# 第 4 章

# ラプラス変換

本章ではラプラス変換の数学的な基礎について解説する[*1].

## 4.1　ラプラス変換の定義と基本的な性質

**定義 4.1.** $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上の複素数値関数，$s$ を複素数として，積分

$$\mathscr{L}[f](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{4.1}$$

を $f(t)$ の**ラプラス変換** (Laplace transform) という．

**例 4.1.** $f(t)=1$ に対するラプラス変換を求める．$\mathrm{Re}\,s>0$ とすると，

$$\mathscr{L}[1](s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

明らかに，$\mathrm{Re}\,s\leq 0$ のとき上の積分は収束しない．

**例 4.2.** 次に，$f(t)=t$ の場合を考える．$\mathrm{Re}\,s>0$ とすると，部分積分により，

$$\mathscr{L}[t](s)=\int_0^\infty te^{-st}dt=\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

再び，$\mathrm{Re}\,s\leq 0$ のとき上の積分は収束しない．

**例 4.3.** $\alpha\in\mathbb{C}$ を定数として $f(t)=e^{\alpha t}$ を考える．$\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,\alpha$ とすると，

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}](s)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt=\left[-\frac{1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-\alpha}$$

$\mathrm{Re}\,s\leq\mathrm{Re}\,\alpha$ のとき上の積分は収束しない．

---

[*1] ここでの説明は，概ね参考文献 [1] の 9 章あるいは [2] の 3.1 節に沿っている．

**定理 4.2.** (i) $s = s_0 \in \mathbb{C}$ に対する $f$ のラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s_0)$ が収束するならば，$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ のとき $\mathscr{L}[f](s)$ も収束する．

(ii) $s = s_0 \in \mathbb{C}$ に対する $f$ のラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s_0)$ が発散するならば，$\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} s_0$ のとき $\mathscr{L}[f](s)$ も発散する．

**証明.** $\mathscr{L}[f](s_0)$ が収束するものとする．このとき

$$\Phi(t) = \int_0^t f(t) e^{-s_0 t} dt \tag{4.2}$$

とおき，$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ とする．部分積分により

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f](s) &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \Phi'(t) e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \Big[\Phi(t) e^{-(s-s_0)t}\Big]_0^\infty + (s - s_0) \int_0^\infty \Phi(t) e^{-(s-s_0)t} dt \end{aligned}\tag{4.3}$$

が得られる．$\Phi(0) = 0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} |\Phi(t)| = |\mathscr{L}[f](s_0)| < \infty$ より，上式の第 1 項目は零となり，第 2 項目の積分は $M = \displaystyle\sup_{t\in[0,\infty)} |\Phi(t)|$ とおくと

$$\int_0^\infty \left|\Phi(t) e^{-(s-s_0)t}\right| dt \le M \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(s-s_0)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re}(s - s_0)}$$

と評価できる．よって，$\mathscr{L}[f](s)$ も収束し，(i) が成立する．

次に，$\mathscr{L}[f](s_0)$ が発散すると仮定し，$\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} s_0$ とする．このとき，$\mathscr{L}[f](s)$ が収束するものとすると，(i) により $\mathscr{L}[f](s_0)$ は収束しなければならず矛盾する．よって，$\mathscr{L}[f](s)$ も発散し，(ii) が成立する． □

定理 4.2 から，与えられた関数 $f(t)$ に対して，ある $a \in [-\infty, \infty]$ が存在し，$\operatorname{Re} s > a$ ならばラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s)$ は収束し，$\operatorname{Re} s < a$ ならば発散することがわかる．ここで，$a = -\infty$ ならば任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $\mathscr{L}[f](s)$ は収束し，$a = \infty$ ならば発散するとしている．$\operatorname{Re} s = a$ のときは $\mathscr{L}[f](s)$ は収束することも発散することもある．$a$ をラプラス変換の**収束座標** (abscissa of convergence)，半平面 $\operatorname{Re} > a$ を**収束域** (region of convergence) という．

**例 4.4.** $f(t) = e^{-t^2}$ を考える．任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，関数 $e^{-t^2} e^{-st}$ は $[0, \infty)$ 上で有界，かつ

$$\lim_{t\to\infty} \log(t^2 e^{-t^2} e^{-(\operatorname{Re} s)t}) = \lim_{t\to\infty} (-t^2 - (\operatorname{Re} s)t + 2\log t) = -\infty$$

より $\displaystyle\lim_{t\to\infty} (t^2 e^{-t^2} e^{-(\operatorname{Re} s)t}) = 0$，すなわち，$t \to \infty$ のとき $e^{-t^2} e^{-(\operatorname{Re} s)t} = o(t^{-2})$ となるから，ラプラス変換はつねに収束し，収束座標は $a = -\infty$ となる．

**例 4.5.** $f(t) = e^{t^2}$ を考える．任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} \log(e^{t^2} e^{-(\mathrm{Re}\, s)t}) = \lim_{t\to\infty} (t^2 - (\mathrm{Re}\, s)t) = \infty$$

となるから，ラプラス変換はつねに発散し，収束座標は $a = \infty$ となる．

$\tau \geq 0$ として，$[0, \infty)$ で定義された関数 $f$ に対して

$$T_\tau f(t) = \begin{cases} f(t-\tau) & (t \geq \tau \text{ のとき}) \\ 0 & (0 \leq t < \tau \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書く．

**命題 4.3.** 関数 $f, g$ に対して以下の式が成立する．ただし，$f, g$ の収束座標を $a_f, a_g$ と表し，$\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{C}$，$\tau \geq 0$，$\gamma > 0$ とする．

(i) $\mathrm{Re}\, s > \max(a_f, a_g)$ のとき，$\mathscr{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathscr{L}[f](s) + \beta \mathscr{L}[g](s)$

(ii) $\mathrm{Re}\, s > a_f$ のとき，$\mathscr{L}[T_\tau f](s) = e^{-\tau s} \mathscr{L}[f](s)$

(iii) $\mathrm{Re}\, s > a_f - \sigma$ のとき，$\mathscr{L}[e^{-\sigma t} f](s) = \mathscr{L}[f](s + \sigma)$

(iv) $\mathrm{Re}\, s > \gamma a_f$ のとき，$\mathscr{L}[f(\gamma t)](s) = \dfrac{1}{\gamma} \mathscr{L}[f(t)] \left(\dfrac{s}{\gamma}\right)$

**証明.** (i) は定義より明らか．(iii) については，直ちに

$$\mathscr{L}[e^{-\sigma t} f](s) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\sigma)t} dt, = \mathscr{L}[f](s + \sigma)$$

(ii) および (iv) については，置換積分により，それぞれ，

$$\mathscr{L}[T_\tau f](s) = \int_\tau^\infty f(t - \tau) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(u) e^{-s(t+\tau)} du = e^{-s\tau} \mathscr{L}[f](s)$$

および

$$\mathscr{L}[f(\gamma t)](s) = \int_0^\infty f(\gamma t) e^{-st} dt = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty f(u) e^{-su/\gamma} du = \frac{1}{\gamma} \mathscr{L}[f(t)] \left(\frac{s}{\gamma}\right)$$

と示される． □

**例 4.6.** $k \in \mathbb{C}$ を定数として $f(t) = \cos kt$ を考える．$\mathrm{Re}\, s > \max(\pm \mathrm{Re}\, ik) = |\mathrm{Im}\, k|$ のとき，命題 4.3(i) と例 4.3 より次のように求められる．

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\cos kt](s) =& \mathscr{L} \left[\frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt})\right](s) = \frac{1}{2} \left(\mathscr{L}[e^{ikt}](s) + \mathscr{L}[e^{-ikt}](s)\right) \\ =& \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ik} + \frac{1}{s + ik}\right) = \frac{s}{s^2 + k^2} \end{aligned}$$

**例 4.7.** $k \in \mathbb{C}$ を定数として $f(t) = \sin kt$ を考える．$\mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Im}\, k|$ のとき，命題 4.3(i) と例 4.3 より次のように求められる．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin kt](s) =& \mathscr{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt})\right](s) = \frac{1}{2i}\left(\mathscr{L}[e^{ikt}](s) - \mathscr{L}[e^{-ikt}](s)\right) \\ =& \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ik} - \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{k}{s^2+k^2}\end{aligned}$$

## 4.2　微分とラプラス変換

**定理 4.4.** $f(t)$ が $t > 0$ で微分可能かつ有界な右極限 $f(+0) = \lim_{t \to +0} f(t)$ が存在するものとする．このとき，条件

(i) $\mathscr{L}[f](s)$ が収束
(ii) $\mathscr{L}[f'](s)$ が収束
(iii) $\lim_{t \to \infty} f(t)e^{-st} = 0$

のうち，いずれか 2 つが成立するならば，残りの条件も成立し，かつ次式が成立する．

$$\mathscr{L}[f'](s) = s\mathscr{L}[f](s) - f(+0) \tag{4.4}$$

**証明.** 広義積分の定義と部分積分により

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f'](s) &= \int_{+0}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \Big[f(t)e^{-st}\Big]_{+0}^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(+0) + s\mathscr{L}[f](s)\end{aligned}$$

となる．(iii) かつ (i) あるいは (ii) が成立する場合は，上式から (ii) あるいは (i) が成立し，式 (4.4) を得る．(i) と (ii) のみが成立する場合は，まず上式から極限 $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st}$ が存在し，この極限値は $\mathscr{L}[f](s)$ が収束することから 0 となり式 (4.4) を得る． □

**定理 4.5.** $f(t)$ が $t > 0$ で微分可能かつ有界な右極限 $f(+0) = \lim_{t\to+0} f(t)$ が存在し，さらに定理 4.4 の条件 (ii) が成立，すなわち，$\mathscr{L}[f'](s)$ が収束するものと仮定する．このとき，以下の 2 つの条件のうちどちらか 1 つが成立するならば，$\mathscr{L}[f](s)$ も収束し，式 (4.4) が成立する．

(iv) $\mathrm{Re}\, s > 0$
(v) $\mathrm{Re}\, s \leqq 0$ かつ $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$

定理 4.5 の証明のため，2 つの補題を示す．

**補題 4.6.** $\mathrm{Re}\, s > 0$ に対して $\mathscr{L}[f](s)$ が収束するならば，$t \to \infty$ のとき

$$\int_0^t f(t)dt = o(e^{(\mathrm{Re}\, s)t})$$

**証明.** 式 (4.2) で $s_0 = s$ とおき関数 $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)e^{-st}dt$ を定める．式 (4.3) と同様に，部分積分により，

$$\int_0^t f(t)dt = \int_0^t \Phi'(t)e^{st}dt = \Phi(t)e^{st} - s\int_0^t \Phi(t)e^{st}dt$$

を得る．よって，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \mathscr{L}[f](s)$ かつ

$$se^{-st}\int_0^t e^{st}dt = e^{-st}(e^{st} - 1) \to 1 \quad (t \to \infty)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e^{-st}\int_0^t f(t)dt =&\mathscr{L}[f](s) - \lim_{t\to\infty} se^{-st}\int_0^t \Phi(t)e^{st}dt \\ =& \lim_{t\to\infty} se^{-st}\int_0^t (\mathscr{L}[f](s) - \Phi(t))e^{st}dt\end{aligned}$$

となる．さらに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$t > T$ のとき

$$|\Phi(t) - \mathscr{L}[f](s)| < \varepsilon$$

となるように $T > 0$ を選ぶと，

$$\left|\int_0^t (\mathscr{L}[f](s) - \Phi(t))e^{st}dt\right| \le \int_0^T |\mathscr{L}[f](s) - \Phi(t)|e^{(\mathrm{Re}\, s)t}dt + \varepsilon\int_T^t e^{(\mathrm{Re}\, s)t}dt$$

となるから，

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-st}\int_0^t f(t)dt\right| \le \lim_{t\to\infty} \varepsilon|s|e^{-(\mathrm{Re}\, s)t}\int_T^t e^{(\mathrm{Re}\, s)t}dt \le \frac{\varepsilon|s|}{\mathrm{Re}\, s}$$

これより結論を得る． □

**補題 4.7.** $\mathrm{Re}\, s < 0$ に対して $\mathscr{L}[f](s)$ が収束するならば，$t \to \infty$ のとき

$$\int_t^\infty f(t)dt = o(e^{(\mathrm{Re}\, s)t})$$

**証明.** $\Psi(t) = \mathscr{L}[f](s) - \displaystyle\int_0^t f(t)e^{-st}dt = \int_t^\infty f(t)e^{-st}dt$ とおくと，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = 0$ であり，部分積分により，

$$\int_t^\infty f(t)dt = -\int_t^\infty \Psi'(t)e^{st}dt = \Psi(t)e^{st} + s\int_t^\infty \Psi(t)e^{st}dt$$

を得る．よって

$$e^{-st}\int_t^\infty f(t)dt = \Psi(t) + se^{-st}\int_t^\infty \Psi(t)e^{st}dt$$

となる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$t > T$ のとき $|\Psi(t)| < \varepsilon$ となるように $T > 0$ を選ぶと，

$$\left|e^{-st}\int_t^\infty \Psi(t)e^{st}dt\right| \leq \varepsilon|s|e^{-(\mathrm{Re}\,s)t}\int_t^\infty e^{(\mathrm{Re}\,s)t}dt = \frac{\varepsilon|s|}{-\mathrm{Re}\,s}$$

となるから，補題の結論を得る． □

**定理 4.5 の証明．** 定理 4.4 の条件 (iii) が成立することを示す．

まず，(iv) の場合，補題 4.6 により

$$\int_0^t f'(t)dt = f(t) - f(+0) = o(e^{(\mathrm{Re}\,s)t})$$

となる．よって，$\mathrm{Re}\,s > 0$ から条件 (iii) が成立する．

次に，(v) の場合，$\mathrm{Re}\,s < 0$ ならば，補題 4.7 により

$$\int_t^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(t) = -f(t) = o(e^{(\mathrm{Re}\,s)t})$$

となり，条件 (iii) が成立する．$\mathrm{Re}\,s = 0$ ならば，条件 (iii) が成立することは明らかである． □

**例 4.8．** $f(t) = 1 - e^{-t}$ を考える．$\mathscr{L}[f](s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}$ で収束座標は 0 となる．$s > 0$ のとき，$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$ であるから，定理 4.4 の条件 (i) と (ii) は満たされ，式 (4.4) は成立する．一方，$f'(t) = e^{-t}$ であり，$\mathscr{L}[f'](s) = \dfrac{1}{s+1}$ で収束座標は $-1$ となる．しかし，$\lim_{t\to\infty} f(t) = 1 \neq 0$ で定理 4.5 の条件は満たされず，$\mathrm{Re}\,s \in (-1, 0)$ のとき式 (4.4) は成立するとは限らない ( 実際，$\mathscr{L}[f](s)$ と $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st}$ は収束しない )．

定理 4.5 を繰り返し適用することにより，次の結果が得られる．

**系 4.8．** $f(t)$ が $t > 0$ で $n$ 回微分可能かつ有界な右極限 $f(+0), f'(+0), \ldots, f^{(n-1)}(+0)$ が存在し，$\mathscr{L}[f^{(n)}](s)$ が収束するものと仮定する．このとき，条件

(iv') $\mathrm{Re}\,s > 0$

(v') $\mathrm{Re}\,s < 0$ かつ $t \to \infty$ のとき $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t) \to 0$

のうちどちらか 1 つが成立するならば，$\mathscr{L}[f](s), \mathscr{L}[f'](s), \ldots, \mathscr{L}[f^{(n-1)}](s)$ も収束し，

$$\mathscr{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathscr{L}[f](s) - f(+0)s^{n-1} - f'(+0)s^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(+0)$$

が成立する．

**注意 4.9.** 系 4.8 の条件が成立するとき，

$$f(t)e^{-st}, f'(t)e^{-st}, \ldots, f^{(n-1)}(t)e^{-st} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

となる．すなわち，$t \to \infty$ のとき $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t) = o(e^{(\mathrm{Re}\, s)t})$ である．

## 4.3　たたみ込み

$t < 0$ で $f(t), g(t) = 0$ とし，$f$ と $g$ のたたみ込みを

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

と定める．明らかに，$f * g = g * f$ である．たたみ込みのラプラス変換に対して次の結果が成立する．

**定理 4.10.** $f(t), g(t)$ のラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s), \mathscr{L}[g](s)$ が $s = s_0$ で絶対収束するならば，たたみ込みのラプラス変換 $\mathscr{L}[f * g](s)$ も $s = s_0$ で絶対収束して，次式が成立する．

$$\mathscr{L}[f * g](s_0) = \mathscr{L}[f](s_0) \cdot \mathscr{L}[g](s_0) \tag{4.5}$$

**証明.** $\mathscr{L}[f](s_0), \mathscr{L}[g](s_0)$ が絶対収束することより

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f](s_0) \cdot \mathscr{L}[g](s_0) &= \int_0^\infty f(u)e^{-s_0 u}du \int_0^\infty g(v)e^{-s_0 v}dv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-s_0(u+v)}dudv
\end{aligned}$$

$t = u + v$，$\tau = v$ と変数変換すると，上式は

$$\int_0^\infty \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)e^{-s_0 t}d\tau dt = \mathscr{L}[f * g](s_0)$$

と変形され，式 (4.5) を得る．また，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |(f * g)(t)|e^{-(\mathrm{Re}\, s_0)t}dt &\leq \int_0^\infty \int_0^t |f(t-\tau)g(\tau)|e^{-(\mathrm{Re}\, s_0)t}d\tau dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty |f(u)g(v)|e^{-(\mathrm{Re}\, s_0)(u+v)}dudv \\
&= \int_0^\infty |f(u)|e^{-(\mathrm{Re}\, s_0)u}du \int_0^\infty |g(v)|e^{-(\mathrm{Re}\, s_0)v}dv
\end{aligned}$$

となるから，$\mathscr{L}[f * g](s)$ も絶対収束する． □

**注意 4.11.** たたみ込みのラプラス変換について，また以下のことが成立する．

(i) $\mathscr{L}[f](s), \mathscr{L}[g](s), \mathscr{L}[f * g](s)$ が $s = s_0$ で収束するならば，式 (4.5) が成立する．

(ii) $\mathscr{L}[f](s), \mathscr{L}[g](s)$ が $s = s_0$ で収束し，少なくとも一方が絶対収束するならば，$\mathscr{L}[f * g](s)$ も $s = s_0$ で収束し，式 (4.5) が成立する．

証明は [1] の 9.6 節を参照せよ．

**例 4.9.** $\mathrm{Re}\, s > 0$ とし，このとき $\mathscr{L}[f](s)$ が収束するものとする．また，$g(t) = 1$ とすると，例 4.1 より $\mathscr{L}[g](s) = \dfrac{1}{s}$ である．ここで，$F(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du$ とおくと，$F(t) = (f * g)(t)$ だから，注意 4.11(ii) より

$$\mathscr{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f](s)$$

が成立する．一方，$F'(t) = f(t)$，$F(+0) = 0$ であるから，定理 4.5 により

$$\mathscr{L}[f](s) = s\mathscr{L}[F](s)$$

となり，上の結果が再び得られる．

## 4.4　一様収束性と正則性

**定理 4.12** (一様収束性)**.** $f(t)$ のラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s)$ が $s = s_0$ で収束するならば，任意の $\theta \in (0, \pi/2)$ に対して $s_0$ を頂点とする角領域

$$\Delta = \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s - s_0)| < \theta\}$$

において $\mathscr{L}[f](s)$ は一様収束する．

**証明.** 式 (4.2) により関数 $\Phi(t)$ を定める．$\mathscr{L}[f](s)$ が $s = s_0$ で収束することより，極限 $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t)$ が存在する．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$t_1, t_2 > \rho$ ならば

$$|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

が成立するように正数 $\rho = \rho(s_0, \varepsilon)$ を取ることができる．$s \in \Delta$ とすると，$t_0 > \rho$ のとき，部分積分により

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-s_0)t}\Phi'(t)dt = (s - s_0)\int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-s_0)t}(\Phi(t) - \Phi(t_0))dt$$

となる．よって

$$\left|\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\right| \leq |s - s_0|\varepsilon \int_{t_0}^{\infty} e^{-\mathrm{Re}\,(s-s_0)t}dt = \frac{|s - s_0|}{\mathrm{Re}\,(s - s_0)}\varepsilon < \frac{\varepsilon}{\cos\theta}$$

が成立し，結論を得る．　□

**定理 4.13** (正則性)**.** $f$ のラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s)$ は，収束域 $\mathrm{Re}\, s > a$ ($a$ は収束座標) において正則である．さらに，次式が成立する．

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f](s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt \left(= \mathscr{L}[(-t)^n f](s)\right) \tag{4.6}$$

**証明.** 証明では次の定理を用いる．

**定理 4.14.** 領域 $D$ 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ が，各点 $a \in D$ に対して，ある閉円板 $\overline{D}(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqq r\} \subset D$ $(r > 0)$ が取れて，その上で $f(z)$ に一様収束するものとする．このとき，$f(z)$ も $D$ 上正則である．さらに，導関数の列 $\{f_n^{(k)}(z)\}_{n=1}^\infty$ ($k \in \mathbb{N}$) も各点 $a \in D$ に対して，ある閉円板 $\overline{D}(a;r') = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqq r\} \subset D$ $(r' > 0)$ が取れて，その上で $f^{(k)}(z)$ に一様収束する．

定理 4.14 の証明は，例えば，参考文献 [4] の定理 5.3 を参照せよ．また，定理の条件を満たす関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は $D$ 上で $f(z)$ に**広義一様収束** (uniform convergence in the wide sense) するという．

定理 4.13 の証明に戻る．$f$ のラプラス変換を次のように書き直す．

$$\mathscr{L}[f](s) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k(s), \quad \alpha_k(s) = \int_k^{k+1} f(t) e^{-st} dt \tag{4.7}$$

収束域の任意の点 $s = s_1$ に対して，$a < \mathrm{Re}\, s_0 < \mathrm{Re}\, s_1$ を満たすように $s_0$ を取り，定理 4.12 の角領域 $\Delta$ を定める．$\Delta$ 内に $s = s_1$ を中心とする半径 $r > 0$ の小円 $\overline{D}(s_1;r) = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - s_1| \leqq r\}$ を取ると，式 (4.7) は $\overline{D}(s_1;r)$ で一様収束する．さらに，$\overline{D}(s_1;r)$ において，指数関数のテイラー展開の一様収束性より，

$$\alpha_k(s) = \int_k^{k+1} f(t) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-st)^j}{j!} dt = \sum_{j=0}^\infty \frac{s^j}{j!} \int_k^{k+1} (-t)^j f(t) dt$$

は正則である．よって，定理 4.14 により $\mathscr{L}[f](s)$ も正則となる．また，

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(n)}(s) &= \sum_{j=n}^\infty \frac{s^{j-n}}{(j-n)!} \int_k^{k+1} (-t)^j f(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{s^j}{j!} \int_k^{k+1} (-t)^{j+n} f(t) dt = \int_k^{k+1} (-t)^n f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

となるから，式 (4.7) を項別微分して式 (4.6) を得る． □

**注意 4.15.** $a_n$ を $\mathscr{L}[t^n f](s)$ の収束座標とする．定理 4.13 より $a_n \leq a$ となる．また，以下のように $a_1 \geq a$ であることが示されるので，任意の自然数 $n$ に対して $a_n = a$ となる．

まず，$\mathrm{Re}\, s > a_1$ とし，$\Phi_1(t) = \displaystyle\int_0^t tf(t)e^{-st}dt$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $T > 0$ を取れば，$t_1, t_2 > T$ のとき $|\Phi_1(t_1) - \Phi_1(t_2)| < \varepsilon$ となる．$\tau > T$ とすると，

$$\int_\tau^\infty f(t)e^{-(s+\varepsilon)t}dt = \int_\tau^\infty \frac{1}{t}e^{-\varepsilon t}\Phi_1'(t)dt = \int_\tau^\infty \frac{1+\varepsilon t}{t^2}e^{-\varepsilon t}(\Phi_1(t) - \Phi_1(\tau))dt$$

より，

$$\left|\int_\tau^\infty f(t)e^{-(s+\varepsilon)t}dt\right| \leq \varepsilon \int_\tau^\infty \frac{1+\varepsilon t}{t^2}e^{-\varepsilon t}dt = \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau}$$

が導かれる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\tau \to \infty$ のとき上式は 0 に収束するから，$a \leq a_1$ を得る．

## 4.5 反転公式

**定理 4.16** (反転公式)**.** $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上の関数で，任意の有限区間で区分的に滑らか ( 有限個の点を除いて $C^1$ 級で，不連続点で $f'(X)$ の右極限と左極限が存在 ) であると仮定し，$a$ をラプラス変換 $\mathscr{L}[f](s)$ の収束座標とする．$\sigma > a$ ならば，$t > 0$ に対して次式が成立する．

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathscr{L}(f)(s)e^{st}ds \tag{4.8}$$

参考文献 [3] の III 章，例題 1.3 を条件をゆるめたものに修正して，この定理を証明する．証明では次の補題を用いる．

**補題 4.17** (ディリクレの積分定理)**.** $g(t)$ が区間 $(\alpha, \beta)$ で区分的に滑らかならば，$t \in (\alpha, \beta)$ のとき次式が成立する．

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta g(u)\frac{\sin\lambda(u-t)}{u-t}du = \frac{1}{2}(g(t+0) + g(t-0))$$

**証明．** 以下では，次式が成立することを示す．

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_t^\beta g(u)\frac{\sin\lambda(u-t)}{u-t}du = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\bar\beta} g(t+u)\frac{\sin\lambda u}{u}du = \frac{1}{2}g(t+0) \tag{4.9}$$

ここで，$\bar\beta = \beta - t$ である．式 (4.9) と同様に次も証明できるので，補題の結論を得る．

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_\alpha^t g(u)\frac{\sin\lambda(u-t)}{u-t}du = \frac{1}{2}g(t-0)$$

まず，関係式 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ により (各自確めよ)，式 (4.9) は

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\bar\beta} (g(t+u) - g(t+0))\frac{\sin\lambda u}{u}du = 0 \tag{4.10}$$

と同等である．そこで，$t$ の値を固定し，

$$h(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u}(g(t+u) - g(t+0)) & (u \in (0, \bar{\beta}] \text{ のとき}) \\ g'(t+0) & (u = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (u \notin [0, \bar{\beta}] \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって，$(-\infty, \infty)$ で有界かつ有限個の $u$ の値を除いて連続な関数 $h(u)$ を定める．式 (4.10) は

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{\beta}} h(u) \sin \lambda u \, du = 0 \tag{4.11}$$

と書ける．

さて，

$$\begin{aligned}\int_0^{\bar{\beta}} h(u) \sin \lambda u \, du &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \sin \lambda u \, du = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin \lambda \left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) du \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin \lambda u \, du\end{aligned}$$

であるから，$\lambda > \pi$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\bar{\beta}} h(u) \sin \lambda u \, du\right| &= \frac{1}{2} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(h(u) - h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) \sin \lambda u \, du\right| \\ &\le \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(u) - h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| du = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\bar{\beta}} \left|h(u) - h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| du\end{aligned}$$

となる．ここで，$u < 0$ または $u > \bar{\beta}$ のとき $h(u) = 0$ であることを用いた．したがって

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} \left|\int_0^{\bar{\beta}} h(u) \sin \lambda u \, du\right| &\le \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^{\bar{\beta}} \left|h(u) - h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| du \\ &\le \frac{1}{2} \int_{-1}^{\bar{\beta}} \lim_{\lambda\to\infty} \left|h(u) - h\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| du = 0\end{aligned}$$

を得る．よって，式 (4.11)，すなわち，式 (4.9) が成立する．　□

**定理 4.16 の証明．** $s = \sigma + iu$ とおき，

$$\frac{e^{-\sigma t}}{2\pi i} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} \mathscr{L}[f](s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{iut} du \int_0^{\infty} f(v) e^{-(\sigma + iu)v} dv$$

と書く．定理 4.12 により，$v$ に関する積分は $\sigma > a$，$|u| < R$ で一様収束する．よって，積分順序が変更できて，上式の右辺は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(v) e^{-\sigma v} dv \int_{-R}^{R} e^{-iu(t-v)} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) e^{-\sigma v} \frac{\sin R(v-t)}{v-t} dv$$

と変形される．$a < s_0 < \sigma$ を満たす実数 $s_0$ に対して式 (4.2) により関数 $\Phi(t)$ を定め，$\delta = \sigma - s_0 > 0$ とすると，部分積分により，上式の右辺の積分は

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \Phi'(v)e^{-\delta v}\frac{\sin R(v-t)}{v-t}dv\\&= -\int_0^\infty \Phi(v)e^{-\delta v}\left(-\delta\frac{\sin R(v-t)}{v-t} + \frac{d}{dv}\left(\frac{\sin R(v-t)}{v-t}\right)\right)dv \qquad (4.12)\end{aligned}$$

と計算される．ロピタルの定理により

$$\lim_{v\to 0}\frac{d}{dv}\left(\frac{\sin Rv}{v}\right) = \lim_{v\to 0}\frac{Rv\cos v - \sin Rv}{v^2} = \lim_{v\to 0}\frac{-Rv\sin v}{2v} = 0$$

であり，かつ $\Phi(t)$ は有界であるから，式 (4.12) の積分は $R > 0$ で一様収束する．よって，$R > 0$ で一様に

$$\lim_{T\to\infty}\int_T^\infty f(v)e^{-\sigma v}\frac{\sin R(t-v)}{t-v}dv = 0$$

が成立する．さらに，補題 4.17 により，$t > 0$ に対して，$R \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T f(v)e^{-\sigma v}\frac{\sin R(t-v)}{t-v}dv \to \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))e^{-\sigma t}$$

となるから，式 (4.8) を得る．　□

**注意 4.18.**　(i) 定理 4.16 の証明で $t = 0$ とすると，式 (4.9) とから，次式が得られる．

$$\frac{1}{2}f(+0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathscr{L}[f](s)ds$$

(ii) 定理 4.16 で，$f(t)$ が区分的に滑らかという条件は，有界変動である，すなわち，有限区間 $[\alpha, \beta]$ の任意の分割

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

に対して，分割に依存しないある定数 $M > 0$ が取れて

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| < M$$

が成立するという条件に置き換えられる．詳細は参考文献 [1] の 9.5 節あるいは [2] の 3.1.7 節を参照せよ．

半無限区間 $(0,\infty)$ で滑らかな関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathscr{L}[f](s)$ とする．ラプラス変換の逆変換 (**逆ラプラス変換** (inverse Laplace transform) という) を $\mathscr{L}^{-1}$ と表すと，定理 4.16 より，$\sigma\in\mathbb{R}$ をある定数として次式を得る．

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F](t):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)e^{st}ds \tag{4.13}$$

ただし，注意 4.18(i) により $\mathscr{L}^{-1}[F](0)=f(+0)$ となる．これより，$F(s)$ が半無限区間 $(0,\infty)$ で滑らかなある関数 $f(t)$ のラプラス変換ならば，$F(s)$ をそのラプラス変換とする (すなわち，$F(s)=\mathscr{L}[f](s)$ を満たす) 滑らかな関数は一意的に定められる．次の例が示すように，簡単な形の関数 $F(s)$ に対しては，その線形性や定理 4.10 を用いることにより，公式 (4.13) によらずに，逆ラプラス変換 $\mathscr{L}^{-1}F(s)$ を容易に求めることができる．

**例 4.10.** $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$ の逆ラプラス変換を求める．

$$F(s)=-\frac{i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s-(-1-i\sqrt{3})/2}-\frac{1}{s-(-1+i\sqrt{3})/2}\right)$$

であり，例 4.3 より，収束座標 $a=-\frac{1}{2}$ として，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-1-i\sqrt{3})/2}\right](t)&=e^{(-1-i\sqrt{3})t/2},\\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-1+i\sqrt{3})/2}\right](t)&=e^{(-1+i\sqrt{3})t/2}\end{aligned}$$

となる．よって，逆ラプラス変換の線形性から，

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=-\frac{i}{\sqrt{3}}(e^{(-1-i\sqrt{3})t/2}-e^{(-1+i\sqrt{3})t/2})=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

を得る．同様な方法を用いることにより，有理関数 $F(s)$ の逆ラプラス変換はしばしば容易に求めることができる．

**例 4.11.** $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ の逆ラプラス変換を求める．例 4.7 より

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)=\sin t$$

よって，定理 4.10 より，次を得る．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t)&=\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(t-u)\sin u\,du\\ &=\sin t\int_0^t\sin u\cos u\,du-\cos t\int_0^t\sin^2 u\,du\\ &=\tfrac{1}{2}\sin^3 t-\tfrac{1}{2}\cos t(t-\tfrac{1}{2}\sin 2t)=\tfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\end{aligned}$$

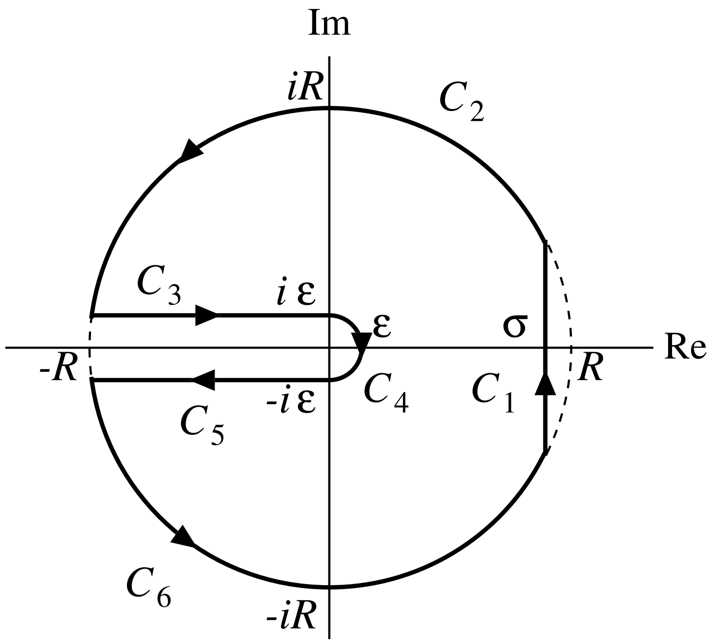


図 4.1　例 4.12 の積分路 $C = C_6 C_5 \cdots C_1$

**例 4.12.** 公式 (4.13) を用いて，$F(s) = e^{-\sqrt{s}}$ の逆ラプラス変換 $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F](t)$ を求めてみよう．$\operatorname{Log} s$ を対数関数の主値として，$\sqrt{s}$ の分枝は主値 $\exp(\operatorname{Log} s/2)$ を選ぶ．

まず，$0 < \varepsilon < \sigma < R$ とし，$C_1, C_3, C_5$ を，それぞれ，2 点 $\sigma - i\sqrt{R^2 - \sigma^2}$ と $\sigma + i\sqrt{R^2 - \sigma^2}$，$-\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} + i\varepsilon$ と $i\varepsilon$，$-i\varepsilon$ と $-\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - i\varepsilon$ を結ぶ線分，$C_2, C_6$ を，それぞれ，2 点 $\sigma + i\sqrt{R^2 - \sigma^2}$ と $-\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} + i\varepsilon$，$-\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - i\varepsilon$ と $\sigma - i\sqrt{R^2 - \sigma^2}$ を結ぶ半径 $R$ の円弧，$C_4$ を 2 点 $i\varepsilon$ と $-i\varepsilon$ を結ぶ半径 $\varepsilon$ の円弧とし，$C = C = C_6 C_5 \cdots C_1$ とおく．$C$ の内部で $e^{-\sqrt{s}+st}$ は正則だから，コーシーの積分定理により $\displaystyle\oint_C e^{-\sqrt{s}+st} ds = 0$ となる．$R \to \infty$，$\sigma, \varepsilon \to 0$ のとき，

$$\int_{C_1} e^{-\sqrt{s}+st} ds \to \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\sqrt{s}+st} ds, \quad \int_{C_j} e^{-\sqrt{s}+st} ds \to 0 \quad (j = 2, 4, 6)$$

であり，$s = xe^{\pm i\pi}$ とおくと

$$\int_{C_3} e^{-\sqrt{s}+st} ds \to -\int_{\infty}^{0} e^{-i\sqrt{x}-xt} dx, \quad \int_{C_5} e^{-\sqrt{s}+st} ds \to -\int_{0}^{\infty} e^{i\sqrt{x}-xt} dx$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\sqrt{s}+st} ds &= \int_0^\infty e^{-xt}(e^{i\sqrt{x}} - e^{-i\sqrt{x}}) dx = 2i \int_0^\infty e^{-xt} \sin\sqrt{x}\, dx \\ &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-tu^2} \sin u\, du = \frac{i\sqrt{\pi}}{t^{3/2}} e^{-1/4t}\end{aligned}$$

を得る．ここで，$\mathfrak{F}[e^{-\lambda^2t^2/2}](\xi)=\dfrac{1}{\lambda}e^{-\xi^2/2\lambda^2}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ite^{-\lambda^2t^2/2}e^{-i\xi t}dt=\mathfrak{F}[ite^{-\lambda^2t^2/2}](\xi)=-\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\xi^2/2\lambda^2}\right)=\frac{\xi}{\lambda^3}e^{-\xi^2/2\lambda^2}$$

であることを用いた．したがって

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{-\sqrt{s}+st}ds=\frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\,e^{-1/4t}$$

## 4.6　微分方程式への応用

次の定数係数の微分方程式を考える．

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t) \tag{4.14}$$

ここで，$a_1,\ldots,a_n$ は実定数，$f(t)$ は連続関数とする．初期条件 $x^{(k)}(0)=0$ $(j=0,\ldots,n-1)$ を満たす解をラプラス変換を用いて求める．

$\mathrm{Re}\,s>0$，$\mathscr{L}[x^{(n)}](s)$ と $F(s)=\mathscr{L}[f](s)$ が存在するものとする．系 4.8 により式 (4.14) の両辺をラプラス変換すると，$X(s)=\mathscr{L}[x](s)$ として

$$(s^n+a_1s^{(n-1)}+\cdots+a_n)X(s)=F(s)$$

となる．よって，

$$G(s)=\frac{1}{s^n+a_1s^{(n-1)}+\cdots+a_n}$$

とすると，

$$X(s)=G(s)F(s)$$

と変形される．さらに，$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G](t)$ とすれば，定理 4.10 により $x=g*f$，すなわち

$$x(t)=\int_0^t g(t-u)f(u)du \tag{4.15}$$

を得る．工学分野では，関数 $G(s)$ を**伝達関数** (transfer function)，関数 $g(t)$ を**衝撃応答関数**あるいは**インパルス応答関数**（impulse response function） と呼ぶことがある．

**例 4.13.** 次の微分方程式を考える．

$$x''+x=f(t) \tag{4.16}$$

伝達関数は

$$G(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

であり，例 4.7 より，衝撃応答関数は

$$g(t) = \sin t$$

となる．よって，式 (4.15) から，$x(0), x'(0) = 0$ を満たす式 (4.16) の解は

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-u) f(u) du$$

で与えられる．特に，$f(t) = e^{-t}$ のときは次式が得られる．

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-u) e^{-t} du = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$$

# 参考文献

[1] 河田龍夫，応用数学概論 I，岩波全書，岩波書店，1950.
[2] 布川昊，制御と振動の数学，機械工学大系 3，コロナ社，1974.
[3] 吉田耕作，加藤敏夫，大学演習 応用数学 I，裳華房，1961.
[4] 神保道夫，複素関数入門，岩波書店，2003.