ESTADÍSTICA

DISTRIBUCIONES

Alberto Luceño
Francisco J. González

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

Actualizado el: 15 de marzo de 2003 Versión 2.00

Tabla de Contenido

2. Distribuciones discretas

Ejercicio 66. Suponiendo que cada bebé tiene una probabilidad 0,51 de ser varón, hállese la probabilidad de que una familia de 6 hijos tenga:

a). Por lo menos un niño.

b). Por lo menos una niña.

Ejercicio 67. Si la probabilidad de acertar en un blanco es 1/5 y se hacen 10 disparos de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de acertar por lo menos dos veces?

Ejercicio 68. Demostrar que si la variable aleatoria X tiene distribución binomial ($X \sim Bin(n,p)$), se tiene:

$$\mu_X = np \quad ; \quad \sigma_X^2 = npq.$$

Ejercicio 69. Se lanza una moneda 500 veces. Estimar la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 240 y 260.

Ejercicio 70. En una regulación de calles por semáforos, la luz verde está encendida durante 15 segundos, la luz ámbar 5 segundos y la luz roja 55 segundos. Supongamos que las condiciones de tráfico inducen variaciones aleatorias en los tiempos de llegada de los automóviles, de forma que ”llegar cuando el semáforo está verde” es un suceso aleatorio. Para cinco coches que lleguen en tiempos diferentes e indeterminados, calcular la probabilidad de que:

a). solo tres encuentren la luz verde;

b). a lo sumo cuatro encuentren la luz verde;

c). más de uno encuentre la luz verde.

Ejercicio 71. Una firma de pedidos por correo envía una carta a sus clientes. La probabilidad de que un cliente elegido al azar conteste a esa carta es de $p = 0{,}1$. Hallar:

a). Distribución de probabilidad del número X de cartas que debe enviar hasta obtener exactamente 1 respuesta.

b). La esperanza y varianza matemática de la variable X.

c). Distribución de probabilidad del número Y de cartas que debe enviar para obtener exactamente k respuestas.

d). La esperanza y varianza matemática de la variable Y.

Ejercicio 72. Una caja con 12 artículos tiene 4 defectuosos. Si se toma una muestra de 3, en un caso con reemplazamiento y en otro sin reemplazamiento, ¿cuál será la probabilidad de no incluir artículos defectuosos en la muestra?

Ejercicio 73. Se lanza un dado todas las veces necesarias hasta que aparece un 6. Si X mide el número del lanzamiento en que ocurre. Se pide:

a). ¿Qué función de probabilidad tiene la variable aleatoria X?

b). Calcular $P(X = 3)$.

c). Calcular $P(X > 4)$.

Ejercicio 74. Sea X una variable aleatoria geométrica de parámetro p. Demostrar que:

$$P(X > a + b | X > a) = P(X > b),$$

para cualesquiera constantes positivas a y b.

Ejercicio 75. Para controlar la natalidad, un político algo excéntrico, propone para los nuevos matrimonios la siguiente norma: únicamente podrán tener hasta un varón y como máximo 5 hijos. Sea X la variable número de hijos y V la variable número de varones de un matrimonio. Se pide:

a). Probabilidad de que un matrimonio solo tenga un hijo.

b). Probabilidad de que un matrimonio tenga k hijos.

c). Número medio de hijos por matrimonio.

d). Número medio de varones por matrimonio.

e). ¿Reduce esta norma la frecuencia de varones en la población?

Ejercicio 76. Tres personas A, B, y C lanzan sucesivamente en el orden A, B, C un dado. La primera persona que saque un 6 gana. Si p es la probabilidad de sacar un 6 y $q = 1 - p$, ¿cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?

Ejercicio 77. Se lanza un dado todas las veces necesarias hasta obtener dos seises y X mide el número del lanzamientos hasta que dicho suceso ocurre. Se pide:

a). ¿Qué función de probabilidad tiene la variable aleatoria X?

b). $P(X = 3)$.

c). $P(X > 4)$.

Ejercicio 78. Sea X una variable aleatoria binomial negativa $NB(k, p)$. Demostrar que:

$$\mu = \frac{k}{p} \quad ; \quad \sigma_x^2 = k\frac{q}{p^2}.$$

Ejercicio 79. Se conoce de estudios anteriores que el tipo de grupo sanguíneo de una población se distribuye de acuerdo a los siguientes datos.

Grupo	A	B	AB	O
Porcentaje	43,2	14,2	6	36,6

En determinada situación de emergencia se necesitan realizar 5 transfusiones del tipo A. Se solicitan voluntarios a la población y se realizan extracciones sucesivas. ¿Cuál es la probabilidad de cubrir la emergencia con el décimo donante?

Ejercicio 80. Sea X binomial $Bin(n,p)$ y sea Y binomial negativa $NB(k,p)$, demostrar las siguientes relaciones entre ellas:

a). $P(Y \leq n) = P(X \geq k)$.

b). $P(Y > n) = P(X < k)$.

Ejercicio 81. La centralita telefónica de un hotel recibe un número de llamadas por minuto que sigue una ley de Poisson con media 0,5. Determinar la probabilidad de que en un minuto al azar:

a). Se reciba una única llamada.

b). Se reciban un máximo de dos llamadas.

c). La centralita quede bloqueada, sabiendo que no puede realizar más de 3 conexiones por minuto.

Ejercicio 82. En una gran ciudad se producen 2 incendios anuales por término medio. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año se produzcan más de cuatro?

Ejercicio 83. Sea X una variable aleatoria de Poison de parámetro λ, $Po(\lambda)$. Demostrar que:

$$\mu = \lambda \quad ; \quad \sigma_x^2 = \lambda.$$

Ejercicio 84. Se lanza una moneda 500 veces. Hallar la probabilidad de que la frecuencia relativa de caras esté comprendida entre 0,45 y 0,65.

Ejercicio 85. ¿Cuántas veces habría que lanzar una moneda regular a fin de tener al menos un 95 % de seguridad de que la frecuencia relativa de caras diste a lo más 0,1 de la probabilidad teórica 0,5?

Ejercicio 86. ¿Cuántas veces habría que lanzar un dado regular a fin de tener al menos un 95 % de seguridad de que la frecuencia relativa de caras diste a lo más 0,1 de la probabilidad teórica 1/6?

Ejercicio 87. Una fábrica produce artículos defectuosos con una probabilidad del 5 %. ¿Cuántas tornillos habría que inspeccionar para tener al menos un 98 % de seguridad de que la frecuencia relativa de tornillos defectuosos f_D diste de 0,05 en menos de 0,02? Contestar a la pregunta anterior si la probabilidad real de 0,05 es desconocida.

Ejercicio 88. Dos personas juegan a cara o cruz y han convenido en continuar la partida hasta que tanto la cara como la cruz se hayan presentado por lo menos 3 veces. Hallar la probabilidad de que el juego no se acabe cuando se han hecho 10 tiradas.

Ejercicio 89. Un test psicotécnico comprende 50 preguntas, para cada una existe una única respuesta correcta sobre 5 posibles. Cada respuesta correcta vale 1 punto.

a). Si se somete a una persona a este test y responde al azar, hallar la probabilidad de que obtenga cero puntos.

b). Si fuesen 200 personas respondiendo al azar, hallar el número medio de personas que obtienen 10 puntos.

Ejercicio 90. Una gran empresa celebra, exactamente dentro de un año, su centenario. La dirección decide que todos los hijos de los trabajadores que nazcan el día del centenario tendrán derecho a una cuenta de ahorro de 5000 euros. Suelen nacer 730 niños al año, es decir, unos 2 por día. El valor esperado del desembolso a efectuar es de 10000 euros. La dirección destina 25000 euros para prevenir alguna desviación. ¿Cuál es la probabilidad de que esta cantidad resulte insuficiente?

Ejercicio 91. El $4\,\%$ de las reservas de un vuelo no son utilizadas. Según esta observación, una compañia de aviación vende 75 billetes para 73 plazas. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pasajeros consigan plaza?

Ejercicio 92. Supóngase que en un estudio dental sobre niños se ha obtenido la proporción $p = 2/3$ de la población infantil que tiene alguna caries. Calcular:

a). Probabilidad de que haya que examinar 6 niños para encontrar uno con caries.

b). Probabilidad de que haya que examinar 15 niños para encontrar 5 con caries.

Ejercicio 93. El departamento de matemáticas propone un exámen de test consistente en 25 cuestiones. Cada cuestión tiene 5 respuestas listadas. Si un estudiante no conoce la respuesta correcta de ninguna cuestión y prueba suerte, calcular:

a). ¿Cuál es el número esperado de respuestas correctas y su desviación típica?

b). Suponiendo que cada respuesta acertada vale 1 punto, ¿cuánto debe valer cada respuesta fallada para que la nota esperada del estudiante que prueba suerte sea nula?

c). Si se pasa el examen cuando se responden correctamente 13 cuestiones, ¿cuál es la probabilidad de que pase el alumno que ha probado suerte?

Ejercicio 94. Se lanza un dado todas las veces necesarias hasta que aparece un 6. Si sabemos que no salió en la primera tirada, ¿cuál es la probabilidad de necesitar más de 3 lanzamientos?

Ejercicio 95. Una caja contiene 100 artículos, de los que 4 son defectuosos. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados en una muestra de 9.

a). Hallar $P(X = 2)$.

b). Aproximar la probabilidad anterior por una binomial.

c). Aproximar la probabilidad anterior por una Poisson.

Ejercicio 96. Supóngase que el número de llamadas telefónicas que recibe una operadora desde las 9:00 horas hasta las 9:05 horas sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 4$. Hallar:

a). Probabilidad de que la operadora no reciba ninguna llamada al día siguiente en ese intervalo de tiempo.

b). Probabilidad de que en los dos próximos dias la operadora reciba un total de 3 llamadas en ese intervalo de tiempo.

Ejercicio 97. Un almacén suministra un determinado tipo de grúa. El número de pedidos por día se ajusta a una distribucción de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Tres de estas grúas por lo general se tienen disponibles en el almacén. Si se piden más de tres, el comprador debe desplazarse a una distancia considerable hasta una empresa de ingeniería.

a). En un día cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que se realice un viaje a la empresa de ingeniería?

b). ¿Cuál es el número medio de pedidos por día?

c). ¿Cuántas grúas de repuesto deben permanecer en el almacén para despachar a los compradores el 90 % de las veces?

d). ¿Cuál es el número medio de compradores atendidos diariamente en el almacén?

e). ¿Cuál es el número esperado de veces que el compradores realizará el viaje a la empresa de ingeniería?

Ejercicio 98. Se supone que el número de accidentes por semana que ocurren en una fábrica sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Se pide:

a). Probabilidad de que en una semana cualquiera ocurra un solo accidente.

b). Probabilidad de que, en un grupo de 10 semanas, ocurran 3 accidentes en tres semanas distintas.

c). Probabilidad de que en una semana haya más de 3 accidentes.

d). Función de densidad del tiempo entre dos accidentes.

e). Probabilidad de que el tiempo entre dos accidentes sea superior a 3 semanas.

Ejercicio 99. Una agencia inmobiliaria dedicada a la venta de apartamentos en la Costa ha realizado un estudio de ventas, comprobando que solo el 5 % de las personas que acuden a visitar el piso piloto compran un apartamento. Se pide:

a). Calcular la probabilidad de que tenga que recibir 10 visitas hasta vender un apartamento.

b). Calcular la probabilidad de que tenga que recibir 10 visitas hasta vender dos apartamentos.

c). Se han tenido que recibir 10 visitas hasta vender 2 apartamentos. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 primeras visitas no efectuaran ninguna compra?

Ejercicio 100. Un video club tiene 12 películas infantiles para alquilar a diario. Para este grupo se estima que la demanda sigue un proceso de Poisson con tasa 10 películas/día. Se pide:

a). Probabilidad de que en un día se hayan alquilado todas las películas.

b). ¿Cuantas películas debería haber en existencia para que la probabilidad de no satisfacer la demanda de un día solo fuese del 0,07 %?

Ejercicio 101. Un lote de 10 motores eléctricos se debe rechazar totalmente o vender, según el resultado de la siguiente operación: se escogen dos motores al azar sin sustitución y se inspeccionan. Si uno o más son defectuosos, el lote se rechaza; en otro caso es aceptado. Supongamos que cada uno de los motores cuesta 75$ y se vende por 100$. Si el lote contiene un motor defectuoso, ¿cúal es beneficio neto esperado del fabricante?

Ejercicio 102. A un hotel llegan dos carreteras A y B. El número de llegadas diarias por cada carretera siguen distribuciones de Poisson independientes con parámetros 8 y 9 respectivamente.

a). Si un día llegaron 12 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 7 llegaran por la carretera A?

b). El coste diario de manutención por persona es de 2000 euros si son menos de 5 personas y 1500 euros si son 5 ó más personas. ¿Cuál será el coste diario esperado?

Ejercicio 103. Una empresa de fabricación de explosivos tiene dos secciones una segura S y otra con riesgo de accidentes R. En la sección S hay 2000 empleados donde el número de accidentes X_S por año sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 = 5$ y en R hay 500 empleados y el número de accidentes Y_R por año sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_2 = 10$. Los accidentes se producen de forma independiente en las dos secciones.

a). ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan cinco accidentes en la sección S?

b). ¿Cuál es el número medio de accidentes por año en la empresa?

c). Si en un año se han registrado 8 accidentes, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan producido 6 accidentes en la sección R?

La compañia "La Avispa.ªsegura a cada empleado de la sección S por una prima de p_1 euros y a cada empleado de la sección R por una prima de p_2 euros y una indemnización común de 10 millones por accidentado.

d). Expresar los beneficios B por año de la compañia.

e). ¿Cuáles son los valores mínimos justos de las primas p_1 y p_2, para que el beneficio esperado por la compañia no sea negativo?

3. Distribuciones continuas

Ejercicio 104. Una variable aleatoria X se distribuye de forma uniforme en $(2, 4)$. Se pide:

a). $P(X < 2{,}5)$

b). $P(X > 3{,}2)$

c). $P(2{,}2 < X < 3{,}5)$

d). $E(X)$ y $Var(X)$

Ejercicio 105. Se sabe que la cantidad aleatoria demandada durante un cierto periodo de tiempo por parte de una empresa textil tiene distribución uniforme y no supera la tonelada. Determinar para dicho periodo de tiempo:

a). Probabilidad de que la cantidad demandada no supere los 900 kg.

b). Probabilidad de que la cantidad demandada esté comprendida entre 800 y 900 kg.

c). La demanda esperada.

Ejercicio 106. Una empresa tiene una función de costes que viene dada por $C = 100{,}000 + 2X$. En el mercado vende cada unidad a 5 euros y la demanda X del citado artículo tiene una distribución uniforme entre 25000 y 30000 unidades. ¿Cuál será el beneficio esperado?

Ejercicio 107. Comprobar que si T es exponencial de parámetro α se cumple la propiedad

$$\mu_T = \frac{1}{\alpha} \quad ; \quad \sigma_T^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Ejercicio 108. Comprobar que si T es exponencial de parámetro α se cumple la propiedad

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t)$$

Ejercicio 109. La variable aleatoria T es de tipo $Exponencial(\alpha)$. ¿Cuál es la probabilidad de que T sea superior a su valor esperado? ¿Cuál es la probabilidad de que T sea superior al doble de su valor esperado?

Ejercicio 110. La función de densidad del tiempo T entre dos averías de una instalación de cálculo es

$$f(t) = 0{,}25e^{-0{,}25t}.$$

Para resolver un determinado problema es necesario que funcione la instalación sin fallos durante 3 minutos, que es el tiempo necesario para la resolución del problema. Si falla la instalación durante el periodo de 3 minutos hay que volver a empezar con el cálculo del problema teniendo en cuenta que la existencia de una avería sólo se aprecia después de los tres minutos. Sea Y el tiempo total necesario para la resolución del problema. Hallar:

a). Distribución de Y.

b). Tiempo medio de resolución del problema.

c). Probabilidad de que en 18 minutos puedan ser resueltos 3 problemas.

Ejercicio 111. La duración de la vida de una bombilla es $Exp(\alpha)$. La probabilidad de que sobrepase las 100 horas de uso es 0,9.

a). ¿Cuál es la probabilidad de que sobrepase 200 horas de uso?

b). ¿Cuántas horas se mantiene funcionando con una probabilidad 0,95?

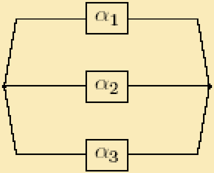
Ejercicio 112. El tiempo medio de funcionamiento de una bombilla es de 120 horas. Se ponen en funcionamiento 6 bombillas al mismo tiempo. Sea T_i el tiempo que transcurre hasta que se estropean i bombillas. Determinar $E[T_i]$ para $i = 1, 3, 6$.

Ejercicio 113. En la figura 1 cada componente tiene una función de fiabilidad de tipo exponencial con parámetro α_i. Determinar la función de fiabilidad del sistema y el tiempo medio de vida del sistema.

(a) Sistema-1 (b) Sistema-2

Figura 1: Fiabilidad en serie y paralelo

Ejercicio 114. En la figura 2 cada componente tiene la misma función de fiabilidad de tipo exponencial con parámetro α. Determinar la función de fiabilidad del sistema y el tiempo medio de vida del sistema.



(a) Sistema-3

Figura 2: Fiabilidad en serie y paralelo

Ejercicio 115. En la figura 1 cada componente tiene una función de fiabilidad de tipo exponencial con parámetro α_i. Sea A el suceso la componente 1 se estropea antes que la componente 2. Determinar la probabilidad del suceso A.

Ejercicio 116. Sean 30 instrumentos electrónicos $E_1, E_2, \ldots, E_{30}$. Tan pronto como falla E_1 se activa E_2, y así sucesivamente. Si el tiempo en que falla E_i, para cualquier i, es de tipo exponencial con parámetro $\alpha = 0{,}1$ hora^{-1} y T es el tiempo total de funcionamiento de los 30 instrumentos, hallar la probabilidad de que T supere las 350 horas.

Ejercicio 117. Sea Z una variable aleatoria normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Calcular:

a) $p(Z \leq 0)$	*b*) $p(Z \leq 1)$
c) $p(Z > 1)$	*d*) $p(Z > -1)$
e) $p(-1 < Z < 1)$	*f*) $p(-2 < Z < -1)$

Ejercicio 118. Sea X una variable aleatoria normal con $\mu = 50$ y $\sigma^2 = 25$. Calcular:

a) $p(X \leq 40)$	*b*) $p(X \leq 60)$
c) $p(X > 65)$	*d*) $p(X > 35)$
e) $p(40 < X < 60)$	*f*) $p(30 < X < 42)$

Ejercicio 119. Se sabe que el número X de personas que entran diariamente en unos grandes almacenes se distribuye normalmente. Si hay una probabilidad 0,58 de que entren menos de 75 clientes y una probabilidad 0,38 de que entren entre 75 y 80 clientes, determinar la media y la varianza de la variable X.

Ejercicio 120. La duración aleatoria de un determinado tipo de artículos, en horas, viene regulada por la ley de probabilidad $N(180, 5)$. Determinar la probabilidad de que la duración de tal artículo:

a). Sea superior a 170 horas.

b). Sea inferior a 150 horas.

Ejercicio 121. Sabiendo que la demanda aleatoria de gasolina durante un cierto periodo de tiempo se comporta con arreglo a la ley normal de media 150000 litros y desviación típica 10000 litros, determinar la cantidad que hay que tener dispuesta a la venta en dicho periodo para poder satisfacer la demanda con una probabilidad de 0,95.

Ejercicio 122. Un instrumento electrónico está formado por tres componentes. Dos formas posibles de disponer estas componentes son: i) en serie, ii) en paralelo. Si los tiempos de fallo de cada componente son independientes y siguen una distribución exponencial con función de densidad:

$$f(t) = 0{,}01\, e^{-0{,}01t},$$

se desea saber:

a). Probabilidad de que el instrumento funcione después de 50 horas en los dos casos.

b). Si el sistema no ha fallado durante 20 horas, ¿cuál es la probabilidad de que falle en las 30 horas siguientes?

Ejercicio 123. Para ganar el jubileo un peregrino decide ir, a golpe de alpargata, desde su pueblo hasta Santiago de Compostela, siendo la distancia entre ambos lugares de 300 km. Este peregrino es precisamente fabricante de dicho tipo de calzado y sus datos han permitido establecer a un ingeniero, que vive en el pueblo, a efectos de control de calidad, que los kilómetros que se pueden recorrer con un par de alpargatas, antes de que queden inservibles, es una variable $N(20, 16)$. Aunque el peregrino no le importa disciplinarse severamente, tampoco quiere correr un riesgo excesivo de destrozarse los pies. Por eso, quiere saber cuál es el menor número de pares de alpargatas que debe llevar para tener una garantía de al menos un 91 % de que no tendrá que caminar descalzo.

Ejercicio 124. Un individuo juega con probabilidad de ganar igual a 1/2 en cada juego. Si gana en un juego obtiene 5 euros y si pierde paga 5 euros. Durante una tarde juega 400 veces. ¿Con cuánto dinero debe acudir si quiere tener una probabilidad de 0,95 de hacer frente a sus posibles pérdidas?

Ejercicio 125. Un corredor de bolsa adquiere 50 acciones diferentes. Se sabe, por estudios anteriores, que los beneficios de cada acción se distribuyen uniformemente en el intervalo $(1000, 2000)$, y que dichos beneficios son independientes. Dicho corredor concierta con sus clientes una ganancia, por cada acción de 1200 euros, ¿qué probabilidad tiene de no perder dinero?

Ejercicio 126. Un instituto de opinión pública quiere obtener una muestra de votantes de un cierto estado, suficientemente grande para que la probabilidad de obtener una proporción de votos a favor del candidato A inferior al 50 %, sea de 0,01, si la intención de voto a favor de dicho candidato es realmente del 52 %. ¿Qué tamaño deberá tener la muestra?

Ejercicio 127. Dos individuos A y B realizan un juego bajo las siguientes condiciones: se lanza un dado perfecto, si sale “1 o 2” el jugador A paga 6 euros a B, pero si sale “3, 4, 5 ó 6” el jugador B paga 21 euros a A.Se pide:

a). Si juegan 300 partidas determinar la probabilidad de A gane entre 175 y 230 euros.

b). El beneficio esperado para ambos jugadores en 300 partidas.

c). Si B lleva en el bolsillo 200 euros, ¿cuántas partidas al menos hay que jugar para que B lo pierda todo con una probabilidad de al menos 0,9772?

Ejercicio 128. El contenido de un bote de cerveza se distribuye normalmente con media 30 cl, y desviación típica 2 cl.

a). ¿Cual es la probabilidad de que un bote determinado tenga más de 33 cl?

b). En un envase de 6 botes ¿cual es la probabilidad de que el contenido líquido total sea inferior a un litro y tres cuartos?

Ejercicio 129. Sabiendo que el 30 % de los enfermos con infartos de miocardio que ingresan en un hospital, fallecen en el mismo, y que al año ingresan 2000, determinar la probabilidad de que fallezcan en el hospital un máximo de 550.

Ejercicio 130. En un proceso de fabricación se sabe que el número aleatorio de unidades defectuosas producidas diariamente, viene dado por la ley de probabilidad:

$$P(X = r) = e^{-10}\frac{10^r}{r!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Determinar la probabilidad de que en 150 días, el número de unidades defectuosas producidas supere las 1.480 unidades.

Ejercicio 131. Una empresa sabe que la demanda aleatoria de un artículo que produce, se ajusta por la ley $N(10000; 100)$. Si la empresa decide seguir produciendo el artículo en el futuro, supuesto que la demanda esté comprendida entre 9930 y 10170 unidades, determinar la probabilidad de que no siga produciendo tal artículo.

Ejercicio 132. Una tienda comercial dispone a la venta diariamente sólo dos artículos a precios p_1 y p_2, de forma que: el 70 % de las unidades ofrecidas lo son del artículo de precio p_1 y el 30 % restante lo son del artículo de precio p_2. Si en un día determinado se venden 2000 unidades, determinar la probabilidad de que más de 800 unidades correspondan al artículo de precio p_2.

Ejercicio 133. Un concesionario de automóviles vende a particulares vehículos de la misma marca. Sabiendo que la probabilidad de que este tipo de vehículos esté en servicio dos años después es de 0,8, determinar la probabilidad de que–de 4000 automóviles vendidos–más de 3120 estén en servicio dentro de dos años.

Ejercicio 134. La demanda de un producto oscila diariamente entre 20 y 40 unidades. Determinar la probabilidad de que en un periodo de 182 días, el n^0 de unidades demandadas supere 6370 unidades, supuesta la independencia de la demanda de cada día respecto de las restantes.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 66. Sea X el número de varones de entre 6 hijos. $X \equiv Bin(6; 0{,}51)$, luego:

a). $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^6 = 1 - 0{,}49^6 = \mathbf{0.986}$

b). $P(X \leq 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - p^6 = 1 - 0{,}51^6 = \mathbf{0.982}$

Ejercicio 66

Ejercicio 67. Sea X el número de aciertos de entre 10 disparos.

$$X \equiv Bin(10; \frac{1}{5})$$

luego:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)) \\ &\Longrightarrow 1 - q^{10} - 10\, p\, q^9 \end{aligned}$$

Ejercicio 67

Ejercicio 68. Sea X_i para todo i una distribución de Bernoulli con

$$E[X_i] = p \qquad Var(X_i) = pq$$

Como

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

luego:

$$\begin{aligned} \mu = E[X] &= E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n] \\ &= n\,p \end{aligned}$$

y tomando varianzas para una suma de variables aleatorias idénticas e independientes

$$\begin{aligned} \sigma^2 = Var[X] &= Var[X_1] + Var[X_2] + \ldots + Var[X_n] \\ &= n\,pq \end{aligned}$$

Ejercicio 68

Ejercicio 69. Sea X el número de caras obtenido en los 500 lanzamientos. $X \equiv B(500; 0{,}5)$, luego

$$
\begin{aligned}
P(240 \leq X \leq 260) &= \sum_{k=240}^{260} \begin{pmatrix} 500 \\ k \end{pmatrix} 0{,}5^{500-k}\, 0{,}5^{k} \\
&= \sum_{k=240}^{260} \begin{pmatrix} 500 \\ k \end{pmatrix} 0{,}5^{500}
\end{aligned}
$$

como $np = 250 > 5$ y $npq = 125 > 5$, aproximamos a la distribución normal $B(500, 0{,}5) \sim N(\mu = 250, \sigma = \sqrt{125})$, realizando el ajuste por continuidad:

$$P\left(\frac{240 - 250 - 0{,}5}{\sqrt{125}} < z < \frac{260 - 250 + 0{,}5}{\sqrt{125}}\right) = P(-0{,}94 < z < 0{,}94) =$$

$$\Phi(0{,}94) - \Phi(-0{,}94) = 2\,\Phi(0{,}94) - 1 = 2\,0{,}8264 - 1 = \mathbf{0.653}$$

Ejercicio 69

Ejercicio 70. Sea p la probabilidad de que un coche cualquiera encuentre la luz verde. Entonces $p = \dfrac{15}{75}$. Sea X el número de coches que encuentran la luz verde. Como

$$X \sim Bin(n = 5; p = \frac{1}{5})$$

a). $P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,0512$

b). $P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 0,99968$

c).

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \binom{5}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \\ &= 0,26272 \end{aligned}$$

Ejercicio 70

Ejercicio 71.

a). X se ajusta a una distribución geométrica $G(p = 0{,}1)$.

b). Si $X \sim G(p = 0{,}1)$, entonces

$$\mu_X = \frac{1}{p} = 10 \qquad Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

c). Y se ajusta a una distribución Binomial Negativa $BN(k; p = 0{,}1)$,

d). Si $Y \sim BN(k; p = 0{,}1)$, entonces

$$\mu_Y = \frac{k}{p} = 10 \qquad Var(Y) = \frac{kq}{p^2}$$

Ejercicio 71

Ejercicio 72.

- Con reemplazamiento, X sigue una distribución Binomial

$$Bin(n=3; p=\frac{4}{12})$$

luego

$$P(X=0) = q^3 = \left(\frac{8}{12}\right)^3 = 0,296$$

- Sin reemplazamiento, X sigue una distribución Hipergeométrica

$$HG(N, E, n) = HG(12, 4, 3)$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{14}{55} = 0,254$$

Ejercicio 72

Ejercicio 73.

- X sigue una distribución geométrica o de Pascal $G(p = \frac{1}{6})$ luego
$$P(X = k) = p\,q^{k-1}$$
- $$P(X = 3) = p\,q^2$$
- En la geometrica se tiene que $P(X > k) = q^k$, luego
$$P(X > 4) = q^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Ejercicio 73

Ejercicio 74. Si X es geométrica, de parámetro p, se tiene $\forall k$ que $P(X > k) = q^k$, luego si $a, b > 0$,

$$\begin{aligned}
P(X > a + b | X > a) &= \frac{P(X > a + b \cap X > a)}{P(X > a)} = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} \\
&= \frac{q^{a+b}}{q^a} = q^b \\
&= P(X > b)
\end{aligned}$$

Ejercicio 74

Ejercicio 75. Sea X la variable número de hijos y V la variable número de varones de un matrimonio, y sea p la probabilidad de que nazca un varón. Configuramos la función de distribución en una tabla para ambas variables

X	1	2	3	4	5	
p_X	p	$p\,q$	$p\,q^2$	$p\,q^3$	$p\,q^4+q^5$	
V	1	1	1	1	1	0
p_V	p	$p\,q$	$p\,q^2$	$p\,q^3$	$p\,q^4$	q^5

a). $P(X=1)=p$.

b). $P(X=k)=p\,q^{k-1}$ con $1\leq k\leq 4$ y $P(X=5)=p\,q^4+q^5$

c). Número medio de hijos por matrimonio:

$$\begin{aligned} E[X] &= 1\cdot p+2\cdot p\,q+3\cdot p\,q^2+4\cdot p\,q^3+5\cdot(p\,q^4+q^5) \\ &= (\text{sustituyendo } p \text{ por } 1-q) \\ &= 1+q+q^2+q^3+q^4 \end{aligned}$$

d). Número medio de varones por matrimonio:

$$\begin{aligned} E[V] &= 1 \cdot p + 1 \cdot p\,q + 1 \cdot p\,q^2 + 1 \cdot p\,q^3 + 1 \cdot p\,q^4 + 0 \cdot q^5) \\ &= p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) \end{aligned}$$

e). Como

$$\frac{E[V]}{E[X]} = p$$

la frecuencia de varones en la población sigue siendo de p, es decir con ese criterio de parada en la descendencia, no se modifica la proporción entre hombres y mujeres.

Ejercicio 75

Ejercicio 76. Gana A cuando ocurren los siguientes sucesos

$$6, \overline{666}6, \overline{666666}6, \overline{666666666}6 \cdots$$

razonando análogamente para B y C, se tiene:

$$\begin{aligned} P(A) &= p + p\,q^3 + p\,q^6 + \cdots \\ &= \frac{p}{1-q^3} \\ P(B) &= p\,q + p\,q^4 + p\,q^7 + \cdots \\ &= \frac{p\,q}{1-q^3} \\ P(C) &= p\,q^2 + p\,q^5 + p\,q^8 + \cdots \\ &= \frac{p\,q^2}{1-q^3} \end{aligned}$$

Ejercicio 76

Ejercicio 77.

a). X sigue una distribución binomial negativa $BN(k=2; p=\frac{1}{6})$ luego

$$P(X=n)=\binom{n-1}{1}p^2\,q^{n-2} \qquad n=2,3,\cdots$$

b). $P(X=3)=2\,p^2\,q$

c).

$$\begin{aligned} P(X>4) &= 1-P(X\leq 4)= \\ &= 1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4) \\ &= 1-p^2\,q^0-2\,p^2\,q-3\,p^2\,q^2 \end{aligned}$$

siendo $p=1/6$ y $q=5/6$.

Ejercicio 77

Ejercicio 78. Sea X_1 el número de intentos hasta el primer éxito, X_2 el número de intentos desde el primer éxito hasta el segundo éxito,X_i el número de intentos desde el $(i-1)$ésimo éxito hasta el $i-$ésimo éxito. Entonces

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \qquad X_i \sim G(p)$$

X es la suma de variables aleatorias idénticas e igualmente distribuidas, $\{X_i\}$()i.i.d.), con $E[X_i] = \dfrac{1}{p}$ y $Var[X_i] = \dfrac{q}{p^2}$. Tomando esperanzas y varianzas se llega a

$$E[X] = \frac{k}{p} \qquad Var[X] = \frac{k\,q}{p^2}$$

Ejercicio 78

Ejercicio 79. Sea X el número de extracciones hasta encontrar el quinto donante con sangre tipo A. Como X sigue una distribución binomial negativa $BN(5;p)$, donde p es la probabilidad de que un donante cualquiera tenga sangre tipo A, es decir $p = 0{,}432$.

$$P(X = 10) = \binom{9}{4} p^5 \, q^5$$

Ejercicio 79

Ejercicio 80.

a). El suceso $\{Y \leq n\}$ en la hipergeométrica equivale a necesitar al menos n intentos para obtener los k éxitos, lo que equivale al suceso $\{X \geq k\}$ en la binomial.

b). Es inmediato de lo anterior.

Ejercicio 80

Ejercicio 81. La variable X número de llamadas por minuto sigue una distribución de Poisson $Po(\lambda = 0{,}5)$, luego

a). $P(X=1) = e^{-0{,}5}\dfrac{0{,}5}{1!} = 0{,}303$

b). $P(X \le 2) = e^{-0{,}5} + e^{-0{,}5}\dfrac{0{,}5}{1!} + e^{-0{,}5}\dfrac{0{,}5^2}{2!} = 0{,}986$

c).

$$\begin{aligned}
P(X>3) &= 1 - P(X \le 3) = \\
&= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) \\
&= 1 - e^{-0{,}5} - e^{-0{,}5}\frac{0{,}5}{1!} - e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^2}{2!} - e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^3}{3!} \\
&= 0{,}002
\end{aligned}$$

Ejercicio 81

Ejercicio 82. La variable X número de incendios anuales sigue una distribución de Poisson $Po(\lambda = 2)$, luego

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) = \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - \ldots - P(X = 4) \\ &= 1 - e^{-2} - e^{-2}\frac{2}{1!} - e^{-2}\frac{2^2}{2!} - e^{-2}\frac{2^3}{3!} - e^{-2}\frac{2^4}{4!} \\ &= 0,0527 \end{aligned}$$

Ejercicio 82

Ejercicio 83. De las dos igualdades del cálculo siguientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,\lambda^k}{k!} = \lambda\, e^{\lambda} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2\,\lambda^k}{k!} = (\lambda^2+\lambda)\, e^{\lambda}$$

y de la definición de $E[X]$ y $Var[X]$ se obtiene con facilidad que

$$\mu = \lambda \quad ; \quad \sigma_x^2 = \lambda.$$

Ejercicio 83

Ejercicio 84. El número de caras sigue una distribución binomial $B(500; 0{,}5)$. A partir de la aproximación de

$$X \equiv B(n,p) \sim N(np, \sigma = \sqrt{npq})$$

la variable aleatoria frecuencia relativa f_r se aproxima a

$$f_r = \frac{X}{n} \sim N(p, \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

luego

$$P(0{,}45 < f_r < 0{,}65) = P\left(\frac{0{,}45 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{500}}} < z < \frac{0{,}65 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{500}}}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}24) - \Phi(-2{,}24) = 2\,\Phi(2{,}24) - 1 = \mathbf{0.975}$$

Ejercicio 84

Ejercicio 85. El número de caras sigue una distribución binomial $B(n; 0{,}5)$. A partir de la aproximación de

$$X \equiv B(n,p) \sim N(np, \sigma = \sqrt{npq})$$

la variable aleatoria frecuencia relativa f_r se aproxima a

$$f_r = \frac{X}{n} \sim N(p, \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

luego nos pide n que cumpla

$$P(|f_r - 0{,}5| < 0{,}1) \geq 0{,}95$$

$$P(-0{,}1 < f_r - 0{,}5 < 0{,}1) = P\left(\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}} < z < \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}2\sqrt{n}) - \Phi(0{,}2\sqrt{n}) = 2\,\Phi(0{,}2\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}95 \Longrightarrow$$

$$\Phi(0{,}2\sqrt{n}) \geq 0{,}975 = \Phi(1{,}96) \Longrightarrow 0{,}2\sqrt{n} \geq 1{,}96 \Longrightarrow n \geq 96$$

Ejercicio 85

Ejercicio 86. Se resuelve como el ejercicio anterior con $p = \frac{1}{6}$

$$P(|f_r - \frac{1}{6}| < 0{,}1) \geq 0{,}95$$

$$P(-0{,}1 < f_r - \frac{1}{6} < 0{,}1) = P\left(\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{5}{36\,n}}} < z < \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{5}{36\,n}}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}268\,\sqrt{n}) - \Phi(0{,}268\,\sqrt{n}) = 2\,\Phi(0{,}268\,\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}95 \Longrightarrow$$

$$\Phi(0{,}268\,\sqrt{n}) \geq 0{,}975 = \Phi(1{,}96) \Longrightarrow 0{,}268\,\sqrt{n} \geq 1{,}96 \Longrightarrow n \geq 54$$

Ejercicio 86

Ejercicio 87. Se resuelve como el ejercicio anterior con $p = 0{,}05$ y $q = 0{,}95$

$$P(|f_r - \frac{1}{6}| < 0{,}02) \geq 0{,}98$$

$$P(-0{,}02 < f_D - \frac{1}{6} < 0{,}02) = P\left(\frac{-0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}05\,0{,}95}{n}}} < z < \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}05\,0{,}95}{n}}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}092\sqrt{n}) - \Phi(0{,}092\sqrt{n}) = 2\,\Phi(0{,}092\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}98 \Longrightarrow$$

$$\Phi(0{,}092\sqrt{n}) \geq 0{,}99 = \Phi(2{,}326) \Longrightarrow 0{,}092\sqrt{n} \geq 2{,}326 \Longrightarrow n \geq 640$$

En el caso en que desconocemos el valor de p se toma como producto de $p\,q = 1/4$ ya que siempre se cumple que $p\,q = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

$$P(-0{,}02 < f_D - \frac{1}{6} < 0{,}02) = P\left(\frac{-0{,}02}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} < z < \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}04\sqrt{n}) - \Phi(-0{,}004\sqrt{n}) = 2\,\Phi(0{,}04\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}98 \Longrightarrow$$

$$\Phi(0{,}04\sqrt{n}) \geq 0{,}99 = \Phi(2{,}326) \Longrightarrow 0{,}04\sqrt{n} \geq 2{,}326 \Longrightarrow n \geq 3382$$

Ejercicio 87

Ejercicio 88. Sea el suceso $A = \{ \textit{ menos de tres caras } \}$ y el suceso $B = \{ \textit{ menos de tres cruces } \}$. Se pide $P(A \cup B)$, como son incompatibles, si tiramos 10 veces, tenemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sean X las caras en 10 tiradas e Y las cruces en 10 tiradas:

- $$P(A) = P(X \leq 2) = \binom{10}{0}\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{1}\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{2}\frac{1}{2^{10}} = 0{,}0546$$
- $$P(B) = P(Y \leq 2) = \binom{10}{0}\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{1}\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{2}\frac{1}{2^{10}} = 0{,}0546$$

luego

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}1092$$

Ejercicio 88

Ejercicio 89. Sea X el número de respuestas correctas de entre las 50, como $X \sim B(50; \frac{1}{5})$

a). $P(X = 0) = q^{50} = 1{,}4\,10^{-5}$

b). Como $P(X = 10) = \binom{50}{10} p^{10}\, q^{40} = 0{,}14$ el número medio de entre las 200 será $200 \cdot 0{,}14 = 28$

Ejercicio 89

Ejercicio 90. Sea X el número de nacimientos que se producen el día del centenario, entonces, como $X \sim B(730; \frac{1}{365})$. Para que la cantidad resulte insuficiente se necesitan al menos 6 nacimientos

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{i=0}^{i=5} \binom{703}{i} p^i \, q^{730-i} = 0{,}013$$

Podemos también utilizar la aproximación de Poisson con $np = \lambda = 2$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{i=0}^{i=5} e^{-2} \frac{2^i}{i!} = 0{,}0165$$

Ejercicio 90

Ejercicio 91. Sea X el número de reservas anuladas de entre los 75 billetes, entonces, como $X \sim B(75; 0{,}04)$. Para que todos los pasajeros consigan plaza se necesitan al menos 2 anulaciones, luego

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{i=0}^{i=1} \binom{75}{i} p^i \, q^{75-i} = 0{,}807$$

Podemos también utilizar la aproximación de Poisson con $np = \lambda = 3$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{i=0}^{i=1} e^{-3} \frac{3^i}{i!} = 0{,}801$$

Ejercicio 91

Ejercicio 92.

a). Sea X el número de niños hasta encontrar uno con caries, con $p = 2/3$, entonces

$$P(X = 6) = p\, q^5$$

b). Sea Y el número de niños hasta encontrar 5 con caries, con $p = 2/3$, entonces

$$P(X = 15) = \left(\begin{array}{c} 14 \\ 4 \end{array} \right) p^5\, q^{10}$$

Ejercicio 92

Ejercicio 93. Sea X el número de aciertos a las 25 cuestiones, entonces $X \sim B(25; p = 0{,}2)$.

a). El número esperado de aciertos es $E[X] = np = 5$.

b). Sea P el número de puntos, y c la penalización por fallo, entonces

$$P = X - c(25 - X) = (1 + c)X - 25\,c$$

$$E[P] = 0 \Longrightarrow (1 + c)E[X] - 25\,c = 0 \Longrightarrow c = 0{,}25$$

c). La probabilidad de que pase el alumno que ha probado suerte

$$P(X \geq 13) = \sum_{i=13}^{i=25} \binom{25}{i} p^i\, q^{25-i} = 0{,}004$$

Ejercicio 93

Ejercicio 94. Sea X el número de lanzamientos hasta encontrar un 6, con $p = 1/6$, entonces

$$P(X > 3|X > 1) = \frac{q^3}{q^1} = q^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}694$$

Ejercicio 94

Ejercicio 95.

a). El número de defectuosos X sigue una hipergeométrica con $N = 100$, $E = 4$, $N - E = 96$ y tamaño de la muestra $n = 9$.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{96}{7}}{\binom{100}{9}} = \mathbf{0{,}0376}$$

b). Con una binomial con $n = 9$ y $p = 4/100 = 0{,}04$ tenemos:

$$P(X = 2) = \binom{9}{2} 0{,}04^2 0{,}96^7 = \mathbf{0{,}0432}$$

c). Por Poisson con $\lambda = np = 0{,}36$, obtenemos

$$P(X = 2) = e^{-0{,}36}\,\frac{0{,}36^2}{2!} = \mathbf{0{,}0452}$$

Ejercicio 95

Ejercicio 96.

a). Sea X una distribución de Poisson $P(\lambda = 4)$

$$P(X = 0) = e^{-4} = \mathbf{0{,}0183}$$

b). Sea X_1 las llamadas del primer día y X_2 las llamadas del segundo día, entonces las llamadas conjuntas serán $T = X_1 + X_2$, que siendo independientes corresponde a una distribución de Poisson $P(\lambda = 4 + 4 = 8)$, luego

$$P(T = 3) = e^{-8}\frac{8^3}{3!} = \mathbf{0{,}0286}$$

Ejercicio 96

Ejercicio 97.

a).

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{i=3} e^{-2} \frac{2^i}{i!} = \mathbf{0{,}1429}$$

b). Como X es el número de pedidos diarios y sigue el tipo Poisson $P(\lambda = 2)$

$$E[X] = \mathbf{2} \text{ número medio de pedidos diarios}$$

c). Hay que hallar n número de gruas para que

$$P(X \leq n) \geq 0{,}9$$

Por tanteo

$$P(x = 0) + P(x = 1) + \ldots + P(x = 4) = 0{,}9473 > 0{,}9$$

luego se necesitan tener disponibles $n = 4$ gruas para asegurar el suministro con al menos un 90 %.

d). Sea A la variable aleatoria que mide el número de clientes atendidos. Claramente A solo puede tomar los valores $A = 0, 1, 2, 3$ que son las gruas disponibles. La distribución de probabilidad de A es:

$$P(A = 0) = P(X = 0) = e^{-2} = 0,1353$$

$$P(A = 1) = P(X = 1) = e^{-2}2/1! = 0,2707$$

$$P(A = 2) = P(X = 2) = e^{-2}2^2/2! = 0,2707$$

$$P(A = 3) =$$

$$= P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0,3233$$

Luego

$$E[A] = 0.P(A = 0) + 1.P(A = 1) + 2.P(A = 2) + 3P(A = 3) = \mathbf{1{,}7830}$$

e). Sea Y la variable aleatoria que mide el número de compradores que marcharán a la empresa de ingeniería. Comor $X = A + Y$, y $E[X] = 2$ y $E[A] = 1{,}7830$,

$$E[Y] = 2 - 1{,}7830 = \mathbf{0{,}217}$$

Ejercicio 97

Toc ◀◀ ▶▶ ◀ ▶ Volver ◀ Doc Doc ▶

Ejercicio 98.

a). El número de accidentes en una semana es $X \sim P(\lambda = 2)$

$$P(X = 1) = e^{-2}\frac{2}{1!} = \mathbf{0,27067}$$

b). Sea Z el número de semanas de entre 10 que hay un accidente. Z sigue una $B(10, p = 0,27067)$, luego

$$P(Z = 3) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 3 \end{array}\right) p^3\, q^7$$

c).

$$P(X > 3) = 1 - e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = \mathbf{0,14288}$$

d). Sea T tiempo entre dos accidentes. T sigue una distribución de tipo exponencial de parámetro $\alpha = 2$.

e). Pide $P(T > 3) = 1 - F_T(3) = e^{-2\cdot 3} = \mathbf{0,002}$.

Ejercicio 98

Ejercicio 99.

a). Sea X el número de visitas hasta vender un apartamento, X es $G(p = 0{,}05)$

$$P(X = 10) = p\,q^9 = \mathbf{0,03151}$$

b). Sea Z el número de visitas hasta vender dos apartamento, Z es $BN(k = 2, p = 0{,}05)$

$$P(Z = 10) = \left(\begin{array}{c} 9 \\ 1 \end{array}\right) p^2\,q^8 = \mathbf{0,01493}$$

c). Equivale a que las tres primeras han sido fracasos y en las siete restantes dos éxitos siendo uno de ellos la última visita, es decir

$$P(Z > 3 \text{ sin éxito en las tres primeras } |Z = 10) =$$

$$= \frac{q\,q\,q\,\left(\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array}\right) p^2\,q^5}{P(Z = 10)} = \mathbf{\frac{6}{9}}$$

Ejercicio 99

Ejercicio 100.

a). Sea X el número de películas demandadas,

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \sum_{i=0}^{11} e^{-10}.\frac{10^i}{i!} = \mathbf{0,3032}$$

Este cálculo se puede aproximar con $Po(10) \approx N(10, \sigma^2 = 10)$.

b). Sean n las películas almacenadas, entonces necesitamos calcular n para que $P(X > n) \leq 0{,}07$ o bien $P(X \leq n) \geq 0{,}93$. Con la aproximación $Po(10) \approx N(10, \sigma^2 = 10)$ tendremos

$$P(X \leq n) = P(z \leq \frac{n-10}{\sqrt{10}} = z_0) \geq 0{,}93$$

de la tabla normal $N(0,1)$ obtenemos $z_0 = 1{,}48$, luego resolvemos

$$z_0 = \frac{n-10}{\sqrt{10}} = 1{,}48 \quad \mathbf{n} = \mathbf{15} \text{ peliculas}$$

Ejercicio 100

Ejercicio 101. El número de defectuosos X sigue una hipergeométrica con $N = 10$, $E = 1$, $N - E = 9$ y tamaño de la muestra $n = 2$. Sea A el suceso *el lote se acepta*, entonces

$$P(A) = P(X = 0) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 100 \\ 9 \end{pmatrix}} = \mathbf{0{,}8}$$

beneficio neto esperado del fabricante B será:

$$E[B] = 25\,P(A) - 75\,P(\overline{A}) = 5$$

Ejercicio 101

Ejercicio 102.

a). Sea X_A el número de clientes que llegan por la carretera A y X_B el número de clientes que llegan por la carretera B. El total es $T = X_A + X_B$ que es de Poisson de parámetro $\lambda = 17$.

$$P(X_A = 7 | T = 12) = \frac{P(X_A = 7 \text{ y } X_B = 5)}{P(T = 12)} =$$

$$= \frac{e^{-8}\frac{8^7}{7!}\, e^{-9}\frac{9^5}{5!}}{e^{-17}\frac{17^{12}}{12!}} = \mathbf{0,16834}$$

b). Sea A el suceso "llegan menos de 5 personas".

$$P(A) = P(T < 5) = e^{-17}\sum_{i=0}^{4}\frac{17^i}{i!} = 0,0002$$

El coste es $C = 2000.I_A + 1500 \cdot I_{\overline{A}}$, y el coste diario esperado:

$$E[C] = 2000 \cdot P(A) + 1500.P(\overline{A}) = \mathbf{1500,1}$$

Ejercicio 102

Ejercicio 103.

a). $P(X_S = 5) = e^{-5}\frac{5^5}{5!} = \mathbf{0{,}1754}$

b). $\lambda_1 + \lambda_2 = 15.$

c). Sea $Z = X_S + Y_R$ el número total de accidentes,

$$\begin{aligned} P(Y_R = 6|Z = 8) &= \frac{P(X_S = 2, Y_R = 6)}{P(Z = 8)} \\ &= \frac{e^{-10}\frac{10^6}{6!}e^{-5}\frac{5^2}{2!}}{e^{-15}15^8/8!} = 0{,}273 \end{aligned}$$

d).

$$B = 2000\,p_1 + 500\,p_2 - 10^6\,(X_S + Y_R)$$

e). Hacemos que sea justo para los empleados de la sección **S**, con

$$2000\,p_1 - 10^6\,E[X_S] = 0, \qquad p_1 = 2500 \text{ euros}$$

Lo mismo para los empleados de la sección **R**, con

$$500\,p_2 - 10^6\,E[Y_R] = 0, \qquad p_2 = 20000 \text{ euros}$$

Otra forma, es exigir que la razón de los ingresos por sección sea la razón de indices de accidentados por sección , es decir

$$\frac{2000\,p_1}{500\,p_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{8}$$

que junto a $E[B] = 2000\,p_1 + 500\,p_2 - 10^6\,15 = 0$ proporciona la misma solución.

Ejercicio 103

Ejercicio 104. Sea $X \sim U(2,4)$ con

$$f(x) = \frac{1}{2} \qquad F_X = \frac{x-2}{2} \qquad 2 < x < 4$$

a). $P(X < 2{,}5) = F_X(2{,}5) = 0{,}25$

b). $P(X > 3{,}2) = 1 - F_X(3{,}2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

c). $P(2{,}2 < X < 3{,}5) = F_X(3{,}5) - F_X(2{,}2) = 0{,}75 - 0{,}1 = 0{,}65$

d). $E[X] = 3$ y $Var[X] = \frac{4}{12}$

Ejercicio 104

Ejercicio 105. Sea $X \sim U(0,1)$ con

$$f(x) = 1 \qquad F_X = x \qquad 0 < x < 1$$

a). $P(X < 0{,}9) = 0{,}9$

b). $P(0{,}8 < X < 0{,}9) = F_X(0{,}9) - F_X(0{,}8) = 0{,}1$

c). $E[X] = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 105

Ejercicio 106. Sea $X \sim U(25000, 30000)$ con

$$f(x) = \frac{x - 25000}{5000} \qquad 25000 < x < 30000$$

como los beneficios $B = V - C$

$$E[B] = E[5 \cdot X - 100000 - 2 \cdot X) = 3 \cdot E[X] - 100000 = -17500$$

Ejercicio 106

Ejercicio 107. Sea $T \sim Exp(\alpha)$ con

$$f(t) = \alpha\, e^{-\alpha\, t} \qquad F_T(t) = 1 - e^{-\alpha\, t} \qquad 0 < t$$

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty \alpha\, t\, e^{-\alpha\, t} = \text{ (por partes)} \\ &= \left(-t\, e^{-\alpha\, t} - \frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha\, t} \right)_0^\infty \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Para la varianza $Var[T] = E[T^2] - E[T]^2$ se integra dos veces por partes y se obtiene

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Ejercicio 107

Ejercicio 108. Sea $T \sim Exp(\alpha)$ con

$$f(t) = \alpha\, e^{-\alpha\, t} \qquad F_T(t) = 1 - e^{-\alpha\, t} \qquad 0 < t$$

$$\begin{aligned} P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t \cap T > s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} \\ &= \frac{e^{-\alpha\,(s+t)}}{e^{-\alpha\, s}} \\ &= e^{-\alpha\, t} = P(T > t) \end{aligned}$$

Ejercicio 108

Ejercicio 109. Sea $T \sim Exp(\alpha)$ con

$$f(t) = \alpha\, e^{-\alpha\, t} \qquad F_T(t) = 1 - e^{-\alpha\, t} \qquad 0 < t$$

$$P(T > \frac{1}{\alpha}) = e^{-\alpha\, \frac{1}{\alpha}} = e^{-1}$$

y

$$P(T > 2\,\frac{1}{\alpha}) = e^{-\alpha\, 2\, \frac{1}{\alpha}} = e^{-2}$$

Ejercicio 109

Ejercicio 110. La probabilidad de que la instalación no se averíe en tres minutos es $P(T > 3) = e^{-0,25\cdot 3} = e^{-0,75} = \mathbf{p} = 0,472$.

a). La variable Y es geométrica $G(\mathbf{p})$ y puede tomar los valores $1, 2, 3, \ldots$ en unidades de 3 minutos. La probabilidad de resolver el problema en el k-ésimo intento y por tanto se empleen $3k$ minutos es

$$P(Y = k) = \mathbf{p}q^{k-1}$$

b). $E[Y] = e^{0,75} = \mathbf{6{,}35}$ minutos.

c). Sea Z el número de problemas resueltos en 18 minutos. Z se distribuye como una $B(6, p)$, luego

$$P(Z = 3) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array}\right) p^3\, q^3 = 0,7072$$

Ejercicio 110

Ejercicio 111. Sea $T \sim Exp(\alpha)$ con

$$f(t) = \alpha\, e^{-\alpha\, t} \qquad F_T(t) = 1 - e^{-\alpha\, t} \qquad 0 < t$$

como $P(T > 100) = e^{-\alpha\, 100} = 0{,}9 \Longrightarrow \alpha = 0{,}00105$

a). $P(T > 200) = e^{-\alpha\, 200} = 0{,}81$

b). Para hallar t con $P(T > t) = 0{,}95$ resolvemos

$$e^{-\alpha\, t} = 0{,}95 \Longrightarrow t = 48{,}85$$

Ejercicio 111

Ejercicio 112. El tiempo B_i de duración de una bombilla es $Exp(\alpha)$, la variable $M_i = min(B_1, B_2, \cdots, B_i)$ es también exponencial $Exp(i\,\alpha)$. M_6 indica el tiempo que transcurre hasta la primera rotura, M_5 indica el tiempo que transcurre entre la primera rotura y la segunda,y análogamente para M_i, entonces $T_1 = M_6$, $T_3 = M_6 + M_5 + M_4$ y $T_6 = M_6 + M_5 + \cdots + M_1$, luego

$$
\begin{aligned}
E[T_1] &= \frac{120}{6} = 20 \\
E[T_3] &= \frac{120}{6} + \frac{120}{5} + \frac{120}{4} = 74 \\
E[T_6] &= \frac{120}{6} + \frac{120}{5} + \cdots + \frac{120}{1} = 220
\end{aligned}
$$

Ejercicio 112

Ejercicio 113.

- Sistema en serie. Sea $T = min(T_1, T_2)$

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(T_1 > t \wedge T_2 > t) = P(T_1 > t)\, P(T_2 > t) \\ &= e^{-\alpha_1\, t}\, e^{-\alpha_2\, t} = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\, t} \\ &= 1 - F_T(t) \end{aligned}$$

luego

$$f_T(t) = (\alpha_1 + \alpha_2)\, e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\, t}$$

lo que muestra que T sigue una distribución $Exp(\alpha_1 + \alpha_2)$ y por tanto la esperanza es

$$E[T] = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

- Sistema en paralelo. Sea $T = max(T_1, T_2)$

$$\begin{aligned}
P(T < t) &= P(T_1 < t \wedge T_2 < t) = P(T_1 < t)\, P(T_2 < t) \\
&= (1 - e^{-\alpha_1\, t})\,(1 - e^{-\alpha_2\, t}) \\
&= F_T(t)
\end{aligned}$$

y calculando la esperanza se tiene

$$E[T] = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Ejercicio 113

Ejercicio 114. En el sistema en paralelo el tiempo es $T = max(T_1, T_2, T_3)$

$$\begin{aligned} P(T < t) &= P(T_1 < t \wedge T_2 < t \wedge T_3 < t) = \\ &= P(T_1 < t)\, P(T_2 < t)\, P(T_3 < t) \\ &= (1 - e^{-\alpha\, t})^3 \\ &= F_T(t) \end{aligned}$$

el calculo de la esperanza por integración por partes es algo pesado, y resulta

$$E[T] = \frac{1}{\alpha}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$$

Ejercicio 114

Ejercicio 115. Sea A el suceso la componente 1 se estropea antes que la componente 2. Si T_1 es la duración de la componente 1, T_2 es la duración de la componente 2, T_{min} es la duración mínima del sistema y T_{max} es la duración máxima del sistema, se tiene que

$$T_{max} = T_{min} + T_2\, A + T_1\, \overline{A}$$

y tomando esperanzas

$$E[T_{max}] = E[T_{min}] + E[T_2]\, P(A) + E[T_1]\, P(\overline{A})$$

Sustituyendo las esperanzas del ejercicio 113, se obtiene

$$P(A) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Ejercicio 115

Ejercicio 116. Si el tiempo T_i de cada instrumento es $Exp(\alpha = 0{,}1)$ con $\mu_X = 10$ y $\sigma_X^2 = 10$, el tiempo total de funcionamiento de los 30 instrumentos corresponde a la variable

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{30}$$

Por el Teorema Central del Límite, la suma de las 30 variables i.i.d. se ajusta a una $N(n\,\mu, \sqrt{n\sigma_X^2})$

$$T \sim N(300; \sqrt{3000})$$

luego

$$P(D > 350) = 1 - P\left(z < \frac{350 - 300}{54{,}77}\right) = 1 - \Phi(0{,}91) = \mathbf{0,1814}$$

Ejercicio 116

Ejercicio 117. Sea $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ la función de distribución de $z \sim N(0;1)$, con ayuda de la tabla se tiene:

a). $P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0{,}5$

b). $P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$

c). $P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 0{,}1587$

d). $P(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0{,}8413$

e). $P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}6826$

f). $P(-2 < Z < -1) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}1359$

Ejercicio 117

Ejercicio 118. Se obtienen tipificando a la variable $z \sim N(0;1)$:

a). $$P(X \leq 40) = P\left(z \leq \frac{40-50}{5}\right) = \Phi(-2) = 0{,}0228$$

b). $$P(X \leq 60) = P\left(z \leq \frac{60-50}{5}\right) = \Phi(2) = 0{,}9772$$

c). $$P(X > 65) = P\left(z > \frac{65-50}{5}\right) = 1 - \Phi(3) = 0{,}0013$$

d). $$P(X > 35) = P\left(z > \frac{35-50}{5}\right) = \Phi(3) = 0{,}9987$$

e). $P(40 < X \leq 60) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9544$

f). $P(30 < X \leq 42) = \Phi(-1{,}6) - \Phi(-4) = 0{,}0548$

Ejercicio 118

Ejercicio 119. Suponemos que X se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$. Tenemos:

$$P(X < 75) = 0{,}58, \qquad P(75 < X < 80) = 0{,}38$$

tipificando $Z = (X - \mu)/\sigma$ obtenemos

$$P(Z < \frac{75 - \mu}{\sigma} = z_0) = 0{,}58$$

$$P(\frac{75 - \mu}{\sigma} = z_0 < Z < \frac{80 - \mu}{\sigma} = z_1) = 0{,}38$$

luego

$$\Phi(z_0) = 0{,}58, \qquad \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = 0{,}38$$

de la primera igualdad de la tabla $N(0, 1)$ obtenemos $z_0 = 0{,}20$, y de $\Phi(z_1) = 0{,}96$ obtenemos $z_1 = 1{,}75$. Resolviendo

$$\frac{75 - \mu}{\sigma} = 0{,}2 \qquad \frac{80 - \mu}{\sigma} = 1{,}75$$

obtenemos $\mu = 74{,}35$ y $\sigma = 3{,}22$. Ejercicio 119

Ejercicio 120. Sea X la duración de un artículo cualquiera:

$$P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P(z \leq -2) =$$

$$1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = \mathbf{0{,}9773}$$

Por otra parte

$$P(X < 150) = P(z < -6) = 1 - \Phi(6) = \mathbf{0{,}0}$$

Ejercicio 120

Ejercicio 121. Sea X la demanda de tipo $N(150000, \sigma = 10{,}000)$. Sea C la cantidad dispuesta a la venta, entonces calculamos C imponiendo

$$P(X < C) \geq 0{,}95$$

Tipificando, tenemos

$$P(Z < \frac{C - 150000}{10{,}000} = z_0) = 0{,}95$$

De la tabla $N(0,1)$ se tiene que $\Phi(1{,}65) = 0{,}95$, luego

$$z_0 = \frac{C - 150000}{10{,}000} = 1{,}65 \Longrightarrow C = 166500 \text{ litros}$$

Ejercicio 121

Ejercicio 122. Sea $\lambda = 0{,}01$. Vamos a hallar la función de densidad del tiempo de funcionamiento T_S y T_P para el sistema en serie y en paralelo respectivamente.

- **Sistema en Serie**:

$$G_S(t) = P(T_S > t) = P(T_1 > t)\, P(T_2 > t) = G_1(t)\, G_2(t) =$$
$$= e^{-\lambda t} e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}$$

y así tenemos para el sistema en serie la función de distribución y la función de densidad del tiempo T_S:

$$F_S(t) = 1 - e^{-2\lambda t} \qquad f_S(t) = 2\lambda\, e^{-2\lambda t}$$

luego

$$P(T_S > 50) = G_S(50) = e^{-2\lambda\, 50} = e^{-1}$$

y

$$P(T_S > 50 | T_S > 20) = \frac{P(T_S > 50 \ \text{ y } \ T_S > 20)}{P(T_S > 20)} =$$
$$= \frac{G_S(50)}{G_S(20)} = e^{-0{,}6} = 0{,}5488$$

$$P(T_S < 50 | T_S > 20) = 1 - 0{,}5488 = \mathbf{0{,}4512}$$

- **Sistema en Paralelo**:

$$F_p(t) = P(T_p < t) = P(T_1 < t)\, P(T_2 < t) =$$
$$= F_1(t)\, F_2(t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})$$

y así, la función de supervivencia del tiempo T_p:

$$G_p(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})$$

luego

$$P(T_p > 50) = G_p(50) = 1 - (1 - e^{-\lambda\, 50})^2 = 1 - (1 - e^{-0{,}5})^2 = \mathbf{0.8452}$$

y

$$P(T_p > 50 | T_p > 20) = \frac{P(T_p > 50 \text{ y } T_p > 20)}{P(T_p > 20)} = \frac{G_p(50)}{G_p(20)} = e^{-0{,}6}$$

$$P(T_p < 50 | T_p > 20) = 1 - 0{,}8739 = \mathbf{0{,}1261}$$

Ejercicio 122

Ejercicio 123. Sea R_1 el recorrido con el primer par de zapatillas, y R_i el recorrido con el par $i-$ésimo de zapatillas. El recorrido total R_T con n pares de zapatillas equivale a:

$$R_T = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

La variable R_T sigue una distribución normal $N(20\,n; \sigma^2 = 16\,n)$.

$$P(R_T > 300) = P(Z > \frac{300 - 20n}{4\sqrt{n}} = z_0) \geq 0{,}95$$

$$1 - \Phi(z_0) \geq 0{,}95 \qquad \Phi(z_0) \leq 0{,}05$$

de las tablas obtenemos $z_0 = -1{,}65$ y así

$$\frac{300 - 20n}{4\sqrt{n}} = z_0 \leq -1{,}65$$

resolviendo esta ecuación se obtiene $n \geq 17$. Ejercicio 123

Ejercicio 124. Sea C la cantidad que lleva en el bolsillo. Sea X el número de partidas ganadas de 400, de tipo $B(400; 1/2)$. Sea B el beneficio $B = 5X - 5(400 - X) = 10X - 2000$. Hay que calcular C con la condición

$$P(B + C \geq 0) \geq 0{,}95$$

Es decir

$$P(10X - 2000 + C \geq 0) = P\left(X \geq \frac{2000 - C}{10}\right) \geq 0{,}95$$

Aproximando X por la distribución normal $N(200; \sigma = 10)$ se tiene

$$P\left(Z \geq \frac{\frac{2000-C}{10} - 200}{10} = z_0\right) \geq 0{,}95$$

Como $1 - \Phi(z_0) \geq 0{,}95$, buscando en la tabla $N(0; 1)$, obtenemos $z_0 = -1{,}65$, luego resolviendo la ecuación

$$\frac{\frac{2000-C}{10} - 200}{10} \leq -1{,}65 \qquad \mathbf{C \geq 165}$$

Ejercicio 124

Ejercicio 125. Sea X la ganancia por acción y G la ganancia total del corredor de bolsa. Entonces

$$G = 50X - 1200{,}50 = 50X - 60{,}000$$

luego

$$\begin{aligned} P(G \geq 0) &= P(50X - 60000 \geq 0) \\ &= P(X \geq 1200) \\ &= \int_{1200}^{2000} \frac{1}{1000} dx = 0{,}8 \end{aligned}$$

Ejercicio 125

Ejercicio 126. Sea f_A la frecuencia obtenida con una muestra de tamaño n. Se tiene que $f_A \sim N(p, \sqrt{pq/n})$, siendo la proporción real $p = 0{,}52$. Hay que determinar n con la condición

$$P(f_A < 0{,}50) \leq 0{,}01$$

Tipificando, obtenemos

$$P\left(Z < \frac{0{,}5 - 0{,}52}{\sqrt{\frac{0{,}52\,0{,}48}{n}}} = z_0\right) \leq 0{,}01$$

Como $\Phi(z_0) \leq 0{,}01$, de la tabla $N(0;1)$, obtenemos $z_0 = -2{,}33$, luego

$$z_0 = \frac{0{,}5 - 0{,}52}{\sqrt{\frac{0{,}52{,}0{,}48}{n}}} \leq -2{,}33 \Longrightarrow n \geq 3388$$

Ejercicio 126

Ejercicio 127. Sean X_A las partidas ganadas por A en 300 partidas, con $X_A \sim B(300; 2/3)$, $\mu_A = np = 200$ y $\sigma_A = \sqrt{npq} = 8{,}165$

a). Con la aproximación $X_A \approx N(200; 8{,}165)$

$$\begin{aligned} P(175 < X_A < 230) &= P\left(\frac{175-200}{8{,}165} < z < \frac{230-200}{8{,}165}\right) \\ &= \Phi(3{,}67) - \Phi(-3{,}06) = 0{,}99 \end{aligned}$$

b). El beneficio de A en las 300 partidas es,

$$B_A = 21\,X_A - 6(300 - X_A) = 27\,X_A - 1800$$

luego $E[B_A] = 27\,E[X_A] - 1800 = 3600$ euros y por tanto el de B será de -3600 euros.

c). Las pérdidas de B en las n partidas son las ganancias de A,

$$P_B = 21\,X_A - 6(n - X_A) = 27\,X_A - 6n$$

Se pide n para que

$$P(P_B > 200) > 0{,}9772$$

o sea

$$P\left(X_A < \frac{200+6n}{27}\right) > 0{,}9772$$

con la aproximación $X_A \approx N(\frac{2n}{3}; \sigma^2 = \frac{2\,n}{9})$, se tiene

$$P\left(Z < \frac{\frac{200+6n}{27} - \frac{2n}{3}}{\sqrt{2n/9}} = z_0\right) > 0{,}9772$$

Como $\Phi(2) = 0{,}9772$, resolvemos la inecuación

$$\frac{\frac{200+6n}{27} - \frac{2n}{3}}{\sqrt{2n/9}} \geq 2$$

y obtenemos $\mathbf{n} \geq \mathbf{28}$ partidas.

Ejercicio 127

Ejercicio 128. Sea El contenido X en cl. de un bote de cerveza es $X \sim N(30; 2)$:

a).

$$\begin{aligned} P(X > 33) &= 1 - P(X \leq 33) = 1 - P(z \leq 1{,}5) \\ &= 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \mathbf{0{,}0668} \end{aligned}$$

b). Si X_i es el contenido del bote i-ésimo, el contenido total de los 6 botes S es

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_6$$

siendo S la suma de 6 variables aleatorias normales i.i.d, $S \sim N(198, \sqrt{24})$

$$P(S < 175) = P(z < \frac{175 - 198}{\sqrt{24}}) = P(z < -4{,}695) = \mathbf{0}$$

Ejercicio 128

Ejercicio 129. Sea X el número de fallecidos de un total de 2000 ingresados la variable $X \sim B(2000, p = 0{,}3)$, con $np = 600$ y $npq = 420$. Aproximando a la distribución normal $N(600; \sigma^2 = 420)$, tenemos:

$$P(X \leq 550) = P\left(z < \frac{550 - 600}{\sqrt{420}}\right) = P(z < -2{,}44) = \mathbf{0{,}0073}$$

Ejercicio 129

Ejercicio 130. El número X de unidades defectuosas producidas diariamente sigue una distribución de Poisson $Po(\lambda = 10)$. En 150 dias el número de unidades defectuosas producidas será Poisson $Po(\lambda = 1500)$. Con la aproximación a la distribución normal $N(1500, \sigma^2 = 1500)$, tenemos:

$$P(X > 1480) = 1 - P(z < \frac{1480 - 1500}{\sqrt{1500}}) =$$

$$= 1 - \Phi(-0{,}516) = \Phi(0{,}516) = \mathbf{0{,}69}$$

Ejercicio 130

Ejercicio 131. Si la demanda X es $N(10000; 100)$,

$$
\begin{aligned}
P(X \notin (9{,}930, 10170)) &= 1 - P(9{,}930 < X < 10170) \\
&= 1 - P\left(\frac{9930 - 10000}{100} < z < \frac{10170 - 10000}{100}\right) \\
&= 1 - \Phi(1{,}7) + \Phi(-0{,}7) = \mathbf{0{,}2866}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 131

Ejercicio 132. De los 2.000 artículos, sean X_1 y X_2 los artículos vendidos de precios p_1 y p_2 respectivamente. Como

$$X_2 \sim B(2000; p = 0{,}3)$$

$$P(X \geq 800) = \sum_{i=800}^{2000} \binom{2000}{i} 0{,}3^i \, 0{,}7^{2000-i}$$

aproximando a la normal $N(600, \sigma^2 = 420)$, tenemos

$$P(X \geq 800) = P\left(z \geq \frac{800 - 600}{\sqrt{420}}\right) = 1 - \Phi(9{,}76) = \mathbf{0}$$

Ejercicio 132

Ejercicio 133. El número de vehículos X de los 4.000 automóviles vendidos que estará en servicio dentro de dos años es $B(4000; 0{,}8)$, luego por aproximación a la normal $N(np, npq)$, tendremos

$$P(X > 3120) = 1 - P\left(z < \frac{3120 - 3200}{\sqrt{640}}\right) = 1 - \Phi(-3{,}16) = \mathbf{0{,}9992}$$

Ejercicio 133

Ejercicio 134. La demanda diaria X sigue una distribución uniforme $U(20,40)$ con $\mu_X = 30$ y $\sigma_X^2 = 20^2/12$. La demanda en 182 dias corresponde a la variable

$$D = X_1 + X_2 + \ldots + X_{182}$$

siendo X_i la demanda del día i-ésimo. Por el Teorema Central del Límite, la suma de las 182 variables i.i.d.(independientes e idénticamente distribuidas) se ajusta a una $N(n\,\mu, \sqrt{n\sigma_X^2})$

$$D \sim N(5460, \sqrt{6066{,}67})$$

luego

$$P(D > 6370) = 1 - P(z < \frac{6370 - 5460}{\sqrt{6066{,}67}}) = 1 - \Phi(11{,}68) = \mathbf{0{,}00}$$

Ejercicio 134