Arbeitsblatt: Logistische Regression

Binäre Klassifikation mit Wahrscheinlichkeiten - Lösung

Informatik

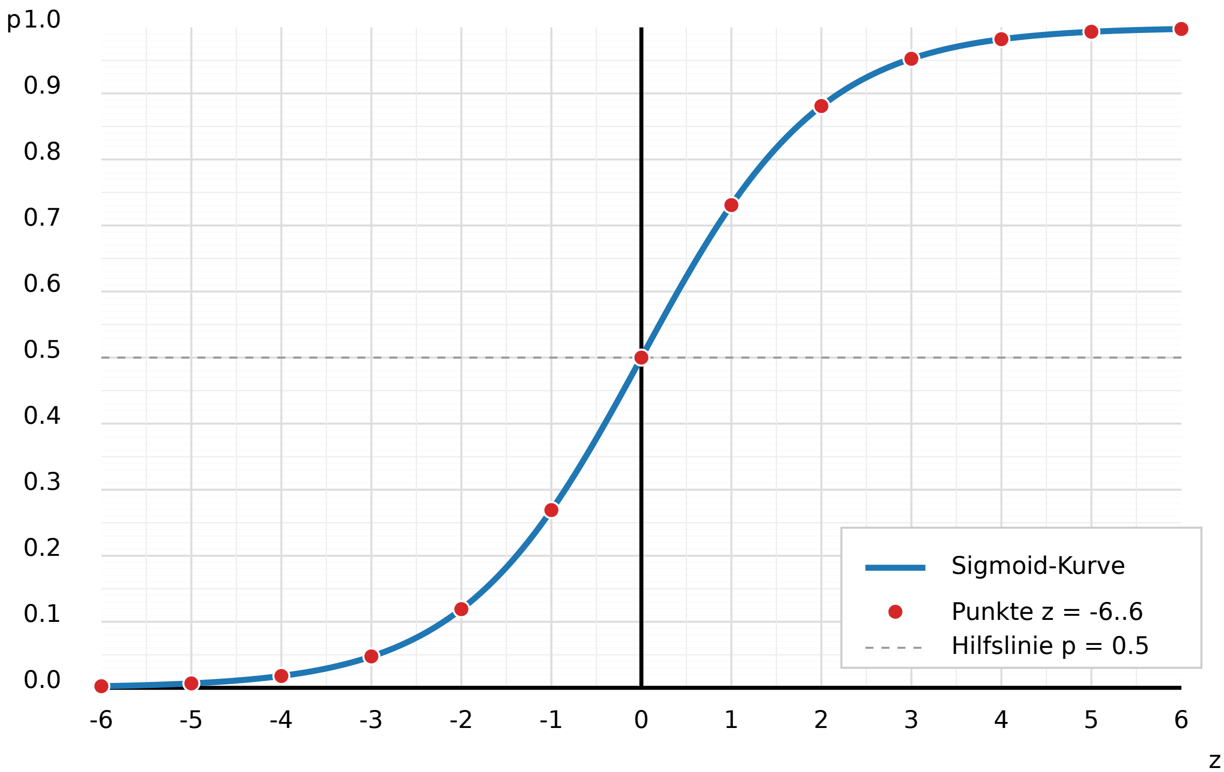
Lösung Mini-Übung: Sigmoid skizzieren

Gerundete Werte für $\sigma(z)$ bei ganzzahligen $z \in [-6, 6]$ (auf 3 Nachkommastellen):

z	$\sigma(z)$ (gerundet)
-6	0.002
-5	0.007
-4	0.018
-3	0.047
-2	0.119
-1	0.269
0	0.500
1	0.731
2	0.881
3	0.953
4	0.982
5	0.993
6	0.998

Die Kurve kippt bei $p = 0.5$ (entspricht $z = 0$) und nähert sich 0 bzw. 1 asymptotisch an.

Graphische Lösung auf dem Koordinatengitter (blaue Sigmoid-Kurve, rote Punkte bei $z = -6..6$):



Beispiel 1: Besteht man den Test?

Gegeben: $p = \sigma(1.2\,x - 2.0)$

Lösung Aufgabe 1a

Berechnungen (gerundet auf 3 Nachkommastellen):

x	$z = 1.2x - 2.0$	$p = \sigma(z)$	$\hat{y}$ (Schwelle 0.5)
0.5	-1.400	0.198	0
1.0	-0.800	0.310	0
1.5	-0.200	0.450	0
2.0	0.400	0.599	1
2.5	1.000	0.731	1
3.0	1.600	0.832	1

Lösung Aufgabe 1b (Accuracy)

Ist-Labels: $[0, 0, 0, 0, 1, 1]$
Vorhersagen: $[0, 0, 0, 1, 1, 1]$

Korrekte: 5 von 6
Accuracy $= 5/6 \approx 0.833$ **(83.3%)**

Hinweis: Bei $x = 2.0$ lag die Schwelle knapp daneben $\rightarrow$ Fehlklassifikation.

Beispiel 2: Zwei Modelle vergleichen

Daten: $(x, y) = (0.5, 0), (1.0, 0), (1.5, 0), (2.0, 0), (2.5, 1), (3.0, 1)$

Modell A: $p_A = \sigma(1.0\,x - 1.8)$

x	y	z_A	p_A	$\hat{y}_A$
0.5	0	-1.300	0.214	0
1.0	0	-0.800	0.310	0
1.5	0	-0.300	0.426	0
2.0	0	0.200	0.550	1
2.5	1	0.700	0.668	1
3.0	1	1.200	0.769	1

Korrekte: 5/6
Accuracy A $= 5/6 \approx 0.833$

Modell B: $p_B = \sigma(1.4\,x - 2.9)$

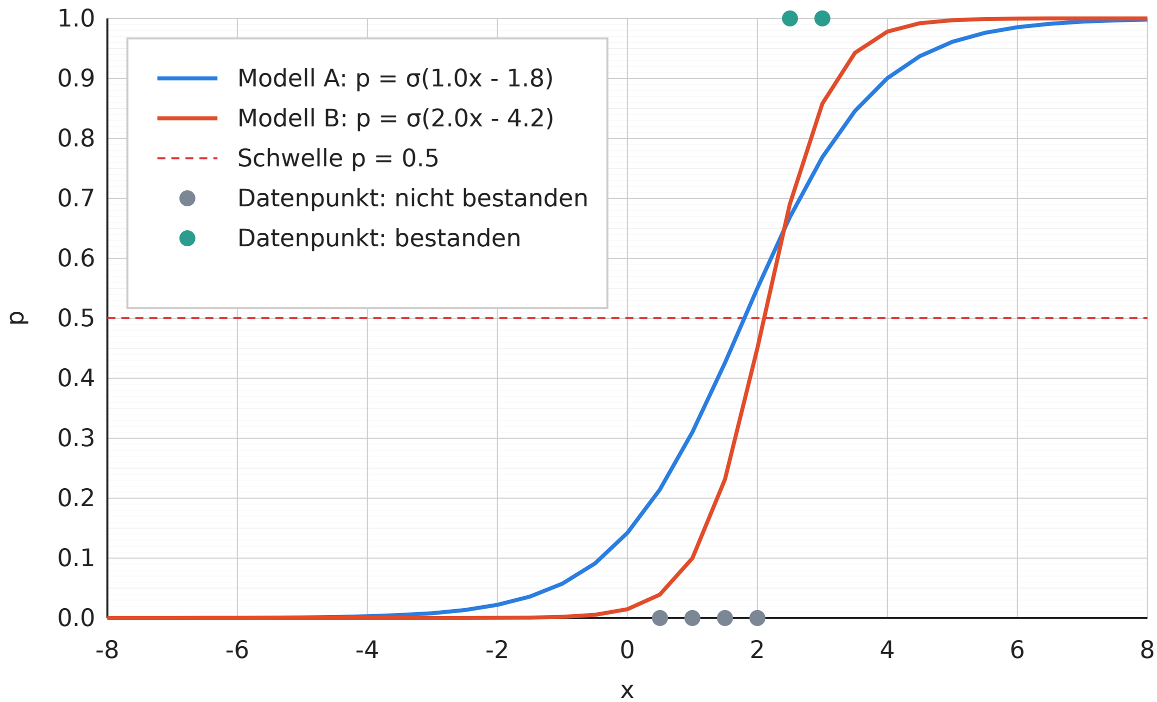
x	y	z_B	p_B	$\hat{y}_B$
0.5	0	-2.200	0.099	0
1.0	0	-1.500	0.182	0
1.5	0	-0.800	0.310	0
2.0	0	-0.100	0.475	0
2.5	1	0.600	0.646	1
3.0	1	1.300	0.786	1

Korrekte: 6/6
Accuracy B $= 6/6 = 1.0$

Interpretation

1. Modell B ist besser: 1.0 Accuracy vs. 0.833 bei Modell A. B klassifiziert auch den Grenzfall $x = 2.0$ korrekt als 0.
2. B ist steiler und liefert höhere Wahrscheinlichkeiten für die positiven Beispiele (2.5, 3.0) und niedrigere für die negativen (0.5, 1.0, 1.5, 2.0).

Visualisierung der Modelle A und B



Die Grafik zeigt beide Sigmoid-Kurven ($p_A = \sigma(1.0x - 1.8)$ in Blau, $p_B = \sigma(2.0x - 4.2)$ in Orange) sowie die Trainingspunkte farblich nach Klasse (grau = nicht bestanden, grün = bestanden) im Bereich $x \in [-8, 8]$.

Reflexion (Musterantwort)

1. Accuracy kann irreführend sein, wenn Klassen stark unausgeglichen sind (z. B. 99% Klasse 0). Dann kann ein triviales Modell „immer 0“ hohe Accuracy haben, aber nichts Nützliches lernen.
2. Wahrscheinlichkeiten sind hilfreicher als harte 0/1-Labels, weil sie Unsicherheit zeigen: Man kann Schwellen anpassen und Entscheidungen (False Positives, False Negatives) besser steuern.