谷島賢二，物理数学入門，東京大学出版会

証明　命題 3.2 によって $\widehat{f^{(j)}}(n) = (in)^j \hat{f}(n),\ 0 \le j \le k$, である．$f, \dots, f^{(k)} \in L^2(T)$ であるから Parseval の等式によって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^k |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

が成り立つ．ゆえに，Schwarz の不等式を用いれば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^{k-1}\hat{f}(n)| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^k |\hat{f}(n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2(k-1)}(1+n^2)^{-k}\right)^{1/2} < \infty$$

が成立する．定理 3.16 を適用すれば f の Fourier 級数が $f(t)$ に絶対一様収束し，$k-1$ 回項別微分可能であることがわかる．(証明終)

問 3.14　定理 3.16 を用いて，$f \in C^\infty(T)$ であるための必要十分な条件は，その Fourier 係数が，任意の k に対して $|n|^{-k}$ より速く減少することであることを示せ．

関数が解析的であるための必要十分条件は，その Fourier 係数が指数的に減少することである．すなわち，次が成立する．

定理 3.18 (Paley-Wiener の定理)　周期関数 $f(t)$ が複素平面の帯状領域 $C_a = \{z \in C : |Im\ z| < a\}$ 上の正則関数 $f(z)$ の実軸への制限であるための必要十分条件は，$f(t)$ の Fourier 係数に対して次が成立することである：任意の $0 < b < a$ に対して，定数 $C_b > 0$ が存在して，

$$|\hat{f}(n)| \le C_b e^{-b|n|}, \quad n = 0, \pm 1, \dots. \tag{3.32}$$

証明　周期関数 $f \in C(T)$ が C_a 上の正則関数 $f(z)$ の実軸への制限とする．このとき $f(z+2\pi)$ と $f(z)$ は実軸上一致するから，一致の定理によって C_a 上 $f(z+2\pi) = f(z)$．ゆえに，任意の $0 < b < a$ に対して

$$\int_0^{\pm ib} e^{-inz} f(z)dz = \int_{2\pi}^{2\pi \pm ib} e^{-inz} f(z)dz. \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

となる．これから Cauchy の積分定理によって，$n = 0, \pm 1, \dots$ に対して

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(t \mp ib)} f(t \mp ib)dt$$

が得られる (複号同順)．したがって，$C_b = \max\{|f(t \pm ib)| : 0 \le t \le 2\pi\}$ とすれば，

$$|\hat{f}(n)| \le \frac{e^{-b|n|}}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t \mp ib)|dt \le C_b e^{-b|n|}$$

となり，(3.32) が成り立つ．

逆に (3.32) が成立すれば，定理 3.16 によって $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ である．$z \in C_a$ に対して $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inz}$ と定義しよう．右辺は C_a 上広義一様収束する．$\hat{f}(n)e^{inz}$ は正則だから，Weierstrass の解析関数に対する一様収束定理によって $f(z)$ も C_a 上の正則関数となる．明らかに，$f(t)$ は $f(z)$ の実軸への制限である．(証明終)

$C^\infty(T)$ あるいは $L^2(T)$ に含まれる関数を除いて，Fourier 係数の性質ともとの関数との関係を必要十分な形で述べる定理は数少ない．Paley-Wiener の定理はそのような定理のうちの一つである．

3.5.2　微分可能でない関数の Fourier 級数

定理 3.16 によって，微分可能な関数の Fourier 級数は収束し $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ となる．微分可能でない関数の Fourier 級数は収束するのであろうか．Cesàro 総和の収束問題をとり扱ったときと同様，Fourier 級数の収束問題のとり扱いにも，その部分和を積分作用素の形に書いておくことが大切である．次の補題は簡単な計算ですぐにわかる．

補題 3.3　$f \in L^1(T)$ とする．このとき，

$$S_N(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t-s)f(s)ds \tag{3.33}$$

である．ただし，$D_N(t)$ は **Dirichlet 核**と呼ばれる関数で次で与えられる．

$$D_N(t) \equiv \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin(N+(1/2))t}{\sin t/2} \tag{3.34}$$

問 3.15　(1)　(3.34) および $D_N(t) = \cot(t/2)\sin Nt + \cos Nt$ を示せ．
(2)　$D_N(t)$ は 2π を周期とする周期関数で次を満たすことを示せ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_T D_N(t)dt = 1, \quad D_N(t) = D_N(-t) \tag{3.35}$$