Lógica Matemática

Lógica Matemática

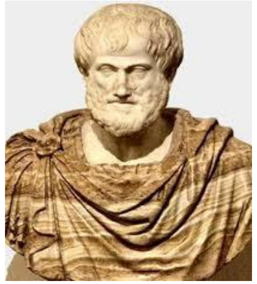
Fig. 1.1: Aristóteles

- **Historia**
  - Aristóteles III A.C.
    Establece los principios de la Lógica Clásica
  - Leibniz XVII/XVIII D.C.
    Propone que se utilicen símbolos y el sistema binario
  - Boole / DeMorgan / Frege / Peano / Peirce / Cantor … XIX D.C.
    George Boole inicia formalmente la Lógica Simbólica, utilizando símbolos para hablar de lógica, al estilo matemático en 1854.
  - Russell / Whitehead / Hilbert / Gödel / Sadeh XX D.C.
    Bertrand Russel y Albert N. Whitehead a principios del siglo XX presentan *Principia Mathematica* tratado completo de lógica que además, elimina ciertas paradojas que se habían presentado en lógica. David Hilbert presenta un programa mundial para deducir toda la matemática desde la lógica simbólica. Kurt Gödel da por tierra con esta idea, con su Teorema de Incompletitud.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

La *lógica matemática o lógica simbólica*, informalmente puede definirse como *la disciplina que estudia los métodos de razonamiento*.

- **Objetivos de nuestro estudio**
  - **Eliminar ambigüedad del lenguaje natural**
    Para lo cual se establecerá un vocabulario lógico preciso, definiendo proposiciones simples, sus operaciones y las propiedades que éstas verifican.
  - **Determinar reglas que determinen la validez de razonamientos**
    Estableciendo los conceptos de consecuencia y equivalencia lógica, razonamiento deductivo y las reglas de inferencia que permiten obtener nuevas verdades *deducidas necesariamente* de otras verdades conocidas.

Lógica Matemática

- **Proposición Lógica**
  - **Definición**: Una ***proposición lógica*** es una oración declarativa de la cual puede conocerse que es o bien verdadera o bien falsa.

    En castellano, son sencillamente afirmaciones de las cuales un experto en el tema al cual se refieren, puede decir si son verdaderas o falsas.
  - **Notación**: Denotaremos las proposiciones con las letras **p**, **q**, **r**, … o con las letras con subíndices $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, …, $\mathbf{p_n}$. Así, escribiremos:

    p: Un computador es un dispositivo electrónico

    para especificar que **p** representa la oración declarativa indicada. Si se utilizan letras para referirse a cualquier proposición y no a una específica, diremos que esas letras son ***variables proposicionales***.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Proposición Lógica** (continuación)
  - **Lógica bivalente**: La definición de proposición lógica al afirmar que sólo pueden ser VERDADERAS O FALSAS, integra en ella implícitamente los ***Principios Fundamentales*** de la lógica clásica, a saber:

    Principio de Identidad: Toda proposición es idéntica a sí misma y sólo a sí misma.

    Principio de No Contradicción: Dadas dos proposiciones contradictorias entre sí, **no pueden ser ambas verdaderas**.

    Principio del Tercero Excluido: Dadas dos proposiciones contradictorias entre sí, **no pueden ser ambas falsas**.

    Estos principios son verdades autoevidentes en lógica (***axiomas o postulados***) que no pueden ser demostrados, sino que se los supone verdaderos y desde ellos se construye toda la lógica clásica.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Proposición Lógica** (continuación)
  - **Proposiciones simples y compuestas**:

    Las afirmaciones simples de las que podemos sabemos si son verdaderas o falsas, las llamamos ***proposiciones simples***.

    Pero en castellano componemos con afirmaciones simples algunas más complicadas de muchas formas; por ejemplo:

    - **El número 2 es par pero el 7 es impar**.
    - **Si hoy es lunes entonces mañana será martes**.
    - **Hoy es lunes sí y sólo si el número 9 es primo**.

    Las proposiciones simples pueden combinarse utilizando vocablos de nuestro lenguaje (***conectivos lingüísticos***), para armar oraciones más complicadas llamadas ***proposiciones compuestas***, que también son verdaderas o falsas, aunque ahora hace falta establecer cómo se determina su valor de verdad.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Proposición Lógica** (continuación)
  - **Tablas de Verdad**: Los valores de verdad de una proposición pueden disponerse como una tabla, como la de la derecha.
    Si la proposición es simple, tendrá dos (**2**) filas posibles, pero si es una proposición compuesta por **n** proposiciones simples combinadas con conectivos lingüísticos, entonces necesitaremos $\mathbf{2^n}$ filas para poder analizar **TODAS** las posibilidades.

p
V
F

  - **Notación**: Denotaremos las **proposiciones compuestas** con letras en mayúsculas **P**, **Q**, **R**, … o con letras con subíndices P_1, P_2, …, P_n.
    Si se quiere enfatizar que una proposición compuesta **P** está armada con las proposiciones simples **p**, **q**, **r** escribiremos **P(p, q, r)**.
    Los conectivos lingüísticos utilizados para generar proposiciones compuestas, serán llamados en este contexto **conectivos lógicos** y **operadores lógicos**.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos**
  - Cada conectivo lingüístico tendrá su correspondiente símbolo para representarlo. Aplicados como operadores a proposiciones, generarán nuevas proposiciones de las cuales habrá que aclarar cómo se escriben (su sintaxis) y qué significan (su semántica), esto es, cómo determinar en todos los casos posibles su valor de verdad. Veremos:

Conectivo Lingüístico	Símbolo	Operación	Significado en Castellano
no	¯ , ~ , ¬	Negación	no p no es cierto que p
y	∧ , & , .	Conjunción	p y q p pero q
o	∨, | , +	Disyunción (Inclusiva)	o p, o q, o ambos p y/o q
	$\veebar$, ⊕	Disyunción Exclusiva	o p, o q, pero no ambos o bien p, o bien q
si ... entonces	→	Condicional Simple	si p entonces q p implica q; q sólo si p
sí y sólo si	↔ , sii	Condicional Doble	p si y sólo si q

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Negación** (~, –, ¬, no, not).

Definición: Dada una proposición lógica **p**, la ***NEGACIÓN DE p*** es una nueva proposición denotada $\overline{\mathbf{p}}$, **~p** o **¬p**, que leeremos ***no p***, la cual es verdadera si **p** es falsa y falsa si **p** es verdadera.

p	$\overline{\mathbf{p}}$
V	F
F	V

Se pueden negar proposiciones simples y compuestas.

Ejemplo: Siendo ***p:*** *La tierra es el tercer planeta del sistema solar*

~p: No es cierto que la tierra sea el tercer planeta del sistema solar.

~p: La tierra no es el tercer planeta del sistema solar.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Conjunción** ($\wedge$, &, . , y, and) o producto lógico.

Definición: Dadas dos proposiciones lógicas **p** y **q**, la ***CONJUNCIÓN DE p Y q*** es una nueva proposición denotada $\mathbf{p \wedge q}$, que leeremos ***p y q***, la cual es verdadera si tanto **p** como **q** son verdaderas y falsa en todos los otros casos.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Ejemplo en apunte.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Clasificación de proposiciones según sus valores de verdad**

Con solo negación y conjunción se pueden armar proposiciones com-puestas como en la tabla.

r	$P: \sim(r \wedge \sim r)$	$Q: r \wedge \sim r$
V	**V**	**F**
F	**V**	**F**

Definición:

Se denomina ***TAUTOLOGÍA***, y se la denota con $\mathbf{V_0}$, a una proposición compuesta que siempre es verdadera, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

Se denomina ***CONTRADICCIÓN***, y se la denota con $\mathbf{F_0}$, a una proposición compuesta que siempre es falsa, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

Se denomina ***CONTINGENCIA***, a una proposición compuesta que es verdadera o falsa, según sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Disyunción Inclusiva** (∨, |, +, o, or) o suma lógica.

Definición: Dadas dos proposiciones lógicas **p** y **q**, la ***DISYUNCIÓN INCLUSIVA DE p Y q***, o simplemente la ***DISYUNCIÓN DE p Y q***, es una nueva proposición denotada **p ∨ q**, que leeremos ***p o q***, la cual es falsa si tanto **p** como **q** son falsas y verdadera en todos los otros casos.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Ejemplo en apunte.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Disyunción Exclusiva** ($\veebar$, $\oplus$, o bien … o bien …, xor).

Definición: Dadas dos proposiciones lógicas **p** y **q**, la ***DISYUNCIÓN EXCLUSIVA DE p Y q***, es una nueva proposición denotada **p $\veebar$ q**, que leeremos **o bien *p o bien q***, la cual es verdadera si **p** y **q** tienen distinto valor de verdad y falsa si **p** y **q** tienen igual valor de verdad.

p	q	p $\veebar$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Ejemplo en apunte.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Condicional Simple o Implicación Simple** ($\rightarrow$, si p entonces q, q solo si p, p implica q)

Definición: Dadas dos proposiciones lógicas **p** y **q**, el ***CONDICIONAL SIMPLE DE p Y q*** es una nueva proposición lógica denotada **p → q**, que leeremos ***si p entonces q*** o ***p implica q***, la cual es falsa sólo en el caso que **p** sea verdadera y **q** sea falsa, y es verdadera en todos los otros casos.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Ejemplo en apunte.

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Condicional Simple o Implicación Simple** (continuación)

  Muchos teoremas de la matemática se presentan como un condicional simple ***SI p ENTONCES q***, por lo cual se le asignan un nombre especial a sus componentes y a formas similares:

Definición: Si **R:p→q** es una proposición compuesta, decimos que:

- **p** es el antecedente, hipótesis o condición suficiente para **R**.

- **q** es el consecuente, conclusión o condición necesaria para **R**.

- La proposición **q → p** es la proposición ***recíproca de R***.

- La proposición **~p → ~q** es la proposición ***contraria de R***.

- La proposición **~q→ ~p** es la proposición ***contrarecíproca de R***.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Condicional Doble o Implicación Doble** (↔, p si y sólo si q, p sii q)

Definición: Dadas dos proposiciones lógicas **p** y **q**, el ***CONDICIONAL DOBLE ENTRE p Y q*** (o ***DOBLE IMPLICACIÓN ENTRE p Y q***), es una nueva proposición lógica denotada **p ↔ q**, que leeremos ***p si y sólo si q*** (o también ***p implica doblemente a q***), que es verdadera si **p** y **q** tienen el mismo valor de verdad, y falsa si tienen distintos valores de verdad.

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Ejemplo en apunte.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Conectivos Lógicos** (continuación)
  - **Condicional Doble o Implicación Doble** (continuación)

    Muchos teoremas de la matemática también se presentan como un condicional doble ***p SI Y SOLO SI q***. En estos casos se dice que **p** es condición necesaria y suficiente para **q**, y viceversa.

    El bicondicional funciona como un condicional simple de ida y vuelta entre **p** y **q**:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Lógica Matemática

- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Relaciones entre Proposiciones**
  - **Implicación o Consecuencia Lógica**: $\Rightarrow$

Definición: Dadas dos proposiciones $\mathbf{P(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$ y $\mathbf{Q(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$ compuestas, se dice que ***P IMPLICA LÓGICAMENTE A Q*** (o que ***Q ES CONSECUENCIA LÓGICA DE P***), y se lo denota $\mathbf{P \Rightarrow Q}$, si para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, … y $\mathbf{r_n}$ que hagan a la proposición **P** verdadera, resulta **Q** ser también verdadera.

Si $\mathbf{P \Rightarrow Q}$, decimos que **P** y **Q** están relacionadas por la implicación lógica, o que la implicación lógica es **VÁLIDA.**

Si $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ es válida, cada vez que **P** es verdadera resulta **Q** también verdadera por lo cual, ***la implicación simple P → Q será tautología*** ($\mathbf{V_0}$).

Veremos que esta es la base para luego definir ***razonamientos***.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Relaciones entre Proposiciones** (continuación)
  - **Equivalencia Lógica**: ≡

Definición: Dadas dos proposiciones $\mathbf{P(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$ y $\mathbf{Q(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$ compuestas, se dice que ***P ES LÓGICAMENTE EQUIVALENTE A Q***, y se lo denota $\mathbf{P \equiv Q}$, si para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, … y $\mathbf{r_n}$ que las componen, **P** y **Q** tienen el mismo valor de verdad.

En otras palabras, **P** y **Q** pueden escribirse distinto, pero significan lo mismo. Si $\mathbf{P \equiv Q}$, decimos que **P** y **Q** están relacionadas por la equivalencia lógica, o que la equivalencia lógica es **VÁLIDA**.

Si $\mathbf{P \equiv Q}$ es válida, **P** y **Q** tienen los mismos valores de verdad, por lo cual, ***la implicación doble P ↔ Q será tautología*** ($\mathbf{V_0}$).

Veremos que esta es la base para luego definir ***las leyes lógicas***.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Leyes Lógicas**: Equivalencias útiles y de uso común en demostraciones.
  - **Involución** $\neg\neg p \equiv p$
  - **Idempotencia** $p \vee p \equiv p$ $\quad p \wedge p \equiv p$
  - **Conmutativa** $p \vee q \equiv q \vee p$ $\quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
  - **Asociativa** $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $\quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
  - **Distributiva** $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ $\quad (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
  - **De Morgan** $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ $\quad \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$
  - **Neutros** $p \vee F_0 \equiv p$ $\quad p \wedge V_0 \equiv p$
  - **Complemento** $p \vee \overline{p} \equiv V_0$ $\quad p \wedge \overline{p} \equiv F_0$
  - **Dominación** $p \vee V_0 \equiv V_0$ $\quad p \wedge V_0 \equiv V_0$
  - **Absorción** $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $\quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$
  - **Principio de dualidad**: Si **T** es un teorema del álgebra proposicional que involucra **$\wedge$, $\vee$, V_0, F_0**, entonces el dual **T^d** obtenido al cambiar en **T $\wedge$ por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$, V_0 por F_0 y F_0 por V_0**, es también un teorema.

Lógica Matemática
- Historia
- Objetivos
- Proposición lógica
- Conectivos lógicos
- Relaciones entre proposiciones
- Leyes lógicas
- Demostración de equivalencias

Lógica Matemática

- **Demostración de equivalencias de proposiciones compuestas;**
  - a) **Construir tablas de verdad de ambas y ver si son iguales**, o
  - b) **Utilizar leyes para transformar una proposición en otra**:
    1. Transformar primero $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ usando:
       - $\mathbf{p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q}$
       - $\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$
    2. Aplicar negaciones a una sola proposición simple utilizando las leyes de De Morgan e Involución.
    3. Reducir usando las otras leyes (idempotencia, distributiva, etc.)

	$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	**Por De Morgan**
$\equiv$	$(p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$	**Por Involución**
$\equiv$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$	**Por Distributiva de $\vee$ respecto de $\wedge$**
$\equiv$	$p \vee (q \wedge \neg q)$	**Por Complementos**
$\equiv$	$p \vee F_0$	**Por Neutros**
$\equiv$	p	**Luego: $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv p$**