Investigación de Operaciones II
Ejercicios Procesos de Poisson
Iván Derpich Contreras

Pregunta Nº1. Una fabrica de zapatos de exportación, ha iniciado la fabricación de un lote de 1.000 pares, de diferentes modelos y números. Los tiempos de proceso en cada una de las etapas son variables aleatorias. Luego el tiempo total de fabricación del lote es también aleatorio, y como ocurre generalmente en estos casos, los tiempos entre llegadas de pares terminadas a Envase sigue una distribución exponencial con tasa promedio de 100 pares/hora. (Envase es la última estación de la línea de fabricación).

Bajo un sistema de turnos la planta trabaja 10 horas seguidas por día. Se sabe que el lote total se completará antes del término de la jornada, ya que existe capacidad suficiente en la fábrica. Sin embargo hay incertidumbre respecto a que se pueda producir congestión en envase en algún lapso del día y se quieren adelantar medidas.

Por esta razón interesa saber

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 100 pares por hora?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a 2 horas de terminar la jornada hayan llegado el 80% del lote o más?

Solución:

Sea X(t) : cantidad de pares de zapatos que llegan a envase en [0,t] y

Sea T_i *:* Tiempo entre la transacción i-ésima y la transacción i-1.

$$\therefore T_i \approx \exp(\lambda = 100 \ pares/hr)$$

a) $P\left(X(1) \geq 100 \middle| X(10) = 1000\right) = ?? = A$

El enunciado dice que se completa el número de 1000 pares al final de la jornada. Como los pares llegan con tiempos con distribución exponencial, entonces el número de pares de zapatos es un Proceso de Poisson.

Se sabe que $X(10) = 1.000 \ \therefore X(t)$ está condicionado

Luego $X(t) \approx Binomial(1000, p)$ con $p = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$$A = P\left(X(1) \geq 100 \middle| X(10) = 1000\right) = \sum_{k=100}^{1000} P\left[X(1) = k \middle| X(10) = 1000\right]$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{99} P\left[X(1) = k \middle| X(10) = 1000\right]$$

$$A = 1 - \sum_{k=0}^{99} \binom{1000}{k} (0{,}1)^k (1 - 0{,}1)^{1000-k}$$

Esta es una respuesta correcta.

El cálculo de término correspondiente a la sumatoria, es muy difícil de calcular por la cantidad de términos que deben sumarse. Por esta razón se aproximará por la distribución normal.

La Varianza de la distribución de Poisson es λ y la desviación estándar es $\sqrt{\lambda} = 10 \ pares/hora$

Sea *Y* una distribución normal equivalente a la distribución de Poisson

$$Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

$$\mu_Y = \lambda = 100 \ pares/hr \quad \sigma_Y = \sqrt{\lambda} = 10 \ pares/hr$$

Construyamos la variable *Z* normalizada

$$Z = \frac{X - 100}{10}$$

$$P\left[\frac{X - 100}{10} \leq \frac{99 - 100}{10}\right] = P\left[Z \leq \frac{-1}{10}\right] = \Phi(-0{,}1) = 0{,}46$$

$$A = 1 - \Phi(-0{,}1) = 0{,}54$$

b) $P\left[X(8) \geq 800 \middle| X(10) = 1000\right] = ?? = B$

$$B=\sum_{k=800}^{1000} P\left[X(8)=k \middle| X(10)=1000\right]=$$

$$X(8)\approx Binomial(1000; {}^{8}\!/\!_{10})$$

$$B=\sum_{k=800}^{1000}\binom{1000}{k}(0{,}8)^k(1-0{,}8)^{1000-k}=1-\sum_{k=0}^{799}\binom{1000}{k}(0{,}8)^k(1-0{,}8)^{1000-k}=$$

Utilizando la misma variable Z normalizada. Ahora la media y varianza siguientes:

$$\mu_Y=\lambda t=100*8\ pares/hr=800\ pares/hr \quad \sigma_Y=\sqrt{\lambda t}=\sqrt{800}=28{,}28\ pares/hr$$

$$B=1-\Phi\left(\frac{799-800}{\sqrt{8*100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{-1}{28{,}28}\right)=1-\Phi(-0{,}035)=1-0{,}4858=0{,}5141$$

Pregunta Nº2. Un alumno de Ingeniería Industrial estaciona ilegalmente su vehículo en los alrededores de la Facultad dos veces al día por el período de una hora cada vez. La pasada de los inspectores municipales o Carabineros de Tránsito es un Proceso de Poisson con un promedio de λ pasadas por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que no le pasen un parte?

Solución: Primero, no le dicen a que hora se estaciona, si no solamente que estaciona en dos segmentos de dos horas, lo que si sabe, es que un proceso de Poisson, por lo que, por los incrementos independientes, lo que pase en una hora, es independiente de lo que pase en el otro intervalo de tiempo.

Sea $N(t)$ el número de partes en el intervalo $[0,t]$.

Si llamamos $t_1=1$, el primer intervalo de una hora, y $t_2=1$ el de la segunda hora, la probabilidad buscada es:

$$P(No\quad tener\quad partes)=P(N(t_1)=0)\cdot P(N(t_2)=0)=e^{-\lambda}e^{-\lambda}=e^{-2\lambda}$$

Por la misma razón anterior, la solución es equivalente a calcular cero partes en dos horas continuas.

Pregunta Nº3. En un día de verano, los buses con turistas que llegan a Curico lo hacen según un proceso Poisson con un promedio de cinco autobuses por hora. El pueblo de Curico es famoso en el mundo por sus tortas y vinos. Cada bus espera una hora o dos horas en Curico con probabilidades iguales.

Cada autobús trae 50, 75 o 100 turistas con probabilidades respectivas de ¼, ½ y ¼. Calcule una aproximación normal para la probabilidad que más 1000 turistas hayan entrado a Curico hasta las 4 de la tarde, suponga que el día lo cuenta desde las 00:00 horas. Indicación: Defina X como el número de turistas, Usted debe calcular $\mathbb{P}(X \geq 1000)$**.**

Solución:

El Proceso de Poisson está asociado con la llegada de Buses, pero el Número de Turistas no obedece a un proceso de conteo, pero dada la naturaleza de la llegada de los buses, el proceso que cuenta el número de turistas es un proceso compuesto.

Sea $N(t)$ el número de turistas.

Interesa calcular $P(N(16) \geq 1000)$. Dado que es proceso compuesto y nos dicen que debemos usar una aproximación normal, para usarla debemos identificar el promedio y la desviación estándar de $N(t)$.

Sea X_i el número de turistas.

$$E(N(t)) = E(X_i)\lambda t$$
$$Var(N(t)) = E(X_i^2)\lambda t$$

Calculamos los valores esperados de X_i:

$$E(X_i) = \frac{1}{4}50 + \frac{1}{2}75 + \frac{1}{4}100 = 75.$$
$$E(X_i^2) = \frac{1}{4}50^2 + \frac{1}{2}75^2 + \frac{1}{4}100^2 = 5937.5.$$

$$E(N(16)) = E(X_i)\lambda 16 = 75 \cdot 5 \cdot 16 = 6000.$$
$$Var(N(16)) = E(X_i^2)\lambda 16 = 5937.5 \cdot 5 \cdot 16 = 475000.$$
$$\sigma(N(16)) = \sqrt{E(X_i^2)\lambda 16} = 689.20.$$

Entonces:
$$P(\frac{N(16) - 6000}{689.20} \geq \frac{1000 - 6000}{689.20}) = 1 - \Phi\left(\frac{-5000}{689.20}\right) = 1 - \Phi(-7.25).$$

Pregunta Nº4. A un acto eleccionario llegan personas a votar de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ. Cada persona, independientemente de los demás, vota con probabilidad 0,5 por el candidato 1 y con probabilidad 0,5 por el candidato 2. Suponga que la votación comienza en t=0 y que tiene duración infinita.

a) Si se sabe que llegaron 1000 personas a votar durante las primeras 5 horas. ¿ Cuál es la probabilidad de que el candidato 1 reciba *n* de estos votos en el mismo período de tiempo ?

b) Si se sabe que llegaron 1000 personas a votar en las primeras 5 horas. ¿ Cuál es la probabilidad de que el candidato 1 reciba *n* de estos votos en las primeras 3 horas de votación ?

c) Sea *H* el instante de llegada de la primera persona a votar por el candidato 1. Encuentre la distribución de probabilidades de *H*.

d) Encuentre la distribución de probabilidades del número personas que votan por el candidato 2, antes de que se complete el tiempo promedio en que llegue la primera persona que vota por el candidato 1.

Desarrollo:

a) Sea

$$N(t): n^{o}\ personas\ que\ llegan\ a\ votar\ entre\ 0\ y\ t.$$

y Sea

$$N_1(t): n^{o}\ personas\ que\ llegan\ a\ votar\ entre\ 0\ y\ t,\ por\ el\ candidato\ 1.$$

$$P\left(N_1(5)=n \big/ N(5)=1000 \right) = ? \quad ; \quad n \le 1000$$

$N_1(t)$ condicionado a $N(t)=1000$, es binomial por lo tanto:

$$N_1(5) \big/ N(5) \approx Binomial(1000;0,5)$$

Luego $P\left(N_1(5)=n \big/ N(5)=1000 \right) = \binom{1000}{n}(0,5)^n(0,5)^{1000-n} \quad ; \quad n \le 1000$

b) $P\left(N_1(3)=n \big/ N(5)=1000 \right) = ? \quad ; \quad n \le 1000$

Sea p : probabilidad de que uno de las 1000 personas que llegaran a votar entre 0 y 5, lo hagan en el intervalo [0,3] y además voten por el candidato 1.

$$p = 0,5 * 3/5 = 0,3$$

$$N_1(5) \big/ N(5) \approx Binomial(1000; p)$$

$$P\left(N_1(3) = n \big/ N(5) = 1000 \right) = \binom{1000}{n} p^n (1-p)^{1000-n} \quad ; \quad n \leq 1000$$

$$P\left(N_1(3) = n \big/ N(5) = 1000 \right) = \binom{1000}{n} (0,3)^n (0,7)^{1000-n} \quad ; \quad n \leq 1000$$

c) Si $N(t)$ es Poisson con tasa λ, entonces $T_1, T_2, \ldots$ tiempos entre llegadas de personas a votar, distribuyen exponencial con la misma tasa.

d) Sea T_1^1 tiempo de la primera persona que vota por el candidato 1. Luego

$$E(T_1^1) = \frac{1}{0,5 * \lambda}$$

$$P(N_2(E(T_1^1))) = 0,5 * \lambda * \frac{1}{0,5 * \lambda} = 1$$

Pregunta Nº 5. Se tiene una central telefónica que recibe llamadas de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa $\lambda = 10$ (llamadas/hora). Se define $N(t_1, t_2)$ como el número de llamadas que se han recibido entre t_1 y t_2 . El servicio ha comenzado a operar a las 8:00 de la mañana y se sabe que $N(8,10) = 9$.

a) Si no se ha recibido ninguna llamada desde la 9:45 hrs. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada ocurra antes de las 10:20hrs. ?

b) ¿ Cuál es la probabilidad de que no se reciba ninguna llamada por más de 40 minutos, comenzando a las 9:45 hrs.?

c) Si la telefonista trabaja 8 horas en su turno ¿ cuantas llamadas recibirá en promedio ?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que a las 11:00 hrs. se hayan recibido 30 llamadas en total ?

e) La telefonista ha estado muy ocupada durante las primeras 4 horas de su turno y le comenta a su compañero de trabajo en su hora de colación: ”Este será un día muy ocupado, en la mañana casi no he podido descansar”.

Desarrollo:

a) Fijando el *t=0* en la hora 9:45 hr.

Sea T_1 el tiempo para el primer evento medido desde el instante *t=0,* luego:

$$P(T_1 \leq 35) = 1 - e^{-\lambda * 35} = 1 - e^{-350} \approx$$

b) $P(T_i \geq 40) = e^{-\lambda * 40} = e^{-400}$

c) Sea N: nº de llamadas que recibe la telefonista en su turno.

$E(N) = \lambda * 8 = 80$ llamadas

d) $P(N(8,11) = 30) = P(N(9,11) = 21) = e^{-\lambda * 2} \dfrac{(\lambda * 2)^{21}}{21!} = e^{-20} \dfrac{20^{21}}{21!} 0{,}084$

Pregunta Nº 6. Usando sus conocimientos del curso responda lo siguiente:

El centro que recibe llamadas de emergencia de una ciudad recibe en promedio 42 llamadas por hora en la hora punta, comprendida entre las 9 y 13 horas AM. Cada llamada requiere alrededor de 2 minutos de la telefonista para atender y derivar la llamada al personal correspondiente (bomberos, carabineros o ambulancia). El centro debe tener un adecuado número de telefonistas, y se ha pedido a un consultor que determine el número adecuado de telefonistas. El consultor asume que las llamadas entran en un orden completamente aleatorio y por lo tanto aplica el Proceso de Poisson. Sin embargo, el telefonista actual puntualiza que entre las 10 y las 12 hrs. llegan muchas más llamadas que en el resto del tiempo. ¿Qué implica este hecho para el uso de la distribución de Poisson ?

Solución:

No se cumple la propiedad de incrementos estacionarios, por lo tanto es un proceso de Poisson No Homogeneo. La fórmula de la probabilidad del proceso es :

$$P\{X(t_1, t_2) = n\} = e^{-m(t_1, t_2)} \frac{[m(t_1, t_2)]^n}{n!} \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots$$

$$
m(t_1,t_2)=\begin{cases} 42\ llamadas/hora\ si\ t_1 \geq 12\ y\ t_2 \geq 12 \\ \lambda_1\ llamadas/hora\ si\ t_1 \geq 10\ y\ t_2 \leq 12 \\ 42(10-t_1)+\lambda_1(t_2-10)\ si\ t_1 \leq 10\ y\ 10 \leq t_2 \leq 12 \\ \lambda_1(12-t_1)+(t_2 12)42\ si\ t_1 \geq 10\ y\ t_2 \geq 12 \\ 42(t_1-10+\lambda_1(12-10)+42(t_2-12)\ si\ t_1 \leq 10\ y\ t_2 \geq 12 \\ 42\ llamada/hora\ si\ t_1 \leq 10\ y\ t_2 \leq 10 \end{cases}
$$

Pregunta Nº 7. En la Bolsa de Comercio de Santiago, se ha estudiado el comportamiento de las compras y ventas de acciones. En un día normal se van produciendo transacciones según un proceso de Poisson a una tasa promedio de 10 operaciones por hora. Sin embargo un cierto día, una vez iniciada la jornada pasa una hora sin que se produzcan transacciones. ¿Cuál es la probabilidad de que pase otra hora sin transacciones?

Solución:

Sea *X(t)* : cantidad de transacciones en la Bolsa de Comercio en [0,t]

$$X(t) \approx Poisson(\lambda = 10\ tr/hora)$$

Sea T_i *:* Tiempo entre la transacción i-ésima y la transacción i-1.

$$\therefore T_i \approx \exp(\lambda = 10tr/hr)$$

$$P\left(T_i \geq 2 \middle/ T_i \geq 1\right) = \frac{P[T_i \geq 2 \wedge T_i \geq 1]}{P[T_i \geq 1]} = \frac{P[T_i \geq 2]}{P[T_i \geq 1]} = \frac{e^{-\lambda 2}}{e^{-\lambda}} =$$

$$e^{-\lambda} = e^{-10} = 0{,}00004539$$

Pregunta 8. Considere una peluquería con dos peluqueras, que están desocupadas cuando ingresan simultáneamente tres personas desconocidas entre si X, Y y Z. Las personas X e Y son atendidas y Z espera. ¿ Cuál es la probabilidad de que la persona X esté aún siendo atendida cuando Y y Z se hayan ido de la peluquería ? si:

a) **Los tiempos de servicio son no aleatorios de 10 minutos en cada atención.**
b) **Los tiempos de servicio toman el valor i con probabilidad** $1/i\ ; i = 1,2,3,4$
c) **Los tiempos de servicio son exponenciales con media** $1/\lambda$**.**

Los tiempos de atención de cada peluquera son independientes.

Desarrollo:

a) Si el tiempo es no aleatorio al minuto 10 se desocupan las dos peluqueras y una de ellas atiende a Z, por lo tanto la probabilidad pedida es 0.

b) Sea p la probabilidad pedida:

$$p = \sum_{S=1}^{4} P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = s\right) P(T_X = s)$$

En que

T_Y : tiempo de atención de la persona Y, medido desde la llegada de las personas a la peluquería.

T_X : tiempo de atención de la persona X, medido desde la llegada de las personas a la peluquería.

T_Z : tiempo de Atención de la persona Z, medido desde que termina el servicio de la persona Y.

$$p = P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = 1\right) P(T_X = 1) + P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = 2\right) P(T_X = 2) +$$
$$P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = 3\right) P(T_X = 3) + P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = 4\right) P(T_X = 4)$$

$$p = 0 + 0 + P\left(T_Y = 1 \wedge T_Z = 1 \middle/ T_X = 3\right)\left(\frac{1}{4}\right) +$$
$$\left[P\left(T_Y = 1 \wedge T_Z = 1 \middle/ T_X = 4\right) + P\left(T_Y = 1 \wedge T_Z = 2 \middle/ T_X = 4\right) + P\left(T_Y = 2 \wedge T_Z = 1 \middle/ T_X = 4\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$p = \frac{P(T_Y = 1)P(T_Z = 1)P(T_X = 3)}{P(T_X = 3)}\left(\frac{1}{4}\right) +$$
$$\left[\frac{P(T_Y = 1)P(T_Z = 1)P(T_X = 4)}{P(T_X = 4)} + \frac{P(T_Y = 1)P(T_Z = 2)P(T_X = 4)}{P(T_X = 4)} + \frac{P(T_Y = 2)P(T_Z = 1)P(T_X = 4)}{P(T_X = 4)}\right]\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$p = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

c) Sea p la probabilidad pedida:

$$p = \sum_{S=1}^{4} P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = s\right) P(T_X = s)$$

$$p = \int_{s=0}^{s=\infty} \underbrace{P\left(T_Y + T_Z < T_X \middle/ T_X = s\right)}_{A} P(T_X = s)\, ds$$

$$A = P(T_Y + T_Z < s) = \int_0^s P\left(T_Y + T_Z < s \middle/ T_Z = r \right) P(T_Z = r)dr$$

$$A = \int_0^r P(T_Y < s-r)P(T_z = r)dr = \int_0^s \left(1-e^{-\lambda(s-r)}\right)\lambda e^{-\lambda r}dr = \lambda \int e^{-\lambda r}dr - \lambda \underbrace{\int_{r=0}^s e^{-\lambda^2\left(r^2-rs\right)}dr}_{B}$$

$B =$

Pregunta Nº 8. Se tiene una componente, en la cual el número de fallas se designa por $\{N(t);t \geq 0\}$. El proceso $\{N(t);t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson a tasa λ. Esta tasa es tal que la componente falla en promedio 1 vez cada 500 horas. La componente ha operado correctamente (sin fallar) 500 horas. Se sabe, por especificaciones de fabrica, que la componente a lo más puede durar un tiempo total 2500 horas.

a) **Obtenga la probabilidad de que la componente dure 1000 horas en total.**
b) **Obtenga la probabilidad de que la componente dure 1500 horas más.**
c) **Obtenga el valor esperado de la vida de la componente.**

Desarrollo:
Si no se considera de manera directa el comentario "Se sabe, por especificaciones de fabrica, que la componente a lo más puede durar un tiempo total 2500 horas" la respuesta es:

a) Sea T_i el tiempo entre l falla i-ésima y la anterior.

$T_i \approx \exp(\lambda)$ con $\lambda = 1/500$ fallas/hora

Se pide $P\left(T_i \geq 1000 \middle/ T_i \geq 500 \right) = \dfrac{P(T_i \geq 1000 \wedge T_i \geq 500)}{P(T_i \geq 500)} = \dfrac{P(T_i \geq 1000)}{P(T_i \geq 500)}$

$$\frac{e^{-\lambda * 1000}}{e^{-\lambda * 500}} = e^{-\lambda * 500} = e^{-\frac{1}{500}*500} = e^{-1} = 0{,}36$$

b) $P(T_1 \geq 1500) = e^{-\lambda * 1500} = e^{-\frac{1}{500}*1500} = e^{-3} = 0{,}049$

c) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} + 500 = 500 + 500 = 1000$ horas

II. Si se considera el comentario anterior la respuesta es :

a) $P\left(T_i \geq 1000 \big/ 2500 \geq T_i \geq 500 \right) =$

es decir ocurre al menos una falla entre las 500 horas y las 2500 horas, con igual probabilidad.

Por lo tanto $T_i \approx U(500,2500)$

$$P(T_i \geq 1000) = 1 - \frac{1000}{2500-500} = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$$

b) $P\left(T_i \geq 1500 \big/ 2500 \geq T_i \geq 500 \right) = 1 - \frac{1500}{2000} = 1 - \frac{3}{4} = 0,25$

c) $E(T) = \frac{2500-500}{2} = 1000$

Pregunta Nº9. Históricamente, una empresa industrial ha experimentado 0,85 accidentes laborales mensuales en el taller. Un año atrás el administrador de planta, instauró nuevas medidas de seguridad para reducir el número de trabajadores accidentados. Durante el año pasado, hubo 7 accidentes laborales en el taller. ¿ es esta suficiente evidencia para concluir que el número promedio de accidentes laborales, ha disminuido después de la implementación de las nuevas medidas de seguridad ?

Solución:
La tasa histórica es de 0,85 accidentes/mes lo que da al año
0,85*12= 10,2 accidentes/año
Suponiendo que el número de accidentes distribuye Poisson con tasa media de 10,2 acc/año.
Sea *X(t)* : nº de accidentes entre 0 y t expresado el tiempo en años.
Calculemos la probabilidad del evento que ha ocurrido, es decir que *X(1)*=7

$$P\{X(1)=7\} = e^{-\lambda * 1}\frac{(\lambda * 1)^7}{7!} = e^{-10,2}\frac{10,2^7}{7!} = 0,066$$

Además se pueden calcular las siguientes probabilidades

x	P(X(1)=x)	F(x)
0	0,00003	0,00003
1	0,00038	0,00042
2	0,00197	0,00239
3	0,00671	0,0091
4	0,01711	0,02622
5	0,0349	0,06113

De este cuadro se puede concluir que con un 95% de probabilidad los valores de *X(t)* , estarán sobre 4. Por lo tanto el valor *X(1)=7* entonces cae dentro de este criterio y por lo tanto no es significativo para aceptar la hipótesis de cambio en la tasa media.

Pregunta Nº 10. Se ha estudiado el comportamiento de fallas de un equipo electrógeno, que da servicio a una empresa. Se ha determinado que el tiempo sin fallar del equipo sigue una distribución exponencial, con tiempo medio entre fallas de 14,5 horas. Desde la última vez que falló, el equipo lleva 10 horas en servicio normal. ¿Cuál es la probabilidad de que supere el tiempo medio de falla sin fallar ?

Solución: Sea $\bar{T} = 14{,}5\ horas \therefore \lambda = 1/14{,}5 = 0{,}06896552 llamadas/hora$

Sea $T_1, T_2, ..., T_i$ los tiempos entre fallas correspondientes a la primera falla, la segunda, etc. Entonces lo que se pregunta es : $P\left[T_1 \geq 14{,}5 / T_1 \geq 10\right] = ????$

$$P\left[T_1 \geq 14{,}5 / T_1 \geq 10\right] = \frac{P[T_1 \geq 14{,}5 \wedge T_1 \geq 10]}{P[T_1 \geq 10]} = \frac{P[T_1 \geq 14{,}5]}{P[T_1 \geq 10]} = \frac{e^{-\lambda 14{,}5}}{e^{-\lambda 10}} = e^{-4{,}5\lambda}$$

$$P\left[T_1 \geq 14{,}5 / T_1 \geq 10\right] = e^{-4{,}5\lambda} = e^{-4{,}5\left(1/14{,}5\right)} = e^{-0{,}3103} = 0{,}733$$

Pregunta Nº 15. A un cine llegan personas a ver una película, de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa 15 personas por minuto.

a) Durante los primeros 40 minutos llegaron 200 personas ¿Cuál es la probabilidad de que la cuarta parte de estas haya llegado en los primeros 10 minutos?

b) Se sabe que durante los primeros 10 minutos llegaron al menos 40 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que durante los primeros 20 minutos llegue un total de 75 personas ?

Solución:

Sea *X(t):* cantidad de personas que llegan al cine en el intervalo [0,t]
$X(t) \approx Poisson(\lambda)$ con $\lambda = 15$ personas/minuto

a) Lo que se pregunta es $P\left[X(10) = 50 / X(40) = 200\right] = ??$

Se puede demostrar que $\left[X(10) / X(40) = 200\right] \approx Binomial\left(200, 10/40\right)$

Luego $P\left[X(10) = 50 / X(40) = 200\right] = \binom{200}{50}\left(1/4\right)^{50}\left(3/4\right)^{200-50} = 0{,}065029$

b) Se pregunta $P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)\geq 40}\right]=??$ Este término debe desarrollarse asi:

$$P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)\geq 40}\right]=\sum_{k=40}^{75} P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)=k}\right]*P[X(10)=k]$$

Llamemos A al término $P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)=k}\right]$ entonces :

$$A=P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)=k}\right]=P[X(20)-X(10)=75-k]=P[X(10)=75-k]$$

Reemplazando el termino anterior:

$$P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)\geq 40}\right]=\sum_{k=40}^{75} P[X(10)=75-k]*P[X(10)=k]$$

ahora basta reemplazar en cada probabilidad la formula de Poisson.

$$P\left[{}^{X(20)=75}\!\Big/_{X(10)\geq 40}\right]=\sum_{k=40}^{75} e^{-10\lambda}\frac{(10\lambda)^{75-k}}{(75-k)!}*e^{-10\lambda}\frac{(10\lambda)^{k}}{k!}=e^{-20\lambda}(10\lambda)^{75}\sum_{k=40}^{75}\frac{1}{(75-k)!k!}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- En un taller de máquinas de control numérico computarizado se procesan varios tipos de piezas, los cuales van desde pernos, tuercas, planchas de acero, etc. En éste taller hay máquinas que pueden cumplir una tarea para varios tipos de piezas, éste es el caso de la máquina pulidora, la cuál elimina residuos o astillas propios de la fabricación. La máquina fue programada para procesar tuercas y tornillos al mismo tiempo. Estudios efectuados al interior de la fábrica mostraron que la fabricación de tornillos corresponde a un proceso de Poisson a tasa $\lambda_1 = 2\left({unid}/{\min}\right)$ y que las tuercas se fabrican según un proceso de Poisson a tasa $\lambda_2 = 1\left({unid}/{\min}\right)$. Se le ha encomendado a usted la siguiente tarea ya que el encargado actualmente se encuentra estudiando otras máquinas al interior de la fábrica.

a) ¿Qué tipo de proceso es el que cuenta el número de piezas procesadas en la máquina pulidora?
b) Si en un los primeros 120 minutos llegaron 100 piezas correspondientes a tuercas, ¿Cuál es la probabilidad de que en ese tiempo, llegaran k piezas correspondientes a tornillos?
c) Dado que la máquina procesó 10 unidades en un tiempo de10 minutos, ¿cuál es la probabilidad que estas 10 unidades sean tornillos?
d) Si la máquina procesó un total de 100 unidades durante los primeros 5 minutos de trabajo, ¿cuál es la probabilidad que durante los primeros 7 minutos de operación procese 150 unidades?

2.- Dos individuos A y B esperan un riñón para ser trasplantados. Se sabe que una persona en la situación de A puede vivir un tiempo exponencial, y que en promedio tiene un tiempo de vida t_A, similarmente se sabe que una persona en la situación de B puede durar en promedio sin trasplante un tiempo t_B. Las llegadas de riñones para ser trasplantados llegan según un proceso de Poisson con parámetro [illegible]. Se ha decidido que primer riñón será para A (o para B si B vive y A no) y el siguiente para B (si aún vive).

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que A obtenga un riñón ?
b) ¿ Cuál es la probabilidad de que B obtenga un riñón ?

3.- Se tiene una componente de un equipo de fuerza. El n° de fallas del equipo sigue una distribución de Poisson a tasa λ.

a) Se sabe que la componente lleva T unidades de tiempo sin fallar. ¿ Cuál es la probabilidad de que falle antes de t unidades de tiempo (medido desde el instante T).
b) ¿ Cual es el valor esperado de la duración de la componente ?

4.- A una tienda comercial en un Mall, llegan clientes según un Proceso de Poisson a tasa de 100 personas por hora. Los clientes ingresan por un acceso desde donde pueden ir a la Sección Niños con probabilidad 0,6 o a la Sección Zapatería con probabilidad 0,4. Los clientes que se dirigen a la Sección Niños después de pasar por esta sección siempre se retiran de la tienda. Sin embargo, los clientes que se dirigen a la Sección Zapatería al salir de ésta, se dirigen a la Sección Niños con probabilidad 0,6; o vuelven a ingresar a la Sección Zapatería con probabilidad 0,4.

a) Calcule el flujo neto de clientes por unidad de tempo en cada sección.
b) Obtenga la distribución de probabilidades del número de personas que llegan a la Sección Niños.

5.- Se sabe que un total de N estudiantes que han sido aceptados en la Carrera de Ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile, se acercarán a la Oficina de Admisión para realizar su trámite de matrícula. Suponga que los alumnos llegan a la oficina según un Proceso de Poisson a tasa λ y que la oficina estará abierta entre las 9 y las 18 horas y no cierra al mediodía. Sea *X(t)* el número de personas que llegan a la oficina de Admisión entre la hora de apertura y el instante t.

a) Obtenga la distribución de probabilidades de *X(t)*
b) Obtenga el valor esperado del número de personas que llagan entre las 9 y las 13 horas.

6.- Sean los eventos 1 y 2, dos eventos independientes, cada uno se comporta según un proceso de Poisson con tasas λ_1 y λ_2 respectivamente.

a) Encuentre la probabilidad de que el evento 1 ocurra antes del evento 2.
b) Encuentre el valor esperado del tiempo para que ocurra un evento cualquiera.

7. Una empresa de transportes ofrece el siguiente servicio para transporte de empleados a diferentes empresas a través del corredor las Condes Centro. Los buses salen desde la Escuela Militar y termina su recorrido en la estación Moneda en un sistema circular, es decir no se detienen. La empresa dispone de dos tipos de buses, expresos y ordinarios. El pasajero debidamente acreditado puede usar cualquiera de los buses. Los buses de ambos tipos pasan según una distribución de Poisson.

Los buses expresos pasan cada media hora en promedio y demoran un tiempo fijo de 10 minutos, mientras que los buses lentos pasan cada 10 minutos promedio y demoran un tiempo fijo de 30 minutos.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que pase antes un bus expreso que un ordinario?
b) Si usted toma el primer bus que pasa ¿ cual es el valor esperado de su tiempo de viaje ?
c) Si usted sigue la estrategia de tomar el bus ordinario ¿ Cual es su tiempo de viaje ?

8.Se juega un partido de fútbol por las clasificatorias, entre la selección chilena y otra selección de un país vecino. Las personas llegan a la boletería de una cierta tribuna según un proceso de Poisson a tasa de 200 personas/minuto. Se debe suponer que la capacidad de la tribuna es infinita, sin embargo a los hinchas no les gusta quedar muy aglomerados en la tribuna. Por esta razón preguntan en la boletería por el número de personas que ya han ingresado (supongamos que el boletero dispone de la información exacta).

Si este número es menor a 20.000 las personas siempre ingresan. Si es mayor o igual a 20.000, con probabilidad 0,25 ingresan ; en caso contrario se devuelven a su casa.

a) Obtenga una expresión para la probabilidad de que ninguna persona se devuelva a su casa durante la primera hora de operación del proceso.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que durante las primeras dos horas se devuelvan 1.000 personas?
c) Suponga que se define el proceso de conteo M(t) como el número de personas que se han devuelto a sus casa durante las primeras t unidades de tiempo. ¿ Tiene este proceso incrementos independientes ? ¿ Incrementos estacionarios?
d) Suponga que ud. observa el proceso en un instante t especifico y se informa que hay ya en el estadio 25.000 personas. ¿ Cuál es la probabilidad de que pasen mas de 5 segundos sin que ingrese un nuevo individuo al estadio ?
e) ¿ Cuál es el tiempo esperado que transcurre hasta que han ingresado 80.000 personas al estadio ?

9. Llegan inmigrantes a un territorio de acuerdo a un proceso de poisson a tasa 10 personas/semana. Cada inmigrante es de raza amarilla con probabilidad 1/12
¿ Cuál es la probabilidad de que no lleguen inmigrantes de raza amarilla al territorio durante un mes ?