6.5 最終確認問題11-15的解答

問題 11

1. 乘法原理也可以運用於機率，所以答案是 $(1/2)^8 =$ **1/256**。

2. 首先，某個格子變成白色或黑色的機率都是 1/2，因此：

   - 白色圓點的期望值：$64 \times (1/2) = 32$
   - 黑色圓點的期望值：$64 \times (1/2) = 32$

   根據期望值的線性性質（**→3.4.3項**）），[白色個數的期望值] × 2 + [黑色個數的期望值] ＝ $32 \times 2 + 32 =$ **96**。

3. 根據期望值的線性性質，所求的答案以下式表示：

   [答案] = [第 1 行全部變白的機率] + ... + [第 8 行全部變白的機率]
   + [第 1 列全部變白的機率] + ... + [第 8 列全部變白的機率]
   + [第 1 條對角線全部變白的機率]
   + [第 2 條對角線全部變白的機率]

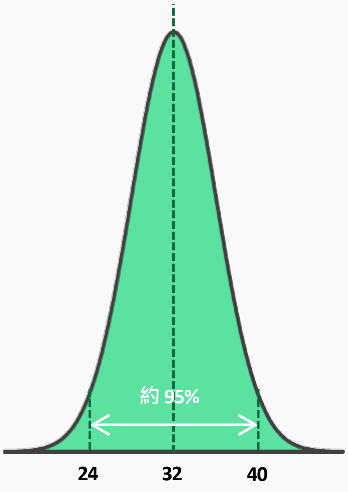
   所有的行、列、對角線都由 8 個格子構成，因此它們全部變白的機率是 $(1/2)^8 = 1/256$。因此，答案 $1/256 + 1/256 + \cdots + 1/256 = 18 \times (1/256) =$ **9/128**。

4. 各個格子變白的機率是 $p = 0.5$，格子數全部有 $n = 64$ 個，因此白色格子的個數近似於正態分布（**→節末問題 3.5.1**）。。

   平均 μ：$np = 64 \times 0.5 = 32$

   標準偏差 σ：$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{64 \times 0.5 \times 0.5} = 4$

   因此，$\mu - 2\sigma = 24$，$\mu + 2\sigma = 40$，根據 68-95-99.7 法則，白色格子數在 24 ~ 40 個之間的機率為**約 95%**。（參見右圖）



問題 12

考慮「不包含 123 的數的數量」很難，因此我們考慮相當於其餘事件（**→5.4.1項**）的「包含 123 的數的數量」。。

首先，包含 123 且為 999999 以下的數中，有以下 4 種模式。為了減少區別，將 5 位以下的數的前面用 0 填充（例如 1237 → 001237）。

1	2	3	4
1 2 3 ? ? ?	? 1 2 3 ? ?	? ? 1 2 3 ?	? ? ? 1 2 3
決定後三位數 故1000 種（僅123）	決定三個位數 故1000 種（僅123）	決定三個位數 故1000 種（僅123）	決定三個位數 故1000 種（僅123）

針對所有模式，三個位數可在 0 ~ 9 的範圍內自由選擇，根據乘法原理（**→3.3.2項**），有 $10 \times 10 \times 10 = 1000$ 種情況。因此，可能會認為「包含 123 的數全部有 4000 個」。

但是，像 123123 這樣的數在情況 1 和 4 中均被計入，因此實際數量為 $4000 - 1 =$ 3999 個。

1	2	3	4
1 2 3 1 2 3	? 1 2 3 ? ?	? ? 1 2 3 ?	1 2 3 1 2 3

因此，「包含 123 的數的數量」為全體的模式數 999999 減掉「包含 123 的數的數量（3999 個）」的值，即 **996000 個**。

問題 13

令函數 `func(N)` 的計算時間為 a_N，由於此函數依序呼叫了 `func(N-1)`、`func(N-2)`、`func(N-3)`、`func(N-3)`，則下式成立。

$$a_N = a_{N-1} + a_{N-2} + a_{N-3} + a_{N-3}$$

在此，令 $a_N = 2^N$，則 $2^N = 2^{N-1} + 2^{N-2} + 2^{N-3} + 2^{N-3}$，正好左右一致。因此，呼叫 `func(N)` 的計算複雜度為 $O(2^N)$。

※註：對於覺得「為什麼會想到假設 $a_N = 2^N$ 的讀者，實際測量 `func(N)` 的執行時間可能會得到提示。例如，在作者的環境中，`func(25)` 需時 0.128 秒，`func(26)` 需時 0.259 秒，幾乎為 2 倍差異。

問題 14 (1)

5 人排名的組合有 $5! = 120$ 種，但 4 次提問結果（誰最快）的組合只有 $3^4 = 81$ 種組合。因為後者較小，因此無法在 4 次內確定。（**→5.10.6項**）

問題 14 (2)

此問題有各種解法，以下介紹其中一種。

步驟 1

首先，藉由以下方法，調查 5 人中最快的選手。

1. . 選擇 A、B、C，詢問誰最快。
2. 選擇 D、E、（在1. 中最快的選手），詢問誰最快。

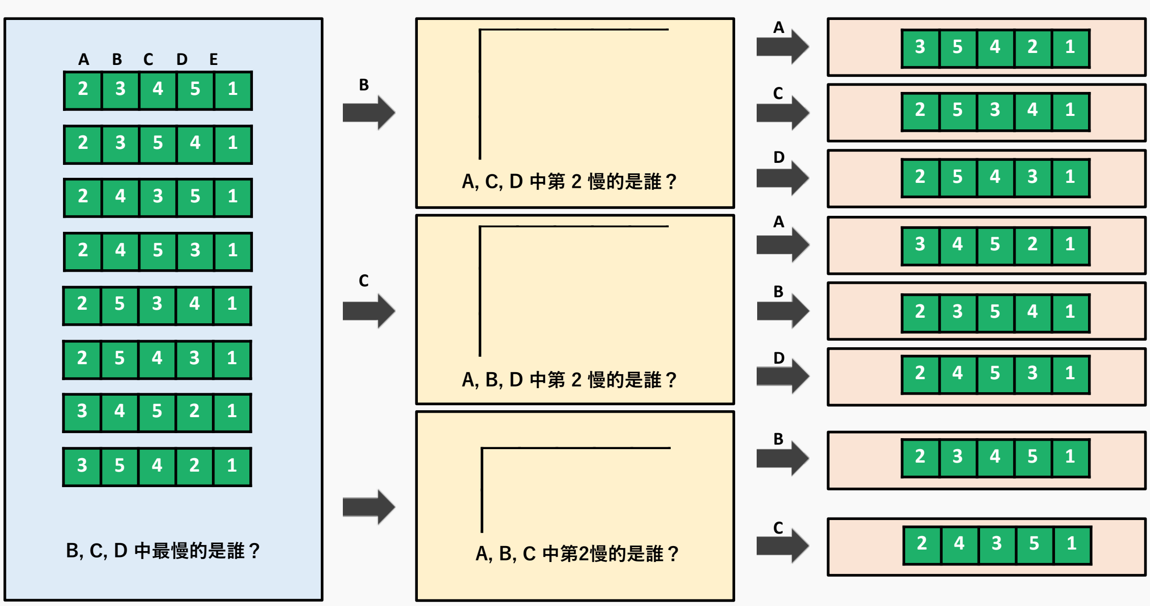
如此，會變成剩下 4 人選手的排名在 3 次提問中確定的問題。之後，假設最快的選手為 E。

步驟 2

詢問 A、B、C 中誰是最快的選手。若答案為 A，則排名的組合會縮小至以下 8 種情況（數字為排名）。

A	B	C	D	E
2	3	4	5	1
2	3	5	4	1
2	4	3	5	1
2	4	5	3	1
2	5	3	4	1
2	5	4	3	1
3	4	5	2	1
3	5	4	2	1

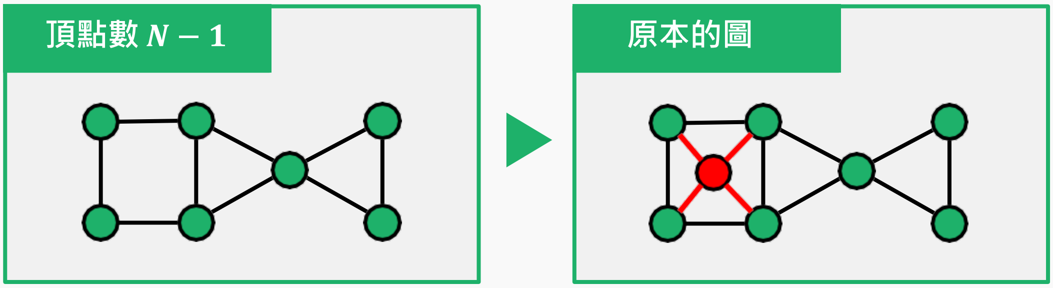
接下來藉由進行以下提問，必定可在 2 次內確定排名。根據這樣的流程，可在總計 5 次提問中確定全部 5 人的排名。



問題 15

首先，平面圖具有「頂點數小於邊數的 3 倍」這一性質，因此至少存在一個度為 5 以下的頂點。

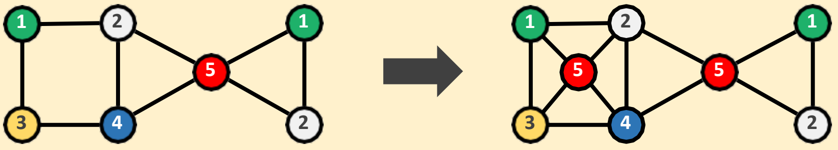
因此，藉由在頂點數為$N-1$的平面圖中添加度為 5 以下的頂點，可以構成原本的圖。



以下在此，證明：假設在頂點數$N-1$的平面圖可以用 5 色著色時，添加頂點後的圖也能用 5 色著色（★）。如下。

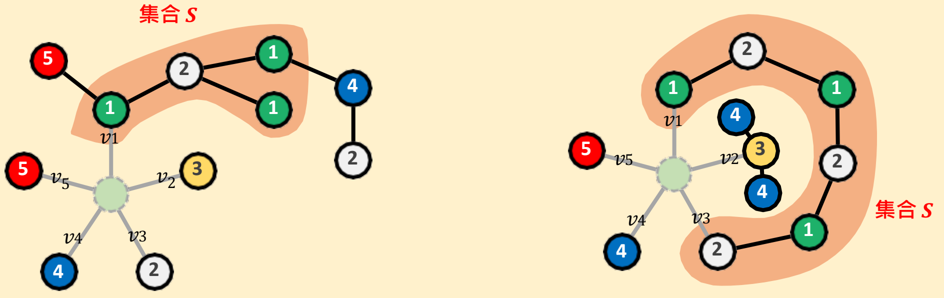
模式 1：添加的頂點 u 的度為 4 以下

如下圖所示，塗上與任一相鄰頂點都不同的顏色即可。（有 5 種顏色可選擇，因此一定存在像這樣的顏色）



模式 2：添加的頂點u的度為 5

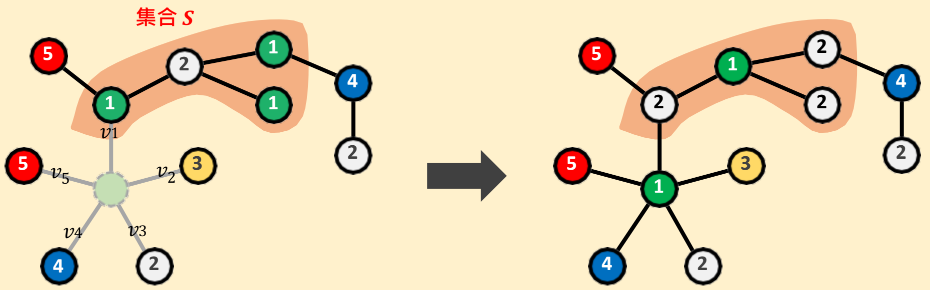
將與 u 相鄰的頂點依順時針設為v_1, v_2, v_3, v_4, v_5，令v_1 的顏色為 1，v_3 的顏色為 2。另外，（在頂點數 $N-1$ 的圖中）將從頂點 v_1 開始，只通過顏色 1、2 的頂點而到達的頂點的集合設為 S。



此時，當 v_3 不包含在集合S中時，進行以下操作，可使顏色 1 空餘（代表添加頂點 u 可設為顏色 1）。

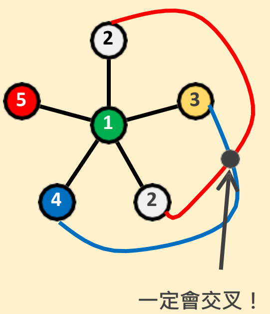
- 將 S 中所含顏色 1 的頂點改為顏色 2。
- 將 S 中所含顏色 2 的頂點改為顏色 1。

下圖顯示此操作的具體例。



另一方面，若 v_3 包含在集合 S 中時，進行與頂點 v_2（顏色 3）和頂點 v_4（顏色 4）相同的操作即可。具體而言，將從頂點 v_2 出發，只經過顏色 3 和 4 的頂點到達的頂點集合設為 T，進行以下操作：

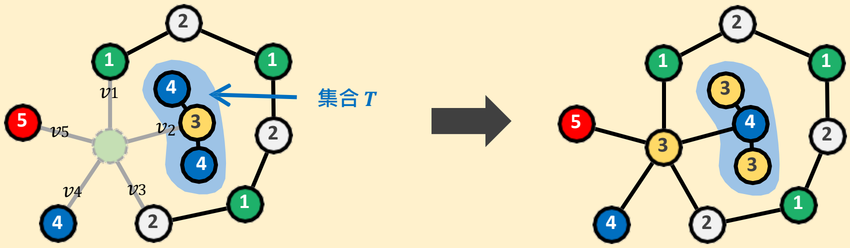
- 將 T 中所含顏色 3 的頂點改為顏色 4。
- 將 T 中所含顏色 4 的頂點改為顏色 3。



則顏色 3 會空餘。另外，以下路徑一定會交叉：

- 從頂點 v_1 到 v_3，且不經過頂點 u 的路徑。
- 從頂點 v_2 到 v_4，且不經過頂點 u 的路徑。

因此 v_4 絕對不包含在集合 T 中。



最後，因為頂點數 1 的圖可用 5 色著色，根據（★）可知，頂點數 2 圖可以，頂點數 3 的圖可以，頂點數 4 的圖可以……，最終證明原本的圖也能用 5 色著色。。

若想知道更容易理解的證明，請參見 chap6-11_15.md 中刊載的「高校數學之美」網站。