Universidad Tecnológica Nacional – FRC
Ingeniería en Sistemas de Información
MAD 2020

Matemática Discreta

Guía de Ejercicios a Resolver

Unidad 3

Confección, análisis y selección de ejercicios
Ing. María Aurelia Jurio
Con colaboración de integrantes de la cátedra

Unidad N° 3: Razonamiento

Razonamiento Deductivo

1. Exprese simbólicamente los siguientes razonamientos:

a) Si los archivos llenan el disco duro, la computadora se pone lenta. Los archivos llenan el disco duro si y solo si el disco duro es muy chico. La computadora se pone lenta. Por tanto, el disco duro es muy chico.

b) la Lógica es difícil o no gusta a muchos estudiantes. Si la Matemática es fácil entonces la Lógica no es difícil. Por tanto, si a muchos estudiantes les gusta la Lógica entonces la Matemática no es fácil.

c) Si ha nevado, no será fácil conducir. Si no es fácil conducir, llegaré tarde si y sólo si no salgo temprano. Ha nevado y no llegaré tarde. Por tanto, salgo temprano.

d) Si Marcos gana, entonces Rafael o Enrique serán segundos. Si Rafael es segundo, entonces Marcos no ganará. Si Alberto es segundo, entonces Enrique no será segundo. Por tanto, si Marcos gana, entonces Alberto no será segundo.

e) Si Ana compra una tablet, se podrá comunicar con los amigos. Si tiene dinero, Ana compra una tablet. Si ella no compra una tarjeta de recarga de celular entonces que no tiene dinero. Ella ha cobrado y tiene dinero. Por tanto, Ana comprará una tarjeta de recarga de celular y se podrá comunicar con los amigos.

f) Si Laura aprueba Matemática, su padre se pondrá contento. Laura estudio Matemática y realizó todos los ejercicios. Si Laura estudia matemática aprobará. Por tanto Laura realizó todos los ejercicios y su padre se pondrá contento.

g) Si Cristina está en lo cierto entonces Marcos está equivocado. Si Marcos está equivocado entonces Pablo también está equivocado. Si Pablo está equivocado entonces el espectáculo no es esta noche. O el espectáculo es esta noche o Javier no lo verá. Cristina está en lo cierto. Por tanto Javier no verá el espectáculo.

2. Verifique la validez del ***modus tolens***:

"Si tiene permiso de conducir, entonces es mayor de edad. No es mayor de edad. Por lo tanto, no tiene permiso de conducir".

3. Verifique la validez del ***silogismo hipotético***:

"Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola blanca golpea a la bola negra. Si la bola blanca golpea a la bola negra, la bola negra se mueve. Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola negra se mueve"

4. ☑ Exprese simbólicamente y establezca la validez de los siguientes razonamientos:

a) Si soy rico, tengo la aprobación divina.
Soy rico.
Por lo tanto, tengo la aprobación divina.

b) ☑ Me gusta comer.
Si estoy obeso, me gusta comer.
Por lo tanto, no estoy obeso.

c) Si estudio, entonces apruebo el examen.
Si apruebo el examen, cursaré la correlativa.
Cursaré la correlativa.
Por lo tanto, estudio.

d) Si regularizo 1er año, puedo cursar 2do.
No puedo cursar 2do año
Por lo tanto, no regularicé 1er año.

e) Siete es un número primo.
Dos no es un número primo.
Si dos es un número primo, entonces siete también.
Por lo tanto, dos y siete son primos.

f) Si 5 es un número primo, entonces 5 no divide a 15
5 divide a 15
Por lo tanto, 5 no es un número primo

g) ☑ Si aumento mis ingresos, pago más impuestos a las ganancias.
Si aumento mis ingresos, compraré una casa.
Aumento mis ingresos.
Por lo tanto, si pago más impuestos a las ganancias, compraré una casa.

h) Si gasto poco, ahorro dinero.
Viajaré a París, sí y sólo sí, ahorro dinero.
No ahorro dinero y no viajaré a París.
Por lo tanto, si gasto poco, viajaré a París.

i) Si me gustan las matemáticas, entonces estudiaré
Ni estudio ni suspendo el cursado
Por lo tanto, si suspendo el cursado, entonces no me gustan las matemáticas

j) Si estudio, entonces no me atraso en la carrera
Si no juego al baloncesto, entonces estudiaré

Pero me atrasé en la carrera
____
Por lo tanto, jugué al baloncesto

k) Si estudio, entonces apruebo el examen
Si apruebo el examen entonces cursaré la correlativa
____
Por lo tanto, si estudio, cursaré la correlativa

l) Si trabajo, no puedo estudiar.
Trabajo o apruebo matemáticas.
Apruebo matemáticas.
____
Por lo tanto, puedo estudiar.

m) Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7
O 5 no es primo, o 2 no divide a 7
Pero 5 no es primo.
____
Por lo tanto, 6 es impar.

n) El verano será muy soleado e iré a la playa todos los días
No es cierto, que si voy a la playa todos los días no podré ir al teatro
Iré al teatro si y solo si el verano no es soleado
____
Por lo tanto, si no voy a la playa todos los días, iré al teatro

Funciones Proposicionales y Clases

5. ☑ P(x) indica la sentencia $x+2>5$. Declare si P(x) es una función proposicional en cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbf{Z}^+$, el conjunto de los números enteros positivos**.**
b) **M** = {-1, -2, -3, …}
c) **O** = {0, 1, 2, 3}
d) **C** = {x/x es color primario}

6. ☑ Determine el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes siendo que **R** es el conjunto universal, y que **x** $\in$ **R**.

a) $\forall x: |x| = x$ **b)** $\exists x / x^2 = x$ **c)** $\forall x: x+1 > x$ **d)** $\exists x / x+2 = x$

e) $\forall x: x^2 = x$ **f)** $\exists x / 2x = x$ **g)** $\forall x: x-3 < x$ **h)** $\exists x / x^2 -2x+5 = 0$

7. Sea **A = {1,2,3,4,5}**. Determine el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes sabiendo que $x \in A$.

a) $\exists x/\ (x+3 = 10)$ **b)** $\forall x:\ (x+3<10)$ **c)** $\exists x/\ (x+3<5)$

d) $\forall x:\ (x+3 \leq 7)$ **e)** $\forall x:\ (x+3 < 6)$ **f)** $\exists x/\ (x+3 < 6)$ **g)** $\exists x/\ (2x^2 + x = 15)$

8. ☑ En los ejercicios **a)** al **h)**, utilice: P(x): *x es par*; Q(x): *x es un número primo*; y R(x,y): *x+y es par*.

Sabiendo que las variables **x** y **y** representan enteros, exprese por escrito el significado que le sugiere cada una de las siguientes proposiciones y determine su valor de verdad.

a) $\forall x:\ P(x)$ **b)** $\exists x/\ Q(x)$ **c)** $\forall x:\ \exists y/\ R(x,y)$ **d)** $\exists x/\ \forall y:\ R(x,y)$

e) $\forall x:\ (\sim Q(x))$ **f)** $\exists x/\ (\sim P(x))$ **g)** $\sim(\exists x/\ P(x))$ **h)** $\sim(\forall x:\ Q(x))$

9. Clasifique las siguientes proposiciones según la definición de *proposición categórica* y represente P1 a P5 en notación simbólica.

P1: Algunos alumnos son estudiosos. ____________
P2: Todos los cuerpos celestes son estrellas o planetas. ____________
P3: Algunos triángulos isósceles son equiláteros. ____________
P4: Ningún entero par es divisible por 3. ____________
P5: Algunos triángulos isósceles no son equiláteros. ____________
P6: Todos los triángulos equiláteros son isósceles. ____________
P7: Existen funciones continuas que no son derivables. ____________
P8: Nadie que nació en Argentina es europeo. ____________
P9: Todos los irlandeses son europeos. ____________
P10: Todas las estrellas tienen luz propia ____________
P11: Ningún planeta tiene luz propia ____________
P12: Algunos hongos no son comestibles ____________
P13: Algunas flores son rojas ____________
P14: Todos los volcanes están activos ____________
P15: Ningún hombre es marciano ____________

Razonamiento Inductivo

10. ☑ Calcule la suma de los primeros n números naturales impares. Teniendo en cuenta que $1 \leq n \leq 6$.

a) En base a los resultados particulares obtenidos, establezca una expresión general para todos los valores de n ≥ 1 para $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$

S_n = ____________

b) Demuestre utilizando el Principio de Inducción que la expresión obtenida en el punto (a) es válida.

11. ☑ Analice la siguiente sucesión de sumas:

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

y verifique si se cumple $\mathbf{S_n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$

12. ☑ Aplicando el principio de Inducción Matemática, verifique si es correcto que: *La suma de los primeros n números naturales pares mayores que 0 es*:

$$\mathbf{S_n = 2+4+6+8+\ldots\ldots+ 2n = n(n+1)}$$

Tenga en cuenta que:

$S_1 = 2x1=2$ $S_2 = 2+2x2= 6$ $S_3 = 2+4+2x3 = 12$ $S_4 = 2+4+6+2x4 = 20$

13. ☑ Demuestre por inducción que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales es:

$$\mathbf{S_n} = n(n +1).(2n+1) / 6$$

14. Teniendo en cuenta que $\mathbf{S_n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ Verifique por inducción si se cumple que: $\mathbf{S_n} = \frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{3n+1}}$

15. ☑ Demuestre por inducción que la suma de los cuadrados de los primeros n números impares naturales es:

$$\mathbf{S_n} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = n(2n-1).(2n+1) / 3$$

16. ☑ Demuestre por inducción matemática que la siguiente expresión es verdadera:

S$_n$ = 5 + 10 + 15 + … + 5n = $\dfrac{\mathbf{5}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$

17. ☑ Demuestre por inducción matemática que la siguiente expresión es verdadera:

S$_n$ = 1*2 + 2*3 + 3*4 + … + n(n+1) = $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

18. Demuestre por inducción matemática que la siguiente expresión es verdadera:

S$_n$ = $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

19. ☑ Demuestre por inducción que la función proposicional S(n) que nos permite calcular el valor de la sumatoria $\sum_1^n n5^n = 1.5^1 + 2.\ 5^2 + 3.5^3 + \ldots + n.\ 5^n$ es

S$_n$ = $[5+(4n-1).\ 5^{n+1}]\ /\ 16$ o sea, $1.5^1 + 2.5^2 + \ldots + n.\ 5^n = [5+(4n-1).\ 5^{n+1}]\ /\ 16$

20. Demuestre por inducción que la función proposicional S(n) que nos permite calcular el valor de la sumatoria de **S$_n$** = $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}.n^2$ es igual a…

S$_n$ = $(-1)^{n-1}.\dfrac{n.(n+1)}{2}$

Nota: Para resolver este ejercicio debe tener en cuenta la **potencia de exponentes negativos**: $a^{-n} = \left[\frac{1}{a}\right]^n = \frac{1}{a^n}$