MS 211 – Calculo Numérico
Projeto

Data de entrega: 24/11/2015

Observações para apresentação do projeto

- A nota do projeto comporá a média final.
- O projeto pode ser desenvolvido em grupo, com no **máximo dois** alunos. Não será permitido projetos com três ou mais alunos.
- O projeto deverá ser entregue no formato **impresso**, e não será aceito após a data de entrega **24/11**.
- As rotinas computacionais utilizadas também deverão ser anexadas ao projeto no formato impresso, independentemente da linguagem de programação utilizada.
- A nota do projeto será composta da avaliação dos resultados apresentados (teóricos e computacionais). Soluções "soltas" ou "desconexas" não serão consideradas.
- **Todos** os métodos numéricos utilizados e que estejam cobertos pela ementa da disciplina deverão ser implementados.

Sugestões para elaboração do projeto

- Justifique todas as etapas do desenvolvimento do projeto.
- Faça um resumo dos métodos numéricos utilizados.
- Utilize recursos gráficos para auxiliar o desenvolvimento do projeto.
- Apresente os algoritmos dos métodos numéricos utilizados.
- Inclua as listagens dos programas.
- Apresente claramente os resultados numéricos obtidos fazendo uma análise objetiva.
- Apresente conclusão e bibliografia.

Atividade 01

A seca que atinge o estado de São Paulo é um assunto bastante explorado pela mídia ultimamente, principalmente quando se trata dos níveis do sistema Cantareira. A intenção deste exercício é estudar um pouco o comportamento do nível do reservatório da Cantareira nos últimos anos. Diariamente é publicado no site da SABESP [1] o nível das represas, assim como o índice pluviométrico diário e os acumulados por mês.

O arquivo [2] disponibiliza a data (no formado AAAAMMDD). Carregue o arquivo e faça um gráfico dos dias pelo nível do reservatório (que é dado em porcentagem).

a) Primeiramente, ajuste (via quadrados mínimos) uma reta aos dados tabelados e depois um polinômio de grau 4. Para cada um dos casos, responda:

   1. Qual o valor do resíduo (soma dos quadrados dos erros) obtido?
   2. Este ajuste está refletindo bem o comportamento do nível da represa? Justifique.

b) Proponha agora algum outra curva para o ajuste dos dados. Responda as questões acima para a curva que você escolheu.

c) Note que, no ano de 2013 o nível da represa apresentou queda na maior parte do ano, e em 2014 foi feito uso de uma cota do volume morto no sistema Cantareira. Selecione do arquivo os dados a partir de `01 de janeiro de 2013` e restrinja seus dados aos dias antes do uso do volume morto. Ajuste um polinômio de grau quatro a estes dados. Se não fosse possível fazer uso do volume morto, quando o sistema ficaria com 0% de capacidade? Resolva numericamente com um método para zeros de função, indicando o método utilizado e os parâmetros escolhidos. Compare a data obtida com os dados, ou seja, subtraia a porcentagem adicionada (correspondente à primeira cota do volume morto) e encontre o dia que a capacidade zeraria.

d) Pegue os dados a partir da data em que foi acionada a segunda cota do volume morto (segundo "salto" dos dados). Ajuste os dados por uma reta (sempre no sentido de Quadrados Mínimos) e encontre a data em que a represa atingiria a capacidade de 0%.

Atividade 02

Considere uma barra homogênea de comprimento L, de forma que a largura da barra seja desprezível com relação ao seu comprimento. Seja $u(x,\, t)$ uma função que descreve a temperatura do ponto $x \in [0,\, L]$ no instante $t > 0$. Se colocarmos uma fonte de calor no ponto $x = 0$, como deve se comportar a temperatura na barra com o passar do tempo? Ou então, considerando que existe uma função que descreve a temperatura da barra em um tempo inicial, com ou sem fonte de calor, como se comporta a temperatura em relação ao tempo?

O problema proposto acima pode ser modelado como uma equação diferencial. Entretanto, temos mais de uma variável, e assim temos um problema de uma Equação Diferencial Parcial, pois queremos avaliar o comportamento da função $u(x,\, t)$ tanto em relação ao tempo quanto ao espaço. Pode ser demonstrado que a função $u(x,\, t)$ deve ser solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\, t) = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\, t) + \psi(x,\, t), \tag{1}$$

onde γ é o coeficiente de condução de calor e $\psi(x,\, t)$ é uma função que representa a fonte de calor. Além disso, devemos impor condições iniciais e de contorno sobre o problema.

$$\begin{cases} u(x,\, 0) = f(x) \\ u(0,\, t) = p(t) \\ u(L,\, t) = q(t). \end{cases}$$

Este tipo de condição inicial dado é chamado de *Condição de Dirichlet*. Se, por exemplo, um dos lados da barra estiver isolado e não conduzir calor, trocarmos a condição de contorno correspondente por uma condição do tipo $u_x(x,\, t) = 0$ (u_x é a derivada de $u(x,\, t)$ com relação a x), chamada de *Condição de Neumann*.

Uma maneira simples de se resolver problemas deste tipo é usando um esquema de diferenças finitas, fazendo discretizações no tempo e no espaço [5]. Para isto, use

$$u(x_i,\, t_n) \approx u_i^n.$$

1. Aproxime, usando diferenças finitas, as derivadas temporal e espacial do problema, utilizando:

   - diferenças avançadas no tempo.
   - diferenças atrasadas no tempo.

   Solução:

   - Para aproximar a derivada temporal usando diferenças avançadas, fazemos

     $$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}, \tag{2}$$

     onde k é o passo associado à variável temporal, e $j = 0, 1, \ldots$.
     Agora, a derivada espacial será sempre aproximada por

     $$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \tag{3}$$

     onde h é tal que $x_\imath = \imath h$, para $\imath = 0,\, 1,\, \ldots,\, m$, sendo m um inteiro positivo.
     Assim, podemos substituir (3) e (2) em (1) e obter

     $$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \gamma \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \psi_i^j.$$

Podemos, então, explicitar u_i^{j+1} em termo das outras variáveis, encontrando

$$u_i^{j+1} = \left(1 - 2\frac{k}{h^2}\gamma\right) u_i^j + \gamma\frac{k}{h^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + k\psi_i^j, \quad i = 1, \ldots, m, \, j > 0 \tag{4}$$

- Para aproximar a derivada temporal usando diferenças atrasadas, fazemos

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}, \tag{5}$$

Substituindo (3) e (5) em (1), temos

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \gamma\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \psi_i^j.$$

Podemos, então, isolar u_i^{j-1} e escrevê-la em termo das outras variáveis, encontrando

$$u_i^{j-1} + k\psi_i^j = -\gamma\frac{k}{h^2}u_{i-1}^j + \left(1 + 2\frac{k}{h^2}\gamma\right) u_i^j - \gamma\frac{k}{h^2}u_{i+1}^j, \quad i = 1, \ldots, m, \, j > 0 \tag{6}$$

Note que, pelo primeiro método (chamado de método explícito), conhecidas as aproximações u_i^j para j fixo, podemos obter facilmente as aproximações para o passo de tempo seguinte (u_i^{j+1}). Já pelo segundo método (chamado de método implícito), se conhecemos u_i^{j-1}, precisamos resolver um sistema linear para obter u_i^j.

2. Escreva as condições inicial e de contorno de Dirichlet em termos da sua discretização.

Solução: A condição incial nos dá que $u(x, 0) = f(x)$, ou seja, $u_i^0 = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, m$. Assim, dado um valor para $h = L/m$, temos um vetor inicial $\mathbf{u}^0$, cuja componente i é o valor u_i^j, de dimensão $m - 1$. Note ainda que, a medida que $h \to 0$, temos que $m \to \infty$ e portanto todos os pontos do intervalo $[0, L]$ tendem a ser atingidos.

Para as condições de contorno (do tipo Dirichlet), temos que $u_0^j = p(t_j)$ e $u_m^j = q(t_j)$.

3. Escreva as equações obtidas na forma matricial.

Solução: Para o primeiro caso, quando temos um esquema explícito, não obtemos um sistema linear. Conseguimos representar o vetor $\mathbf{u}^{j+1}$ como a seguinte equação matricial

$$\mathbf{u}^{j+1} = A\mathbf{u}^j + k\boldsymbol{\psi}^j, \tag{7}$$

onde A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix},$$

e $\lambda = \gamma k/h^2$. Para que este método seja *estável* a seguinte relação deve ser satisfeita (veja em [3]):

$$\gamma\frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}.$$

Agora, para o segundo caso, temos que resolver um sistema linear, cuja forma matricial é dada por

$$A\mathbf{u}^j = \mathbf{u}^{j-1} + k\mathbf{f}^j, \tag{8}$$

onde A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{f}^j = (\psi_1^j + \lambda p^j, \psi_2^j, \ldots, \psi_{m-1}^j + \lambda q^j)^\top$. Este segundo método tem a vantagem de ser *incondicionalmente estável* (veja [3]).

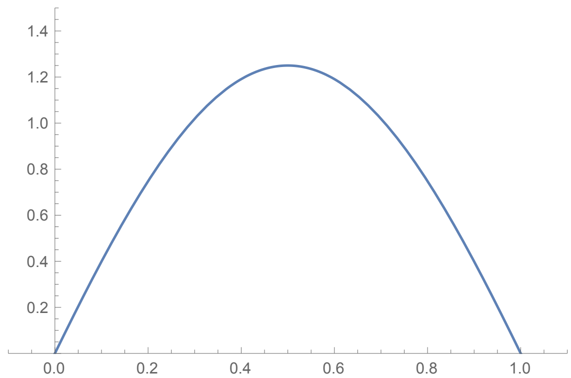
Aplique cada um dos métodos descritos acima para resolver numericamente o seguinte problema do calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\, t) + 2 \\ u(x,\, 0) = \sin(\pi x) + x(1-x) \\ u(0,\, t) = 0 \\ u(1,\, t) = 0 \\ x \in [0,\, 1]. \end{cases}$$

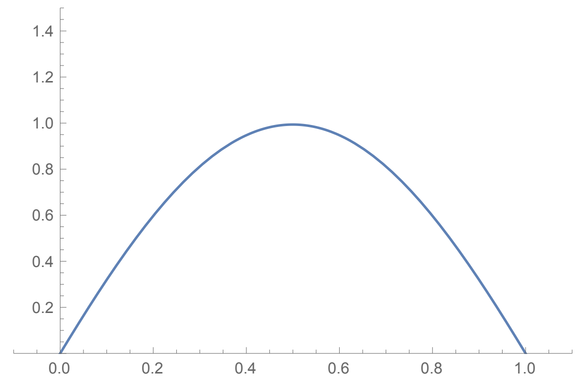
a) Para o método explícito, dado $h = 10^{-2}$, use dois valores para k: um tal que a condição de estabilidade seja satisfeito e outro em que não seja.

b) Para o método implícito, use $h = 10^{-3}$ e $k = 10^{-3}$, e resolva o sistema linear usando um método direto (fatoração LU ou uma variante que aproveite a estrutura da matriz) e algum método iterativo (Gauss-Seidel, por exemplo). Compare os resultados obtidos.

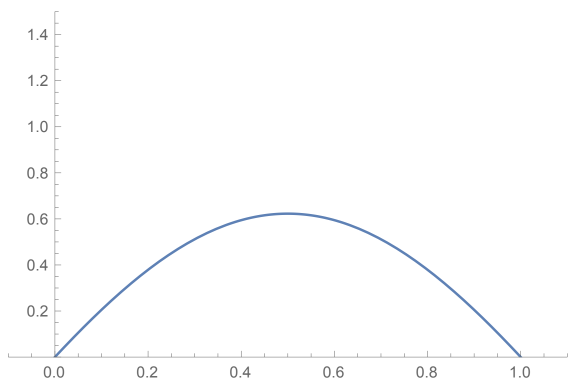
Para cada um dos itens, grafique a solução para alguns valores de tempo. Tome como base as figuras a seguir.



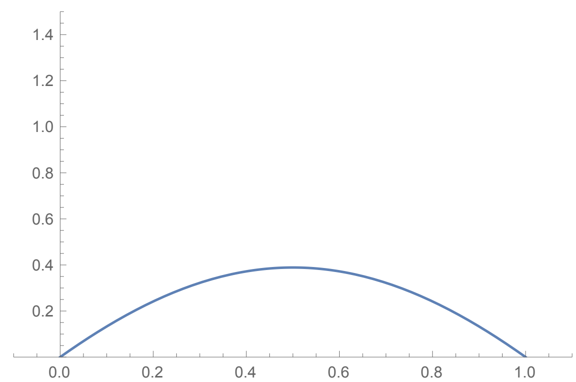
(a) Solução para $t = 0\,s$



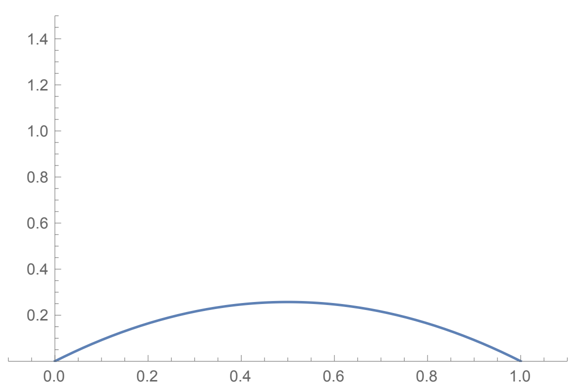
(b) Solução para $t = 0.03\,s$



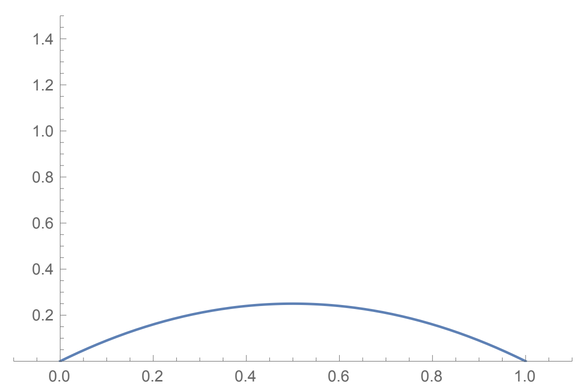
(c) Solução para $t = 0.1\,s$



(d) Solução para $t = 0.2\,s$



(e) Solução para $t = 0.5\,s$



(f) Solução para $t = 1\,s$

Referências

[1] http://www2.sabesp.com.br/mananciais/DivulgacaoSiteSabesp.aspx. último acesso em 22-08-2015.

[2] http://www.ime.unicamp.br/~ms211/exercicios. último acesso em 24-08-2015.

[3] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[4] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[5] R. J. LeVeque, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, Siam, 2007.

[6] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.