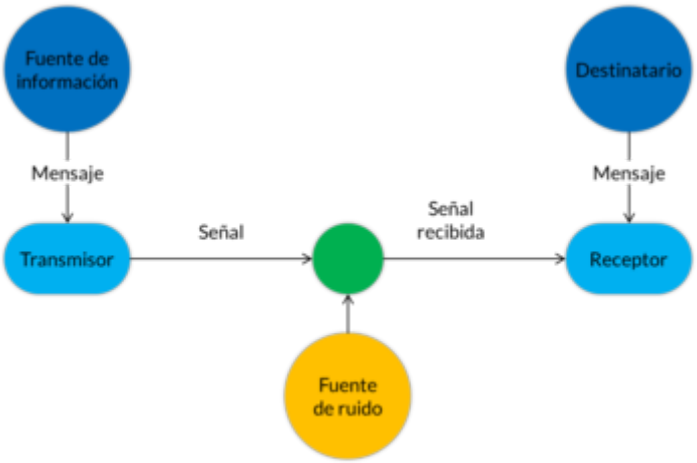
TP Integrador N°1



Alumnos: Vega Imbalde Aureliano, Savarino Jeremías, Facundo Errobidart.
Primera entrega: 20/10/2022
Segunda entrega: 27/10/2022
Teoría de la información
2° Cuatrimestre 2022

Resumen

El trabajo consiste en dos partes, la primera que trata sobre las fuentes de información y sus tipos (nulas y no nulas) y sus respectivas propiedades. En base a un archivo dado por la cátedra se determinará qué tipo de fuente fue la que emitió la información en él y se determinarán ciertas propiedades en base a su tipo. La segunda parte, se adentra en la codificación de la información y en las propiedades de los códigos. Además se ven formas de re-codificar archivos con el fin de comprimirlos, en nuestro caso, optamos por el algoritmo de Huffman.

Primera parte

Introducción:

Se tiene un archivo provisto por la cátedra que contiene 10.000 caracteres emitidos por una fuente de información desconocida. En base al análisis de los símbolos emitidos por esta fuente logramos determinar el tipo de la misma. El alfabeto de la fuente es el conjunto **C = {‘A’, ‘B’, ‘C’}**

Desarrollo:

Realizamos un programa en C para calcular las probabilidades de que un símbolo se dé si aparece otro previamente y los resultados para el archivo dado fueron:

```
Cantidad de veces que aparece cada caracter:
A: 1576
B: 6148
C: 2276
```

La cantidad de veces que ocurre cada transición es:

```
Ocurrencias:
        A       B       C

A       140     1266    169
B       647     4821    680
C       787     61      1428
```

Esto se leería, por ejemplo, “La cantidad de veces que aparece B habiendo aparecido previamente A, es 647”.

A modo demostrativo, planteamos un **pseudocódigo** de la implementación:

```
leer(archivo, previo); //lee del archivo el primer caracter.
leer(archivo, actual); //lee del archivo el segundo caracter.
contador[actual] = 1; //pone un 1 en la posición del caracter actual en el vector.
MIENTRAS (NO eof(archivo))
   ocurrencias[actual][previo]++; // acumula en la matriz la cantidad de veces  que aparece el caracter “actual” habiendo aparecido “previo” anteriormente.
   previo = actual;
   leer(a11rchivo, actual);
   contador[actual]++; // acumula en la matriz la cantidad de veces que aparece el caracter “actual”.
FIN MIENTRAS
```

Luego, para obtener las probabilidades, se divide cada fila de la matriz de ocurrencias por la cantidad de veces que aparece el símbolo que hace referencia a cada columna.

Pseudocódigo:
Aclaración: en todos los pseudocódigos de este informe, el ciclo ‘desde hasta’ es **inclusive**.

```
DESDE i = 0 HASTA i = N-1 CON paso = 1 HACER
  DESDE j = 0 HASTA j = N-1  CON paso = 1 HACER
       probabilidades[i][j] = ocurrencias[i][j] /contador[j];
  FIN DESDE
FIN DESDE
```

Finalmente se obtiene:

```
Matriz de pasaje:
        A       B       C

A       0.09    0.21    0.07
B       0.41    0.78    0.30
C       0.50    0.01    0.63
```

Esto indica que si la fuente de información emite un símbolo “A”, las probabilidades de que el símbolo siguiente sea “A”, “B” o “C” son 0.09, 0.41 y 0.50 respectivamente.

En caso de que la fuente de información fuera de memoria nula, deberíamos ver que los valores de la matriz generada tendrían que tender a ⅓, ya que en este tipo de fuentes, los símbolos que emiten son estadísticamente independientes. Sin embargo, nos encontramos con casos donde si la fuente emite los símbolos A o B, la posibilidad de obtener un símbolo B a continuación es de 0.41 y 0.78 respectivamente. Por lo tanto, es correcto decir que el símbolo obtenido en el instante i va a condicionar al que se emitirá en el instante i+1, es decir, es una fuente de información con memoria **no nula**. Particularmente, una fuente markoviana.

Para determinar si la fuente es ergódica se verificó que en el grafo de la fuente no haya ningún sumidero, es decir, que no haya un vértice que no vaya a ningún otro vértice más allá de él mismo.

Pseudocódigo:

```
i = 0;
```

```
HACER
   aux = 0;
   j = 0;
   MIENTRAS (j < N && aux == 0) HACER
      SI (i != j y probabilidades[j][i]>0) ENTONCES
         aux = 1;
      j++;
   FIN MIENTRAS
   i++;
MIENTRAS (i < N y aux == 1);
RETURN aux;
```

En este caso, la fuente es **ergódica**.
Por lo tanto, se puede afirmar que todos los estados son alcanzables desde otro estado.

La distribución de probabilidades en cada t va variando con la evolución del proceso de emisión de símbolos, una vez que se estabiliza, se obtiene el vector estacionario.

Para calcular el vector estacionario se debe resolver el sistema de ecuaciones generado mediante la matriz de transición menos la identidad, igualando cada fila a 0 y además agregando una fila de todos 1s.

Pseudocódigo para generar el sistema de ecuaciones:

```
DESDE i = 0 HASTA i = N CON paso = 1 HACER
      DESDE j = 0 HASTA j = N CON paso = 1 HACER
         SI (i == 0) ENTONCES
            MGauss[i][j] = 1; //la primera fila son todos 1s
         SINO SI (j == N) ENTONCES
            MGauss[i][j] = 0; //la última columna son todos 0s (excepto en la primera fila)
         SINO
            MGauss[i][j] = probabilidades[i-1][j];
            SI (i == j+1) ENTONCES
               MGauss[i][j]--; // se le resta la identidad a la matriz de probabilidades
            FIN SI
         FIN SI
      FIN DESDE
  FIN DESDE
```

Para resolver este sistema de ecuaciones aplicamos Gauss

Pseudocódigo:

```
   DESDE i = 0 HASTA i = N CON paso = 1 HACER
      DESDE j = 0 HASTA j = N CON paso = 1 HACER
         aux1=MGauss[j][i]/MGauss[i][i];
         DESDE k = 0 HASTA k = N CON paso = 1 HACER
            aux2=MGauss[i][k]*aux1;
            MGauss[j][k]-=aux2;
```

```
        FIN DESDE
    FIN DESDE
FIN DESDE

DESDE i = N-1 HASTA i = 0 CON paso = -1 HACER
    DESDE j = N-1 HASTA j = i+1 CON paso = -1 HACER
        VecEstacionario[i] = VecEstacionario[i] - MGauss[i][j]*V[j];
    FIN DESDE
    VecEstacionario[i] = (VecEstacionario[i]+MGauss[i][N])/MGauss[i][i];
FIN DESDE
```

El **vector estacionario** nos dió los siguientes valores:
0.16
0.61
0.23

El cálculo de la entropía se hace de la siguiente manera:

$$H_1 = \sum_i p_i * \sum_j p_{j/i} \log \frac{1}{p_{j/i}}$$

siendo Pi/j las probabilidades condicionales de la matriz de transición y Pi las probabilidades estacionarias (valores del vector estacionario).

Pseudocódigo:

```
DESDE i = 0 HASTA i = N-1 CON paso = 1 HACER
    aux = 0;
    DESDE j = 0 HASTA j = N-1 CON paso = 1 HACER
        SI (probabilidades[j][i] != 0) ENTONCES
            aux = aux - probabilidades[j][i] * log2(probabilidades[j][i]);
        FIN SI
    FIN DESDE
    H = H + VecEstacionario[i] * aux;
FIN DESDE
RETURN H;
```

La entropía (cantidad media de información por símbolo) dió **0.987 bits/símbolo.**

Segunda parte

Introducción:

Para la segunda parte se reutiliza el mismo archivo, pero se toman secuencias de caracteres de este de longitud 3, 5 y 7 para representar tres códigos distintos. En base a ellos se calcularán distintas propiedades de ellos como cantidad de información, entropía, rendimiento , redundancia y que tan compacto es. Finalmente se comprime los archivos utilizando el algoritmo de Huffman.

Desarrollo:

La idea principal a la hora de desarrollar los distintos algoritmos de esta segunda parte fue poder generalizar cada algoritmo para que, dependiendo de la variable “tamPalabra”, el programa pueda ejecutarse tanto para 3, 5 o 7 palabras.

Primero, para leer cada palabra y contar sus ocurrencias, se construyeron los siguientes algoritmos:

Lectura de las palabras del archivo:

```
contPalabras=0;
tamLista=0;
inicializarLista(lista);
abrir ( Archivo);
MIENTRAS no termine el archivo, HACER:
    leer(pal);
    SI (pal.longitud==tamPalabra) ENTONCES:
        buscayCuenta(lista,pal,tamLista);
        contPalabras=contPalabras+1;
    FIN SI
FIN MIENTRAS
```

Aclaraciones :

- **lista** es un array del registro “nodoProb”, que está compuesto por :
  palabra (**pal**), ocurrencia de la palabra (**ocurrencia**), y probabilidad de aparición de la palabra (**prob**)
- **tamLista** es el tamaño de la lista. Su valor final será obtenido en la última iteración. Se irá modificando en la función buscaYCuenta.
- el tamaño de **pal** será 3 ,5 o 7, según haya elegido el usuario.

Pseudocódigo para contar las ocurrencias(procedure buscaYCuenta):

```
encontrado=false;
i=0;
MIENTRAS (encontrado==false y i< tamLista) HACER:
        si (pal==lista[i].pal), entonces:
                encontrado=true;
        i=i+1;
FIN MIENTRAS

SI (encontrado==false) ENTONCES:
        lista[i].pal=pal;
        lista[i].ocurrencia=1;
        tamLista=tamLista+1;
SINO:
   lista[i].ocurrencia=lista[i].ocurrencia+1;
FIN SI
```

- **Aclaraciones y comentarios :**

La idea de este algoritmo es ir recorriendo la lista de palabras, si encuentra la palabra, aumenta su ocurrencia en 1. Si la palabra no está en la lista, la agrega , aumenta su ocurrencia en 1 y aumenta el tamaño de la lista.

- **lista[i].pal** se refiere a la palabra código que se encuentra en la posición i de la lista.
- **lista[i].ocurrencia** se refiere a las ocurrencias de la palabra que se encuentra en la posición i del array.
- **encontrado** es una variable booleana que cambia a True cuando el algoritmo encuentra la palabra recién leída del archivo (recibida por parámetro) en la lista.
- **tamLista** es el tamaño del array, el cual irá cambiando en base a la cantidad de palabras halladas. Indica la cantidad de palabras distintas encontradas.

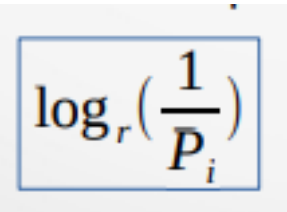
Con el siguiente algoritmo calculamos tanto la cantidad de información como la entropía:

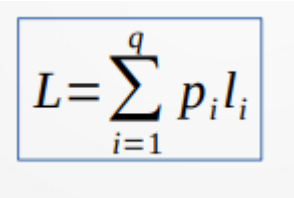
Pseudocodigo:

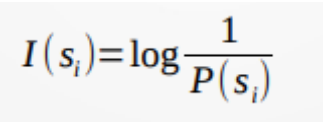
```
cantidadDeInformacion =0;
entropia=0;
DESDE i=0 HASTA i = tamLista , CON paso = 1 HACER:
        lista[i].prob= lista[i].ocurrencia / cantPalabras;
        cantidadDeInformacion= cantidadDeInfomacion + log2(1/lista[i].prob);
        entropia=entropia+ lista[i].prob*log3(1 /lista[i].prob );
FIN DESDE
```

Aclaraciones y comentarios:

La idea de este algoritmo es recorrer toda la lista de palabras, y calcular la entropía y la cantidad de información en base a las distintas palabras y sus frecuencias.
Para los cálculos nos basamos en las siguientes ecuaciones para la entropía,longitud media y cantidad de información respectivamente:

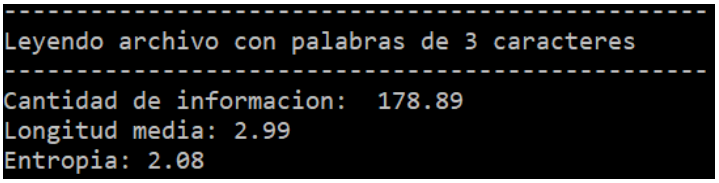






- **lista[i].prob**, se refiere a la probabilidad de aparición de la palabra que se encuentra en la posición i del array.
- **cantPalabras** son la cantidad de palabras diferentes(del respectivo tamaño) que fueron encontradas
- **tamLista** es el tamaño del array descrito anteriormente.

Entonces los resultados obtenidos son los siguientes :



```
------------------------------------------------
Leyendo archivo con palabras de 5 caracteres
------------------------------------------------
Cantidad de informacion:  1151.58
Longitud media: 4.99
Entropia: 3.28
```

```
------------------------------------------------
Leyendo archivo con palabras de 7 caracteres
------------------------------------------------
Cantidad de informacion:  3232.89
Longitud media: 6.99
Entropia: 4.34
```

Con este sencillo algoritmo, se calcula la **inecuación de Kraft/McMillan**, siguiendo la definición dada por la cátedra que es:

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leqslant 1$$ INECUACIÓN de KRAFT

Pseudocódigo:

kraft=0;
DESDE i=0 HASTA i = tamLista , CON paso = 1 HACER:
    *kraft=kraft + 3**(-longitudMedia)*

También con el siguiente algoritmo calculamos las longitudes medias de los códigos, siguiendo la siguiente definición de la cátedra:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i l_i$$

Pseudocódigo:

longitudMedia=0;
DESDE i=0 HASTA i = tamLista , CON paso = 1 HACER:
    longitudMedia=longitudMedia+ lista[i].prob len(lista[i].pal);*
FIN DESDE

Aclaración:

- **len(lista[i].pal)** es la longitud de la palabra código que se encuentra en la posición i del array
- **lista[i].prob**, se refiere a la probabilidad de aparición de la palabra que se encuentra en la posición i del array.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

```
Resultado Kraft/McMillan: 1.00
El codigo de longitud media 3.000000 cumple la inecuacion de Kraft/MacMillan  (es compacto)
```

```
Resultado Kraft/McMillan: 0.54
El codigo de longitud media 5.000000 cumple la inecuacion de Kraft/MacMillan  (es compacto)
```

```
Resultado Kraft/McMillan: 0.16
El codigo de longitud media 7.000000 cumple la inecuacion de Kraft/MacMillan  (es compacto)
```

Como se puede observar en los resultados, para las tres longitudes se cumple que el lado izquierdo de la ecuación es menor o igual a uno por lo cual es condición necesaria y suficiente para decir que son códigos instantáneos para los diferentes casos, dado que todas las palabras son de la misma longitud, no es posible que una palabra sea prefijo de otra, dado que si ocurriese, es la misma palabra.

Además, por McMillan sabemos que si la inecuación se cumple también se cumple la recíproca del postulado de Kraft, es decir que los códigos son unívocos.

Luego de calcular la **entropía y la longitud media,** obtuvimos el **rendimiento y la redundancia** a partir de las siguientes ecuaciones:

- rendimiento= entropia/longitudMedia;
- redundancia=1-rendimiento;

Los resultados obtenidos fueron:

Para palabras código de **tres** caracteres:

```
-------------------------------------------------
Redundancia: 0.30
Rendimiento:  0.70
-------------------------------------------------
```

Para palabras código de **cinco** caracteres:

```
-------------------------------------------------
Redundancia: 0.34
Rendimiento:  0.66
-------------------------------------------------
```

Para palabras código de **siete** caracteres:

```
-------------------------------------------------
Redundancia: 0.38
Rendimiento:  0.62
-------------------------------------------------
```

Se realizó la codificación de los archivos mediante algoritmo de Huffman, por lo cual se armó un árbol binario en el cual en los niveles más altos se encuentran las palabras más frecuentes, dejando a las menos frecuentes en los niveles inferiores, lo que hace que requieran más bits para su representación.

Para ello, se definió un struct nodoHuffman, el cual contiene la palabra (puede ser vacía si se tratase de un nodo interno), la sumatoria de ocurrencias y punteros a ambos hijos del árbol binario.

Entonces la estructura quedaría tal que:

```
struct nodoHuffman {
        string pal
        int ocurrencias
```

```
        punteros *izq, *der
}
```

La idea básica de nuestro algoritmo es construir inicialmente un arreglo de nodos, donde todos sean raíces. Una vez construido este arreglo, iteramos sobre él buscando dos elementos con menor cantidad de ocurrencias y los agregamos al árbol, de la siguiente manera. El nodo creado a partir de la suma de dos ya existentes también se inserta en el arreglo y se vuelve a considerar para ser sumado, de tal forma que iteramos hasta que en el arreglo existe un solo elemento, el árbol de Huffman completo:

```
nodoHuffman izq, der, tope;

MIENTRAS (NO hayUnSoloElemento(arregloSubArboles)) HACER
        izq = obtenerMInimo(arregloSubArboles)
        der = obtenerMinimo(arregloSubArboles)

        tope = creaNodo("", izq.ocurrencias + der.ocurrencias)

        tope.izq = izq
        tope.der = der

        insertarNuevoNodo(arregloSubArboles, tope)
FIN MIENTRAS
```

Un par de consideraciones a tener en cuenta es que la función **obtenerMinimo** una vez que obtiene el elemento del arreglo de subárboles, lo remueve del arreglo, por lo cual es seguro llamar de nuevo a la misma función para obtener nuevamente el segundo mínimo.

La función **creaNodo** simplemente realiza la alocación de memoria e inicializa los valores del tope del nuevo subárbol. Finalmente, **insertarNuevoNodo** mete en el arreglo de subárboles el nuevo nodo creado.

Al final del proceso, queda construído un **árbol binario de Huffman**, el cual recorreremos para construir un diccionario: un array de elementos que contiene la palabra original y la traducción binaria, que luego utilizaremos para generar los archivos codificados. Para ello tenemos una función que va construyendo los códigos a medida que se recorre el árbol.

```
FUNCION escribirCodigosHuffman(nodoHuffman raiz, int arr[], int tope, nodoDiccionario diccionario[], int
tamDiccionario)

SI (raiz.izq)
        arr[tope] = 0
        escribirCodigosHuffman(raiz.izq, arr, tope+1, diccionario, tamDiccionario)
FIN SI

SI (esHoja(raiz))
        insertarEnDiccionario(raiz, diccionario[tamDiccionario], arr, tope)
        tamDiccionario = tamDiccionario + 1
FIN SI

SI (raiz.der)
        arr[tope] = 1
        escribirCodigosHuffman(raiz.der, arr, tope+1, diccionario, tamDiccionario)
FIN SI
```

FIN FUNCION

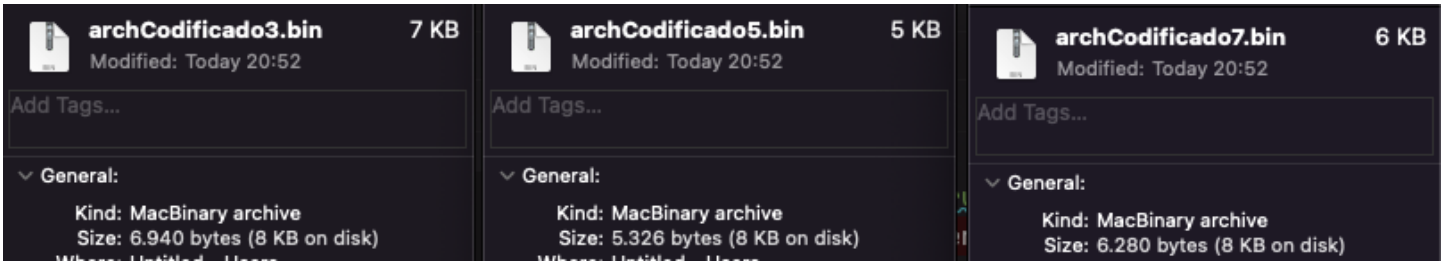
La variable **arr** es un arreglo que contiene el código que se va generando a medida que se recorre el árbol, la variable **tope** se utiliza debido a que no se debe usar todo el arreglo, sino una porción de este que es válida, dado que más allá de este habrá valores de instancias anteriores de la recursividad.

Finalmente, una vez generado el diccionario, lo ordenamos por frecuencia de palabra de la más a la menos frecuente para acelerar el proceso de compresión y luego leemos el archivo original nuevamente y lo comprimimos usando el diccionario.

El archivo codificado contiene el diccionario generado como header. Los primeros 4 bytes contienen el tamaño del diccionario (de aquí en adelante n) y luego los siguientes n * 10 bytes contienen el diccionario propiamente dicho, con los primeros 8 bytes conteniendo la palabra original del archivo y los últimos 2 la codificación. Luego se encuentra el archivo codificado propiamente dicho. El programa contiene una opción para verificar que el la compresión se haya realizado correctamente y reconstruye en texto original en la consola.

Una particularidad que notamos a la hora de generar los códigos fue que inicialmente pensamos que el archivo tomado de a palabras de 3 caracteres era el que iba a ver la mayor compresión al ser el menos entrópico. Finalmente resultó ser el menos comprimido, y esto se debe a que los archivos binarios codificados tienen un tamaño de palabra de 2 bytes (16 bits) para poder escribir sin truncar las codificaciones de palabras de los archivos de palabras de 5 y 7 caracteres. Por ello, incluso si la codificación de Huffman para cada palabra utiliza menos bits, cada vez que ésta se escribe en el archivo ocupa una longitud fija de 2 bytes. Por lo tanto, cuantas más palabras tenga el archivo, más grande será, sin importar que la codificación para las palabras sea de menos bits. Una forma de contrarrestar esto sería escribiendo un tamaño de palabra dinámico basado en el código más largo, pero sin duda haría recuperar esta información un proceso más engorroso.

De todas maneras, los tres archivos quedan de un tamaño menor al original. Como se puede apreciar en la siguiente imagen:



Conclusiones

La entropía para las palabras código de 3 caracteres es 2.08, lo que significa que para obtener un valor cercano al 100 % de rendimiento, la longitud media del código debería ser cercana a 2.08.
Como se puede observar en los resultados, el rendimiento para palabras de 3 caracteres es 0.7, mientras que para palabras de 7 caracteres es 0.62.
El hecho de que a medida que tomamos más caracteres para representar la palabra código, el rendimiento sea más bajo, significa que cuanto más caracteres tenga la palabra código, la diferencia entre la entropía y la longitud media de las palabras será mayor.
Por ende para obtener una mayor cantidad de información, sería conveniente tomar palabras código de menor longitud media.