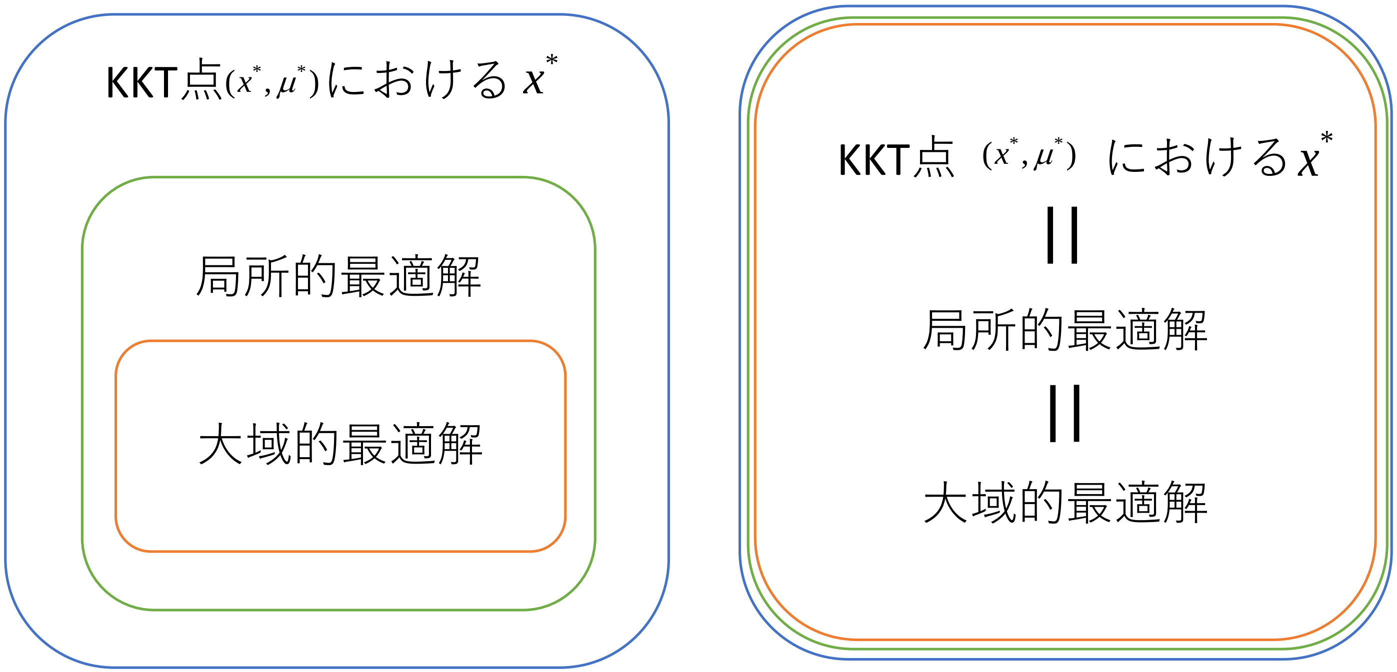
# 最適性の条件
# 補足

山下信雄

# 最適性の条件と最適解

(適当な制約想定が成り立つとする)




一般の連続最適化問題　　　凸最適化問題

# 手計算での凸2次計画問題の解き方

凸2次計画問題

$$\min \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x$$

$$\text{s.t.} \quad (a^i)^\top x + b_i = 0 \; (i = 1, \ldots, \ell)$$

$$(a^i)^\top x + b_i \leq 0 \; (i = \ell + 1, \ldots, m)$$

$Q \in R^{n \times n}$ : 半正定値対称行列

$c \in R^n, a^i \in R^n \; (i = 1, \ldots, n)$

$b_i \in R \; (i = 1, \ldots, n)$

KKT条件

$$Qx + c + \sum_{i=1}^{m} \mu_i a^i = 0$$ 線形方程式

$$(a^i)^\top x + b_i = 0 \; (i = 1, \ldots, \ell)$$ 線形方程式

$$(a^i)^\top x + b_i \leq 0, \;\; \mu_i \geq 0, \;\; \mu_i \left((a^i)^\top x + b_i\right) = 0$$ 非線形方程式

線形不等式

# 「相補性条件」の場合分けによる求解

相補性条件　$\mu_i\left((a^i)^\top x+b_i\right)=0\ (i=\ell+1,\dots,m)$

$\mu_i=0$ または $(a^i)^\top x+b_i=0\ (i=\ell+1,\dots,m)$

注意：

$2^{m-\ell}$

の場合

どちらかの等式に固定すると $m-\ell$ 本の線形方程式

$$Qx+c+\sum_{i=1}^{m}\mu_i a^i=0$$

$$(a^i)^\top x+b_i=0\ (i=1,\dots,\ell)$$

$n+\ell$ 本の線形方程式

変数の数：$n+m$

$(x,\mu)$

方程式の数：$n+m$

線形方程式の解　$(x,\mu)$　が不等式：

$$\mu_i\geq 0,\ \ (a^i)^\top x+b_i\geq 0\ (i=\ell+1,\dots,m)$$

を満たしていたらKKT点

## 例：凸2次計画問題

$$\min\ x_1^2 + x_1x_2 - 8x_1 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 6$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 8x_1 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$c_1(x) = 2x_1 + 3x_2 - 6$$

$$c_2(x) = -x_1$$

$$c_3(x) = -x_2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 8 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla c_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla c_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla c_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

KKT条件：

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 8 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0,\quad \mu_1 \ge 0,\quad (2x_1 + 3x_2 - 6)\mu_1 = 0$$

$$-x_1 \le 0,\quad \mu_2 \ge 0,\quad -x_1\mu_2 = 0$$

$$-x_2 \le 0,\quad \mu_3 \ge 0,\quad -x_2\mu_3 = 0$$

場合は8通りある．変数の数と方程式の数は５．

(1) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ のとき

$$(2x_1 + 3x_2 - 6)\mu_1 = 0$$
$$-x_1\mu_2 = 0$$
$$-x_2\mu_3 = 0$$

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 8 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から， $x_1 = 8, x_2 = -8$

しかし，不等式 $-x_2 \le 0$ を満たさないので不適.

(2) $\mu_1 = \mu_2 = 0, x_2 = 0$ のとき

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 8 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から， $x_1 = 4,\ \mu_3 = 4$

しかし，不等式 $2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0$ を満たさないので不適.

(3) $\mu_1 = \mu_3 = 0,\ x_1 = 0$ のとき

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} x_2 - 8 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2x_1 + 3x_2 - 6)\mu_1 = 0$$
$$-x_1\mu_2 = 0$$
$$-x_2\mu_3 = 0$$

から， $x_2 = 0,\ \mu_2 = -8$

しかし， 不等式 $\mu_2 \geq 0$ を満たさないので不適.

(4) $\mu_2 = \mu_3 = 0,\ 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$ のとき

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 8 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_2 + 3x_2 - 6 = 0$$
$$\frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 8 = 0$$

から， $x_1 = \frac{33}{5},\ x_2 = -\frac{12}{5}$

しかし， 不等式 $-x_2 \leq 0$ を満たさないので不適.

(5) $\mu_1 = 0, x_1 = x_2 = 0$ のとき

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(2x_1 + 3x_2 - 6)\mu_1 = 0 \\ &-x_1\mu_2 = 0 \\ &-x_2\mu_3 = 0 \end{aligned}}$$

から，$\mu_2 = -8, \mu_3 = 0$

しかし，不等式 $\mu_2 \geq 0$ を満たさないので不適.

(6) $\mu_2 = 0,\ 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0, x_2 = 0$ のとき

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 8 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ \mu_1 &= 1 \\ \mu_3 &= 6 \end{aligned}$$

このとき，

$$-x_1 \leq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_3 \geq 0$$

よりKKT条件を満たす. $(x_1^*, x_2^*) = (3,0)$ は最適解

$$(2x_1+3x_2-6)\mu_1=0$$
$$-x_1\mu_2=0$$
$$-x_2\mu_3=0$$

(7) $2x_1+3x_2-6=0,\ x_1=0,\ \mu_3=0$ のとき

KKT条件の第1式より

$$\begin{pmatrix} x_2-8 \\ x_2 \end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1=2$$
$$\mu_1=-\frac{2}{3}$$
$$\mu_2=-\frac{22}{3}$$

しかし，不等式 $\mu_1\geq 0$ を満たさないので不適.

(8) $2x_1+3x_2-6=0,\ x_1=0,\ x_2=0$ のとき

そのような $x$ は存在しないので不適.

# 補足

このような解き方だと，最悪 $2^{m-\ell}$ の場合を考える必要がある．

$\Rightarrow$　指数時間のアルゴリズム．

内点法など，多項式時間のアルゴリズムが存在する．