工業数学 A3 演習問題

2016 年 7 月 29 日版

1. $0 \le t < T$ において以下の式を満足する周期 $T > 0$ の周期関数 $f(t)$ の複素フーリエ級数展開を求めよ．

(1) $f(t) = t$　(2) $f(t) = e^t$

2. 次の周期関数の複素フーリエ級数展開を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\frac{5}{4} + \sin \omega t}$ (2) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + e^{i\omega t}}$

3. 次式を満足する周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対して以下の問いに答えよ．

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \le t < \pi)$$

(1) フーリエ級数展開を求めよ．
(2) 複素フーリエ級数展開を求めよ．
(3) 次の無限級数の和を求めよ．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$　　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

4. $\mu > 0$ として次式を満たす周期 2π の周期関数 $f(t)$ を考える．

$$f(t) = \sin \mu t \quad (0 \le t < 2\pi)$$

$f(t)$ のフーリエ部分和を $S_N(t)$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $t \ne 2\pi\mathbb{Z}$ のとき $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(t)$ を求めよ．

(2) $t = 2\pi\mathbb{Z}$ のとき $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(t)$ を求めよ．

(3) $f(t)$ のフーリエ級数展開が連続となるとき，μ が満たす条件を求めよ．

5. 周期関数 $f(t)$ のフーリエ係数 $c = \{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$ を満たすとき，そのフーリエ部分和は $f(t)$ に必ず一様収束するか．理由を述べて答えよ．

6. $\mu > 0$ として次式を満足する周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対して以下の問いに答えよ．

$$f(t) = \cos \mu t \quad (-\pi \le t < \pi)$$

(1) フーリエ級数展開を求めよ．

(2) t が整数でないとき次の関係式が成立することを示せ．

(a) $\displaystyle 1 + 2t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 - n^2} = \frac{\pi t}{\sin \pi t}$

(b) $\displaystyle \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} = \pi \cot \pi t$

7. $f(t)$ が有界かつ有限個の点を除いて連続であるとき，以下の式が成立することを示せ．ただし，(1) では $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t) \sin at\, dt = -\int_{-\pi/a}^{\pi/2-\pi/a} f\left(t + \frac{\pi}{a}\right) \sin at\, dt$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin at\, dt = 0$

8. $f(t)$ は必ずしもリプシッツ連続ではない，連続な周期関数とする．$f(t)$ のフーリエ部分和を $S_N(t)$，フェイエル和を $\sigma_N(t)$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $\sigma_N(t)$ を $S_n(t)$ $(n = 0, \ldots, N-1)$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(t) = S(t)$ ならば，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sigma_N(t) = S(t)$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(t) = S(t)$ ならば，$S(t) = f(t)$ となることを示せ．

9. ある $a > m + 1$，$C > 0$ に対して

$$|c[n]| \le C(1 + |n|)^{-a} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ならば，式 (2.2) が成立することを示せ．

10. 連続な周期関数 $f(t)$ のフーリエ係数が

$$c[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2(n^2-1)} & (n \ne 0, \pm 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = \pm 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

(1) フーリエ部分和が $f(t)$ に一様収束することを示せ．

(2) $f(t)$ は C^2 級であるが，C^5 級でないことを示せ．

(3) $f'(t), f''(t)$ のフーリエ係数を求めよ．

11. 連続な周期関数 $f(t)$ のフーリエ係数を $\{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) ある $a \in (m, m+1)$ に対して，極限

$$\lim_{n\to\pm\infty} (1 + |n|)^a |c[n]| > 0$$

が存在するならば，$f(t)$ は C^{m-1} 級であるが，C^{m+1} 級ではないことを示せ．

(2) ある $\varepsilon > 0$ に対して，極限

$$\lim_{n\to\pm\infty} e^{\varepsilon\sqrt{|n|}}|c[n]| > 0$$

が存在するならば，$f(t)$ は C^∞ 級であるが，解析的でないことを示せ．

12. 任意の $M > 0$ に対して定数 $C > 0$ が存在し，式 (2.7) が成立するとき，

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b[n]e^{-n^2\omega^2 t}\sin m\omega x$$

が $t > 0$ において x と t について何回でも項別微分可能であることを示せ．

13. 単位円板 D におけるラプラス方程式のディリクレ問題 (2.9) を考える．$f(e^{i\theta})$ のフーリエ係数が，$a \in (0,1)$ として

$$c[n] = a^{|n|}$$

で与えられるとき，解 $u(re^{i\theta})$ を求めよ．

14. 周期 T の有界で，$[0,T]$ 上で積分可能な周期関数 f, g, h に対して次の関係式が成立することを示せ．

(1) $(f*g)*h = f*(g*h)$

(2) $(f+g)*h = f*h + g*h$

15. 連続な周期関数 $f(t), g(t)$ のフーリエ係数が，$c[0] = d[0] = 0$，$n \neq 0$ のとき

$$c[n] = \frac{1}{n^2}, \quad d[n] = \frac{1}{n^3}$$

で与えられるとき，$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$ $(k > 1)$ として，以下の関数のフーリエ係数を求めよ．

(1) $f(t)g(t)$

(2) $f(t)*g(t)$

16. $f(t)$ を周期関数とし，ある $m, M \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $m \leq f(t) \leq M$ が成立するものとする．f のフェイエル和を $\sigma_N(t)$ とするとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $m \leq \sigma_N(t) \leq M$ が成立することを示せ．

17. 関数 $f(t) = (1+|x|)^{-a}$ に対して以下の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ であるための a についての必要十分条件を求めよ．

(2) $f \in L^2(\mathbb{R})$ であるための a についての必要十分条件を求めよ．

18. n を任意の自然数として，関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \begin{cases} 2n^4(t-n) & (t \in [n, n+1/2n^3)); \\ -2n^4(t-n)+2n & \\ & (t \in [n+1/2n^3, n+1/n^3)); \\ 0 & (t \in [n+1/n^3, n+1] \cup (0,1)); \\ f(-t) & (t < (-\infty, 0)) \end{cases}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f は有界連続か．　(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$ であるか．

(3) $f \in L^2(\mathbb{R})$ であるか．

19. 次の関数のフーリエ変換を求めよ．ただし，$a, b > 0$ かつ $a \neq b$ とする．

(1) $\max(1-|t|, 0)$　(2) $te^{-a|t|}$

(3) $\dfrac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$　(4) $\operatorname{sech} t \left(= \dfrac{1}{\cosh t}\right)$

20. $a > 0$ とし，$t \neq 0$ のとき $f(t) = \sin^2 at/t^2$ を満たす連続関数 $f(t)$ に対して以下の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$ であることを示せ．

(3) f のフーリエ変換を求めよ．

21. 連続関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds$$

とおく．$F \in L^1(\mathbb{R})$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $F(t)$ は有界であることを示せ．

(2) 極限 $\lim_{t\to\pm\infty} F(t)$ を求めよ．

(3) f, F のフーリエ変換 $\hat{f}, \hat{F}$ に対して，

$$i\xi\hat{F}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

が成立することを示せ．

(4) $\hat{F} \in L^1(\mathbb{R})$ であり，反転公式 $F = \mathfrak{F}^*\hat{F}$ が成立することを示せ．

(5) $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ならば，反転公式 $f = \mathfrak{F}^*\hat{f}$ が成立することを示せ．

22. 関数 $f(t) = e^{-|t|}$ とそのフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ に対して以下の問いに答えよ．

(1) f は C^1 級でないことを示せ．

(2) $\hat{f}$ は C^∞ 級であることを示せ．

23. 関数 $f(t) = 1/(t^2+1)^k$ とそのフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ に対して以下の問いに答えよ．ただし，$k > 1$ を自然数とする．

(1) f は C^∞ 級であることを示せ.

(2) $\hat{f}$ は $C^{2(k-1)}$ 級であることを示せ.

24. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ならば，$\langle f, \mathfrak{F}^* g\rangle = \langle \mathfrak{F} f, g\rangle$ が成立することを示せ.

25. 有界関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ のフーリエ変換 $\hat{f}$ を用いて次の関数のフーリエ変換を表わせ, ただし, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ は定数で，$\hat{f}$ も有界可積分とする.
(1) $f(at)$　(2) $(f * f)(t)$　(3) $|f(t)|^2$

26. f とそのフーリエ変換 $\hat{f}$ が有界連続かつ可積分ならば，$\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t), \lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ となることを示せ.

27. 3.9.1 節の $\mathbb{R}$ 上の熱方程式の問題において，$f(x) = \cos x$ のときの解 $u(x,t)$ を求めよ.

28. 3.9.2 節の半平面のラプラス方程式のディリクレ問題において，$f(x) = \cos x$ のときの解 $u(x,y)$ を求めよ.

29. 次の関数のラプラス変換と収束座標を求めよ.
(1) $e^{at}\cos kt$　(2) $e^{at}\sin kt$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$
(4) $\sqrt{t}$　(5) $\dfrac{\cos a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

30. 関数 $f(t)$ が局所可積分で，かつある $\gamma \in \mathbb{R}$ に対して，$t \to \infty$ のとき，$|f(t)| = O(e^{\gamma t})$ かつ $|f(t)| \neq o(e^{\gamma t})$ を満たすならば，ラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s)$ の収束座標は γ に等しいことを示せ.

31. 関数 $f(t)$ に対して

$$\lambda = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log\left|\int_0^T f(t)dt\right| > 0$$

となるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s)$ が $s = \lambda + \varepsilon$ で収束することを示せ.

(2) $\mathscr{L}[f](s)$ の収束座標 σ_c が非負であることを示せ.

(3) $s = s_0$ で $\mathscr{L}[f](s)$ が収束するとき, $\mathrm{Re}\, s_0 \geq \lambda$ であることを示せ.

(4) $\sigma_c = \lambda$ であることを示せ.

32. $\mathrm{Re}\, s > \sigma_a$ ならば $\mathscr{L}(f)(s)$ は絶対収束，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-st}|dt < \infty$$

となり，$\mathrm{Re}\, s < \sigma_a$ ならば $\mathscr{L}(f)(s)$ は絶対収束しないとき，σ_a を $\mathscr{L}(f)(s)$ の**絶対収束座標**という. $\mathscr{L}(f)(s)$ の収束座標を σ_c とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 収束座標 σ_c と同様, 絶対収束座標 $\sigma_a \in [-\infty, \infty]$ は必ず存在することを示せ.

(2) $\sigma_a \geq \sigma_c$ であることを示せ.

33. 次の関数に対して収束座標 σ_c と絶対収束座標 σ_a を求めよ.
(1) $e^t \sin e^t$　　(2) $e^{t+e^t}\sin e^{e^t}$