UniversidadTecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba
Ingeniería en Sistemas de Información
Cátedra de Matemática Discreta

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS

UNIDAD 1

Los temas de la presente Unidad corresponden a la Unidad Temática 1 de la asignatura Matemática Discreta, correspondiente al primer año de la carrera de Ing. en Sistemas de Información. Este apunte fue originalmente preparado por el ING. DANIEL ARCH y posteriormente actualizado por el ING. RAÚL MORCHIO Y por el ING. JUAN C. VÁZQUEZ.

Unidad 1
Introducción a la Teoría de Números

1.1. **Introducción.**
1.2. **Algoritmo de la División Entera o Teorema del Resto.**
1.2.1. **Operaciones DIV y MOD**
1.2.2. **Divisibilidad**
1.3. **Números Primos**
1.4. **Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo**
1.5. **Algoritmo de Euclides**
1.6. **Primos Relativos**
1.7. **Teorema Fundamental de la Aritmética**

1.1. Introducción

La parte de la matemática que estudia las propiedades de los números enteros y sus operaciones es lo que conocemos como Teoría de Números.

En primer término, consideremos los números naturales como el conjunto:

N= {0, 1, 2, 3, 4, ...} 0 1 2 3 4 … +

Debemos destacar que hemos incorporado al cero (0) como elemento de este conjunto. Hay autores que no lo consideran parte del conjunto de números naturales. Los puntos suspensivos del final indican que este es un conjunto infinito y deben leerse "y así sucesivamente".

De forma similar nombraremos al conjunto de los números enteros como:

Z= {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} – … -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 … +

Podemos ver que esta formado por el conjunto previamente considerado de números naturales al cual se le han agregado los números enteros negativos.

En esta unidad repasaremos algunos conceptos básicos de la teoría de números como **divisibilidad**, **máximo común divisor**, **mínimo común múltiplo** y la noción de **primalidad** (números primos), entre otros.

1.2. Algoritmo de la División Entera o Teorema del Resto.

Al trabajar con números reales, cuando dividimos un número entero por otro entero no nulo (esto es distinto de cero), el resultado o cociente puede no ser un entero. Por ejemplo: 36/6 = 6 es entero mientras que 25/4 = 6.25 no lo es, es un número racional. Para trabajar sólo en el dominio de los números enteros se establece:

<u>**Algoritmo de la división entera o Euclídea**</u> o <u>**Teorema del Resto**</u> (sin demostración):

> *Dados dos números enteros **a** y **b** con **b≠ 0**, siempre existen dos enteros <u>**únicos**</u> **q (cociente)** y **r (resto)**, tales que* $\mathbf{0 \leq r < |b|}$ *y se cumple que* $\mathbf{a = (b \times q) + r}$.

De este resultado se desprende que:

a) $(\mathbf{b} \times \mathbf{q}) \leq \mathbf{a}$ siempre !!!

b) El <u>resto **r**</u> es siempre positivo o nulo y menor que $|\mathbf{b}|$ o sea $0 \leq \mathbf{r} < |\mathbf{b}|$

<u>Ejemplo 1</u>: Sean los números naturales a = 25, b= 4.

Dividiendo 25 en 4 resulta q=6 y r=1 con 0 < **r** < |25|. Verificación: 25 = (***b*** x ***q***) + r = (4x6) + 1 = 24 + 1.

Ejemplo 2: Sean los números naturales a = 36, b= 6.

Dividiendo 36 en 6 resulta q=6 y r=0. Verificación: 36 = (***b*** x ***q***) + r = (6×6) + 0 = 36 + 0.

Ejemplo 3: Sean los números naturales a = 22, b = 3.

Dividiendo 22 en 3 resulta q=7 y r=1. Verificación: 22 = (***b*** x ***q***) + r = (3×7) + 1 = 21 + 1.

1.2.1. Operaciones *DIV* y *MOD*

En muchos lenguajes de programación se definen operaciones específicas para el cálculo del cociente y resto de la división entera. En Pascal se utilizan: ***DIV*** y ***MOD***; en C y Java se utilizan: / y %; en Python // y %.

Dados dos números enteros **a** y **b**, la operación ***DIV*** proporciona el **cociente** entre ellos y la operación ***MOD*** proporciona el **resto** obtenido al dividir **a** y **b.** En símbolos:

a *DIV* b = q **a *MOD* b = r**

Ejemplo 4: Sean los números naturales a = 11 y b = 3

11 **div** 3 = 3 y 11 **mod** 3 = 2

Ejemplo 5 Sean los números naturales a = 23 y b = 10

23 **div** 10 = 2 y 23 **mod** 10 = 3

El hecho de que no exista siempre el inverso para el producto (esto es, que no siempre se pueda efectuar la división exacta o sin resto) conduce a una noción importante que es la de ***divisibilidad***.

1.2.2. Divisibilidad

*Sean **a y b** dos números enteros; se dice que **a divide a b** y se denota con* **a | b** *si existe un numero entero **c** tal que **b = a** x **c**.*

*También decimos que **a** es divisor de **b**, que **b** es múltiplo de **a** o que **a** es un factor de **b**.*

Es decir que se trata de una división exacta, donde el resto es 0. No se debe confundir el símbolo de división usual "/" con el de divisibilidad en los enteros "**|".**

Ejemplo 6: Sean los números naturales a = 25 y b = 75.

25 **|** 75 porque 25 x 3 = 75

O sea, hemos podido encontrar el numero **c** (en este caso **c=3**) que cumple la definición previa.

Algunas Propiedades:

Sean **a**, **b**, **c** y **d** números enteros cualesquiera, donde cada vez que a alguno de ellos se lo toma como *divisor*, se supone que no puede ser nulo. Entonces se pueden demostrar los siguientes teoremas:

⊗ **Teorema 1**: **1 | *a*** y ***a* | 0** y ***a* | a**

⊗ **Teorema 2**: Si ***a* | *b*** y ***b* | *c*** entonces ***a* | *c***

⊗ **Teorema 3**: *Todo entero que es divisor de otros es divisor de la suma de ellos*.

Si **d | a** y **d | b** y **d | c** entonces **d | (a+b+c)**

Ejemplo 7: Sea los números enteros 35, 42, 56 son todos múltiplos de 7, o sea que 7 es factor de todos ellos, por lo que 7|35 y 7|42 y 7|56. Luego:

7 | 35+42 = 7 **|** 77 y 7 **|** 35+42+56 = 7 **|** 133

⊗ **Teorema 4**: *Todo entero que es divisor de otro es también divisor de los múltiplos de ese otro*.

Si **d | a** entonces **d | n×a** para **n** $\in$ **Z**

Ejemplo 8: Sean a = 12 y d = 4 es decir d | a

En el caso de un número natural **b =36**, que es múltiplo de **a** ya que **b = 3 x a = 3 x 12**,

entonces 4 | 12 y 4 | 36 o sea d|n×**a** = 4| 3 x 12 con n=3

⊗ **Teorema 5** ***Todo entero que es divisor de otros dos es también divisor de su diferencia***.

Si **d | a** y **d | B** entonces **d| (A – B)**

Ejemplo 9: 4|12 porque 4 x 3 = 12 y 4 |36 porque 4 x 9 = 36,

entonces 4 |36-12 = 4 |24 (4 x 6 = 24)

⊗ **Teorema 6**: ***Todo entero que es divisor de otros dos es también divisor del resto de la división de estos.***

Ejemplo 10: 6 | 12 y 6 | 36, 36 mod 12 = 0 luego 6 | 0

Ejemplo 11:

a) 5 | 55 y 5 | 35, 55 mod 35 = 20 luego 5 |20

b) 7 | 35 y 7 | 42, 42 mod 35 = 7 luego 7 | 7

1.3. Números Primos

Definición: *Un número entero* ***p > 1*** *se dice que es* ***primo absoluto*** *o sencillamente* ***primo*** *si sus* ***únicos*** *divisores positivos son* ***p y 1***.

Por definición, el número **1** no es un ***número primo.***

Número Compuesto: Todo número entero mayor que 1 que no es primo, se denomina ***número compuesto***.

Los números primos son los ladrillos o los átomos con los que se construye todo entero positivo, como lo establece el Teorema Fundamental de la Aritmética que veremos enseguida.

1.4. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.

Divisor común: Sean ***a*** y ***b*** **números enteros**. Se dice que un entero positivo ***d*** es un divisor común de ***a*** y ***b,*** siempre y cuando **divida a ambos; en símbolos: d | a** y **d | b.**

Definición: Dados dos números enteros ***a*** *y* ***b*** donde ***a*** ≠ 0 *o* ***b*** ≠ 0, el ***máximo común divisor*** *de* ***a*** *y* ***b,*** *es al mayor de los divisores comunes de* ***a*** *y* ***b***, y se lo denota ***mcd(a, b).***

El ***mcd(a, b)*** **es siempre un número entero** y **siempre existe**, ya que al menos la unidad (1) dividirá siempre tanto a **a** como a **b**, según el Teorema 1.

Pero … ¿Cómo se calcula este numero? Para determinar el **mcd(a, b)**, se deben encontrar los divisores de cada numero para lo cual se debe dividir ***a*** por ***a***, ***a-1***, ***a-2***, ***a-3***,..., ***1*** y ***b*** por ***b***, ***b-1***, ***b-2***, ***b-3***,..., ***1*** y anotar todos aquellos que den resto cero. O sea, anotar todos los factores de ***a*** y de ***b***. Luego se debe encontrar el mayor de ellos que sea común en ambas listas; este método se conoce como **método exhaustivo de cálculo del mcd** o **de la fuerza bruta**.

Ejemplo 12: *Calcular el máximo común divisor de 24 y 36.*

Dividimos 24 por 24, 23, 22, 21...1 y anotamos los divisores que dan resto 0. Estos son 24, **12**, 8, 6, 4, 3, 2, 1. Se hace lo mismo con 36; los divisores que dan resto 0 son: 36, 18, **12**, 9, 6, 3, 2, 1. Como el mayor divisor común es 12, resulta: **mcd(24, 36) = 12**.

En general conviene buscar los factores del número menor y luego verificar si son factores del número mayor; comenzando del mayor factor. No interesa buscar los factores mayores que el número menor, por que no son factores de este número y por lo tanto no son comunes a ambos números.

En el ejemplo anterior se buscan los divisores que dan resto 0 del número menor que es 24. Los divisores de 24 son 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1. Se prueba si 24|36, como no se cumple se prueba 12| 36 y como 12 x 3 = 36 podemos aseverar que mcd(24, 36) = 12.

Múltiplo común: Sean ***a*** y ***b*** **números enteros**. Se dice que un entero positivo ***d*** es un múltiplo común de ***a*** y ***b*,** cuanto existen otros enteros **m** y **n** tales que **d = a × m** y **d = b × n**.

> **Definición**: *El **mínimo común múltiplo** de los enteros positivos **a** y **b**, es el menor entero positivo **d** que es múltiplo tanto de **a** como de **b**,* y se lo denota ***mcm(a, b).***

El ***mcm(a, b)*** **es siempre un número entero** y **siempre existe**, ya que al menos **d = a × b** siempre será tanto múltiplo de **a** como de **b**.

Pero … ¿Cómo se calcula este numero? Para determinar el **mcm(a, b)**, se deben encontrar los múltiplos de ambos números para lo cual se debe multiplicar ***a*** por **1**, **2**, **3**, … y ***b*** por **1**, **2**, **3**, …; al encontrar el primer número común en ambas listas, ese será el **mcm(a, b)**; este método se conoce como **método exhaustivo de cálculo del mcm** o **de la fuerza bruta**.

Ejemplo 13: *Calcular el mínimo común múltiplo de 24 y 36.*

Multiplicamos ambos números por 1, 2, 3, … hasta encontrar el primer múltiplo común: 24×1=24, 24×2=48, 24×3=**72** y 36×1=36, 36×2=**72**. Como el primer (menor) múltiplo común es 72, resulta: **mcm(24, 36) = 72**.

Los métodos exhaustivos pueden necesitar muchísimas operaciones si los números son grandes, aumentando el largo de los cálculos a medida que se aumentan los números en cuestión.

Un algoritmo mucho mas eficiente para el cálculo del máximo común divisor nos llega desde Euclides (matemático griego del siglo III A.C.), quien desarrolló una solución muy interesante para este problema y es el que explicaremos a continuación.

1.5. Algoritmo de Euclides

Recordemos que un algoritmo es una secuencia de pasos para conseguir un resultado. Euclides propuso y demostró primero el siguiente:

> ***Lema***: *Si **a** y **b** son dos enteros positivos con **a** > **b**, entonces el **mcd(a, b) = mcd(b, r)**, donde **r** es el resto de dividir **a** entre **b**.*

En base a este Lema, planteó un **Algoritmo** para calcular el **m.c.d. de dos números** enteros.

Algoritmo de Euclides: Dados dos enteros positivos **a** y **b**, con **a** > **b** (sino intercambiarlos):

1- Se divide el número mayor entre el menor (**a** entre **b**), obteniendo un cociente y un resto.

2- Si ocurre que:

a) La división es exacta (resto cero), el divisor es el **mcd(a, b)** y el algoritmo termina.

b) La división no es exacta, se divide ahora el divisor entre el resto obtenido y se repite el paso 2.

Procediendo de esta forma, hasta obtener una división exacta, se obtiene el **m.c.d**.

Ejemplo 14: Para obtener el **mcd(16, 72)** se procede de la siguiente forma:

1) 72|16   2) 16|**8**
   8   4   **0** 2   **-------- mcd(72, 16) = 8**

En términos del Teorema del Resto, los pasos del Algoritmo de Euclides pueden pensarse de la siguiente forma: Dados dos enteros positivos **a** y **b**, con **a** > **b** (sino intercambiarlos):

1- Se usa el algoritmo de la división para obtener: $\mathbf{a = b \times q_1 + r_1}$.

2- Si:

a)- $\mathbf{r_1 = 0}$ entonces **b|a** y el **mcd(a, b) = b**

b)- $\mathbf{r_1 \neq 0}$ Se calcula el **mcd (b,** $\mathbf{r_1}$**)** para lo cual se divide **b** por $\mathbf{r_1}$ y se obtienen los números enteros $\mathbf{q_2}$ y $\mathbf{r_2}$ que satisfacen $\mathbf{b = r_1 \times q_2 + r_2}$ con $\mathbf{0 < r_2 < r_1}$.

3- Si:

a)- $\mathbf{r_2 = 0}$ el proceso termina y **mcd(a, b) =** $\mathbf{r_1}$

b)- $\mathbf{r_2 \neq 0}$ entonces se calcula el **mcd(**$\mathbf{r_1, r_2}$**)** para lo cual se procede a dividir $\mathbf{r_1}$ por $\mathbf{r_2}$ y se obtienen los números enteros $\mathbf{q_3}$ y $\mathbf{r_3}$ que satisfacen $\mathbf{r_1 = r_2 \times q_3 + r_3}$.

El proceso continua de esta forma hasta que el resto de alguna de las divisiones da 0. Luego el **mcd de a y b es el último resto no cero** del procedimiento anterior.

Como vemos, el algoritmo se define en términos de si mismo. Esto es un ejemplo de un **algoritmo recursivo**, tema que veremos en detalle más adelante.

Ejemplo 15: Resolvamos el siguiente ejercicio: Calcular el **mcd(689, 234)**:

689 mod 234 = 221, como sabemos **mcd(689, 234) = mcd (234, 221)**, calculamos:
234 mod 221 = 13, como sabemos **mcd (234,221) = mcd (221,13)**, calculamos:
221 mod 13 = 0, como el resto es cero, el **mcd (221,13) = 13** y **mcd(689,234)= 13.**

también puede plantearse:

a = 689, **b = 234** y $\mathbf{a = b \times q + r}$ es decir**:**
$689 = 234 \times 2 + 221$
$234 = 221 \times 1 + 13$
$221 = \underline{\mathbf{13}} \times 17 + 0$ luego mcd (221, 13) = 13 y **mcd(689, 234)= 13.**

Comparemos con el método de la fuerza bruta donde buscamos los divisores exactos del número menor que es 234, dividiéndolo por 234, 234-1, 234-2, ..., 1, es decir 234 divisiones que luego deberíamos probar con el número mayor para cada uno de los resultados obtenidos es decir otras 234 veces. Luego **234 + 234 = 468** veces !!!

Si lo hacemos de otra manera, si luego de probar que 689/234 no es exacta, vamos dividiendo 234 por 234-1, 234-2, …, 1 y a cada divisor exacto de 234 que encontremos lo probamos para ver si divide a 689, el primero que encontremos que divide en forma exacta a ambos es el **mcd** que buscamos, con lo que la cantidad de operaciones se reduce significativamente con respecto a las 468 antes señaladas, aunque ¡nunca serán menores que las necesarias con el algoritmo de Euclides! el cual resulta siempre más eficiente.

Ejercicio: Calcular el mcd de a=63 y b=75.

Si hacemos una lista con los pasos de la solución: (63,75, 63, 12, **3**, 0). El resultado es el penúltimo elemento de la lista, Verifiquemos esta afirmación:

a= 63, b= 75 $a=b \times q + r$
$63 = 75 \times 0 + 63$
$75 = 63 \times 1 + 12$
$63 = 12 \times 5 + \mathbf{3}$
$12 = \mathbf{3} \times 4 + 0$ **mcd (75, 63) = 3**

1.6. Primos Relativos

Definición: *Si dos enteros positivos **a** y **b** verifican que **mcd(a, b) = 1** se dicen que son **primos relativos.***

Si bien ***a*** y ***b*** son ***primos relativos***, no necesariamentes deben ser ***primos*** cada uno de ellos. Lo que sí debe cumplirse es que no tengan factores primos en común.

Ejemplo 16: ***4*** y ***9*** son primos relativos ya que ***mcd(9, 4)*** = ***1***, pero ellos no son ***primos*** ya que 2|4 y 3|9.

1.7. Teorema Fundamental de la Aritmética (factoreo).

Este siguiente, es el resultado más importante de la teoría de números.

Teorema: *Todo entero positivo mayor que uno (1), es un número primo o puede ser escrito como producto de números primos de forma única (la factorización es única), salvo en el orden de los factores.*

$$a = p_1^{a1} p_2^{a2} p_3^{a3} \dots p_n^{an}$$

Donde los a_i son números naturales y los p_i son números primos distintos, i=1, 2, …, n.

Ejemplo 17**:**

$100 = 2\times2\times5\times5 = 2^2\times5^2$

$641 = 641$

$999 = 3\times3\times3\times37 = 3^3\times37$

$1024 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^{10}$

⊗ **Teorema 7**: *Si **n** es un entero compuesto, (esto es, **n** no es un número primo), entonces **n** tiene un divisor primo menor o igual que la raíz cuadrada de **n***, o lo que es lo mismo, *todo número compuesto tiene un divisor que es menor o igual a su raíz cuadrada.*

Este teorema permite plantear un método muy práctico para determinar si un número entero es primo:

Algoritmo para determinar si un entero N > 1 es primo:

Paso 1. Verificar si **N = 2**. Si lo es, **N es primo** con lo que se termina el algoritmo. Sino, seguir en 2.

Paso 2: Verificar si **2|N**, si es afirmativo **N no es primo** (ya que es par mayor a 2) y se termina el algoritmo. Sino, seguir en 3.

Paso 3: Calcular el número entero **K = parte entera de la raíz cuadrada de N**.

Paso 4: Para todos los números **D** impares (idealmente solo los primos) tal que **1 < D ≤ K**, verificar si **D|N**. En caso afirmativo (algún D es divisor de N), **N no es un número primo** y se termina el algoritmo. **Si no se cumple para ningún D** (ningún **D** menor o igual a **K** divide a **N**), **entonces N es primo**.

Ejemplo 18: Comprobar si el número 137 es primo.

Paso 1. ¿137 = 2?, como no se cumple se continúa con el siguiente paso

Paso 2. ¿2 | 137?, como no se cumple se continúa con el siguiente paso

Paso 3. RaízCuadrada(137) = 11,704…, tomando solo la parte entera: K = 11

Paso 4. Para D = 11, 9, 7, 5, 3 vemos si divide a 137:
¿11|137? = no, ¿9|137? = no, ¿7|137? = no, ¿5|137? = no, ¿3|137? = no,
por lo tanto 137 es un número primo.

⊗ **Teorema 8**: *Hay una cantidad infinita de primos.*

⊗ **Teorema 9**: *Sean **a** y **b** enteros positivos tales que factoreados se pueden escribir como:*

$$a = p_1^{a1} p_2^{a2} p_3^{a3} \dots p_n^{an} \quad \text{y} \quad b = p_1^{b1} p_2^{b2} p_3^{b3} \dots p_n^{bn}$$

Entonces: $$mcd(a, b) = p_1^{men(a1,b1)} p_2^{men(a2,b2)} p_3^{men(a3,b3)} \dots p_n^{men(an,bn)}$$

y: $$mcm(a,b) = p_1^{max(a1,b1)} p_2^{max(a2,b2)} p_3^{max(a3,b3)} \dots p_n^{max(an,bn)}$$

Ejemplo 19: Calcular mcd(108, 90). Para ello, se factorean ambos números:

$\mathbf{108 = 3^3 \times 2^2}$ y $\mathbf{90 = 3^2 \times 2^1 \times 5^1}$

Luego: $\mathbf{mcd(108, 90) = 3^{men\,(3,\,2)} \times 2^{men\,(2,\,1)} \times 5^{men\,(1,\,0)} = 3^2 \times 2^1 \times 5^0 = 18}$.

Ejemplo 20**:** Calcular el mínimo común múltiplo de $2^3 \times 3^5 \times 7^2$ y $2^4 \times 3^3$

$\mathbf{mcm(2^3 \times 3^5 \times 7^2, 2^4 \times 3^3 \times 7^0) = 2^{max\,(3,4)} \times 3^{max\,(5,3)} \times 7^{max\,(2,0)} = 2^4 \times 3^5 \times 7^2}$

⊗ **Teorema 10**: *Sean **a** y **b** enteros positivos. Entonces* **a x b= mcd(a, b) x mcm(a, b).**

Ejemplo 21: Verificar el teorema anterior para **a = 108** y **b = 90**:

Del ejemplo 19 se conoce que **mcd(108, 90) = 18**.

Calculemos el **mcm(108, 90)** siendo $\mathbf{108 = 3^3 \times 2^2}$ y $\mathbf{90 = 3^2 \times 2^1 \times 5^1}$

mcm(108, 90) = $\mathbf{3^3 \times 2^2 \times 5^1}$ = **540**

108 x 90 = 9.720 y **mcd(108, 90) x mcm (108, 90) = 18 x 540 = 9.720**

Notar que podríamos haber calculado el mcm(108, 90) despejándolo:

Por el Teorema 10: $108 \times 90 = \text{mcd}(108, 90) \times \text{mcm}(108, 90)$

Pero mcd(108, 90) = 18: $= 18 \times \text{mcm}(108, 90)$

De donde: $\text{mcm}(108, 90) = 108 \times 90 / 18 = \mathbf{540}$.

PREGUNTAS DE REPASO

1. Sean dos números enteros positivos **a** y **b** primos relativos. Entonces ¿a y b deben ser números primos? Explique y de un ejemplo.
2. Sean dos números enteros positivos **a** y **b** primos relativos. Marque con X la respuesta correcta:

   □ mcd (a,b) = a / b □ mcd (a,b) = 0 □ mcd (a,b) = a x b □ mcd (a,b) = **1** □ ninguna
3. Sean a y b dos números enteros positivos tales que mcd(a, b) = mcm(a, b). Entonces debe suceder que:

   □ a y b son primos relativos, □ a ≠ b pero ambos son pares, □ a = b,

   □ a ≠ b pero ambos son impares, □ a ≠ b pero ambos son primos.,

   □ No puede suceder esto.
4. Dados dos números enteros positivos **a** y **b** mayores que uno, ¿qué relación conoce entre su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo?
5. Dados dos números enteros positivos **a** y **b** mayores que uno, si **a** y **b** no tienen factores primos en común, ¿cuál es su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo?
6. ¿Para qué se utiliza el Algoritmo de Euclides?
7. Sean **a** y **b** dos enteros positivos. Si tienen un solo factor primo en común **p** el cual aparece dos veces en el factoreo de cada uno de ellos, ¿Cuál es su máximo común divisor?
8. Un número entero positivo que puede dividirse por al menos por otros tres números enteros distintos, recibe el nombre de: ____
9. Explique cómo se calcula el máximo común divisor por al menos dos métodos distintos. Si tuviese que elegir un método ¿cuál elegiría y por qué?
10. En que lema se fundamenta el denominado Algoritmo de Euclides. Explique su significado.