吉田耕作, 加藤敏夫, 大学演習応用数学I, 裳華房, 1969

例題 1.4 (**Fourier 級数展開の定理**) $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, は 2π を周期とする複素数値函数で, かつ任意の有限区間で**区分的に滑か**であるとすれば, $f(x)$ は次の意味で Fourier 級数に展開できる.

(1.13) $$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=-n}^{n} e^{imx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\,dt$$

証明. $f(t)$ の実数部, 虚数部に対して別々に (1.13) が成り立つことがいえるとよいが, $f(t)$ を実数値函数とすれば $f(t)e^{-im(t-x)}$ の実数部 $f(t)\cos(m(t-x))$, 虚数部 $f(t)\sin(m(t-x))$ はそれぞれ m の偶函数奇函数となるから

(1.13′) $$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(m(t-x))\,dt$$

を証明すればよい. ところが

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos k\varphi = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\varphi$$

であるから, $k=0, 1, \cdots, n-1$ について和をとり

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos(n-1)\varphi = \left\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\sin\frac{\varphi}{2}\right\}\Big/2\sin\frac{\varphi}{2}$$

この式で n を $n+1$ におきかえ, 両辺から $\frac{1}{2}$ を引けば

(1.14) $$\frac{1}{2}+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi = \sin\frac{2n+1}{2}\varphi\Big/2\sin\frac{\varphi}{2}$$

ゆえに

(1.15) $$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$$

がいえるとよい. 被積分函数が t に関して 2π を周期とするから

(1.16) $$S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x} + \frac{1}{\pi}\int_{x}^{x+\pi}$$

右辺の第1項では $t=x-2z$, 第2項では $t=x+2z$ のように積分変数を z にかえると

$$S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

また $f(t)\equiv 1$ のときに成り立つ

$$1 = \sum_{m=-n}^{n} e^{imx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}\,dt \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

に対して, 上と同じような計算をしてわかるように

(1.17) $$S_n(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz = 1 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

ゆえに (1.15) をいうためには

(1.18) $$S_n(f) - \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}S_n(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\{f(x-2z)-f(x-0)\}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\{f(x+2z)-f(x+0)\}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

が $n\to\infty$ なるとき 0 に収束することがいえるとよい.

x を固定して区間 $(0, \pi/2)$ で定義された z の函数

$$g(z) = \frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-z}\,\frac{-z}{\sin z}$$

を考えれば, f が区分的に滑かという条件と $\lim_{z\downarrow 0}\frac{z}{\sin z}=1$ とから, $g(z)$ は $0\leqq z\leqq \pi/2$ で有界でかつ有限個の点を除いて連続である. だから Riemann の定理の証明と同じく

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(z)\sin(2n+1)z\,dz = 0$$

ゆえに (1.18) の右辺第 1 項は $\to 0$ $(n\to\infty)$. 同じく (1.18) の右辺第 2 項も $\to 0$ $(n\to\infty)$.