

Problemas resueltos por los alumnos

1. Una empresa fabrica bombillas blancas de bajo consumo cuya duración media es de 10 años, pero algunas de ellas son defectuosas y tienen una vida media de 1 año. Se sabe que el 10% de las bombillas fabricadas son defectuosas.

1. Un cliente compra una bombilla de esta empresa y después de un año sigue funcionando: ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? ¿Cuál es la probabilidad de que funcione otro año más?
2. La empresa fabrica también luces decorativas que se venden en tiras de 100 bombillas, el tiempo de vida de las bombillas en la misma tira es independiente y tienen un tiempo de vida medio de 6 meses. ¿Cuál es la función de distribución y de densidad de la variable $Y = \text{tiempo de vida (en meses)}$ de una bombilla. ¿Cuál es la probabilidad de que después de tenerlas encendidas durante un mes todas sigan funcionando? ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria $X = \text{Número de bombillas que siguen funcionando al final del mes}$?

Solución

Definimos los siguientes sucesos:

- $A = \text{bombilla nueva}$
- $B = \text{bombilla defectuosa}$

Nombramos las siguientes variables:

- $T|A = \text{Duración en años de las bombillas nuevas}, T_1 \sim \text{Exp}(1/10)$
- $T|B = \text{Duración en años de las bombillas defectuosas}, T_1 \sim \text{Exp}(1)$

1.

$$\begin{aligned} Pr(A|T > 1) &= \frac{Pr(A \cap T > 1)}{Pr(T > 1)} = \frac{Pr(T > 1|A) \times Pr(A)}{Pr(T > 1)} \\ Pr(T > 1) &= Pr(T > 1|A) \times Pr(A) + Pr(T > 1|B) \times Pr(B) \\ &= (1 - F_{T|A}(1)) \times 0,9 + (1 - F_{T|B}(1)) \times 0,1 \\ &= (1 - 1 + e^{-1/10}) \times 0,9 + (1 - 1 + e^{-1}) \times 0,1 \quad \text{ya que } F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\ &= e^{-1/10} \times 0,9 + e^{-1} \times 0,1 = 0,85114 \\ Pr(A|T > 1) &= \frac{e^{-1} \times 0,1}{0,85114} = 0,0432 \end{aligned}$$

La siguiente pregunta es:

$$\begin{aligned} Pr(T > 2|T > 1) &= \frac{Pr(T > 2 \cap T > 1)}{Pr(T > 1)} = \frac{Pr(T > 2)}{Pr(T > 1)} \\ &= \frac{e^{-2/10} \times 0,9 + e^{-2} \times 0,1}{e^{-1/10} \times 0,9 + e^{-1} \times 0,1} \\ &= \frac{0,7503912}{0,85114} = 0,8816291 \end{aligned}$$

2. Sea Y = tiempo de vida (en meses) de una bombilla

$$E[Y] = 6 \quad F(y) = 1 - e^{-y/6} \quad f(y) = \frac{1}{6}e^{-y/6} \quad y \geq 0$$

La probabilidad de que una bombilla funcione después de un mes es:

$$Pr(Y > 1) = 1 - F(1) = 1 - 1 + e^{-1/6} = 0,84$$

por lo tanto la probabilidad de que todas sigan funcionando es

$$(Pr(Y > 1))^{100} = 0,84^{100} = 5,7 \times 10^{-8}$$

Si X = Número de bombillas que siguen funcionando al final del mes: $X \sim B(100, 0,84)$

2. *Un estudiante compra un nuevo PC que se bloquea frecuentemente. El estudiante cree que el número de veces que se bloquea sigue un proceso de Poisson con una media de tres bloqueos a la hora*

1. *Calcula la probabilidad de el PC siga funcionando sin bloquearse durante al menos una hora después de encenderlo.*
2. *Si el PC no se ha bloqueado después de una hora, calcula la probabilidad de que no se bloquee después de $(t + 2)$ horas*
3. *Otro estudiante ha comprado otro PC que parece ser más fiable ya que éste sólo se bloquea una media de 1 vez por hora. Cuál es la probabilidad de que el PC de este estudiante se bloquee antes que el del anterior si los dos encienden sus PCs al mismo tiempo?*

Solución

1. Sea X = Número de veces que se bloquea en una hora, $X \sim P(3)$.

Que siga funcionando sin bloquearse después de una hora, quiere decir que en el intervalo desde que lo encendemos hasta que pasa una hora no se ha bloqueado, es decir nos piden:

$$Pr(X = 0) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} = e^{-3}$$

Otra manera de hacerlo sería definiendo la variable:

T =Tiempo (en horas) hasta que se bloquea, $T \sim Exp(3)$, $E[T] = 1/3$, con función de distribución $F_T(t) = 1 - e^{-3t}$ y nos piden

$$Pr(T > 1) = 1 - F_T(1) = 1 - 1 + e^{-3} = e^{-3}$$

2. Nos piden:

$$\begin{aligned} Pr(T > t+2 | T > 1) &= \frac{Pr(T > t+2 \cap T > 1)}{Pr(T > 1)} = \frac{Pr(T > t+2)}{Pr(T > 1)} = \frac{1 - F_T(t+2)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - 1 + e^{-3(t+2)}}{1 - 1 + e^{-3}} = \frac{e^{-3(t+2)}}{e^{-3}} = e^{-3(t+1)} = Pr(T > t+1) \end{aligned}$$

3. El último apartado se me escapó y corresponde al tema 6, ups!!

3. En unos grandes almacenes, un lunes hay 20 kits de ADSL, y el encargado de la sección ha de decidir si hace un pedido ya que han lanzado una oferta y por la experiencia en otras campañas se sabe que el número de clientes que compran durante los días de oferta sigue un proceso de Poisson con media de 10 clientes en un día (el gran almacén esta abierto 10 horas al día).

1. ¿Cuál es la probabilidad de vender 10 kits en las primeras 5 horas del lunes?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que no queden kits al final del día?
3. Por experiencias anteriores, se sabe que si se hace un pedido hoy, la probabilidad de que llegue mañana a primera hora es 0.5, la probabilidad de que llegue a primera hora de pasado mañana es 0.3 y la probabilidad de que llegue a primera hora del siguiente día es 0.2. Si se hace un pedido hoy, ¿Cuál es la probabilidad de que tengas que decirles a los clientes que no hay kits antes de que llegue el próximo pedido?

Solución

1. Sea X = Número de clientes en 10 horas, $X \sim P(10)$

Sea Y = Número de clientes en 5 horas, $X \sim P(5)$

Nos piden

$$Pr(Y = 10) = \frac{e^{-5} 5^{10}}{10!} = 0,01813$$

2. Nos piden $Pr(X \geq 21)$, como $\lambda > 5$ aproximamos una Poissona una Normal, $X \approx N(10, \sqrt{10})$

$$Pr(X \geq 21) = Pr\left(Z \geq \frac{21 - 10}{\sqrt{10}}\right) = Pr(Z \geq 3,47) = 1 - Pr(Z < 3,47) = 1 - 1 - 0,9997 = 0,0003$$

3. R = Número de clientes en dos días $R \sim P(20)$
 S = Número de clientes en tres días $S \sim P(30)$
 A_1 = el pedido llega mañana
 A_2 = el pedido llega pasado mañana
 A_3 = el pedido llega tercer día
 D = No hay kits antes del próximo pedido

La probabilidad de que tengas que decirles a los clientes que no hay kits antes de que llegue el próximo pedido sería:

$$\begin{aligned}
 Pr(D) &= Pr(X \geq 21)Pr(A_1) + Pr(R \geq 21)Pr(A_2) + Pr(S \geq 21)Pr(A_3) \\
 &= Pr\left(Z \geq \frac{21-10}{\sqrt{10}}\right)0,5 + Pr\left(Z \geq \frac{21-20}{\sqrt{20}}\right)0,3 + Pr\left(Z \geq \frac{21-30}{\sqrt{30}}\right)0,2 \\
 &= Pr(Z \geq 3,47)0,5 + Pr(Z \geq 0,22)0,3 + Pr(Z \geq -1,64)0,2 \\
 &= (1 - 0,9997)0,5 + (1 - 0,5871)0,3 + (0,9495)0,2 \\
 &= 0,3139
 \end{aligned}$$

4. Los coches que llegan a un semáforo siguen un proceso de Poisson con media de 4 vehículos por minuto. El semáforo está 40 segundos en rojo y 80 segundos en verde.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 4 coches en cola cuando el semáforo se pone en verde?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 7 coches en cola?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 6 horas haya al menos una ocasión en la que haya más de 7 coches en cola?

Solución

1. La probabilidad que nos piden, es la probabilidad de que en los 40 segundos que el semáforo está en rojo lleguen 4 coches.
 Sea X = Número de coches por minuto $X \sim P(\lambda_X = 4)$
 Sea Y = Número de coches por en 40 segundos $Y \sim P(\lambda_Y = 4 \times 40/60 = 2,6)$

$$Pr(Y = 4) = \frac{e^{-2,6}2,6^4}{4!} = 0,64$$

2.

$$Pr(Y > 7) = 1 - Pr(Y \leq 7) = 1 - [Pr(Y = 0) + \dots Pr(Y = 7)] = 0,005$$

3. En 6 horas hay $6 \times 3600 = 21600$ segundos, por lo tanto hay

$$\frac{21600}{80 + 40} = 180 \quad \text{veces en las que se pone el semáforo en rojo}$$

Sea N = Número de veces en las que hay más de 7 coches en la cola,
 $N \sim B(180, p)$ donde p = Probabilidad de que haya más de 7 coches en la cola = 0,005 (por el aparatdo anterior). Nos piden:

$$\begin{aligned} Pr(N \geq 1) &= 1 - Pr(N < 1) = 1 - Pr(N = 0) = 1 - \binom{180}{0} (0,005)^0 (1 - 0,005)^{180} \\ &= 1 - 0,4056 = 0,5944 \end{aligned}$$