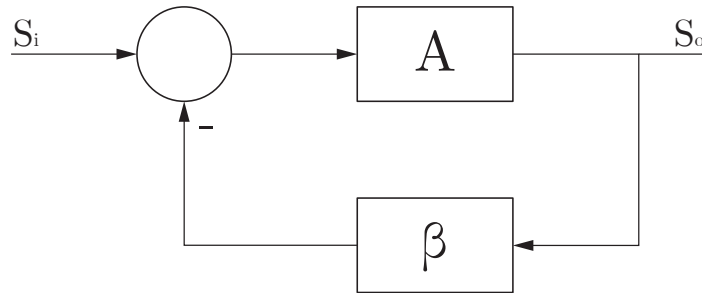


PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Juan Sbruzzi, Candela Gioia, Agustín Gullino, Javier Petrucci

Feb 2024

Si se realimenta negativamente un bloque amplificador A que posee ganancia en bajas frecuencias A_0 y dos polos reales, de acuerdo al siguiente diagrama:



$$A = \frac{A_o}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)} \quad \wedge \quad \beta \in \mathbb{R}$$

La función transferencia del sistema realimentado es:

$$H = \frac{S_o}{S_i} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{A \cdot \beta}{1 + A \cdot \beta} \quad (1)$$

Se define la ganancia de lazo T como:

$$T = -A \cdot \beta = \frac{-A_o \cdot \beta}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) es posible determinar la función transferencia del sistema $H(s)$, esta resultará de segundo orden por tener dos variables de estado.

$$H(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\frac{A_o}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)} \cdot \beta}{1 + \frac{A_o}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)} \cdot \beta} \quad (3)$$

A su vez, para un sistema pasa bajos de segundo orden se define la siguiente forma normalizada:

$$H(s) = \frac{G_0}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \cdot \frac{s}{\omega_n} + 1} \quad (4)$$

Distribuyendo en (3) e igualando los coeficientes de los términos de igual grado con los de la expresión normalizada (4) se obtienen las relaciones entre los respectivos parámetros:

$$G_0 = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{A_0 \cdot \beta}{1 + A_0 \cdot \beta} \quad | \quad T_0 = -A_0 \cdot \beta \quad (5)$$

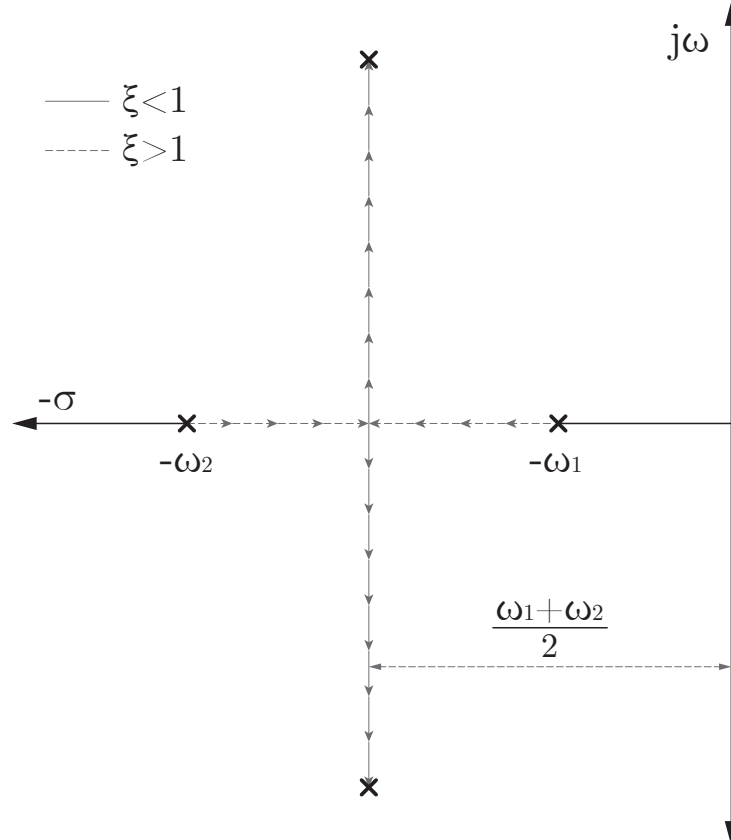
$$\omega_n = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (1 + |T_0|)}$$

$$\xi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2 \cdot \omega_n}$$

$$f_n = \sqrt{f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} \quad (6)$$

$$\xi = \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot f_n} \quad (7)$$

Siempre que $T_0 < 0$, $H(s)$ tendrá 2 polos que estarán ubicados en el espacio descrito en la siguiente figura, el sentido de las flechas representa cómo se posicionan los polos de $H(s)$ a medida que aumenta $|T_0|$:



Dado que $T(s)$ tiene polos reales resulta más sencilla su caracterización respecto de la de $H(s)$, por lo tanto es de interés establecer la dependencia entre los parámetros de H y ciertas propiedades de T . Se definen entonces la frecuencia de cruce f_{cr} y el margen de fase PM , propiedades fundamentales del lazo.

$$f_{cr} \quad | \quad |T(f_{cr})| = 1 \quad (8)$$

$$PM = 2\pi + \angle T(f_{cr}) \quad (9)$$

A partir de la expresión de T (2) se observa que (8) ocurre cuando numerador y denominador poseen igual módulo, por lo tanto:

$$\begin{aligned} A_0 \cdot \beta &= \left| \frac{jf_{cr}}{f_1} + 1 \right| \cdot \left| \frac{jf_{cr}}{f_2} + 1 \right| = \sqrt{\left(\frac{f_{cr}}{f_1}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{f_{cr}}{f_2}\right)^2 + 1} \Rightarrow \\ |T_0|^2 &= \left(\left(\frac{f_{cr}}{f_1}\right)^2 + 1 \right) \cdot \left(\left(\frac{f_{cr}}{f_2}\right)^2 + 1 \right) \Rightarrow \\ \frac{(f_{cr}^2)^2}{f_1^2 \cdot f_2^2} + f_{cr}^2 \cdot \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) + (1 - |T_0|^2) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Se observa que (10) es una función cuadrática de variable f_{cr}^2 . Recordando que $f_{cr} > 0$, se obtiene la solución positiva utilizando la fórmula resolvente: §

$$\begin{aligned} f_{cr}^2 &= \frac{-\left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{|T_0|^2 - 1}{f_1^2 \cdot f_2^2}}}{2 \cdot \frac{1}{f_1^2 \cdot f_2^2}} \Rightarrow \\ f_{cr}^2 &= f_1 \cdot f_2 \cdot \left[\frac{-f_1 \cdot f_2 \cdot \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right) + f_1 \cdot f_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{|T_0|^2 - 1}{f_1^2 \cdot f_2^2}}}{2} \right] \Rightarrow \\ f_{cr}^2 &= f_1 \cdot f_2 \cdot \left[\frac{-f_1 \cdot f_2 \cdot \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)}{2} + \sqrt{\left(\frac{-f_1 \cdot f_2 \cdot \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)}{2} \right)^2 + (|T_0|^2 - 1)} \right] \Rightarrow \\ f_{cr}^2 &= [f_1 \cdot f_2 \cdot (|T_0| + 1)] \cdot \left[\frac{-f_1 \cdot f_2 \cdot \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)}{2 \cdot (|T_0| + 1)} + \sqrt{\left(\frac{-f_1 \cdot f_2 \cdot \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)}{2 \cdot (|T_0| + 1)} \right)^2 + \frac{|T_0|^2 - 1}{(|T_0| + 1)^2}} \right] \Rightarrow \\ f_{cr}^2 &= [f_1 \cdot f_2 \cdot (|T_0| + 1)] \cdot \left[\frac{-f_1 \cdot f_2 \cdot \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 \cdot f_2^2}}{2 \cdot (|T_0| + 1)} + \sqrt{\left(\frac{f_1 \cdot f_2 \cdot \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 \cdot f_2^2}}{2 \cdot (|T_0| + 1)} \right)^2 + \frac{|T_0|^2 - 1}{(|T_0| + 1)^2}} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

§[Shridhara, circa 750 A.D.]

$$f_{cr}^2 = [f_1 \cdot f_2 \cdot (|T_0| + 1)] \cdot \left[-\frac{f_1^2 + f_2^2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} + \sqrt{\left(\frac{f_1^2 + f_2^2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} \right)^2 + \frac{|T_0|^2 - 1}{(|T_0| + 1)^2}} \right]$$

Para los casos en los que $|T_0| \gg 1$, es válida la siguiente aproximación:

$$f_{cr}^2 = [f_1 \cdot f_2 \cdot (|T_0| + 1)] \cdot \left[-\frac{f_1^2 + f_2^2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} + \sqrt{\left(\frac{f_1^2 + f_2^2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} \right)^2 + 1} \right] \quad (11)$$

Considerando las expresiones de (7) y (6), se observa que el primer coeficiente se corresponde con f_n^2 , y además sustituyendo f_n en la expresión de ξ , se puede expresar este parámetro únicamente como función de variables del lazo:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot \sqrt{f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)}} \implies \\ \xi^2 &= \frac{(f_1 + f_2)^2}{4 \cdot (f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|))} \implies \\ 2 \cdot \xi^2 &= \frac{f_1^2 + f_2^2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} + \frac{2 \cdot f_1 \cdot f_2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} \end{aligned}$$

Para los casos en los que $1 + |T_0| \gg 1$, el último término resulta despreciable, originando la siguiente aproximación:

$$2 \cdot \xi^2 \approx \frac{f_1^2 + f_2^2}{2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} \quad (12)$$

Pudiéndose convenientemente sustituir (12) en (11):

$$f_{cr}^2 \approx f_n^2 \cdot \left(-2 \cdot \xi^2 + \sqrt{4 \cdot \xi^4 + 1} \right)$$

Se determina la relación fundamental entre la frecuencia de cruce f_{cr} y los parámetros de $H(s)$

$$f_{cr} \approx f_n \cdot \sqrt{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 1} - 2 \cdot \xi^2} \quad (13)$$

Considerando (9) en (2):

$$PM = 2\pi + \left(-\pi - \arctan \frac{f_{cr}}{f_1} - \arctan \frac{f_{cr}}{f_2} \right) = \pi - \left(\arctan \frac{f_{cr}}{f_1} + \arctan \frac{f_{cr}}{f_2} \right)$$

Si $f_{cr} \gg f_1$:

$$\arctan \frac{f_{cr}}{f_1} \approx \frac{\pi}{2} \implies PM = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{f_{cr}}{f_2}$$

Considerando la siguiente propiedad del argumento recíproco del arco tangente:

$$\arctan \frac{1}{\phi} = \frac{\pi}{2} - \arctan \phi \quad \forall \quad \phi > 0$$

$$PM = \arctan \frac{f_2}{f_{cr}}$$

Reemplazando por (13):

$$PM = \arctan \frac{f_2}{f_n \cdot \sqrt{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 1} - 2 \cdot \xi^2}}$$

Y observando (7), cuando $f_2 \gg f_1$:

$$\xi \approx \frac{f_2}{2 \cdot f_n} \quad \Rightarrow \quad f_2 \approx 2 \cdot \xi \cdot f_n \quad \Rightarrow$$

$$PM \approx \arctan \frac{2 \cdot \xi}{\sqrt{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 1} - 2 \cdot \xi^2}} \quad (14)$$

Puede finalmente establecerse la relación entre el factor de amortiguamiento ξ y el parámetro PM , propiedad fundamental del lazo, como:

$$\xi \approx \frac{\tan(PM)}{2 \cdot \sqrt[4]{\tan^2(PM) + 1}} \quad (15)$$

En el sistema pasa bajos de 2do orden descrito por (4), cuando la ganancia es unitaria, la respuesta al impulso es de la forma:

$$L^{-1}(H(s)) = h(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n t} \cdot \sin \omega_d t \quad | \quad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

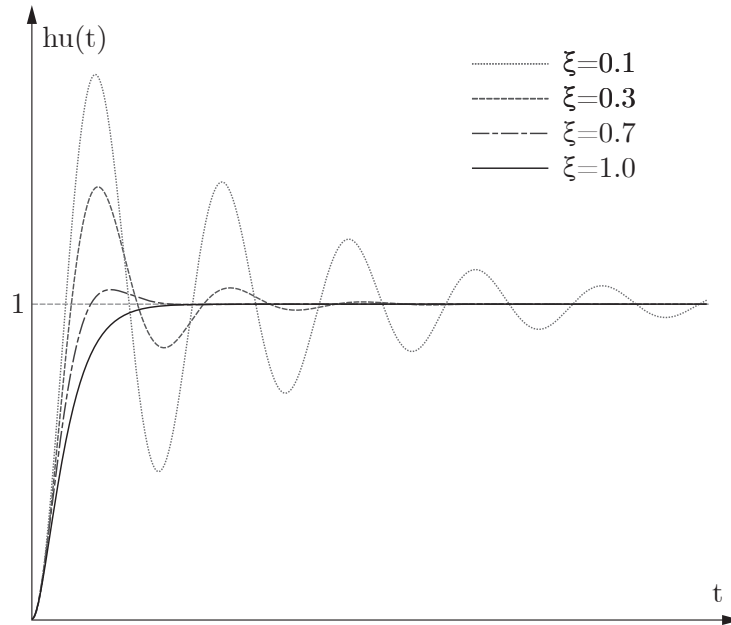
Donde el último factor es una función sinusoidal de amplitud unitaria, por lo tanto el producto resulta siempre menor o igual a la envolvente:

$$en(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n t}$$

La respuesta al escalón es:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot H(s)\right) = h(t) * u(t) = hu(t) = 1 - e^{-\xi \cdot \omega_n t} \cdot \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t\right)$$

El efecto de ξ sobre la respuesta al escalón puede observarse cualitativamente en el siguiente diagrama paramétrico, en el cual f_n es constante.



El primer máximo de la función se da para un tiempo igual a medio período de oscilación de la función sinusoidal:

$$t_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f_d} = \frac{1}{2 \cdot f_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

La amplitud del sobrepico se obtiene como:

$$M_{pt} = hu(t_p) = e^{\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)}$$

Obsérvese que el término cosenoidal resulta igual a 1 y el término senoidal resulta igual a 0.

Puede expresarse $hu(t)$ mediante una única función sinusoidal de amplitud unitaria como:

$$hu(t) = 1 - e^{-\xi \cdot \omega_n t} \cdot A \cdot \cos(\omega_d t + \phi)$$

Se puede calcular la amplitud A como: ^{§§}

$$A = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2}}$$

La envolvente de la respuesta al escalón unitario resulta por lo tanto:

$$enu(t) = 1 - \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n t} \quad (16)$$

^{§§}[Euclides. Elementa Geometriae. Venice, Erhard Ratdolt, 1482. Propositio 47.]

A partir (16) es posible calcular una buena aproximación el tiempo de establecimiento dentro de un margen de 2%, considerando únicamente a la envolvente como representativa de la amplitud de la señal en la salida:

$$enu(t_s) \approx 1 - 2\% \implies$$

$$t_s \approx \frac{2}{\pi \xi f_n}$$

El tiempo de crecimiento desde el 10% al 90% del valor final se obtiene como:

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} \quad | \quad hu(t_{10\%}) = 0.1 \quad \wedge \quad hu(t_{90\%}) = 0.9$$

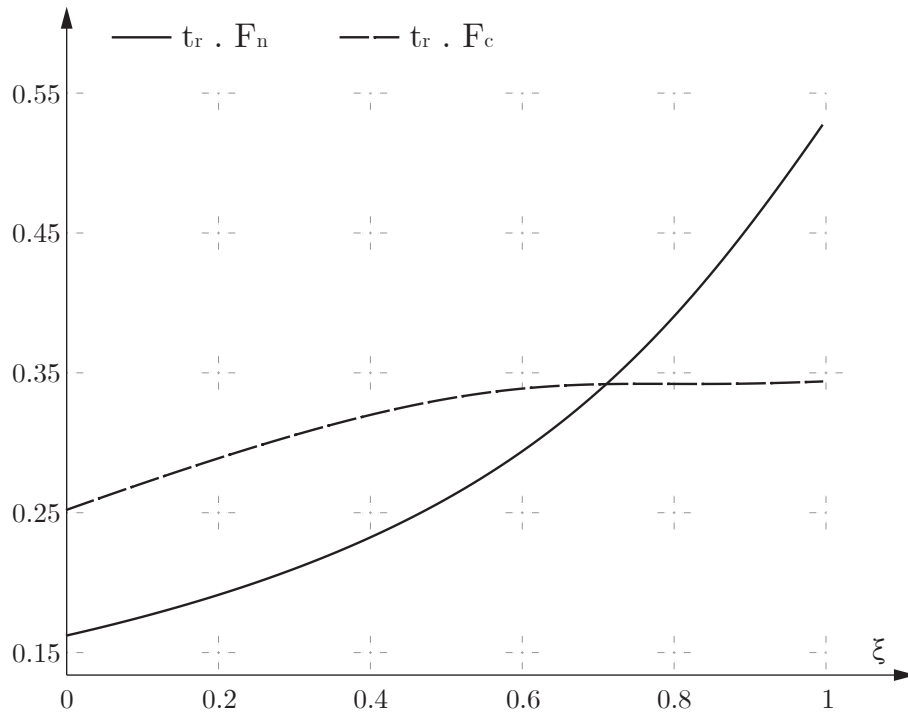
$$0.1 = 1 - e^{-\xi \cdot \omega_n t_{10\%}} \cdot A \cdot \cos(\omega_d \cdot t_{10\%} + \phi) \quad (17)$$

$$0.9 = 1 - e^{-\xi \cdot \omega_n t_{90\%}} \cdot A \cdot \cos(\omega_d \cdot t_{90\%} + \phi) \quad (18)$$

Las ecuaciones (17) y (18) son trascendentales. No obstante pueden resolverse numéricamente para el intervalo de interés y aproximar los puntos resultantes mediante funciones polinómicas de ξ producto con el coeficiente $1/f_n$ o alternativamente $1/f_c$, con un error relativo menor al 5%, $\forall \quad \xi \in [0, 1]$.

$$t_r \approx \frac{0.23 \cdot \xi^3 + 0.15 \cdot \xi + 0.16}{f_n} \quad \vee \quad t_r \approx \frac{0.37 \cdot \xi^2 + 0.17}{f_n}$$

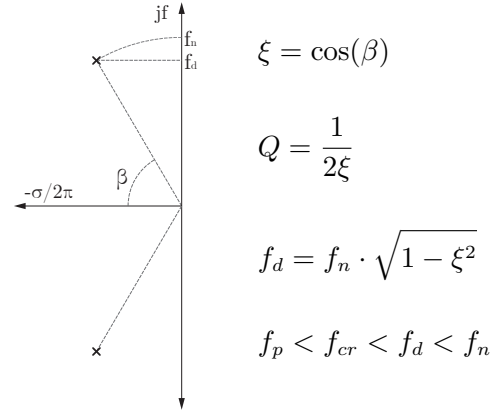
$$t_r \approx \frac{-0.13 \cdot \xi^2 + 0.22 \cdot \xi + 0.25}{f_c}$$



PROPIEDADES

$$H(s) = \frac{G_0}{\frac{s^2}{(2\pi \cdot f_n)^2} + 2\xi \cdot \frac{s}{(2\pi \cdot f_n)} + 1}$$

$$\angle H(j2\pi f) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \frac{f}{f_n}}{1 - \frac{f^2}{f_n^2}}\right)$$



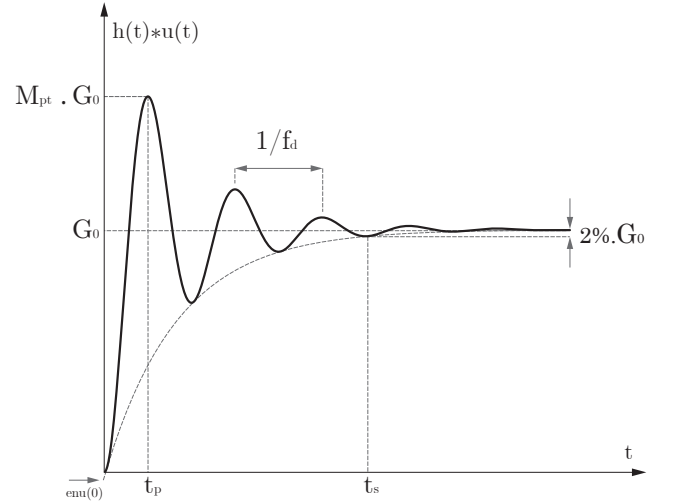
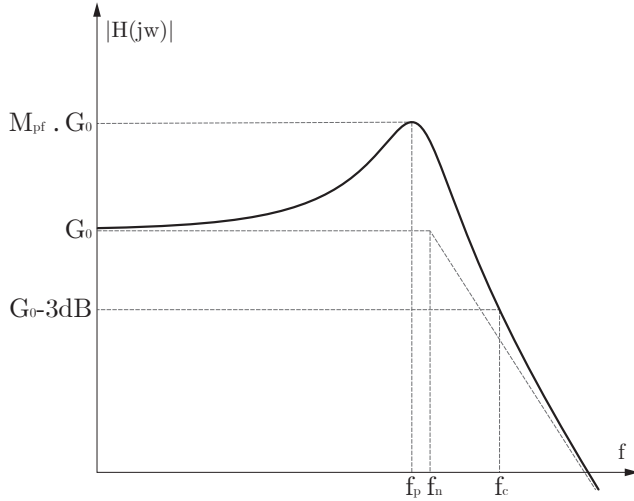
Los parámetros del denominador quedan determinados por las constantes del lazo.

$$f_n = \sqrt{f_1 \cdot f_2 \cdot (1 + |T_0|)} \quad \xi = \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot f_n} \quad \xi \approx \frac{\tan(PM)}{2 \cdot \sqrt[4]{\tan^2(PM) + 1}}$$

Recíprocamente propiedades fundamentales del lazo se vinculan con estos parámetros.

$$PM \approx \arctan \frac{2 \cdot \xi}{\sqrt{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 1} - 2 \cdot \xi^2}}$$

$$f_{cr} \approx f_n \sqrt{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 1} - 2 \cdot \xi^2}$$



$$M_{pf} = \frac{1}{2 \cdot \xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$M_{pt} = e^{\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)}$$

$$f_p = f_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$$

$$t_p = \frac{1}{2 \cdot f_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$f_c = f_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2 + \sqrt{2 \cdot (2 \cdot \xi^4 - 2 \cdot \xi^2 + 1)}}$$

$$t_s \approx \frac{2}{\pi \xi f_n} \quad t_r \approx \frac{0.37 \cdot \xi^2 + 0.17}{f_n}$$

ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$\sqrt{2}/2$	0.8	0.9	1.0
PM [°]	0	11	23	33	43	52	59	65	66	70	74	76
M_{pf} [dB]	∞	14.0	8.1	4.9	2.7	1.3	0.4	≈ 0	0	-	-	-
M_{pt} [%]	100	73	53	37	25	16	9.5	4.6	4.3	1.5	0.1	0
$t_r \cdot f_c$	0.25	0.27	0.29	0.31	0.32	0.33	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34

ANEXO

Se quiere mostrar la siguiente propiedad del argumento recíproco:

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Considerando la siguiente definición:

$$\tan(\theta) = x \tag{19}$$

Tomando el recíproco de ambos lados, se tiene:

$$\frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{1}{x} = \cot(\theta) \tag{20}$$

$$\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aplicando tangente a ambos lados, teniendo en cuenta (19), y únicamente en el dominio en el cual el arco tangente es función inversa de la tangente:

$$\tan(\theta) = \tan\left[\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x$$

$$\arctan(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0 \tag{21}$$

Teniendo en cuenta que $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ y que $\cos(\theta) = -\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$, se puede probar:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\frac{\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin(\theta - \frac{\pi}{2})} = -\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Realizando el cambio de variable:

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \varphi$$

$$\tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\varphi) \tag{22}$$

A partir de (20), aplicando (22):

$$\frac{1}{x} = \cot(\theta) = -\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Y por la periodicidad π de la tangente:

$$\frac{1}{x} = -\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Tomando los recíprocos:

$$x = -\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por ser la cotangente una función impar y reemplazando θ según (19):

$$x = \cot\left(-\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\operatorname{arccot}(x) = -\theta + \frac{\pi}{2} = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

Y, por lo tanto, por (21):

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \quad QED$$