級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ の収束について

命題. a を実数とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ が収束するための必要十分条件は $a > 1$ である．

証明. 積分 $\int_1^{\infty} x^{-a} dx$ は，$R > 1$ に対して

$$\int_1^R x^{-a} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a-1}(1 - R^{-a+1}) & (a \neq 1 \text{ のとき}) \\ \log R & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるから，$a > 1$ のとき収束し，$a \leq 1$ のとき発散する．

$$\int_1^{\infty} x^{-a} dx < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-a} < 1 + \int_1^{\infty} x^{-a} dx$$

より，命題の結論を得る． □