双対問題

山下信雄

講義内容

1. ラグランジュ双対問題
2. 双対問題の性質（双対定理）
3. 双対問題の例（LPとQP）
4. 双対問題の活用例

数理最適化問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, \ell \\
& c_i(x) \le 0,\ i = \ell + 1, \ldots, m \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

以下では

$$F = \left\{ x \in R^n \mid c_i(x) = 0\ (i = 1, \ldots, \ell),\ c_i(x) \le 0\ (i = \ell + 1, \ldots, m) \right\}$$

実行可能領域

$$S = F \cap X$$

双対問題とは

双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \omega(\mu) \\ \text{s.t.} \quad & \mu \in R^m \\ & \mu_i \geq 0 \; (i = \ell+1, \ldots, m) \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, \ell \\ & c_i(x) \leq 0, \; i = \ell+1, \ldots, m \\ & x \in X \end{aligned}$$

元の問題(主問題)を鏡で映したようなもの.

主問題		双対問題
最小化	⇔	最大化
決定変数の数	⇔	制約条件の数
制約条件の数	⇔	決定変数の数

双対問題の望ましい性質

- (弱)双対性：　それぞれの実行可能解 $x,\ \mu$ に対して

$$f(x) \geq \omega(\mu)$$

- (適当な仮定の下)双対問題の双対問題は主問題になる．

例

$$\begin{aligned} \min\ & \sum x_i \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & \langle b, \lambda \rangle \\ \text{s.t.}\ & A^\top \lambda \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & \sum \lambda_i \\ \text{s.t.}\ & \lambda \leq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュの双対問題

ラグランジュ関数:

$$L(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i(x)$$

表示関数：

$$\delta_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in F \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} c_i(x) = 0 \ (i = 1, \ldots, \ell) \\ c_i(x) \le 0 \ (i = \ell + 1, \ldots, m) \end{array} \right\}$$

⇕

$$\delta_F(x) = \sup_{\substack{\mu \in R^m \\ \mu_i \ge 0\ (i=\ell+1,\ldots,m)}} \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i(x) + \sum_{i=\ell+1}^{m} \mu_i c_i(x) \right\}$$

主問題(元の問題)のmin-max表現

$$\min \ f(x) + \delta_F(x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \in X$$

主問題の目的関数

$$f(x) + \delta_F(x) = f(x) + \sup_{\substack{\mu \in R^m \\ \mu_i \geq 0 \ (i=\ell+1,\ldots,m)}} \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i(x) + \sum_{i=\ell+1}^{m} \mu_i c_i(x) \right\}$$

$$= \sup_{\substack{\mu \in R^m \\ \mu_i \geq 0 \ (i=\ell+1,\ldots,m)}} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i(x) + \sum_{i=\ell+1}^{m} \mu_i c_i(x) \right\}$$

$$= \sup_{\substack{\mu \in R^m \\ \mu_i \geq 0 \ (i=\ell+1,\ldots,m)}} L(x, \mu)$$

ラグランジュ双対問題

[主問題]

$$\min_{x \in X} \sup_{\substack{\mu \in R^m \\ \mu_i \geq 0\ (i=\ell+1,\dots,m)}} L(x, \mu)$$

[双対問題]

$$\max \inf_{x \in X} L(x, \mu)$$

$$\text{s. t.} \quad \mu \in R^m$$

$$\mu_i \geq 0\ (i = \ell + 1, \dots, m)$$

講義内容

1. ラグランジュ双対問題
2. 双対問題の性質（双対定理）
3. 双対問題の例（LPとQP）
4. 双対問題の活用例

弱双対定理

双対問題の目的関数(必ず凹関数)：

$$w(\mu) = \inf_{x \in X} L(x, \mu)$$

双対問題の実行可能領域：

$$\Omega = \left\{ \mu \in R^m \mid \mu_i \geq 0 \; (i = \ell + 1, \ldots, m) \right\}$$

弱双対定理

$$f(x) \geq w(\mu) \quad \forall x \in S, \mu \in \Omega$$

⇒　下界値の計算に利用できる

弱双対定理の証明

$x \in S, \mu \in \Omega$ より

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq f(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i(x) + \sum_{i=\ell+1}^{m} \mu_i c_i(x) \\
&= L(x, \mu) \\
&\geq \inf_{x \in X} L(x, \mu) \\
&= w(\mu)
\end{aligned}
$$

$w(\mu)$は凹関数($-w(\mu)$ は凸関数)

任意の $\mu^1, \mu^2 \in R^m, \alpha \in [0,1]$ に対して

$$L(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i(x)$$

$$\begin{aligned}
w(\alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) &= \inf_{x\in X} L(x, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) \\
&= \inf_{x\in X} \left\{\alpha L(x,\mu^1) + (1-\alpha)L(x,\mu^2)\right\} \\
&= \inf_{\substack{x\in X \\ y\in X \\ x=y}} \left\{\alpha L(x,\mu^1) + (1-\alpha)L(y,\mu^2)\right\} \\
&\geq \inf_{\substack{x\in X \\ y\in X}} \left\{\alpha L(x,\mu^1) + (1-\alpha)L(y,\mu^2)\right\} \\
&= \inf_{x\in X} \left\{\alpha L(x,\mu^1)\right\} + \inf_{y\in X} \left\{(1-\alpha)L(y,\mu^2)\right\} \\
&= \alpha w(\mu^1) + (1-\alpha) w(\mu^2)
\end{aligned}$$

主問題が何であれ，双対問題は凸最適化問題

強双対定理

$f, c_i (i = \ell + 1, \ldots, m)$　：凸関数

$c_i \ (i = 1, \ldots, \ell)$　：１次関数

$X = R^n$

適当な制約想定が成り立つ.

主問題に最適解が存在する.

↓

双対問題は最適解をもつ.

主問題と双対問題の最適値は一致する.

強双対定理の証明

主問題の最適解を x^* とする．
仮定より，KKT条件

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla c_i(x^*) = 0 \tag{1}$$

$$c_i(x^*) = 0 \quad (i = 1, \ldots, \ell) \tag{2}$$

$$c_i(x^*) \le 0,\ \mu_i^* \ge 0,\ \mu_i^* c_i(x^*) = 0 \quad (i = \ell + 1, \ldots, m) \tag{3}$$

を満たすラグランジュ乗数 μ^* が存在する．

以下では この μ^* が，双対問題の最適解となることを示す．

KKT条件(3)より，$\mu^* \in \Omega$ である．

また，仮定より，

$$L(x, \mu^*) = f(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i^* c_i(x) + \sum_{i=\ell+1}^{m} \mu_i^* c_i(x)$$

は x に関して凸関数である．

さらに，KKT条件(1)より，

$$\nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0$$

である．

これは x^* が

$$\begin{aligned} &\min\ L(x, \mu^*) \\ &\text{s.t.}\quad x \in R^n \end{aligned}$$

の最適解であることを意味している．

よって,

$$w(\mu^*) = \inf_{x \in R^n} L(x, \mu^*) = L(x^*, \mu^*)$$

さらに，KKT条件(2)と(3)より

$$\begin{aligned} w(\mu^*) &= L(x^*, \mu^*) \\ &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i^* c_i(x^*) + \sum_{i=\ell+1}^{m} \mu_i^* c_i(x^*) \\ &= f(x^*) \end{aligned}$$

弱双対定理 $f(x^*) \geq w(\mu^*)$ より,

μ^* は双対問題の最適解である.

講義内容

1. ラグランジュ双対問題
2. 双対問題の性質（双対定理）
3. 双対問題の例（LPとQP）
4. 双対問題の活用例

双対問題の例：線形計画(LP)

線形計画問題

$$\min c^\top x$$
$$\text{s.t} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} (a^1)^\top \\ (a^2)^\top \\ \vdots \\ (a^m)^\top \end{pmatrix}, \ a^i \in R^n \ (i = 1, \dots, m)$$

$$Ax = b \ \Leftrightarrow (a^i)^\top x - b_i = 0 \ \ (i = 1, \dots, m)$$
$$x \geq 0 \ \Leftrightarrow -x_j \leq 0 \ (j = 1, \dots, n)$$

$$L(x, \mu) = c^\top x + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i ((a^i)^\top x - b_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (-x_j)$$

ただし， $\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \lambda \end{pmatrix}, \ \gamma \in R^m, \lambda \in R^n$

LPの双対問題の目的関数

双対問題の目的関数は

$$
\begin{aligned}
w(\mu) &= \inf_{x\in R^n} L(x,\mu) \\
&= \inf_{x\in R^n}\left\{ c^\top x + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i((a^i)^\top x - b_i) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(-x_j) \right\} \\
&= \inf_{x\in R^n}\left\{ -\sum_{i=1}^{m} b_i\gamma_i + \sum_{j=1}^{n}\left(c_j + \sum_{i=1}^{m} a^i_j\gamma_i - \lambda_j \right) x_j \right\} \\
&= \begin{cases} -\sum_{i=1}^{m} b_i\gamma_i & \text{if} \quad c_j + \sum_{i=1}^{m} a^i_j\gamma_i - \lambda_j = 0 \ (j=1,\ldots,n) \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

LPの双対問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w(\mu) \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_j \geq 0 \; (j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -\sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_j \geq 0 \; (j = 1, \ldots, n) \\
& c_j + \sum_{i=1}^{m} a_j^i \gamma_i - \lambda_j = 0 \; (j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -\sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i \\
\text{s.t.} \quad & c_j + \sum_{i=1}^{m} a_j^i \gamma_i \geq 0 \; (j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

$y_i = -\gamma_i$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
\text{s.t.} \quad & c_j \geq \sum_{i=1}^{m} a_j^i y_i \; (j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

$$
A^\top = \left(a^1 \; a^2 \cdots a^m \right)
$$

$$
A^\top y = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_1^i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_1^i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_n^i y_i \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b^\top y \\
\text{s.t.} \quad & c \geq A^\top y
\end{aligned}
$$

双対問題の例：凸2次計画(QP)

凸2次計画問題

$$\min \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x$$
$$\text{s.t.} \quad (a^i)^\top x - b_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$
$$x \geq 0$$

Qを正定値対称行列とする.

$$L(x, \mu) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i ((a^i)^\top x - b_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (-x_j)$$

ただし，　$\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \lambda \end{pmatrix}, \ \gamma \in R^m, \lambda \in R^n$

QPの双対問題の目的関数

双対問題の目的関数は

$$
\begin{aligned}
w(\mu) &= \inf_{x \in R^n} L(x, \mu) \\
&= \inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i ((a^i)^\top x - b_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (-x_j) \right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i + \inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + \sum_{i=1}^{m} a_j^i \gamma_i - \lambda_j \right) x_j \right\} \\
&= -b^\top \gamma + \inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top x \right\}
\end{aligned}
$$

$\inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top x \right\}$ の計算

$g(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top x$ は凸関数.

最適性の条件： $\nabla g(\bar{x}) = Q\bar{x} + c + A^\top \gamma - \lambda = 0$ より

$$\bar{x} = -Q^{-1}(c + A^\top \gamma - \lambda)$$

よって,

$$\begin{aligned}
&\inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top x \right\} \\
&\quad = \frac{1}{2} \bar{x}^\top Q \bar{x} + \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top \bar{x} \\
&\quad = \frac{1}{2} \left(Q^{-1}(c + A^\top \gamma - \lambda) \right)^\top Q \left(Q^{-1}(c + A^\top \gamma - \lambda) \right) - \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top \left(Q^{-1}(c + A^\top \gamma - \lambda) \right) \\
&\quad = -\frac{1}{2} \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)^\top Q^{-1} \left(c + A^\top \gamma - \lambda \right)
\end{aligned}$$

ＱＰの双対問題

$$\max \quad w(\mu)$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$$

⇩

$$\max \quad -\frac{1}{2}\left(c + A^\top \gamma - \lambda\right)^\top Q^{-1}\left(c + A^\top \gamma - \lambda\right) - b^\top \gamma$$

$$\text{s.t.} \quad \gamma \in R^m, \lambda \geq 0$$

講義内容

1. ラグランジュ双対問題
2. 双対問題の性質（双対定理）
3. 双対問題の例（LPとQP）
4. 双対問題の活用例

双対問題の利用１：感度解析

ラグランジュ双対問題の最適解には経済的な意味がある．

最適値関数

$$\theta(u) = \min\{ f(x) \mid c_i(x) = u_i \ (i = 1, \ldots, \ell),\ c_i(x) \le u_i \ (i = \ell + 1, \ldots, m)\}$$

ラグランジュ双対問題の最適解を $\boldsymbol{\mu}^*$ とする．適当な仮定のもとで

$$\frac{\partial \theta(0)}{\partial u_i} = \mu_i^* \quad (i = 1, \ldots, m)$$

μ_i^* を制約条件の潜在価格(シャドウプライス)という

双対問題の利用２：解法の開発，解析

[解法]

- ラグランジュ緩和 (応用例：オンライン広告, 火力発電計画，etc)

  ⇒　並列化，逐次計算を可能にする.

- サポートベクターマシン
- etc

[解析]

- 乗数法(拡張ラグランジュ法)

  ⇔　双対問題では近接点法

- Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

  ⇔　双対問題ではDouglas-Rachford Splitting

  (近接勾配法みたいなもの)