「線形計画」のための「線形代数」

山下信雄

平成 27 年 10 月 2 日

「線形計画」で用いる数学は主に線形代数です．線形代数Ａを履修していれば大丈夫です．ただし，現在は高校では行列を教えていませんので，線形代数を履修しそこねた学生のために,「線形計画」の授業で必要となる線形代数の項目を列挙します．

転置: 縦ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して，それをたおした横ベクトルを $\boldsymbol{c}$ の転置ベクトルといい，$\boldsymbol{c}^\top$ と表す．(教科書によっては $\boldsymbol{c}'$ と表すこともある．)

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^\top = (c_1,\ c_2, \cdots, c_n)$$

一方，横ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対しては，その転置ベクトル $\boldsymbol{d}^\top$ は縦ベクトルとなる．

$$\boldsymbol{d} = (d_1,\ d_2, \cdots, d_n), \quad \boldsymbol{d}^\top = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

次に行列の転置の定義を与える．$m \times n$ 行列 A が与えられているとする (m 行 n 列の行列)．行列 A の (i, j) 成分を $A_{i,j}$ と表すとする．行列 A の縦と横を入れ替えた $n \times m$ 行列を A の転置行列といい，$A^\top$ と表す．(教科書によっては A' と表すこともある．) より正確にいうと，$A^\top$ は，その (i, j) 成分は $A_{j,i}$ となる $n \times m$ 行列である．

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{m,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

なお，縦ベクトル $\boldsymbol{c}$ は $n \times 1$ 行列だと考えることができる．そのとき，その行列に対する転置行列は $1 \times n$ 行列となり，これは $\boldsymbol{c}$ の転置ベクトル $\boldsymbol{c}^\top$ と一致する．つまり，ベクトルの転置は行列の転置の特別な場合である．

練習問題 1 行列 A を以下で定義する 2×4 行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

このとき $A^\top$ を書け．

行列とベクトルの積： n 次元の横ベクトル $\boldsymbol{d}$ と縦ベクトル $\boldsymbol{c}$ の積は

$$\boldsymbol{dc} = d_1c_1 + d_2c_2 + \cdots + d_nc_n = \sum_{i=1}^{n} d_nc_n$$

と表される．縦ベクトル $\boldsymbol{c}$ と縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ の内積は

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_nx_n$$

で表される．ここで，

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} x_nc_n = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{c}$$

となるように，内積では $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{x}$ を入れ替えられることに注意しよう．

次に行列 A と行列 B の積を定義する．行列 A を $m \times n$ 行列，行列 B を $p \times q$ 行列とする．行列の積においては，掛けられる行列 A の列数 n と掛ける行列 B の行数 p が同じでなければならない．そこで，$p = n$ とする．このとき積 AB は $m \times q$ 行列となり，その (i, j) 成分は以下のように与えられる．

$$(AB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} B_{\ell,j}$$

なお，n 次元の横ベクトル $\boldsymbol{d}$ と縦ベクトル $\boldsymbol{c}$ の積は，$1 \times n$ 行列 $\boldsymbol{d}$ と $n \times 1$ 行列 $\boldsymbol{d}$ の積と考えることができ，その積は 1×1 行列，つまりスカラーとなり，上記のベクトルの積と一致する．

また，行列とベクトルの積も同様に定義できる．$m \times n$ 行列 A と n 次元（縦）ベクトル $\boldsymbol{x}$ の積は，$\boldsymbol{x}$ を $n \times 1$ 行列と考えることにより，$m \times 1$ 行列，つまり m 次元縦ベクトルとなる．以下に簡単な例を与えよう．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}$$

となる．逆に，行列 B とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積が具体的に

$$B\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 \end{pmatrix}$$

と与えられているときは，そこから行列 B が

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

となることがわかる．($(2,3)$ 成分が 0 となっていることに注意．)

練習問題 2 いま，$\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{x}$ を *4* 次元 *(縦)* ベクトルとし，その内積が

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = 3x_1 - 2x_2 + x_4$$

と与えらているとする．このとき $\boldsymbol{c}$ を求めよ．

行列とスカラーの積 A を $m \times n$ 行列，α をスカラー (実数) とする．このとき，行列 A とスカラー α の積は

$$\alpha A = A\alpha = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}$$

となる．行列の各成分に α がかかっていることに注意しよう．なお，スカラー α とベクトル $\boldsymbol{x} \in R^n$ の積も

$$\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\alpha = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

となる．

1 次独立 次元が同じベクトルが k 個与えられているとする．それらを $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2, \ldots,$ $\boldsymbol{x}^k$ とする．さらに，k 個の実数 $t_1, t_2, \ldots, t_k$ が存在して，

$$t_1\boldsymbol{x}^1 + t_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + t_k\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとする．(右辺の $\mathbf{0}$ は，各成分が 0 のベクトルである．) このとき，この等式を満たす $t_1, t_2, \ldots, t_k$ で，0 でないものが存在するとき，ベクトル $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2, \ldots,$ $\boldsymbol{x}^k$ は 1 次従属であるという．($t_i \neq 0$ とすると $\boldsymbol{x}^i = -\frac{1}{t_i}\sum_{j\neq i} t_j \boldsymbol{x}^j$ とほかのベクトルで表すことができる．) 一方，上記の等式をみたす $t_1, t_2, \ldots, t_k$ が，唯一 $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$ であるとき，ベクトル $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2, \ldots,$ $\boldsymbol{x}^k$ は 1 次独立であるという．

対角行列と単位行列 行列 A のおいて，行と列の添字が同じ成分 $A_{i,i}$ を対角成分という．対角成分以外はすべて 0 となる行列を対角行列という．対角成分がすべて 1 で，行と列の数が同じを行列を単位行列といい，I と表す．

逆行列 $m \times m$ 行列 B を考える．

$$DB = BD = I$$

となる $m \times m$ 行列 D を B の逆行列といい，B^{-1} と表す．逆行列が存在する行列を正則行列という．単位行列 I は正則行列であり，$I^{-1} = I$ である．なお，正則でない行列が存在することに注意しよう．実際，すべての成分が 0 の行列は，逆行列を持たない．

2×2 の正則行列 A の逆行列 A^{-1} は，以下の公式より簡単にもとまる．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

階数 $m \times n$ 行列 A を考える．いま，行列 A の各列ベクトルを 1 次独立となるように選んできたとき，選ぶことのできる列ベクトルの最大の数を n_1 とする．同様にいま，行列 A の行ベクトル (横ベクトル) を 1 次独立となるように選んできたとき，選ぶことのできる行ベクトルの最大の数を m_1 とする [1]．n_1 と m_1 の大きいほうの数を，行列 A の階数という．行列 A が $m = n$ の正則行列であれば，A の階数は m となる．

部分ベクトル，部分行列 $N \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}_N$ を $x_i, i \in N$ を並べた部分ベクトルとする．例えば，$n = 4, N = \{1, 3\}$ のとき，

$$\boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

である．

$m \times n$ 行列 A に対して，A の i 番目の列ベクトルを A_i と表すことにする．$A_i, i \in N$ ベクトルを並べた $m \times |N|$ 行列を A_N とあらわす [2]．$m = 2, n = 4, N = \{2, 4\}$ の場合は以下のようになる．

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{1,2} \\ A_{2,2} \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} A_{1,2} & A_{1,4} \\ A_{2,2} & A_{2,4} \end{pmatrix}$$

[1] 1 次独立の定義は，横ベクトルにおいても成り立つ

[2] $|N|$ は集合 N の要素数を表している．

練習問題 3 $N_1 = \{3, 4\}$, $N_2 = \{2, 4\}$ とし，

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$A_{N1}^{-1}\boldsymbol{b}$ と $A_{N2}^{-1}\boldsymbol{b}$ を求めよ．