Unidad 3
Razonamiento

Resultados de aprendizaje

Que el alumno pueda:

- Explicar que es un razonamiento y cuales son las partes que lo componen.
- Diferenciar entre razonamientos deductivos válidos y no válidos.
- Explicar la relación entre razonamientos válidos e implicación lógica.
- Definir que es una regla de inferencia, mencionar algunas de ellas y su expresión simbólica y ver como se usan en el proceso de un razonamiento deductivo.

Que es la Lógica

- La lógica es la ciencia del razonamiento.
- La lógica investiga la ***relación*** de ***consecuencia*** que se da entre una serie de ***premisas*** y ***la conclusión*** de un ***argumento correcto***. Se dice que un argumento es correcto (valido) si su conclusión se sigue o es consecuencia de sus premisas
- La lógica es la ciencia de los principios de la ***validez formal*** de la ***inferencia***.

Razonamiento deductivo

- Dadas dos o mas proposiciones $P_1, P_2, P_3 \ldots, P_n$

llamadas ***hipótesis o premisas***, y una proposición Q llamada ***conclusión*** llamaremos razonamiento a la **relación** entre ellas, denotada por: $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \therefore Q$

y diremos que la misma es **<u>válida</u>**, si Q resulta verdadera cada vez que las premisas sean simultáneamente verdaderas

Si el razonamiento es válido, se cumple:

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ ***es una tautología***

Debemos distinguir entre verdad y validez.

Por una parte la validez – ***la corrección formal*** – de un razonamiento y por otra parte el hecho de que sus premisas o conclusiones o ambas sean verdaderas

VALORES DE VERDAD DE LAS PREMISAS		VALORES DE VERDAD DE LA CONCLUSION		NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO
		VERDADERA	FALSA	
	VERDADERAS	1	2	NO VALIDO
	FALSAS	3	4	
	FALSAS	5	6	VALIDO
	VERDADERAS	7	8	

Ejemplos:

1) Premisas V, Conclusión V, Razonamiento No Válido

   P1:Si aumenta el precio de la nafta, aumenta el precio del transporte.

   P2:Aumenta el precio del transporte.

   Q:Por lo tanto, aumenta el precio de la nafta.

2) Premisas V, Conclusión F, Razonamiento No Válido

   P1:Algunos presidentes son abogados.

   P2:Mauricio es presidente

   Q:En consecuencia Mauricio es abogado.

Ejemplos:

3) Premisas F, Conclusión V, Razonamiento No Válido

P1:Los leones son felinos y vegetarianos.

P2:Los leones son vegetarianos

Q:Se deduce que los leones son felinos

4) Premisas F, Conclusión F, Razonamiento No Válido

P1:Si Hugo es camionero, entonces es pobre.

P2:Hugo es pobre

Q:Concluimos que Hugo no es camionero.

Ejemplos:

5) Premisas F, Conclusión V, Razonamiento Válido

Todos los abogados usan computadoras.

Daniel Arch no usa computadora.

Luego, Daniel Arch no es abogado.

6) Premisas F, Conclusión F, Razonamiento Válido

Si San Martín cruzó Los Andes entonces ganó todas las batallas

San Martín cruzó Los Andes

San Martín ganó todas las batallas

Ejemplos:

7) Premisas V, Conclusión V, Razonamiento Válido

Todo número primo es divisible por si mismo.

7 es un número primo

<u>5 también es primo</u>

7 es divisible por si mismo y 5 es divisible por 5

VALORES DE VERDAD DE LAS PREMISAS	VALORES DE VERDAD DE LA CONCLUSION		NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO
	VERDADERA	FALSA	
VERDADERAS	1	2	NO VALIDO
FALSAS	3	4	
FALSAS	5	6	VALIDO
VERDADERAS	7	8	

8) No existen razonamientos válidos con premisas verdaderas y conclusiones falsas

En un razonamiento válido
de premisas verdaderas
se siguen conclusiones verdaderas.

Ejemplo

P1	Si soy tu hijo, tu eres mi padre	P1: $p \rightarrow q$
P2	Tu eres mi padre	P2: q
Q	∴ Yo soy tu hijo	Q : $\therefore p$

Este razonamiento no es correcto!!?? Porque?

Porque su forma (su estructura lógica) no es correcta.

P1	Si soy cordobés, soy argentino	P1: $p \rightarrow q$
P2	Soy argentino	P2: q
Q	∴ Soy cordobés	Q : $\therefore p$

Puedo encontrar un caso de sustitución o una interpretación que haga el razonamiento no válido

Paul canta si Ringo toca la batería y John la guitarra

Si Ringo no toca la batería entonces George toca el bajo

John toca la guitarra y Paul no canta

∴ George toca el bajo

Si la puerta estaba cerrada y el asesino escapo, entonces debe haber salido por la ventana

Si la puerta no estaba cerrada entonces el asesino tenía llave

El asesino escapo, pero no lo hizo por la ventana

∴ El asesino tenía llave

Paul canta si Ringo toca la batería y John la guitarra

Si Ringo no toca la batería entonces George toca el bajo

John toca la guitarra y Paul no canta

∴ George toca el bajo

Si la puerta estaba cerrada y el asesino escapo, entonces debe haber salido por la ventana

Si la puerta no estaba cerrada entonces el asesino tenía llave

El asesino escapo, pero no lo hizo por la ventana

∴ El asesino tenía llave

¡Los dos razonamientos tienen la misma estructura!

$$q \wedge r \rightarrow p$$

$$\sim q \rightarrow s$$

$$\underline{r \wedge \sim p}$$

$$\therefore s$$

Como demostramos la validez de un razonamiento?

- P1 Si estudio aprobaré Matemática Discreta
- P2 Estudio

- Q ∴ Aprobaré Matemática Discreta

1°Convierto las proposiciones al lenguaje de la lógica proposicional

P1: $p \rightarrow q$

P2: p

Q : $\therefore q$

2° Construir la tabla de verdad de las proposiciones que forman el razonamiento

		P1	P2	P1∧P2	Q	P1∧P2→Q
p	q	p→q	p	p→q ∧ p	q	((p→q)∧p)→q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V

Si cada vez que las premisas son verdaderas la conclusión es verdadera, el **razonamiento** es **VALIDO**

Como P1∧P2→Q es ***una tautología***
el **razonamiento es VALIDO**

1) $q \wedge r \rightarrow p$
2) $\sim q \rightarrow s$
3) $\underline{r \wedge \sim p}$
4) $\therefore s$

p	q	r	s	$\sim p$	$\sim q$	$q \wedge r$	$q \wedge r \rightarrow p$ (1)	$\sim q \rightarrow s$ (2)	$r \wedge \sim p$ (3)	$\wedge$	**Q** s	$\rightarrow$
V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V

Ejercicio

Dadas las siguientes proposiciones, encuentre una conclusión relacionada con la variación de la inflación y demuestre que el razonamiento es válido.

- Cuando el precio internacional del petróleo sube, el de la nafta también.
- Pero si el precio de la nafta se incrementa y el dólar no, entonces la inflación no sube.
- El precio del petróleo no se incrementó y la inflación no subió.

- Que pasó con el precio de la nafta?

Cuando el número de variables proposicionales es mayor a cuatro el método del condicional asociado para decidir la validez de un razonamiento se vuelve cada vez más engorroso puesto que el número de filas de la tabla de verdad crece exponencialmente con el número de aquellas. Así para 5 variables el número de filas de la tabla de verdad es de 32. Un método alternativo es el denominado método demostrativo o de deducción natural donde la validez del razonamiento se deduce por aplicación de un conjunto de ***reglas de inferencia***.

REGLA DE INFERENCIA deductiva es una forma válida de razonamiento que se aplica a casos concretos para deducir un enunciado a partir de otro u otros

Son nexos lógicos que permiten obtener razonamientos

El lenguaje ***formal*** de la lógica (Un cálculo)

1- ***Vocabulario.***

Conjunto de símbolos o elementos primitivos

2- ***Reglas de formación***

Cuales son las combinaciones correctas de símbolos

3- ***Reglas de transformación***

Permite construir a partir de una combinación correcta de símbolos (*fbf*)

otra combinación también correcta.

Algunas reglas de inferencia

Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Silogismo Hipotetico

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Silogismo Disyuntivo

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Reglas de Inferencia

De Introducción		De Eliminación	
I∧	$\frac{A \quad B}{A \land B}$	E∧	$\frac{A \land B}{A}$ $\frac{A \land B}{B}$
I∨	$\frac{A}{A \lor B}$ $\frac{B}{A \lor B}$	E∨	$\frac{A \lor B \quad A \to C \quad B \to C}{C}$
I→	$\frac{\begin{array}{c} A \\ \dots \\ B \end{array}}{A \to B}$	E→	$\frac{A \to B \quad A}{B}$
I↔	$\frac{A \to B \quad B \to A}{A \leftrightarrow B}$	E↔	$\frac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$ $\frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$
I¬	$\frac{\begin{array}{c} A \\ \dots \\ B \land \neg B \end{array}}{\neg A}$	E¬	$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \dots \\ B \land \neg B \end{array}}{A}$

Ejemplo

Si el partido A gana las elecciones, tendrá mayoría en el Congreso

Si tiene mayoría en el Congreso, el presidente podrá cumplir el programa de gobierno propuesto.

El presidente no podrá cumplir su programa de gobierno o la oposición se opondrá duramente. Pero la oposición no se opondrá duramente. Por lo tanto, el partido A no ganará las elecciones.

- ***p***: El partido A gana las elecciones
- ***q***: El partido A tendrá mayoría en el Congreso
- ***r***: El presidente podrá cumplir el programa de gobierno propuesto
- ***s***: La oposición se opondrá duramente.

Ejemplo

- ***p***: El partido A gana las elecciones
- ***q***: El partido A tendrá mayoría en el Congreso
- ***r***: El presidente podrá cumplir el programa de gobierno propuesto
- ***s***: La oposición se opondrá duramente.

$$
\begin{aligned}
P_1&: p \to q \\
P_2&: q \to r \\
P_3&: \ r \lor s \\
P_4&: \quad \neg s \\
Q&: \quad \neg p
\end{aligned}
$$

Deducción natural

Aplicamos las reglas de inferencia para pasar de las premisas a la conclusión

1) $p \rightarrow q$
2) $q \rightarrow r$
3) $r \vee s$
4) $\neg s$ $\qquad Q: \neg p$

---

5) $p \rightarrow r$ Por SH (Silogismo Hipotético) en 1) y 2)
6) $r \rightarrow s$ Por equivalencia del condicional simple en 3)
7) $p \rightarrow s$ Por SH en 5) y 6)
8) $\neg p$ Por MT (Modus Tollens) en 4) y 7) (QED)

1) $q \wedge r \rightarrow p$
2) $\sim q \rightarrow s$
3) $\underline{r \wedge \sim p}$
4) $\therefore s$

5) q	Suponemos que q es verdad
6) r	($E\wedge$) en 3
7) $q \wedge r$	($I\wedge$) en 5 y 6
8) p	($E\rightarrow$) en 1 y 7
9) $\sim p$	($E\wedge$) en 3 y 6
10) $\sim q$	($I\sim$) en 5, 8 y 9
11) s	($E\rightarrow$) en 2 y 10

Implicación Lógica

- *Dadas dos proposiciones compuestas $P(p,q,\ldots,z)$ y $Q(p,q,\ldots,z)$ se dice que P implica lógicamente a Q y se denota $P \Rightarrow Q$* ***si para cualquier combinación de valores de verdad de p,q,….z que hagan a P verdadera resulta Q también verdadera***

- *Dadas dos o mas proposiciones llamadas hipótesis o premisas, y una proposición Q llamada conclusión llamaremos razonamiento a la relación entre ellas, denotada por: $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \therefore Q$ y diremos que la misma es válida,* ***si Q resulta verdadera cada vez que las premisas sean simultáneamente verdaderas***

- ***En un razonamiento deductivo válido, la conjunción de las premisas implican lógicamente a la conclusión***

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$$

- *También se dice que la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas*

- *En un razonamiento deductivo válido de premisas verdaderas se siguen conclusiones verdaderas.*

Unidad 3
Lógica de Predicados

Resultados de aprendizaje

Que el alumno pueda:

- Observar las limitaciones del análisis de la Lógica Proposicional.
- Distinguir entre los elementos del lenguaje de la Lógica Proposicional y la de primer orden (LPO).
- Diferenciar entre proposiciones y funciones proposicionales.
- Explicar de que forma una función proposicional puede convertirse en proposición.
- Explicar el significado de las reglas de especificación y de generalización universal de la LPO y como se aplican en un razonamiento deductivo con expresiones de esta lógica.

Analicemos el sig. Razonamiento con los métodos empleados por la lógica proposicional:

Todos los números naturales son enteros

5 es un número natural

Por lo tanto 5 es un número entero

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore r \end{array}$$

p	q	r	p ∧ q	(p ∧ q) →r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

¡¡ El argumento no es válido!!??

Lógica de primer orden (LPO)

- La LPO surge para corregir los limitados recursos de la lógica proposicional para analizar proposiciones como las descriptas.
- Es necesario realizar un análisis de la estructura interna de las proposiciones (lo que en nuestro lenguaje natural sería distinguir el sujeto y el predicado de la oración)
- La LPO, también llamada ***lógica de predicados o lógica cuantificacional*** distingue entre dos clases de objetos, los que representan ***individuos*** (gramaticalmente sujetos) y los que representan ***propiedades o relaciones*** entre aquellos (gramaticalmente predicados)
- Lógicamente les llamaremos argumentos y predicados respectivamente.

Diferencia entre proposición simple entre L0 y LPO

Proposición simple (L0)

- Unidad de análisis de la lógica proposicional.
- Oración declarativa de la cual puede decirse que es verdadera o falsa

Proposición simple (LPO)

- Unidad de análisis de la lógica de Primer Orden.
- Oración declarativa de la cual puede decirse que es verdadera o falsa
- Expresión formada por un predicado y uno o mas nombres de individuo.

INDIVISIBLE

Predicados unarios o monádicos

- Tienen un solo argumento

1. Daniel estudia (Daniel es estudioso)
   a. Argumento: b. Predicado:

2. 5 es un número natural
   a. Argumento: b. Predicado:

3. Argentina tiene muchas riquezas naturales (Argentina es un país rico)
   a. Argumento: b. Predicado:

El predicado se refiere a una propiedad o atributo del sujeto o argumento.

Predicados poliádicos

- Tienen mas de un argumento. Representan ***relaciones*** entre individuos

1. Daniel estudia con Claudia
2. $5 > 2$
3. Brasil tiene mas habitantes que Argentina
4. Argentina limite con Chile, Paraguay y Bolivia.

Las estudiaremos en la unidad 5 cuyo tema son las relaciones

Proposiciones en LPO

- Las proposiciones también pueden clasificarse de acuerdo a la ***cantidad de elementos del sujeto gramatical***:

Proposiciones
- Singulares
- Generales
  - Universales
  - Particulares

Proposiciones

- **Singulares**: el sujeto o argumento es un solo individuo.

  Ej.: 5 es un número natural.

- **Generales**:
  - ✓**Universales**: el sujeto es una totalidad de individuos.

    Ej.: <u>Todos</u> los números naturales son enteros.

  - ✓**Particulares**: el sujeto es una parcialidad de individuos.

    Ej.: <u>Algunos</u> doctores son abogados.

Cuantificadores

La cantidad de elementos del sujeto gramatical introduce nuevos elementos, los ***cuantificadores***.

1) Cuantificador Universal:

Todos, Cada, Cualquiera

2) Cuantificador Particular o Existencial:

Algunos, Algún, Al menos uno

Ejemplos de expresiones cuantificadas

- Todos los números naturales son enteros.
- Los números primos son mayores que la unidad, divisibles por si mismo y por la unidad
- Si algunos perros son vertebrados entonces todos son vertebrados
- Todo número es par o impar
- Ningún número es a la vez par e impar
- Existen aves que no vuelan
- No hay gatos pardos en la obscuridad.
- $5 < 2$
- Todos los naturales son mayores que 0.

Formalizando…

El lenguaje de la LPO

- Vocabulario:
  - ✓Constantes de individuo; a ,b , c, d…
  - ✓Variables de individuo: x, y, z

    Términos
  - ✓Variables Predicativas: A, B, G, H, P, Q, R…
  - ✓Conectivos lógicos de la lógica proposicional
  - ✓Cuantificadores
    - Universal: ∀
    - Particular: ∃
  - ✓Símbolos auxiliares: (,)

El lenguaje de la LPO

- La Sintaxis:

1. Si A es una letra de predicado y $t_1,t_2,..t_k$ son términos entonces $A(t_1,t_2,..t_k)$ es una fórmula bien formada.(***fbf***)
2. Si F es una ***fbf*** también lo es $\neg F$
3. Si F y G son ***fbf***, entonces $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$,$(F \rightarrow G)$,$(F \leftrightarrow G)$ también lo son.
4. Si F es una ***fbf*** y x es una variable, entonces $\forall x(F)$ y $\exists x(F)$ también lo son.
5. Solo son ***fbf*** las definidas anteriormente.

El lenguaje de la LPO

- 5 es un número natural

  $N(a)$

- -5 no es un numero entero

  $\sim N(b)$

- Daniel estudia

  $P(d)$

- Si Daniel estudia entonces aprueba MAD

  $P(d) \rightarrow A(d)$

- 2 es un número par y primo.

  $P(a) \rightarrow Q(a)$

Formalizando el lenguaje natural en LPO

1. Ella es estudiante
2. Esto es un libro
3. Ese es un número entero
4. Aquel es el país mas feliz

1. E(x)
2. L(z)
3. Z(y)
4. P(x)

Función proposicional o Fórmula abierta o Proposición abierta en una variable x, denotada F(x) (que leeremos F de x, o x tiene la propiedad F) es toda oración declarativa que asigna una propiedad F al objeto indeterminado x.

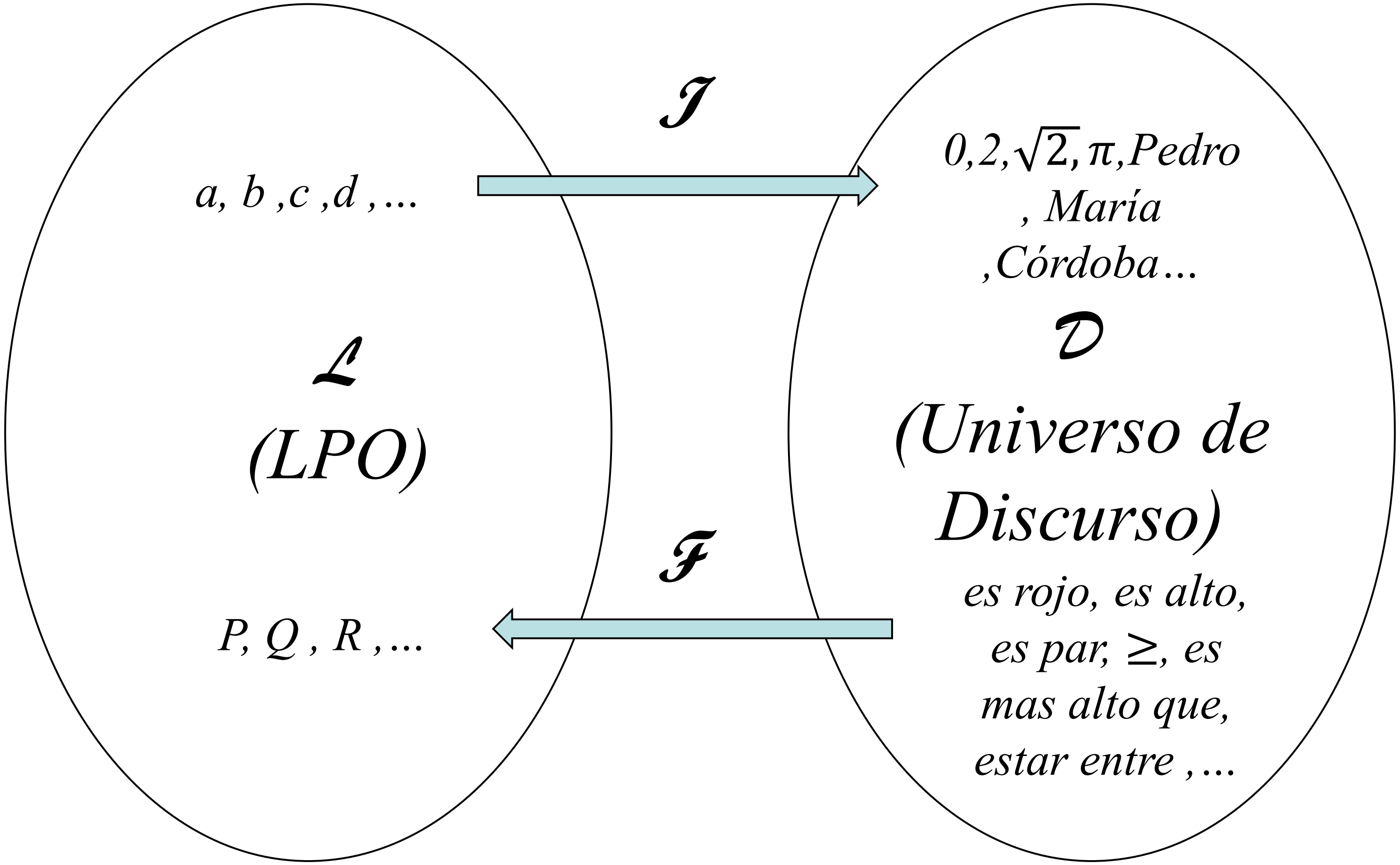
Se dice que "x" es una variable libre.

La Semántica de la LPO

- Estudia la forma en que el ***significado*** de las proposiciones depende del significado de sus partes componentes.
- Al igual que en la lógica proposicional, el ***significado*** de una proposición o fórmula cerrada se reduce a sus valores de verdad.
- De que depende el valor de verdad de una formula cerrada?

Del significado que se atribuyan a los símbolos que la componen, pero en LPO tenemos argumentos y predicados

Interpretación



Interpretar(ℐ) : Asignar a expresión (*fbf*) perteneciente al Lenguaje de la LPO (ℒ) un significado en el Universo de Discurso o Dominio (𝒟)

Universo de Discurso

- Es el conjunto o la clase formada por todos los elementos u objetos (argumentos) y sus propiedades (predicados)
- Por ejemplo si el universo de discurso $\mathcal{D}$ es el de los números naturales entonces

P(a) puede ser interpretado como "5 es un número primo" si *a* es el elemento "5" y *P* el predicado "ser un número primo" es una propiedad de ese elemento del dominio.

- *P(a)* como sabemos es verdad para este dominio.

fórmulas bien formadas

- *Abiertas o funciones proposicionales*

  $F(x)$

- *Cerradas o Proposiciones*

  V | F

Cómo convertimos funciones proposicionales en proposiciones?

1)Por Especialización

2)Por Cuantificación

Especialización

- ***Instanciación***: Acción de asignar a una variable proposicional un objeto o elemento concreto (***instancia***) de un ***universo de discurso***.
- Al instanciar la variable proposicional se dice que la proposición resultante ha sido obtenida ***por especialización***

Ejemplos:

Sea F(x): x es un número primo

F(2): 2 es un número primo **V**

F(1): 1 es un número primo **F**

Sea Q(x, y): x es mas alto que y

Q(Del Potro, Daniel Arch):

Del Potro es mas alto que Daniel Arch **V**

Cuantificación

- La ***cuantificación universal*** de F(x) es la proposición F(x) que es verdadera ***para todos los valores de x del dominio***"

  Simbólicamente: $\forall x : F(x)$

- La ***cuantificación existencial*** de F(x) es la proposición F(x) que es verdadera ***para al menos un elemento x en el dominio***"

  Simbólicamente: $\exists x : F(x)$

Cómo se verifica que una proposición cuantificada es verdadera o falsa

- ✓ Si la proposición esta cuantificada universalmente la veracidad debe ser comprobada ***para todos*** los elementos del dominio o universo de discurso.

- ✓ Si la proposición esta cuantificada existencialmente basta con que la veracidad sea comprobada ***para un elemento*** del dominio o universo de discurso.

Un ingeniero, un matemático y un físico viajan en un tren por Irlanda. Miran por la ventana y ven una oveja negra.

- El matemático exclama: "¡Extrapolando se podría decir que en Irlanda TODAS las ovejas son negras!"
- El ingeniero dice: "No es cierto, experimentalmente vemos que AL MENOS UNA oveja en Irlanda es negra. Del resto no tenemos datos."
- El físico dice: "No es exacto. Experimentalmente sólo podemos afirmar que en Irlanda al menos UNO DE LOS LADOS de una oveja es negro."

Clase

Recordemos que un predicado abierto simple o unario es aquel que tiene un solo argumento. También lo llamamos función proposicional.

Por ejemplo: *P(x): x es un hombre*

donde "*x*" es una *variable libre*

Clase es la ***extensión*** de un predicado abierto simple entendiéndose como tal el conjunto de todos los valores que hacen verdadero dicho predicado o función proposicional.

$$\forall x : P(x)$$

donde "*x*" es una *variable ligada* porque esta bajo el alcance de un cuantificador.

Determinación de una clase

$P(x)$: *x es hombre* — *P: ser hombre*

$\forall x : P(x)$ define la clase de los hombres *(LPO)*

$\forall x : x \in P$ define la clase de los hombres *(TC)*

$P(x)$: *x es una vocal* — *P:ser una vocal*

$\forall x : P(x)$ define la clase de las vocales *(LPO)*

$\forall x : x \in V$ define la clase de las vocales *(TC)*

$P(x)$: *x es un argentino* — *P: ser argentino*

$\forall x : P(x)$ define la clase de los argentinos *(LPO)*

$\forall x : x \in \mathrm{A}$ define la clase de los argentinos *(TC)*

LPO: Lógica de Primer Orden

TC: Teoría de Conjuntos

Negaciones de cuantificadores

$F(x)$: x es argentino

$\forall x : F(x)$ Todos son argentinos

$\exists x : F(x)$ Algunos son argentinos

$$\sim\forall x : F(x) \quad \equiv \quad \exists x : \sim F(x)$$

No todos son argentinos — Alguien no es argentino

$$\sim\exists x : F(x) \quad \equiv \quad \forall x : \sim F(x)$$

No existe alguien argentino — Todos no son argentinos

Nadie es argentino

Proposiciones categóricas

- Proposiciones generales complejas que tienen dos predicados bajo el alcance de un cuantificador.
- Fueron estudiadas por Aristóteles que las trató como relaciones entre categorías o clases, actuando una de ellas como sujeto y la otra como predicado gramatical.

Proposiciones categóricas

- Universal Afirmativa (A)
  - Todo S es P
    - Ej.: Todos los cordobeses son argentinos

Dos predicados:

C: ser cordobés

A: ser argentino

$$\forall x : C(x) \boxed{\rightarrow} A(x) \qquad \boxed{V \rightarrow F}$$

$$\forall x : x \in C \rightarrow x \in A$$

Dos Clases:

C: de los cordobeses

A: de los argentinos

- Universal Negativa (E)
  - Ningún S es P
    - Ej.: Ningún ave tiene branquias

$$\forall x : Ax) \boxed{\rightarrow \neg} B(x)$$

$$\forall x : x \in A \rightarrow x \notin B$$

Si x es un ave entonces no tiene branquias

Proposiciones categóricas

- Particular Afirmativa (I)
  - Algún S es P
    - Ej.: Algunos estudiantes son profesionales

$$\exists x : E(x) \boxed{\wedge} P(x)$$

$$\boxed{V \wedge V}$$

$$\exists x : x \in E \wedge x \in P$$

- Particular Negativa (O)
  - Algún S no es P
    - Ej.: Algunos animales no tienen branquias

$$\exists x : A(x) \boxed{\wedge} \neg B(x)$$

$$\exists x : x \in A \wedge x \notin B$$

Formalizando expresiones cuantificadas

- Todo pasa $\forall x{:}\, P(x)$
- Nada cambia $\forall x{:} \sim P(x)$
- Todos los números naturales son enteros. $\forall x{:}\, N(x) \rightarrow Z(x)$
- Si algunos perros son vertebrados entonces todos son vertebrados $\exists x{:}\, P(x) \wedge V(x) \rightarrow \forall x{:}\, P(x) \rightarrow V(x)$
- Todo número es par o impar

  $\forall x{:}\, N(x) \rightarrow P(x) \vee \forall x{:}\, N(x) \rightarrow I(x)$
- Ningún número es a la vez par e impar

  $\sim \exists x{:}\, N(x) \wedge (P(x) \wedge I(x))$
- Existen aves que no vuelan $\exists x{:}\, P(x) \wedge \sim Q(x)$
- No hay gatos pardos en la obscuridad. $\sim \exists x{:}\, G(x) \wedge O(x)$

Negación de Cuantificadores
Algunas equivalencias

$$\neg\forall x : P(x) \rightarrow Q(x) \quad \equiv \quad \exists x: P(x) \wedge \neg Q(x)$$

$$\neg\exists x: P(x) \wedge Q(x) \quad \equiv \quad \forall x: P(x) \rightarrow \neg Q(x)$$

$$\neg\forall x: P(x) \rightarrow \neg Q(x) \quad \equiv \quad \exists x: P(x) \wedge Q(x)$$

$$\neg\exists x: P(x) \wedge \neg Q(x) \quad \equiv \quad \forall x: P(x) \rightarrow \neg Q(x)$$

Razonamientos Deductivos en LPO

Necesitaremos dos reglas adicionales a las ya estudiadas:

- Regla de Especificación Universal (REU)
- Regla de Generalización Universal (RGU)

La REU permite eliminar el cuantificador universal

La RGU permite introducir el cuantificador universal

Razonamientos Deductivos

- ***Regla de Especificación Universal (REU)***
  - Si $\forall x{:}F(x)$ es una proposición verdadera en un dominio determinado D, entonces *F(x)* es verdadera para cualquier elemento del dominio (variable o constante)

$$\frac{\forall x{:}F(x)}{F[t/x]}$$

General

Particular

Todos los números naturales son enteros

5 es un número natural

Por lo tanto 5 es un número entero

P_1: $\forall x: N(x) \rightarrow Z(x)$

P_2: $N(a)$

Q: $\therefore Z(a)$

1) N(a) → Z(a) — *por R.E.U en P_1*

2)N(a) — *P_2*

3)Z(a) — *por Modus Ponens en 1 y 2*

Razonamientos Deductivos

- ***Regla de Generalización Universal (RGU)***
  - *Si $F(x)$* es verdadera al reemplazar x con un elemento elegido de ***manera arbitraria*** (x_0), entonces la proposición $\forall x{:}F(x)$ es una proposición verdadera en el dominio.

$$x_0$$

$$\vdots$$

$$\frac{F[x_0/x]}{\forall x{:}F(x)}$$

Regla de Generalización Universal

- Si una función proposicional tiene todos sus casos de sustitución por constantes de su conjunto de referencia verdaderos, se infiere la verdad del enunciado $\forall x{:}P(x)$.

Si $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d) \wedge \ldots P(n)$ son verdaderos $\rightarrow \forall x{:}P(x)$ es verdad.

R.G.U.

Consideremos esta deducción:

P_1. Los argentinos somos personas solidarias

P_2. Los personas solidarias no tienen fortuna.

Llamemos Pepe a un argentino:

Por REU en P_1 sabemos que Si Pepe es argentino, Pepe es solidario. Concluimos que nuestro Pepe es solidario.

Por REU en P_2 sabemos que si Pepe es solidario no tiene fortuna. Concluimos que Pepe no tiene fortuna.

Por tanto, Si Pepe es argentino, Pepe no tiene fortuna(MP) Pero lo que vale para Pepe, vale para cualquier otro nombre que le hubiésemos dado. Por tanto:

C. $\therefore$ Los argentinos no tienen fortuna.

R.G.U.

Formalizando:

1. $\forall x$: $P(x) \rightarrow Q(x)$ premisa
2. $\forall x$: $Qx) \rightarrow R(x)$ premisa

⌈	3. $P(c)$	hipótesis
|	4. $P(c) \rightarrow Q(c)$	REU 1
|	5. $Q(c) \rightarrow R(c)$	REU 2
|	6. $Q(c)$	MP 3, 4
⌊	7. $R(c)$	MP 5, 6

8. $P(c) \rightarrow J(c)$ I $\rightarrow$ 3-7
9. $\forall x$: $P(x) \rightarrow R(x)$ RGU 8

Nótese que esta deducción funciona igual *sea cual sea* la constante individual por la que sustituimos la *x*. Si en vez de *c*, usamos *a* o *b* nuestra conclusión no varía. Es decir, la conclusión se cumple para *todo individuo* del dominio.

Es válido el sig. razonamiento:?

- Todos los cordobeses son argentinos
- Todos los argentinos son sudamericanos

∴ Todos los cordobeses son sudamericanos

$$
\begin{array}{ll}
P_1: & \forall x: C(x) \rightarrow A(x) \\
P_2: & \underline{\forall x: A(x) \rightarrow S(x)} \\
Q: & \forall x: C(x) \rightarrow S(x)
\end{array}
$$

1) $C(x_0) \rightarrow A(x_0)$ *por R.E.U en* P_1

2) $A(x_0) \rightarrow S(x_0)$ *por R.E.U en* P_2

3) $C(x_0) \rightarrow S(x_0)$ *por S. H. en 1 y 2*

4) $\forall x: C(x) \rightarrow S(x)$ *por R.G.U en 3*

Unidad 3
Inducción Matemática

Resultados de aprendizaje

Que el alumno pueda:

- Distinguir entre razonamientos deductivos e inductivos.
- Definir que es un número natural de acuerdo a la axiomática de Peano.
- Definir el principio de Inducción Matemática.
- Aplicar el principio anterior para determinar el valor de verdad de proposiciones referidas a los números naturales.

QUE ES UN NÚMERO NATURAL?

Los axiomas de Peano (1889)

Se llama conjunto de ***los números naturales***, y se denota por N, a cualquier conjunto que verifica las cinco condiciones siguientes:

(1) Existe un elemento de N al que llamaremos uno 1, esto es, $1 \in N$:

(2) Para cada número $n \in N$ existe otro número natural único que llamaremos el sucesor de n y denotaremos $s(n)$

(3) El 1 no es sucesor de ningún número natural. ($\forall\, n \in N$, $s(n) \neq 1$).

(4) Sean n, m $\in$ N, entonces: $s(n) = s(m) \leftrightarrow n = m$

(5) ***Principio de inducción matemática*** ($\equiv$ Principio del buen orden)

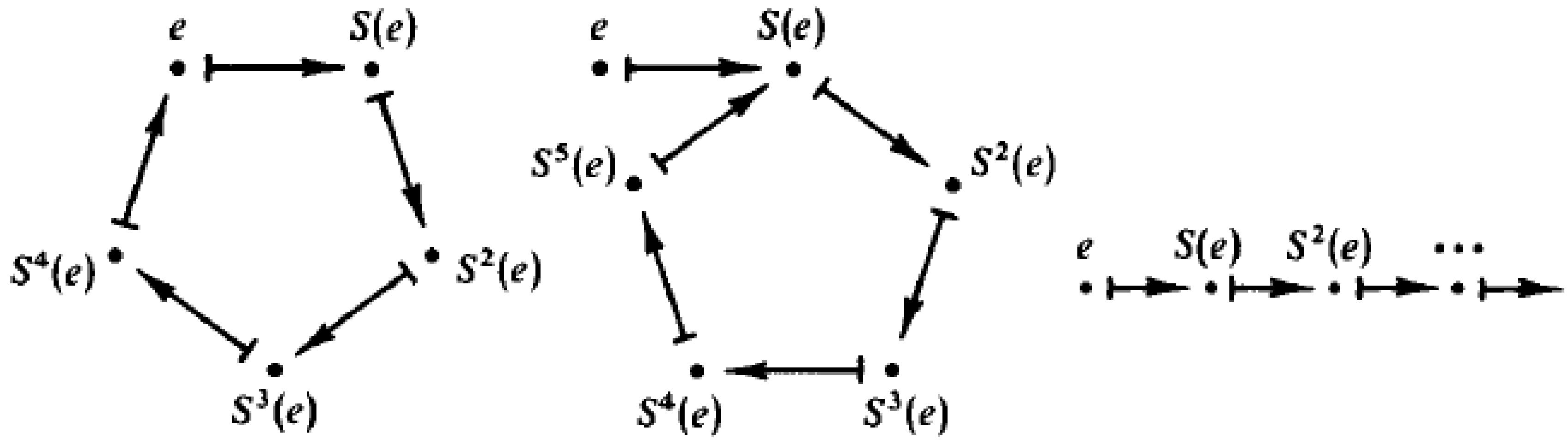
Sea A un subconjunto de N. Si

a) $1 \in A$

b) Si para cada elemento $n \in A$; se tiene que $s(n) \in A$

entonces $A = N$

Los axiomas de Peano



1) y 2) ***1), 2) y 3)*** ***1), 2). 3) y 4)***

Fig. 16. Any Peano system must behave like (c).

Principio del buen orden

- Establece que todo conjunto que está formado únicamente por números naturales tiene un primer elemento o elemento mínimo.

  Sea A un subconjunto de números naturales.

  Simbólicamente:

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in A, \forall n \in A, m < n$$

Cómo se lee esta última expresión?

- Sabemos de lo visto en LPO que una función proposicional cuantificada universalmente $\forall x{:}F(x)$ es una proposición y por lo tanto podemos decir que es verdadera o falsa.
- Sabemos también que para demostrar su veracidad debe cumplirse que debe ser verdadera para todos los elementos del dominio.
- Como demostramos algo que afirmamos cuando el dominio es el de los números naturales ?

Ejemplo

- Euler (1707-1783)

  Conjetura: El valor del polinomio: $n^2 + n + 41$ es un número primo para todo $n \in N$

$$\forall x \in N : F(x) \equiv \forall n : P(n)$$

Cual es el dominio o universo de discurso?

Cual es la expresión de *P(n)? (argumento y predicado)*

n	:	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2+n+41	:	43	47	53	61	71	83	97	113

Pero para $n = 40$, $n^2+n+41=41^2=1681$

Principio de Inducción Matemática

Consideremos una función proposicional *P(n)* referida a los números naturales ($n \in N$)

Si la función proposicional *P(n)* es tal que:

a) Se cumple que *P(1)* es verdadera

b) Asumiendo que $P(k)$ es verdadera, se verifica que $P(k+1)$ es verdadera,

Entonces, *P(n)* se cumple para todo natural

Particular

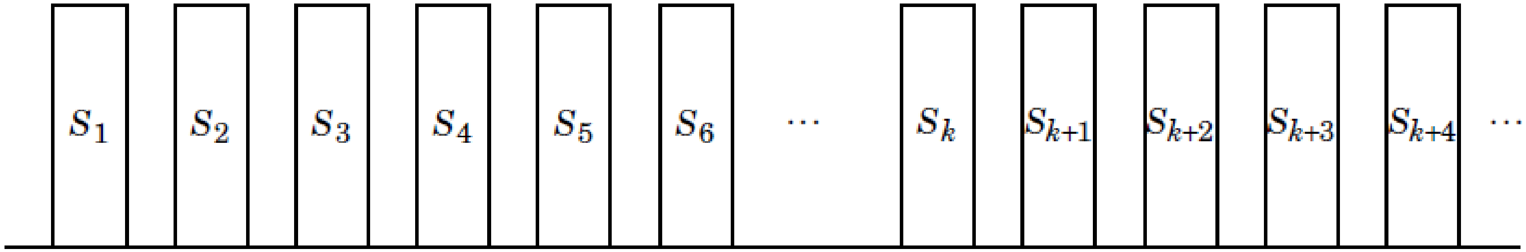
General

Hipótesis inductiva

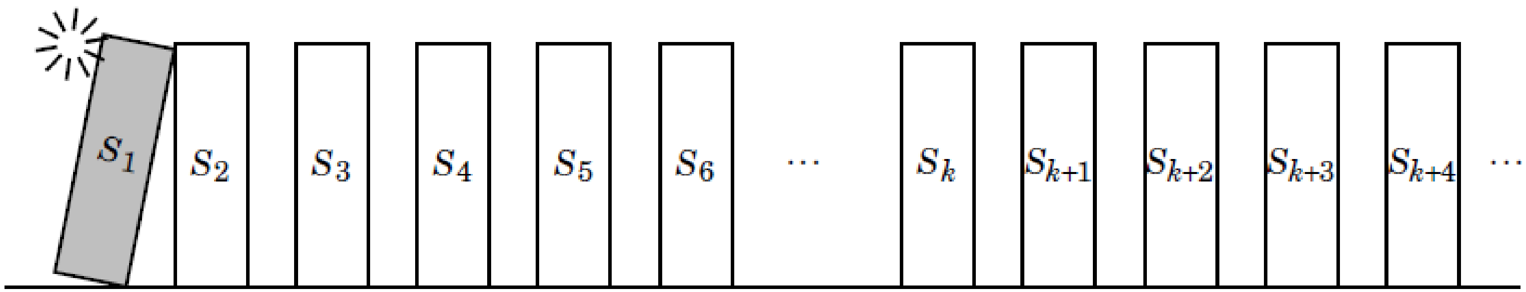
$$\big(P(1) \wedge \underbrace{(P(k) \rightarrow P(k+1))}_{\text{b) Paso inductivo}}\big) \rightarrow P(n) \quad \forall k,n \in N$$

a) Paso base

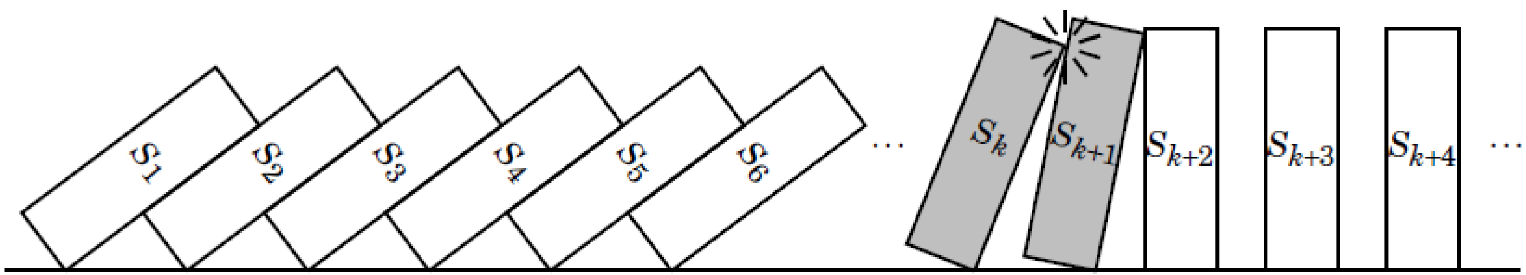
The Simple Idea Behind Mathematical Induction



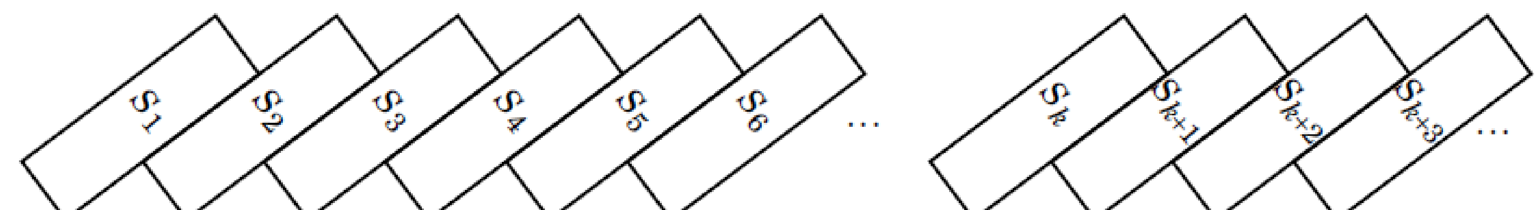
Statements are lined up like dominoes.



(1) Suppose the first statement falls (i.e. is proved true);



(2) Suppose the k^{th} falling always causes the $(k+1)^{th}$ to fall;



Then all must fall (i.e. all statements are proved true).

Ejemplo 1

Demostrar que $n^3 + 2n$ es divisible por 3 para n que es un número natural.

Utilizando la definición de inducción matemática tenemos que demostrar que para todo n que pertenece a los números naturales se cumple que 3 divide a $n^3 + 2n$. Simbólicamente:

$\forall n \epsilon N: P(n)$ donde el predicado P(n) se interpreta como 3 divide a $n^3 + 2n$

Luego lo que tenemos que demostrar se puede escribir como: $\forall n \epsilon N: 3 \mid n^3 + 2n$

$$\forall n \in N: 3 \mid n^3 + 2n$$

- **Paso Base**:

  $n=1 \quad 3 / 1^3 + 2x1 = 1 + 2 = 3$ ✓

- **Paso Inductivo**:

  Hipótesis Inductiva: Suponemos que la expresión se cumple para cualquier número natural, llamémosle k, luego

  $3 \mid k^3 + 2k$ ①

Debemos demostrar que si se cumple para k se cumple para k+1

Reemplazando en ① a k por k+1

$$3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$$

Desarrollando $(k+1)^3 + 2(k+1)$ obtenemos:

$$3 \mid k^3 + 3 \cdot k^2 \cdot 1 + 3 \cdot k \cdot 1^3 + 1^3 + 2 \cdot k + 2$$

Reordenando $3 \mid k^3 + 2 \cdot k + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 3$

$3 \mid k^3 + 2 \cdot k + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 3$

Sacando factor común $3 \mid k^3 + 2 \cdot k + 3\,(k^2 + k + 1)$

Por Hipótesis inductiva sabemos que

$3 \mid k^3 + 2k$ y vemos que

$3 \mid 3\,(k^2 + k + 1)$ pues $a \mid b \rightarrow a \mid n \cdot b$

Sabemos que si $a \mid b$ y $a \mid c \rightarrow a \mid b + c$ entonces

$3 \mid k^3 + 2 \cdot k + 3\,(k^2 + k + 1)$ o lo que es lo mismo

$3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$ ✓

Generalizando la definición de Inducción Matemática:

- *Una función proposicional* $\boldsymbol{F(n)}$ *referida a los números naturales es verdadera para cualquier número natural* $\boldsymbol{n \geq n_0}$ *si se satisfacen las siguientes condiciones:*
- ***Base Inductiva****) La proposición* $\boldsymbol{F(n_0)}$ *es verdadera para cualquier número natural* $\boldsymbol{n_0}$
- ***Paso Inductivo****) La veracidad de* $\boldsymbol{F(k)}$ *para cualquier número natural* $\boldsymbol{k \geq n_0}$ *implica la veracidad de* $\boldsymbol{F(k+1)}$ *para el número natural siguiente* $\boldsymbol{k+1}$

Ejercicio

1) Determine para que valores de $n \in N$ es verdadera la siguiente desigualdad:

$$2^n > n^2 + 4n + 5$$

Sucesiones

1	2	3	4	5	6
2	4	8	16	32	64

Definición: Una ***sucesión*** es una estructura discreta utilizada para representar una lista ordenada de elementos.

A cada número natural se le hace corresponder otro, generalmente un número real.

$a_1,\ a_2,\ a_3,..a_k$, …son los ***términos*** de la sucesión

a_k es un ***término*** genérico de la sucesión

$$a_k = 2^k$$

k es un índice

$\{\boldsymbol{a_k}\}$ es la expresión generalizada de una sucesión con ***término*** genérico a_k

Sucesiones

Ejercicio: Cuáles serán los próximos elementos de las siguientes sucesiones?

1,2,3,4,5,… k 2,4,8,16,32,… 2^k

1,3,5,7,9,… $2k+1$

2,4,6,8,10,… $2k$

7,11,15,19,23,… $7+4k$

Puedes encontrar el término genérico de estas sucesiones?

Series

Dada la sucesión $a_1,\ a_2,\ a_3, .. a_k, \ldots;$ una expresión del tipo
$a_1 + \ a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots$
Se llama ***serie*** y se representa abreviadamente con la siguiente simbología:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Para cada k $\geq$ 1 la suma:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

Se llama la suma parcial k-ésima

Series

Ejercicio: Cuanto vale la siguiente suma parcial

$$S_7 = \sum_{i=1}^{7} k$$

Si k=1 $S_1 = a_1 = 1$

Si k=2 $S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$

Si k=3 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

Si k=4 $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Podemos encontrar una expresión generalizada para calcular la suma de cualquier número de términos de la sucesión, sin tener que sumarlos uno a uno?

$$S_k = k * (k+1) / 2$$

- Ejemplo 2

  Demostrar que la suma de los primeros *n* números naturales es igual a:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Paso Base**:

$$n{=}1 \qquad S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \qquad \checkmark$$

- **Paso Inductivo**:

  Hipótesis Inductiva: Suponemos que la expresión se cumple para un n cualquiera, llamemosle *k* luego:

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2} \quad ①$$

Pero $\quad S_k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k$

Debemos demostrar que la sumatoria se cumple para *k+1*

Reemplazando en ① a *k* por *k+1*, debemos demostrar:

$$S_{k+1} = \frac{k+1(k+2)}{2}$$

Si $S_k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k$

Entonces $S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k + 1)$, o

$S_{k+1} = S_k + (k + 1)$ ②

Por hipótesis inductiva $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$

Reemplazando en ② $S_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$

Sacando común denominador

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

Sacando factor común (k+1) en el numerador

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad ✓$$