

問題 2.5.1

這是測試對求和符號（→2.5.9項）的理解的問題。

答案如下：

$$\sum_{i=1}^{100} i = (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) = 5050$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ij = (1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9) = 36$$

另外，從 1 到 100 的總和在第 1.1 節中也有提到，可以用和的公式（→2.5.10項）來計算出 $100 \times 101 \div 2 = 5050$ 。

問題 2.5.2

這是測試集合基本概念（→2.5.5項）理解的問題。答案如下：

1. $|S| = 3, |T| = 4$
2. $S \cup T = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ （任意一方包含的部分）
3. $S \cap T = \{2\}$ （兩者都包含的部分）
4. 非空的子集合有 $\{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{4, 7\}, \{2, 4, 7\}$ 共 7 個。不懂的話，請回到第 58 頁確認。

問題 2.5.3

由於是階乘 $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$ ，撰寫使用 for 敘述進行乘法運算的程式即可。此外，當 $N = 20$ 時， $N! = 2.4 \times 10^{18}$ ，注意如 int 型態等 32 位元的整數會發生溢出。（在以下的原始碼中，使用了 long long 型態來取代）

```
#include <iostream>
using namespace std;
```

```
int main() {
    long long N;
    long long Answer = 1;
    cin >> N;
    for (int i = 2; i <= N; i++) Answer *= i; // 將 Answer 乘以 i
    cout << Answer << endl;
    return 0;
}
```

※ Python等原始碼請參閱 chap2-5.md 。

問題 2.5.4

撰寫如下的程式即可獲得正確答案。函數 `isprime(x)` 是用來判斷 2 以上的整數 x 是否為質數的函數，如果 x 是質數為 `true`，否則為 `false`。此外，如以下步驟逐個檢查，藉此判斷 x 是否為質數。

- x 能被 2 整除嗎？
- x 能被 3 整除嗎？
- :
- x 能被 $N - 1$ 整除嗎？

```
#include <iostream>
using namespace std;

bool isprime(int x) {
    for (int i = 2; i <= x - 1; i++) {
        // 將 x 除以 i 的餘數為 0 時、x 可以被 i 整除
        if (x % i == 0) return false;
    }
    return true;
}

int main() {
    int N, Answer = 0;
    cin >> N;
    for (int i = 2; i <= N; i++) {
        if (isprime(i) == true) cout << i << endl;
    }
    return 0;
}
```

※ Python 等原始碼請參閱 chap2-5.md 。

問題 2.5.5

這個問題的答案是 **1000**。

最簡單的方法是計算所有包含在 $1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4, 1 \leq c \leq 4$ 內的整數組合 (a, b, c) ，但這樣做會很繁瑣。

$a = 1$ 時 合計 100			
1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

$a = 2$ 時 合計 200			
2	4	6	8
4	8	12	16
6	12	18	24
8	16	24	32

$a = 3$ 時 合計 300			
3	6	9	12
6	12	18	24
9	18	27	36
12	24	36	48

$a = 4$ 時 合計 400			
4	8	12	16
8	16	24	32
12	24	36	48
16	32	48	64

所以，思考以下的雙重求和的值。總和為 **100**。

$$\sum_{b=1}^4 \sum_{c=1}^4 bc = 100$$

合計各 a 的 abc 的總和如下：

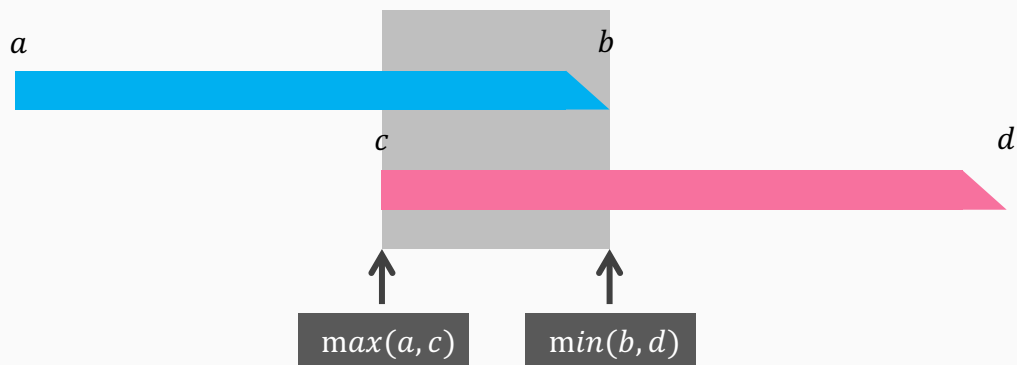
- 當 $a = 1$ 時， $abc (= 1 \times bc)$ 的總和： $1 \times 100 = 100$
- 當 $a = 2$ 時， $abc (= 2 \times bc)$ 的總和： $2 \times 100 = 200$
- 當 $a = 3$ 時， $abc (= 3 \times bc)$ 的總和： $3 \times 100 = 300$
- 當 $a = 4$ 時， $abc (= 4 \times bc)$ 的總和： $4 \times 100 = 400$

所求的三重求和為上述 4 項全部相加的值1000。

問題 2.5.6

擁有共通部分的充要條件是 $\max(a, c) < \min(b, d)$ 。

不懂 \max 函數和 \min 函數的人可以回到第 2.3.2 項確認。



問題 2.5.7

每個 i 的值的「cnt 增加次數」如下：

- $i=1$ 時： $2 \leq j \leq N$ ，故增加次數為 $N - 1$ 次
- $i=2$ 時： $3 \leq j \leq N$ ，故增加次數為 $N - 2$ 次
- $i=3$ 時： $4 \leq j \leq N$ ，故增加次數為 $N - 3$ 次
- :
- $i=N-1$ 時：1次
- $i=N$ 時：0次

因此，依和的公式（→2.5.10項），執行結束時的 cnt 值為：

$$(N - 1) + (N - 2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{(N - 1) \times N}{2} \left(= \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N \right)$$

cnt 的值中最重要項為 $(1/2) \times N^2$ ，所以，這個程式的計算複雜度是 $O(N^2)$ 。

（→2.4.8項）