Unidad 2
LÓGICA MATEMATICA O SIMBÓLICA

PROGRAMA ANALÍTICO

- **Unidad Nº 2 : LÓGICA MATEMÁTICA**
- **Objetivos específicos:**
- Que los alumnos :
- *Conozcan y comprendan los fundamentos de la lógica matemática, los conceptos y los símbolos que la representan; y que constituyen el "**vocabulario lógico**".*
- *Puedan formular de manera precisa, las reglas que permiten manipularlos y combinarlos, y que constituyen la "**gramática lógica**".*
- *En función de los dos puntos anteriores puedan aplicar los operadores y las leyes lógicas para obtener nuevas proposiciones, expresiones duales o equivalentes.*
- **Contenidos:**
- Lógica de Orden Cero: Lógica de Proposiciones: Proposiciones Lógicas (Simples y Compuestas),
- Principios Fundamentales de la Lógica Clásica, Principio de No Contradicción, Principio de Tercero
- Excluido y Principio de Identidad. Valores de verdad (V y F) y tablas de verdad.
- Conectivos lógicos (negación, conjunción y disyunción), implicación simple, doble implicación.
- Equivalencia lógica e implicación lógica. Tautología, Contingencia y Contradicción

Resultados de aprendizaje

Que el alumno pueda:

- Explicar los objetivos de la lógica.
- Enunciar los elementos del lenguaje de la lógica proposicional
- Formalizar proposiciones simple y compuestas.
- Distinguir entre el análisis sintáctico y el semántico de la LPO.
- Construir las tablas de verdad de los conectivos lógicos básicos.
- Determinar la validez de una proposición compuesta.
- Demostrar cuando dos expresiones son equivalentes.
- Explicar el significado de la implicación lógica entre un conjunto de proposiciones y demostrar cuando se produce.
- Enunciar los principios de la lógica clásica.
- Construir el cuadro de oposición del condicional simple.
- Distinguir entre tautología, contradicción y contingencia

Que es la Lógica

- La lógica es la ciencia del razonamiento.
- La lógica investiga la ***relación*** de ***consecuencia*** que se da entre una serie de ***premisas*** y ***la conclusión*** de un ***argumento correcto***. Se dice que un argumento es correcto (valido) si su conclusión se sigue o es consecuencia de sus premisas
- La lógica es la ciencia de los principios de la ***validez formal*** de la ***inferencia***.

mcd (a , b) = mcd (b , r)

Para demostrar este lema basta con demostrar que los divisores comunes de a y b son los mismos que los divisores comunes de b y r. En consecuencia tendrán los mismos máximos divisores comunes.

Suponemos que $d \mid a$ y $d \mid b$.

Pero $d \mid q \cdot b$ (T.4) y

Si $d \mid a$ y $d \mid q \cdot b$ entonces $d \mid a - q \cdot b$ (T.5)

Pero $a - q \cdot b = r$ (Algoritmo de la división)

Luego $d \mid r$. (Teorema 6) Por lo tanto cualquier divisor de a y b lo es de b y r. $\Rightarrow$

De igual forma se puede razonar a partir de suponer que

$d \mid b$ y $d \mid r$. $\Leftarrow$

QED

Lógica clásica, tradicional

- Aristóteles (384-322 adC)
- Silogismos

Todos los atenienses son griegos

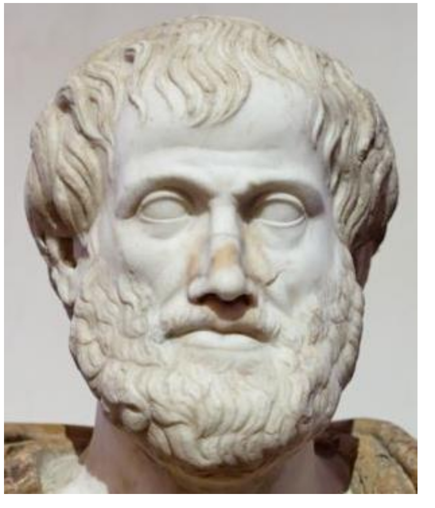
Todos los griegos son mortales

∴ Por lo tanto, todos los atenienses son mortales

Todo A es B

Todo B es C

∴ Todo A es C

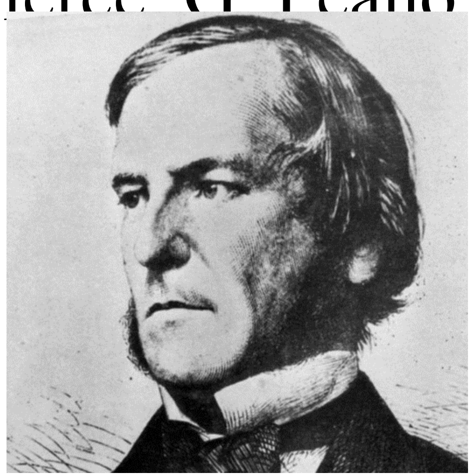


Lógica simbólica o matemática

- Matematicismo

  Quieren expresar las proposiciones o leyes de la lógica en el lenguaje de las matemáticas

- “Algebra de la lógica”
- G. Boole (1815-1864), August De Morgan, C.S. Pierce, G. Peano (1858-1932).



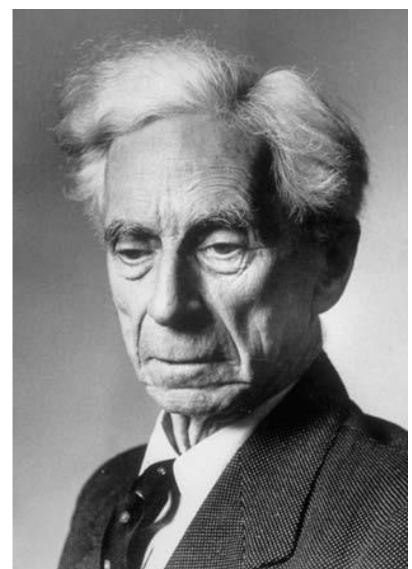
$$x.(1-y) = 0$$

Lógica simbólica o matemática

- Logicismo

  Buscan fundamentar la matemática en la lógica

- "Lógica de las matemáticas"
- Gottliebe Frege (1848-1925), Bertrand Rusell y A.N.Whitehead.



Lógica Matemática

- Se dice que es un calculo, una estructura con relaciones entre símbolos.

$$a + b = c\,(b - d)$$

$$p \wedge q = p\,(q \vee r)$$

Que significan a, b, c, p, q, r?

El lenguaje

- Es un conjunto de cadenas, strings o secuencia de símbolos.
- Todo lenguaje esta caracterizado por un conjunto de símbolos al que llamamos su ***vocabulario***.
- También tiene reglas para combinar esos símbolos y formar secuencias válidas. Estas reglas constituyen la ***sintaxis o gramática.***
- Por último estas cadenas tienen un significado o una interpretación. Esto es lo que llamamos la ***semántica***.

Lenguaje natural y artificial

«Podemos considerar nuestro lenguaje como una ciudad antigua: un laberinto de pequeñas calles y plazas, de casas viejas y nuevas,

y de casas con añadidos que datan de épocas distintas; y todo esto rodeado de una multitud de barrios nuevos con calles rectas regularmente trazadas y casas uniformes». Un poco antes, en este mismo párrafo, ha dicho Wittgenstein que el simbolismo de la química o la notación del cálculo infinitesimal, por ejemplo, son <<suburbios de nuestro lenguaje».

Objetivos de la lógica matemática

La lógica matemática o simbólica tiene dos grandes objetivos:

1) Eliminar la ambigüedad de las expresiones del lenguaje natural

2) Establecer reglas para determinar la validez de un razonamiento (argumento)

Objetivos de la lógica matemática

- Eliminar la ambigüedad del lenguaje natural

Que dicen estas expresiones o que quieren expresar?

1. Ayer vi a un astrónomo con un telescopio.
2. En la reunión estaban todos los amigos de Cristina y Mauricio.
3. Me prometieron darme una oficina nueva y un aumento o más vacaciones y cumplieron!

Objetivos de la lógica matemática

- Eliminar la ambigüedad del lenguaje natural

Muchas expresiones de nuestro lenguaje se expresarán de la misma forma en el lenguaje de la lógica.

- Si estudio entonces apruebo MAD.
- Solo si estudio apruebo MAD
- Apruebo MAD si estudio
- Apruebo MAD solo si estudio.
- Es condición suficiente para aprobar MAD que estudie.
- Es condición necesaria para aprobar MAD que estudie.

Objetivos de la lógica matemática

- Establecer reglas para determinar la validez de un razonamiento (argumento)

Lo veremos en la unidad 3!!

Lógica Proposicional o de Orden 0 (L0)

Formalización

Oraciones del Lenguaje Natural

Expresiones de L0

Proposición

- Oración ***declarativa*** de la cual puede decirse que es verdadera o falsa
- Expresión lingüística que cumple una función informativa (afirma o niega algo) y tiene sentido decir de ella que puede ser verdadera o falsa

LOGICA BIVALENTE

Ejemplos

- Agosto es un mes del otoño en el hemisferio norte.
- José López no tiene dólares.
- $2+2=5$
- 0 es un número entero.
- La suma de los ángulos internos de un triangulo es igual a 180°
- Para todo número natural se verifica que

  $n^2 + n + 41$ es un número primo
- Hay infinitos números primos

Ejemplos de oraciones o frases que **no** son proposiciones:

Si tiene mas de 60 años, no salga de su casa!!

Realizó la cuarentena?

Lávese las manos!
Se lavó las manos con agua y jabón?

Científicos rusos descubrieron la cura del Coronavirus

Si n es un entero mayor que 2 no existen enteros a, b y c tales que $a^n + b^n = c^n$

La OMS juega.

Proposiciones simples o atómicas

- Unidad de análisis de la lógica proposicional.
- No se pueden dividir o segmentar.

Proposiciones compuestas

- Contienen dentro de si a otras proposiciones (por lo menos una)
- Están compuestas por proposiciones simples vinculadas por ciertas expresiones denominadas conectivos (y, o, sino, si entonces, si y solo si, o .. o ..,, pero, etc)

Ejemplos

- Argentina tiene problemas económicos y todos los economistas coinciden en esta visión.
- El profesor tiene mas de 60 años y se queda en casa.
- El domingo ppdo. nos quedamos en casa o fuimos a visitar a un amigo.
- El coronavirus es muy peligroso para los niños y adultos mayores que 70 años.
- Si hay inflación entonces los precios de los comestibles suben y la ganancia de los comerciantes disminuye
- Hay inflación porque suben los precios

El lenguaje ***formal*** de la lógica (*Un cálculo*)

1- ***Vocabulario.***

Conjunto de símbolos o elementos primitivos

2- ***Reglas de formación***

Cuales son las combinaciones correctas de símbolos

3- ***Reglas de transformación***

Permite construir a partir de una combinación correcta de símbolos otra combinación también correcta.

El lenguaje ***formal*** de la lógica

Vocabulario (elementos primitivos**):**

– *Variables* proposicionales

$p, q, r, s, t, \ldots \quad p_1, p_2, p_3 \ldots q_1, q_2, q_3 \ldots$

– Conectivas lógicas (*constantes* lógicas)

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

– Signos o símbolos auxiliares

(,)

Los conectivos lógicos *(operadores)*

$\wedge$	conjunción
$\vee$	disyunción
$\sim, \neg$	negación
$\rightarrow$	condicional simple
$\leftrightarrow$	condicional doble

El lenguaje formal de la lógica

Sintaxis (reglas de formación)

- Expresiones o ***fórmulas*** bien formadas (***fbf***), también denominadas formas enunciativas

Que es una ***fbf***, como identificarla?

(Definición recursiva)

1. Toda variable proposicional p,q r, p_1,p_2 …,p_n es una *fbf*
2. Si A es una fbf entonces ~(A) también lo es.
3. Si A y B son formas *fbf* también lo son:
4. $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$
5. Solo son *fbf* las que cumplen las reglas anteriores

El lenguaje formal de la lógica

NOTA:

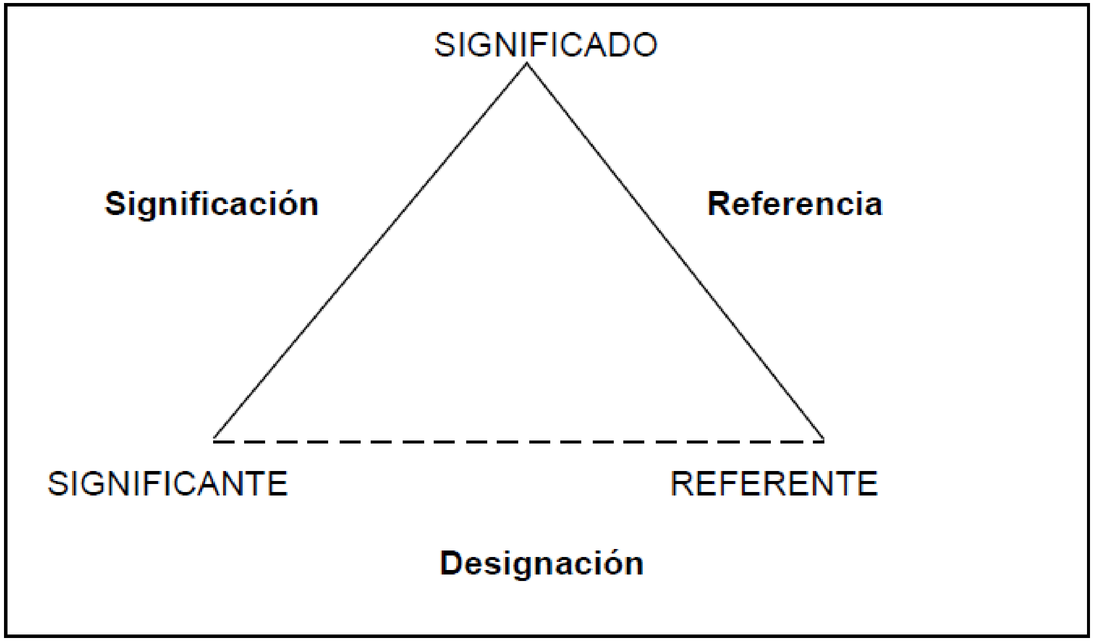
- Las variables A y B en la definición anterior no son símbolos de la lógica. Los utilizamos para referirnos a expresiones de la lógica en nuestro lenguaje. (Metalenguaje).
- Podríamos decir que representan sub-formulas.

Análisis Sintáctico

- Esta bien formada la siguiente expresión o formula? Porque?

$$\neg((q \rightarrow p) \wedge (q \leftrightarrow r) \vee p)$$

Semántica



Triangulo de Odgen y Richards o Triangulo Semántico

- ✓ Significado: Concepto, imagen mental
- ✓ Significante: Símbolo o signo, palabra oral o escrita o icónica
- ✓ Referente: el objeto, el mundo, la realidad.

El lenguaje formal de la lógica

Semántica (valores de verdad: V, F)

- Las ***proposiciones simples*** son verdaderas o falsas ***semánticamente***, es decir en relación al estado de cosas por ellas significado (verdad material)
- Las ***proposiciones compuestas*** lo son ***sintácticamente***, esto es en virtud de los **conectivos** que las componen. Se denominan proposiciones extensionales o funciones de verdad.

El criterio para asignar a una fbf un valor verdadero (V) o falso (F) debe reflejar el uso dado al conectivo en la representación simbólica.
En la comunicación ordinaria hay un acuerdo implícito según el cual en una proposición declarativa se sobreentiende que lo que se afirma es verdad.

Por ejemplo, cuando decimos "Los números pares son divisibles por 2" estamos afirmando que "es verdad que los números pares son divisibles por 2"

Si decimos "Juan cursa Matemática Discreta y Análisis Matemático" estamos afirmando que "es verdad que Juan cursa Matemática Discreta y también cursa Análisis Matemático"

En Lógica Simbólica mantendremos el mismo criterio.
Si la variable p simboliza una proposición el símbolo p lleva implícito que p es verdadero.
O sea si utilizamos la variable p para representar la proposición simple “2 es un número primo”, la aparición de p en una fórmula debe entenderse como la afirmación “2 es un número primo”

Valores de verdad

- Una proposición atómica o simple puede ser verdadera o falsa. Decimos que puede tener sólo dos valores de verdad: V y F. Lo simbolizamos así:

$$v(p) = V \text{ o } v(p) = F$$

Lo leemos:

el valor de verdad de p es verdadero o

el valor de verdad de p es falso

Valores de verdad de una proposición compuesta

1) $v(\sim A) = F$ si $v(A)$ es verdadera y $v(\sim A) = V$ si $v(A) = F$
2) $v(A \wedge B)=V$ si $v(A)=v(B)=V$; $v(A \wedge B)=F$ en cualquier otro caso.
3) $v(A \vee B)=F$ si $v(A)=v(B)=F$; $v(A \vee B)=V$ en cualquier otro caso.
4) $v(A \rightarrow B)=F$ si $v(A)=V$ y $v(B)=F$; $v(A \rightarrow B)=V$ en cualquier otro caso.
5) $v(A \leftrightarrow B)=V$ si y solo si $v(A)=v(B)$

Los valores de verdad de las conectivas pueden ser expresados gráficamente por las denominadas tablas de verdad

Conectivos lógicos: **La negación**

- Definición: ***Dada una proposición p, llamaremos la negación de p a la proposición ~p (que leeremos no p) la cual será verdadera cuando p sea falsa y falsa cuando p sea verdadera.***
- ***La tabla de verdad de la negación será:***

P	~p
V	F
F	V

Conectivos lógicos: **La conjunción**

- Definición: ***Dadas dos proposiciones p y q, llamaremos la conjunción de p y q a la proposición p ∧ q (que leeremos p y q), la cual será verdadera cuando ambas p y q sean verdaderas y falsa en todos los otros casos.***
- ***La tabla de verdad de la conjunción será:***

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivos lógicos: **La disyunción**

- Definición: ***Dadas dos proposiciónes p y q, llamaremos la disyunción de p y q a la proposición p ∨ q (que leeremos p o q), la cual será falsa cuando ambas p y q sean falsas y verdadera en todos los otros casos.***
- ***La tabla de verdad de la disyunción será:***

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva

- Definición: ***Dadas dos proposiciónes p y q, llamaremos la disyunción exclusiva de p y q a la proposición p ⊕ q (que leeremos o p o q pero no ambas) , la cual será verdadera cuando ambas p y q tengan distintos valores de verdad y falsa cuando p y q sean ambas verdaderas o ambas falsas.***
- ***La tabla de verdad de la disyunción exclusiva será:***

"La grieta"

p	q	p ⊕ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La implicación simple

- Definición: ***Dadas dos proposiciónes p y q, llamaremos implicación simple de p y q a la proposición $p \rightarrow q$ (que leeremos si p entonces q), la cual será falsa cuando p sea verdadera y q falsa y verdadera en todos los otros casos.***
- ***La tabla de verdad de la implicación simple será:***

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La implicación simple

IMPORTANTE:

- El condicional no afirma nada respecto de la verdad del antecedente y del consecuente por separado; sólo afirma que si el antecedente es verdadero el consecuente también lo es, o en forma equivalente que no es posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso

La implicación doble

- Definición: ***Dadas dos proposiciónes p y q, llamaremos implicación doble de p y q a la proposición $p \leftrightarrow q$ (que leeremos p si y solo si q), la cual será verdadera cuando ambas p y q sean verdaderas y falsa cuando p y q sean ambas falsas.***
- ***La tabla de verdad de la implicación doble será:***

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El uso de paréntesis

- Al igual que en aritmética los paréntesis son necesarios para establecer un significado único en fórmulas que de otra manera podrían tener un significado ambiguo. Por ejemplo:

$$2 \times 3 + 5$$
$$(2 \times 3) + 5 = 11$$
$$2 \times (3 + 5) = 16$$

- En el lenguaje natural también se utilizan símbolos de puntuación que cambian el significado de una frase como por ejemplo la coma. Por ejemplo:

La maestra dijo Sarmiento, es ignorante.

La maestra dijo, Sarmiento es ignorante.

El uso de paréntesis

$p \rightarrow q \vee r$

Significa:

$p \rightarrow (q \vee r)$	Si llueve entonces compro un paraguas o voy al cine.
$(p \rightarrow q) \vee r$	Si llueve entonces compro un paraguas, o voy al cine

$p \wedge q \vee r$

Significa:

$p \wedge (q \vee r)$	La ensalada me gusta con lechuga y tomates o zanahoria.
$(p \wedge q) \vee r$	La ensalada me gusta con lechuga y tomates o zanahoria.

La precedencia de las conectivas

- Para simplificar el uso de paréntesis se suele definir una regla para determinar en que orden se ***evalúan*** los valores de verdad de una expresión lógica. Dicha orden de precedencia se fija, leyendo la expresión de izquierda a derecha de acuerdo a la sig. tabla

Nivel 1	$\sim$
Nivel 2	$\wedge$, $\vee$
Nivel 3	$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Cómo ***formalizar*** el lenguaje natural en L_0

- (i) Identificar los enunciados simples
- (ii) Asignar a cada enunciado simple una variable proposicional
- (iii) Identificar las partículas lógicas: negación, condicional, disyunción, etc
- (iv) Reconstruir los enunciados complejos a partir de los simples y las partículas lógicas

Ejemplos

Los números naturales son enteros. Los enteros son parte de los reales o de los racionales, pero no de los naturales.

p: Los números naturales son enteros.
q: Los números enteros son parte de los número reales.
r: Los números enteros son parte de los números racionales
s: Los números enteros no son parte de los número naturales.

p
$(q \vee r)$
$\sim s$

Ejemplos

Cuando no hay transporte público los alumnos no concurren a clase. El transporte público es un servicio esencial pero los autos particulares no lo son.

p: Hay transporte público.
q: Los alumnos no concurren a clase.
r: El transporte publico es un servicio esencial.
s: Los autos particulares no son un servicio esencial.

$(\sim p \wedge \sim q)$
$r \wedge \sim s$

Ejemplos

Las manos se lavan con agua y jabón o podemos utilizar alcohol en gel. Si las lavamos sólo con agua no es suficiente

p: Las manos se lavan con agua.
q: Las manos se lavan con jabón.
r: podemos utilizar alcohol en gel
s: No es suficiente

$(p \wedge q) \vee r$
$p \rightarrow s$

Ejemplos

Si estudias y asistes a clase apruebas MAD. Si no apruebas no puedes cursar la materia correlativa. O estudias o no puedes cursar la correlativa

p: Estudias MAD.
q: Asistes a clase de MAD.
r: Apruebas MAD
s: Puedes cursar la materia correlativa

$(p \wedge q) \rightarrow r$
$\sim r \rightarrow \sim s$
$p \oplus \sim s$

Ejemplos

Si n es para entonces es divisible por dos. Si n es divisible por dos entonces n es par. 2n es par. 2n es para si y solo si es divisible por dos

p: n es par.
q: n es divisible por dos.
r: 2n es par.
s: 2n es divisible por dos.

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow p$
r
$r \leftrightarrow s$

Cómo formalizar el lenguaje natural en L_0

(iii) Identificar las partículas lógicas

- Las cinco partículas NO, Y, O, SI, SI Y SÓLO SI son las más evidentes.
- Pero hay expresiones del lenguaje natural ***que cumplen la misma función lógica***, aunque no tengan la misma función pragmática.
- Cuando una expresión tenga la misma función lógica que una de esas 5 partículas, la formalizamos usando la misma conectiva.

Cómo formalizar el lenguaje natural en L_0

(iii) Identificar las partículas lógicas

Expresiones equivalentes a Y

El precio del petróleo baja Y el de la nafta sube

El precio del petróleo baja, PERO el de la nafta sube

El precio del petróleo baja AUNQUE el de la nafta sube

El precio del petróleo baja, SIN EMBARGO, el de la nafta sube

El precio del petróleo baja, el de la nafta sube

A PESAR DE QUE El precio del petróleo baja, el de la nafta sube

$$p \wedge q$$

Cómo formalizar el lenguaje natural en L_0

(iii) Identificar las partículas lógicas

Expresiones equivalentes a NO

Trump NO es argentino

NO ES EL CASO QUE Trump es argentino

NO OCURRE QUE Trump es argentino

NO ES CIERTO QUE Trump es argentino

$$\neg p$$

Cómo formalizar el lenguaje natural en L_0

(iii) Identificar las partículas lógicas

Expresiones equivalentes a SI…ENTONCES

SI El precio del petróleo baja, ENTONCES el de la nafta sube

CUANDO el precio del petróleo baja, el de la nafta sube

Que el precio del petróleo baje ES SUFICIENTE PARA que el de la nafta suba.

Que el precio del petróleo baje IMPLICA que el de la nafta suba

SIEMPRE QUE el precio del petróleo baja, el de la nafta sube,

El precio de la nafta sube, SI el precio del petróleo baja

$$p \to q$$

Cómo formalizar el lenguaje natural en L_0

(iii) Identificar las partículas lógicas

Expresiones equivalentes a SI Y SÓLO SI

El precio del petróleo baja SI Y SÓLO SI el de la nafta sube

El precio del petróleo baja CUANDO Y SÓLO CUANDO el de la nafta sube

Que el precio del petróleo baje EQUIVALE A que el de la nafta suba

Que el precio del petróleo baje ES NECESARIO Y SUFICIENTE PARA que el de la nafta suba

El precio del petróleo baja, EN EL CASO, Y SÓLO EN EL CASO, DE QUE el del petróleo baja.

$$p \leftrightarrow q$$

Cómo formalizar el lenguaje natural en L_0

Otras expresiones:

NI α NI ß es lo mismo que NO α Y NO ß

"Ni como carne ni como huevos"

p : como carne   q : como huevos

$$\neg p \wedge \neg q$$

"No como carne y huevos"

La idea es que no los tomo *conjuntamente*

$$\neg (p \wedge q)$$

OJO! $\neg p \wedge \neg q$ NO EQUIVALE a $\neg (p \wedge q)$

Interpretación

- Dada una formula A en LPO, ***una interpretación*** para A es cualquiera de las posibles asignaciones de valores de verdad a los átomos que aparecen en A.
- Ejemplo:

  Sea A: $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \vee r)$

De una interpretación a A y diga cual es su valor de verdad.

Cuantas interpretaciones tiene la fórmula anterior?

Interpretación

- Ejemplo:

  Sea A: $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \vee r)$

Una interpretación podría ser la siguiente asignación:

v(p)=V ;v(q)=F ;v(r)=V

El valor de verdad de A será:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(p & \rightarrow & q) & \wedge & (\sim p & \vee & r) \\
V & & F & & F & & V \\
 & F & & & & V & \\
 & & & F & & &
\end{array}
$$

Cuantas interpretaciones tiene la fórmula anterior?

Cuantas interpretaciones tiene una fórmula con n variables?

Como construimos la tabla de verdad de una proposición compuesta?

Por ejemplo: $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$

Cuantas columnas? Cuantas filas?

p	q	r	~p	q∧r	~p→q∧r
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F

Análisis Semántico

- Cual es el valor de verdad de la siguiente expresión o formula, supuestas que el valor de verdad de p es V, el de q es F y r es V y que la expresión está dada en forma afirmativa.

(Agregue paréntesis de acuerdo a la regla de precedencia de los operadores definida)

$$\sim q \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow r \vee \sim p$$

Los Principios de la lógica clásica

1. ***Principio de No Contradicción***: Dadas dos proposiciones contradictorias entre si, no pueden ser ambas verdaderas
2. ***Principio de Tercero Excluido***: Dadas dos proposiciones contradictorias entre si, no pueden ser ambas falsas.
3. ***Principio de identidad***: Toda proposición es idéntica a si misma

Acertijos Lógicos

- La isla de los caballeros y los villanos (Smullyan)

  -A: B es un caballero

  -B: Los dos somos de clases opuestas

  -A: Al menos uno de nosotros es un villano

  -B: No dice nada

Que son A y B?

Como podemos expresar formalmente los principios lógicos?

- Principio de no contradicción $\sim(p \wedge \sim p)$

- Principió de tercero excluido $p \vee \sim p$

- Principio de identidad $p \rightarrow p$

Puede construir las tablas de verdad de las expresiones encontradas?

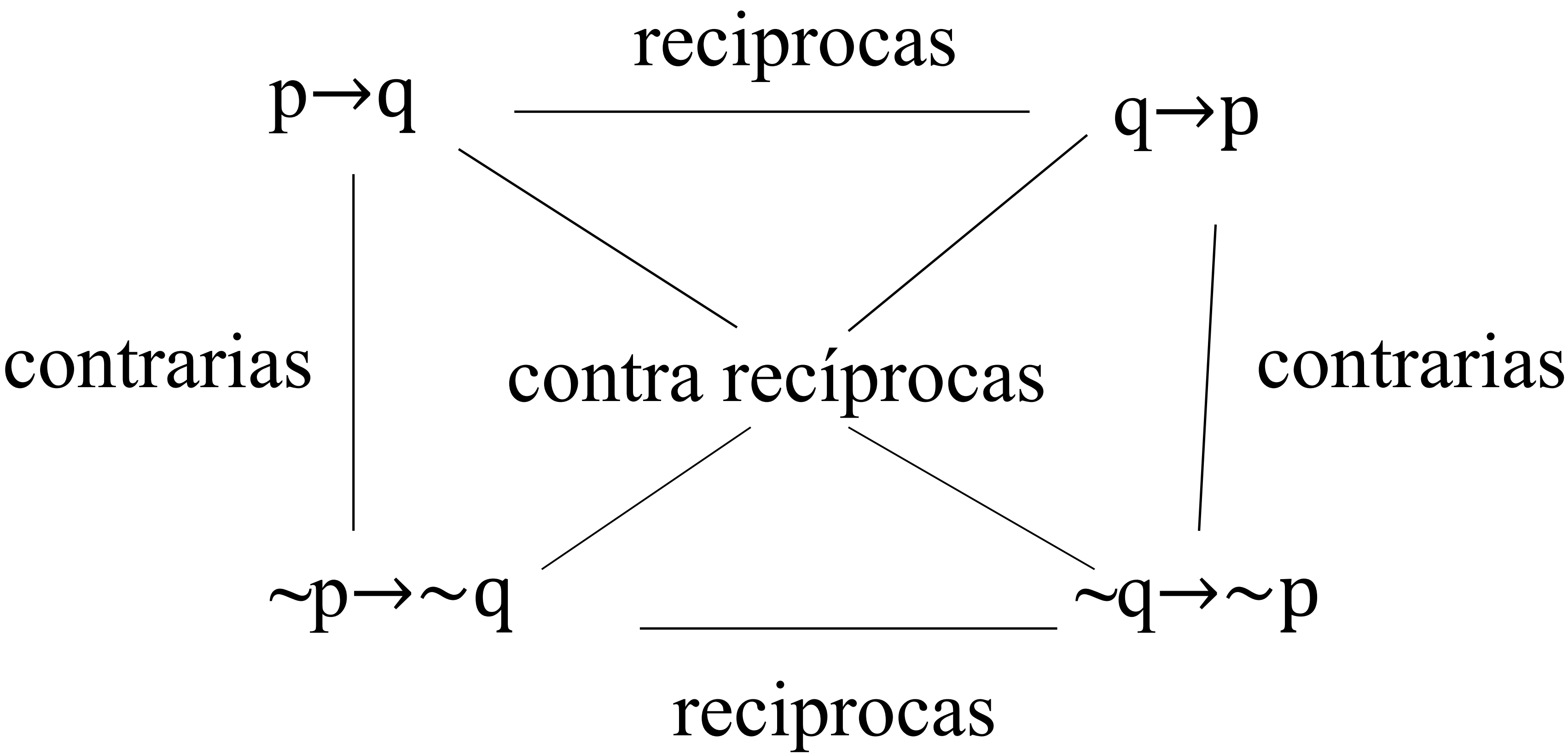
Que características o particularidades puede descubrir en estas tablas?

Tautología: Fórmula verdadera para todas sus interpretaciones

Contradicción: Fórmula falsa para todas sus interpretaciones.

Contingencia: Fórmula verdadera para alguna interpretación y falsa para otras.

Cuadro de oposición del condicional simple



- Si a y b son primos relativos entonces el mcd entre ellos es igual a 1.

$$p \rightarrow q$$

- Recíproca:

- Contraria:

- Contra recíproca:

Exprese en forma simbólica y coloquial la reciproca, la contraria y la contra reciproca

- Teorema: Si n es un número compuesto entonces tiene un divisor primo menor o igual a la $\sqrt{n}$

$$p \rightarrow q$$

Por la contra recíproca:

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

- Teorema: Si n es un número no compuesto (primo) entonces no tiene un divisor primo menor o igual a la $\sqrt{n}$

Que tienen en común estas expresiones?

- 5-3
- 1+1
- $\sqrt{4}$
- $2\,(cos^2x + sen^2x)$
- 4/2
- 5mod3
- 2*1

Equivalencia Lógica

- *Dadas dos proposiciones compuestas $P(p,q,\ldots,z)$ y $Q(p,q,\ldots,z)$ se dice que P es* ***logicamente equivalente*** *a Q y se denota $P \equiv Q$ si para cualquier combinación de valores de verdad de $p,q,\ldots,z$ resultan P y Q con iguales valores de verdad.*
- *Se cumple que $P(p,q,\ldots,z) \leftrightarrow Q(p,q,\ldots,z)$ es una tautología.*

Son expresiones que sintácticamente son diferentes (se escriben distinto) pero semánticamente son iguales (tienen el mismo significado).

La implicación simple

IMPORTANTE:

- El condicional no afirma nada respecto de la verdad del antecedente y del consecuente por separado; sólo afirma que si el antecedente es verdadero el consecuente también lo es, o en forma equivalente que no es posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso

Como podemos escribir en forma simbólica la equivalencia anterior?

$$p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$$

Ejemplo

- Son equivalentes las proposiciones?

$$p \leftrightarrow q \text{ y } (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	p↔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$\equiv$

p	q	p→q	q→p	p↔q∧q→p
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

P↔Q
V
V
V
V

Luego las proposiciones son ***equivalentes***

Ejemplo

- Son equivalentes las proposiciones?

$p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\equiv$

p	q	¬p	¬p ∨ q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

P↔Q
V
V
V
V

Luego las proposiciones son ***equivalentes***

- Teorema: Si n es un número compuesto entonces tiene un divisor primo menor o igual a la $\sqrt{n}$

$$p \rightarrow q$$

Por la contra recíproca:

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

- Teorema: Si n es un número no compuesto (primo) entonces no tiene un divisor primo menor o igual a la $\sqrt{n}$

Implicación Lógica

- ***Dadas dos proposiciones compuestas $P(p,q,\ldots,z)$ y $Q(p,q,\ldots,z)$ se dice que P implica lógicamente a Q y se denota $P \Rightarrow Q$ si para cualquier combinación de valores de verdad de p,q,….z que hagan a P verdadera resulta Q también verdadera***
- ***Se dice que la proposición P implica lógicamente a la proposición Q, y se escribe $P \Rightarrow Q$, si Q es verdad cuando P es verdad.***
- ***Se cumple que $P(p,q,\ldots,z) \rightarrow Q(p,q,\ldots,z)$ es una tautología.***

Ejemplo

- Dadas las proposiciones p y q, demostrar que el bicondicional de p y q implica lógicamente al condicional simple de p y q $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

P: $(p \leftrightarrow q)$ Q: $p \rightarrow q$

p	q	p↔q	(p→q)	P→Q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Luego P⇒Q

Ejemplo

- Dadas las proposiciones p y q, demostrar que la negación de p o q implica lógicamente a la negación de p
- $\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p$
- P: ~(p∨q) Q: ~p

p	q	p∨q	~(p∨q)	~p	P→Q
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V

Luego P⇒Q

Leyes Lógicas

Son equivalencias lógicas, teoremas que se deben demostrar.

1. Involución

   $\neg(\neg p) \equiv p$

2. Idempotencia:

   $p \wedge p \equiv p$ $\qquad$ $p \vee p \equiv p$

3. Propiedad Conmutativa

   $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\qquad$ $p \vee q \equiv q \vee p$

4. Propiedad Asociativa

   $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $\qquad$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Leyes Lógicas

5. Propiedad Distributiva

$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

6. Leyes de De Morgan

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\qquad$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

7. Ley del Neutro

$p \vee \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ $\qquad$ $p \wedge \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$

8. Leyes de Dominación o Acotamiento

$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $\qquad$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$

9. Ley del Inverso

$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $\qquad$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

Leyes Lógicas

Principio de Dualidad

Si T es un teorema, entonces el dual de T, denotado por T*, construido reemplazando los símbolos **V**, **F**, $\wedge$, $\vee$ de T por los símbolos **F**, **V**, $\vee$**,** $\wedge$**,** respectivamente, es también un teorema.

Mientras caminaba a través del bosque, Ud. se encuentra con tres Troles que custodiaban un puente. Los Troles también pueden ser caballeros o villanos.
Los troles no le dejan cruzar el puente hasta que Ud. les diga con certeza a que clase pertenece cada uno. Cada trol dice solo una proposición:
Trol 1: Si yo soy un villano, entonces hay exactamente dos caballeros aquí.
Troll 2: El Troll 1 esta mintiendo.
Troll3: O nosotros somos todos villanos o al menos uno de nosotros es un caballero.

Podrá cruzar Ud. el puente?