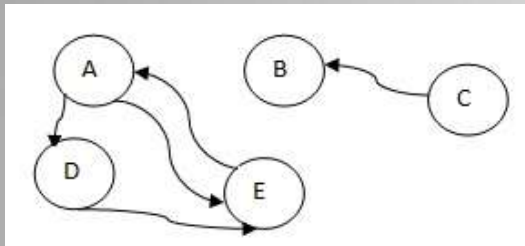


GRAFOS



Grafo: definición

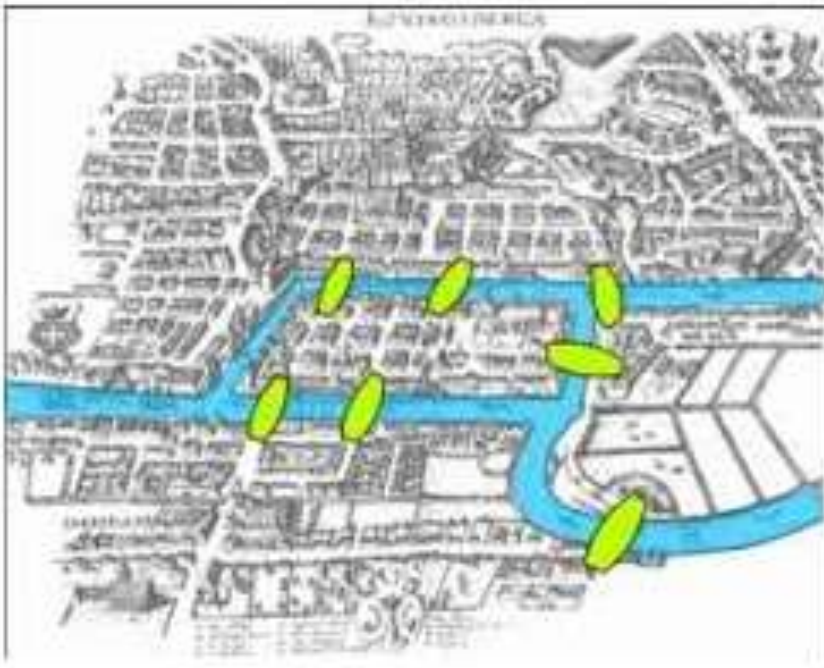
Un grafo G consta de dos conjuntos finitos:

Un conjunto $V(G)$ de vertices.

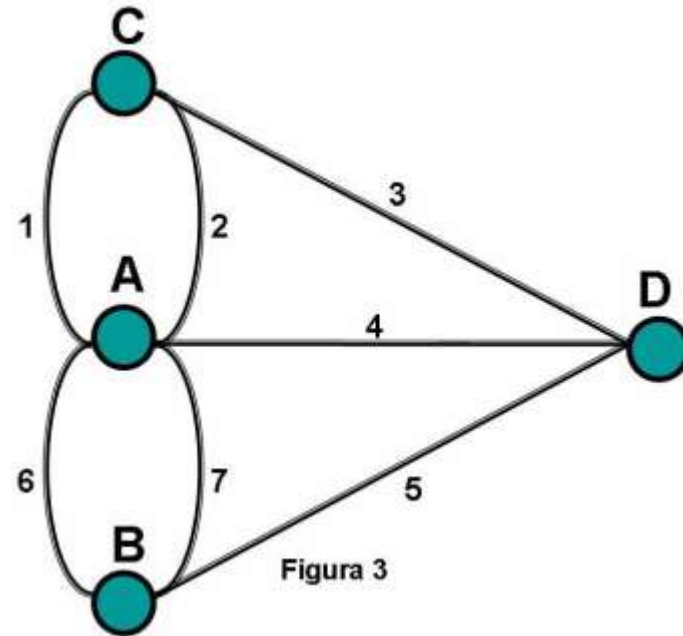
Un conjunto $A(G)$ de pares no ordenados de vertices al que llamamos aristas.

- Cada arista estará asociada a uno o dos vertices llamados puntos extremos.

Grafos: origen



Puentes de Königsberg
(Kaliningrado)



Euler – 1736



ta
rado, Óblast de Kaliningrado

oogle

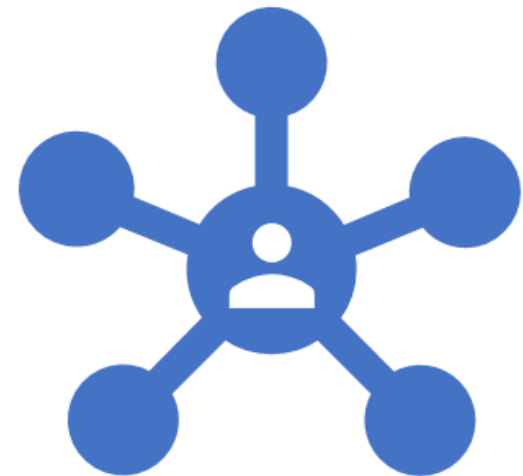
street View - sept. 2012



Grafos: origen

Grafos: usos

- ▶ Redes subterráneas o ferroviarias.
- ▶ Redes fluviales.
- ▶ Vuelos. Rutas.
- ▶ Redes eléctricas.
- ▶ Redes informáticas.
- ▶ Redes comunicacionales.
- ▶ Redes sociales.
- ▶ Plan de estudios de una carrera.
- ▶ Relaciones interpersonales.
- ▶ Planificación de tareas.



Grafos: algunas definiciones



Una arista con un solo punto extremo se llama bucle.



Dos o más aristas conectadas a los mismos puntos extremos son paralelas.



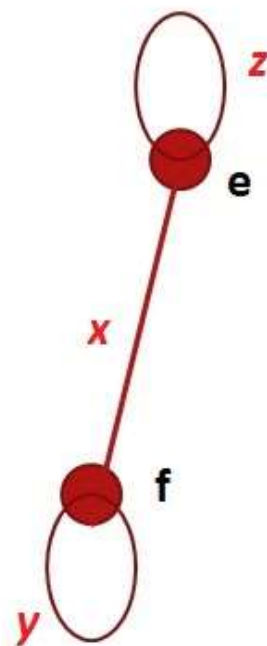
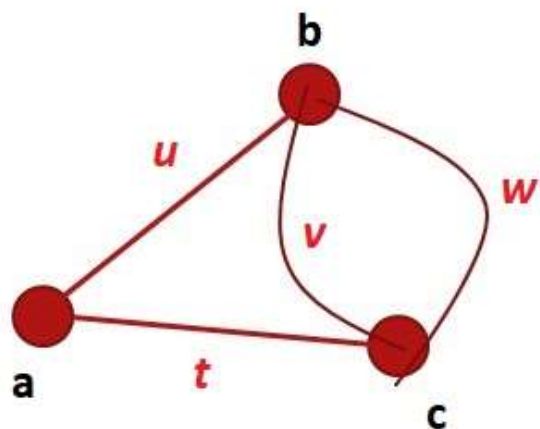
Dos vértices que se conectan por una arista son adyacentes. En el caso de los bucles, el vértice es adyacente a sí mismo.



Dos aristas que inciden en el mismo vértice son aristas adyacentes.



Un vértice en el que no incide ninguna arista es un vértice aislado.



Grafos: ejemplos

Grafos: ejemplos

► Conjunto de vértices: $V = \{ a, b, c, d, e, f \}$

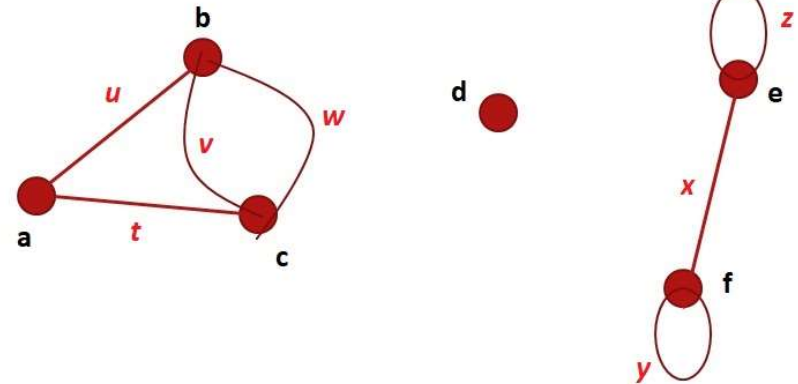
► Conjunto de aristas: $A = \{ t, u, v, w, x, y, z \}$

► **a** y **b** son vertices adyacentes.

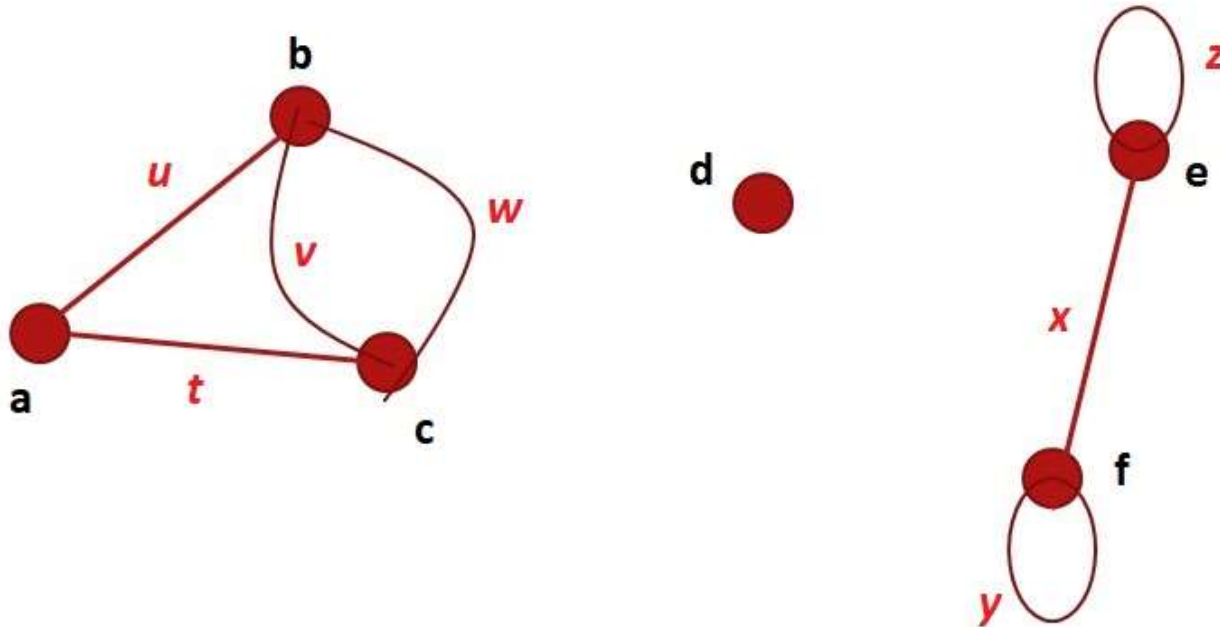
► **t** y **u** son aristas adyacentes.

► **y** y **z** son bucles, **v** y **w** son aristas paralelas.

► **d** es un vértice aislado



Grafos: ejemplos

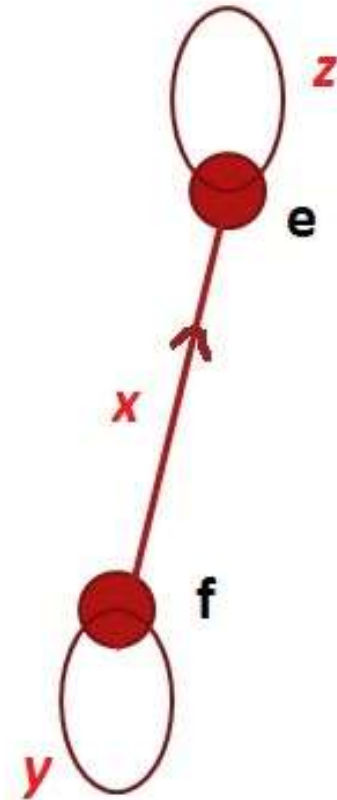
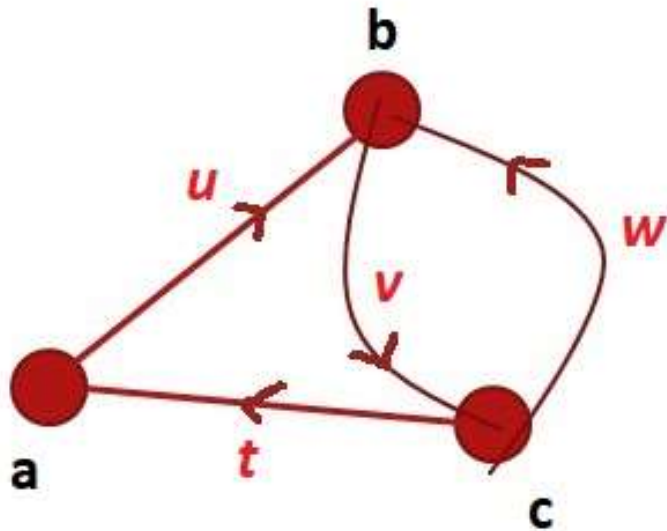


El conjunto de aristas, si no hay aristas paralelas, lo podemos indicar como pares **no ordenados** de vertices.

$$A = \{ (a, b), (a, c), (b, c), (b, c), (e, e), (f, e), (f, f) \}$$

En este ejemplo tenemos una ambigüedad entre los vertices b y c.

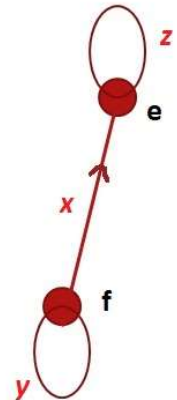
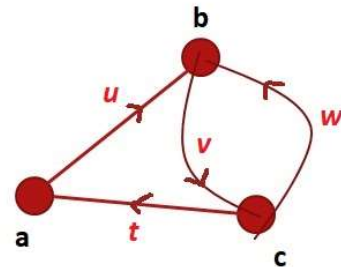
Grafos dirigidos (digrafo)



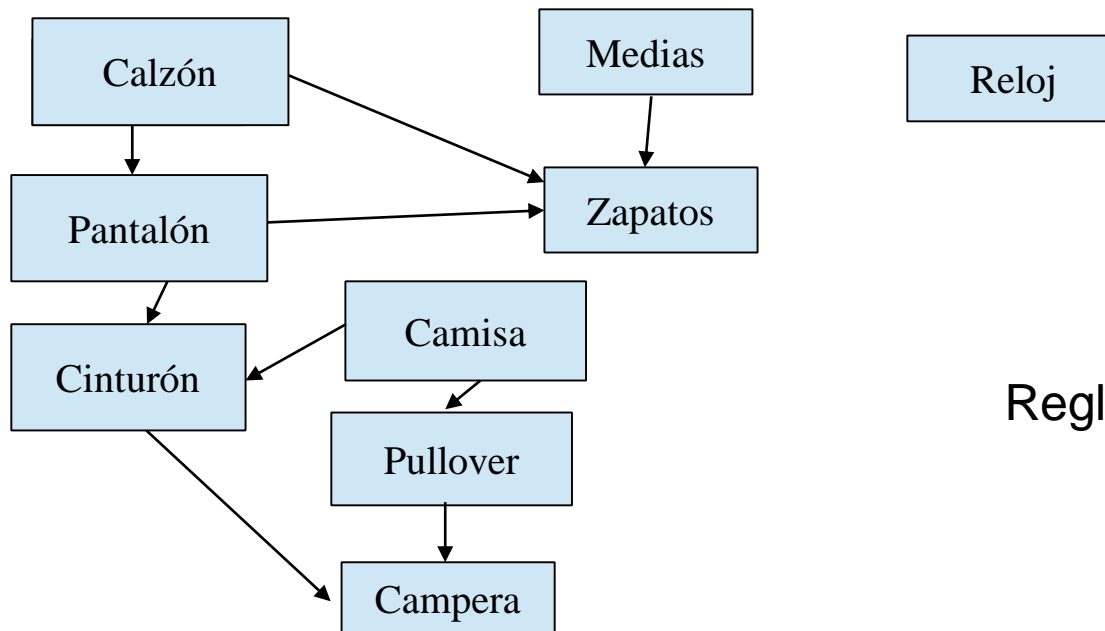
Grafos dirigidos (digrafo)

► El conjunto de aristas lo indicamos como pares ordenados de vértices:

► $A = \{ (a, b), (c, a), (b, c), (c, b), (e, e), (f, e), (f, f) \}$



Grafos: tareas

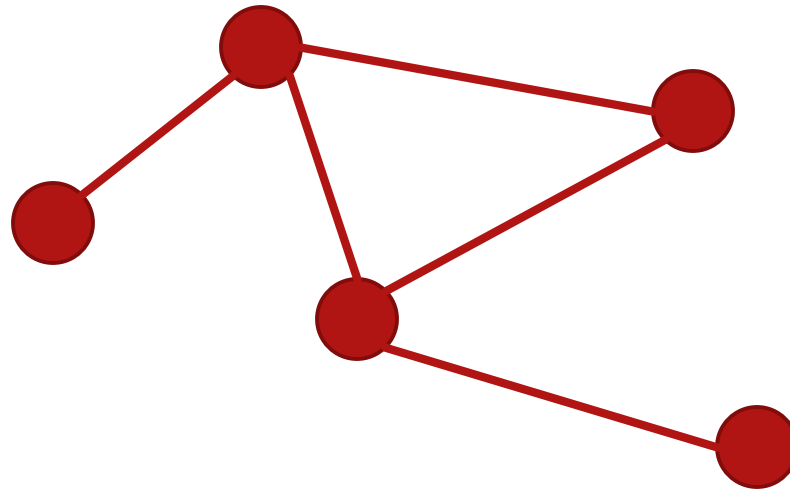


Reglas para vestirse

Grafo simple



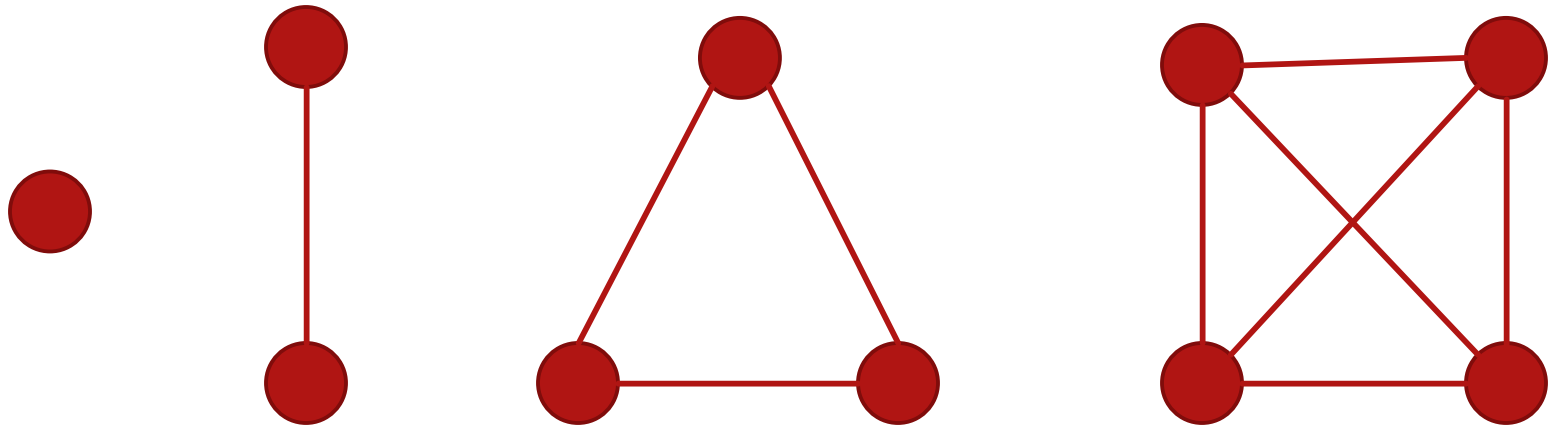
Un grafo simple es el que no tiene bucles ni aristas paralelas.



Grafo completo



Un grafo completo de n vértices es un grafo simple con una arista que conecta a cada par de vértices.

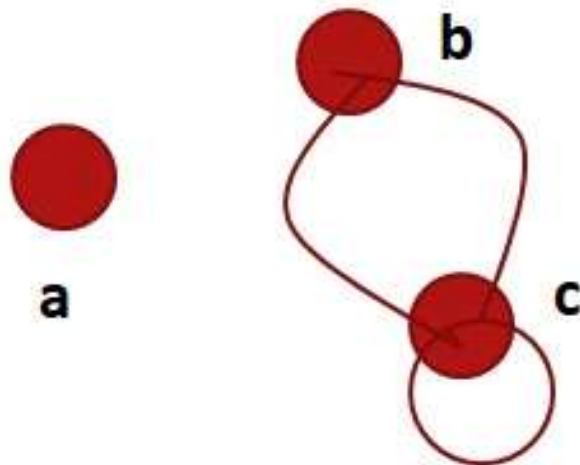


Grado de un vértice

El grado $g(v)$ de un vértice v es la cantidad de aristas que inciden en él.

Un bucle se cuenta como doble.

La suma de los grados de todos los vértices es igual al doble de la cantidad de aristas.



- $g(a) = 0$
- $g(b) = 2$
- $g(c) = 4$
- Total de $G = 0 + 2 + 4 = 6$



Caminos, circuitos

Sea G un grafo y u y v vértices en G . Entonces:

- Un **camino** de u a v es una sucesión finita de vértices adyacentes y aristas.
 - Si el grafo es simple, alcanza con indicar solamente los vértices.
- Un **sendero** de u a v es un camino que no repite aristas.
- Una **trayectoria** de u a v es un sendero que no repite vértices.
- Un **camino cerrado** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.
- Un **circuito** es un camino cerrado que no repite aristas.
- Un **circuito simple** es un circuito que no repite vértices, a excepción del primero y el último.



	¿Arista repetida?	¿Vértice repetido?	¿Inicia y finaliza en el mismo punto?	¿Debe contener al menos una arista?
Camino	Permitido	Permitido	Permitido	No
Sendero	No	Permitido	Permitido	No
Trayectoria	No	No	No	No
Camino cerrado	Permitido	Permitido	Sí	No
Circuito	No	Permitido	Sí	Sí
Circuito simple	No	Solo primero y último	Sí	Sí

Caminos, circuitos



Conectividad

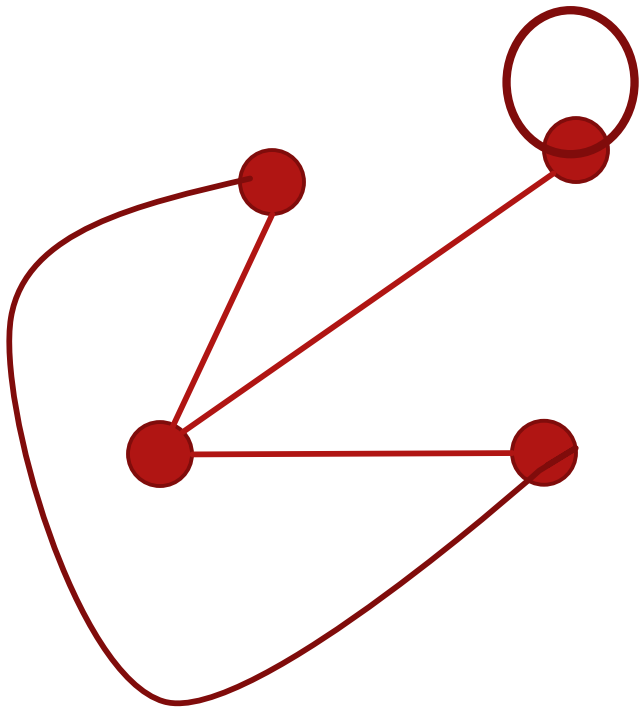


Sea G un grafo y u y v dos vértices de G . Decimos que u y v son conexos sí y solo sí existe un camino de u a v .

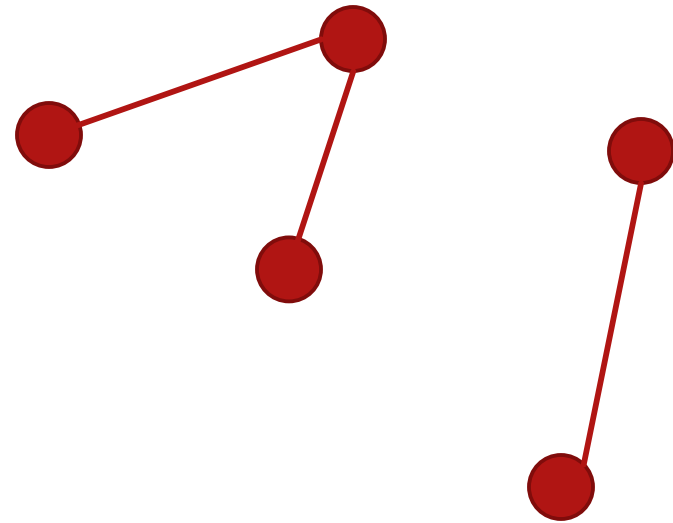


El grafo G es conexo si y solo sí, dados dos vértices cualquiera, hay un camino que los conecta.

Conectividad



Grafo conexo



Grafo desconexo



Conectividad



Si un grafo G es conexo y contiene un circuito, se puede quitar una arista del circuito que G seguirá siendo conexo.

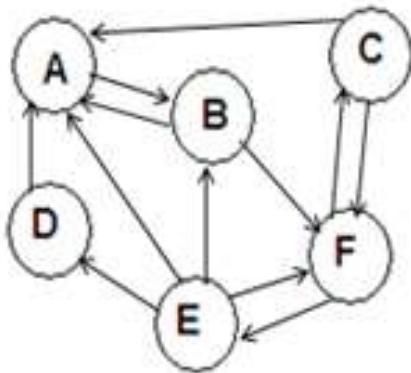


Si un grafo G es conexo y está libre de circuitos, es un **árbol**.



Si un grafo G está libre de circuitos pero no es conexo, se llama **bosque** (varios árboles).

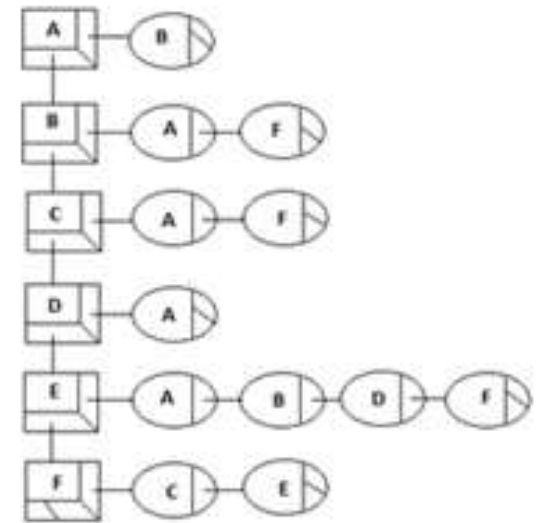
Implementaciones



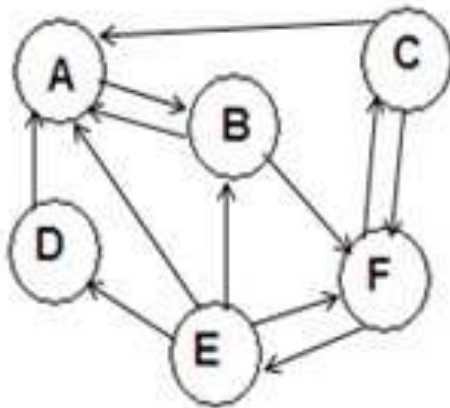
Grafo

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	1
D	1	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	0	1
F	0	0	1	0	1	0

Matriz de adyacencia

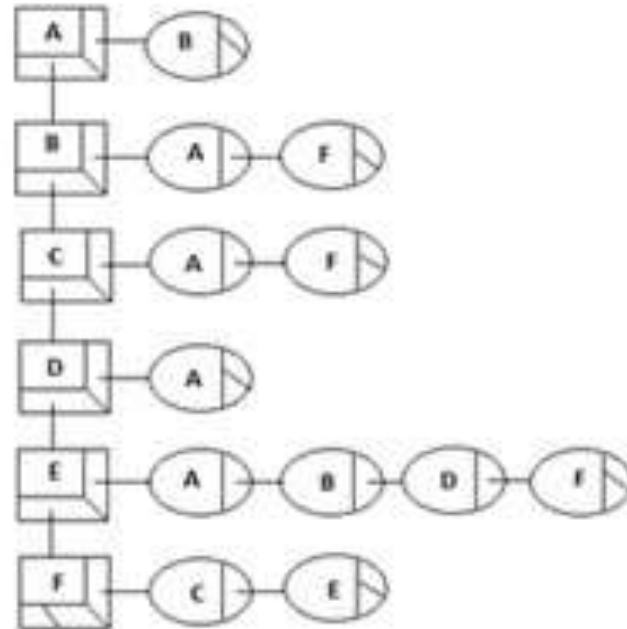
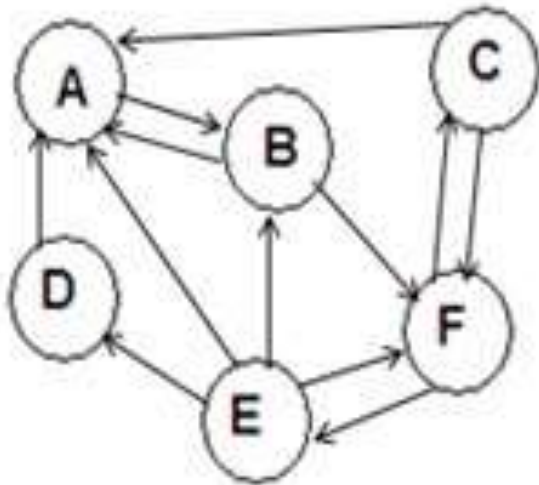


Lista de adyacencia



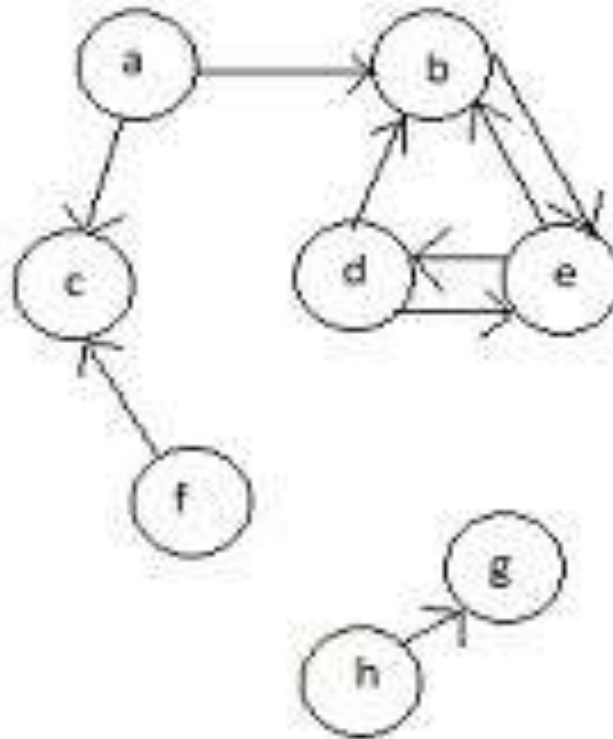
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	1
D	1	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	0	1
F	0	0	1	0	1	0

Matriz de adyacencia



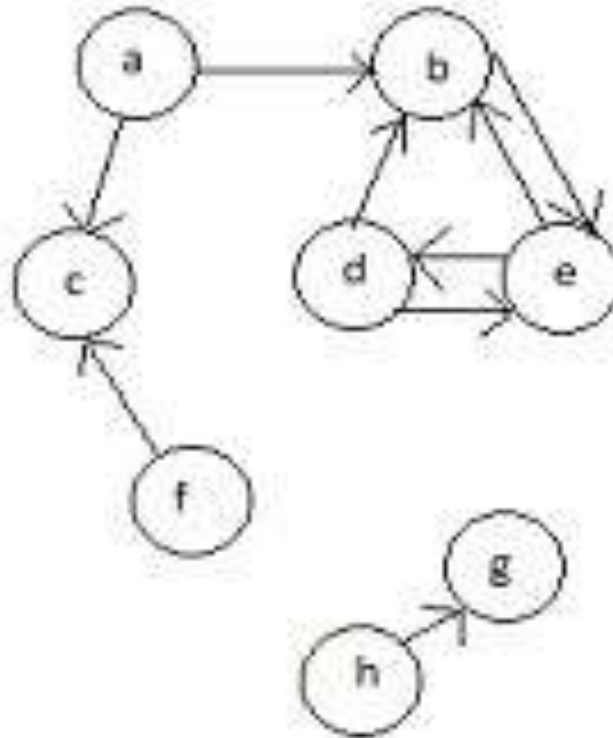
Lista de adyacencia

Recorrido en profundidad



a	b	e	d	c	f	g	h
1	2	3	4	5	6	7	8

Recorrido en ancho



a	b	c	e	d	f	g	h
1	2	3	4	5	6	7	8



Recorridos topológicos



Se aplican solamente a grafos dirigidos que no tengan ciclos.



Permiten linealizar el grafo.

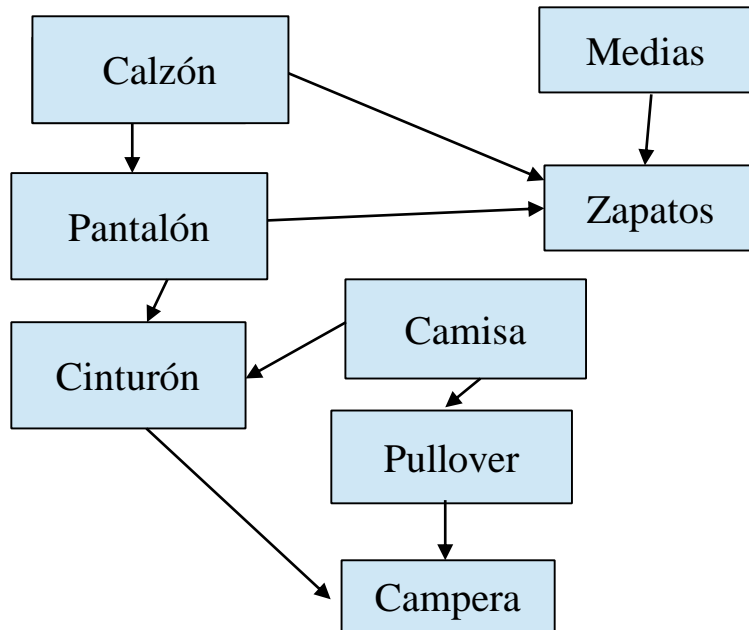


Puede hacerse en profundidad o en ancho.



Una aplicación típica de estos recorridos es en la planificación de tareas.

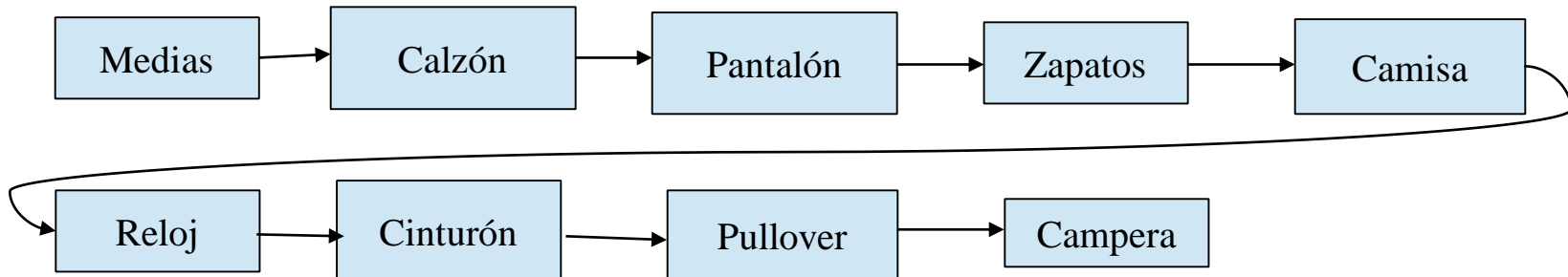
Recorridos topológicos



Reloj

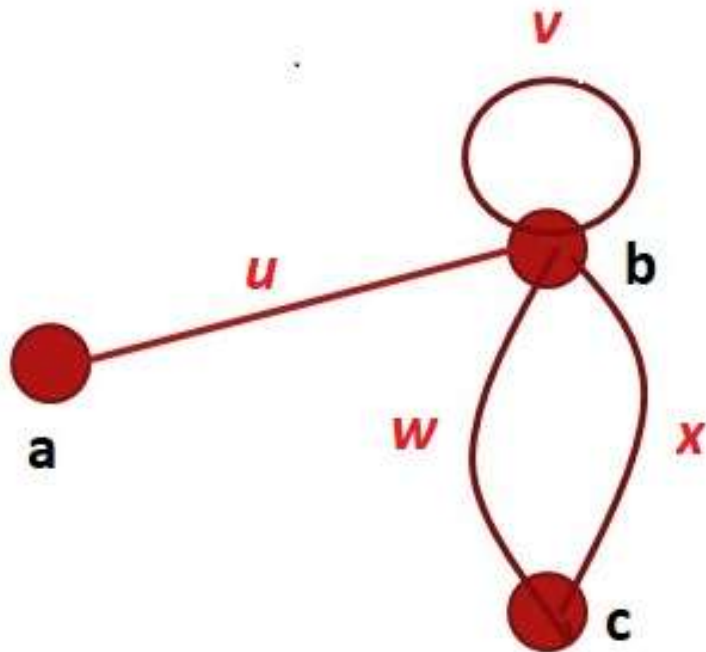
Reglas para vestirse

Un posible ordenamiento:



Longitud de un camino

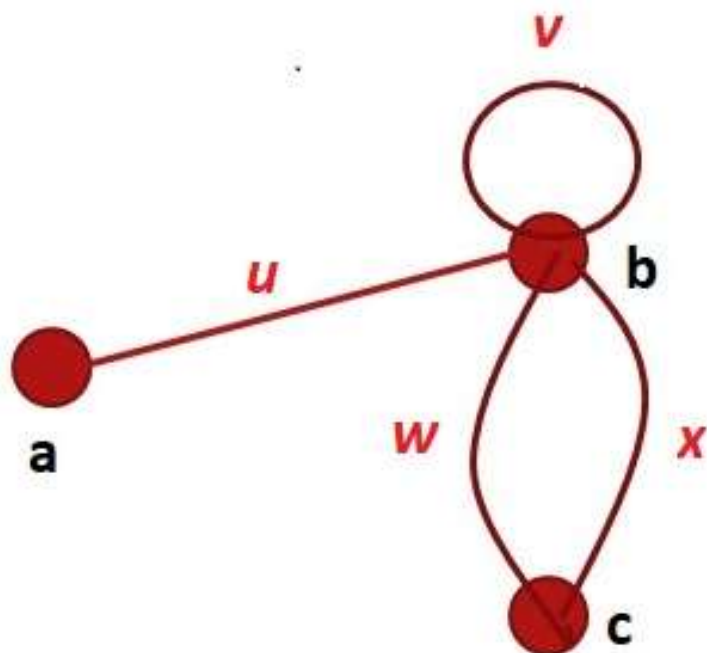
La longitud de un camino es la cantidad de aristas que se recorren en dicho camino.



$$C = \{ a, u, b, x, c, w, b, u, a \}$$

$$L(C) = 4$$

Longitud de un camino



$A =$

	a	b	c
a	0	1	0
b	1	1	2
c	0	2	0

Caminos de longitud 2:

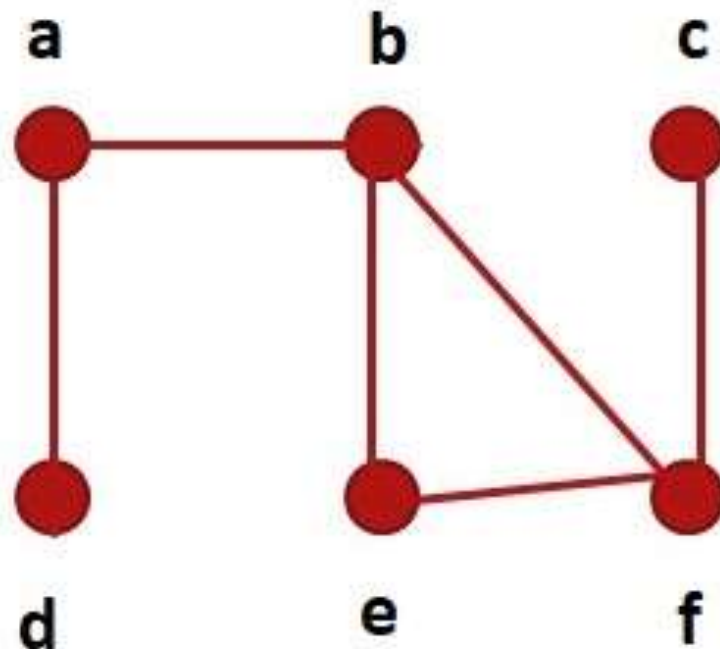
$A^*A =$

	a	b	c
a	1	1	2
b	1	6	2
c	2	2	4

Árbol expandido

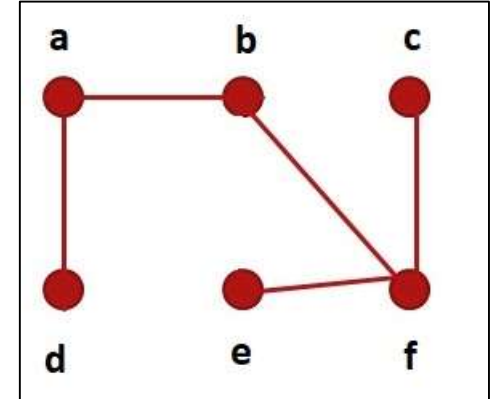
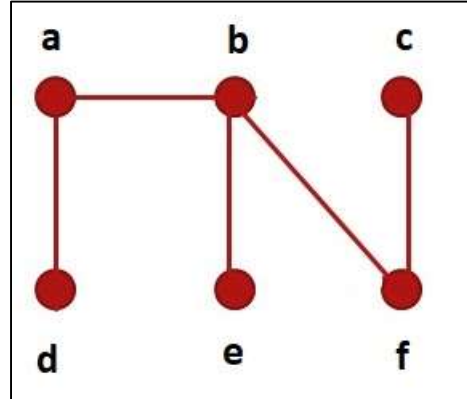
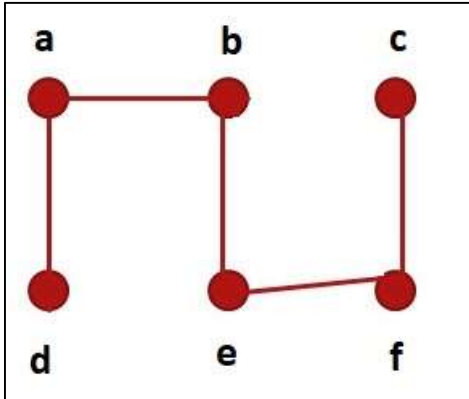
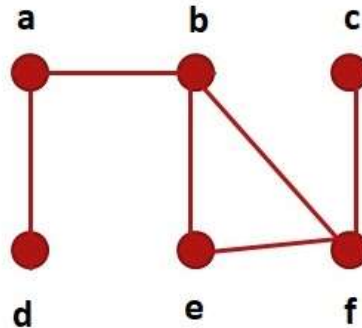
► Un árbol A es un árbol expandido de un grafo G , si tiene los mismos vértices y no tiene circuitos.

► Todo grafo tiene por lo menos un árbol expandido.



Árbol expandido

Grafo



Árboles expandidos

Grafos con peso



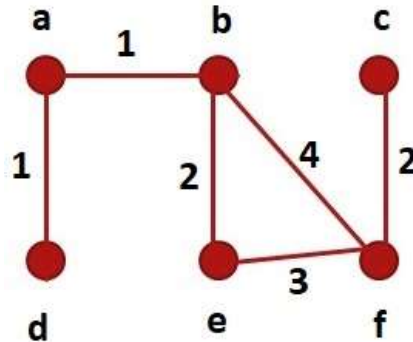
Un grafo pesado o grafo con peso es un grafo en el que cada arista tiene asociado un peso, de no tener, se asume el valor 1 por defecto.

El peso puede representar:

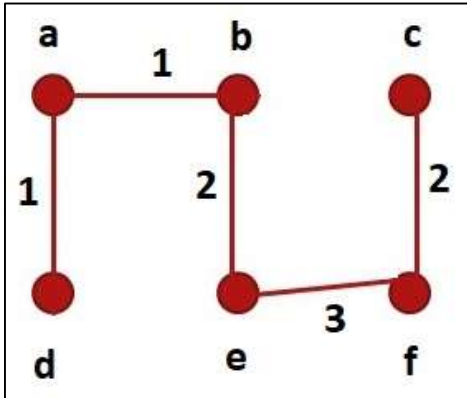
- La distancia de una ciudad a otra.
- El precio de un vuelo.
- El tiempo que tarda un vuelo.
- El caudal máximo que puede soportar una tubería.

Árbol de expansión mínimo

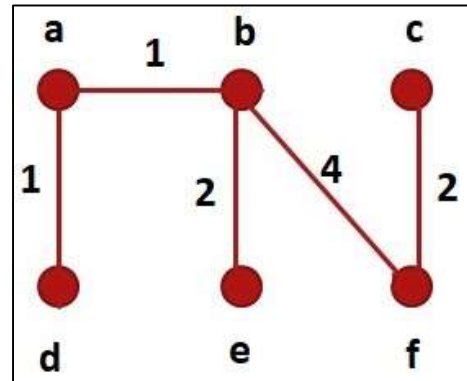
Grafo



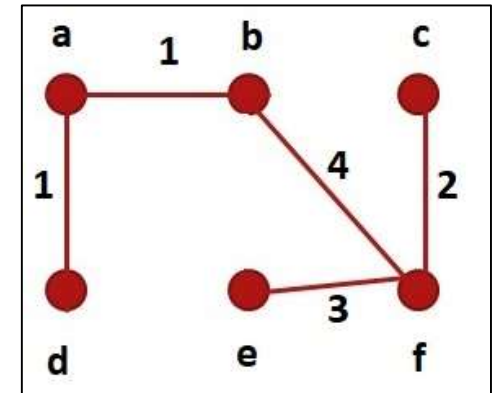
Costo: 13



Costo: 9



Costo: 10

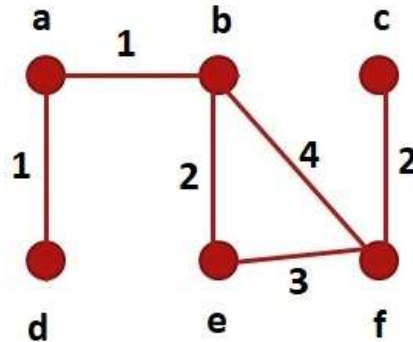


Costo: 11

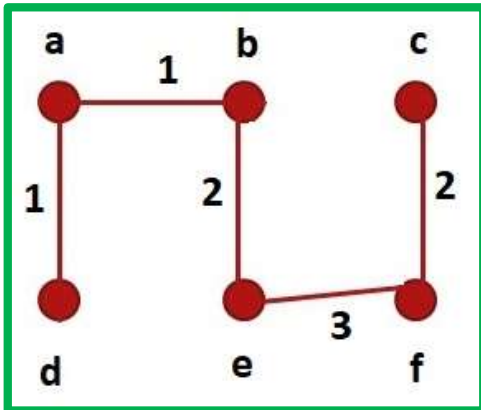
Árboles expandidos

Árbol de expansión mínimo

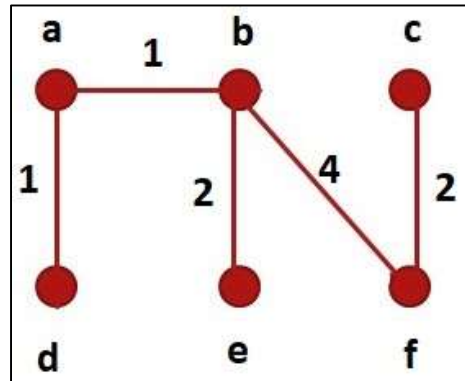
Grafo



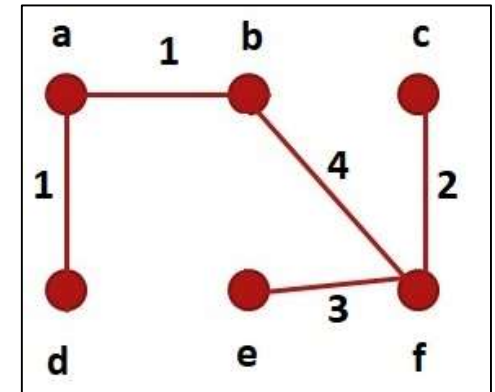
Costo: 13



Costo: 9

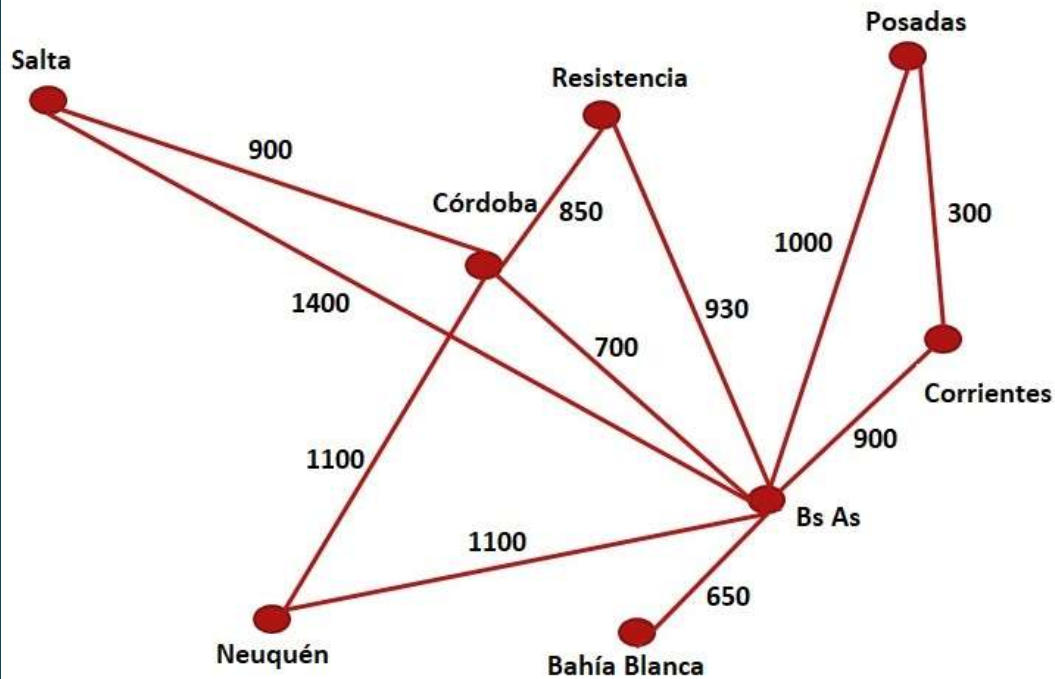


Costo: 10



Costo: 11

Árboles expandidos



Árbol de
expansión
mínimo

Kruskal

- ▶ Se colocan todos los vértices y se van añadiendo las aristas de menor peso descartando las que forman ciclos.
- ▶ Finaliza cuando queda un grafo conexo.

Kruskal



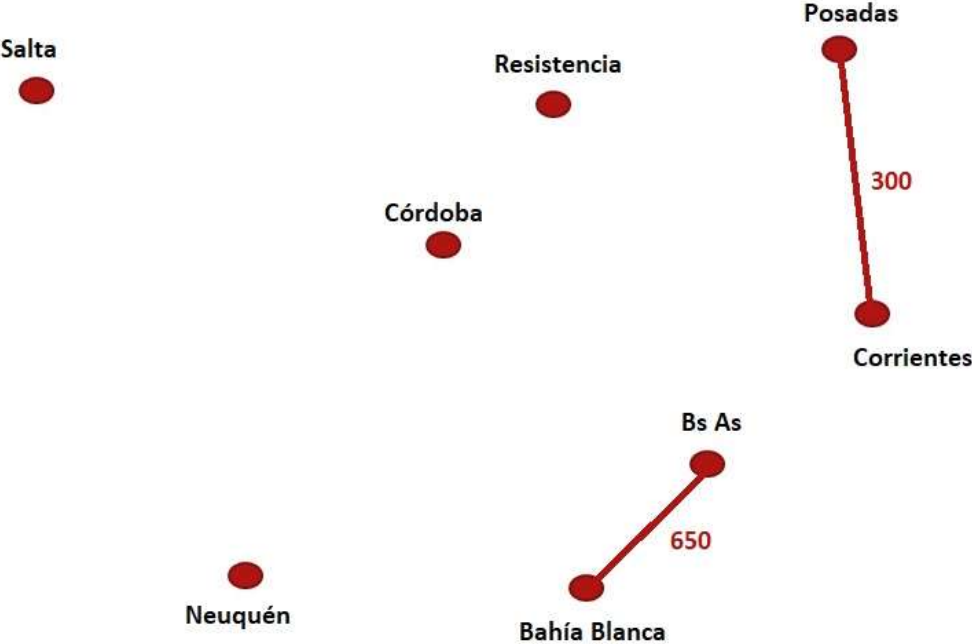
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



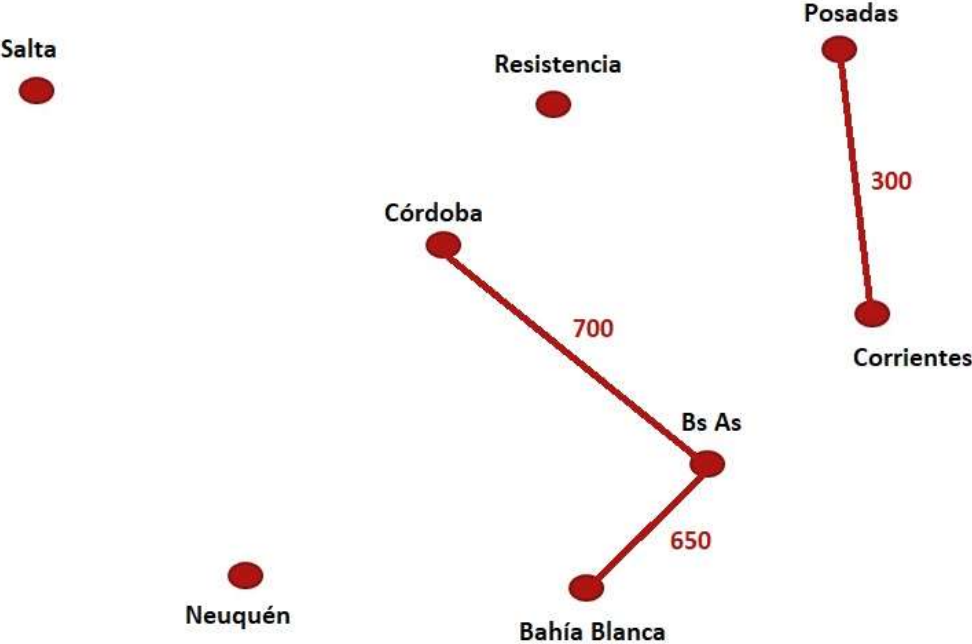
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



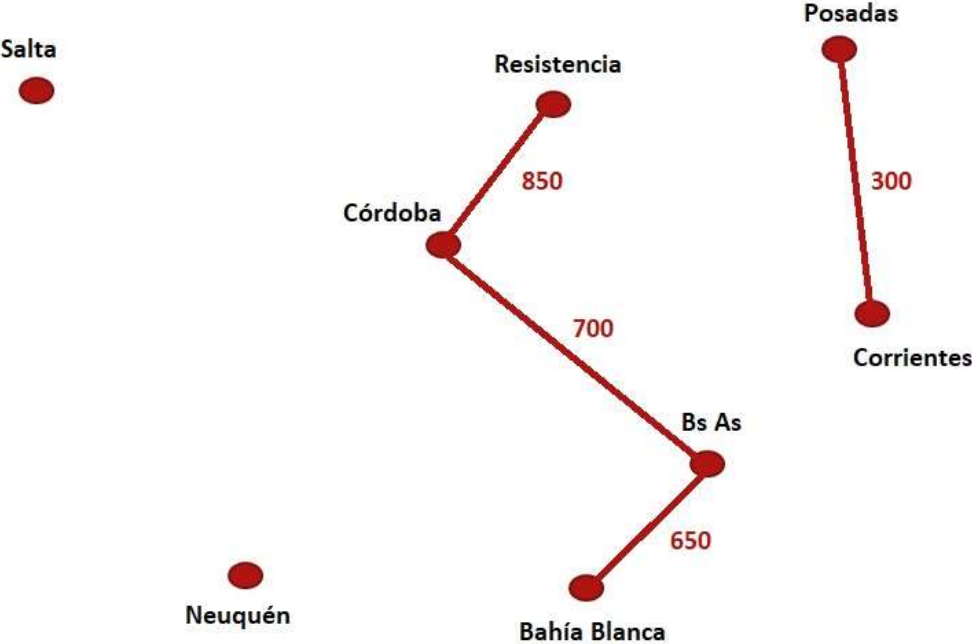
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



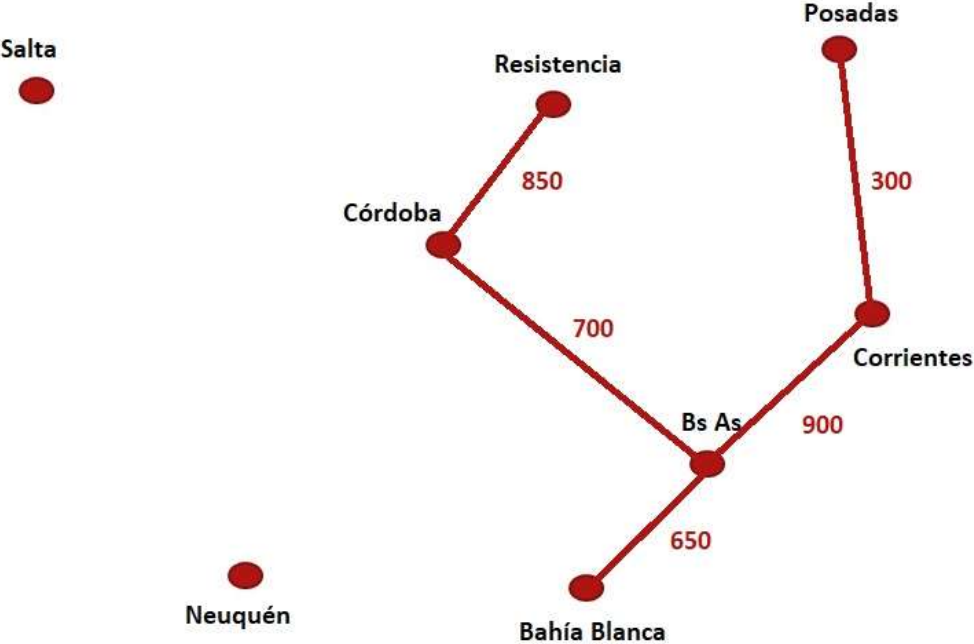
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



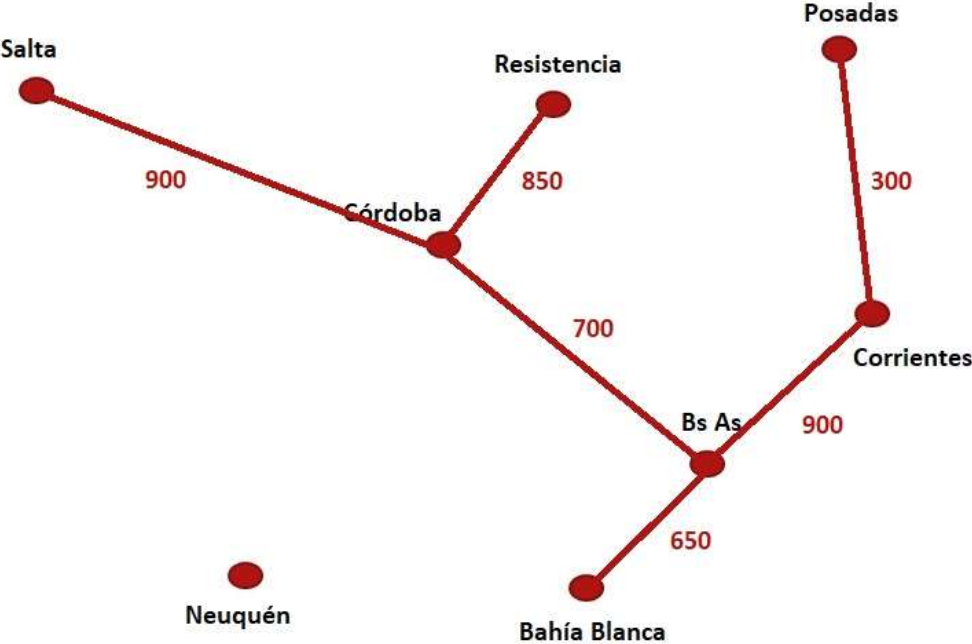
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



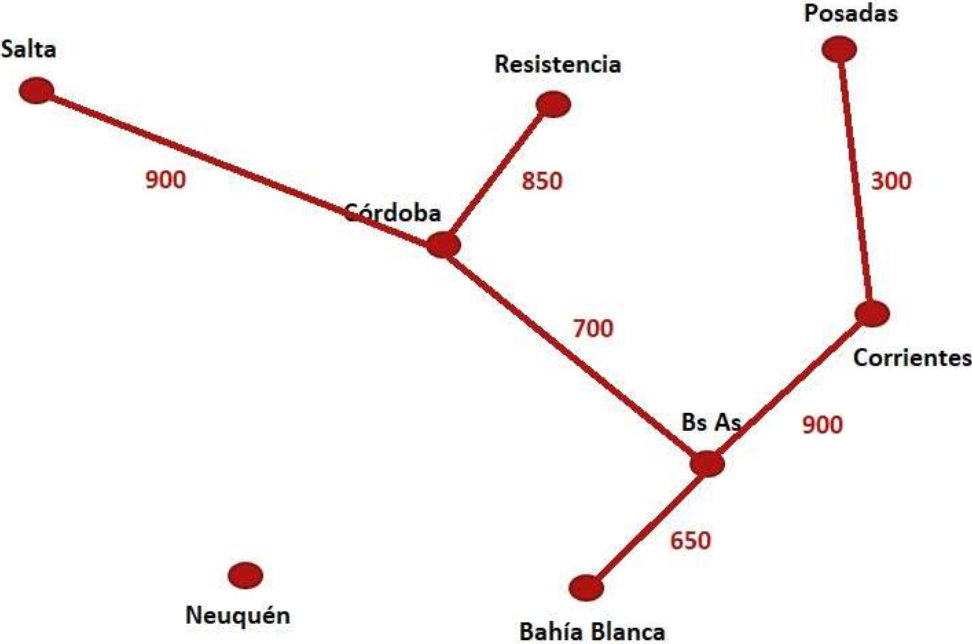
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



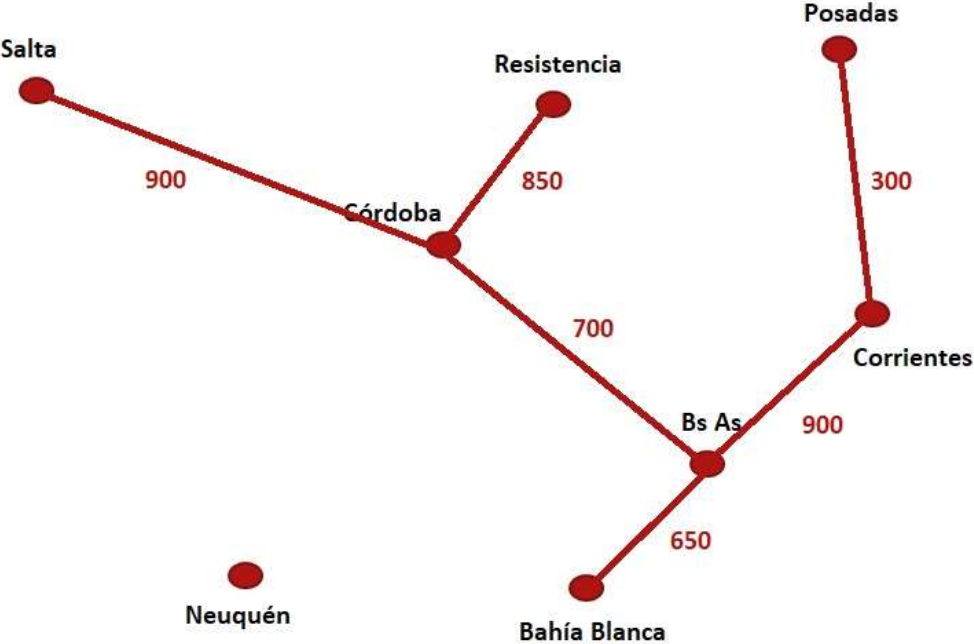
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



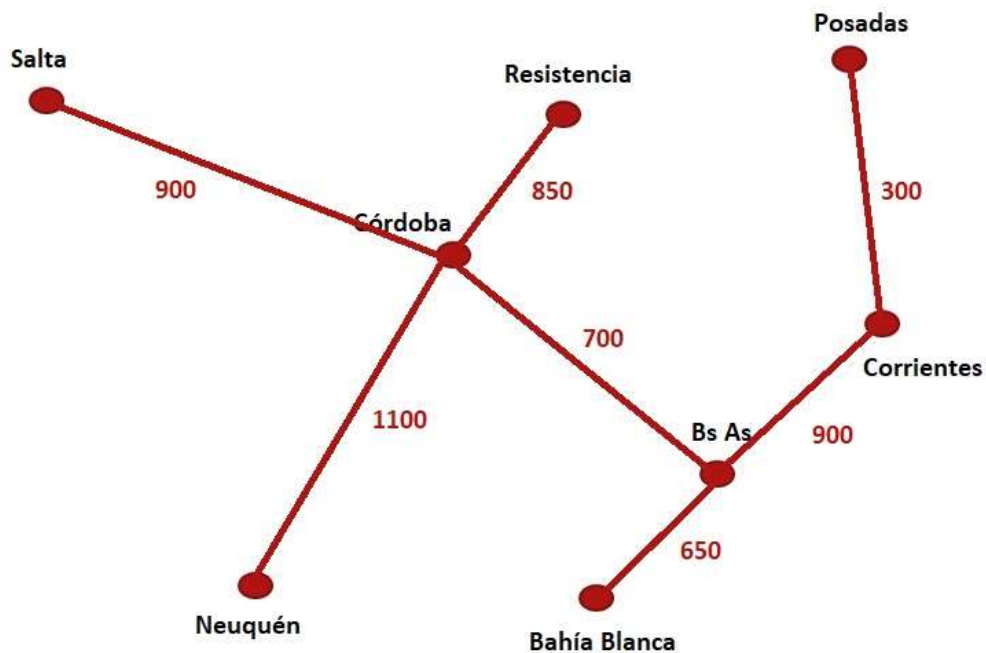
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Kruskal



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Prim



Bs As



Comienza por un vértice.

Prim



Bs As



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Bs As	Corrientes	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Se arma una lista de aristas que inciden en dicho vértice, ordenadas por peso. Luego se añade la arista de menor peso de la lista junto con el vértice adyacente.

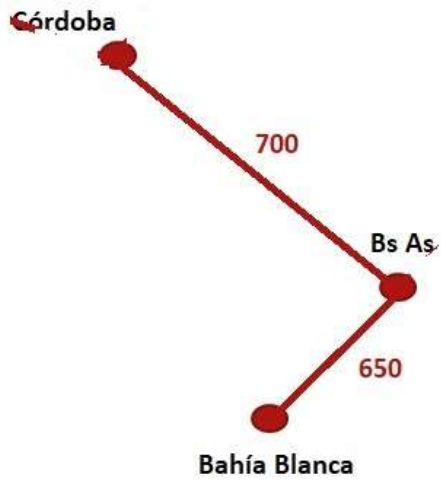
Prim



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Bs As	Corrientes	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

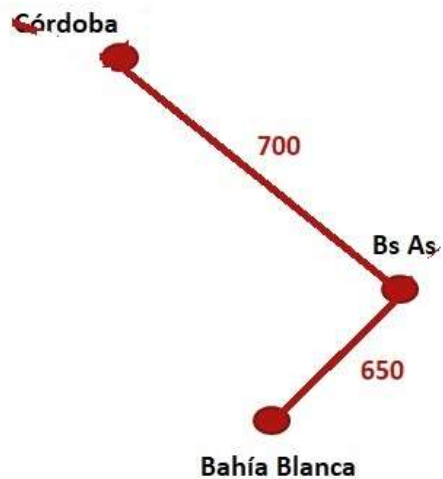
Bahía Blanca no agrega ninguna arista nueva a la lista.
Sigue la de menor peso.

Prim



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Bs As	Corrientes	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

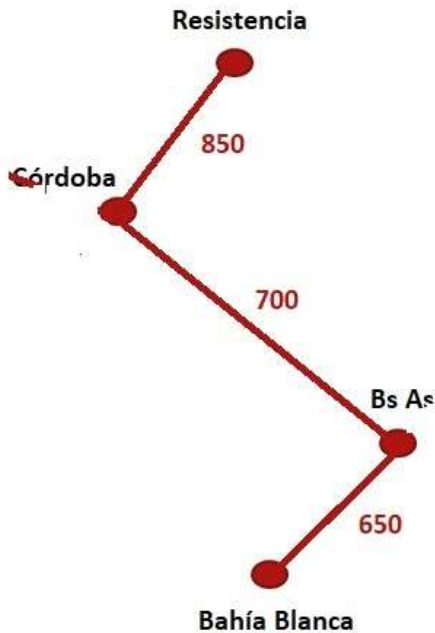
Prim



Córdoba agrega tres aristas a la lista de aristas. Se agregan manteniendo el orden según distancia.

Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Córdoba	Salta	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

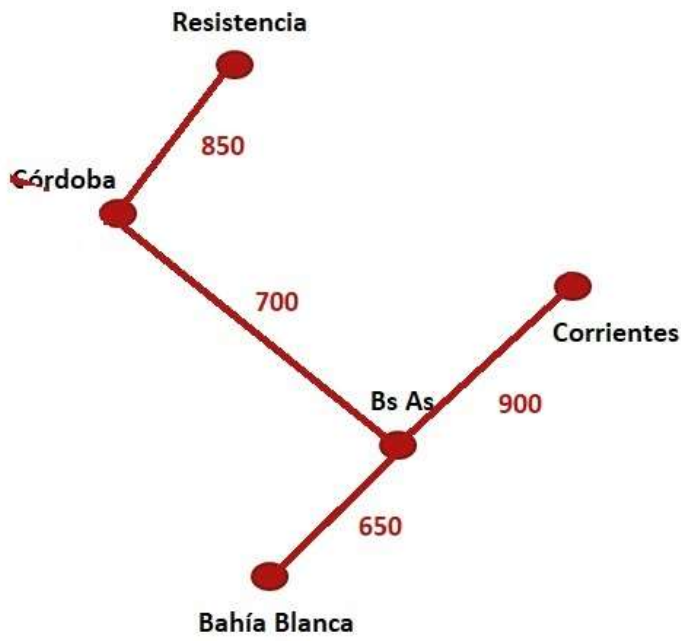
Prim



Resistencia no agrega ninguna arista nueva

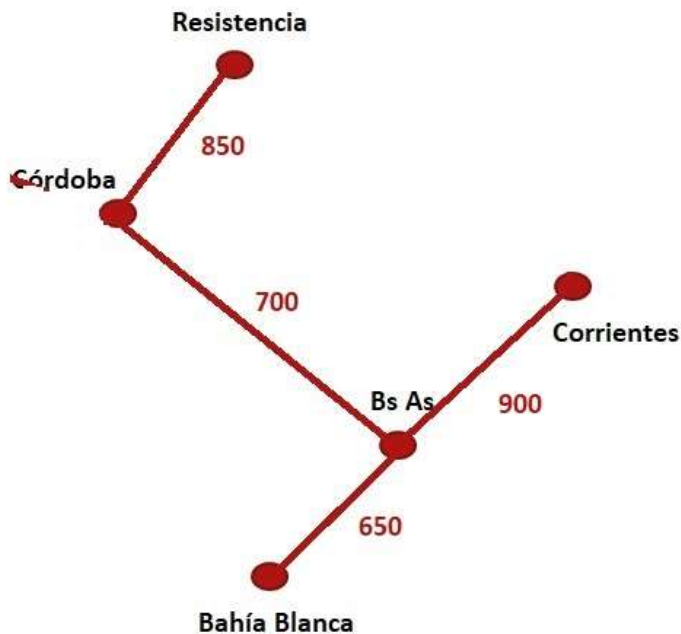
Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Córdoba	Salta	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Prim



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

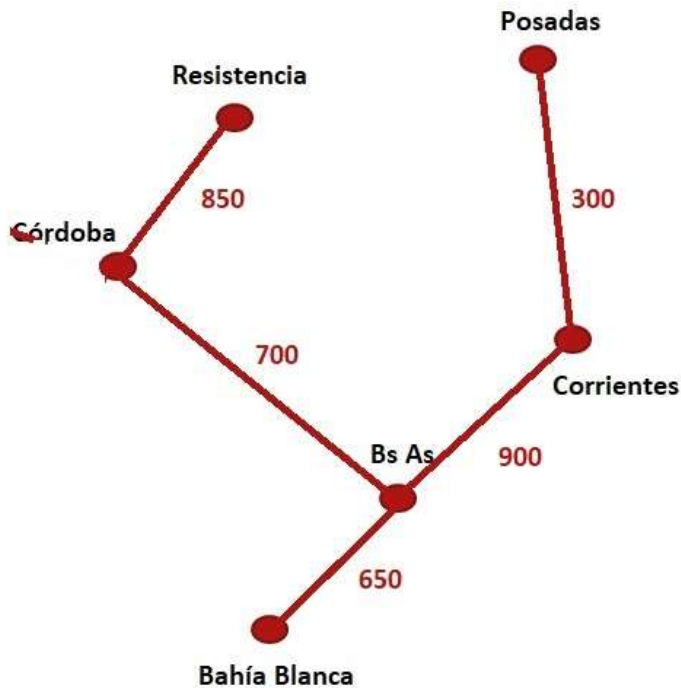
Prim



Corrientes agrega Posadas a la lista. Es el nuevo mínimo.

Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

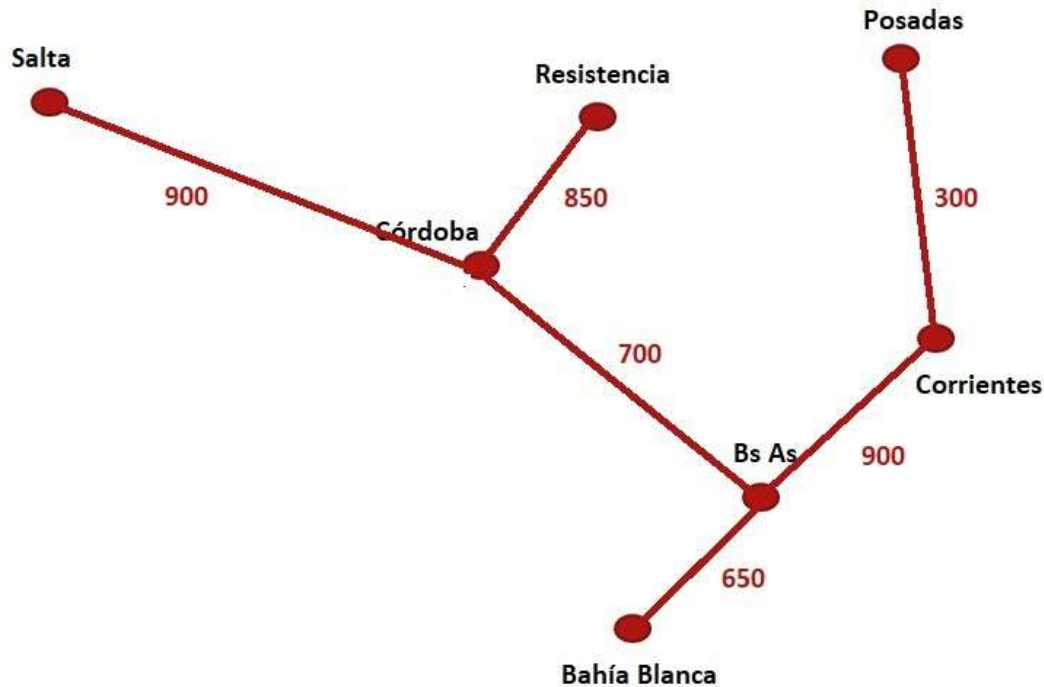
Prim



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Posadas no agrega ninguna arista nueva.

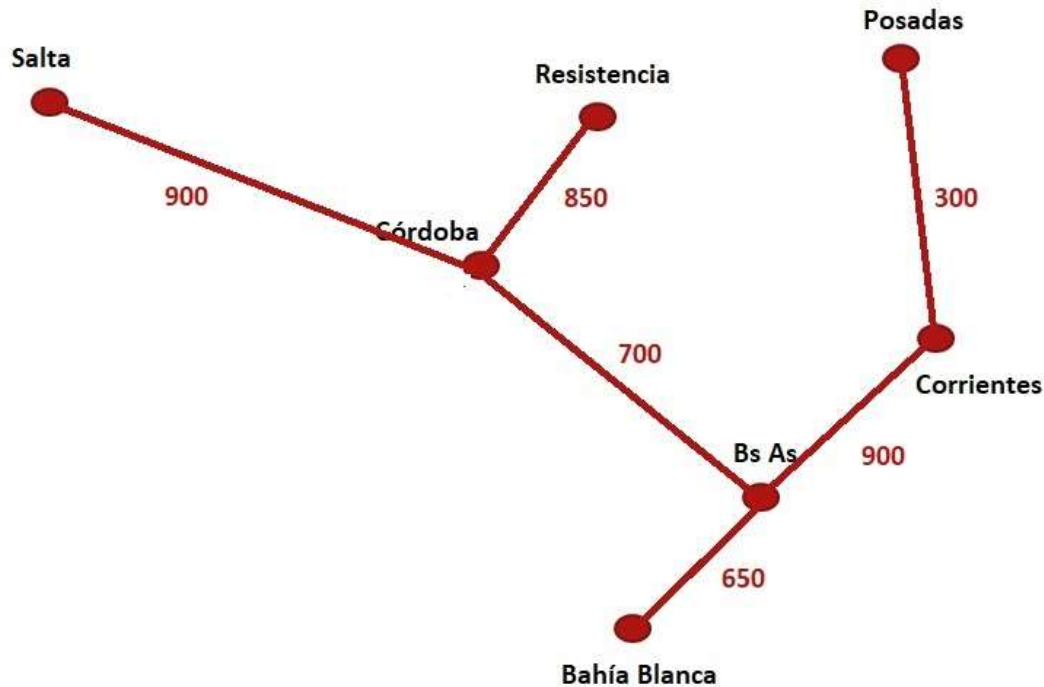
Prim



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Salta no agrega ninguna arista nueva.

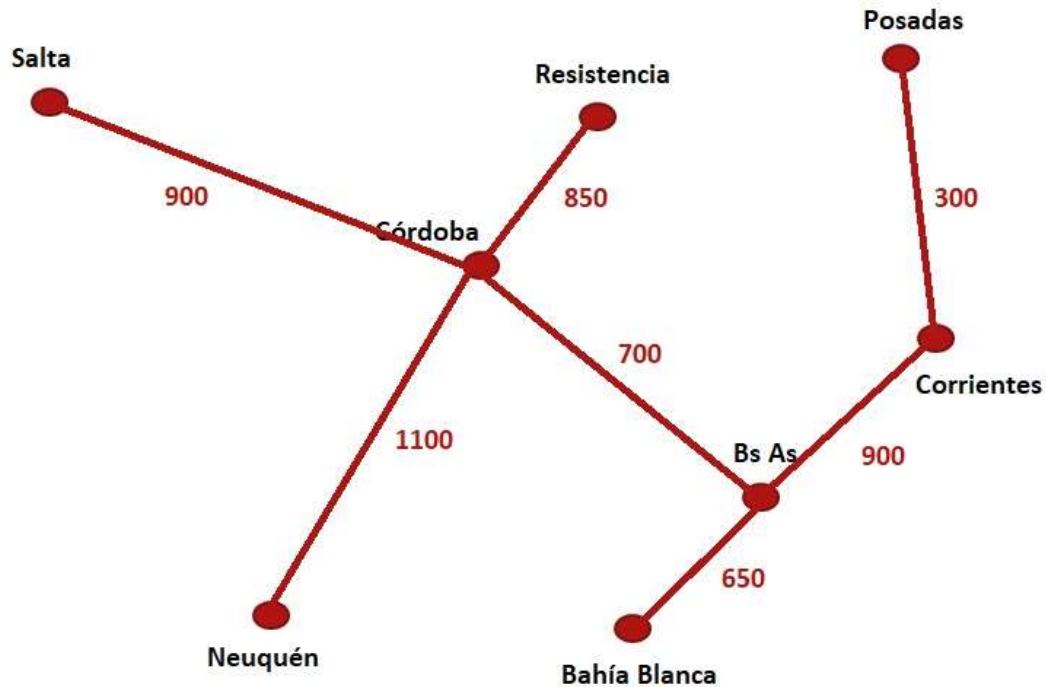
Prim



No se agregan Resistencia – Bs As ni Bs As – Posadas ya que generarían ciclos.

Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

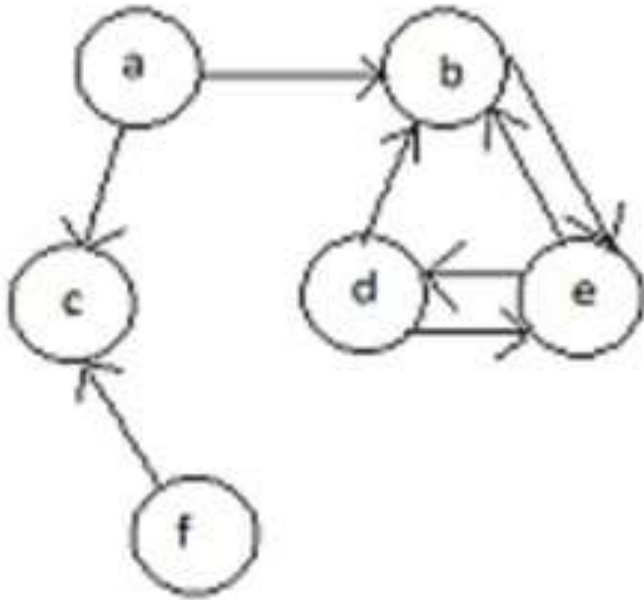
Prim



Ciudad 1	Ciudad 2	Distancia
Corrientes	Posadas	300
Bahía B.	Bs As	650
Córdoba	Bs As	700
Córdoba	Resistencia	850
Bs As	Corrientes	900
Salta	Córdoba	900
Resistencia	Bs As	930
Bs As	Posadas	1000
Córdoba	Neuquén	1100
Neuquén	Bs As	1100
Salta	Bs As	1400

Están todos los vértices del grafo,
el algoritmo termina.

Ejercicios



Dado el grafo de la figura,
indicar cómo es la salida con
1. Un recorrido en profundidad.
2. Un recorrido en anchura.

Indicar cómo implementaría
cada uno.

Ejercicios

Dado el grafo de la figura, indicar cómo queda el árbol de expansión mínimo según:

1. Kruskal
2. Prim

Indicar en cada uno, paso a paso cómo va quedando el grafo.

