定理 1.6 の証明の補足

命題． f を周期 T で周期的かつ有界で $[0,T]$ 上で積分可能な関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f-g\| < \varepsilon$ となるリプシッツ連続な周期関数 g が存在する．

証明． 区間 $[0,T]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ を取り，周期 T で周期的な階段関数 $f_\Delta(t)$ を次式により定める．

$$f_\Delta(t) = \inf_{t_j \le t < t_{j+1}} f(t) \qquad (t_j \le t < t_{j+1}\text{のとき})$$

Δ を十分細かく取れば，積分の定義により，

$$\|f - f_\Delta\| = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - f_\Delta(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

とできる．上式が成立するように Δ を取って固定する．また，

$$\lim_{s\to 0}\int_0^T |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)|dt = 0$$

であるから，$n_0 > 0$ を十分大きく取れば，$n \ge n_0$ のとき

$$\sup_{|n|\le 1/n} \frac{1}{T}\int_0^T |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

が成立する．

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(t) \ge 0$ で，$|t| \ge 1$ のとき $\phi(t) = 0$ かつ

$$\int_{-1}^1 \phi(t)dt = 1$$

を満たすリプシッツ連続な関数 $\phi(t)$ を取り，$\phi_n(t) = n\phi(nt)$ とする．このとき

$$|t| \ge 1/n\text{ のとき }\phi_n(t) = 0 \quad \text{かつ} \quad \int_{-1/n}^{1/n}\phi_n(t)dt = 1 \tag{3}$$

となる．関数 $f_n(t)$ を次式により定める．

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(t-s)f_\Delta(s)ds = \int_{-1/n}^{1/n}\phi_n(s)f_\Delta(t-s)ds$$

$f_\Delta(t)$ の周期性より

$$f_n(T) = \int_{-1/n}^{1/n}\phi_n(s)f_\Delta(T-s)ds = \int_{-1/n}^{1/n}\phi_n(s)f_\Delta(-s)ds = f_n(0)$$

かつ，十分大きな $n > 0$ に対して，L_ϕ を関数 ϕ のリプシッツ定数として

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \le \int_{-\infty}^{\infty}|\phi_n(t_1-s) - \phi_n(t_2-s)|\,|f_\Delta(s)|ds \le 4nL_\phi|t_1-t_2|\sup_{0\le t\le T}|f(t)|$$

となるから，$f_n(t)$ は周期 T のリプシッツ連続な周期関数である．ここで，$t_1 \ne t_2$ ならば，$n > 0$ が十分大きいとき

$$\max\left(t_1 - \frac{1}{n}, t_2 - \frac{1}{n}\right) > \min\left(t_1 + \frac{1}{n}, t_2 + \frac{1}{n}\right)$$

であること，および式 (3) より，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1 - s) - \phi_n(t_2 - s)| ds \\
&\le \int_{t_1-1/n}^{t_1+1/n} |\phi_n(t_1 - s)| ds + \int_{t_2-1/n}^{t_2+1/n} |\phi_n(t_2 - s)| ds \\
&= \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} |\phi(nt_1 - u))| du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} |\phi(nt_2 - u))| du \\
&\le \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} |\phi(nt_1 - u)) - \phi(nt_2 - u)| du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} |\phi(nt_1 - u) - \phi(nt_2 - u))| du \\
&\le \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} nL_\phi |t_1 - t_2| du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} nL_\phi |t_1 - t_2| du \le 4nL_\phi |t_1 - t_2|
\end{aligned}
$$

となることを用いた．

式 (3) より

$$
f_n(t) - f_\Delta(t) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s)(f_\Delta(t - s) - f_\Delta(t)) ds
$$

であるから

$$
|f_n(t) - f_\Delta(t)| \le \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) |f_\Delta(t - s) - f_\Delta(t)| ds
$$

となる．さらに，上式を t で積分し，積分を交換すると，$n \ge n_0$ のとき

$$
\|f_n - f_\Delta\| \le \frac{1}{T} \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) \int_0^T |f_\Delta(t - s) - f_\Delta(s)| ds < \frac{\varepsilon}{2}
$$

が成立する．ここで，式 (2) と (3) を用いた．三角不等式により，上式と式 (1) とから，$n \ge n_0$ のとき

$$
\|f - f_n\| \le \|f - f_\Delta\| + \|f_\Delta - f_n\| < \varepsilon
$$

となり，$g = f_n$ とおけば結論を得る． $\square$

注意． 上の証明で関数 $\phi(t)$ を C^∞ 級に取れば，近似関数 g は C^∞ 級となる．詳細は，教科書の参考文献 [3]，**3.2** 節，定理 **3.3** を参照せよ．