第１３回：１月６日（水）

13　第１３回

離散最適化問題は適当な変数と線形制約を用意すれば整数計画問題として定式化することができる．ただし，整数計画問題への定式化の仕方は一通りとは限らない．また，整数計画問題とその整数変数を連続変数に緩和することで得られる線形計画問題とは最適解が通常異なる．今回の講義では，緩和線形計画問題の双対性が整数計画問題とどのようにかかわるかについて勉強する．

13.1　最小節点カバー問題

グラフ $G = (V, E)$ の点の部分集合 $C \subseteq V$ は G のすべての枝を被覆する（枝の端点の少なくとも一つを含む）とき G の節点カバー (vertex cover) と呼ぶ．

最小節点カバー問題
入力: 無向グラフ $G = (V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\})$.
出力: G の節点カバー $C \subseteq V$ の中でサイズ $\|C\|$ を最小にするもの.

第 9 回でグラフの最大独立点集合問題について触れたが，定義から，点の部分集合 $C \subseteq V$ が節点カバーであることと $V \setminus C$ が独立点集合であることは等価である．最小節点カバー問題は，最大独立点集合問題と本質的に同じ問題であり，これも NP-完全問題である．スライド 2 にグラフ $G = (V, E)$ と節点カバー C の例を示す．

最小節点カバー問題の整数計画問題 $\mathbf{IP}_{\mathrm{VC}}$

最小節点カバー問題を整数計画問題として定式化してみよう．グラフの各点 $v_i \in V$ に対して 0,1-変数 $y_i \in \{0, 1\}$ を用意し，$y_i = 1$ のとき点 v_i を節点カバー C に用いる，$y_i = 0$ のとき点 v_i を節点カバー C に用いないと設定する．目的関数は $\sum_{v_i \in V} y_i$ となり，これを最小化することが目的となる．後は，$y_i = 1$ である点 v_i の集合 C が正しい節点カバーとなるように線形の制約を導入するだけである．点の部分集合 C が節点カバーであるためには，グラフのどの枝 $e_j = v_k v_\ell$ に対しても $v_k \in C$ あるいは $v_\ell \in C$ でなければならない．よって

$$\text{各枝 } e_j = v_k v_\ell \text{ に対し } y_k + y_\ell \geq 1$$

という不等式を用意すればよい．この整数計画問題を $\mathrm{IP}_{\mathrm{VC}}$ と記す．

スライド 2 のグラフ G の例に対して最小節点カバー問題に対する整数計画問題 $\mathrm{IP}_{\mathrm{VC}}$ を示す．不等式制約を与えている行列が見えるように書いてある．この 0,1-行列は点と枝の接続関係を表す接続行列である．

$\mathbf{IP}_{\mathrm{VC}}$ の緩和線形計画問題 $\mathbf{LP}_{\mathrm{VC}}$

さて，最小節点カバー問題に対する整数計画問題 $\mathrm{IP}_{\mathrm{VC}}$ の整数変数 $y_i \in \{0,1\}$ を 0 と 1 の間の実数値も取ることを許した問題は線形計画問題である．整数変数 $y_i \in \{0,1\}$ を連続変数 $y_i \geq 0$ に置き換えた問題を緩和線形計画問題 $\mathrm{LP}_{\mathrm{VC}}$ と呼ぶ．ここで，$y_i \leq 1$ なる制約は不要である．$y_i > 1$ であるような実行可能解は目的関数を最小にしないので．

スライド 3 にスライド 2 の整数計画問題 $\mathrm{IP}_{\mathrm{VC}}$ の緩和線形計画問題 $\mathrm{LP}_{\mathrm{VC}}$ を示す．

13.2　線形計画問題と双対性

スライド 4 を使って線形計画問題の双対性について簡単に復習しておく．目的関数にマイナスをかけるだけで最小化問題，最大化問題は入れ替わる．線形制約についても左辺を変数の一次式，右辺を定数項にしておけば，マイナスをかければ，定数項以下という形の式と定数項以上という形の式を入れ替えることができる．全ての変数は非負とし，目的関数を最大にする場合には，線形制約は定数項以下という形の式とし，目的関数を最小にする場合には，線形制約は定数項以上という形の式としたものが標準形である（非負制約のかかっていない変数があれば二つの非負変数に置き換えて，すべての変数を非負とする）．

標準形の最大化（最小化）線形計画問題 P には双対問題と呼ばれる標準形の最小化（最大化）線形計画問題 D が定義できる．P の各変数に対して D の制約 1 本を用意し，P の各制約に対して D の変数 1 個を用意する．P に使われている制約行列 A を９０度回転させて使った線形計画問題である．スライド 4 では，主問題 P として標準形の最大化線形計画問題の例とその双対問題 D が与えられている．

双対問題を定義する前に，なぜ線形制約の不等式の向きや変数の非負性を揃えておくかというと，弱双対定理を手に入れたいためである．弱双対定理とは，主問題（最大化）の実行可能解 x，双対問題（最小化）の実行可能解 y に対し，x の主問題における目的関数値は y の双対問題における目的関数値以下になるという性質である．スライド 4 の例では，両実行可能解 x, y に対して，$x_1 + 2x_2 \leq 3y_1 + 6y_2 + 4y_3$ が成り立つ．弱双対定理の証明は容易である．主問題の目的関数 $x_1 + 2x_2$ の係数 $(1, 2)$ は双対問題の制約式の右辺定数項であるので，これら定数項を左辺の y の一次式に置き換える．この際，x は非負であるので，置き換えた式は小さくならない．次に置き換えた式を y について整理すると，各変数 y_i にかかっている x の一次式は主問題の制約式の左辺として現れるので，対応する制約式の右辺定数項に置き換える．ここでも，y は非負であるので，置き換えた式は小さくならない．置き換えた式は双対問題の目的関数 $3y_1 + 6y_2 + 4y_3$ である．弱双対定理の証明は易しいが，実行可能解が最適解からどのくらい離れているかを推定することに使える．例えば，スライド 4 の例で，主問題 P の実行可能解として $x = (2, 1)$ を選ぶとその目的関数値は $x_1 + 2x_2 = 4$ である．これだけでは最適値からどの程度離れているのか分からないが，双対問題 D の実行可能解 y を適当に選び，例えば，$y = (0, 1, 0)$，その目的関数値は $3y_1 + 6y_2 + 4y_3 = 6$ となる．このことから $x = (2, 1)$ の目的関数値 4 は最適値からは高々$6 - 4 = 2$ しか離れていないことが分かる．

もし，主問題 P の実行可能解 x の目的関数値と双対問題 D の実行可能解 y のそれが同じ値になれば，両者はそれぞれの問題の最適解となる．しかし，弱双対定理はそのような実行可能解の組 (x, y) が存在することは何も保証していない．

これを保証するのが強双対定理である．強双対定理の証明は難しい．シンプレックス法などで実際に主問題 P の最適解を正しく構築することを証明し，最適解が得られたときには，相補性原理などを使って双対問題 D の実行可能解 y で同じ目的関数値をもつものが構築できることを示す必要がある．

$\mathrm{LP}_{\mathrm{VC}}$ の双対問題 LP_{M}

線形計画問題の双対性について復習を終えたところで最小節点カバー問題へ戻ろう．緩和線形計画問題 $\mathrm{LP}_{\mathrm{VC}}$ の双対問題をスライド 5 に示す．この双対問題を LP_{M} と記す．ここではスライド３の制約の行列をそのまま残し，変数，制約の配置の仕方を９０度回転させて示してある．$\mathrm{LP}_{\mathrm{VC}}$ では点に対して変数，枝に対して制約が用意されていたが，今度は，これらが入れ替わるので，点に対して制約，枝 e_i に対して非負変数 x_i が用意される．点 v_i に対する制約は，v_i に接続する枝 e_j の変数 x_j の和が 1 以下と読める．例えば，グラフの例で点 v_4 には枝 e_2, e_3, e_5 が接続しているが，これらの変数には $x_2 + x_3 + x_5 \leq 1$ が課されている．非負変数 x_i はこれらの線形制約のため 1 より大きな値は取ることができないので，実質 $0 \leq x_i \leq 1$ が成り立っている．

LP_{M} の整数計画問題 IP_{M}

最後に，双対問題 LP_{M} の連続変数 x_i を 0,1-変数 $x_i \in \{0, 1\}$ とみなして得られる整数計画問題を IP_{M} としよう．スライド 5 の双対問題 LP_{M} から得られる整数計画問題を IP_{M} をスライド 6 に示す．0,1-変数 $x_i \in \{0, 1\}$ の意味として，$x_i = 1$ のとき枝 e_i を用いる，$x_i = 0$ のとき枝 e_i を用いないと解釈し，$x_i = 1$ である枝 e_i からなる枝集合 $M \subseteq E$ について考える．点 v_i に接続する枝 e_j の変数 x_j の和が 1 以下であることから，どの点にも M の枝は高々 1 本しか接続していないことになる．このような制限を満たす枝の選び方はマッチングと呼ばれる．

13.3　グラフのマッチング問題

グラフ $G = (V, E)$ の枝の部分集合 $M \subseteq E$ は M が独立である（M のどの 2 本の枝も端点を共有しない）とき G のマッチング (matching) と呼ぶ．枝の部分集合 $F \subseteq E$ の端点の集合を $V(F)$ と記す．つまり，$V(F) \triangleq \{u, v \mid uv \in F\}$.

> 最大マッチング問題
> **入力:** 無向グラフ $G = (V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\})$.
> **出力:** G のマッチング $M \subseteq E$ の中でサイズ $|M|$ を最大にするもの.

最小節点カバー問題から出発し，途中で線形計画問題の双対問題を介して作られた整数計画問題を $\mathrm{IP_M}$ は，離散最適化問題の一つである最大マッチング問題であることが判明した．離散最適化問題の中には緩和線形計画問題を仲立ちとして，ある種の双対の関係になっていると解釈できるものがある．最大 s,t-パス問題と最小 s,t-カット問題もこのような例の一つである．

13.4 四つの問題の関係

問題 $\mathrm{IP_{VC}}$ あるいは $\mathrm{LP_{VC}}$ の実行可能解 y の目的関数の値を $f(y)$ と記し，$\mathrm{IP_{VC}}$, $\mathrm{LP_{VC}}$ の最適解のひとつをそれぞれ $y^*_{\mathrm{IP:VC}}$, $y^*_{\mathrm{LP:VC}}$ と記す．同様に，問題 $\mathrm{LP_M}$ あるいは $\mathrm{IP_M}$ の実行可能解 x の目的関数の値を $g(x)$ と記し，$\mathrm{LP_M}$, $\mathrm{IP_M}$ の最適解のひとつをそれぞれ $x^*_{\mathrm{LP:M}}$, $x^*_{\mathrm{IP:M}}$ と記す．

主問題 $\mathrm{LP_{VC}}$ の任意の実行可能解 y_{LP} と双対問題 $\mathrm{LP_M}$ の任意の実行可能解 x_{LP} に対して，線形計画問題の弱双対定理から

$$f(y_{\mathrm{LP}}) \geq g(x_{\mathrm{LP}})$$

が成り立つ．さらに強双対定理から最適解に対しては

$$f(y_{\mathrm{LP}}) \geq f(y^*_{\mathrm{LP:VC}}) = g(x^*_{\mathrm{LP:M}}) \geq g(x_{\mathrm{LP}})$$

が成り立つ．

$\mathrm{IP_{VC}}$ の実行可能領域は $\mathrm{LP_{VC}}$ の実行可能領域に含まれるので，同じ目的関数 $f(x)$ を最小にする場合には広い実行可能領域を使うほうがより小さい値が取れる可能性がある．よって，

$$f(y^*_{\mathrm{IP:VC}}) \geq f(y^*_{\mathrm{LP:VC}})$$

が成り立つ．

同様に，$\mathrm{LP_M}$ の実行可能領域は $\mathrm{IP_M}$ の実行可能領域より広いので

$$g(x^*_{\mathrm{LP:M}}) \geq g(x^*_{\mathrm{IP:M}})$$

が成り立つ．

以上の不等式から最小節点カバー問題 $\mathrm{IP_{VC}}$ の任意の実行可能解 y_{IP} と最大マッチング問題 $\mathrm{LP_M}$ の任意の実行可能解 x_{IP} に対して，次を得る．

$$f(y_{\mathrm{IP:VC}}) \geq f(y^*_{\mathrm{IP:VC}}) \geq f(y^*_{\mathrm{LP:VC}}) = g(x^*_{\mathrm{LP:M}}) \geq g(x^*_{\mathrm{IP:M}}) \geq g(x_{\mathrm{IP:M}}). \tag{10}$$

ここで，整数計画問題 $\mathrm{IP_{VC}}$ と $\mathrm{IP_M}$ の最適値 $f(y^*_{\mathrm{IP:VC}})$ と $g(x^*_{\mathrm{IP:M}})$ は

$$f(y^*_{\mathrm{IP:VC}}) \geq g(x^*_{\mathrm{IP:M}})$$

を満たすので弱双対性が成り立つと言えるが，必ずしも両者の値は一致するとは限らない．

スライド 7 にグラフ $G = (V, E)$ の例と対応する四つの問題 $\mathrm{IP_{VC}}$, $\mathrm{LP_{VC}}$, $\mathrm{LP_M}$, $\mathrm{IP_M}$ に対する最適解を示してある．これらの最適値は以下の通りである．

$$3 = f(y^*_{\mathrm{IP:VC}}) > f(y^*_{\mathrm{LP:VC}}) = 2.5 = g(x^*_{\mathrm{LP:M}}) > g(x^*_{\mathrm{IP:M}}) = 2.$$

最小節点カバー問題の例題の最適値とその双対問題にあたる最大マッチング問題の例題の最適値が一致していない．

【課題１３－１】スライド８にグラフの例を示してある．スライド７にならって，最小節点カバー問題の整数計画問題 $\mathrm{IP_{VC}}$，緩和線形計画問題 $\mathrm{LP_{VC}}$，双対問題 $\mathrm{LP_M}$，$\mathrm{LP_M}$ の整数計画問題 $\mathrm{IP_M}$ を書き出し，それぞれの最適解を求めよ．

最小節点カバー問題に限らず，二つの離散最適化問題が緩和した線形計画問題を介して，主問題，双対問題の関係であるとき，弱双対性が成り立っても，強双対性は成り立たないことがある．主問題の最適値と双対問題の最適値の違いを双対ギャップ (duality gap) という．少し端的に言えば，強双対性が成り立つような離散最適化問題の対は多項式時間で解け，双対ギャップがある場合には NP-困難となることがほとんどである．

例えば，最大 s,t-パス問題と最大 s,t-カット問題の場合には双対ギャップを持たない主・双対の整数計画問題として定式化することができ，実際に，両者を同時に解く多項式時間が存在する．後で証明するように，グラフが二部グラフであれば，最小節点カバー問題と最大マッチング問題の双対ギャップがなくなることも知られている．

グラフが一般の場合には，最小節点カバー問題と最大マッチング問題は双対ギャップを持ち，両者を同時に解くような多項式時間アルゴリズムは知られていない．最小節点カバー問題はグラフが一般の場合に NP-困難であるが，最大マッチング問題はグラフが一般の場合でも多項式時間で解くことができる．離散最適化問題の整数計画問題への定式化は一意とは限らないことを思い出してもらいたい．実は，最大マッチング問題には閉路に関する条件を基本とした別の整数計画問題への定式化があり，この場合，緩和した線形計画問題でも同じ最適解を持つという良い性質がある．この議論については，最小木問題を使って次回の講義で勉強する．

13.5　最小節点カバー問題と最大マッチング問題との双対ギャップ

最小節点カバー問題と最大マッチング問題との双対ギャップがどれだけ大きくなりえるのか調べてみる．スライド７のグラフの例では最小節点カバー問題と最大マッチング問題の最適値の差は 1 である．差としての双対ギャップはせいぜい 1 であろうか．そうはならないことはすぐ分かる．スライド７のグラフを k 個用意したものがグラフの例だとすれば差としての双対ギャップは k となるので，いくらでも大きくできる．

では，最大マッチング問題の最適値を最小節点カバー問題の最適値で割ったときの比としての双対ギャップはどうであろうか．スライド７のグラフの例では $3 = f(y^*_{\mathrm{IP:VC}})$, $g(x^*_{\mathrm{IP:M}}) = 2$ であったので，この場合の比としての双対ギャップは 1.5 である．比としての双対ギャップは２以下であることを示そう．　M^* を最大マッチングとする．残りの枝 $e \in E \setminus M^*$ は M^* のどれかの枝と隣接しているので，M^* の枝の両端点の集合 $V(M^*)$ はグラフ G の節点カバーとなっている．よって，$|C^*| \le |V(M^*)|$ が成り立つ．最大マッチング問題の最適値 $|M^*|$ と最小節点カバー問題の最適値 $|C^*|$ の比をとると $f(y^*_{\mathrm{IP:VC}})/g(x^*_{\mathrm{IP:M}}) = |C^*|/|M^*| \le |V(M^*)|/|M^*| = 2$ が成り立つ．

13.6 最小節点カバー問題に対する２-近似解

最大（極大）マッチング M^* の端点の集合 $V(M^*)$ が節点カバーとなることを利用すると最小節点カバー問題に対する近似アルゴリズムが設計できる[10].

グラフ $G=(V,E)$ のマッチング $M \subseteq E$ はどの残りの枝 $e \in E \setminus M$ を加えても $M \cup \{e\}$ がマッチングにならないとき極大と呼ぶ．グラフ $G=(V,E)$ の極大マッチング $M \subseteq E$ は簡単に得られる．$G' := G$, $M := \emptyset$ から始め，以下を G' に枝が無くなるまで繰り返せばよい．

グラフ G' の任意の枝 e を選び，$M := M \cup \{e\}$ とし，

グラフ G' から e とこの枝 e に隣接している枝を除いたグラフを G' とする．

このようにして選んだ枝の集合 M はマッチングであり，極大である．スライド９のグラフの例に対する極大マッチング M の選択例をスライド１０に示す．

定理 1. グラフ $G=(V,E)$ の極大マッチング $M \subseteq E$ の両端点の集合 $V(M)$ は最小節点カバー問題の *2*-近似解である．

証明.

1. 極大マッチング $M \subseteq E$ では，残りの枝 $e \in E \setminus M$ が M のどれかの枝と隣接しているので，M の枝の両端点の集合 $V(M)$ はグラフ G の節点カバーとなっている．
2. 不等式 (10) より最小節点カバー C^* の大きさは少なくとも $|M|$ である.（これは次のように考えても導ける．マッチング M のどの２本の枝も端点を共有していないので，M のすべて枝を被覆するするには，M の枝１本につき１個の点が必要である.）

M の枝の両端点の集合 $V(M)$ は節点カバーであり，その大きさは $|V(M)| = 2|M|$ である．2 より，最小節点カバー C^* に対して，$|C^*| \geq |M|$ であるので，節点カバー $V(M)$ の大きさは $|V(M)| = 2|M| \leq 2|C^*|$ であり，2-近似解であることが分かる.（証明終）

スライド１０の例では，極大マッチング $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ に対し，$V(M) = \{v_1, v_{14}, v_3, v_5, v_{12}, v_{18}, v_7, v_9\}$ が節点カバーであり，これが 2-近似解である．

13.7 二部グラフにおける最小節点カバー問題と最大マッチング問題

二部グラフでは，最小節点カバーのサイズと最大マッチングのサイズが一致することを示す．

最初に，最大 s,t-パス問題と最小 s,t-カット問題について復習しておく．有向グラフ $H=(N,A)$ と始点 $s \in N$, 終点 $t \in N$ が与えられたとき，点 s から点 t へ至る有向パスを s,t-パスと呼ぶ．有向グラフ H の複数本の s,t-パスの集合 F を選ぶときは，F のどの２本の s,t-パスも H の枝を共有しないものとする．

[10] k-近似の意味は第１１回の講義ノートを参照のこと．

> 最大 s,t-パス問題
> **入力:** 有向グラフ $H=(N,A)$ と始点 $s\in N$, 終点 $t\in N$.
> **出力:** 本数を最大にする s,t-パスの集合 F.

有向グラフ $H=(N,A)$ において始点 s を含み， 終点 t を含まない点の部分集合 $S\subseteq N\setminus\{t\}$ $(s\in S)$ を選び，S から残りの点集合 $T=N\setminus S$ へ向かう枝の集合 $E(S,T)$ を s,t-カットと定め，そのサイズを s,t-カットの枝の本数 $|E(S,T)|$ と定める．

> 最小 s,t-カット問題
> **入力:** 有向グラフ $H=(N,A)$ と始点 $s\in N$, 終点 $t\in N$.
> **出力:** サイズを最小にする s,t-カット $E(S,T)$.

このとき，以下の強双対性が成り立つ．

定理 2. 有向グラフの $H=(N,A)$ において，最大本数の s,t-パスの集合 F と最小サイズの s,t-カット $E(S,T)$ は $|F|=|E(S,T)|$ を満たす．

これはグラフ理論では Menger の定理として知られているが，ネットワーク最適化では最大フロー問題において枝容量を 1 とした場合の最大フロー最小カット定理のことである．

定理 3. 二部グラフ $G=(V,E)$ に対しては，最小節点カバー問題の最適値と最大マッチング問題の最適値は等しい．

証明. 二部グラフ $G=(V,E)$ は V の二分割 V_1,V_2 があり，グラフの枝は V_1 と V_2 の間に存在する．一般性を失わず $|V_1|\le|V_2|$ とする．

グラフの変形を利用した問題変換により，最大マッチング問題の例題は最大 s,t-パス問題の例題に，最小節点カバー問題の例題は最小 s,t-カット問題の例題に移す．

まず，二部グラフ $G=(V=V_1\cup V_2,E)$ をどの枝も V_1 から V_2 へ向きがついた有向グラフをみなし，新しい 2 点 s,t をつけ加え，s から V_1 の各点 u へ有向枝 (s,u) を加え，V_2 の各点 v から t へ有向枝 (v,t) を加える．このようにして得られた有向グラフを $H=(N=V\cup\{s,t\},A=E\cup\{(s,u)\mid u\in V_1\}\cup\{(v,t)\mid v\in V_2\})$ とする．スライド１１参照．

最初に，二部グラフ G のマッチングと有向グラフ H の s,t-パス集合の間の対応を与える．二部グラフ G のマッチング M に対して，H において M の各枝 e に s, t につながる枝を足すことで，s,t-パス P_e を作ると，これらの s,t-パスは互いに枝を共有しない．よって，$F\cap E=M$ である s,t-パスの集合 F が得られる．スライド１２参照．逆に，有向グラフ H の s,t-パスの集合 F に対して，F の s,t-パスは互いに枝を共有しないので，枝集合 $F\cap E$ は二部グラフ G においてマッチングとなっている．以上から，二部グラフ G のマッチング M と有向グラフ H の s,t-パスの集合 F との間に一対一の対応が得られた．

次に，二部グラフ G の最小サイズ節点カバーと有向グラフ H の最小サイズ s,t-カットとの間の対応付けを与える．

C^* を二部グラフ G の最小サイズ節点カバーとする．二部グラフ G においては，$C = V_1$ や $C = V_2$ は明らかに節点カバーである．また，$|V_1| \le |V_2|$ の仮定から $C^* = V_1$ の節点カバーの選択を残しておけば，$C^* = V_2$ の選択は不要であるので，$C^* = V_2$ は使わないものとする．以上から C^* は以下を満たすとする．

$$(C^* = V_1) \text{ あるいは } (V_1 \setminus C^* \neq \emptyset \text{ かつ } V_2 \setminus C^* \neq \emptyset).$$

最小サイズ節点カバー C^* から有向グラフ H における s,t-カット $E(S^*, T^*)$ を以下のように作る．点集合 S^* は，始点 s，C^* に含まれない V_1 の点，C^* に含まれる V_2 の点からなる点集合とする．すなわち，$S^* = \{s\} \cup (V_1 \setminus C^*) \cup (V_2 \cap C^*)$．スライド１３参照．ここで，点 $u \in V_1 \cap S^*$ から $v \in V_2 \setminus S^*$ への枝 (u, v) があれば，C^* が G において枝 uv を被覆していなかったこととなり，C^* が節点カバーであることに反する．よって，$E(S^*, T^*) \cap E(V_1, V_2) = \emptyset$，すなわち

$$E(S^*, T^*) = \{(s, u) \mid u \in V_1 \setminus S^*\} \cup \{(v, t) \mid v \in V_2 \cap S^*\}$$

である．このとき，$|E(S^*, T^*)| = |V_1 \cap C^*| + |V_2 \cap C^*| = |C^*|$ が成り立つので，$E(S^*, T^*)$ はサイズが $|C^*|$ に等しい s,t-カットである．

今度は逆に，$E(S^*, T^*)$ を有向グラフ H における最小サイズ s,t-カットとする．このとき，$E(S^*, T^*)$ が点 $u \in V_1 \cap S^*$ から $v \in V_2 \setminus S^*$ への枝 (u, v) をもてば，この点を S^* に含めた s,t-カット $E(S^* \cup \{v\}, T^* \setminus \{v\})$ は枝 (u, v) の代わりに高々 1 本の枝 (v, t) が加わるだけであるので，$|E(S^*, T^*)| \ge |E(S^* \cup \{v\}, T^* \setminus \{v\})|$．よって，$E(S^* \cup \{v\}, T^* \setminus \{v\})$ も最小サイズ s,t-カットである．以下では，$E(S^*, T^*) \cap E(V_1, V_2) = \emptyset$，すなわち

$$E(S^*, T^*) = \{(s, u) \mid u \in V_1 \setminus S^*\} \cup \{(v, t) \mid v \in V_2 \cap S^*\}$$

が成り立つとする．ここで，$C^* = (V_1 \setminus S^*) \cup (V_2 \cap S^*)$ とすると，$|C^*| = |E(S^*, T^*)|$．もし C^* が二部グラフ G の節点カバーでないとすると，$u \in V_1 \cap S^*$, $v \in V_2 \setminus S^*$ である枝 $uv \in E$ が存在することになるが，これは $E(S^*, T^*) \cap E(V_1, V_2) = \emptyset$ に反する．スライド１３参照．よって，C^* はサイズが $|E(S^*, T^*)|$ に等しい G の節点カバーである．

以上から，G のマッチングの最大サイズは H の s,t-パスの最大本数と等しく，G の節点カバーの最小サイズは H の s,t-カットの最大サイズと等しいことが分かった．定理 2 より，有向グラフ H において，s,t-パスの最大本数と s,t-カットの最大サイズは等しいので，二部グラフ G においては，マッチングの最大サイズと節点カバーの最小サイズは等しいことが示された．（証明終）

第１３回の講義は以上である．