
SISTEMAS DE CONTROL

Ingeniería Electrónica
Ingeniería en Computación

Guía de Ejercicios Prácticos

Versión 2.4

Con ejercicios seleccionados resueltos

Mg. Ing. Juan Pablo Pedroni

Consultas: universidad.pedroni@gmail.com

ÍNDICE

Guía de Elaboración del Trabajo Integrador.	3
Unidad 1: Introducción a Sistemas de Control.....	4
Unidad 2: Representaciones Matemáticas y Gráfica de Sistemas Lineales de Tiempo Continuo	7
Unidad 3: Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos	14
Unidad 4: Análisis y Diseño Clásico de Control en el Dominio del Tiempo.....	21
Técnica del Lugar de Raíces.....	27
Ejemplo de Aplicación de la Técnica del Lugar de Raíces	28
Unidad 5: Análisis y Diseño Clásico de Sistemas de Control en el Dominio de la Frecuencia.....	34
Comentarios sobre la Función Arco Tangente y el Diagrama de Nyquist.	44
Unidades 4 y 5: Compensación de los Sistemas de Control	48
Compensación por Cancelación de Polos Dominantes	48
Método de la Bisectriz.....	55
Compensación en Frecuencia	62
Compensación de Perturbación por Adelanto de Señal.....	65
Sintonización de Compensadores PID	66
Unidad 6: Análisis en el Espacio de Estados.....	67

Guía de Elaboración del Trabajo Integrador.

Requisitos mínimos:

El siguiente listado enumera los contenidos mínimos que deberá incluir el informe del proyecto integrador de la materia.

Introducción

- Descripción cualitativa del sistema, motivación del estudio, requerimientos.

Análisis de la planta

- Modelo matemático en el dominio del tiempo.
- Función de Transferencia.
- Modelo en Simulink.
- Respuesta Temporal
 - Estabilidad.
 - Régimen transitorio.
 - Régimen permanente.

Requisitos de control

- Sobrepasamiento máximo.
- Tiempo de establecimiento.
- Error en estado estable.

Diseño del compensador

- Selección de la técnica de diseño:
 - Método de cancelación de polos dominantes.
 - Método de la bisectriz.
 - Compensación en frecuencia.

Validación del compensador

- Simulación del sistema a lazo cerrado.
- Comparación entre la respuesta del sistema compensado y los requerimientos de control. (Verificación)

Conclusiones

Bibliografía

Unidad 1: Introducción a Sistemas de Control

- 1) Dar un ejemplo de sistema (un proceso o dispositivo) que se encuentre en una casa y que satisfaga la siguiente clasificación:
 - a) Sistema de control manual de lazo abierto.
 - b) Sistema de control manual de lazo cerrado.
 - c) Sistema de control automático de lazo abierto.
 - d) Sistema de control automático de lazo cerrado.
 - e) Sistema de control discreto.
 - f) Sistema de control continuo.
- 2) Esquematizar los diagramas de bloques de los sistemas del punto anterior.
- 3) Considerando el proceso de colocar comida en la boca:
 - a) Realizar el diagrama de bloques de este sistema.
 - b) Identificar los componentes de un sistema de control por realimentación que participan en este proceso, tales como la variable controlada, el punto de calibración, el controlador, etc.
- 4) Trazar los diagramas de bloques de los siguientes procesos:
 - a) Una receta de cocina.
 - b) Un sistema de calefacción doméstico controlado por un termostato.
 - c) Un proceso de inscripción en las materias de la carrera Ingeniería en Sistemas, de modo tal que un nuevo estudiante tenga pocas dificultades para llegar a sus clases.
- 5) Encontrar las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones. Verificar utilizando Matlab.

$$g_1(t) = \delta(t)$$

$$g_2(t) = u(t)$$

$$g_3(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$g_4(t) = 7e^{-5t}u(t)$$

$$g_5(t) = (1 + e^{-2t})u(t)$$

$$g_6(t) = (t \sin(2t) + 3e^{-10t})u(t)$$

$$g_7(t) = e^{-5(t-2)}u(t-2)$$

$$g_8(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t)u(t)$$

Solución con Matlab:

```
syms s t a w
G1=laplace(dirac(t))
G2=laplace heaviside(t)
G3=laplace(exp(-2*t))
G4=laplace(5*exp(-5*t))
G5=1/s-laplace(exp(-2*t))
G6=laplace(t*sin(2*t)+exp(-2*t))
G7=laplace(heaviside(t-2)*exp(-5*(t-2)))
G8=laplace(exp(-a*t)*cos(w*t))
```

- 6) Encontrar la Transformada Inversa de Laplace de las siguientes funciones. Verificar con Matlab:

$$G_1(s) = \frac{2}{s+3}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

$$G_3(s) = \frac{6s+8}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G_4(s) = \frac{10s}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$G_5(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$G_6(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$G_7(s) = \frac{9}{2s^2+4s+4}$$

$$G_8(s) = \frac{2s+12}{(s^2+2s+5)}$$

$$G_9(s) = \frac{2}{s^2+4} e^{-5s}$$

$$G_{10}(s) = \frac{100}{s(s^2+4)}$$

$$G_{11}(s) = \frac{100(s+2)}{s(s^2+4)(s+1)} e^{-s}$$

Solución con Matlab

```
syms s t a w
g1=ilaplace(2/(s+3))
g2=ilaplace(1/s/(s+2)/(s+3))
g3=ilaplace((6*s+8)/(s*(s+1)*(s+2)))
g4=ilaplace(10*s/(s^3+6*s^2+11*s+6))
g5=ilaplace(10/((s+1)^2*(s+3)))
g6=simplify(ilaplace(w/((s+a)^2+w^2)))
g7=ilaplace(9/(2*s^2+4*s+4))
g8=simplify(ilaplace((2*s+12)/(s^2+2*s+5)))
g9=ilaplace(2*exp(-5*s)/(s^2+4))
g10=ilaplace(100/(s*(s^2+4)))
g11=simplify(ilaplace(100*(s+2)*exp(-s)/(s*(s^2+4)*(s+1))))
```

- 7) Sean sistemas modelados por las siguientes funciones de transferencia. Determinar el valor final de las salidas para entradas escalón unitario. Simular la respuesta de los sistemas.

$$G_1(s) = \frac{5}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{5}{(s+2)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_4(s) = \frac{2}{(s+2)} e^{-10s}$$

$$G_5(s) = \frac{5(s+1)}{(s^2+s+2)}$$

$$G_6(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

$$G_7(s) = \frac{12(s+2)}{s(s+4)}$$

$$G_8(s) = \frac{s^2}{s(s+40)}$$

Solución con Matlab:

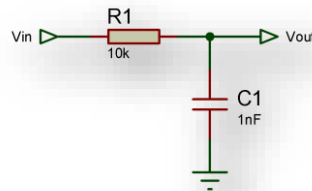
```
G1=tf(5,1)
step(G1)
G2=tf(5,[1 2])
step(G2)
```

```
G3=zpk([], [-2 -3], 1)
step(G3)
G4=tf(2, [1 2])
G4.inputdelay=10
step(G4)
G5=5*tf([1 1], [1 1 2])
step(G5)
G6=zpk([-1], [-2 -3], 5)
step(G6)
G7=zpk([-2], [0 -4], 12)
step(G7, 5)
```

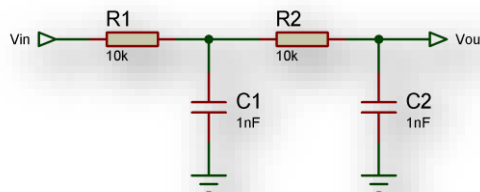
Unidad 2: Representaciones Matemáticas y Gráfica de Sistemas Lineales de Tiempo Continuo

- 1) Determinar la función de transferencia que relaciona la tensión de salida con la tensión de entrada de los siguientes circuitos. Comparar los resultados.

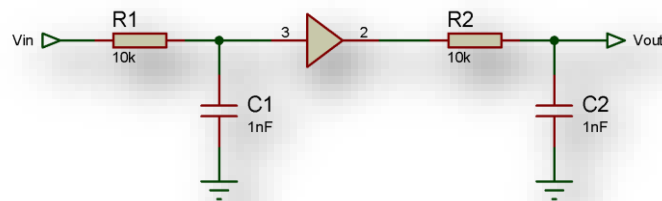
Circuito N° 1:



Circuito N° 2:

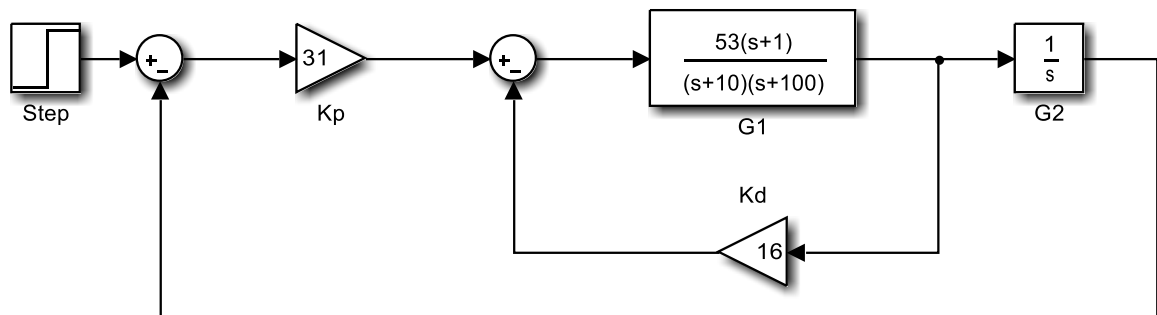


Circuito N° 3:



- 2) Obtener la Función de Transferencia de los siguientes sistemas utilizando el álgebra de bloques. Verificar comparando la respuesta al escalón del sistema con la respuesta al escalón de la F de T calculada.

Sistema 1: Sistema a lazo cerrado con realimentación tacométrica

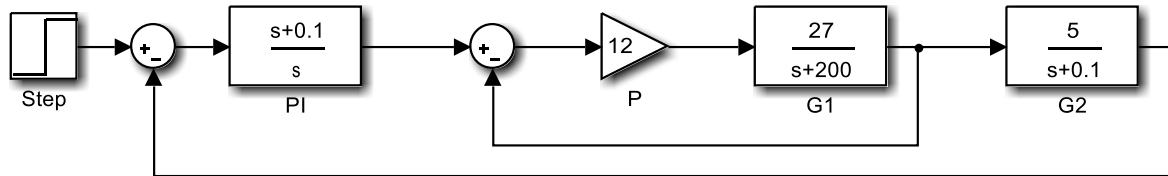


Solución usando Matlab:

```
close all; clear all; clc
G1=zpk([-1],[-10 -100],53);
G2=tf(1,[1 0]);
```

```
Kp=31;
Kd=16;
%Lazo Cerrado interno
LCi=feedback(G1,Kd);
%Lazo Cerrado Externo
LCe=feedback(Kp*LCi*G2,1)
```

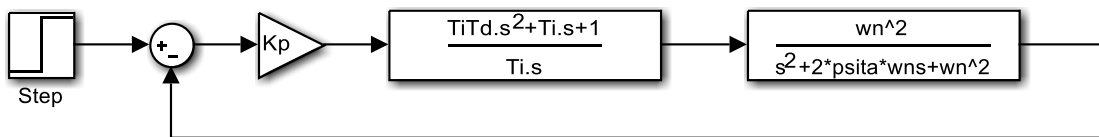
Sistema 2: Sistema de control en cascada



Solución usando Matlab:

```
close all; clear all; clc
G1=tf(27,[1 200]);
G2=tf(5,[1 0.1]);
P=12;
PI=tf([1 0.1],[1 0]);
%Lazo Cerrado interno
LCi=feedback(P*G1,1);
%Lazo Cerrado Externo
LCe=feedback(PI*LCi*G2,1)
```

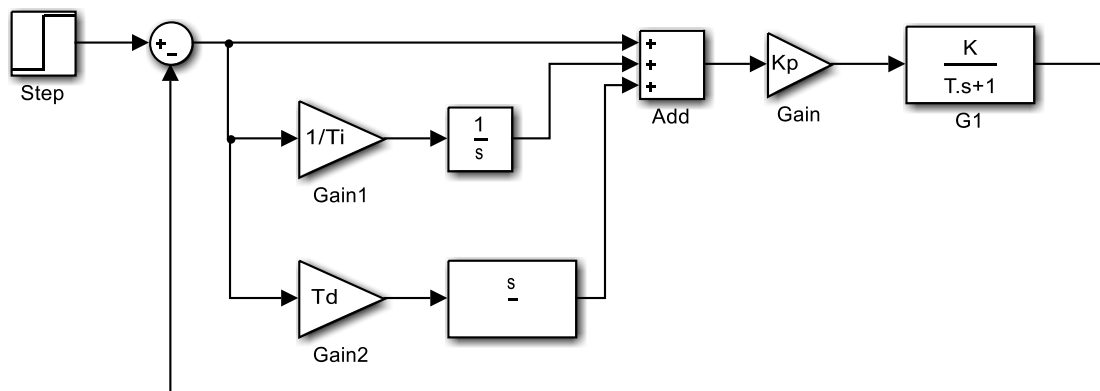
Sistema 3: Sistema a lazo cerrado con controlador PID



Solución usando Matlab:

```
close all; clear all; clc
syms Kp Ti Td wn psita s real
PID=Kp*(Ti*Td*s^2+Ti*s+1)/(Ti*s)
G=wn^2/(s^2+2*psita*wn*s+wn^2)
Sys=PID*G/(1+PID*G)
Sys=collect(Sys,'s')
```

Sistema 4: Sistema a lazo cerrado con controlador PID

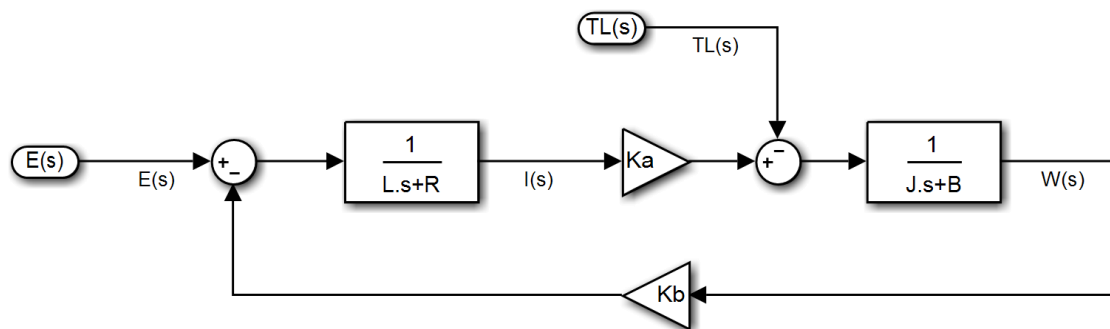


Solución usando Matlab:

```
close all; clear all; clc
syms Kp Ti Td K T s real
PID=Kp*(1+1/(Ti*s)+Td*s);
G1=K/(T*s+1);
Sys=collect(PID*G1/(1+PID*G1), 's')
```

3) En la figura se muestra el diagrama de bloques de un motor de corriente continua, donde $E(s)$ representa la entrada de tensión, $W(s)$ la salida de velocidad del eje, $I(s)$ la corriente que circula por el motor y $T_L(s)$ la carga del sistema, que puede verse como una perturbación. Se pide:

- Determinar las cuatro funciones de transferencia que modelan el sistema.
- Simular la respuesta del sistema para $e(t) = 24u(t)$ y $t_L(t) = 0.01u(t-2)$.



Considerar para la simulación los siguientes valores:

$$L = 1 \times 10^{-6} \text{ H}$$

$$J = 10 \times 10^{-6} \text{ Kg m}^2$$

$$R = 2 \Omega$$

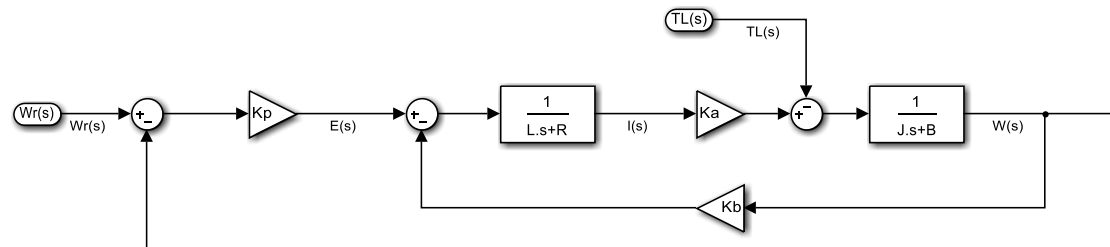
$$B = 0.30 \times 10^{-5} \text{ N / rad / seg}$$

$$K_a = 0.042 \text{ Nm / A}$$

$$K_b = 0.042 \text{ V / rad / seg}$$

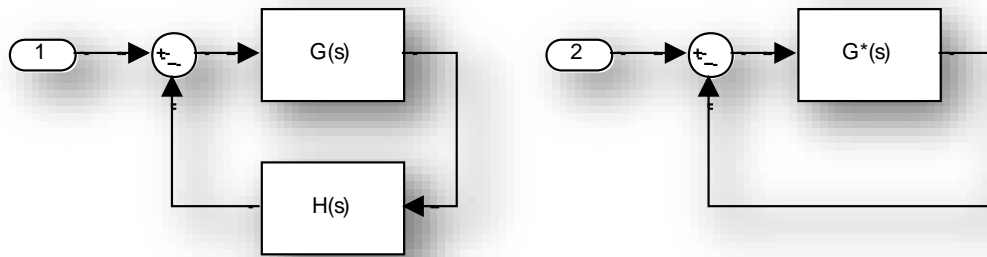
4) En la figura se muestra el diagrama de bloques de un motor de corriente continua con realimentación de velocidad, donde $W_r(s)$ representa la referencia de velocidad, $W(s)$ la salida de velocidad del eje, $I(s)$ la corriente que circula por el motor y $T_L(s)$ la carga del sistema, que puede verse como una perturbación. Se pide:

- Determinar las funciones de transferencia $W(s)/W_r(s)$ y $W(s)/T_L(s)$.
- Simular la respuesta del sistema para $W_r(t) = 1500u(t)$ y $t_L(t) = 0.01u(t-2)$.

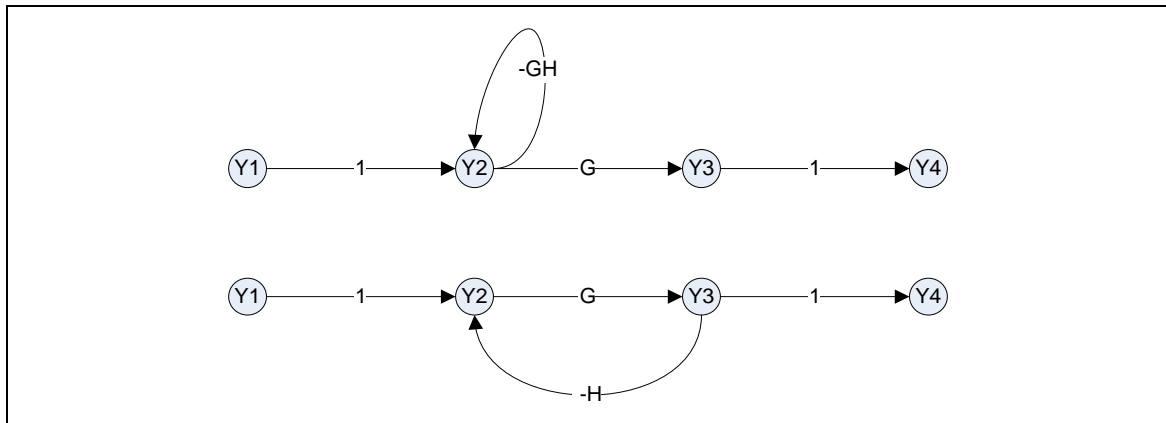


Considerar los mismos valores que para el ejercicio anterior para la simulación. Determinar la influencia del valor de K_p en la respuesta del sistema.

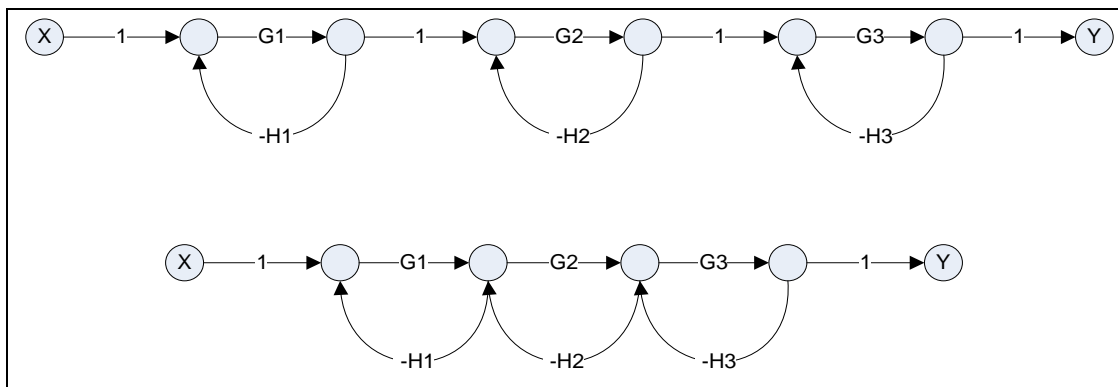
- 5) Encontrar $G^*(s)$ de manera tal que los sistemas que se muestran a continuación sean equivalentes.



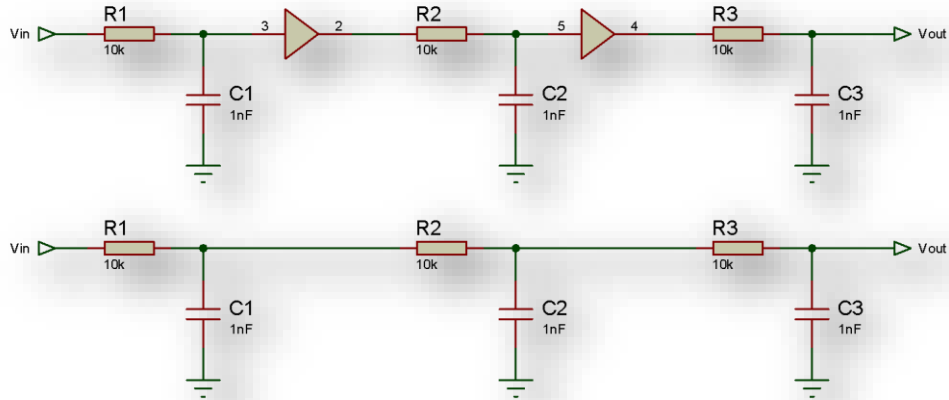
- 6) Demostrar que los siguientes sistemas son equivalentes.



- 7) Demostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes.



8) Demostrar que los siguientes circuitos no son equivalentes.

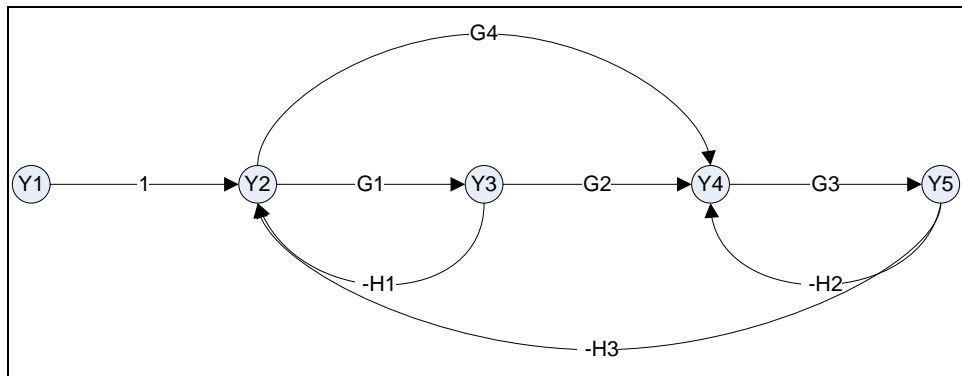


9) Calcular las Funciones de Transferencia de los sistemas que se presentan en el ejercicio 0 de la pág. 9 y ejercicio 4) de la pág. 9 transformando los diagramas de bloques en diagramas de flujo de señal y aplicando la regla de Mason.

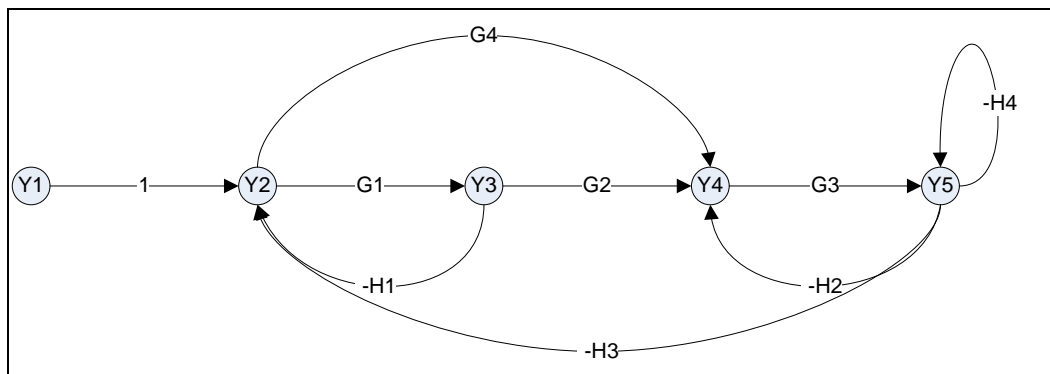
10) Aplicar la Regla de Mason para encontrar las siguientes Funciones de Transferencia.

$$\frac{Y_5}{Y_1} \quad \frac{Y_4}{Y_1} \quad \frac{Y_2}{Y_1}$$

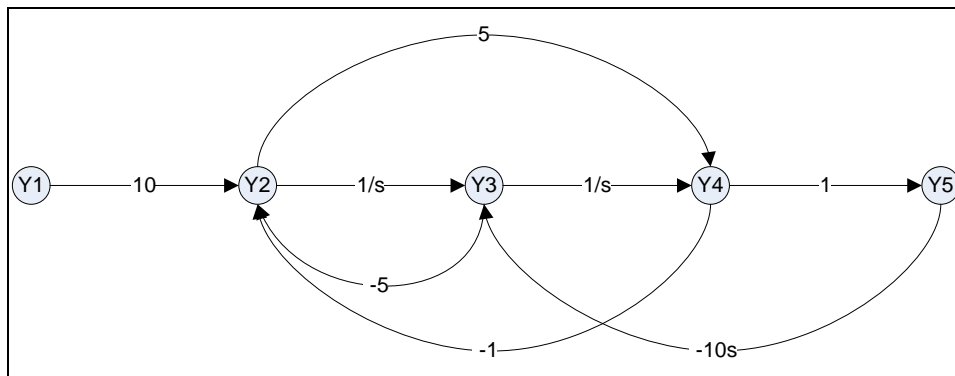
Sistema 1:



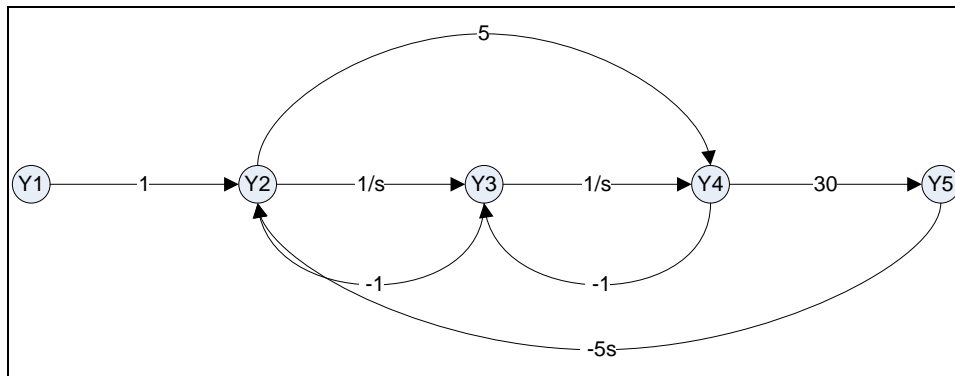
Sistema 2:



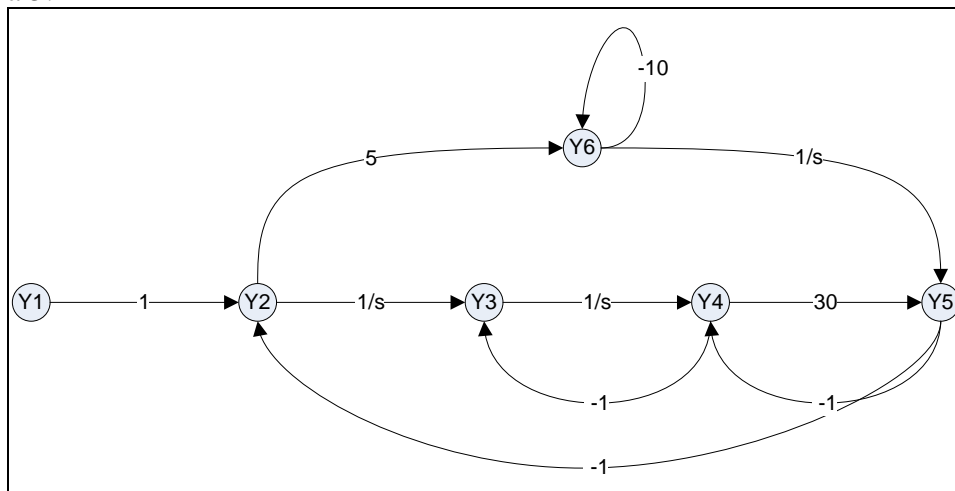
Sistema 3:



Sistema 4:



Sistema 5:



- 11) A partir de las ecuaciones que modelan matemáticamente el comportamiento dinámico de un motor de corriente continua, dibujar el diagrama de flujo de señal y determinar la función de transferencia entre la velocidad de salida y la tensión de entrada aplicando la fórmula de Mason.

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K\omega(t)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = Ki(t) - B\omega(t) - T_L(t)$$

- 12) Dibujar los diagramas de flujo de señal para las siguientes funciones de transferencia.

$$G_1(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10}$$

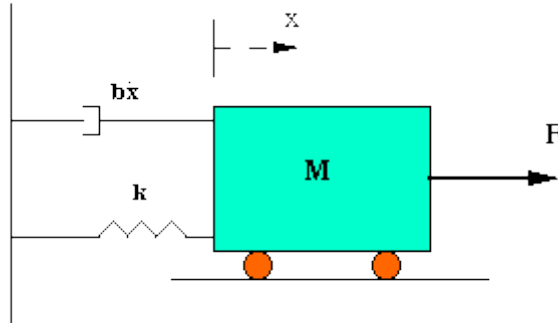
$$G_2(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

Unidad 3: Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos

- 1) La figura representa un sistema masa-resorte-amortiguador, que puede ser modelada matemáticamente por la siguiente ecuación diferencial:

$$Ma(t) + Bv(t) + Kx(t) = f(t)$$

Donde M, B, K representan las constantes de masa, fricción viscosa y del resorte, mientras que $a(t), v(t), x(t)$ representan la aceleración, velocidad y posición de la masa respectivamente. La fuerza externa aplicada al sistema es $f(t)$.



Se pide determinar las funciones de transferencia:

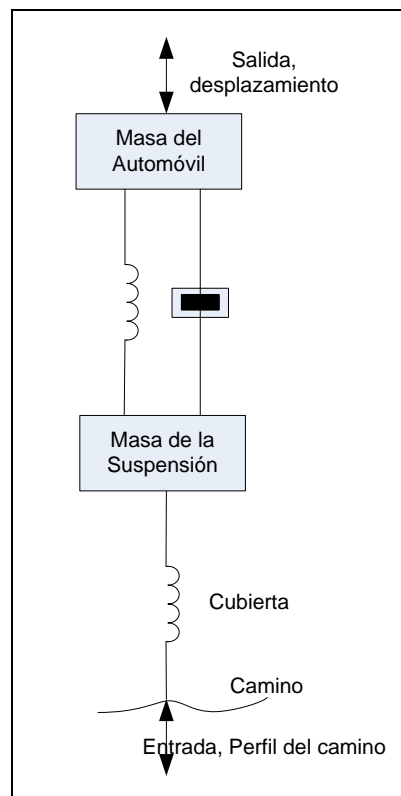
a) $\frac{A(s)}{F(s)}$

b) $\frac{V(s)}{F(s)}$

c) $\frac{X(s)}{F(s)}$

Por qué todas comparten el mismo denominador?

- 2) La figura representa el sistema de suspensión de un automóvil mientras se desplaza sobre el pavimento.



- Realizar el diagrama de cuerpo libre del sistema.
- Verificar las ecuaciones diferenciales que representan al sistema son:

$$M_A \ddot{x}_A = B_A (\dot{x}_S - \dot{x}_A) + K_R (x_S - x_A)$$

$$M_S \ddot{x}_S = B_A (\dot{x}_A - \dot{x}_S) + K_R (x_A - x_S) + K_C (u - x_S)$$

Donde $x_a(t), x_s(t), u$ representan la altura del automóvil, la altura de la suspensión y el perfil del camino respectivamente.

- Escribir la Función de Transferencia que relaciona el camino (entrada) con el desplazamiento del chasis del vehículo (salida)
- Modelar utilizando Simulink, considerando:

$$M_{Autom\acute{o}vil} = 350Kg$$

$$M_{Suspensi\acute{o}n} = 20Kg$$

$$K_{Resorte} = 100N / m$$

$$K_{Cubierta} = 50N / m$$

$$B_{Amortiguador} = 400Nseg / m$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace en ambas ecuaciones:

$$M_A s^2 X_A(s) = B_A s (X_S(s) - X_A(s)) + K_R (X_S(s) - X_A(s))$$

$$M_S s^2 X_S(s) = B_A s (X_A(s) - X_S(s)) + K_R (X_A(s) - X_S(s)) + K_C (U(s) - X_S(s))$$

Sacando factor común:

$$(M_A s^2 + B_A s + K_R) X_A(s) = (B_A s + K_R) X_S(s)$$

$$(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) X_S(s) = (B_A s + K_R) X_A(s) + K_C U(s)$$

Luego:

$$X_A(s) = \frac{(B_A s + K_R)}{(M_A s^2 + B_A s + K_R)} X_S(s)$$

Y reemplazando en la segunda ecuación:

$$(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) X_S(s) = (B_A s + K_R) \frac{(B_A s + K_R)}{(M_A s^2 + B_A s + K_R)} X_S(s) + K_C U(s)$$

$$\left[(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) (M_A s^2 + B_A s + K_R) - (B_A s + K_R)^2 \right] X_S(s) = K_C U(s)$$

$$(M_A M_S s^4 + (B_A M_A + B_A M_S) s^3 + (M_A (K_C + K_R) + K_R M_S) s^2 + B_A K_C s + K_C K_R) X_S(s) = K_C U(s)$$

Finalmente, la función de transferencia queda:

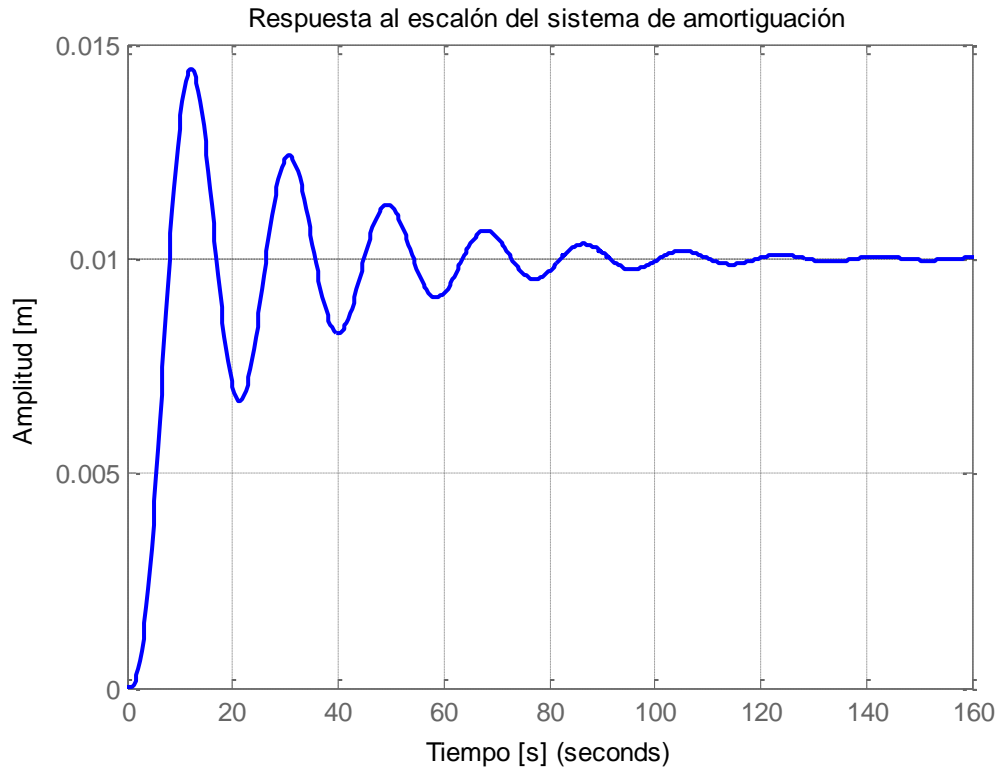
$$\frac{X_S(s)}{U(s)} = \frac{K_C}{(M_A M_S s^4 + (B_A M_A + B_A M_S) s^3 + (M_A (K_C + K_R) + K_R M_S) s^2 + B_A K_C s + K_C K_R)}$$

Para la simulación se puede utilizar el siguiente código:

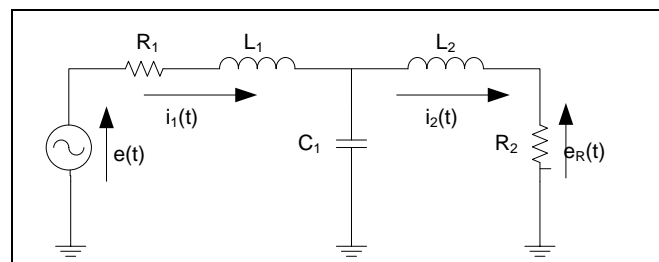
```
close all; clear all; clc
MA=350;
MS=20;
KR=100;
KC=50;
BA=400;
```

```
G=tf(KC,[MA*MS BA*MA+BA*MS MA*(KC+KR)+KR*MS BA*KC KC*KR])
```

```
step(G);grid
title('Respuesta al escalón del sistema de amortiguación')
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Amplitud [m]')
```



3) Considerando el circuito eléctrico que se muestra en la figura, encontrar:



- Las ecuaciones que lo representan matemáticamente.
- La relación entre la tensión de entrada $e(t)$ y la de salida $e_R(t)$.
- Simular el circuito con Simulink, considerando;
 - $R_1 = 100\Omega$
 - $R_2 = 250\Omega$
 - $C_1 = 1\mu F$
 - $L_1 = 100mHy$
 - $L_2 = 100mHy$

4) El siguiente circuito representa al motor de corriente continua.

a) Verificar que las ecuaciones diferenciales que lo modelan son:

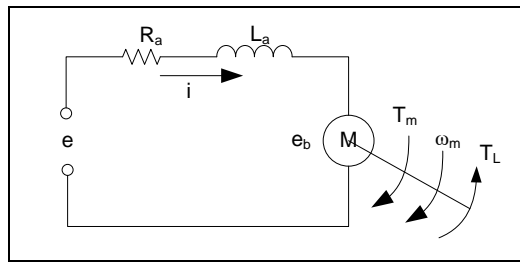
$$e = R_a i + L_a \dot{i} + K_b \omega$$

$$J_m \dot{\omega} = K_i i - B_m \omega - T_L$$

b) Obtener la función de transferencia del sistema, tomando la tensión $e(t)$ como entrada y a la velocidad de giro del eje de rotor $\omega_m(t)$ como salida.

c) Obtener el modelo del motor en Simulink.

d) Encontrar la velocidad de régimen y la cantidad de vueltas dadas por el eje para $t=10\text{seg}$ para una entrada escalón de 24 voltios de amplitud. Considerar:



$$L_a = 10\text{mH}$$

$$R_a = 10\Omega$$

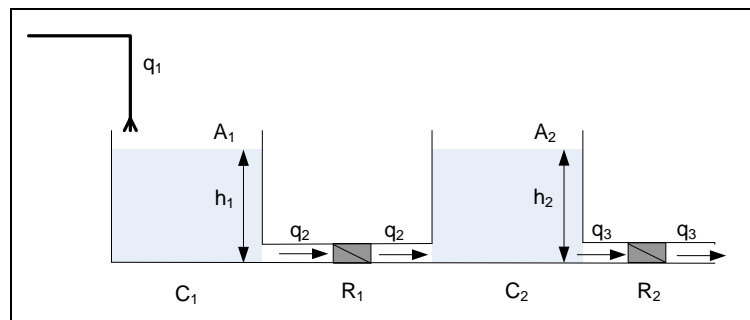
$$K_i = 0.024\text{Nm/A}$$

$$K_b = 0.024\text{V/rad/se g}$$

$$B_m = 10\text{e-}5\text{N/rad/seg}$$

$$J_m = 10\text{e-}6\text{Kgm}^2$$

5) En la siguiente figura se muestra un sistema hidráulico. Obtener las relaciones que describen cómo las alturas del líquido en los contenedores cambian con el tiempo. Considerar que la inercia (inercia) es despreciable.



- 6) Determinar la función de transferencia del motor Faulhaber modelo 1741 012 CXR cuya hoja de datos se presenta a continuación. Simular la respuesta temporal para una entrada escalón de 12 voltios de amplitud.

NEW

FAULHABER

DC-Micromotors

Graphite Commutation

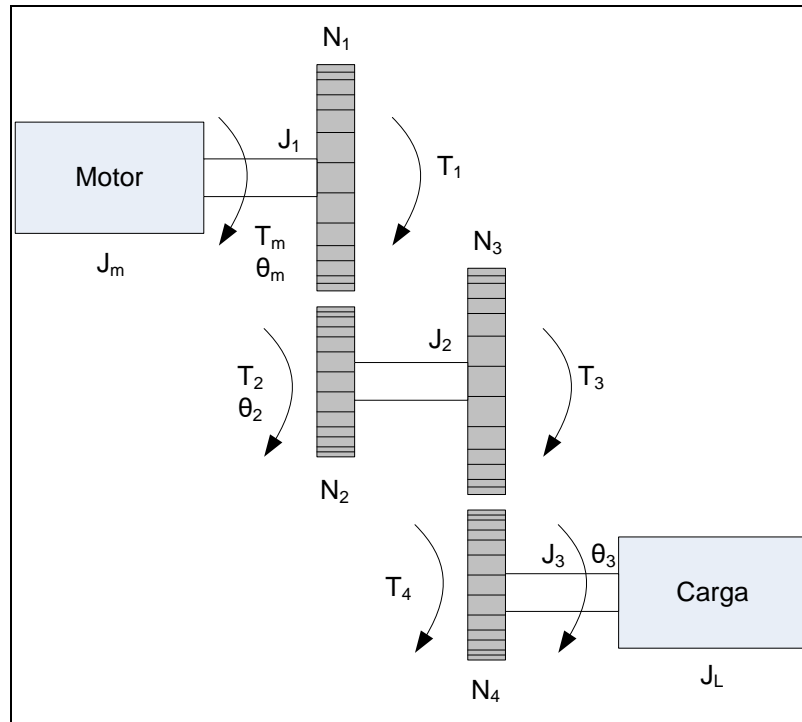
8 mNm

For combination with
Gearheads:
16/7, 20/1
Encoders:
IE2-1024, IE2-16

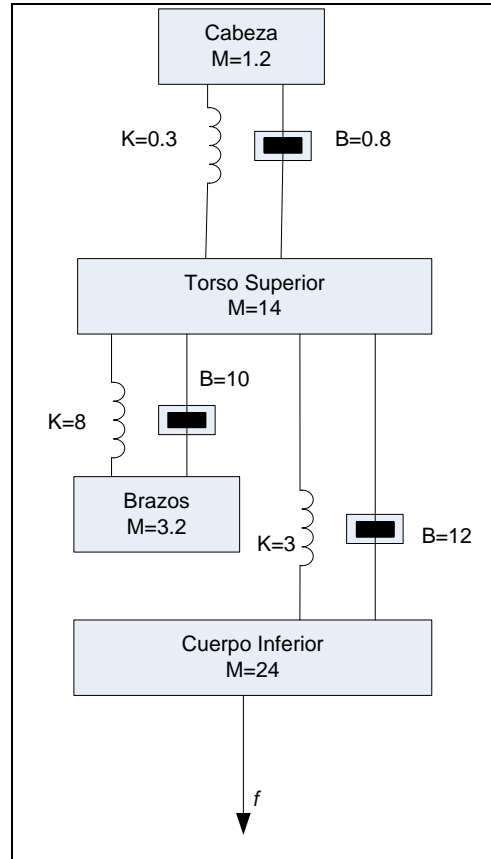
Series 1741 ... CXR

	1741 U	006 CXR	012 CXR	018 CXR	024 CXR	
1 Nominal voltage	U _N	6	12	18	24	V
2 Terminal resistance	R	1,3	5,8	15	26,9	Ω
3 Output power	P _{2 max.}	5,71	5,58	5,01	5,03	W
4 Efficiency, max.	η _{max.}	75	77	78	79	%
5 No-load speed	n ₀	7 000	7 500	7 200	7 200	rpm
6 No-load current (with shaft ø 2 mm)	I ₀	0,039	0,02	0,013	0,009	A
7 Stall torque	M _{st}	31,3	28,5	26,7	26,8	mNm
8 Friction torque	M _f	0,29	0,29	0,29	0,29	mNm
9 Speed constant	k _n	1 285	660	415	310	rpm/V
10 Back-EMF constant	k _E	0,778	1,515	2,41	3,226	mV/rpm
11 Torque constant	k _M	7,43	14,48	23,02	30,82	mNm/A
12 Current constant	k _i	0,135	0,069	0,043	0,032	A/mNm
13 Slope of n-M curve	Δn/ΔM	225	265	270	270	rpm/mNm
14 Rotor inductance	L	35	135	340	600	μH
15 Mechanical time constant	τ _m	4,2	4,4	4,2	4,2	ms
16 Rotor inertia	J	1,8	1,6	1,5	1,5	gcm ²
17 Angular acceleration	α _{max.}	174	178	178	179	·10 ³ rad/s ²
18 Thermal resistance	R _{th 1} / R _{th 2}	7 / 23				K/W
19 Thermal time constant	τ _{w1} / τ _{w2}	8 / 440				s
20 Operating temperature range:						
– motor		-30 ... +100				°C
– rotor, max. permissible		+125				°C
21 Shaft bearings		ball bearings, preloaded				
22 Shaft load max.:						
– with shaft diameter		2				mm
– radial at 3 000 rpm (3 mm from bearing)		8				N
– axial at 3 000 rpm		0,8				N
– axial at standstill		10				N
23 Shaft play						
– radial	≤	0,015				mm
– axial	=	0				mm
24 Housing material		steel, zinc galvanized and passivated				
25 Weight		45				g
26 Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face				

- 7) Escribir las ecuaciones del par del sistema de tren de engranajes que se muestra en la figura. Los momentos de inercia de los engranajes son J_1 , J_2 y J_3 . $T_m(t)$ es el par aplicado; N_1 , N_2 , N_3 y N_4 son los números de dientes de los engranajes. Suponer que los ejes son rígidos.
- Suponiendo que los momentos de inercia son despreciables, escribir las ecuaciones de par del sistema.
 - Encontrar la inercia total reflejada al eje del motor.
 - Repetir el punto a) considerando los momentos de inercia.

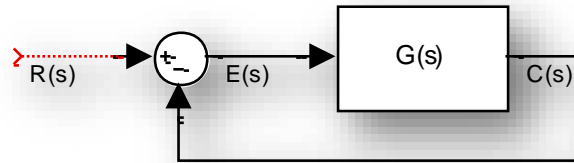


- 8) En estudios de vibraciones, el cuerpo de los seres humanos con frecuencia se modela mediante resortes, masas y amortiguadores. Para el modelo de un cuerpo sentado con una fuerza aplicada f , según se muestra en la figura, encontrar las ecuaciones que modelan el sistema, y expresarlas en la forma de ecuaciones de estado.



Unidad 4: Análisis y Diseño Clásico de Control en el Dominio del Tiempo

- 1) Determinar las constantes de error de posición, velocidad y aceleración (K_p , K_v , K_a) para los siguientes sistemas con realimentación unitaria y $G(s)$ dada por:



$$G_1(s) = \frac{50}{(1+0.5s)(1+2s)}$$

$$G_7(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)(s+6)}$$

$$G_2(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.5s)}$$

$$G_8(s) = \frac{10(s+1)}{s^3(s^2+5s+5)}$$

$$G_3(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$G_9(s) = \frac{10e^{-0.2s}}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$$

$$G_4(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s(s^2+2s+10)}$$

$$G_{10}(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s+5)(s+6)^2}$$

$$G_5(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+4)(4s^2+6s+1)}$$

$$G_{11}(s) = \frac{1000}{s(s+10)(s+100)}$$

$$G_6(s) = \frac{K}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{3s}{s^2(s+6)}$$

- 2) Para los sistemas del punto anterior, determinar el error de estado estable para una entrada escalón unitario, rampa unitaria y parabólica.
- 3) Un sistema con realimentación unitaria tiene una Función de Transferencia representada por:

$$G(s) = \frac{K_t(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}$$

Se aplica una entrada $r(t) = 1 + 5t$. Se desea que el error permanente sea igual o menor a 0.1 para la entrada dada. Determinar el valor de K_t . Verificar utilizando Simulink.

Solución:

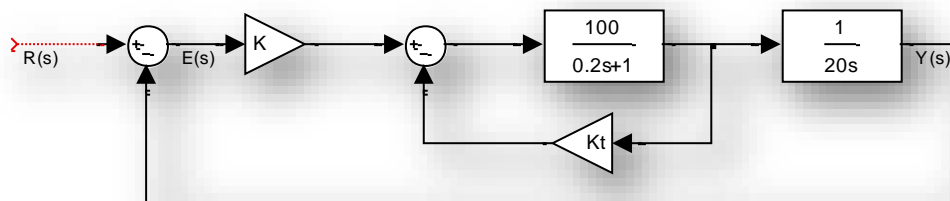
1er Camino. Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad de la transformada de laplace se analiza el error para la entrada escalón ($ess=0$) y para la entrada rampa ($ess=5/K_v$, con $K_v=K_t$ para este caso) en forma independiente y se suman los resultados. K_t debe ser mayor a 50.

2do Camino. Definiendo $E(s)=R/(1+G(s))$ y haciendo uso de la propiedad del Teorema del Valor Final se determina el mismo valor.

A continuación se presenta solución usando el segundo camino con Matlab.

```
syms s K real
R=1/s+5/s^2
G=K*(2*s+1)/(s*(4*s+1)*(s+1)^2)
E=collect(s*R/(1+G),'s')
s=0
eval(E)
```

- 4) En la siguiente figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación tacométrica. Encontrar las constantes de error de estado estable al escalón, rampa y parábola. Encontrar los errores de estado estable en términos de K y K_t cuando se aplican las mismas entradas:



Solución con Matlab

```
%% Solución
syms K Kt s real
G1=100/(0.2*s+1);
G1LC=collect(G1/(1+G1*Kt),'s');
G2=1/(20*s);
G=collect(K*G1LC*G2,'s');
disp('=====')
disp('Sist. Tipo 1')
pretty(G)
Kv=collect(s*G,'s');
s=0;
eval(Kv);
disp('=====')
disp('Kv:')
pretty(Kv)
disp('=====')
disp('Error en Estado Estable:')
pretty(1/Kv)
K=50;Kt=5;
disp('=====')
disp('Error en Estado Estable para K=50 y Kt=5:')
eval(1/Kv)
```

```
%% Comprobación.
G1s=tf(100,[0.2 1]);
G1sLC=feedback(G1s,Kt);
G2s=tf(1,[20 0]);
G=K*G1sLC*G2s;
GLC=feedback(G,1);
t=0:0.001:100;
u=t; %Rampa Unitaria
c=lsim(GLC,u,t); % Salida del sistema
disp('=====')
disp('Error en estado estable (Simulado):')
u(length(t))-c(length(t))
```

- 5) Verificar utilizando Simulink los valores obtenidos en el punto anterior si $K = 50$ y $K_t = 5$.

- 6) Esbozar la respuesta al escalón unitario de los sistemas modelados por las siguientes funciones de transferencia. Verificar con Simulink.

$$G_1(s) = \frac{5}{s+1}$$

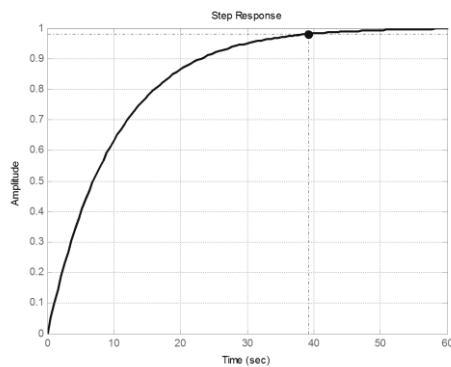
$$G_2(s) = \frac{2}{5s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{4}{s+4}$$

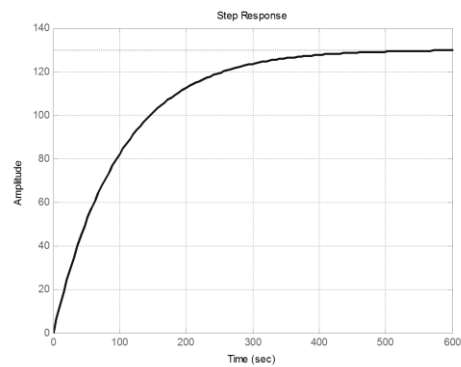
$$G_4(s) = \frac{2}{10s+1} e^{-3s}$$

- 7) Encontrar la función de transferencia de un sistema prototipo de primer orden para modelar el sistema cuya respuesta temporal al escalón unitario se muestra a continuación. Verificar utilizando Simulink.

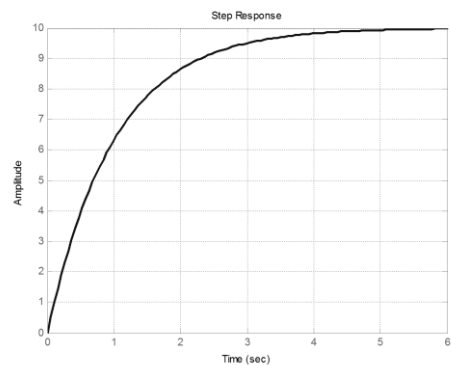
Sistema 1:



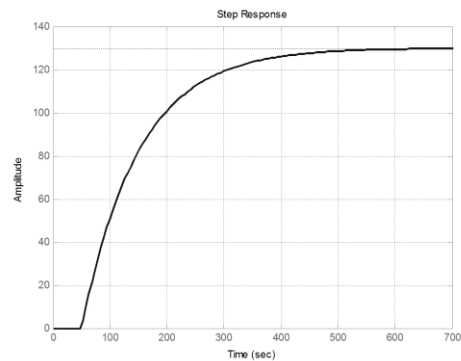
Sistema 3:



Sistema 2:



Sistema 4:



- 8) Sea el sistema formado por la función de transferencia $G(s) = 10/(s+2)$. Se desea calcular el valor al que tenderá la salida ante una entrada en escalón de amplitud 3 sin calcular explícitamente la señal temporal $y(t)$. Corroborar el resultado obtenido calculando $y(t)$ explícitamente.

9) Esbozar la respuesta al escalón de los sistemas cuyas funciones de transferencia se listan a continuación. Verificar utilizando Simulink.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1.414s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

$$G_3(s) = \frac{15625}{s^2 + 200s + 15625}$$

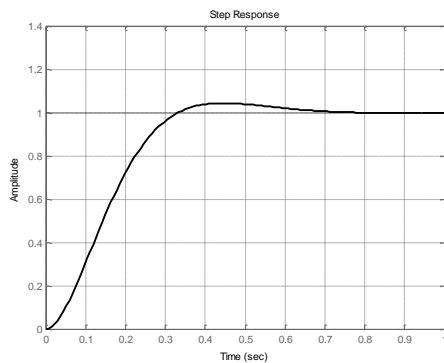
$$G_4(s) = \frac{400}{s^2 + 16s + 400} e^{-2s}$$

$$G_5(s) = \frac{5625}{(s + 37.5 + 64.95j)(s + 37.5 - 64.95j)}$$

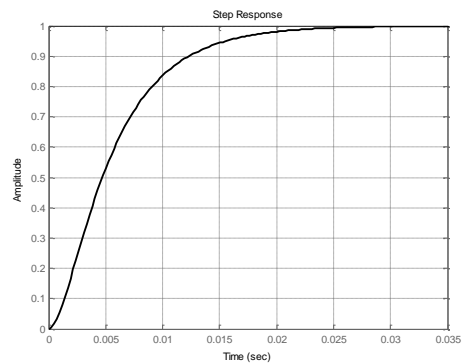
$$G_6(s) = \frac{5625}{(s + 75)^2}$$

10) Encontrar la función de transferencia de un sistema prototipo de segundo orden para modelar el sistema cuya respuesta temporal al escalón unitario se muestra a continuación. Verificar utilizando Simulink.

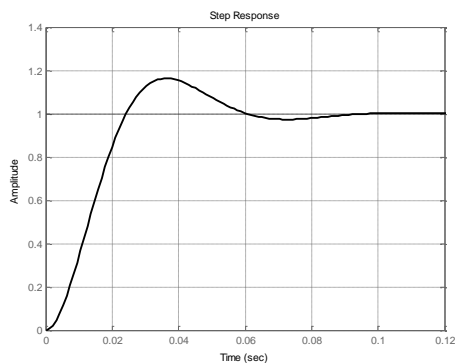
Sistema 1:



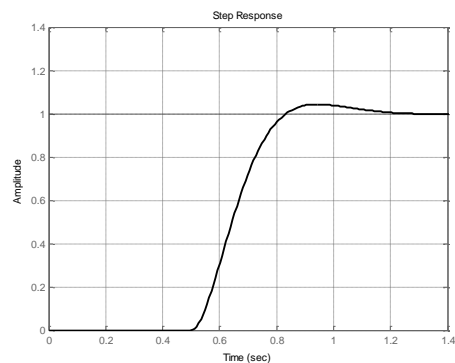
Sistema 4:



Sistema 2:

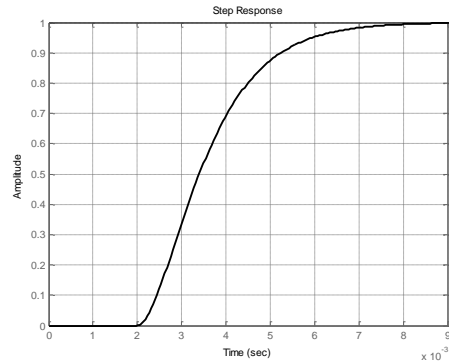
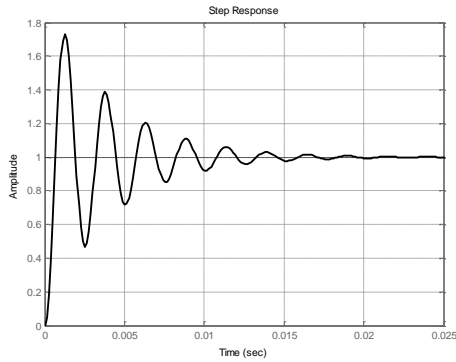


Sistema 5:



Sistema 3:

Sistema 6:



- 11) Determinar los parámetros que caracterizan la respuesta temporal del ejercicio 1) de la Unidad N° 3, pág. 14.
- 12) Para el motor del ejercicio 6) de la Unidad N° 3, modelar el sistema utilizando solamente la ganancia y la constante de tiempo mecánica. Obtener una función de transferencia equivalente de 1er orden y otra función equivalente de 2do orden. Simular y comparar con la función de transferencia completa.

$$G(s) = \frac{\omega_{\max} / V_{in}}{\tau_m s + 1}$$

Función de transferencia equivalente de 1er orden

$$G(s) = \frac{\omega_{\max} / V_{in}}{\left(\frac{\tau_m}{2} s + 1\right)^2}$$

Función de transferencia equivalente de 2do orden

- 13) Sea $y(t)$ la salida de un sistema continuo que se obtiene como respuesta a una entrada $u(t)$. Se sabe que la ecuación diferencial que describe el comportamiento de dicho sistema, y que relaciona ambas variables es la siguiente:

$$5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) - 5 \frac{du(t)}{dt} - u(t) = 0$$

- Calcular la expresión de la función de transferencia $G(s)$, suponiendo condiciones iniciales nulas.
 - Justificar si se trata de un sistema estable.
 - Simular el sistema modelando la ecuación diferencial y la función de transferencia. Comparar los resultados.
- 14) La función de transferencia que relaciona el voltaje de armadura aplicado a la armadura del motor DC de excitación independiente y la velocidad de giro en rad/s es:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{3000}{s^2 + 156.25s + 1837.5}$$

- Determinar la velocidad de giro en estado estacionario si se aplica un voltaje de 10 voltios.

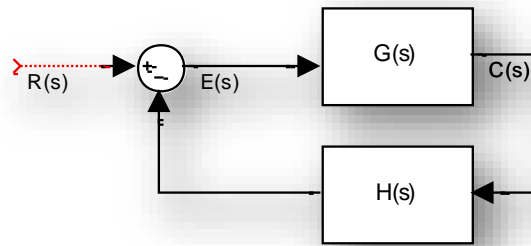
- b) Calcular la ganancia, el amortiguamiento, la frecuencia propia del sistema y el tiempo de establecimiento. ¿Qué tipo de respuesta tiene el sistema ante una entrada tipo escalón?
- c) Simular la respuesta al escalón y verificar los valores obtenidos en el punto anterior.
- d) Dibujar el mapa de polos y ceros del sistema.

15) Estudiar la estabilidad de los sistemas cuyas ecuaciones características son:

- a) $s^3 + 2.996s^2 + 3s + 10.998 = 0$
- b) $2(s+1)^2 = 0$
- c) $3s^2 + (2+k)s + 1 = 0$
- d) $6s^4 + s^3 + 3s^2 + ks + 1 + k = 0$

Técnica del Lugar de Raíces

Dado el siguiente sistema:



La Función de Transferencia de Lazo Cerrado del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Y la ecuación característica:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Las reglas para la construcción del Lugar de Raíces son:

1. **Puntos de Inicio $K = 0$:** Los polos de lazo abierto indican los lugares del plano complejo donde las ramas comienzan
2. **Puntos de Llegada $K = \infty$:** Los ceros de lazo abierto indican los lugares del plano complejo donde las ramas terminan (puede ubicarse en el infinito)
3. **Número de Ramas:** El número de ramas es igual al número de polos de lazo abierto (y por ende, igual al número de ceros de lazo abierto)
4. **Lugar de Raíces sobre el Eje Real:** Un punto del eje real pertenece al lugar de raíces si la cantidad de polos y ceros de lazo abierto a la izquierda de dicho punto es impar.
5. **Simetría:** El lugar de raíces es simétrico con respecto al eje real.
6. **Asíntotas:** Las ramas que terminan en el infinito son asíntóticas para grandes valores de s a rectas cuyos ángulos con el eje real son:

$$\theta_i = \frac{(2i+1) \times 180^\circ}{|n-m|}, i = 0, 1, \dots, |n-m|-1$$

Donde n representa la cantidad de polos finitos y m la cantidad de ceros finitos de $G(s)H(s)$.

7. **Intersección de las Asíntotas:** Las asíntotas se intersecan en el eje real en el punto:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Re}(p) - \sum \text{Re}(z)}{|n-m|}$$

8. **Ángulos de Salida y Llegada de Polos y Ceros Complejos:** Para trazar los lugares geométricos de las raíces con una precisión razonable, debemos encontrar las direcciones de los lugares geométricos de las raíces cercanas a los polos y ceros complejos. Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de todos los otros polos y ceros. Por tanto, el ángulo de llegada (o ángulo de salida) del lugar geométrico de las raíces de un polo complejo

(o de un cero complejo), se encuentra restando a 180° la suma de todos los ángulos de vectores, desde todos los otros polos y ceros hasta el polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos apropiados.

9. **Puntos de Desprendimiento e Ingreso:** Si un lugar geométrico de las raíces se ubica entre dos polos en lazo abierto adyacentes sobre el eje real, existe al menos un punto de desprendimiento entre dichos dos polos. Asimismo, si el lugar geométrico de las raíces está entre dos ceros adyacentes sobre el eje real, siempre existe al menos un punto de ingreso entre los dos ceros.

Por tanto, los puntos de desprendimiento y de ingreso se determinan a partir de las raíces de:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0$$

10. **Cruce con el Eje Imaginario:** Para determinar los puntos donde el lugar de raíces cruza el eje imaginario se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz. Primero se determina el valor de K crítico. Luego, armando la ecuación auxiliar en s^2 y valuando en K crítico se encuentran los valores $j\omega$ de corte del eje imaginario.

Solución con Matlab:

```
%% Técnica del lugar de raíces
close all; clear all; clc
G=zpk([-6],[0 -1 -3],1); % Función de Transferencia.
figure
% Lugar de raíces.
rlocus(G); sgrid(0.707,[2 4 6])
axis([-8 2 -8 8]);
% Asintotas
h=line([1 1],[-8 8])
set(h,'LineStyle','-.')

% Resp. a lazo cerrado.
K1=0.11; % Sist. críticamente amortiguado
K2=0.20; % Sist. subamortiguado, Mp=4%.
figure
step(feedback(K1*G,1),feedback(K2*G,1));grid
legend('K_1=0.11','K_2=0.20')
```

Ejemplo de Aplicación de la Técnica del Lugar de Raíces

Sea un sistema con realimentación unitaria y

$$G(s) = \frac{K(s+10)}{(s+5)(s^2+4s+8)} = \frac{K(s+10)}{s^3+9s^2+28s+40}$$

La ecuación característica es:

$$1 + KG(s) = 0$$

$$1 + \frac{K(s+10)}{s^3+9s^2+28s+40} = 0$$

$$s^3+9s^2+28s+40+K(s+10)=0$$

1. **Puntos de Inicio $K=0$:**

$$p_1 = -5, p_2 = -2 - 2j, p_3 = -2 + 2j$$

2. Puntos de Llegada $K = \infty$:

$$z_1 = -10, z_2 = \infty, z_3 = \infty$$

3. Número de Ramas: 3

4. Lugar de Raíces sobre el Eje Real: En el intervalo $[-5, -10]$.

5. Simetría: El lugar de raíces es simétrico con respecto al eje real.

6. Asíntotas:

$$\theta_i = \frac{(2i+1) \times 180^\circ}{|3-1|}, i = 0, 1, \dots, |3-1|-1$$

$$\theta_0 = \frac{(2 \times 0 + 1) \times 180^\circ}{|2|} = 90^\circ, \theta_1 = \frac{(2 \times 1 + 1) \times 180^\circ}{|2|} = 270^\circ$$

7. Intersección de las Asíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Re}(p) - \sum \text{Re}(z)}{|n-m|} = \frac{-5-2-2-(-10)}{2} = 0.5$$

8. Ángulos de Salida y Llegada de Polos y Ceros Complejos:

$$-\angle p_1 - \angle p_2 - \angle p_3 + \angle z_1 = 180^\circ(2i+1)$$

$$\angle p_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7^\circ$$

$$\angle p_3 = 90^\circ$$

$$\angle z_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = 14^\circ$$

$$-33.7^\circ - \angle p_2 - 90^\circ + 14^\circ = -180^\circ$$

$$-109.7^\circ - \angle p_2 = -180^\circ$$

$$-\angle p_2 = -70.3^\circ$$

Por lo tanto el ángulo de salida es $\angle p_2 = 70.3^\circ$

9. Puntos de Desprendimiento e Ingreso

$$-\frac{dG(s)H(s)}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{(s+10)}{s^3 + 9s^2 + 28s + 40} = 0$$

$$-\frac{dG(s)H(s)}{ds} = -\frac{1(s^3 + 9s^2 + 28s + 40) - (s+10)(3s^2 + 18s + 28)}{(s^3 + 9s^2 + 28s + 40)^2} = 0$$

$$-\frac{-2s^3 - 39s^2 - 180s - 240}{(s^3 + 9s^2 + 28s + 40)^2} = 0$$

$$2s^3 + 39s^2 + 180s + 240 = 0$$

$$r_1 = -13.49, r_2 = -3.39, r_3 = -2.63$$

Ninguna raíz es punto de desprendimiento.

10. Cruce con el Eje Imaginario: A partir de la ecuación característica se plantea el criterio de Routh-Hutwitz:

$$\begin{array}{rcl}
 s^3 + 9s^2 + 28s + 40 + K(s+10) & = & 0 \\
 s^3 + 9s^2 + (28+K)s + 40+10K & = & 0 \\
 \begin{array}{rcl}
 s^3 & 1 & 28+K \\
 s^2 & 9 & 40+10K \\
 s^1 & \frac{9(28+K)-40-10K}{9} & 0 \\
 s^0 & 40+10K &
 \end{array}
 \end{array}$$

El sistema es estable para $-4 < K < 212 \rightarrow 0 < K < 212$

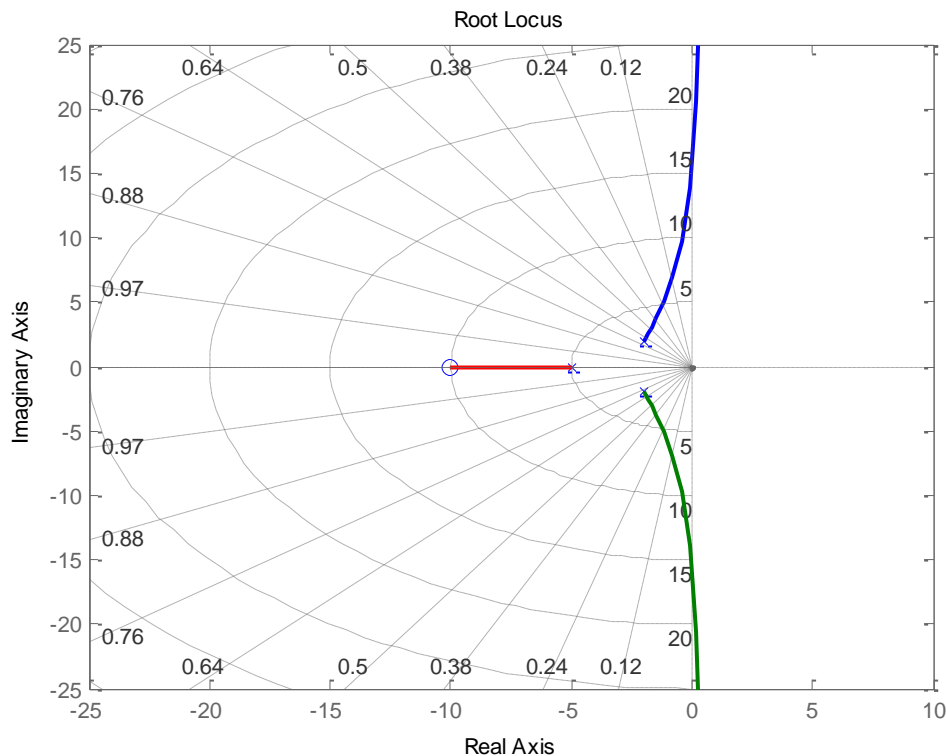
Planteando la ecuación auxiliar:

$$9s^2 + 40 + 10K = 0$$

$$9s^2 + 40 + 2120 = 0$$

$$r_1 = -15.49j, r_2 = 15.49j$$

Se encuentran los puntos donde el lugar de raíces cruza el eje imaginario



16) Construya el diagrama del lugar de raíces para cada uno de los sistemas de control para los cuales se dan los polos y ceros de $G(s)H(s)$. La ecuación característica se obtiene haciendo $1 + KG(s)H(s) = 0$. Verificar los límites de estabilidad a lazo cerrado con Matlab.

- Polo en 0, cero en -8.
- Polos en 0, -2, cero en -4
- Polos en -1, -1, -1
- Polos en 0, -1, ceros en -4, -6

Solución Utilizando Matlab:

```

rlocus(zpk([-8],[0],1));sgrid
rlocus(zpk([-4],[0 -2],1));sgrid
rlocus(zpk([],[-1 -1 -1],1));sgrid
rlocus(zpk([-4 -6],[0 -1],1));sgrid
    
```

- e) Polos en -3, -5, ceros en 4,-1 $rlocus(zpk([4 -1],[-3 -5],1));sgrid$
 f) Polos en 3, -4, ceros en -8,-10 $rlocus(zpk([-8 -10],[3 -4],1));sgrid$
 g) Polos en 0, -1, -3, -4 $rlocus(zpk([], [0 -1 -3 -4],1));sgrid$
 h) Polos en -2+j,-2-j $rlocus(zpk([], [-2+j -2-j],1));sgrid$
 i) Polos en -2+j,-2-j,-10 $rlocus(zpk([], [-2+j -2-j -10],1));sgrid$
 j) Polos en -2+j,-2-j,-1 $rlocus(zpk([], [-2+j -2-j -1],1));sgrid$
 k) Polos en -2+j,-2-j, cero en -10 $rlocus(zpk([-10],[-2+j -2-j],1));sgrid$
 l) Polos en -2+j,-2-j, ceros en -1,-4 $rlocus(zpk([-1 -4],[-2+j -2-j],1));sgrid$
 m) Polos en -2+j,-2-j, ceros en 1,-4 $rlocus(zpk([1 -4],[-2+j -2-j],1));sgrid$
 n) Polos en -8+j,-8-j, ceros en 1+3j,1-3j $rlocus(zpk([1+3j 1-3j],[-8+j -8-j],1));sgrid$
 o) Polos en -8.1, ceros en 1+3j,1-3j $rlocus(zpk([1+3j 1-3j],[-8 1],1));sgrid$
- 17) La ecuación característica de distintos sistemas de control lineales se dan a continuación. Construir el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$. Verificar con Matlab.
- a) $s^3 + 3s^2 + (K + 2)s + 5K = 0$
 b) $s^3 + s^2 + (K + 2)s + 3K = 0$
 c) $s^3 + 5Ks^2 + 10 = 0$
 d) $s^4 + (K + 3)s^3 + (K + 1)s^2 + (2K + 5)s + 10 = 0$
 e) $s^4 + 6s^3 + 9s^2 + K(s^2 + 4s + 5) = 0$
 f) $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2Ks + 5K = 0$
 g) $s(s^2 - 1) + K(s + 2)(s + 0.5) = 0$

- 18) La función de transferencia de un sistema de control a lazo cerrado con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{100(s+40)}{(s+1)(s+5)}; H(s) = 1$$

- a) Construir el lugar de raíces para $K \geq 0$.
 b) Construir el lugar de raíces si:

$$H(s) = \frac{1}{s+20}.$$

- c) En ambos casos, encontrar el valor de K para el cual la respuesta temporal del sistema tiene un sobrepasamiento máximo del 4%.
 d) Verificar los valores obtenidos simulando la respuesta temporal del sistema.

Solución con Matlab

```
close all; clear all; clc
G=zpk([-40],[-1 -5],100)
H1=1;
H2=tf(1,[1 20])
rlocus(G*H1,G*H2); sgrid(0.707,[20 40 60 80])

K1=0.7;
K2=0.05;

step(feedback(K1*G,H1),feedback(K2*G,H2))
```

- 19) Dibujar el lugar de raíces de los sistemas que se listan a continuación, considerando en todos los casos realimentación unitaria. Determinar si existe algún valor de K que hace que la salida del sistema a lazo cerrado oscile. Simular.

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s+5)}$$

$$G_4(s) = \frac{100(s+40)}{(s+5)(s^2+20s+1700)}$$

$$G_2(s) = \frac{100(s^2+40s+800)}{(s+80)(s+50)}$$

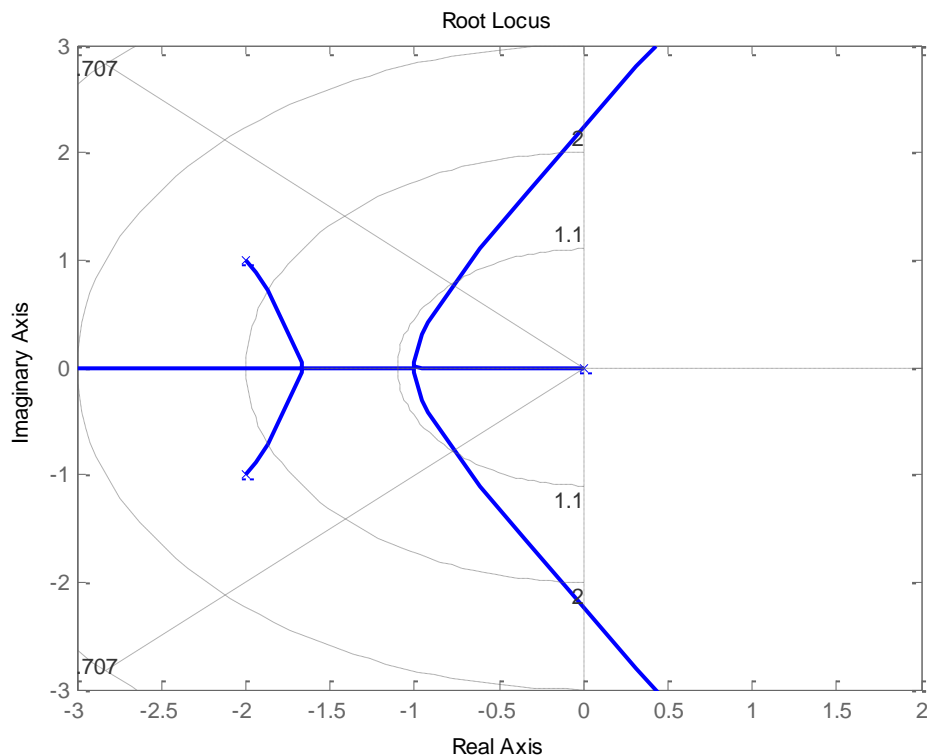
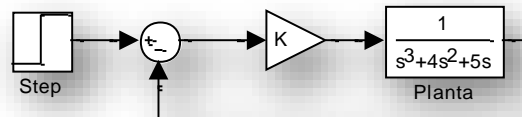
$$G_5(s) = \frac{100(s+40)}{(s-5)(s^2+20s+1700)}$$

$$G_3(s) = \frac{100}{(s+80)(s+50)(s-10)}$$

$$G_6(s) = \frac{100(s-40)}{(s+25)(s^2+20s+1700)}$$

- 20) Para los sistemas del punto anterior, encontrar los valores de K que hacen que el factor de amortiguamiento relativo del sistema en lazo cerrado sea igual a 0.707, siempre que tal solución exista.

- 21) Considerar el sistema que se muestra a continuación. Determinar el valor de K de manera tal que $\zeta = 0.66$. Simular la respuesta al escalón del sistema con la ganancia especificada.



Solución con Matlab

% Ejercicio 23


```
close all; clear all; clc
G=tf(1,[1 4 5 0]);
figure
rlocus(G);sgrid(0.707,[1.1 2 3 4])
axis([-4 2 -3 3])

% Determinación del punto de diseño.
% Del gráfico se obtiene
psita=0.707; wn=1.1;
s1=-wn*psita+1i*wn*sqrt(1-psita^2);
% El módulo de K se determina:
[z,p,k]=zpkdata(G,'v')
modp1=abs(s1-p(1));
modp2=abs(s1-p(2));
modp3=abs(s1-p(3));
K=(modp1*modp2*modp3);
figure
step(feedback(K*G,1));grid
```

Unidad 5: Análisis y Diseño Clásico de Sistemas de Control en el Dominio de la Frecuencia

1) Para las siguientes funciones, graficar sus correspondientes Diagramas de Bode.

$$G_1(s) = \frac{1}{s+10}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{10s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1000}{(s+10)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{10000}{(s+10)(s+100)}$$

$$G_5(s) = \frac{10(s+100)}{(s+10)(s+1000)}$$

$$G_6(s) = \frac{100000(s+10)}{s(s+200)(s+1000)}$$

$$G_7(s) = \frac{100000(s+10)(s+800)}{s(s+100)^2(s+2000)}$$

$$G_8(s) = \frac{1000s(s+1000)}{(s+100)^2(s+8000)}$$

Representación de la función 1 en

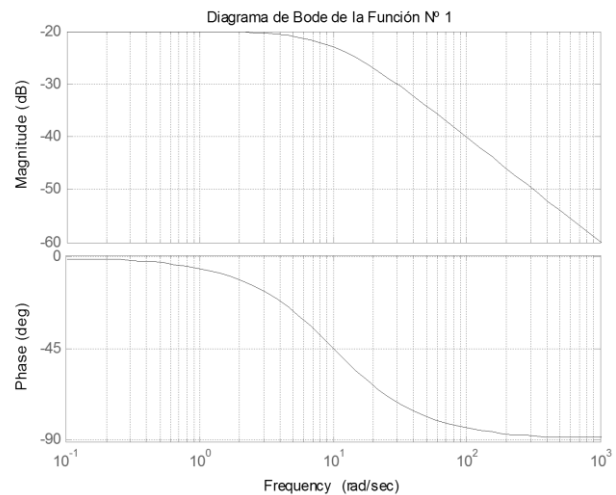
Matlab:

```
num=1;
den=[1 10];
sys=tf(num,den)
```

Transfer function:

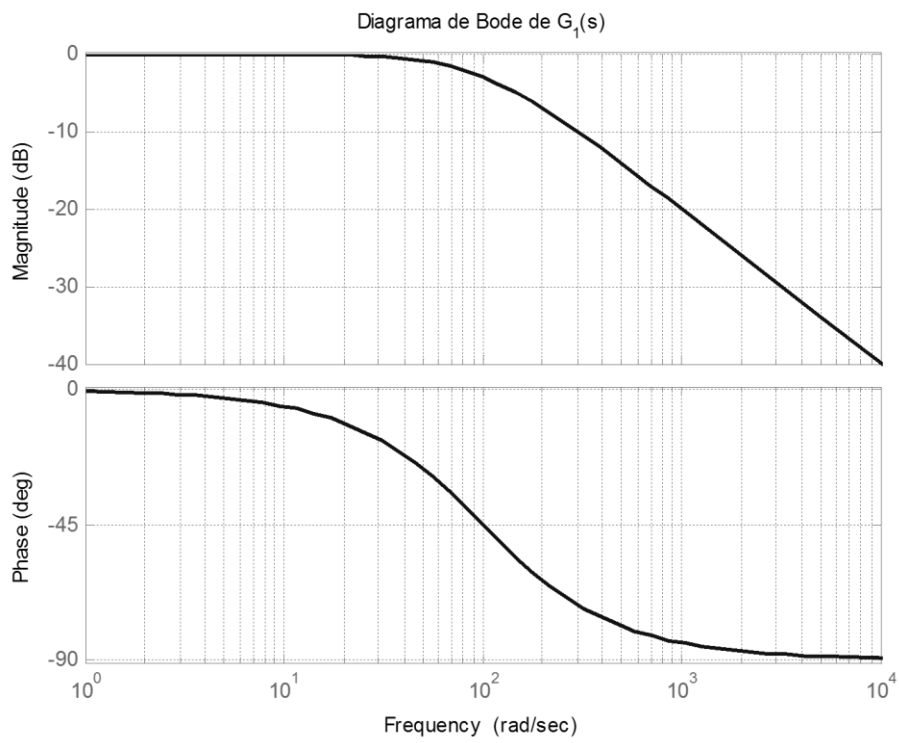
```
1
-----
s + 10
```

```
bode(sys);grid
title('Diagrama de Bode de la Función N° 1')
```

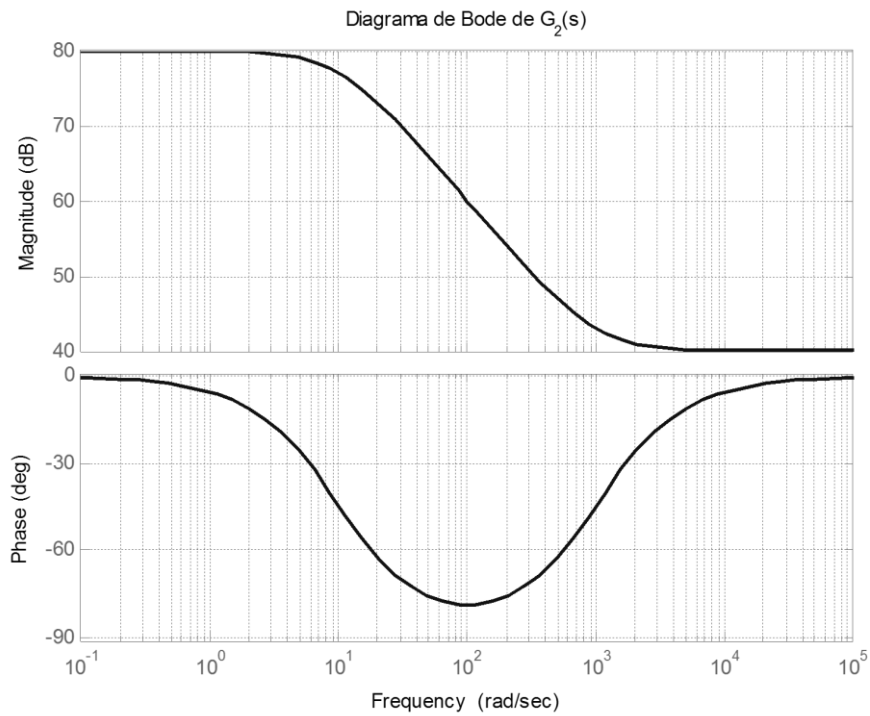


2) Identificar los sistemas caracterizados por los siguientes Diagramas de Bode. Comprobar los resultados utilizando Matlab.

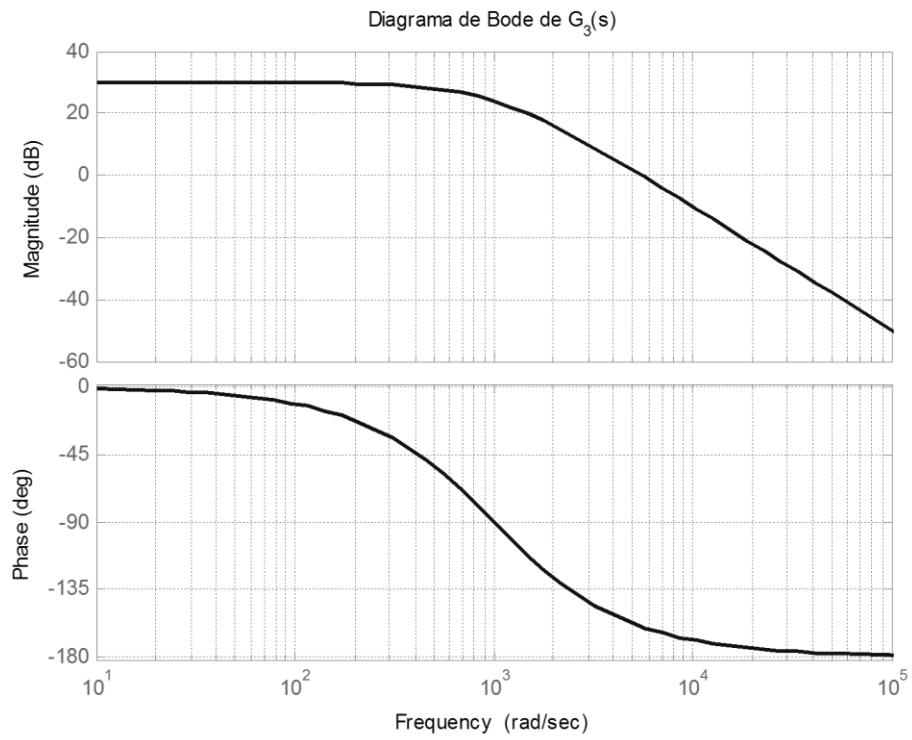
Sistema 1:



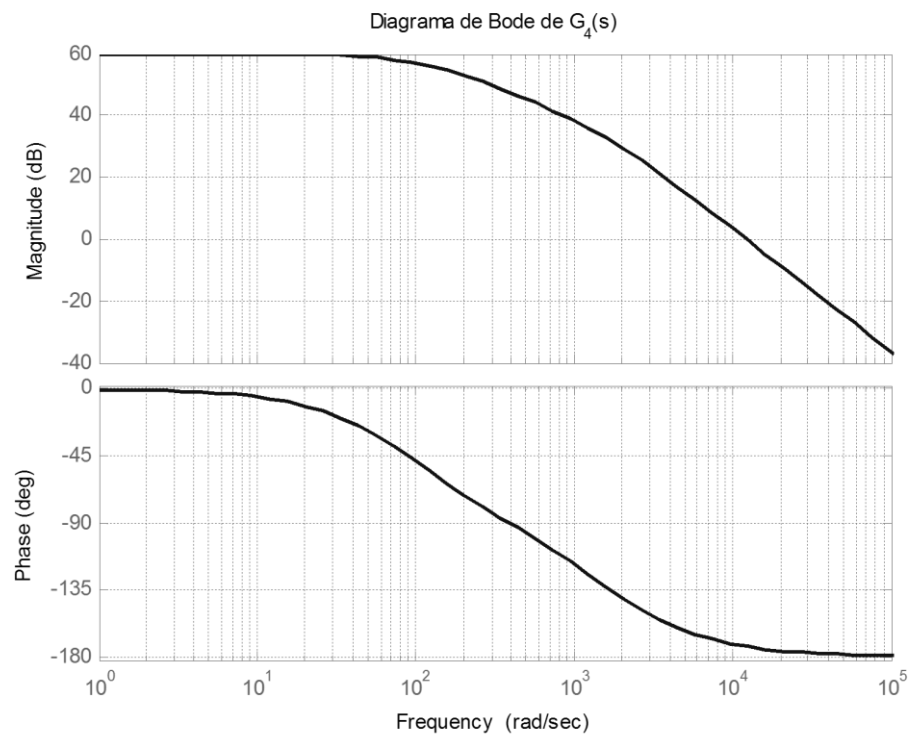
Sistema 2:



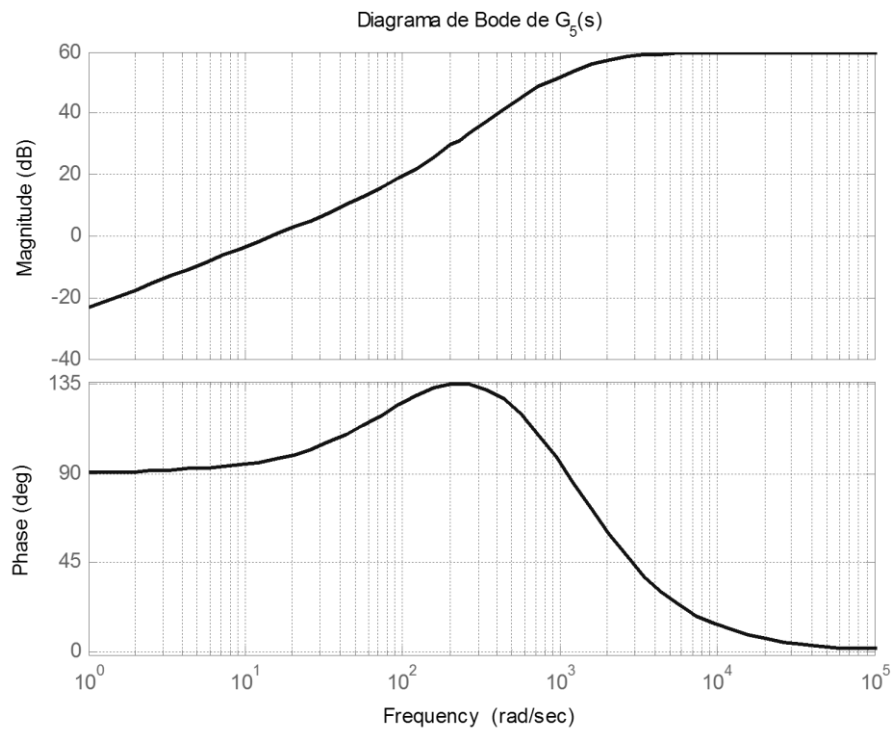
Sistema 3:



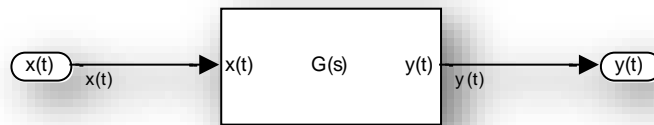
Sistema 4:



Sistema 5:



- 3) Encontrar la magnitud y fase de la salida en estado estable para los siguientes sistemas y señales de entrada:



- a) $x(t) = 2\sin(3t + 60^\circ)$ para $G(s) = \frac{4}{s+1}$
- b) $x(t) = 1.5\sin(100t + 45^\circ)$ para $G(s) = \frac{4s}{s+10}$
- c) $x(t) = 20\sin(200t)$ para $G(s) = \frac{100 \times 10^3}{(s+100)(s+1000)}$
- d) $x(t) = 12\sin(150t - 30^\circ)$ para $G(s) = \frac{10(s+10)}{(s+1)(s+100)}$

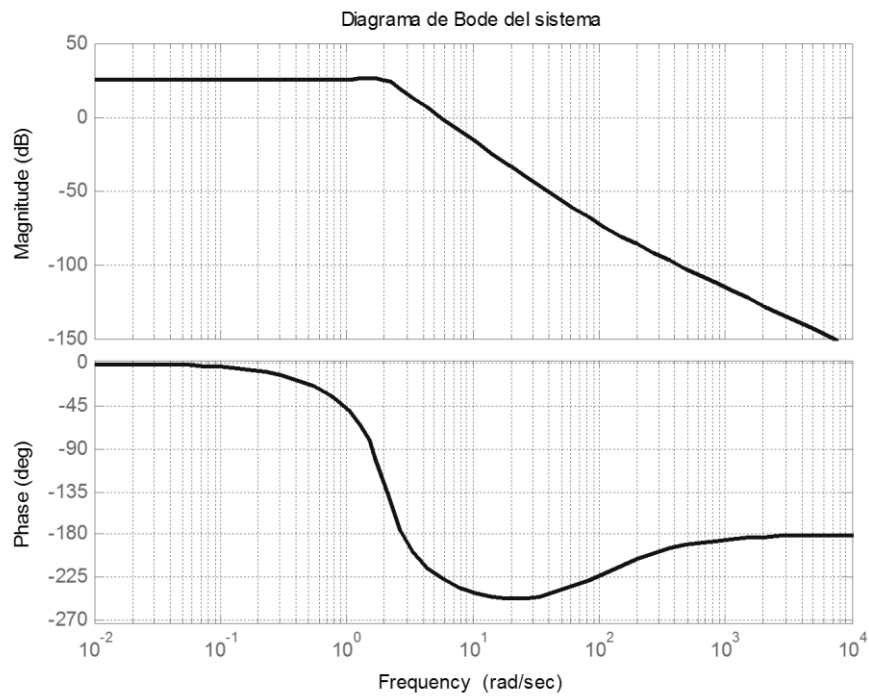
- 4) Para el sistema representado por el siguiente Diagrama de Bode, encontrar las salidas $y(t)$ para las siguientes entradas:

$$x_1(t) = 10\sin(t)$$

$$x_2(t) = 5\sin(11t)$$

$$x_3(t) = 0.5\sin(400t - 30^\circ)$$

$$x_4(t) = \sin(1200t + 34^\circ)$$



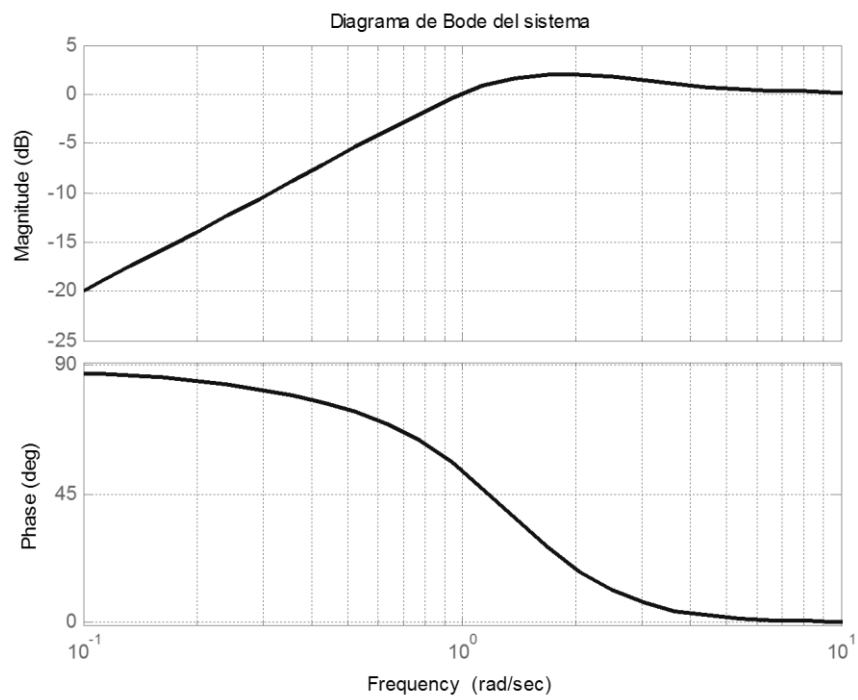
- 5) Para el sistema representado por el siguiente Diagrama de Bode, encontrar las salidas $y(t)$ para las siguientes entradas:

$$x_1(t) = 8 \sin(2t + 25^\circ)$$

$$x_2(t) = \sin(0.5t - 8^\circ)$$

$$x_3(t) = \sin(t)$$

$$x_4(t) = 9 \sin(500t + \pi \text{ rad})$$



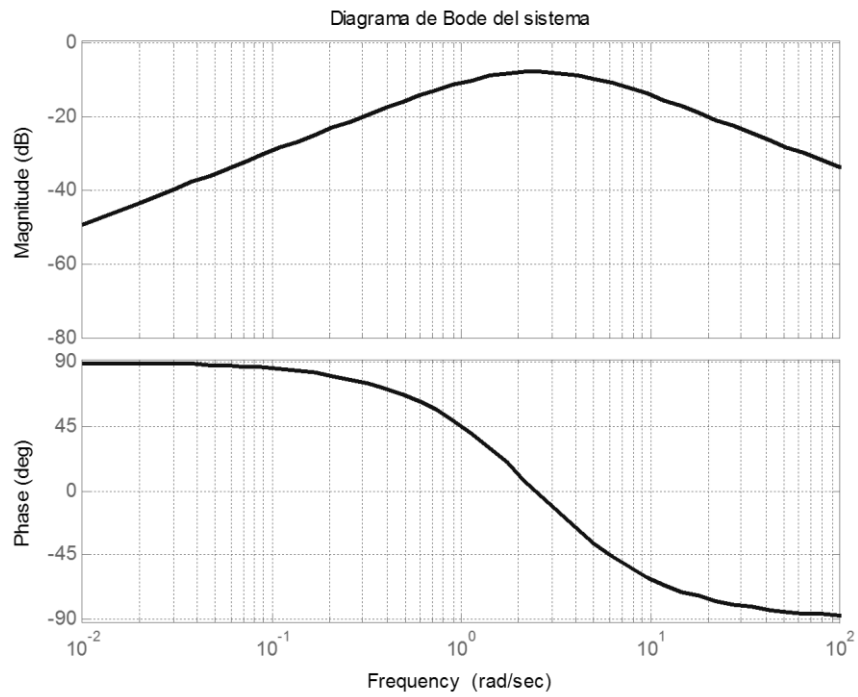
- 6) Para el sistema representado por el siguiente Diagrama de Bode, encontrar las salidas $y(t)$ para las siguientes entradas:

$$x_1(t) = 2 \sin(0.04t - \pi/4 \text{ rad})$$

$$x_2(t) = 1.2 \sin(90t + \pi/12 \text{ rad})$$

$$x_3(t) = 11 \sin(0.8t - 3\pi/4 \text{ rad})$$

$$x_4(t) = 5.2 \sin(45t)$$



- 7) Para los sistemas representados por las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto con realimentación unitaria que se muestran a continuación, realizar las gráficas de Bode y Nyquist de los mismos. Determinar el margen de ganancia y de fase de los sistemas en ambos diagramas y comparar los resultados. Verificar utilizando Matlab.

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$$

$$G_2(s) = \frac{40(s+1)}{(s+0.1)(s+400)}$$

$$G_3(s) = \frac{20}{(1+0.2s)(1+0.4s)(1+s)}$$

$$G_4(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

$$G_5(s) = \frac{50}{s(s^2 + 16s + 400)}$$

$$G_6(s) = \frac{2(1+0.3s)}{s(1+0.1s)(1+0.4s)}$$

$$G_7(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

$$G_8(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10}$$

$$G_9(s) = \frac{6(s+150)}{s(s+2000)(s+300)}$$

- 8) Determinar el margen de ganancia y de fase de los sistemas representados por las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto, con realimentación unitaria.

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$$

$$G_2(s) = \frac{40(s+1)}{(s+0.1)(s+400)}$$

$$G_3(s) = \frac{20}{(1+0.2s)(1+0.4s)(1+s)}$$

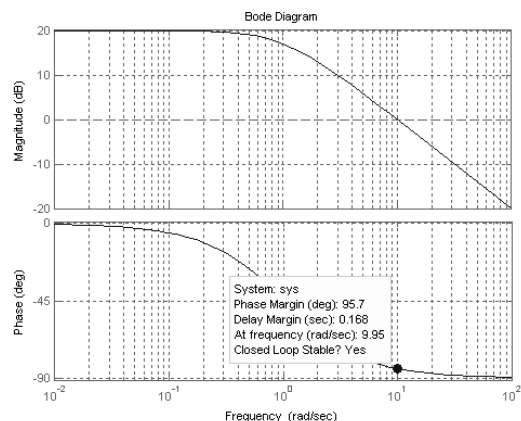
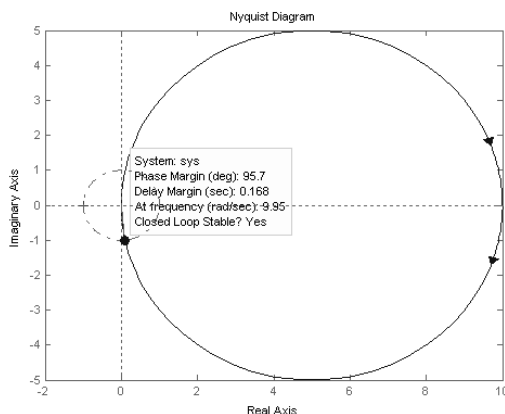
$$G_4(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

$$G_5(s) = \frac{5}{s(s^2 + 16s + 400)}$$

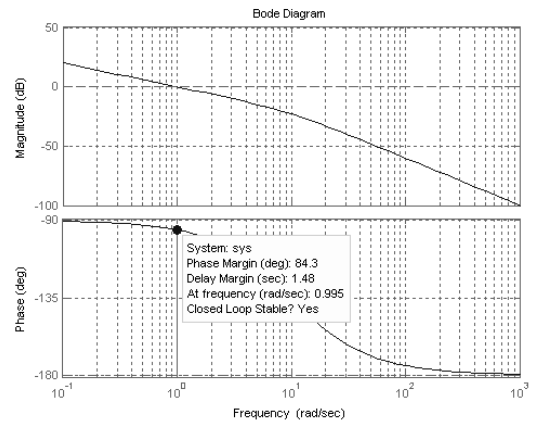
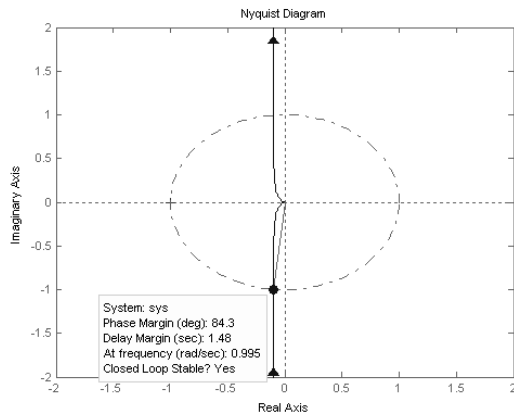
$$G_6(s) = \frac{2(1+0.3s)}{s(1+0.1s)(1+0.4s)}$$

- 9) Los siguientes sistemas con realimentación unitaria son representados por sus correspondientes $G(s)$. Para cada uno de ellos se pide el diagrama de Nyquist y Bode, indicando en ambos gráficos los márgenes de ganancia y fase.

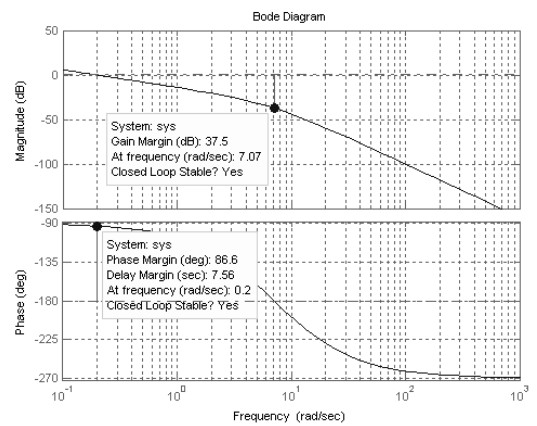
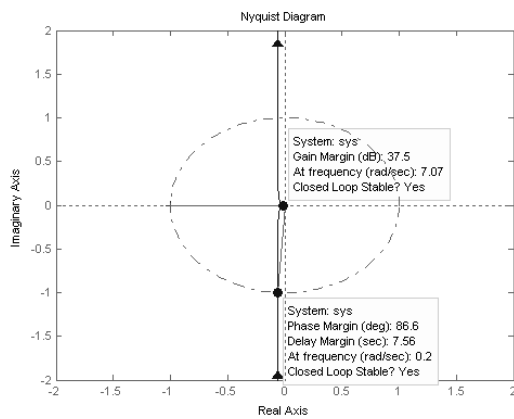
$$G_1(s) = \frac{10}{s+1}$$



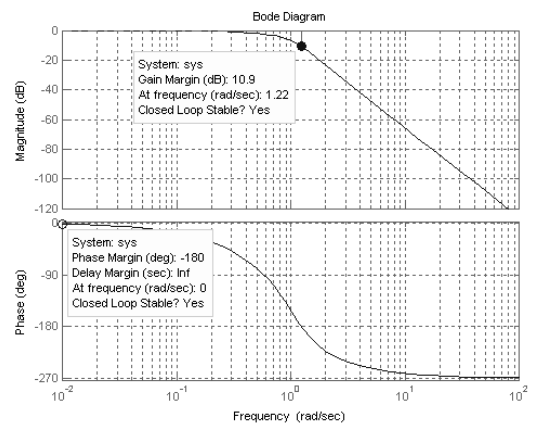
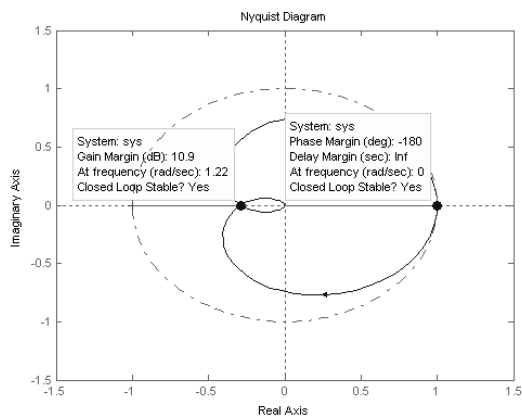
$$G_2(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$



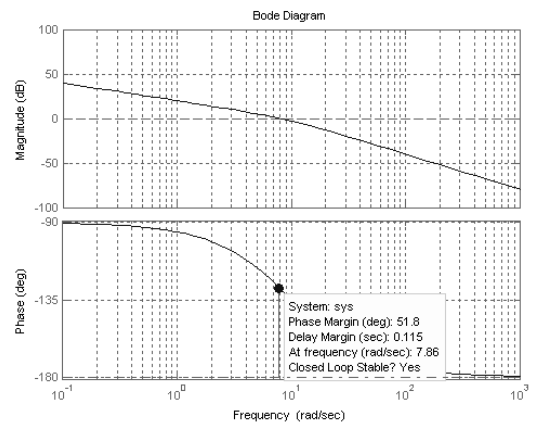
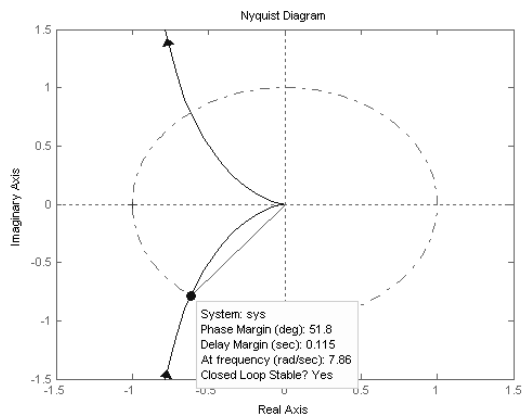
$$G_3(s) = \frac{10}{s^3 + 15s^2 + 50s}$$



$$G_4(s) = \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$

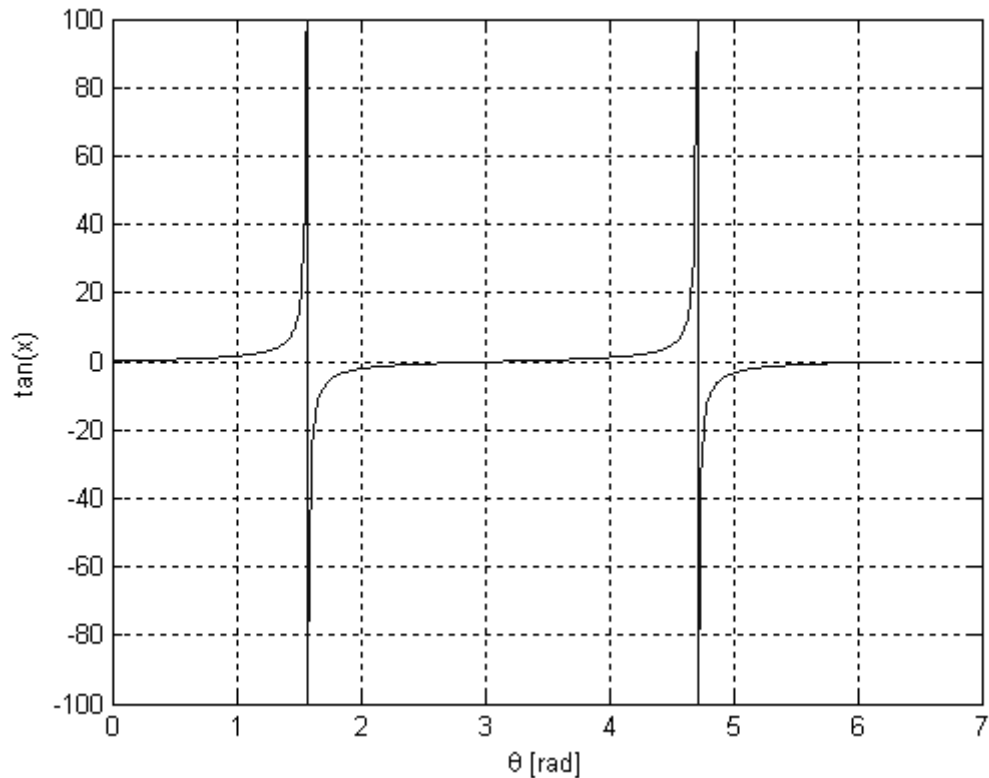


$$G_s(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)}$$



Comentarios sobre la Función Arco Tangente y el Diagrama de Nyquist.

Para empezar, recordemos la forma que toma la gráfica de la función tangente para ángulos en el intervalo $[0, 2\pi]$:



Observemos que:

Los valores de $\tan(\theta)$ para ángulos en el primer cuadrante, esto es, para θ comprendida en el intervalo $[0, \pi/2]$ se repiten para los ángulos del tercer cuadrante, donde $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$.

Observamos que lo mismo ocurre para los ángulos del segundo y cuarto cuadrantes del plano.

Existen dos discontinuidades no evitables: una en $\theta = \pi/2$ y la otra en $\theta = 3\pi/2$. En estos puntos observamos que:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \tan(\theta) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^+} \tan(\theta) = -\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 3\pi/2^-} \tan(\theta) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 3\pi/2^+} \tan(\theta) = -\infty$$

Las características de la función tangente que acabamos de mencionar pueden jugaros en contra al momento de calcular los valores de $\angle G(j\omega)$ en el diagrama de Nyquist. Hagamos una prueba:

$$\theta_1 = \pi/4 \longrightarrow \tan(\theta_1) = 1$$

$$\theta_2 = 5\pi/4 \longrightarrow \tan(\theta_2) = 1$$

Ahora, si hacemos:

$$\tan^{-1}(1) = \pi/4$$

Si hacemos la misma prueba con ángulos de los cuadrantes II y IV llegaremos a la conclusión de que la función arco tangente de la calculadora devuelve los ángulos correspondientes a los cuadrantes I y IV, esto es $\tan^{-1}(\theta) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Ahora bien, cómo nos afectan estos resultados? Lo vemos en el siguiente ejemplo:

Dibujemos el diagrama de Nyquist de:

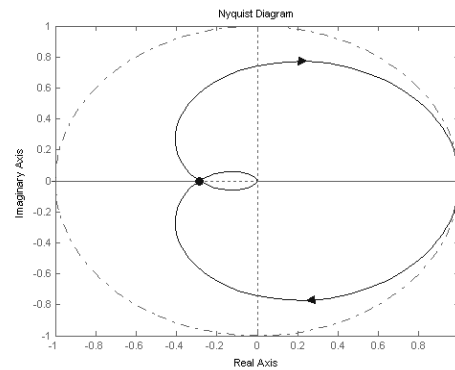
$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{-3\omega^2 + 1}{(-3\omega^2 + 1) + (-2\omega^3 + 3\omega)^2}$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{(-2\omega^3 + 3\omega)}{(-3\omega^2 + 1) + (-2\omega^3 + 3\omega)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{(-3\omega^2 + 1)^2 + (-2\omega^3 + 3\omega)^2}}{(-3\omega^2 + 1) + (-2\omega^3 + 3\omega)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\omega^3 + 3\omega}{-3\omega^2 + 1}\right)$$



Armemos la siguiente tabla:

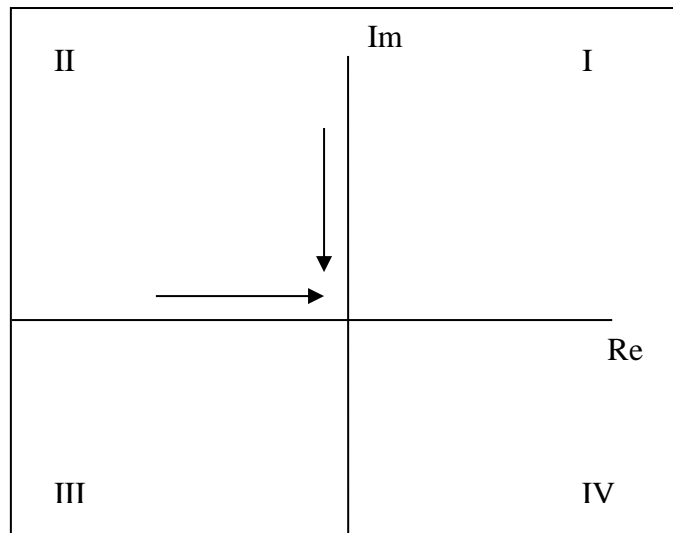
ω	$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	1	0 ⁻	1	0
∞	0 ⁻	0 ⁺	0	$\pi/2$

Veamos la segunda fila, $\omega=\infty$. Si valuamos la parte real y la imaginaria en un valor grande de ω , digamos $\omega=10e6$, obtenemos:

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = -7.5e-25$$

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = 5e-19$$

Vemos que ambas partes se aproximan a cero por caminos distintos. La parte Real se aproxima a cero desde la izquierda, 0⁻, mientras que la parte Imaginaria lo hace desde la derecha, 0⁺.

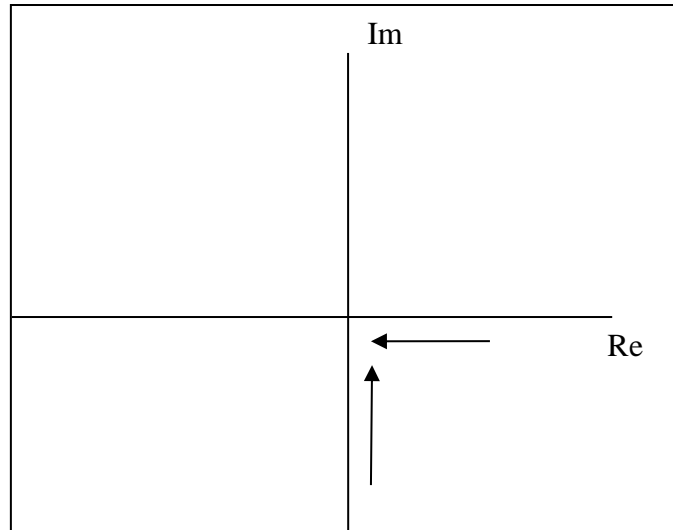


Es decir, el diagrama de Nyquist de la función se aproxima a cero desde el II cuadrante.

Como el módulo de la función en este punto no presenta inconvenientes, calculemos la fase tomando el arco tangente de la parte imaginaria sobre la parte real:

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{5e-19}{-7.5e-25}\right) = -\pi/2, \text{ que está en el IV cuadrante!}$$

Ahora, hagamos una prueba. Qué pasa si intercambiamos los signos de la parte Real con la Imaginaria? En ese caso, nos aproximamos a cero desde el IV cuadrante.



$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-5e-19}{7.5e-25} \right) = -\pi/2$$

En este caso, la aproximación es correcta.

Matlab nos proporciona una función que considera los cuadrantes, *atan2*. Resolvamos las cuentas anteriores usando esta función:

$$\angle G(j\omega) = \text{atan2}(5e-19, -7.5e-25) = \pi/2 \text{ Este es el resultado correcto!}$$

Probando con los signos invertidos...

$$\angle G(j\omega) = \text{atan2}(-5e-19, 7.5e-25) = -\pi/2$$

Qué conclusión sacamos de todo esto? Que debemos tener cuidado y analizar los resultados numéricos devuélve la calculadora, en especial con las funciones trigonométricas, y particularmente con la función arco tangente, que es la que nos interesa puntualmente.

No debemos olvidar las discontinuidades en $\tan(\pi/2)$ y $\tan(3\pi/2)$, debemos prestar atención sobre el cuadrante en el que estamos. Para nosotros (y para la función *tan*!) no es lo mismo aproximarnos a $\pi/2$ por izquierda (valores menores) que por derecha (valores mayores).

Para más información, les recomiendo leer la ayuda de las funciones *atan* y *atan2* de Matlab.

Unidades 4 y 5: Compensación de los Sistemas de Control

Compensación por Cancelación de Polos Dominantes

- 1) Para cada uno de los siguientes sistemas, diseñar un compensador PI utilizando el método de cancelación de polos de manera tal de eliminar el error en estado estable. Ajustar la ganancia del compensador para que la respuesta al escalón unitario sea críticamente amortiguada, con el menor tiempo de establecimiento posible. Simular y comparar las respuestas del sistema original a lazo abierto y el sistema compensado a lazo cerrado.

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+10)(s+100)}$$

$$G_2(s) = \frac{0.8}{(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

$$G_3(s) = \frac{125}{s^2 + 33s + 200}$$

$$G_4(s) = \frac{1.24}{(s+1)^3}$$

$$G_5(s) = \frac{20(s+60)}{(s+10)(s+20)}$$

$$G_6(s) = \frac{800s + 320000}{s^3 + 330s^2 + 29000s + 600000}$$

Solución del Sistema 1:

Podemos considerar a $G_1(s)$ como el producto de dos sistemas de primer orden en cascada, de forma tal que $G_1(s) = G_{10}(s)G_{100}(s)$. En la Fig. 1 se muestra la respuesta al escalón de $G_1(s)$, además de la respuesta al escalón de $G_{10}(s) = 0.1/(s+10)$ y $G_{100}(s) = 1/(s+100)$. Se aprecia que el polo dominante es el que gobierna la respuesta transitoria del sistema.

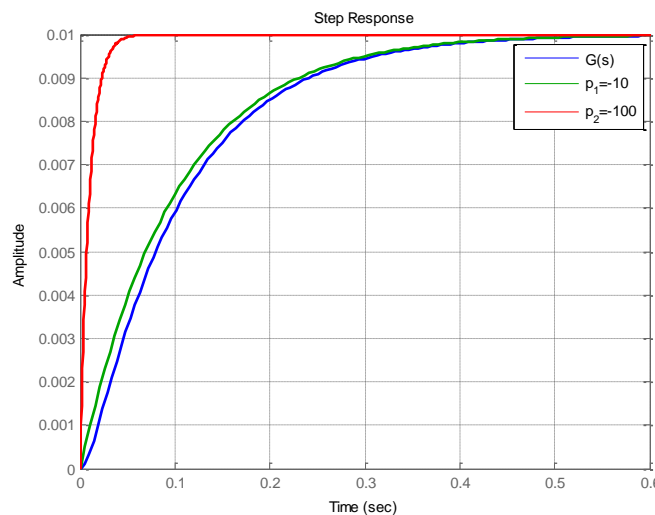


Fig. 1: Resp. al Escalón a Lazo Abierto

En el lugar de raíces se comprueba que el polo dominante es el más cercano al eje imaginario.

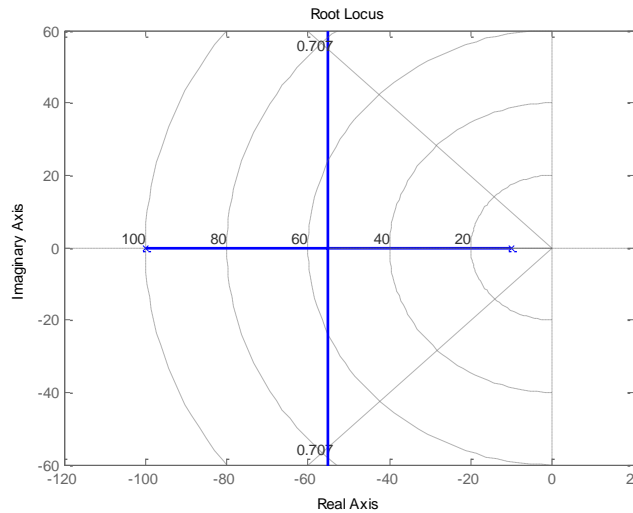


Fig. 2: Lugar de Raíces de $G(s)$

Una forma de minimizar la duración del transitorio y eliminar el error en estado estable consiste en cerrar el lazo de control agregando un compensador proporcional integrador:

$$PI(s) = \frac{K_p (T_i s + 1)}{T_i s} = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s}$$

Donde los parámetros que se deben ajustar son K_p y T_i .

Entonces, la función de transferencia de lazo abierto queda:

$$FT_{la} = PI(s)G_1(s) = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s} \frac{10}{(s+10)(s+100)}$$

El valor de T_i se ajusta para cancelar la mayor constante de tiempo, $T_i = 0.1$, luego:

$$FT_{la} = \frac{K_p}{s} \frac{10}{(s+100)}$$

De esta forma lo que resta calcular es el valor de K_p . El mismo se puede determinar a partir del lugar de raíces de FT_{la} de la Fig. 3:

En la figura se presentan dos valores opcionales para K_p , uno para $\zeta = 1$ y otro para $\zeta = 0.707$. Se escoge $K_p = 250$ para minimizar el tiempo de establecimiento mientras se mantiene la respuesta transitoria sin oscilaciones. Valores inferiores aumentarán el tiempo de establecimiento. Valores superiores provocarán oscilaciones en la respuesta temporal.

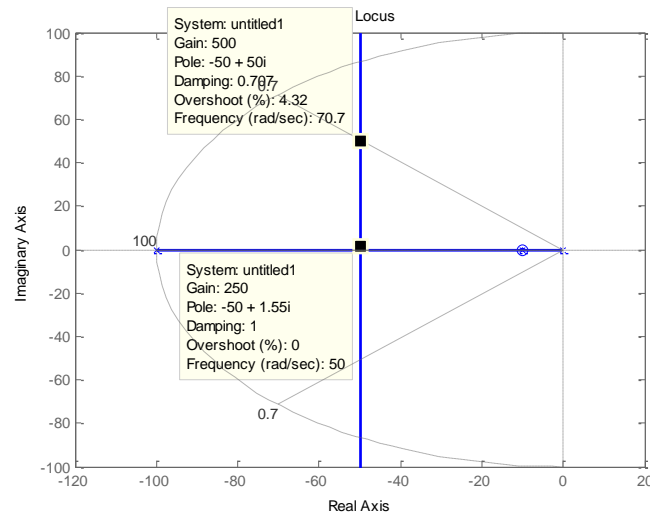


Fig. 3: Lugar de Raíces para Determinar Kp

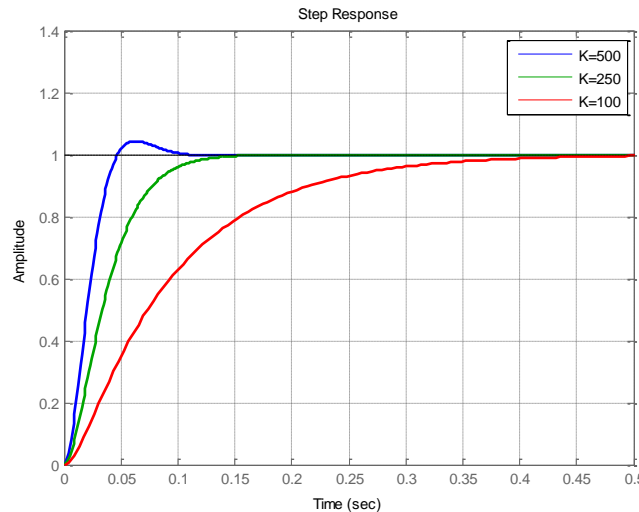


Fig. 4: Respuesta Temporal del Sistema Compensado

- 2) Para los sistemas del punto anterior, determinar la ganancia del compensador para un sobrepasamiento máximo del 4% de la respuesta temporal ante una entrada escalón unitario.

Solución usando Matlab

%% Compensación por Cancelación de Polos Dominantes

```
% Ejercicio 1
close all; clear all; clc
G=zpk([], [-10 -100], 10);
Ti=1/10;
PI=tf([1 1/Ti], [1 0]);
figure
rlocus(PI*G); sgrid(0.7, 100)
axis([-120 20 -100 100])
% Para psita=[0.707 1]
K=[500 250];
```

```
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=500','K=250','LA')
```

```
% Ejercicio 2
close all; clear all; clc
G=tf(0.8,conv([0.1 1],[0.05 1]));
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[10 20]);
axis([-25 15 -25 25]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[1.27 0.625];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=1.27','K=0.625','LA')
```

```
% Ejercicio 3
close all; clear all; clc
G=tf(125,[1 33 200]);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[10 20]);
axis([-25 15 -25 25]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[2.5 1.25];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=2.5','K=1.25','LA')
```

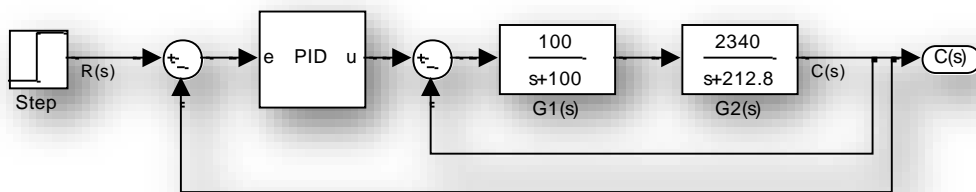
```
% Ejercicio 4
close all; clear all; clc
G=zpk([],[-1 -1 -1],1.24);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[1 2]);
axis([-2 1 -2 2]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[0.195 0.12];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=0.195','K=0.12','LA')
```

```
% Ejercicio 5
close all; clear all; clc
G=zpk([-60],[-10 -20],20);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[20 50 80]);
axis([-150 50 -60 60]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[3.7 9.9];
figure
```

```
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=3.7','K=9.9','LA')
```

```
% Ejercicio 6
close all; clear all; clc
G=tf([800 320000],[1 330 29000 600000]);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[50 100 150]);
axis([-450 50 -500 500])
% Para psita=[0.707 0.707 1]
K=[2.45 1.35];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=2.45','K=1.35','LA')
```

- 3) En la figura se presenta el diagrama de bloques de un sistema de control. Diseñar un compensador PID(s) que mejore la respuesta transitoria y elimine el error en estado estable. *(los resultados de este ejercicio serán utilizados en el Trabajo Práctico de Laboratorio N° 1).*



Solución:

La función de transferencia del primer pasa bajos es:

$$G_1(s) = \frac{100}{s+100} \quad (0.1)$$

Mientras que la función de transferencia del segundo pasa bajos es:

$$G_2(s) = \frac{2340}{s+212.8} \quad (0.2)$$

El primer operacional (en configuración de resta) cierra el lazo, por lo tanto la función de transferencia de la planta es:

$$G = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{234042}{s^2 + 312.8s + 255300} \quad (0.3)$$

Donde:

$$f_n = \sqrt{255300} = 505 \text{ Hz} \quad (0.4)$$

$$\zeta = \frac{312.8}{2f_n} = 0.31 \quad (0.5)$$

$$k = 234042 / f_n^2 = 0.92 \quad (0.6)$$

$$e_{ss, \text{escalón}} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s)} = 0.083 \quad (0.7)$$

Otra manera de determinar la respuesta temporal de la planta, es estudiar la función de transferencia a lazo abierto. El lugar de raíces de $G_1(s)G_2(s)$ se muestra en la Fig. 5:

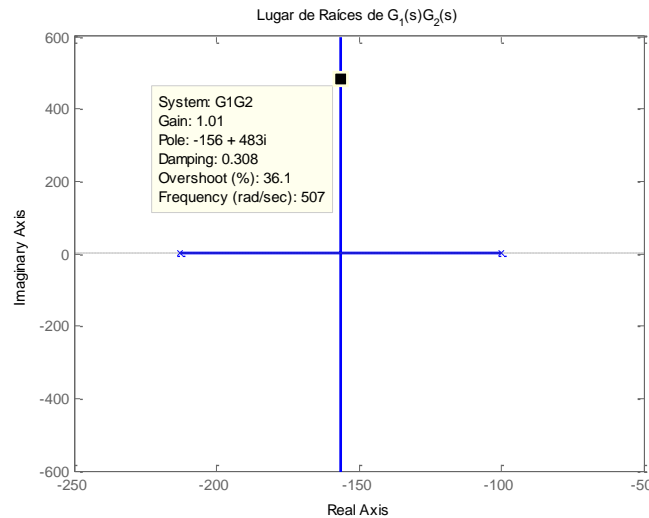


Fig. 5: Lugar de Raíces de $G_1(s) G_2(s)$

Se observa que los parámetros característicos son similares a los calculados en las ecuaciones (0.4) y (0.5).

La respuesta al escalón de la planta se muestra en la Fig. 6, junto con los parámetros que la caracterizan:

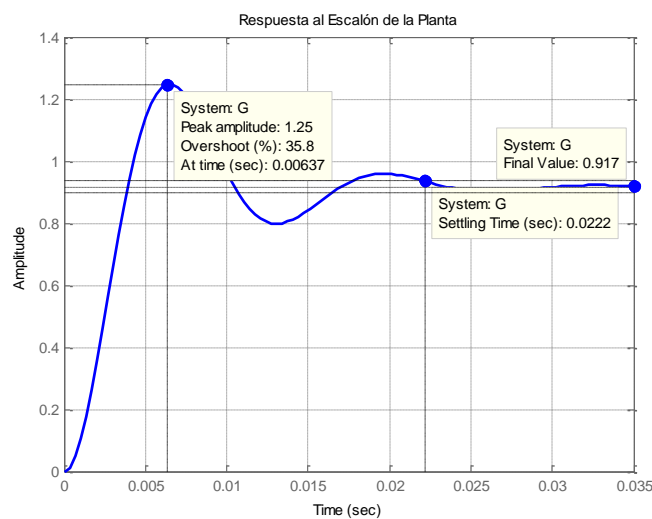


Fig. 6: Respuesta al Escalón de la planta

Para mejorar la respuesta transitoria y el error en estado estable se implementará un controlador PID. La función de transferencia del controlador es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \quad (0.8)$$

Se puede diseñar el PID de forma tal que los dos ceros cancelen los polos de la planta. Reescribiendo la Función de Transferencia de la planta presentada en (0.3):

$$G = \frac{234042}{s^2 + 312.8s + 255300} = \frac{0.9167}{3.92 \times 10^{-6} s^2 + 0.0012s + 1} \quad (0.9)$$

Comparando el numerador de (0.8) con el denominador de (0.9):

$$T_i = 0.0012 \quad (0.10)$$

$$T_d = \frac{3.92 \times 10^{-6}}{T_i} = 0.0032 \quad (0.11)$$

Finalmente, el valor de K_p se ajusta a partir del lugar de raíces a lazo abierto de $PID(s)G(s)$. Arbitrariamente se escoge:

$$K_p = 1 \quad (0.12)$$

Por lo que (0.8) se convierte en:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} = \frac{3.92 \times 10^{-6} s^2 + 0.0012s + 1}{0.0012s} \quad (0.13)$$

La respuesta temporal del sistema a lazo cerrado se muestra a continuación:

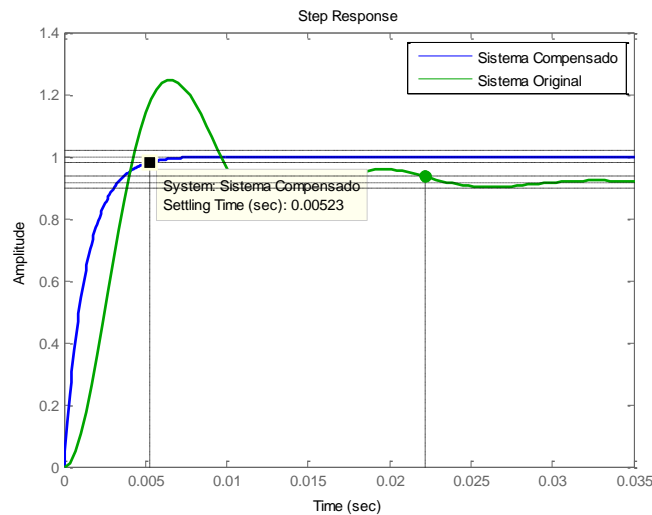


Fig. 7: Respuesta Temporal del Sistema Compensado

- 4) Diseñar un compensador PID que mejore la respuesta transitoria del sistema de suspensión de un automóvil presentado en el punto 1) de la Unidad N°3, pág 14.

Solución usando Matlab

```
close all; clear all; clc
Ma=350;
Ms=20;
K1=100;
K2=300;
B=500;

G=tf([B*K2 K1*K2],[Ma*Ms B*Ma+B*Ms K1*Ma+K2*Ma+K1*Ms B*K2 K1*K2]);
figure
step(G);grid
```

```
zpk(G)

%% Diseño del Compensador con Kp, Ti y Td
d=[1 0.5211 0.7048];

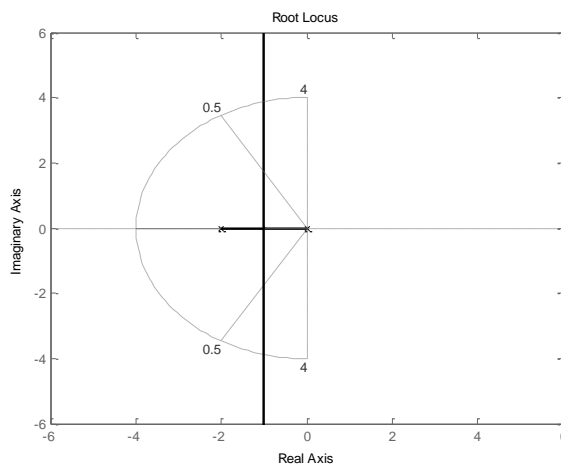
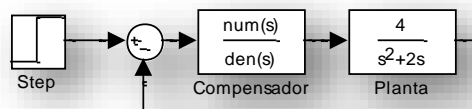
Ti=d(2);
Td=d(1)/Ti;
Kp=1;
P_I_D=tf(Kp*[Ti*Td Ti 1],[Ti 0]);
rlocus(P_I_D*G); sgrid
step(G,feedback(2*P_I_D*G,1),feedback(4*P_I_D*G,1),...
      feedback(6*P_I_D*G,1))
grid
legend('Lazo Abierto','Kp=2','Kp=4','Kp=6')
```

Método de la Bisectriz

5) Considerar el sistema que se muestra en la figura, junto con su lugar de raíces.

Se pide:

- Diseñar un compensador para obtener $\omega_n = 4 \text{ rad / seg}$ y $\zeta = 0.5$.
- Comparar la respuesta al escalón del sistema deseado y del sistema compensado utilizando Simulink.
- Ajustar la ganancia del compensador hasta encontrar la mejor respuesta.



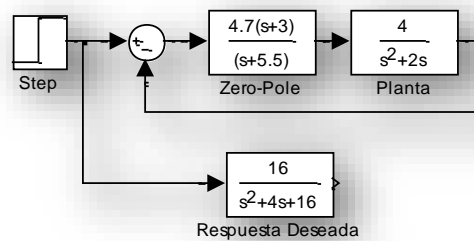
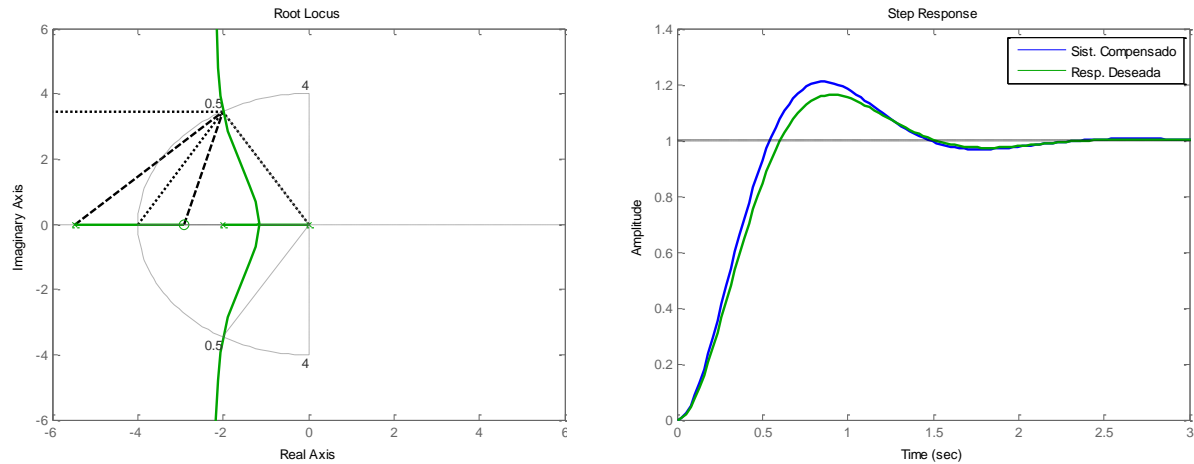
Solución:

(ver script *CompLugarRaicesBisectriz_ejercicio_3.m* y modelo de Simulink *Comp_LugarRaicesBisectriz.mdl*)

Utilizando el método de la bisectriz se localiza el cero del compensador en -2.9 y el polo en -5.4. Con estos valores se arma el compensador y se grafica el lugar de raíces

del sistema compensado, de donde se obtiene el valor de K_c , que en este caso es igual a 4.68.

El próximo paso es armar los sistemas en Simulink y comparar la respuesta al escalón de los mismos.



```
% Técnica de la bisectriz
close all, clear all; clc
%% F de T de trayectoria directa
G=tf(4,[1 2 0])
```

```
% Requerimientos de diseño:
psitad=0.5;
wnd=4;
```

```
% Lugar de Raíces
rlocus(G);sgrid(psitad,wnd)
axis([-6,6,-6,6])
```

```
% Punto de diseño
s1=-psitad*wnd+j*wnd*sqrt(1-psitad^2);
```

```
% Condición de Ángulo:
[n,d]=tfdata(G,'v');
p=roots(d);
```

```
angp1=pi-atan(abs(imag(p(1))-imag(s1))/abs(real(s1)-real(p(1))));
angp2=pi-atan(abs(imag(s1)-imag(p(2)))/abs(real(s1)-real(p(2))));
angp1=angp1*180/pi
angp2=angp2*180/pi
```



```

angcomp=angp1+angp2-180; % Compensador en adelanto.

%% Diseño del compensador

line([0,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8])
line([real(s1) -10], [imag(s1), imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8])
% Bisectriz de s1:
angbisectriz=180-90-acosd(psitad)+90;%180-angp1/2-
atand(imag(s1)/real(abs(s1)));
% Aplicando el teorema del seno:
angaux=180-angbisectriz/2-acosd(psitad);
base=sind(angbisectriz/2)*abs(s1)/sind(angaux);
%base=abs(s1)*sind(angp1/2)/sind(angbisectriz);

% La bisectriz es:
line([-base,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8], 'linewidth',2)

% Las líneas alrededor de la bisectriz se dibujan:
angaux1=180-(angbisectriz/2-angcomp/2)-acosd(psitad);
angaux2=180-(angbisectriz/2+angcomp/2)-acosd(psitad);
% Aplicando el teorema del seno:
cero=-sind(angbisectriz/2-angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux1);
polo=-sind(angbisectriz/2+angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux2);

line([cero,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8], 'linewidth',2)
line([polo,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8], 'linewidth',2)

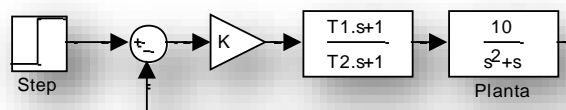
% El compensador queda:
C=zpk(cero,polo,1);
hold on
rlocus(C*G);

% Finalmente, la ganancia K del compensador es
K=1/abs((s1+cero)/(s1+polo)*4/(s1^2+2*s1));

figure
Gd=tf(wnd^2,[1 2*psitad*wnd wnd^2]);
step(feedback(K*C*G,1),Gd)
legend('Sistema Compensado', 'Sistema Deseado')

```

- 6) Dado el sistema que se presenta en la figura, se pide:
- Determinar los valores de K , T_1 y T_2 del sistema de la figura de manera tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.5$ y la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 3 \text{ rad} / \text{seg}$.
 - Identificar el compensador diseñado como compensador en adelanto o en atraso.
 - Simular.



Solución usando Matlab

```

close all; clear all; clc
% F d T de la planta
G=tf(10,[1 1 0]);

```

```
% Punto de Diseño:
wn=3;psita=0.5;
s1=-wn*psita+1i*wn*sqrt(1-psita^2);
% Lugar de raíces de la planta
figure
rlocus(G);sgrid(psita,wn);
axis([-5 5 -5 5])

% Condición de Ángulo:
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');

angp1=180-atand(abs(imag(p(1))-imag(s1))/abs(real(s1)-real(p(1))));
angp2=180-atand(abs(imag(s1)-imag(p(2)))/abs(real(s1)-real(p(2))));

%-angp1-angp2+angComp=180(2i+1)
angComp=-180+angp1+angp2; % Compensador en Adelanto

%% Diseño del compensador
line([0,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8])
line([real(s1) -4],[imag(s1),imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8])
% Bisectriz de s1:
angbisectriz=180-acosd(psita);
% Aplicando el teorema del seno:
base=sind(angbisectriz/2)*abs(s1)/sind(angbisectriz/2);
% La bisectriz es:
line([-base,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8],'linewidth',2)

% Las líneas alrededor de la bisectriz se dibujan:
angaux1=180-(angbisectriz/2-angComp/2)-acosd(psita);
angaux2=180-(angbisectriz/2+angComp/2)-acosd(psita);
% Aplicando el teorema del seno:
cero=-sind(angbisectriz/2-angComp/2)*abs(s1)/sind(angaux1);
polo=-sind(angbisectriz/2+angComp/2)*abs(s1)/sind(angaux2);

line([cero,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8],'linewidth',2)
line([polo,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8],'linewidth',2)

% El compensador queda:
C=zpk(cero,polo,1);
hold on
rlocus(C*G);

% La ganancia del compensador se calcula:
modp1=abs(s1-p(1));
modp2=abs(s1-p(2));
modp=abs(s1-polo);
modz=abs(s1-cero);

K=(modp1*modp2*modp)/(modz*k);
%% Verificación del Diseño
figure
Gd=tf(wn^2,[1 2*psita*wn wn^2]);
step(feedback(K*C*G,1),Gd)
legend('Sistema Compensado','Respuesta Deseada')
```

- 7) Considere el sistema con realimentación unitaria donde $G(s) = \frac{1}{s^2}$. Diseñar un compensador en adelante tal que los polos dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -1 \pm j$. Simular la respuesta del sistema.

Solución usando Matlab

```
% F de T de trayectoria directa
G=tf(1,[1 0 0]);
% Punto de diseño
s1=-1+1i;
% Requerimientos de diseño:
psitad=cosd(atan2(imag(s1)/-real(s1)));
wnd=abs(s1);

% Lugar de Raíces
rlocus(G); sgrid(psitad,wnd)
axis([-4,4,-4,4])
% Condición de Ángulo:
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');

angp1=-(180-atan2(abs(imag(p(1))-imag(s1))/abs(real(s1)-real(p(1)))));
angp2=-(180-atan2(abs(imag(s1)-imag(p(2)))/abs(real(s1)-real(p(2)))));

angcomp=-angp1-angp2-180; % Compensador en adelante para mejorar la
estabilidad.
angcomp=abs(angcomp);
%% Diseño del compensador

line([0,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8])
line([real(s1) -10],[imag(s1),imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8])
% Bisectriz de s1:
angbisectriz=180-acosd(psitad);%180-angp1/2-
atan2(imag(s1)/real(abs(s1)));
% Aplicando el teorema del seno:
angaux=180-angbisectriz/2-acosd(psitad);
base=sind(angbisectriz/2)*abs(s1)/sind(angaux);
%base=abs(s1)*sind(angp1/2)/sind(angbisectriz);

% La bisectriz es:
line([-base,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8],'linewidth',2)

% Las líneas alrededor de la bisectriz se dibujan:
angaux1=180-(angbisectriz/2-angcomp/2)-acosd(psitad);
angaux2=180-(angbisectriz/2+angcomp/2)-acosd(psitad);
% Aplicando el teorema del seno:
cero=-sind(angbisectriz/2-angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux1);
polo=-sind(angbisectriz/2+angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux2);

line([cero,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8],'linewidth',2)
line([polo,real(s1)],[0 imag(s1)],'Color',[.8 .8 .8],'linewidth',2)

% El compensador queda:
C=zpk(cero,polo,1);
hold on
rlocus(C*G);
```

```
% Finalmente, la ganancia K del compensador es
% La ganancia del compensador se calcula:
modp1=abs(s1-p(1));
modp2=abs(s1-p(2));
modp=abs(s1-polo);
modz=abs(s1-cero);

K=(modp1*modp2*modp)/(modz*k);

figure
Gd=tf(wnd^2,[1 2*psitad*wnd wnd^2]);
step(feedback(K*C*G,1),Gd,feedback(4*C*G,1))
legend('Sistema Compensado','Sistema Deseado','Ajuste de Ganancia')
```

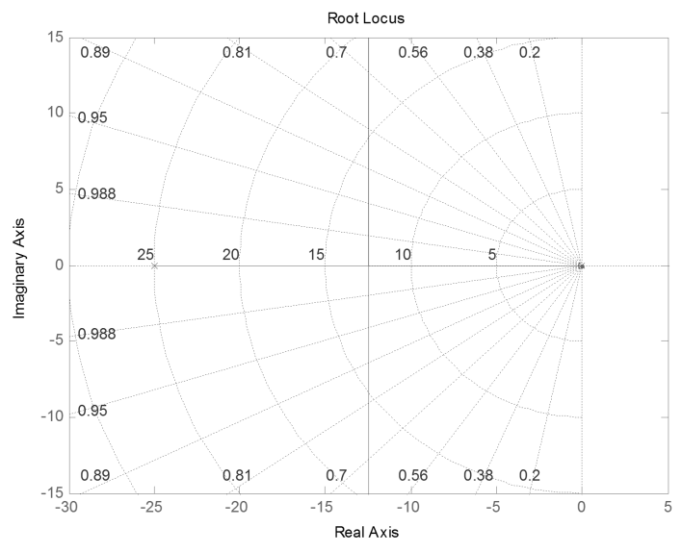
- 8) Realizar un compensador que cambie el ángulo de partida del lugar de raíces desde el polo en $s = -0.5 + j$ hasta -135° para la planta representada por la siguiente función de transferencia. Verificar utilizando Matlab

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1.25)}$$

- 9) Para el sistema cuya función de transferencia de trayectoria directa se muestra a continuación, diseñar un compensador que cumpla con las siguientes especificaciones:
- Error de estado estable menor al 1%
 - Sobrepaso máximo de la respuesta al escalón menor al 5%
 - Tiempo de levantamiento menor a 0.5 seg.

$$G(s) = \frac{2500K}{s(s + 25)}$$

Simular el sistema sin compensar y el compensado.



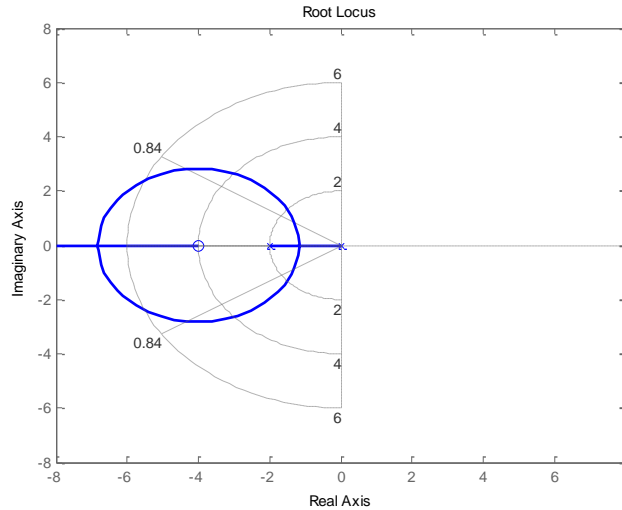
- 10) Un sistema con realimentación unitaria está representado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s + 4)}{s(s + 2)}$$

Se pide:

Calcular un compensador para obtener $\zeta = 0.84$, buscando el menor tiempo de establecimiento.

El Lugar de Raíces se muestra a continuación.



11) A continuación se muestra la función de transferencia a lazo abierto de un motor de corriente continua.

$$G(s) = \frac{K}{(Js + B)(Ls + R) + K^2}$$

Donde:

$J = 0.01 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$, momento de inercia del sistema

$B = 0.1 \text{ Nms}$, coeficiente de fricción

$K = 0.01 \text{ Nm/Amp}$, constante de fuerza contraelectromotriz

$R = 1\Omega$, resistencia de armadura

$L = 5 \text{ mH}$, inductancia de armadura

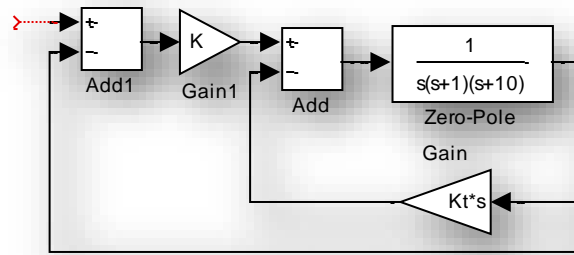
Diseñar un compensador tal que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones:

- Tiempo de establecimiento menor a 2 seg.
- Sobrepaso menor al 5%.
- Error de estado estable menor al 1%.

Simular la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado compensado.

12) En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema con realimentación tacométrica. Encuentre los valores de K y K_t que satisfagan las siguientes especificaciones:

- Constante de error-rampa $K_v = 1$.
- Factor de amortiguamiento relativo cercano a 0.707.



Compensación en Frecuencia

- 13) Dado el sistema cuya función de transferencia se muestra a continuación, diseñar un compensador tal que el margen de fase del sistema a lazo cerrado sea de al menos 60° , con un error en estado estable no mayor a 0.025.

$$G(s) = \frac{500(s+100)}{s(s+10)(s+2500)}$$

Solución con Matlab

```
close all; clear all; clc
kg=500;
zg=-100;
pg=[0 -10 -2500 ];
Gs=zpk(zg,pg,kg);
Kv=abs(kg*zg/pg(2)/pg(3))
ess=1/Kv;
K=20;
essnuevo=1/(Kv*K);
bode(Gs,K*Gs); grid
%% Diseño en Atraso
% Buscamos la frecuencia para la cual el margen de fase es el
solicitado

wm(1)=5.2; %rad/seg (más 5°)
wm(2)=4.03; %rad/seg (más 10°)
wm(3)=3.54; %rad/seg (más 12°)
% La atenuación que debe proporcionar el comp es entonces
Gwm(1)=16.7; % dB
Gwm(2)=19; % dB
Gwm(3)=20; % dB
b=10.^(Gwm./20);

% Tomamos 1/T a distintas distancias de wm.
T=10./wm;

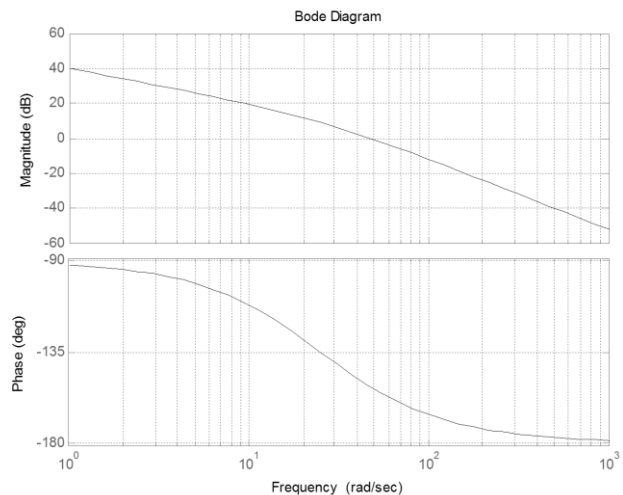
% Con lo que queda definido el Kc:
Kc=K./b;

%% Compensadores
Kk=Kc.*b;
num=[T; 1 1 1]';
den=[b.*T; 1 1 1]';
Cs1=tf(Kk(1)*num(1,:),den(1,:));
Cs2=tf(Kk(1)*num(2,:),den(2,:));
Cs3=tf(Kk(1)*num(3,:),den(3,:));
```

```
figure('Name','Diagrama de Bode del Sistema Compensado a Lazo  
Abierto','NumberTitle','off')  
bode(Gs,K*Gs,Cs1*Gs,Cs2*Gs,Cs3*Gs); grid  
legend('Gs','KGs','C1Gs','C2Gs','C3Gs')
```

- 14) Para el sistema cuya función de transferencia de trayectoria directa se muestra a continuación, diseñar un compensador tal que el margen de fase sea mayor a 45° , manteniendo el error en estado estable. Simular el sistema sin compensar y el compensado.

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$



- 15) En los sistemas cuyas funciones de transferencia de lazo cerrado son:

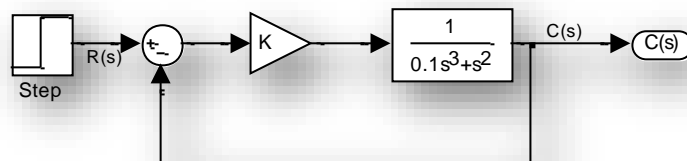
a) $M(s) = \frac{K}{s(1+0.001s)(1+0.025s)(1+0.1s)}$

b) $M(s) = \frac{K(1+0.2s)}{(1+0.1s)(2+3s+s^2)}$

Determinar a partir de los diagramas de Bode el valor requerido de K de manera que cada sistema tenga un margen de fase positivo de 45° .

- 16) En la figura se muestra un sistema de control tipo 2. El sistema debe cumplir con las siguientes especificaciones de diseño:

- a) Constante de aceleración $K_a = 5[s^{-2}]$
b) Factor de Resonancia $M_p \leq 1.5$



Proyectar un controlador serie de avance de fase para satisfacer estas exigencias. Trazar el diagrama de Bode y el lugar de raíces de los sistemas sin compensar y compensados. ¿Cuáles son los valores del coeficiente de amortiguamiento y del ancho de banda del sistema compensado?

- 17) Para el sistema del ejemplo anterior, diseñar un controlador para que el sistema tenga un margen de fase de al menos 40° .

Compensación de Perturbación por Adelanto de Señal

18) En la Figura 1 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de una antena de campo de colectores solares, donde la señal $R(s)$ representa a la entrada del sistema, $Y(s)$ representa a la salida del sistema, y $N(s)$ denota las perturbaciones que actúan sobre las salidas.

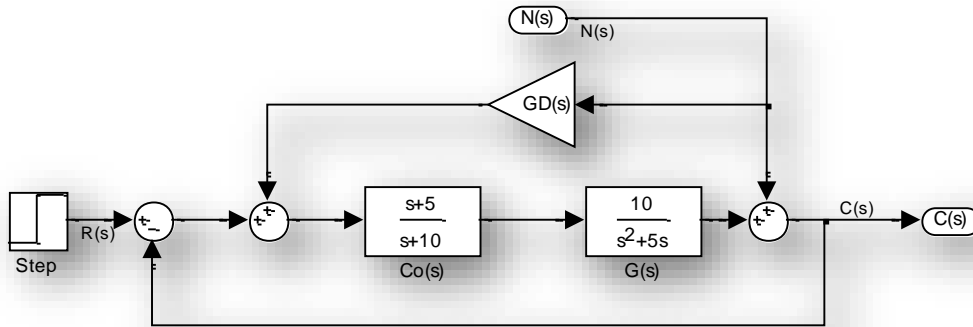


Figura 1

Diseñar la función de transferencia $G_D(s)$ para eliminar el efecto de las perturbaciones sobre la salida.

Solución:

Esto se logra minimizando la función de transferencia $Y(s)/N(s)$ para $R(s)=0$.

La expresión de $G_D(s)$ queda $1/(C(s)G(s))$.

La forma más simple de determinar las Funciones de Transferencia es aplicando la fórmula de Mason. Se comprueba que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1 + G_D(s)Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)}$$

De la última Función de Transferencia, para que la perturbación no tenga efecto sobre la salida,

$$1 + G_D(s)Co(s)G(s) = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$G_D(s) = -\frac{1}{Co(s)G(s)}$$

Siendo:

$$Co(s)G(s) = \frac{s+5}{s+10} \cdot \frac{10}{s(s+5)} = \frac{10}{s(s+10)}$$

De donde,

$$G_D(s) = -0.1s(s+10) = -s(0.1s+1)$$

La cual no es realizable. Sin embargo, despreciando el polo en -10 se la puede aproximar con la Función de Transferencia de un controlador D restringido:

$$G_D(s) = -\frac{0.1s}{\alpha 0.1s+1}$$

Con $\alpha = 0.1$. A partir de las simulaciones se ajusta el valor de la ganancia para maximizar el efecto, quedando:

$$G_D(s) = -0.7 \frac{s}{0.07s + 1}$$

19) En la Figura 2 se muestra otra forma de aplicar esta técnica. Aplicando los mismos conceptos, diseñar $G_D(s)$.

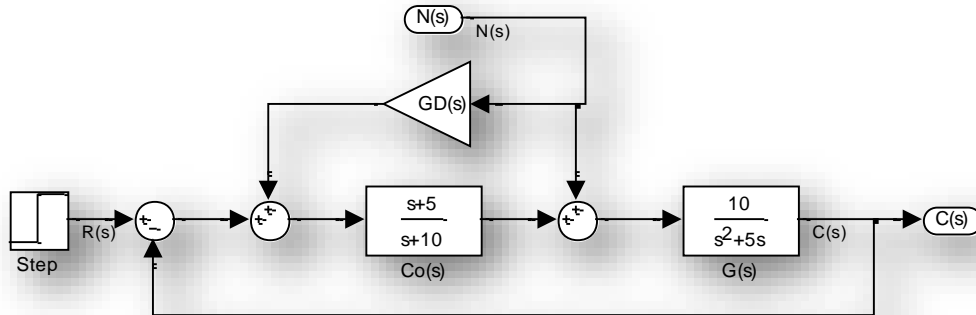


Figura 2

Solución:

En este caso, se demuestra que la expresión de $G_D(s)$ queda $-1/Co(s)$.

Sintonización de Compensadores PID

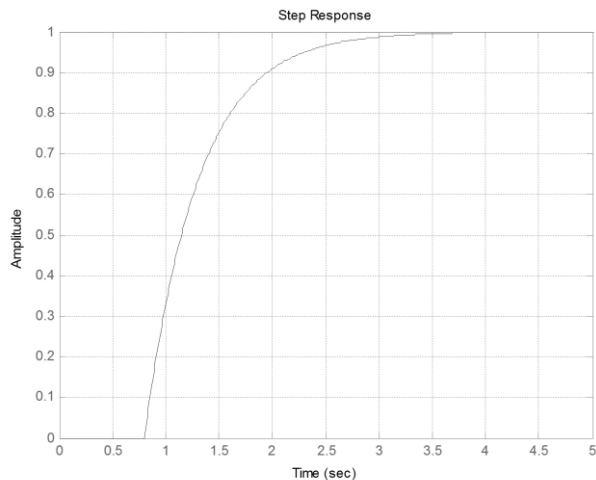
20) Un sistema está definido por la siguiente función de transferencia de lazo abierto, con $k = 1, \tau = 0.5, L = 0.8\text{seg}$

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-sL}$$

En la figura se muestra la respuesta al escalón del sistema a lazo abierto.

Se desea compensar el sistema con un controlador PID de la forma:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \int_0^t K_i e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$



- Ajustar el controlador utilizando las reglas de Ziegler-Nichols.
 - Simular el sistema sin compensar y compensado según los dos métodos.
- 21) Ídem al problema anterior con:

k	τ	L
2	0.5	0.8
1	0.5	0.5
1	0.7	0.1

Unidad 6: Análisis en el Espacio de Estados

- 1) Determinar el modelo en variables de estado de los sistemas representados por las siguientes ecuaciones:

- a. $\dot{x} + x = 0$
- b. $\dot{x} + x = u$
- c. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = 2u$
- d. $\ddot{x} + 5x = 0$
- e. $\ddot{x} = u$
- f. $3\ddot{x} = 6u - \dot{x} - 2x$
- g. $3\ddot{x} + 2\dot{x} = u - 4x$

- 2) Determinar el modelo en variables de estado de los sistemas representados por las siguientes funciones de transferencia:

- a. $G(s) = \frac{1}{10s + 1}$
- b. $G(s) = \frac{2}{s^2 + 5}$
- c. $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- d. $G(s) = \frac{5(s+1)}{s(s+3)(s+10)}$
- e. $G(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 5s + 4}$
- f. $G(s) = \frac{5s}{s^2 + 5}$

- 3) Determinar las funciones de transferencia de los sistemas modelados en el ejercicio 1.

- 4) Dibujar el plano de fase y trayectorias de los siguientes sistemas:

- a. $\dot{x}_1 = -x_1$
 $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$
- b. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$
 $\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$
- c. $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$
 $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$

- 5) Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = u$$

Con:

a	b	u
1	5	0
-2	0	1
1.4	4	0
1	4	2
3	4	0
0	2	0
0	2	1
-1	-2	0

Se pide:

- Expresar la ecuación diferencial en la forma matricial de variables de estado.
- Determinar puntos singulares.
- Graficar el plano de fase.
- Determinar el tipo y estabilidad del sistema.
- Dibujar las trayectorias para las siguientes condiciones iniciales:

$$(x_1, x_2) = (-1, 2)$$

$$(x_1, x_2) = (3, 3)$$

$$(x_1, x_2) = (-2, -1)$$

$$(x_1, x_2) = (1, -3)$$