UniversidadTecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba
Ingeniería en Sistemas de Información
Cátedra de Matemática Discreta

RAZONAMIENTO

UNIDAD 3

Los temas de la presente unidad corresponden a la Unidad Temática 3, de la asignatura Matemática Discreta, del primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información. Este apunte fue elaborado por el Ing. Juan C. Vázquez y posteriormente actualizado por el Ing. Raúl E. Morchio, con colaboración del Ing. Daniel Arch para el tema de sucesiones y series. Mantenido por J. C. Vázquez desde 2019.

Tema 3.1
RAZONAMIENTOS

3.1.1. Razonamiento deductivo.
3.1.2. Algunas reglas de inferencia.

3.1.1. Razonamiento deductivo.

En las matemáticas y en las ciencias informáticas, interesa el ***razonamiento deductivo*** como un procedimiento por el cual, *partiendo de hipótesis o premisas cuya verdad se conoce o se asume que son verdaderas, se demuestra la verdad de una proposición (la conclusión) de valor veritativo desconocido a priori*.

En este caso, suele decirse que ***la conclusión se obtiene de las hipótesis*** o que ***ha sido demostrada bajo las hipótesis dadas.***

Es un proceso por el cual, utilizando razonamientos deductivos válidos, se logra **establecer la verdad de una proposición particular a partir de la verdad de una proposición general**, *lo que constituye la forma fundamental en lógica y matemática* ***de demostrar "nuevas verdades" a partir de "verdades conocidas"***, *haciéndolo* **de lo general a lo particular**. *Este proceso se denomina* **proceso deductivo** *o* **deducción**

Por ejemplo, muchos teoremas de la matemática son de la forma ***p, si y sólo si q***, y para demostrarlos suele utilizarse el llamado **método directo** de demostración, el cual consiste en probar en primer lugar que $\mathbf{p \to q}$ y en segundo, que $\mathbf{q \to p}$, con lo que queda demostrado el "$\leftrightarrow$", ya que, como se vio en 2.2.5, $\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)}$.

Hablaremos simplemente de ***razonamiento***, en este contexto, para referirnos al *razonamiento deductivo*. Formalizando:

> **Definición:** Dadas dos o más proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$, llamadas ***hipótesis* o *premisas,*** y una proposición **Q,** llamada ***conclusión,*** llamaremos ***razonamiento* a la relación entre ellas,** denotada por:
>
> $$P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore Q,$$
>
> (que leeremos *"si P_1 y P_2 y ... y P_n* por lo tanto *Q"*)**,** y diremos que la misma es ***válida,* si *Q resulta verdadera cada vez que las hipótesis sean simultáneamente verdaderas.***

De un ***razonamiento que no es válido****, se dice que es una* ***FALACIA****.*

La definición anterior establece varias cosas importantes:

a) *Un razonamiento es una* ***relación entre proposiciones****, la cual no puede decirse que sea verdadera o falsa, sino* ***válida*** *o no.*

b) *Un razonamiento será válido, si y sólo si, la verdad de las hipótesis o premisas es evidencia de la verdad de la conclusión*, o sea, ***no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.***

En efecto, notemos que según la definición, *el razonamiento resultará válido si*:

$$\boxed{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q \quad \textbf{es una tautología}}$$

(existe implicación lógica entre premisas y conclusión), ya que *la verdad de la conjunción de* *las premisas, asegura la veracidad de todas ellas simultáneamente y la implicación lógica, indica que siendo verdaderas las premisas, la conclusión también lo es.*

c) *Si un razonamiento es válido, la relación entre las premisas mismas y entre ellas y la conclusión, conforman un* ***esquema válido*** *independiente de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones intervinientes.*

A este esquema o forma de razonar, se le denomina ***regla de inferencia*** o ***regla de demostración*** que, en palabras del lógico Alfred Tarski[1], *"son en sustancia instrucciones respecto de cómo pueden transformarse proposiciones cuya verdad se conoce, para obtener nuevas proposiciones verdaderas".*

La simbología utilizada en la definición de razonamiento, es una de las muchas existentes, como por ejemplo $P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore Q$, o la notación clásica en una disposición vertical:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

También se utiliza en muchos textos de lógica y matemáticas como sinónimo de ***razonamiento***, el término ***argumento***.

Ejemplo: Determine la validez o no, del siguiente razonamiento:

Si p y p→q, entonces q.

Solución: Expresando en símbolos el anterior enunciado, obtenemos:

$$p,\ p \to q \therefore q$$

o,

$$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

por lo cual, deberemos probar que $(p \wedge p \to q) \to q$ es una tautología. Para ello construimos la siguiente tabla de verdad.

p	q	p→q	p∧p→q	(p ∧ p→q) → q
V	**V**	V	V	V
V	**F**	F	F	V
F	**V**	V	F	V
F	**F**	V	F	V

y como la última columna lo demuestra, el razonamiento dado es **válido**.♦

[1] Véase en **El mundo de las matemáticas**, James R. Newman, Grijalbo, 1994, el artículo escrito por el lógico mensionado.

Que el anterior razonamiento sea válido, establece un esquema de demostración que será considerado ***correcto***, pudiendo utilizarlo siempre que se quiera probar que **q** es verdadera, sabiendo previamente que **p** y que **p→q** lo son.

En este sentido, el ejemplo visto nos muestra una ***regla de inferencia válida***.

Ejemplo:

Determinar las validez o no del siguiente argumento o razonamiento.

Si Juan programa en coworking , Fabian también.
Pueden programar en coworking Norma o Fabian.
Fabian programa en coworking si y solo si Norma lo hace.

Por lo tanto, Fabian y Norma programan en coworking

Solución: Planteamos las proposiciones correspondientes:

p: Juan programa en coworking
q: Norma programa en coworking
r: Fabian programa en coworking

Expresamos en símbolos el enunciado:

P1: $p \rightarrow r$
P2: $q \vee r$
P3: $r \leftrightarrow q$

Q: $r \wedge q$

Se trata de averiguar la verdad o falsedad de P1, P2 y P3;

p	q	r	**P1** $p\rightarrow r$	**P2** $q \vee r$	**P3** $r\leftrightarrow q$	**Q** $r \wedge q$	**P1^P2^P3**	**(P1^P2^P3)→Q**
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	F	V

*Como la implicación entre la conjunción de las premisas y la conclusión es una tautología, el argumento resulta ser **VALIDO.***♦

3.1.2. Algunas reglas de inferencia.

Algunas reglas de inferencia clásicas, muy utilizadas en matemáticas y computación para la demostración de teoremas, se detallan a continuación:

Ley de separación (*modus ponens*): Si **p** y **p→q** son ambos verdaderos, se infiere que **q** también lo es. En símbolos:

$$\mathbf{p,\ p\rightarrow q\ \therefore\ q}$$

o en su forma clásica:

$$\begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \mathbf{p \to q} \\ \hline \therefore\ \mathbf{q} \end{array}$$

la cual fue demostrada en uno de los ejemplos anteriores.

En la Tabla de Verdad de la implicación simple, podemos visualizar claramente que para las premisas ○ se infiere necesariamente la conclusión □

P	***Q***	***P →Q***
V	$\boxed{\text{V}}$	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Debe notarse, que el hecho de que el *modus ponens* es una regla de inferencia válida, presupone la veracidad de las premisas para asegurar la veracidad de la conclusión y, ***no*** debe confundirse con la *verdad necesaria* de la conclusión. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: ¿Es el siguiente razonamiento válido?

Las milanesas de vidrio son nutritivas.
Si las milanesas de vidrio son nutritivas, entonces el vidrio es un alimento.

Por lo tanto, el vidrio es un alimento.

Solución: Si separamos las distintas proposiciones del anterior razonamiento en:

p: *Las milanesas de vidrio son nutritivas.*
q: *El vidrio es un alimento.*

el mismo, responde a la expresión "**p, p→q ∴ q**", por lo cual el razonamiento resulta válido.♦

Aquí se ve claramente que aunque el razonamiento sea válido, la conclusión puede ser falsa (lo que indudablemente, y habiendo aplicado una sucesión de reglas de inferencia válidas, surge de tener premisas falsas).

Recordemos lo ya dicho, en cuanto a que *la relación entre las premisas mismas y entre ellas y la conclusión, conforman un* ***esquema válido <u>independiente</u>*** *de los* ***valores de verdad o falsedad de las proposiciones intervinientes***, lo cual explica al ejemplo anterior.

Ejemplo: Determinar las validez o no del siguiente argumento o razonamiento.

a) Si no voy a clase, no puedo regularizar. $\sim \mathbf{p} \to \sim\mathbf{q}$
Voy a clase o trabajo. $\mathbf{p \vee r}$
Trabajé $\mathbf{r}$

Por lo tanto, regularizo. $\therefore\ \mathbf{q}$

Las proposiciones simples que pueden identificarse son:

p*: Yo voy a clase*

q: *Yo regularizo*

r: *Yo trabajo*

p	q	r	**P1** ~p→~q	**P2** p v r	**P3** r	**Q** q	**P1^P2^P3**	**(P1^P2^P3)→Q**
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V

La implicación entre la conjunción de las premisas y la conclusión NO es una tautología, por lo tanto el argumento ***no es valido*** o sea es una ***FALACIA.*** ♦

Ley del *modus tolens*: Si **p→q** es verdadero y **q** es falsa, se infiere que **p** es falsa.

En símbolos:

$$\mathbf{p \to q,\ \sim q\ \therefore\ \sim p}$$

o en su forma clásica:

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \to q} \\ \mathbf{\sim q} \\ \hline \mathbf{\therefore \sim p} \end{array}$$

Aquí también podemos ver en la Tabla de Verdad de la implicación simple, que para las premisas O verdaderas, se infiere necesariamente la verdad de la conclusión □

P	*Q*	~P	~Q	*P* →*Q*
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	$\boxed{V}$	V	V

El ***modus tolens*** constituye un importante método de demostración (usado en las demostraciones ***por contradicción*** o ***por reducción al absurdo***) y establece que *si una proposición implica a otra proposición falsa, entonces la primera también lo es*.

En general, para hacer uso de esta regla, se echa mano a una proposición **X** que sea siempre falsa (como **r** ∧ **~r**), se agrega la hipótesis adicional "**~q es verdadera**" y se intenta probar que $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge (\sim q) \Rightarrow X$. Si la hipótesis ampliada implica lógicamente a una contradicción, entonces al menos una de las premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n, (\sim q)$ debe ser falsa, y presuponiendo la veracidad de las premisas originales, resulta que **~q** es falsa, por lo cual **q** debe ser verdadera.

Ley del *silogismo hipotético*: Si **p→q** y **q→r** son ambas verdaderas, se infiere que **p→r** también es verdadera.
En símbolos:

$$\mathbf{p \to q,\ q \to r\ \therefore\ p \to r}$$

o en su forma clásica:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array}$$

El silogismo hipotético resulta ser algo así como la propiedad transitiva de la implicación.

Como se anticipó, las tres tautologías nombradas anteriormente, son sólo algunas de las infinitas que pueden generarse, pero la idea general que nos debe dejar este tema es que, para efectuar la demostración de un teorema de la forma *"si* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *entonces* Q*"*, es necesario aplicar una sucesión finita de transformaciones (reglas de inferencia válidas) sobre las premisas, hasta llegar a la conclusión buscada, y sólo así podremos asegurar la corrección de la demostración desarrollada.

Por último debo acotar que, dado un teorema cualquiera, la presentación de algún ejemplo que, utilizando las premisas del mismo como verdaderas y mediante un razonamiento válido, demuestre la falsedad de la conclusión, lo *refuta* y se dice que en tal demostración se ha utilizado el método ***del contraejemplo***.

Cuando el número de variables proposicionales es mayor a cuatro el método del condicional asociado para decidir la validez de un razonamiento se vuelve cada vez más engorroso puesto que el número de filas de la tabla de verdad crece exponencialmente con el número de aquellas.

Así para 5 variables el número de filas de la tabla de verdad es de 32. Un método alternativo es el denominado método deductivo o de deducción natural donde la validez del razonamiento se deduce por aplicación de reglas de inferencia.

Como ejemplo tomemos el sig. Razonamiento:

- *Si el partido A gana las elecciones, tendrá mayoría en el Congreso*
- *Si tiene mayoría en el Congreso, el presidente podrá cumplir el programa de gobierno propuesto.*
- *El presidente no podrá cumplir su programa de gobierno o la oposición se opondrá duramente.*
- *Pero la oposición no lo atacará duramente.*
- *Por lo tanto, el partido A no ganará las elecciones.*

Este razonamiento expresado en el lenguaje de la lógica proposicional quedaría:

p: *El partido A gana las elecciones* ***q***: *tendrá mayoría en el Congreso*

r: *el presidente podrá cumplir el programa de gobierno* ***s***: *la oposición se opondrá duramente*

1) $p \to q$

2) $q \to r$

3) $\neg r \vee s$

4) $\neg s$

$\therefore \neg p$

Por los conocimientos adquiridos y las reglas de inferencias estudiadas, podemos razonar:

5) $p \to r$ Por SH (Silogismo Hipotético en 1 y 2)

6) $r \to s$ Por equivalencia entre $r \to s \equiv \sim(r \wedge \sim s) \equiv \sim r \vee s$

7) $p \to s$ Por SH en 5 y 6

8) $\sim p$ Por MT (Modus Tollens) en 4 y 7

Con lo que queda demostrado el razonamiento.

Tema 3.2

Lógica de Predicados

3.2.1. Función proposicional.
3.2.2. Cuantificadores y clases.
3.2.3. Proposiciones categóricas.
3.2.4. Cálculo de clases (comentario).
3.2.5. Lógica de Primer Orden o Cálculo de Predicados.

Hemos hasta ahora considerado las proposiciones, como oraciones declarativas de las que pueda determinarse su veracidad, y hemos descartado oraciones del tipo:

***x* es un número impar**

que establecen que un objeto *"x"* tiene una cierta *propiedad "F"*, pero que, hasta determinar de qué objeto se trata (o *instanciarlo*), no puede confirmarse si el mismo posee o no dicha propiedad. Si agregamos, ***x es 2***, la oración anterior se transforma en proposición y su valor de verdad es, por definición de número impar[2], falsa; si en cambio, declaramos que ***x = 7***, la oración se transforma en una proposición lógica verdadera, ya que siete es un número y cumple con la propiedad *F: es impar*, por definición de imparidad.

Otras expresiones, generalizan esta idea, asignando una cierta propiedad a una colección de objetos que se agrupan según alguna otra propiedad común a todos ellos, como en:

Todos los hombres son mortales

la cual dice que cualquier objeto *x*, si *x es un hombre*, entonces *x es mortal*. Esta sí es una proposición, ya que responde a la definición, pero no es una proposición que establezca algo sobre un objeto particular, sino que asigna una propiedad a un determinado tipo o *categoría*[3] de objetos.

En lo que sigue, se formalizarán los símbolos y relaciones que nos permitan tratar con este tipo de oraciones declarativas, se establecerá el concepto de *cuantificador* lógico y se mostrará una forma gráfica de interpretar estas proposiciones. Por último, se incluye un comentario sobre el concepto de *clases*, cuyo cálculo se desarrollará luego como *teoría de conjuntos*, un tema basal de la matemática moderna.

3.2.1. Función proposicional.

Atendiendo al primer ejemplo de la introducción precedente, se ofrece la siguiente definición:

Definición: *Función proposicional* o *Predicado* o *Proposición Abierta* en una variable *x*, denotada *F(x)* (que leeremos *F de x*, o *x tiene la propiedad F*) **es toda oración declarativa que asigne una determinada propiedad *"F"* al objeto indeterminado *"x"* y que se convierta en proposición lógica al instanciarlo.**

<u>Instanciar</u>

En esta definición debe entenderse "instanciarlo", como *cada asignación específica dada a la variable indeterminada **x***, y se dice en este caso, que la proposición ha sido obtenida ***por especialización***.

---

[2] Procedemos aquí de manera intuitiva, ya que la definición de número es en muchos casos cuestión de controversias. En **El mundo de las matemáticas**, James R. Newman, Grijalbo, 1994, puede encontrarse un artículo debido a B. Russell, donde se intenta una definición de número.

[3] En **Matemática Discreta**, R. Johnsonbaugh, Grupo Editorial Iberoamérica, 1988, páginas 27 a 37, se presenta el tema con el título de *Proposiciones Categóricas*.

Así,

F(x): x es un número impar.

es una función proposicional o prosición abierta, ya que para cada valor específico que tome *x*, se convierte por especialización en una proposición, como en:

F(2): 2 es un número impar.
F(7): 7 es un número impar.

Podemos extender naturalmente el concepto a más de una variable escribiendo, si se quiere asignar una propiedad ***F*** a las variables $x_1, x_2, ..., x_n$, la función proposicional como $\mathbf{F(x_1, x_2, ..., x_n)}$, cuyo significado estricto se verá en el punto que sigue.

Los valores que se asignan a las variables que aparecen en un predicado deben pertenecer a una colección, llamada el **universo de discurso** (o simplemente ***universo*** o ***dominio de F***). Para ser precisos es necesario establecer explícitamente el universo de discurso, es decir, cúales son los valores que pueden ser asignados a las variables. Sin embargo con frecuencia el universo de discurso se entiende implícitamente.

3.2.2. Cuantificadores y clases.

Como indicamos anteriormente, proposiciones de la forma *"todos los hombres son mortales"*, hacen referencia a una propiedad que se asigna a una serie de objetos en su conjunto, *los hombres*, y por consiguiente, a cada uno de ellos.

Clase :

La colección de objetos que comparten alguna característica común (*ser hombres)*, conforman una *abstracción* que se ha dado en llamar ***clase*** o *categoría*.

Denotaremos en general con letras mayúsculas **A, B, ...,** a las clases y con letras minúsculas **a, b, ...,** a los objetos que a ellas pertenecen.

Además, si un objeto ***x*** posee la propiedad o característica que define una clase ***C***, se dice que es ***miembro*** de ella o que ***pertenece*** a ella. En símbolos, esto se expresa como sigue:

$x \in C$, si el objeto *x* es miembro de la clase *C*.
$x \notin C$, si el objeto *x* no es miembro de la clase *C*.

y se lee, ***x pertenece a la clase C*** y ***x no pertenece a la clase C***, respectivamente.

El concepto preciso de *clase* ha sido objeto de penosas discusiones entre los filósofos de todas las épocas, pero para nuestro estudio, nos conformaremos con la idea intuitiva descripta en el anterior párrafo.

Clase Vacía:

Llamaremos ***clase vacía*** (y la denotaremos por el símbolo $\varnothing$), a aquella a la que no pertenezca ningún objeto miembro (como por ejemplo, la clase especificada en el título de la película *"Los muertos vivos"*).

Cuantificadores universal y existencial:

Utilizando el concepto de función proposicional, es posible obtener proposiciones generales que identifiquen clases, mediante un proceso llamado *de generalización* o ***de cuantificación*** (término que proviene de la lógica clásica, que utilizaba los vocablos *todos* y *algunos* para diferenciar los juicios de acuerdo a su cantidad).

Asociando en una función proposicional, la variable ***x*** con los términos ***todos*** *o* ***algunos*** (o con sus contrarios ***ningunos*** *o* ***algunos no***), podremos formar proposiciones generales que afirmen relaciones (o que establezcan propiedades) entre clases, y entre objetos y clases. En este punto es importante reforzar la idea de que, las proposiciones:

P: Todos los hombres son mortales.
Q: Joan Manuel Serrat es un hombre.

establecen la primera, una relación entre clases (*relación de inclusión*) y la segunda, entre un objeto individual y una clase (*relación de pertenencia*), de la cual evidentemente es miembro.

Introduciremos aquí, los símbolos

"$\forall x$:", (que leeremos ***para todo x se verifica que*** **o** ***para todo x tal que***) recibe el nombre de **cuantificador universal,** y

"$\exists x$/" (que leeremos ***existe al menos un x tal que***), el cual se denomina **cuantificador existencial**.

Con esta notación:

- **Todo *x* posee la propiedad F**, se escribe como $\forall x : F(x)$, y
- **Existe un x, que posee la propiedad F**, se escribe como $\exists x \,/ F(x)$,

y se dice que, la función proposicional **F(x)** se encuentra ***cuantificada universalmente***, en el primer caso, y que se encuentra ***cuantificada existencialmente*** en el segundo.

Así, **una función proposicional cuantificada adquiere el rango de *proposición lógica***.

Ejemplo: Exprese simbólicamente (utilizando la notación para los cuantificadores introducida), las proposiciones:

P: Para toda *x* existe una *y* tal que *x+y = par*.
Q: Existe una *x* tal que, para toda *y, x+y = par*.

Solución: Sea **R(x, y):** ***x+y = par*** una función proposicional.
Entonces, la proposición **P** puede escribirse como: $\forall$**x:** $\exists$**y/R(x, y)**
y la proposición **Q** como: $\exists$**x/** $\forall$**y: R(x, y)**♦

3.2.3. Proposiciones categóricas.

Ahora, podemos expresar la siguiente:

Definición: Dadas dos clases **A** y **B**, llamaremos ***proposición categórica*** a toda proposición lógica que tenga una de las siguientes cuatro formas:

1) Todo miembro de A, es miembro de B.	$\forall x: x \in A \rightarrow x \in B.$
2) Ningún miembro de A, es miembro de B.	$\forall x: x \in A \rightarrow x \notin B.$
3) Algunos miembros de A, son miembros de B.	$\exists x / x \in A \wedge x \in B.$
4) Algunos miembros de A, no son miembros de B.	$\exists x / x \in A \wedge x \notin B.$

Las anteriores proposiciones son clásicamente llamadas:

1) Proposiciones universales afirmativas.
2) Proposiciones universales negativas.
3) Proposiciones particulares afirmativas.
4) Proposiciones particulares negativas.

y representan relaciones entre clases las dos primeras, y entre elementos y clases las dos últimas.

En el primer caso, se dice que ***A está incluida en B***, o que *A es parte de B*, o que *A es una subclase de B*, o que *B es una superclase de A*, y se resume la notación con un nuevo símbolo:

$$\mathbf{A \subseteq B}$$

Trivialmente, *la clase vacía ∅, está incluida en cualquier clase.*

En el segundo caso, se dice que las clases ***A y B son disjuntas***; ya que no tienen miembros en común.

En los casos (3) y (4), se establece que, las clases tienen al menos un elemento en común y que las clases tienen al menos un elemento no común, respectivamente.

3.2.4. Cálculo de clases (comentario).

Ya que las clases han sido definidas como *entes abstractos* que representan la idea de propiedad o característica común a una colección de objetos, y que estas ideas pueden expresarse por *proposiciones* (o funciones proposicionales cuantificadas, que es lo mismo), puede construirse un álgebra o **cálculo de clases**, definiendo, mediante conectivos lógicos entre proposiciones, operaciones algebraicas entre clases.

En matemáticas, no suele hablarse de clases que agrupan a miembros, sino de *conjuntos que agrupan a elementos*, en un sentido análogo al que hemos estudiado para clases.

Por esto, y atendiendo al objetivo de nuestra presentación, no desarrollaremos el cálculo de clases (y consecuentemente el álgebra de relaciones entre clases), sino que el tema se presentará directamente como *teoría de conjuntos* en la siguiente unidad.

3.2.5. Lógica de Primer Orden o Cálculo de Predicados.

En ***lógica proposicional***, también llamada ***lógica de orden cero*** o ***cálculo proposicional***, hemos tratado con *oraciones declarativas que son o verdaderas o falsas pero no ambas*, a las que dimos el nombre de ***proposiciones lógicas*** y denotamos **p, q, r,** etcétera.

Esencialmente el objetivo de establecer un mecanismo para determinar la validez de los razonamientos, pudo cumplirse al definir qué entendemos por **razonamiento deductivo válido** y, mediante esta definición, establecer la validez de varias reglas de inferencia.

En nuestro estudio tomamos las oraciones declarativas **p, q, r,** …, como un todo sin preocuparnos por la estructura sintáctica de la oración y por lo que ella significa, salvo el hecho de que puede o ser verdadera o falsa. Pero en el lenguaje natural, también encontramos argumentaciones como la siguiente:

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es un hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

lo cual parece absolutamente “razonable”, aunque con nuestra notación para el cálculo de proposiciones sólo podríamos decir que:

p Todos los hombres son mortales
q Sócrates es un hombre

$\therefore$ **r** Por lo tanto, Sócrates es un mortal

Esta notación, no muestra de ninguna forma que existe alguna relación entre lo que dice la primer premisa y lo que dice la segunda.

Para analizar este tipo de proposiciones, necesitamos una notación que tenga ***mayor poder expresivo***, que logre mostrar en símbolos y claramente las relaciones existentes entre los significados de estas proposiciones.

Ya hemos visto el concepto de funciones proposicionales, que llamaremos en éste contexto ***predicados***. Podemos expresar el anterior argumento utilizando su notación:

Todos los hombres son mortales	$\forall x: H(x) \to M(x)$
Sócrates es un hombre	H(Sócrates)
--------------------------------------	----------------------
Por lo tanto, Sócrates es mortal	$\therefore$ M(Sócrates)

donde : H = clase hombre y M = clase mortales

Con la notación de funciones proposicionales podemos expresar claramente que hay un ***sujeto*** y un ***predicado*** en la oración, y que el *predicado* está aplicado a *todo un universo de sujetos* en la primera premisa (*relación entre clases de objetos*) y a *un elemento de ese universo* (Sócrates) en la segunda premisa y conclusión (*relación entre un objeto y la clase a la cual pertenece*).

Hemos así, dado un paso más allá del cálculo proposicional y nos encontramos ingresando al ***cálculo de predicados o lógica de primer orden***.

Recordemos que *Función proposicional* o *Proposición Abierta* o ***Predicado*** es toda oración declarativa que asigna una propiedad a objetos indeterminados x, y, …, z y que se convierte en proposición lógica al especificar los objetos de los que está hablando (instanciarlos).

Asociado a un predicado, siempre existe naturalmente un ***universo de discurso* o *dominio* D** constituido por todos los objetos factibles de reemplazar las variables indeterminadas del predicado. De este dominio sólo se pide que sea NO VACÍO.

Ejemplo 1 La oración "*x es un número natural par*" puede ser entonces pensada como un predicado P (*la propiedad de ser un número natural par*) aplicado a un objeto indeterminado x. Utilizamos ya la notación:

P(x): x es un número natural par.

Claramente estamos hablando de números naturales y al especificar cualquiera de ellos, P(x) se transforma en una proposición lógica:

P(8): 8 es un número natural par (proposición verdadera)
P(3): 3 es un número natural par (proposición falsa)

En el ejemplo 1, decimos que el predicado **P(x)** se ha transformado en proposición lógica ***por especialización***, al reemplazar x por 8 en el primer caso, o por 3 en el segundo caso.

Ejemplo 2 La oración "*x es madre de y*" es un predicado denotado por:

Madre(x, y): x es madre de y.

Claramente estamos hablando de seres vivientes y, tomando un dominio cualquiera, al especificar x e y, Madre(x, y) se transforma en una proposición:

Madre(Mónica, Marcelo): Mónica es madre de Marcelo.

▲

Como la verdad o falsedad de Madre(x, y), depende de las variables independientes x e y, se dice que las mismas son ***libres*** en Madre(x, y).

Ejemplo 3 Analicemos la oración "Si x es par entonces x es divisible por dos"; sabemos que P(x): x es par, es un predicado y que Q(x): x es divisible por dos es otro predicado. Entonces la oración en cuestión es un predicado compuesto por predicados más simples y podemos denotarlo como:

$R(x): P(x) \to Q(x).$

Nótese que al estar en la oración el objeto indeterminado x dos veces, debemos colocar la misma variable en P(_) que en Q(_) para no cambiar el sentido de la frase.

▲

El ejemplo 3 nos muestra que podemos formar predicados compuestos utilizando los mismos conectivos de la lógica de proposiciones. Así, si ***P(x)*** y ***Q(y)*** son predicados, entonces también lo son: $\sim P(x),\ P(x) \vee Q(y),\ P(x) \wedge Q(y),\ P(x) \rightarrow Q(y),\ P(x) \leftrightarrow Q(y)$.

Un predicado puede ser transformado en proposición lógica, aún sin especificar el objeto del dominio al que se refiere, utilizando los vocablos **Todo, Ninguno, Algunos** *o* **Algunos No***, con lo que se forman las* ***proposiciones categóricas*** *ya vistas (porque establecen relaciones entre categorías o clases de objetos y entre objetos y categorías a los que ellos pertenecen*).

Ya sabemos cómo simbolizar estos vocablos:

$\forall x$: P(x)	Todo x tiene la propiedad P
$\exists x$/ P(x)	Existe al menos un x que tiene la propiedad P

Esta forma de transformar predicados en proposiciones lógicas se denomina ***cuantificación***. En el primer caso decimos que se ha cuantificado ***universalmente*** con el símbolo "***para todo***" y en el segundo que se ha cuantificado ***existencialmente*** con el símbolo "***existe al menos un***".

Ahora, el valor de verdad de la proposición cuantificada depende del dominio en el que estemos trabajando, pero no de la variable x, por lo cual se dice que la variable x está *ligada o acotada* por el cuantificador que le precede.

Debemos notar que al utilizar cuantificadores, no siempre un predicado se transforma en proposición lógica, ya que el mismo puede tener variables ligadas y libres respecto del cuantificador utilizado. Así:

$$Q(y): (\forall x: x \text{ es madre de } y)$$

resulta ser una función proposicional de la variable **y**, ya que **x** está ligada al cuantificador universal pero **y** está libre.

Relaciones útiles entre Predicados Cuantificados

Estableceremos algunas relaciones útiles y evidentes entre predicados:

1) Si un predicado cuantificado universalmente es verdadero, entonces el mismo predicado cuantificado existencialmente es verdadero. En símbolos:

$$\forall x: P(x) \Rightarrow \exists x/\ P(x)$$

Note que la inversa no es válida en general.

2) Negaciones de predicados cuantificados:

$$\sim[\forall x: P(x)] \equiv \exists x/ \sim P(x)$$
$$\sim[\exists x/\ P(x)] \equiv \forall x: \sim P(x)$$

3) Sean dos predicados P(x) y Q(x) asociados a un dominio D. Entonces se dice que:

   a. P(x) **implica lógicamente** a Q(x), denotado $\mathbf{P(x) \Rightarrow Q(x)}$, si y solo sí, el condicional $P(a)\rightarrow Q(a)$ es verdadero para cada elemento **<u>a</u>** del dominio.

   b. P(x) es **lógicamente equivalente** a Q(x), denotado $\mathbf{P(x) \equiv Q(x)}$, si y solo sí, el bicondicional $P(a)\leftrightarrow Q(a)$ es verdadero para cada elemento **<u>a</u>** del dominio.

4) Finalmente, <u>notemos que pueden mezclarse cuantificadores de predicados de más de una variable pero con cuidado</u>. Por ejemplo, consideremos el predicado

   S(x, y): x + y = 5 trabajando en el dominio de los números enteros:

   $\forall x: \exists y/\ x + y = 5$ Es una <u>proposición verdadera</u> ya que para cualquier entero **x** puede encontrarse el entero (5 – x) que hace verdadero a S(x, y) , pero

$\exists x / \forall y: x + y = 5$ Es una <u>proposición falsa</u> ya que, al fijar el valor de **x**, la afirmación de que para cualquier entero sumado a él dá resultado 5 es claramente incorrecta.

<u>Razonamientos Deductivos</u>

En el cálculo de predicados, debemos agregar dos reglas de inferencia o axiomas adicionales a los que teníamos en el cálculo de proposiciones:

<u>Regla de Especificación Universal</u>: si **∀x: P(x)** es una proposición verdadera en un dominio determinado **D**, entonces **P(a)** es verdadera para cada elemento **<u>a</u>** del dominio.

<u>Regla de Generalización Universal</u>: si **P(x)** es verdadera al reemplazar **x** con un elemento **<u>c</u>** del dominio, elegido de manera arbitraria (cualquiera), entonces la proposición **∀x: P(x)** es una proposición verdadera en el dominio. Aquí "elegido de manera arbitaria" o "cualquiera" quiere significar que equivale a todos y cada uno de los elementos del dominio.

Haciendo uso de estas reglas y de las reglas de inferencia ya vistas en lógica de proposiciones, puede demostrarse la validez o invalidez de los razonamientos expresados por predicados.

Ejemplo 4

Todos los números pares son divisibles por dos.	$\forall x: (x \text{ es par}) \rightarrow 2\|x$
Cuatro es un número par.	4 es par
--	-------------------------
Por lo tanto, cuatro es divisible por dos,	$\therefore 2\|4$

Asumiendo que las premisas son proposiciones verdaderas, el dominio D es el conjunto de los naturales pares. Entonces:

<u>Paso de demostración</u>	**<u>Porqué es verdadero el paso</u>**
1) $\forall x: (x \text{ es par}) \rightarrow 2\|x$	primer premisa
2) $4 \text{ es par} \rightarrow 2\|4$	(1) y regla especificación universal
3) 4 es par	segunda premisa
4) $2\|4$	(2), (3) y regla modus ponens

▲

Ejemplo 5

Todos los perros son animales.	$\forall x: Perro(x) \rightarrow Animal(x)$
Todos los animales, respiran.	$\forall x: Animal(x) \rightarrow Respira(x)$
---	-----------------------------------
Por lo tanto, todos los perros, respiran.	$\therefore \forall x: Perro(x) \rightarrow Respira(x)$

Asumiendo que las premisas son proposiciones verdaderas:

<u>Paso de demostración</u>	**<u>Porqué es verdadero el paso</u>**
1) $\forall x: Perro(x) \rightarrow Animal(x)$	primer premisa
2) $Perro(c) \rightarrow Animal(c)$	(1) y regla de especificación universal
3) $\forall x: Animal(x) \rightarrow Respira(x)$	segunda premisa
4) $Animal(c) \rightarrow Respira(c)$	(3) y regla de especificación universal
5) $Perro(c) \rightarrow Respira(c)$	(2), (4) y silogismo hipotético
6) $\forall x: Perro(x) \rightarrow Respira(x)$	(5) y regla de generalización universal

▲

//

<u>Bibliografía para Lógica de Primer Orden o Cálculo de Predicados.</u>

Goodstein R., Mathematical Logic, Leicester University Press, England, 1965. (pág. 29-39)

Grimaldi R., Matemáticas Discreta y Combinatoria – 3ra. Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, U.S.A., 1997. (pág. 98-137)

Hopcroft J. / Motwani R. / Ullman J., Introducción a la Teoría de Autómatas, Lenguajes y Computación, Addison-Wesley Pearson, España, 2002. (pág. 6-21)

Iranzo P., Lógica Simbólica para Informáticos, Alfaomega/Ra-Ma, México, 2005. (pág. 107-193)

Johnsonbaugh R., Matemáticas Discretas, Grupo Editorial Iberoamérica S.A., México, 1988. (pág. 27-40)

Kleene S., Mathematical Logic, John Wiley & Sons, U.S.A., 1967.

Pérez J., Matemática Discreta y Algoritmos, Answer Just in Time S.R.L., Argentina, 2005. (pág. 11-14)

Rich E. / Knight K., Inteligencia Artificial – 2da. Edición, McGraw-Hill, España, 1994. (pág. 145-183)

Rojo A., Álgebra I, Editorial El Ateneo, Argentina, 1972. (pág. 14-18)

Toso M. / Inlgese I., Elementos de Matemática Discreta, Centro de Publicaciones de UNL, Argentina, 2002. (pág. 37-46)

Gamut L., Introducción a la lógica, Eudeba, Argentina, 2002. (pág. 69-118)

Tema 3.3

Principio de Inducción Matemática

3.3.1. Sucesiones y Series
3.3.2. Introducción a la Inducción Matemática.

3.3.1. Sucesiones y Series

Una de las tareas más importantes de las matemáticas es descubrir y caracterizar patrones regulares, tales como los relacionados con los procesos que se repiten. La principal estructura matemática que se utiliza en el estudio de los procesos que se repiten es la *sucesión* y la principal herramienta matemática que se usa para comprobar suposiciones acerca de las sucesiones, es la *inducción matemática*.

Antes de abordar el estudio de la *inducción matemática* haremos una introducción de la notación y terminología de las **sucesiones**.

Un príncipe no muy brillante y con muy pocas preocupaciones se despierta un día decidido a contar sus ancestros.

Consultando el álbum familiar se dice: *tengo* ***2 padres*** *(los reyes)*, ***4 abuelos***, ***8 bisabuelos***, *etc.*

Al llegar a la séptima generación el príncipe ya estaba agobiado o aburrido y decide terminar aquí la respuesta a sus inquietudes y anotar los resultados de su investigación en una planilla ordenándolos por antigüedad y confecciona la siguiente tabla. (el príncipe no era muy brillante, pero sabía hacer una tabla)

Generación	1	2	3	4	5	6	7
Número de antepasados	2	4	8	16	32	64	128

De la representación de los datos podemos deducir una fórmula que exprese el k-ésimo elemento de una fila, tal como: $\boldsymbol{a_k = 2^k}$. Es decir que en la *k generación* el príncipe tendría 2^k antepasados.

Esta fórmula surge de nuestra capacidad o razonamiento lógico para encontrar patrones, pero debería ser puesta a prueba para todos los valores de k, tema que veremos más adelante.

> **Definición**: *Una **sucesión** es una estructura discreta utilizada para representar una lista ordenada de elementos*.

Otra definición aclara la característica de esta estructura matemática:

> **Definición**: *Una **sucesión numérica** es una secuencia ordenada de números, llamados términos, entre cada uno de los cuales hay una relación que se debe cumplir para determinar el próximo número.*

Formalmente una sucesión es una función o aplicación de un subconjunto de los números enteros generalmente N o N_0 en un conjunto S.

Una sucesión se representa como un conjunto de elementos escritos en un renglón, expresados por $\boldsymbol{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots , a_n}$ **.**

Se usa $\boldsymbol{a_k}$ (se lee "***a subíndice k***" o "***a sub k***") para simbolizar un elemento de la sucesión y se lo denomina ***un término*** *de la sucesión*. La ***k*** en $\boldsymbol{a_k}$ es lo que se denomina un ***índice*** y señala la posición o el orden del elemento, así ***m*** indica el subíndice del término inicial y el subíndice ***n*** corresponde al término final

La sucesión suele representarse como $\{\boldsymbol{a_k}\}$.

Una fórmula como $a_k = 2^k$ permite encontrar el valor de un símbolo de la sucesión en función de su posición o valor del índice k .

Encontrar esta fórmula a partir de los primeros elemento de una sucesión es un problema muy común en matemática discreta.

Las sucesiones, que como vemos representan conjuntos ordenados, pueden ser finitas o infinitas. En el caso de sucesiones infinitas se suelen representar mediante la notación elíptica, por ejemplo: 1,2,3,4,5**…**

Donde los tres puntos **"…"** se llaman ***puntos suspensivos*** y es la abreviatura de "y así sucesivamente".

Ejercicio 1: Cuáles serán las fórmulas para representar estas sucesiones? Y cuáles serán los próximos elementos de las siguientes sucesiones?.

a) 1,2,3,4,5…

Solución: $a_k = k$ en función de la posición ***k,*** siendo $a_1 = 1$ y el próximo elemento **6** porque $k = 6$.

También se lo puede expresar en función del valor del término anterior, así $a_k = a_{k-1} + 1$ y el próximo elemento es 6 porque $6 = a_{6-1} + 1 = a_5 + 1 = 5+1$.

b) 1,3,5,7,9,…

Solución: $a_k = 2k - 1$ en función de la posición ***k,*** siendo $a_1 = 1$ y el próximo elemento es **11** porque $k = 6$ y $a_k = 2k - 1 = 2 \times 6 - 1 = 11$.

Expresado en función del valor del término anterior, $a_k = a_{k-1} + 2$ y el próximo elemento es **11** porque $a_k = a_{k-1} + 2 = a_{6-1} + 2 = a_5 + 2 = 9 + 2 = 11$.

c) 2,4,6,8,10,…

Solución: $a_k = 2k$ en función de la posición ***k,*** siendo $a_1 = 2$ y el próximo elemento **12** porque $k = 6$ y $a_k = 2k = 2 \times 6 = 12$.

Expresado en función del valor del término anterior, $a_k = a_{k-1} + 2$ y el próximo elemento es **12** porque $a_k = a_{k-1} + 2 = a_{6-1} + 2 = a_5 + 2 = 10 + 2 = 12$.

d) 7,11,15,19,23,…

Solución: $a_k = 4k + 3$ en función de la posición ***k,*** siendo $a_1 = 7$ y el próximo elemento es **27**

Expresado en función del valor del término anterior $a_k = a_{k-1} + 4$.

e) 1,1,2,3,5,8,13,21,…

Solución: esta sucesión es un caso especial denominada ***Sucesión de Fibonacci*** **(**que veremos más adelante), en la cual el valor de cada término es igual a la suma de los dos términos anteriores. Así $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ siendo $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y el próximo elemento es **34** porque $a_9 = a_8 + a_7 = 21+13 = 34$

En algunas sucesiones es muy complicado expresar el valor del término a_k en función del valor del índice ***k.*** En el caso de esta sucesión llevó alrededor de 500 años poder encontrar la forma de expresar a_k en función de ***k.***

Tanto en matemáticas como en ciencias de la computación las sucesiones no están circunscriptas a las numéricas, puesto que hay otras como ser cadenas, vectores, programas, etc.

Series o Sumatorias de sucesiones.

El príncipe de nuestra historia decide, continuando con su investigación, determinar el total de ancestros hasta los tátara-abuelos

Simbólicamente el desea averiguar cuánto vale $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, es decir la sumatoria de los 4 primeros términos de la sucesión.

En 1772 un matemático francés Joseph Lagrange introdujo la notación Sigma $\sum$

$\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$, donde ***m*** representa el límite inferior y ***n*** el límite superior de la sumatoria.

Luego nuestro príncipe expresaría su problema de esta manera: $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{4} 2^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{S}_4$, o sea la suma de los cuatro (4) primeros términos de la sucesión.

En consecuencia $\boldsymbol{S}_4$ = 2+4+8+16=**30**.

Ejercicio 2) Cuanto valdría $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{7} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{S}_7$ para las sucesiones del ejercicio 1.

Ahora bien, así como encontramos una fórmula para calcular el k-ésimo término de una sucesión, ¿se podrá encontrar una fórmula para calcular la suma de los primeros k-ésimos términos de dicha sucesión?

Es decir ¿podemos encontrar una expresión generalizada para calcular la suma de cualquier número de términos de la sucesión, sin tener que sumarlos uno a uno?.

Estamos frente al mismo problema planteado anteriormente, o sea buscar un patrón dentro de una sucesión pero en este caso los términos buscados se corresponden con las k-ésimas sumas parciales de las sucesiones planteadas.

Veamos cómo podemos razonar esto para la primera de las sucesiones del Ejemplo 1.

S_k para k=1 es $S_1 = a_1 = 1$

S_k para k=2 es $S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$

S_k para k=3 es $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

S_k para k=4 es $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$S_k = ?$

Luego de mucho razonar, buscar un patrón, verificar si se cumple, y si no se cumple volver a empezar, podremos quizás, dependiendo de nuestra experiencia e intuición, encontrar la fórmula que estamos buscando, que en este caso será:

$S_k = k * (k+1)/2$

Verifique el alumno si se cumple para los valores calculados anteriormente.

Como habrá podido comprobar la formula anterior cumple las primeras cuatro sumas parciales.

Si estamos entusiasmados o si somos desconfiados podríamos verificar si se cumple para k = 6, 7, 8 y más. ¿Pero estos cálculos parciales nos asegurarán que se cumple siempre para cualquier valor de k?. ¿Existirá alguna forma de razonar o de proceder que nos asegure que la fórmula es válida para cualquier k que pertenezca a los números naturales?

El procedimiento existe y es el objeto nuestro siguiente tema, la **Inducción matemática**.

3.3.2. Introducción a la Inducción Matemática.

Uno de los principales objetivos de la lógica, es la *determinación de la validez de los razonamientos*, esto es, establecer sin lugar a dudas que la veracidad de una determinada proposición lógica llamada conclusión se deduce necesariamente de la veracidad de una lista de proposiciones lógicas denominadas premisas.

Al comienzo de esta unidad, al introducir el ***razonamiento deductivo***, decíamos que es *un proceso por el cual, utilizando razonamientos deductivos válidos, se logra* ***establecer la verdad de una proposición particular a partir de la verdad de una proposición general.***

También apuntábamos que *constituye la forma fundamental en lógica y matemática* ***de demostrar "nuevas verdades" a partir de "verdades conocidas"****, haciéndolo* ***de lo general a lo particular***. A este proceso se lo denomina ***proceso deductivo, deducción*** o ***razonamiento deductivo***

Pero existen muchas situaciones, sobre todo en ciencias de la computación, en las que conocemos un puñado de proposiciones particulares (ejemplos o casos) que sabemos son verdaderas y que nos inducen a pensar en una proposición general que las englobe a todas, ya sea por su forma, por alguna manipulación algebraica o por simple intuición.

Esto es, *vislumbramos* ***nuevas verdades generales*** *a partir de* ***verdades particulares conocidas****, haciéndolo* ***de lo particular a lo general*** *en un proceso denominado* ***inducción***.

Sin embargo, esto debe demostrarse ya que unos pocos casos particulares no sirven o no alcanzan para dar por probada una afirmación general.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2 Analicemos la siguiente sucesión de sumas:

S1: 1 / (1 × 2) = 1 / 2
S2: 1 / (1 × 2) + 1 / (2 × 3) = (3+1) / (2x3)= 4 / (2x3) = 2 / 3
S3: 1 / (1 × 2) + 1 / (2 × 3) + 1 / (3 × 4) = (3x2) + 2 + 1 / (3 x 4) = 9/ (3x4) = 3 / 4
S4: 1 / (1 × 2) + 1 / (2 × 3) + 1 / (3 × 4) + 1 / (4 × 5) = 4 / 5

Con estos ejemplos nos vemos tentados a generalizar y decir que para todos los números naturales n se cumple:

Sn: 1 / (1×2) + 1 / (2×3) + 1 / (3×4) + … + 1 / (n×(n+1)) = n / (n + 1)

que demostraremos luego que es una proposición verdadera.

Una forma equivalente de expresar esto es, afirmar la veracidad del ***predicado o función proposicional Sn***, que denotaremos en adelante **S(n)**, cuantificada universalmente:

$\forall n \in N$: S(n) [*para todo número natural n se verifica S(n)*]

▲

Ejemplo 3 Consideremos ahora el polinomio $P(x) = x^2 + x + 41$; si reemplazamos la variable x por cero, obtenemos P(0) = 41 que es un número primo y si damos a x el valor uno, P(1) = 43 que también es un número primo. La cosa promete, así que calculamos:

P(0) = 41 → primo
P(1) = 43 → primo
P(2) = 47 → primo
P(3) = 53 → primo

lo que nos induce a creer que podemos generalizar la situación y pensar que para todo número natural x, el resultado de P(x) será un número primo (lo cual es una generalización errónea).

▲

Ejemplo 4 Sea **F(x) = 1 / (x – 1959)**; si en esta expresión asignamos a la variable x cada uno de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6 vemos que el valor de **F(x)** es un número racional, por lo que podríamos pensar que para todo número natural x, el valor de **F(x)** es un número racional.

El ejemplo 4 es trivial, ya que claramente puede verse que cuando la variable **x** tome el valor del número natural **1959**, el divisor se convierte en cero y el resultado **F(1959)** no está definido por lo cual no puede ser un número racional; en este caso la proposición "*F(x) es un número racional para todo número natural x*" es claramente falsa, aunque podríamos armar innumerable cantidad de ejemplos para los cuales sea verdadera.

La verdad o falsedad de las proposiciones generales indicadas en los ejemplos 2 y 3 es menos evidente, pero el cuarto ejemplo nos hace ver que aunque tengamos muchos casos para los cuales una afirmación sea verdadera, no podemos estar seguros de generalizarla sin más trámite.

La proposición del ejemplo 3 por ejemplo es verdadera para 0, 1, 2, 3, …, 39, pero falla cuando **x** toma el valor 40.

El ***principio de inducción matemática*** establece un método de razonamiento para demostrar la verdad o falsedad de ciertas proposiciones generales referidas a los números naturales, haciendo uso de las propiedades que los números naturales tienen por definición.

Propiedades de los Números naturales:

1) *0 es un número natural*.
2) *Si a es un número natural cualquiera, el número siguiente a+1 también es un número natural*.
3) *Cualquier subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo*.

Estas propiedades son *axiomáticas* para los números naturales, esto es, se consideran verdades evidentes que no requieren (o no pueden) ser demostradas; las primeras dos son parte de los ***axiomas de Peano***, con los que el matemático italiano G. Peano definió en 1885 el conjunto de los números naturales; la tercera, que Peano llamó *induct*, hoy suele denominarse ***principio del buen orden***.

Principio del *buen orden*

*El **principio del buen orden** es un lema que establece que todo conjunto ordenado que esté formado únicamente por números naturales tiene un primer elemento. El primer elemento de los números naturales es 0.*

En base a lo anterior se establece el siguiente principio.

Principio de Inducción Matemática: *Una función proposicional* **F(n)** *referida a los números naturales es verdadera para cualquier número natural* $\mathbf{n \geq n_0}$ *si se satisfacen las siguientes dos condiciones*:

Base Inductiva) *La proposición* $\mathbf{F(n_0)}$ *es verdadera para algún número natural* $\mathbf{n_0}$.

Paso Inductivo) *La veracidad de* **F(k)** *para cualquier número natural* $\mathbf{k \geq n_0}$ *implica la veracidad de* **F(k+1)** *para el número natural siguiente* **k + 1**.

En la anterior formulación, $\mathbf{n_0}$ es un número natural inicial para el cual la función proposicional **F(x)** se transforma en una proposición lógica verdadera, usualmente el número cero, uno, dos o alguno de los primeros números naturales.

En el paso inductivo, la suposición de que **F(k)** es verdadera para algún número natural **k** mayor o igual a $\mathbf{n_0}$ se denomina ***hipótesis inductiva***.

Como ya se dijo, el *principio de inducción matemática* establece un **método** de razonamiento para demostrar la verdad o falsedad de ciertas proposiciones generales referidas a los números naturales, método que se puede formalizar de la siguiente manera:

Método pára la Demostración por Inducción Matemática

Supongamos que es necesario demostrar que "*Para todo número natural $n \geq n_0$ la propiedad P(n) es verdadera*".

Se plantean los siguientes pasos:

1) **Base Inductiva**: Demuestre que *P(n)* es verdadera para algún número natural n_0.

2) **Paso Inductivo**: Demuestre para todo entero $k \geq n_0$, que si *P(k)* es verdadera entonces *P(k+1)* es necesariamente verdadera.

Para demostrarlo:

3).**Hipótesis Inductiva:** suponga que *P(k)* es verdadera, (donde *k* es cualquier entero elegido arbitrariamente, que cumpla $k \geq n_0$).

4). Demuestre que *P(k+1)* es verdadera **usando en la demostración la Hipótesis Inductiva**.

Demostración de la validez del método

Si en la **Base inductiva** se logra demostrar que la proposición es cierta para algún número natural $\mathbf{n_0}$ tendremos que:

$$\mathbf{F(n_0)} \text{ es verdadera}$$

Si luego, en el **Paso inductivo** puede demostrarse que, *si **F** es cierta para cualquier **k**, entonces debe serlo necesariamente para **k+1***, se tendrá por modus ponens (para $k = n_0$):

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{F(n_0)} \text{ es verdadera} \rightarrow \mathbf{F(n_{0+1})} \text{ es verdadera} \\ & \mathbf{F(n_0)} \text{ es verdadera} \\ & \text{---} \\ & \therefore\ \mathbf{F(n_{0+1})} \text{ es verdadera} \\ \text{y} & \\ & \mathbf{F(n_{0+1})} \text{ es verdadera} \rightarrow \mathbf{F(n_{0+2})} \text{ es verdadera} \\ & \mathbf{F(n_{0+1})} \text{ es verdadera} \\ & \text{---} \\ & \therefore\ \mathbf{F(n_{0+2})} \text{ es verdadera} \\ \text{y} & \\ & \ldots \end{array}$$

siguiendo así para los sucesivos números naturales (¡que siempre tienen un siguiente número natural!), tendremos que **F(n)** es verdadera para todo número natural $\mathbf{n \geq n_0}$.

Ejemplo 5: Analice la ***suma de los primeros n números naturales*** y verifique a través del Principio de Inducción si se cumple:

$$\mathbf{S_n =}\ 1+2+3+ \ldots + n = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$

Solución:

Siendo $S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n.(n+1)}{2}$

Base Inductiva:

Para $\mathbf{n_0} = 1$

$S_1 = 1 = \frac{1.(1+1)}{2} = 1$ el lado izquierdo de la ecuación es 1 y el derecho también es 1, por lo que se demuestra la Base Inductiva para $\mathbf{n_0} = 1$.

$1 = 1$

Paso Inductivo:

Para n = k suponemos verdadero:

$S_k = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ **Hipótesis Inductiva**

Para n = k+1:

$S_{k+1} = \underbrace{1 + 2 + 3 + ... + k} + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$ Reemplazando por S_k

$S_{k+1} = \frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$ Común denominador

$S_{k+1} = \frac{k.(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$ Factor común (k+1)

$S_{k+1} = \frac{(k+1).(k+2)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$

El lado derecho e izquierdo del signo = son iguales. *Luego por inducción matemática*

$\mathbf{S_n}$ **es verdadero** $\forall \mathbf{n} \geq \mathbf{1}$.

Es importante notar que, *para demostrar la veracidad de una proposición por inducción matemática, las* ***dos condiciones*** *(base inductiva y paso inductivo) deben verificarse*, aún cuando la base inductiva siempre parece muy sencilla de demostrar frente a la demostración del paso inductivo. El siguiente ejemplo refuerza esta idea.

Ejemplo 6 Determinar la veracidad de la siguiente proposición:

$\mathbf{S(n): \forall n \in N, n>0: 1 + 2 + \ldots + n = (n^2 + n + 2) / 2}$

Si vamos directamente al paso inductivo sin preocuparnos por la base inductiva, suponemos que

$\mathbf{1 + 2 + \ldots + k = (k^2 + k + 2) / 2}$ (hipótesis inductiva)

se cumple para algún natural **k**; entonces tratamos de demostrar que también se cumple para **k + 1**:

$((k+1)^2+(k+1)+2)/2 = 1 + 2 + \ldots + k + (k + 1)$

$= [1 + 2 + \ldots + k] + (k + 1)$; por asociatividad de +

$= ((k^2 + k + 2) / 2) + (k + 1)$; por hipótesis inductiva

$= (k^2 + k + 2 + 2k + 2) / 2$; por denominador común

$= (k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 2) / 2$; conmutatividad de +

$= ((k^2 + 2k + 1) + (k + 1) + 2) / 2$; asociatividad +

$((k+1)^2+(k+1)+2)/2 = ((k + 1)^2+(k + 1) + 2) / 2$; cuadrado de binomio

que es lo que se quería demostrar. O sea, se demostró que si S(n) es verdadera para algún natural **k** entonces debe necesariamente ser verdadera para **k+1**.

Entonces intentamos encontrar el primer **k** para el cual **S(k)** es verdadera:

Si intentamos S(1): 1 ¿=? $(1^2 + 1 + 2) / 2 = 2$, no se verifica.
Si intentamos S(2): 3 = 1 + 2 ¿=? $(2^2 + 2 + 2) / 2 = 4$, no se verifica.
Si intentamos S(3): 6 = 1 + 2 + 3 ¿=? $(3^2 + 3 + 2) / 2 = 7$, no se verifica.
… y así sucesivamente.

¡El problema es que no es verdadera para ningún k natural!

Como no puede demostrarse la base inductiva para ningún natural **k** (aunque si puede demostrarse el paso inductivo), la proposición S(n) **NO es verdadera**.

Ejemplo 7 Determinar para qué números naturales es verdadero que:

S(n): $2^n > n^2$

Probamos con los primeros números naturales para ver qué ocurre:

Si n = 0: $2^0 > 0^2 \rightarrow 1 > 0$; se verifica.
Si n = 1: $2^1 > 1^2 \rightarrow 2 > 1$; se verifica.
Si n = **2**: $2^2 > 2^2 \rightarrow 4 > 4$; **no se verifica**.
Si n = **3**: $2^3 > 3^2 \rightarrow 8 > 9$; **no se verifica.**
Si n = **4**: $2^4 > 4^2 \rightarrow 16 > 16$; **no se verifica.**
Si n = 5: $2^5 > 5^2 \rightarrow 32 > 25$; se verifica.
Si n = 6: $2^6 > 6^2 \rightarrow 64 > 36$; se verifica.
Si n = 7: $2^7 > 7^2 \rightarrow 128 > 49$; se verifica.

Vemos que si bien S(n) es verdadera para 0 y 1, no lo es para 2, 3 y 4; sin embargo, parece ser verdadera para todos los naturales desde el 5 en adelante, por lo cual éste es un buen punto de partida para nuestra demostración. Procedemos por inducción sobre n:

Base Inductiva)
Para $n_0 = 5$: $2^n > n^2 \rightarrow 2^5 > 5^2 \rightarrow 32 > 25$; es verdadero.

Paso Inductivo)
Suponemos que S(k) es verdadera para algún $k \geq 5$, esto es $2^k > k^2$, e intentamos probar que S(k+1) es verdadera:

$2^k > k^2$ hipótesis inductiva

No lo haremos, pero se demuestra por inducción matemática que la función proposicional **S(n)** es, para todo natural **n≥5,** un proposición verdadera.

//

Bibliografía para Inducción Matemática

Grimaldi R., Matemáticas Discreta y Combinatoria – 3ra. Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, U.S.A., 1997. (pág. 183-200)

Hopcroft J. / Motwani R. / Ullman J., Introducción a la Teoría de Autómatas, Lenguajes y Computación, Addison-Wesley Pearson, España, 2002. (pág. 22-29)

Johnsonbaugh R., Matemáticas Discretas, Grupo Editorial Iberoamérica S.A., México, 1988. (pág. 92-102)

Kolman B. / Busby R., Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1986. (pág. 42-47)

Liu C., Elementos de Matemáticas Discretas – 2da. Edición, McGraw-Hill, México, 1995. (pág. 13-21)
Pérez J., Matemática Discreta y Algoritmos, Answer Just in Time S.R.L., Argentina, 2005. (pág. 15-17)
Rojo A., Álgebra I, Editorial El Ateneo, Argentina, 1972. (pág. 167-169)
Sominskii I., El Método de la Inducción Matemática – 7ma. Reimpresión, Editorial Limusa, México, 1990.

PREGUNTAS DE REPASO

1. Si $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore Q}$ es un razonamiento deductivo válido, ¿esto quiere decir que la conclusión será siempre verdadera? . (SI o NO)? Explique.

2. **Marque** con una cruz la opción que considere correcta y **justifique su respuesta**.

   En un razonamiento deductivo, si la conclusión es una ***tautología*** *entonces*:
   a. ☐ el razonamiento será válido o no, según las premisas que se utilicen.
   b. ☐ el razonamiento no será válido, sin importar qué premisas se utilicen.
   c. ☐ el razonamiento será válido, sin importar qué premisas se utilicen.
   d. ☐ Ninguna

3. En el Principio de Inducción Matemática, indique a qué nombre corresponde al concepto:

   - La proposición $F(n_0)$ es verdadera para algún número natural n_0:

   - $F(k)$ es verdad para cualquier número natural $k \geq n_0$:

   - Si $F(k)$ es verdad para cualquier número natural $k \geq n_0$ entonces también es verdad $F(k+1)$:

4. Dadas las siguientes opciones:

   Proposición universal negativa, Proposición particular negativa,
   Proposición particular afirmativa, Proposición universal afirmativa

   Indique el nombre que corresponda a la expresión simbólica:

   $\forall x: x \in A \rightarrow x \in B$:____

   $\exists x/ x \in A \wedge x \notin B$:____

7. Un razonamiento deductivo $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore Q}$, se dice que es válido si:
   a. La conclusión **Q** es verdadera siempre.
   b. La conclusión **Q** es verdadera cada vez que una premisa cualquiera es verdadera.
   c. La conclusión **Q** es verdadera cada vez que todas las premisas son verdaderas.
   d. Las premisas son todas tautologías.

8. Un razonamiento deductivo que no es válido, también se lo denomina:
   a. Falso
   b. Falacia
   c. Contradicción
   d. Silogismo Hipotético

9. Sean P y Q dos proposiciones compuestas equivalentes. Entonces debe verificarse que:
   a. $P \rightarrow Q$ es una tautología
   b. $P \wedge Q$ es una tautología
   c. $P \vee Q$ es una tautología
   d. Ninguna de las anteriores es correcta

10. Indique el nombre y enuncie al menos una de las dos nuevas reglas de inferencia que deben ser utilizadas para razonar en lógica de predicados.

11. Exprese en símbolos la siguiente idea y construya un ejemplo en español: "Ningún elemento del dominio **D** tiene la propiedad **P"**.

12. Para demostrar por Inducción Matemática la verdad de una función proposicional **S(n)** referida a los naturales, para todo valor mayor que un $\mathbf{n_0}$ dado, se deben demostrar dos cosas. Indique qué debe demostrarse y el nombre de la etapa en la cual se hace la demostración:

    a)

    b)

13. Si $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore Q}$ es un razonamiento deductivo válido, entonces se puede decir que:
    a. La conclusión **Q** siempre será verdadera, cualesquiera sean las premisas.
    b. La verdad de la conclusión **Q**, depende solo de la verdad de las premisas $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n}$.
    c. La conclusión **Q** podrá ser verdadera o falsa, aún con todas las premisas verdaderas.
    d. Las premisas serán verdaderas si y solo sí la conclusión también lo es.

14. Existen cuatro tipos de proposiciones que establecen relaciones entre categorías o clases de objetos, y que son mejor tratadas por la lógica de predicados que por la lógica proposicional. Indique al menos dos de estos tipos de proposiciones categóricas: nombre, formato general de la oración y su expresión en símbolos.

    a. ____________________________ - ____________________________ - _________________

    b. ____________________________ - ____________________________ - _________________

15. Si $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore Q}$ es un razonamiento deductivo válido y se reemplaza la premisa $\mathbf{P_1}$ por una proposición equivalente **R**, ¿es el razonamiento resultante también válido? (SI | NO)
    Explique por qué.

16. Sean P y Q dos proposiciones compuestas equivalentes. ¿Siempre se verifica que P implica lógicamente a Q? (SI | NO)
    Explique por qué.

17. El principio de Inducción Matemática se basa en tres propiedades de los números naturales. Indique cuáles:

    a) ____

    b) ____

    c) ____

18. Complete la segunda columna el nombre del concepto descripto en la primera:

Nombre que reciben los métodos por los cuales una función proposicional se transforma en proposición lógica.	

La cuantificación universal de la función proposicional P(x) es verdadera para todos los elementos de un conjunto. ¿Como se denomina ese conjunto?	
Nombre que recibe la relación existente entre un conjunto de proposiciones y otra que se dice se deduce o infiere de aquel conjunto.	
Nombre que recibe la regla mediante la cual se puede inferir que si una proposición es verdadera para todos los elementos de un conjunto entonces se puede deducir que es verdadera para un elemento particular de ese conjunto.	
Nombre que recibe la proposición categórica que establece que los conjuntos A y B son disjuntos.	
En el método de demostración por inducción matemática se trata de establecer la veracidad de una función proposicional referida a los números naturales si se satisfacen dos condiciones. ¿Como se denominan las mismas?	
Como se denomina la proposición categórica que establece que algún miembro de un conjunto A no es miembro de un conjunto B.	

19. Indique en la segunda columna si las siguientes proposiciones son **(V)**erdaderas o **(F)**alsas:

En un razonamiento válido la implicación doble entre las premisas y la conclusión es una tautología.	
La veracidad de una función proposicional cuantificada existencialmente debe ser comprobada para todos los elementos a los cuales hace referencia.	
“Si n es un número natural entonces el número siguiente n+1 es un número natural” es un axioma de Peano referido a los números naturales.	
En el método de demostración por inducción matemática se trata de establecer la veracidad de una función proposicional referida a los números reales.	
En la denominada hipótesis inductiva se supone sin demostrar que una función proposicional F(k) es verdadera para algún numero natural k mayor o igual a un valor inicial n_0 para el que se sabe que $F(n_0)$ es verdadera.	
En el método de demostración por inducción matemática basta con demostrar que F(k+1) es verdadera, supuesto que la hipótesis inductiva es verdadera.	
En la denominada lógica de primer orden es necesario analizar la estructura interna de las proposiciones para determinar la validez de un razonamiento.	
La expresión: $\forall x: x \in A \wedge x \in B$ es la representación simbólica de la Proposición categórica universal afirmativa.	