho_\varepsilon(t))|\hat{f}(t)|^2\,dt = \left(\int_{|t|<R} + \int_{|t|\geq R}\right)(1 - \rho_\varepsilon(t))|\hat{f}(t)|^2\,dt$$

と変形し 命題 3.2 の証明と同様な議論を用いれば，$\varepsilon \to 0$ のとき式 (2) の右辺が $\|\hat{f}\|^2$ に収束することが示される．