制約なし最適化に対する最適性の条件

山下信雄

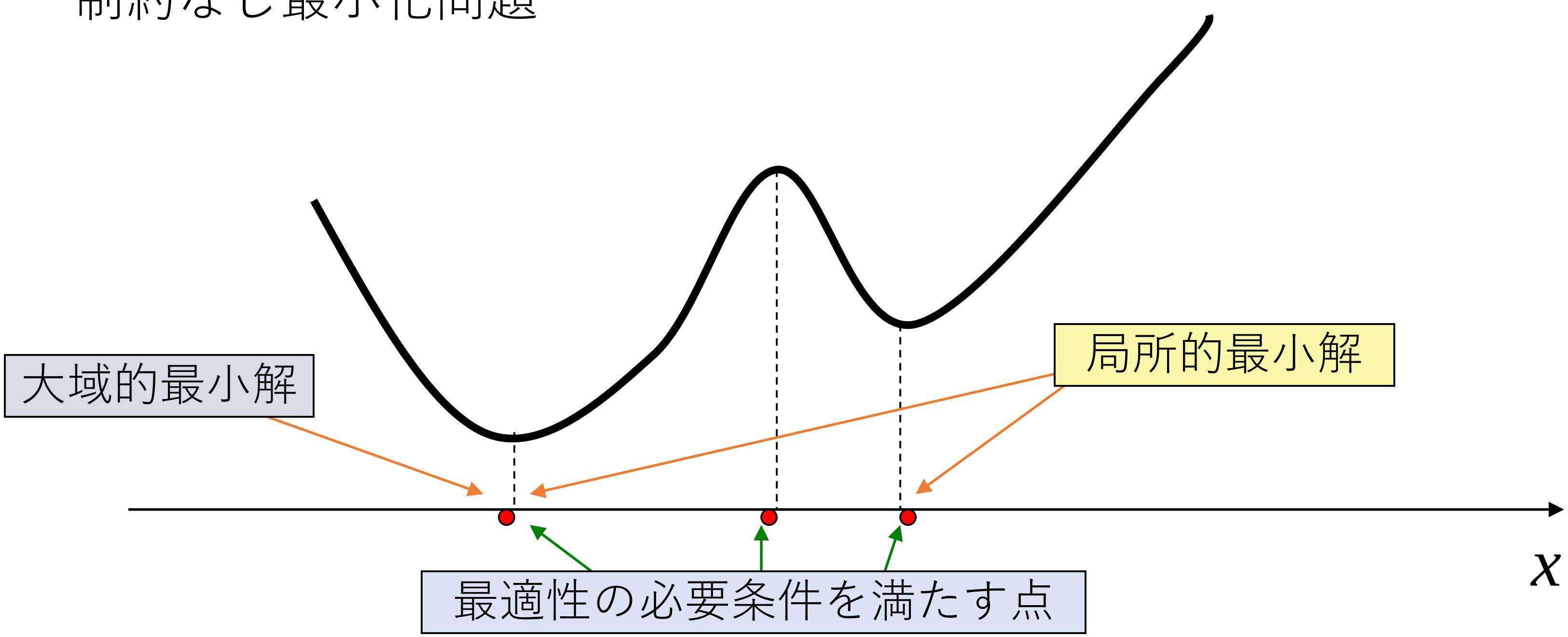
講義内容

1. 最適性の条件
2. 最適性の必要条件
3. 最適性の十分条件

最適性の条件

１点の微分や目的関数値などの情報から、その点が最小解であるかどうかを判別する条件　（例：$f'(x)=0$ ）

制約なし最小化問題



最適性の必要条件と十分条件

x^* は局所的最適解

⇒　「最適性の必要条件」を満たす.

「x^* は最適性の十分条件」を満たす.

⇒　x^* は局所的最適解

最適性の一次の必要条件

制約なし最小化問題

$$\min \ f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \in R^n$$

定理　x^*を制約なし最小化問題の局所的最小解とする.
このとき,　$\nabla f(x^*) = 0$ が成り立つ.

$\nabla f(x^*) = 0$　を最適性の1次の必要条件という.
$\nabla f(x^*) = 0$　を満たすx^*を停留点という.

定理の証明

テーラー展開から

$$f(x^* - t\nabla f(x^*)) = f(x^*) - t\nabla f(x^*)^\top \nabla f(x^*) + o(t)$$

よって，　$t > 0$ に対して

$$\frac{f(x^*) - f(x^* - t\nabla f(x^*))}{t} = \left\| \nabla f(x^*) \right\|^2 - \frac{o(t)}{t}$$

x^* は局所的最小解であるため，　t が十分小さいとき

$$0 \geq \frac{f(x^*) - f(x^* - t\nabla f(x^*))}{t} = \left\| \nabla f(x^*) \right\|^2 - \frac{o(t)}{t}$$

よって，　$0 \geq \left\| \nabla f(x^*) \right\|^2$，つまり $\nabla f(x^*) = 0$ である.

最適性の2次の必要条件

定理　x^*を制約なし最小化問題の局所的最小解とする．
このとき，ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x^*)$ は半正定値行列である．

証明．任意の $d \in R^n$ と $t \neq 0$に対して，

$$f(x^* + td) = f(x^*) + t\nabla f(x^*)^\top d + \frac{t^2}{2} d^\top \nabla^2 f(x^*) d + o(t^2)$$

より，

$$\frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(x^*) d + \frac{o(t^2)}{t^2}$$

x^*は局所的最小解であることから，t^2 が十分小さいとき

$$0 \leq \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(x^*) d + \frac{o(t^2)}{t^2}$$

$t \to 0$ とすると　$0 \leq \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(x^*) d$

最適性の2次の十分条件

定理　x^* は停留点，つまり $\nabla f(x^*) = 0$　とする．
さらに，ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x^*)$ は正定値行列とする．
このとき　x^* は局所的最小解である．

制約なし凸最適化問題に対する最適性の必要十分条件

定理　f を凸関数であるとする.
このとき,　x^* が大域的最小解であることの必要十分条件は
$\nabla f(x^*) = 0$ が成り立つことである.

証明

(必要性)

大域的最適解　$\Rightarrow$　局所的最適解　$\Rightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0$

(十分性)　任意の $x \in R^n$ に対して,

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^\top (x - x^*) = f(x^*)$$