PRÁCTICA 4

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Ejercicio 1. Se baraja un conjunto de $n = 100$ cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un "éxito" si la i-ésima carta extraída es aquella cuyo número es i ($i = 1,\ldots,n$).

a) Escribir un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos.

b) Determine las respuestas exactas para $n >> 1$ y compárelas con los resultados estimados.

Ejercicio 2. Se desea construir una aproximación de:

$$\sum_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{k}{N}\right) \text{ donde } N = 10000 \,.$$

a) Escribir un algoritmo para estimar la cantidad deseada.

b) Obtener la aproximación sorteando 100 números aleatorios.

c) ¿Es buena la aproximación obtenida?

Ejercicio 3. Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que todos los resultados posibles: $2,3,\ldots,12$ hayan aparecido al menos una vez. Estudiar mediante una simulación el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso. Cada lanzamiento implica arrojar *el par* de dados.

a) Describir la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.

b) Mediante una implementación en computadora, calcular el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000 veces.

Ejercicio 4. Desarrollar un método para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right) 2^{j-1}}{3^j} \,, \quad j = 1,2,\ldots$$

Ejercicio 5. Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = i) = \frac{\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}} \quad (i = 0,\ldots,k)$$

Ejercicio 6. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X = j) = p_j$ con $j = 1,2,\ldots$. Sea:

$$\lambda_n = P(X = n | X > n-1) = \frac{p_n}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Las cantidades λ_n, son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n-1$, muera en el tiempo n.

a) Mostrar que $p_1 = \lambda_1$ y que

$$p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n$$

Método de la tasa discreta de riesgo para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el n-ésimo número generado es menor que λ_n. El algoritmo puede escribirse como sigue:

Paso 1: `X = 1`

Paso 2: `Generar U`

Paso 3: Si $U < \lambda_X$, terminar.

Paso 4: `X = X + 1`

Paso 5: Ir al Paso 2

b) Mostrar que los valores de X que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.

c) Suponer que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p:

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Determinar los valores de $\lambda_n, n \geq 1$. Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

Ejercicio 7. Suponiendo que $0 \leq \lambda_n \leq \lambda$, para todo $n \geq 1$; considerar el siguiente algoritmo para generar una variable aleatoria con tasas dicretas de riesgo $\{\lambda_n\}$:

Paso 1: `S = 0`

Paso 2: Generar U, $Y = \mathrm{Ent}\left[\frac{\log(U)}{\log(1-\lambda)}\right] + 1$

Paso 3: `S = S + Y`

Paso 4: `Generar U`

Paso 5: Si $U \leq \lambda_s/\lambda$, tomar X = S y terminar. Caso Contrario, ir a Paso 2.

a) ¿Cuál es la distribución de Y en el paso 2?

b) Explique cómo funciona el algoritmo.

c) Argumentar que X resulta una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$.