工業数学 A3　演習問題のヒントと答

2018 年 6 月 28 日版

1. (1) $\displaystyle\sum_{n\neq 0}\frac{iT}{2n\pi}e^{i2n\pi t/T}+\frac{T}{2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^T-1}{T-2n\pi i}e^{i2n\pi t/T}$

2. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(-\frac{i}{2}\right)^n e^{-in\omega t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{i}{2}\right)^n e^{in\omega t}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}e^{-in\omega t}$　(ヒント： $k\in\mathbb{N}$ のとき $\dfrac{1}{z^k(z+\frac{1}{2})}=\dfrac{a_k}{z^n}+\cdots\dfrac{a_1}{z}+\dfrac{b}{(z+\frac{1}{2})}$ とすると，$a_k=2,\dots,a_1=-b=2(-2)^{k-1}$ となる)

3. (1) $\displaystyle\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt$　(2) $\displaystyle\frac{\pi^2}{3}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{2(-1)^{|n|}}{n^2}e^{-int}$

(3) (a) $\dfrac{\pi^2}{12}$　(b) $\dfrac{\pi^2}{6}$

4. (1) 定理 1.13 より $\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N(t)=\sin\mu t$

(2) (1) と同様に，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N(t)=\frac{\sin 2\pi\mu}{2}$

(3) $\mu\in\dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$

5. 必ずしも一様収束しない (例えば，周期 T の連続な周期関数 $f_0(t)$ に対して，$[0,T]$ 上で

$$f(t)=\begin{cases}f_0(t) & (t\neq T/2)\\ f_0(t)+1 & (t=T/2)\end{cases}$$

としたものも同じフーリエ係数をもつことに注意)

6. (1) $\mu\in\mathbb{N}$ のとき $\cos\mu t$，$\mu\notin\mathbb{N}$ のとき

$$\frac{1}{\mu\pi}\sin\mu\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mu}{\pi(\mu^2-\pi^2}(-1)^n\sin\mu\pi\cos nt$$

(2) (a) (1) の $\mu\notin\mathbb{N}$ のときの $t=0$ に対する結果で $\mu=t>0$ とする．$t<0$ に対しては $\sin t$ が奇関数であることを用いる．

(b) $t=\pi$ を代入する．あとは (1) と同様．

7. (1) $t\to t+\pi/a$ と置換積分する．

(2) (1) より

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}f(t)\sin at\,dt\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{a}\right)\Big)\sin at\,dt+O(a^{-1})\end{aligned}$$

が得られ，$a\to\infty$ の極限を取る．

8. (1) $\displaystyle\sigma_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n(t)$

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ を満たすとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して, $n>N$ ならば

$$\left|\frac{a_0+\cdots+a_{n-1}}{n}-a\right|<\varepsilon$$

となる $N>0$ が存在することを示して，次式が成立することを証明する．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}=a$$

(3) (2) と定理 1.14 より $\displaystyle S(t)=\lim_{N\to\infty}\sigma_N(t)=f(t)$

9. $\alpha>1$ のとき

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\sum_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{(x-1)^\alpha}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}<\infty$$

よって，$a>m+1$，すなわち，$a-m>1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^m|c[n]|&\leq C\sum_{n=1}^{\infty}|n|^m(1+|n|)^{-a}\\ &<C\sum_{n=1}^{\infty}|n|^{m-a}<\infty\end{aligned}$$

10. (1) 補題 1.12 を用いる．

(2) 定理 2.2 と定理 2.3 を用いる．

(3) $f'(t)$ のフーリエ係数は $in\omega c[n]$，$f''(t)$ のフーリエ係数は $-n^2\omega^2c[n]$ に与式を代入

11. いわゆる ε–N 論法による数列の極限の定義を思い出す．

(1) C^{m-1} 級であることは定理 2.3 を用いて，C^{m+1} 級でないことは背理法と定理 2.2 を用いて示す．

(2) C^{∞} 級であることは定理 2.4 を用いて，解析的でないことは背理法と定理 2.5 を用いて示す．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)/g(n)=0$ ならば，任意の $n>0$ に対して $Cf(n)>g(n)$ を満たす定数 $C>0$ は存在しないことに注意せよ．

12. 定理 2.3 の証明と同様に，与式が一様収束して項別微分可能であり，項別微分して得られる級数も一様収束することを示す．式 (2.7) が成立すれば，無限回これを繰り返すことが可能である．

13. $u(re^{i\theta})=\dfrac{1-a^2r^2}{1-2ar\cos\theta+a^2r^2}$

14. (1) 置換積分と関数の周期性を用いる

(2) 積分の線形性より明らか

15. (1) $1/(n-k)^2k^3$ を部分分数に展開し，和を求める

$$c[n]=\begin{cases}0 & (n=0)\\ \dfrac{6\zeta(2)}{n^3}-\dfrac{10}{n^5} & (n\neq 0)\end{cases}$$

(2) 定理 2.12 を用いる．T を f, g の周期として

$$c[n] = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \dfrac{T}{n^5} & (n \neq 0) \end{cases}$$

16. フェイエル核 $F_N(t)$ により $\sigma_N = F_N * f$ と書けるので，$F_N(t) \geq 0$ と補題 2.13 (ii) より

$$\sigma_N(t) = \int_0^T F_N(s) f(t-s)\,\mathrm{d}s \leq M \int_0^T F_N(s)\,\mathrm{d}s = M$$

$\sigma_N(t) \geq m$ も同様に示せる．

17. (1) $a > 1$　(2) $a > 1/2$

18. (1) 連続ではあるが，有界でない　(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$
(3) $f \notin L^2(\mathbb{R})$

19. (1) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\xi^2}\sin\left(\dfrac{\xi}{2}\right)$　(2) $-\dfrac{2\sqrt{2}ai\xi}{\sqrt{\pi}(a^2+\xi^2)^2}$
(3) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{b^2-a^2}\left(\dfrac{e^{-a|\xi|}}{2a} - \dfrac{e^{-b|\xi|}}{2b}\right)$　(4) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{sech}\left(\dfrac{\pi\xi}{2}\right)$

20. (1) 連続より $f(0) = \lim_{t\to 0} \sin^2 at/t^2 = a^2$
(2) $f(t)$ は有界で $|f(t)| < 1/|t|^2$ であることから．
(3) $(\mathfrak{F}f)(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{8}}(2a - |\xi|) & (|\xi| \leq 2a) \\ 0 & (|\xi| > 2a) \end{cases}$

21. (1) $|F(t)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^t |f(s)|ds \leq \int_{-\infty}^\infty |f(s)|ds$
(2) 定義より $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ となる．また，$f \in L^1(\mathbb{R})$ より極限 $\alpha = \lim_{t\to\infty} F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(s)ds$ が存在し，$F \in L^1(\mathbb{R})$ より $\alpha = 0$ を得る．
(3) 定理 3.9 を用いる．　(4) 定理 3.6 を用いる．
(5) (4) に注意し，$\hat{F}, \xi\hat{F}$ に定理 3.11 を適用する．

22. (1) $\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1$，$\displaystyle\lim_{h\to-0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$ より，$f(t)$ は $t=0$ で微分不可能である．
(2) 任意の整数 $n \geq 0$ に対して $t^n f \in L^1(\mathbb{R})$ であるから，定理 3.11 が繰り返し適用できる．

23. (1) 帰納法により，任意の自然数 n に対して $f^{(n)}$ が存在して $f^{(n)}(t) = p_n(t)/(t^2+1)^{k+n}$ ($p_n(t)$ はある多項式) と書ける．
(2) $f, tf, \ldots, t^{2(k-1)}f \in L^1(\mathbb{R})$ であることより．

24. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ のとき，

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |f(t)|\,|g(\xi)|dtd\xi < \infty$$

であるから，重積分

$$\begin{aligned}\langle f, \mathfrak{F}^* g\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)\overline{\Big(\int_{-\infty}^\infty g(\xi)e^{it\xi}d\xi\Big)}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\overline{g(\xi)e^{it\xi}}d\xi dt\end{aligned}$$

において積分の順序交換できる．

25. (1) $\dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{\xi}{a}\right)$　(2) $\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)^2$
(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\eta)\overline{\hat{f}(\eta-\xi)}d\eta$

26. 反転公式 (定理 3.5) により $f(t) = (\mathfrak{F}^*\hat{f})(t) = (\mathfrak{F}\hat{f})(-t)$ であり，定理 3.12 より $\lim_{\xi\to\pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$，$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} (\mathfrak{F}\hat{f})(-t) = 0$ となる．

27. $u(x,t) = e^{-t}\cos x$

28. $u(x,y) = e^{-y}\cos x$

29. ラプラス変換，収束座標の順で記す．
(1) $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$，a　(2) $\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$，a
(3) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$，0　(4) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$，$0$　(5) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}e^{-a^2/4s}$，$0$

30. $\mathscr{L}[f](s)$ が $\mathrm{Re}\,s > \gamma$ のとき収束し，$\mathrm{Re}\,s < \gamma$ のとき発散することを示す．

31. (1) $\Phi(t)$ の代わりに $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)dt$ を用いて，定理 4.2 の証明と類似の計算を行う．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな T を取れば $\dfrac{1}{T}\log|F(T)| < \lambda + \varepsilon$ とできることに注意する．
(2) $\mathscr{L}[f](s)$ は $s=0$ で発散することに注意して，定理 4.2(ii) を用いる．
(3) 補題 4.6 より，ある $M > 0$ に対して $|F(t)| \leq Me^{(\mathrm{Re}\,s_0)t}$ と書け，λ を評価する．
(4) (1) と (3) の結果を用いる．

32. (1) $\mathscr{L}(f)(s_0)$ が絶対収束するならば，$\mathrm{Re}\,s > \mathrm{Re}\,s_0$ のとき $\mathscr{L}(f)(s)$ も絶対収束し，$\mathscr{L}(f)(s_0)$ が絶対収束しないならば，$\mathrm{Re}\,s < \mathrm{Re}\,s_0$ のとき $\mathscr{L}(f)(s)$ も絶対収束しないことを示す．
(2) $\mathrm{Re}\,s > \sigma_a$ ならば，$\mathscr{L}(f)(s)$ は絶対収束し，よって収束する．

33. (1) $\sigma_c = 0$，$\sigma_a = 1$　(2) $\sigma_c = 0$，$\sigma_a = \infty$
ヒント: $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx, \int_e^\infty \frac{|\sin x|}{(\log x)^s}dx = \infty$$

であるが，$s > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}dx, \int_e^\infty \frac{\sin x}{(\log x)^s}dx$$

は収束する (なぜか) ことに注意する．