6.2 最終確認問題 6-10 的解答

問題 6

(1) 根據$1/x$的積分（**→4.3.4項**），可知如下。

$$\int_{1}^{10000} \frac{1}{x} dx = \log_e 10000 = 9.2103 \ldots$$

將其四捨五入到小數點後一位，答案是 9。

(2) 各個 i 之程式的循環次數如下：。

- 當 $i = 1$ 時：$\lfloor N/1 \rfloor + 1000$ 次
- 當 $i = 2$ 時：$\lfloor N/2 \rfloor + 1000$ 次
- 當 $i = 3$ 時：$\lfloor N/3 \rfloor + 1000$ 次
- ⋮
- 當 $i = N$ 時：$\lfloor N/N \rfloor + 1000$ 次

因此，整體的循環次數 L 如下：。

$$\underline{\underline{\left\lfloor \frac{N}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{N}{N} \right\rfloor}} + 1000N$$

根據倒數和的性質（**→4.4.4項**）底線部分的總和約為 $N \log_e N$ 。$L \fallingdotseq N \log_e N + 1000N$ 。若使用蘭道大 O 記法來表示，計算複雜度為 $\boldsymbol{O(N \log N)}$ 。

問題 7

答案如下表所示。

函數	N^2	N^3	2^N	3^N	$N!$
1 億	10000	**465**	**27**	**17**	**12**
5 億	22361	**794**	**29**	**19**	**13**
10 億	31623	**1000**	**30**	**19**	**13**

問題 8

(1) 答案如下。可以從前面開始逐個計算。（→**3.7.1項**）

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	5	9	29	65	181	441	1165	2929

(2) 答案如下。不瞭解的人可以回到 4.7 節確認。

$$A+B=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&8\\10&20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5&4+8\\1+10&0+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&12\\11&20\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&8\\10&20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+4\times10&1\times8+4\times20\\1\times5+0\times10&1\times8+0\times20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45&88\\5&8\end{bmatrix}$$

(3) 答案如下。不瞭解的人可以回到 4.7 節確認。

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\1&4\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}5&4\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&20\\5&4\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}9&20\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29&36\\9&20\end{bmatrix}$$

$$A^5=A^4\times A=\begin{bmatrix}29&36\\9&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65&116\\29&36\end{bmatrix}$$

(4) 這與用矩陣乘方表示費波那契數列的理由相似。首先，根據 $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2}$、$a_{n-1} = a_{n-1}$，下式會成立。

$$\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\end{bmatrix}$$

重複運用此式，可以用乘方的式子表示如下。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}a_{n-2}\\a_{n-3}\end{bmatrix}\\&=\cdots\\&=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}a_2\\a_1\end{bmatrix}=A^{n-2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此，a_n 的值等於 A^{n-2} 的 $(1,1)$ 元素和 $(1,2)$ 元素相加的值。

（下頁繼續）

由於下式成立，「A^{n-2} 的 $(1,1)$ 元素和 $(1,2)$ 元素相加的值」會與「A^{n-1} 的 $(1,1)$ 元素」一致。

$$A^{n-2} \times A = \begin{bmatrix} (1,1)\text{ 元素} & (1,2)\text{ 元素} \\ (2,1)\text{ 元素} & (2,2)\text{ 元素} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1,1)\text{ 元素} + (1,2)\text{ 元素} & (1,1)\text{ 元素} \times 4 \\ (2,1)\text{ 元素} + (2,2)\text{ 元素} & (2,1)\text{ 元素} \times 4 \end{bmatrix}$$

這就是為什麼 $(1,1)$ 元素的值會出現在數列中的原因。

問題 9

對於 $1 \text{ XOR } 2 \text{ XOR } 3 \text{ XOR } \cdots \text{ XOR } N$ 的值，直接以$N = 1000000007$ 來求出答案是困難的，因此首先從較小的情況來調查看看吧（**→5.2節**）。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	1	3	0	4	1	7	0	8	1	11	0

在 $N = 3, 7, 11$ 的案例，$1 \text{ XOR } 2 \text{ XOR } \cdots \text{ XOR } N = 0$，故此時可以想到「是否為 N 除以 4 的餘數為 3」的規律。

那麼，這個規律在 N 很大的時候是否也成立呢？答案是 Yes，可以如下證明。

首先，令 x 為 4 的倍數時，以下式子成立。

$$x \text{ XOR} (x+1) \text{ XOR} (x+2) \text{ XOR } (x+3)$$

$$= \{x \text{ XOR} (x+1)\} \text{ XOR} \{(x+2) \text{ XOR} (x+3)\}$$

$$= 1 \text{ XOR } 1 = 0$$

因此，當 $N \bmod 4 = 3$ 時，所求的值如下。

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \text{ XOR } 2 \text{ XOR } 3}_{0} \text{ XOR } \underbrace{4 \text{ XOR } 5 \text{ XOR } 6 \text{ XOR } 7}_{0} \text{ XOR } \cdots \text{ XOR } \underbrace{(N-3) \text{ XOR } (N-2) \text{ XOR } (N-1) \text{ XOR } N}_{0} \\ = {} & 0 \text{ XOR } 0 \text{ XOR} \cdots \text{XOR } 0 \\ = {} & 0 \end{aligned}$$

由於 $1000000007 \bmod 4 = 3$，答案是 **0**。

問題 10

本問題直接計算也可以解開，但不使用程式會比較麻煩。這裡使用從上數來第 i 列、從左數來第 j 行的格子寫著 $4i+j$ 這一事實，來分解各個格子的值。

4	4	4	4	4	4	4	4
8	8	8	8	8	8	8	8
12	12	12	12	12	12	12	12
16	16	16	16	16	16	16	16
20	20	20	20	20	20	20	20
24	24	24	24	24	24	24	24
28	28	28	28	28	28	28	28
32	32	32	32	32	32	32	32

+

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

所有格子的總和

64 個格子整體來看，將$[4,8,12,16,20,24,28,32]$ 相加各 8 次，$[1,2,3,4,5,6,7,8]$ 相加各 8 次。因此，所求答案如下。

$$
\begin{aligned}
&(4+8+12+16+20+24+28+32)\times(8+\ 1+2+3+4+5+6+7+8)\ \times 8\\
&=144\times 8+36\times 8\\
&=\mathbf{1440}
\end{aligned}
$$

綠色格子的總和

對於所有列及所有行，8 個中有 4 個（一半）被塗成綠色。也就是說，$[4,8,12,16,\ldots]$ 等被加總的次數也會減半，所求答案為 $1440 \div 2 =$ **720**。

※如果不明白相加次數的技巧，可以參考 5.7 節。