UniversidadTecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba
Ingeniería en Sistemas de Información
Cátedra de Matemática Discreta

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL CÓRDOBA

Carrera de Ingeniería en Sistemas de Información

LÓGICA MATEMÁTICA

UNIDAD 2

Los temas de la presente unidad corresponden a la Unidad Temática 2, de la asignatura Matemática Discreta, del primer año de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información. Este apunte fue elaborado por el Ing. Juan C. Vázquez y fue luego actualizado por el Ing. Raúl E. Morchio, con la colaboración de la Ing. Claudia Inchaurrondo. Mantenido por J. C. Vázquez desde 2019.

Unidad 2
LÓGICA MATEMÁTICA

Cualquier disciplina, cuyo estudio desee encararse con rigor científico, exige para su desarrollo y formalización, el establecimiento de algunos principios básicos o *postulados* que, a modo de cimientos teóricos, permitan *inferir* de ellos conclusiones sobre el objeto de estudio, descubriendo, determinando y/o explicando de esta manera las propiedades que el mismo satisface.

Que las conclusiones obtenidas se "deriven" efectivamente de los postulados, y en este sentido, que las mismas sean "consistentes" con ellos, depende de la validez del método de inferencia utilizado para su obtención.

Las Ciencias Informáticas en su conjunto, no escapan a esta regla general. En efecto, desde la programación elemental de algoritmos y hasta los estudios más avanzados de sistemas operativos o de inteligencia artificial, la necesidad de estructurar nuestro pensamiento de una manera lógica (esto es, que nuestros métodos de inferencia sean claros y válidos), se presenta como indispensable ya que, de otra forma, resultaría imposible establecer claramente las características de un problema informático determinado y desarrollar e implementar correctamente su posible solución.

La *lógica matemática*, también llamada lógica simbólica o logística, informalmente puede definirse como *la disciplina que formaliza el estudio de los métodos de razonamiento*.

Surge así claramente, que la relación entre la lógica matemática y la informática es del tipo *esencial*, en el sentido que la primera es de aplicación natural y necesaria en prácticamente cualquier campo que se aborde de la segunda.

En el presente capítulo, se expondrá una introducción a la lógica matemática y se indicarán a cada paso, referencias bibliográficas que permitirán, por un lado, conocer los distintos puntos de vista y las presentaciones que del tema hacen, distintos autores, y por otro, profundizar los temas expuestos tanto como se quiera.

Tema 2.0
INTRODUCCIÓN

2.0.1. Breve reseña histórica.
2.0.2. Objetivos.
2.0.3. Conocimientos previos.

2.0.1. Breve reseña histórica.

La lógica, como disciplina que estudia las estructuras del pensamiento y las reglas que las gobiernan, nos llega principalmente de la Grecia clásica, de la cual toma su nombre.

Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Eudoxo de Cnido, Hipócrates de Chio[1] y muchos otros grandes pensadores griegos de los siglos IV y III precristianos, incursionaron fecundamente en las matemáticas, iniciando sus estudios como un medio para resolver problemas de la vida cotidiana, casos prácticos, y avanzando luego progresivamente hacia la abstracción, hacia el concepto puro de las estructuras generales que sustentaban las soluciones particulares desarrolladas.

Pero fue Aristóteles, quien definitivamente nos legó la lógica como un cuerpo sistémico de principios, definiciones y reglas de inferencia, que permitían discurrir acerca de los razonamientos y sus formas; la ciencia así descripta por este célebre griego (quien resumió en 164 obras todo el conocimiento de su época), permaneció casi sin modificaciones[2] durante más de dos mil años, mientras que la matemática, siguió evolucionando en forma autónoma y constante, creciendo con enorme impulso desde el renacimiento.

Algunos autores explican este comportamiento, aludiendo al poder absoluto que poseía la Iglesia del medioevo, la que sustentaba la filosofía aristotélica como correcta, y por lo cual, todo aquel que fuera en contra de esta filosofía sería tratado como hereje y perseguido. Por su lado, la matemática trataba con objetos abstractos que parecían interferir menos con las concepciones religiosas de la época.

No fue sino hasta el siglo XIX, que se volvió al estudio crítico de la lógica tradicional (si bien ya Leibniz, 1646-1717, había bosquejado algunas ideas al respecto), cuando el matemático inglés George Boole (1818-1864), publicó un tratado aritmetizando la lógica y estableciéndola como un cálculo simple y fácil de entender. A Boole, le siguieron en la formalización de la ahora llamada lógica matemática, personajes como De Morgan, Ernst Schröder, Giuseppe Peano, Gottlieb Frege y Bertrand Russell-A.N.Whitehead con su famoso tratado en tres volúmenes *Principia Mathematica* de 1910-1913.

Al principio, la lógica matemática fue considerada como una *"nueva lógica"*, tanto que Russell afirmó que *"el progreso del espíritu humano está en relación directa con la resistencia que se oponga a la filosofía de Aristóteles"*. Luego se vio que con su formalización y precisión de lenguaje, subsanaba algunas deficiencias de los planteos de Aristóteles y generaba además, una catarata de nuevas revelaciones gracias a su claridad conceptual y a la mayor facilidad de entendimiento de temas complejos, que ofrecían sus estrictos y concisos planteos simbólicos.

2.0.2. Objetivos.

Con el propósito de establecer un sistema formal para la lógica clásica, deberemos primero definir

---

[1] No debe confundirse con éste Hipócrates, al cual se debe el célebre planteamiento del problema de *la cuadratura del círculo*, con el Hipócrates considerado padre de la medicina, el cual era oriundo de Kos. (Ref. histórica extractada de **El Romance de los Números**, G.Masini, Centro Internazionale del Libro, 1980, páginas 45 a 50)

[2] Los escolásticos durante la Edad Media, efectuaron estudios sobre lógica, reordenando y puliendo las enseñanzas de Aristóteles, pero los conceptos originales permanecieron invariantes.

estrictamente algunos conceptos y los símbolos que los representen (nuestro *vocabulario lógico)*, y formular de manera precisa, las reglas que nos permitan manipularlos y combinarlos (nuestra *gramática lógica*).

Así, y para nuestro estudio, asignaremos como objetivos fundamentales de la lógica matemática, los siguientes:

- **Eliminar la ambigüedad del lenguaje natural u ordinario.**
- **Establecer reglas que determinen la validez de un razonamiento.**

y basaremos nuestro estudio en los *principios lógicos:*

a) ***de identidad***,

b) ***de no contradicción*** *y*

c) ***del tercero excluido***,

que se expondrán oportuna y contextualmente.

Para conseguir nuestro primer objetivo, definiremos estrictamente y con la mayor precisión posible, los **términos primitivos** que conformarán nuestro vocabulario lógico, una pequeña parte del lenguaje natural o cotidiano exenta de ambigüedades; el segundo, se verá satisfecho con el establecimiento de las leyes lógicas y de las reglas de inferencia, que gobiernan la interrelación de los términos primitivos, lo que nos permitirá construir **términos compuestos** o no primitivos, derivados de aquellos y estudiar sus propiedades (que en conjunto conformarán, nuestro lenguaje lógico).

Expondremos además una introducción a las funciones proposicionales y un comentario sobre la teoría de clases, como preconceptos que derivarán en la familiar teoría de conjuntos, estudiada en la etapa preuniversitaria.

2.0.3. Conocimientos previos.

No se requieren en particular, conocimientos previos para abordar el presente capítulo de lógica matemática. Es aconsejable que se utilice la bibliografía referenciada como complemento a lo aquí expuesto, lo que seguramente redundará en una mayor amplitud de criterio respecto de los temas tratados y, por la abundante ejemplificación y ejercitación que podrá encontrar en la misma, en una segura fijación de los conceptos desarrollados.

Tema 2.1
PROPOSICIONES LÓGICAS

La lógica tradicional, de origen aristotélico, distingue en su discurso **juicio** de **proposición**, afirmando que el juicio, *"es el acto mental por medio del cual pensamos un determinado enunciado"*, mientras que la proposición *"es lo pensado en dicho acto"*, asignando así a la proposición, el *significado* del enunciado pensado. Algunos autores[3] inclusive, hablan de **enunciado** como sinónimo de proposición, o intentando escapar a ciertas complicaciones, definen **sentencias** como *"serie de signos en los cuales se expresa una proposición"* y hablan así de cálculo sentencial en vez de la más conocida denominación de cálculo proposicional.

Para precisar el concepto de proposición que utilizaremos en nuestro estudio, considérense las siguientes oraciones y sus tipos en el lenguaje castellano:

a) Los alumnos son estudiosos.	*es una **oración declarativa** (una afirmación).*
b) ¿Quién fue Atahualpa?	*es una interrogación.*
c) ¡Hagan silencio!	*es una orden.*
d) 2 + x = 4	*es una **oración declarativa**.*
e) Leticia conoce el principio de elección.	*es una **oración declarativa**.*

Nótese, que de la segunda, tercera y cuarta, no puede decirse que sean verdaderas o falsas, ya que, la pregunta (b) puede ser respondida o no, pero no afirma nada sobre ninguna cosa, la orden (c) puede ser cumplida o no (al margen de las consecuencias que puedan tener por desobedecer y no hacer silencio) y, si bien la cuarta expresión afirma la existencia de una relación entre el primer y segundo miembro de la igualdad, no puede establecerse su veracidad o falsedad, hasta asignar un valor determinado a la variable ***x***.

2.1.1. Proposición lógica.

La discusión precedente, nos proporciona todos los elementos necesarios para establecer nuestro concepto de proposición.

Definición: ***Proposición lógica,*** *es toda oración declarativa de la cual pueda decirse que es o bien verdadera o bien falsa.*

Cabe indicar, que el **"o"** de *verdadera o falsa* en la anterior definición, es estrictamente excluyente, en el sentido que una proposición sólo puede tener uno de los valores de verdad especificados y sólo uno.

En general, hablaremos simplemente de ***proposiciones*** para referirnos a las proposiciones lógicas. También usaremos el término ***proposición simple*** para diferenciar proposiciones como las enumeradas anteriormente, de las ***proposiciones compuestas*** que discutiremos en breve.

Denotaremos a las ***proposiciones***, con las letras minúsculas **p, q, r, ...,** del alfabeto y escribiremos:

p: *Un computador es un dispositivo electrónico.*

[3] Véanse: **Lógica Matemática**, J.F. Mora y H. Leblanc, Fondo de Cultura Económica, 1955, páginas 23 y 24, para una discusión sobre *juicio, proposición y sentencia,* y **Lógica e Introducción a la Filosofía**, V. Fatone, Kapelusz, 1951, páginas 14 a 18, para un estudio elemental de los conceptos de *juicio y proposición*, y sus relaciones.

para establecer que **p** es la proposición: *Un computador es un dispositivo electrónico.*

En aquellos casos en que se utilicen las letras **p, q, r, ...,** sin aclarar explícitamente a qué proposiciones se refieren, hablaremos de **variables proposicionales**, en el sentido que en estos casos, las mismas actúan como *contenedores* de cualquier proposición y no representan una en particular.

La definición de proposición lógica es simple y clara, pero oculta en ella, sutilmente, se encuentran representados tres ***principios fundamentales de la lógica clásica*** que, en este contexto, pueden enunciarse como sigue:

Principio de Identidad: *Toda proposición es idéntica a sí misma*, y sólo a sí misma.

Principio de No Contradicción: *Dadas dos proposiciones contradictorias entre sí. no pueden ser ambas verdaderas*.

Principio de Tercero Excluido: *Dadas dos proposiciones contradictorias entre sí. no pueden ser ambas falsas.*

Esta apreciación no es trivial. En la actualidad, en los más variados campos del saber, y en particular en las ciencias informáticas, han cobrado gran auge y han demostrado ser de gran utilidad, las lógicas llamadas *"desviadas"* (en el sentido que se apartan de la clásica) o *no tradicionales*, las que invalidan alguno de estos principios, asignando a una proposición más de un valor de verdad[4].

El ***Principio de Identidad*** afirma algo tan general como que "El ser es", que puede ser explicado como "todo objeto es idéntico a sí mismo" y que se resume con la fórmula "A es A"

En el ejemplo: "El hombre es un animal racional"

se puede apreciar que el predicado "es un animal racional" está implícito en el sujeto "El hombre".

Presenta una identidad entre ambos, ya que no se podría pensar que el hombre no fuera un animal racional, es decir, el hombre es lo mismo que un animal racional.

Esta identidad lógica indica al mismo tiempo que el hombre implica ser animal racional, lo cual expresado en fórmula sería "A implica A".

De esto se sigue ***que de lo verdadero se deriva siempre lo verdadero, nunca lo falso.***

La importancia del principio de identidad radica en que el predicado exprese notas complementarias al sujeto, como en el ejemplo anterior. De esta manera el principio de identidad amplía nuestro conocimiento.

El ***Principio de No Contradicción***, por su parte, es un principio fundamental que descarta cualquier posibilidad de contradicción en el pensamiento y en la realidad.

Se refiere a la no-contradicción entre dos juicios, tal como se expresa en la fórmula:

"A es A" y "A no es A" no son ambos verdaderos

que expresa que "A es A" y su contradictorio, "A no es A" no pueden ser verdaderos a la vez.

En el ejemplo del Principio de No Contradicción:

"Un hombre no puede ser padre y no ser padre de la misma persona"

Se distingue aquí que "Un hombre es padre" y su contradictorio, "un hombre no es padre" no pueden ser verdaderos a la vez.

<u>Este principio incluye dos enunciaciones verdaderas</u>: ***la primera***, *que una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez*; ***la segunda***, *que no puede ocurrir que una proposición no sea ni ver-*

---

[4] Véanse **Conjuntos Borrosos**, Enrique Trillas, Vicens-Vives, 1980, páginas 1 a 6, para un comentario introductorio sobre lógica difusa, y **Lógica Matemática**, J.F. Mora y H. Leblanc, Fondo de Cultura Económica, 1955, páginas 59 a 66, en el cual se encuentra un apartado de lógicas finitamente polivalentes.

dadera ni falsa.

Así como el principio de identidad nos dice que una cosa es una cosa, el principio de no contradicción nos dice que una cosa no es dos cosas a la vez.

El principio de no contradicción permite juzgar como falso, todo aquello que implica una contradicción. De ahí la validez de los argumentos por reducción al absurdo.

El ***Principio de Tercero Excluido o del Término Medio*** se formula como un complemento necesario del principio de no contradicción.

Originalmente consistía en la afirmación de que no hay término medio entre el "ser" y el "no-ser".

En su forma lógica, este principio debe entenderse como afirmando que dos juicios contradictorios no pueden ser ambos falsos, tal como se sintetiza en la fórmula:

"A es A" o "A no es A" no son ambos falsos

que expresa que "A es A" y su contradictorio, "A no es A' no pueden ser falsos a la vez.

Son Ejemplos del Principio de Tercero Excluido:

"Un hombre que comete una falta de tránsito debe pagar la multa o no pagarla"

"Si un vaso está rajado, no puede no estar rajado"

En el principio de tercero excluido es preciso reconocer que una alternativa es falsa y otra verdadera y que no cabría una tercera posibilidad.

Así, si un hombre comete una falta de transito, "paga la multa", o "no paga la multa", una alternativa es verdadera y la otra falsa. No hay una tercera posibilidad, aunque pagara media multa está pagando la misma.

En el otro ejemplo ocurre algo similar: El vaso esta rajado o no está rajado. No puede estar medio rajado.

2.1.2. Valores de verdad y tablas.

La definición de proposición imprime a la lógica matemática un carácter **bivalente**, ya que sólo podrán asignarse dos valores, o verdadero o falso, a las proposiciones que ella considera.

La lógica como disciplina, no estudia la veracidad o falsedad de las proposiciones simples, sino más bien las estructuras en las que estas proposiciones intervienen y las reglas que regulan sus combinaciones. Por ejemplo:

p: El hombre es un mamífero.

es una proposición simple que, a los fines de la lógica, puede ser cierta o no, pero el estudio de su veracidad no es tema de la lógica, sino de la biología o de la zoología.

Resulta útil en muchos casos, organizar los valores de verdad de una proposición **p** en forma de tabla, colocando en la cabecera de la misma el nombre de la proposición a valuar y en el cuerpo, *todos los posibles valores de verdad* que a la misma puedan asignarse (su utilidad será evidente cuando tratemos el tema *conectivos lógicos*).

p
V
F

Fig. 2.1: Tabla de verdad de la variable proposicional **p**.

Una organización de este tipo recibe el nombre de **tabla de verdad** para la proposición **p** (en el caso de tablas de verdad para más de una proposición, se colocarán todas las posibles combinaciones de valores de verdad de ellas, resultando la tabla de verdad de **n** proposiciones simples, compuesta de $\mathbf{2^n}$ filas, además de la cabecera).

Nótese que, en la confección de la tabla de la figura 2.1, se han utilizado las letras **V** para denotar el valor verdadero de la proposición **p** y **F,** para denotar el valor falso, como era de esperar, pero puede encontrarse en la bibliografía de origen inglés también la letra **T** (de *true*) para indicar el valor verdadero.

2.1.3. Proposiciones compuestas.

Las proposiciones simples pueden combinarse de diversas maneras para generar proposiciones más complejas, empleando como vínculo entre ellas, ciertos vocablos denominados *conectivos lógicos*. Por ejemplo, en la oración:

Si conecto mi monitor a 380 volts, entonces explotará y no podré repararlo.

podemos identificar las proposiciones simples:

p: *Conecto mi monitor a 380 volts.* **q:** *Mi monitor explotará.* **r:** *Podré reparar mi monitor.*

que se encuentran ***conectadas*** mediante los términos **y, no, si ... entonces.**

Formalmente:

Definición: ***Proposición compuesta,*** *es toda combinación de proposiciones simples, mediante conectivos lógicos.*

Denotaremos con las letras mayúsculas **P, Q, R, ...,** a las proposiciones compuestas, y escribiremos:

$$\mathbf{P = P(p, q, r, ..., s)}$$

para expresar que la proposición compuesta **P**, está formada por la combinación de las proposiciones simples **p, q, r, ..., s**.

El valor de verdad de una proposición compuesta dependerá exclusivamente de los valores de verdad asignados a las proposiciones simples que la componen y a la forma como éstas se encuentran conectadas, esto es, de la forma que operen los conectivos que sirven de vínculo.

Tema 2.2
CONECTIVOS LÓGICOS

Ya se introdujo el concepto general de los conectivos lógicos como vínculos que, actuando entre proposiciones simples, generan proposiciones compuestas; nos toca ahora, definir estrictamente cómo operan (cómo determinar el valor de verdad de la proposición generada) y cuáles son, estos conectivos.

Observemos la tabla de la figura 2.2. Puede verse que, con los dos valores de verdad posibles de una proposición simple **p**, podrían definirse cuatro posibles **operadores unitarios** que actúen sobre ella.

p	**1**	**2**	**3**	**4**
V	F	F	V	V
F	F	V	F	V

Fig. 2.2: Posibles operadores lógicos unitarios.

Los operadores correspondientes a las columnas 1 y 4, son triviales, en el sentido que asignan a una nueva proposición falso o verdadero, cualesquiera que sea el valor de verdad de la proposición original (y sus nombres serían algo así como ***contradicción absoluta*** y ***certeza absoluta***). El operador que genera la columna 3, es claramente el de ***identidad***, el cual está implícito en el principio:

Principio de Identidad: Toda proposición es idéntica a sí misma y sólo a sí misma.

Nos queda como caso interesante, el operador que, actuando sobre **p**, genere la columna 2, invirtiendo los valores de verdad originales. Lo veremos luego y, coherentemente con el uso habitual del vocablo, lo llamaremos ***negación***. Estrictamente hablando, estos operadores no conectan dos proposiciones, por lo cual no son en realidad un *conectivo* y la proposición generada por ellos no resulta así, una proposición compuesta.

En lo que sigue, se discutirán los siguientes conectivos lógicos:

Conectivo	Símbolo	Operación	Significado
No	$\sim$	Negación	no p, no es el caso que p
Y	$\wedge$	Conjunción	p y q
O	$\vee$	Disyunción	p o q (en sentido incluyente)
si ... entonces	$\rightarrow$	Implicación simple	si p entonces q, p implica q
si y sólo si	$\leftrightarrow$	Doble Implicación	p si y sólo si q

considerados los fundamentales por la bibliografía sobre el tema, y que nos permitirán además establecer los conceptos de *implicación lógica* y de *equivalencia lógica*, necesarios para el estudio de la validez de los razonamientos.

2.2.1. Negación.

Al tratar el tema de *valores de verdad y tablas*, hicimos referencia a sólo un caso interesante de operador unitario, el que operando sobre una proposición **p**, generaría otra proposición que respondería a la segunda columna de la tabla de la figura 2.2, invirtiendo sus valores de verdad.

Definiremos formalmente este conectivo como sigue:

Definición: *Dada una proposición* ***p,*** *llamaremos* ***negación de p*** *a la proposición* ***~p,*** *(que leeremos no p)****,*** *la cual es verdadera si* ***p*** *es falsa y falsa si* ***p*** *es verdadera***.**

Caben destacar en esta definición, dos aspectos que son aplicables a todos los conectivos lógicos que estudiaremos, y que nos serán conceptualmente útiles en este capítulo:

- En primer lugar, hemos definido la ***negación de una proposición***, sin especificar si la misma es simple o compuesta. La definición, de hecho, se refiere a proposiciones simples, pero también podremos ***negar*** proposiciones compuestas ya que las mismas tienen un determinado valor de verdad que el operador "~" puede invertir.
- En segundo lugar, en la literatura usual sobre el tema, no se pone gran énfasis en destacar la diferencia entre *el conectivo lógico* y *el resultado* obtenido al aplicar el mismo a proposiciones. En general, tampoco lo haremos en nuestro estudio explícitamente, pero debe quedar claro que, cuando hablamos de "*la negación de* ***p***", nos estamos refiriendo a *la proposición resultante* de aplicar el conectivo lógico ***no*** a una determinada proposición ***p***, y no *al conectivo* en sí mismo.

p	**~p**
V	F
F	V

Fig. 2.3: Tabla de verdad de la negación de **p**.

El símbolo "**~**", que ha sido utilizado para denotar al conectivo "**no**", resulta adecuado ya que es usualmente el utilizado en los libros de lógica (y en particular porque lo encuentro cómodamente en mi teclado), pero también pueden encontrarse en la bibliografía el símbolo "**¬**", antepuesto a la proposición que se quiere negar, y el "**¯**", como sombrero de la proposición a negar.

Ejemplo: Escriba las negaciones de las siguientes proposiciones:

p: *La tierra es el tercer planeta*.

q: *La lógica clásica se fundamenta en cuatro principios***.**

r: *2 + 2 = 5*.

Solución:

~p: *La tierra no es el tercer planeta.*

~q: *La lógica clásica no se fundamenta en cuatro principios*.

~r: $2 + 2 \neq 5$.

~r: *La suma de dos más dos no es igual a cinco.*

~r: *Dos más dos es distinto de cinco***.**♦

En este ejemplo, hemos citado, exprofeso, tres formas distintas para la negación de la proposición **r**, recalcando el hecho de que, para nuestro estudio de la lógica matemática, es el *significado* del enunciado lo que llamamos *proposición****,*** y no al enunciado mismo; así, cualquiera de las tres representaciones expuestas, es considerada *la negación de* ***r***.

2.2.2. Conjunción.

Una de las formas más comunes de combinar oraciones en el lenguaje cotidiano, es la de conectarlas mediante el término **"y"**, como en:

Viajaré a Londres con Juan y María.

en la cual se conectan *viajaré a Londres con Juan* y *viajaré a Londres con María* haciendo las reducciones económicas que impone el lenguaje ordinario.

Con el mismo sentido, definiremos para la lógica matemática, el siguiente conectivo binario que, a partir de dos proposiciones permite generar una nueva proposición:

Definición: Dadas dos proposiciones *p* y *q*, llamaremos *conjunción de p y q*, a la nueva proposición *p ∧ q* *(que leeremos p y q)***, la cual es verdadera si ambas, *p* y *q* lo son y falsa en todos los otros casos.**

Esta definición se traduce en la siguiente tabla de verdad:

p	q	p ∧ q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	F

Fig. 2.4: Tabla de verdad de la conjunción de **p** y **q**.

Como vimos al plantear las Tablas de Verdad (página 6), el número de filas es igual a 2^n, siendo **n** el número de proposiciones o variables. Así, si las proposiciones son dos **p** y **q,** el número de filas son $2^2 = 4$

El símbolo **"∧"**, utilizado para denotar al conectivo lógico **"y"**, suele a veces encontrarse en la bibliografía como **"&"** o como **"."**, y también suele denominarse a la operación definida como *producto lógico*.

Ejemplo: Dadas las siguientes proposiciones simples verdaderas:

p: La letra "a" es una vocal española. **q: Dos es un número primo.**

indique:

a) La notación simbólica y en lenguaje natural, de la conjunción de ellas.

b) El valor de verdad de (i) **p ∧ q**, (ii) **q ∧ p**, (iii) **~(p ∧ q)**.

Solución:

a) **P: La letra "a" es una vocal y dos es un número primo.**

P: p ∧ q

b) Utilizaremos la forma algebraica de operar, o sea, expresar las operaciones proposicionales y luego reemplazar las proposiciones por sus valores de verdad:

(i)	**p ∧ q**	es la proposición a valuar.
	V∧V	reemplazo las proposiciones por sus valores de verdad.
	V	según la definición de conjunción.

(ii) $\mathbf{q \wedge p}$ es la proposición a valuar.
$\mathbf{V \wedge V}$ reemplazo las proposiciones por sus valores de verdad.
V según la definición de conjunción.

(iii) $\mathbf{\sim(p \wedge q)}$ es la proposición a valuar.
$\mathbf{\sim(V \wedge V)}$ reemplazo las proposiciones por sus valores de verdad.
$\mathbf{\sim(V)}$ según la definición de conjunción.
F según la definición de negación.♦

Los paréntesis utilizados en el anterior ejemplo, si bien no han sido definidos formalmente como símbolos lógicos, formarán parte de nuestro *lenguaje lógico* (como las proposiciones y los conectivos) con la función usual de establecer **prioridades** de cálculo, como en el caso (iii), en el cual establecen que primero se debe efectuar la conjunción de **p** y **q**, y luego negar su resultado.

Debemos notar aquí, que se pueden construir ciertas proposiciones compuestas mediante los conectivos **"no"** e **"y"**, como las que siguen:

$$\mathbf{P: \sim(p \wedge \sim p). \qquad Q: p \wedge \sim p.}$$

que son respectivamente, **verdadera** y **falsa** para cualquier proposición dada ***p*** y cualquiera que sea su valor de verdad.

Atendiendo a este hecho, enunciaremos las siguientes definiciones:

Tautología: Llamaremos *tautología*, a las proposiciones compuestas que son *verdaderas* para toda posible combinación de valores de verdad, de las variables proposicionales que las componen. Se las denota por V_0.

Contradicción: Llamaremos *contradicción*, a las proposiciones compuestas que son *falsas* para toda posible combinación de valores de verdad, de las variables proposicionales que las componen. Se las denota F_0.

Contingentes: A aquellas proposiciones compuestas que pueden ser verdaderas o falsas, según el valor de sus proposiciones simples componentes, se las suele llamar ***contingentes.***

Así, la anterior proposición **P** resulta ser una ***tautología*** y **Q** una ***contradicción***. Para demostrarlo, bastará con construir las respectivas tablas de verdad, lo que se deja como ejercicio.

Nótese además, que **P** y **Q** resultan sólo ser otra forma de enunciar los principios de contradicción y de tercero excluido, antes mencionados.

Ejemplo: Determine si las siguientes proposiciones son tautologías:

$$\mathbf{P: \sim(p \wedge q) \wedge \sim q. \qquad Q: \sim p \wedge (q \wedge \sim q) \wedge p.}$$

Solución: Construyamos las tablas de verdad de estas proposiciones:

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim q$	$\sim(p \wedge q) \wedge \sim q$
V	**V**	V	F	F	**F**
V	**F**	F	V	V	**V**
F	**V**	F	V	F	**F**
F	**F**	F	V	V	**V**

Contingencia

p	q	~q	q∧~q	~p	~p∧(q∧~q)	~p ∧ (q ∧ ~q) ∧ p
V	**V**	**F**	F	F	F	**F**
V	**F**	**V**	F	F	F	**F**
F	**V**	**F**	F	V	F	**F**
F	**F**	**V**	F	V	F	**F**

Contradicción

La primera tabla muestra que **P** es una ***contingencia,*** por lo que *no es tautología*, y la segunda, establece que **P** es una ***contradicción***, por lo cual, tampoco es una tautología.♦

La idea de poder contar con una proposición como **~(p ∧ ~p)** que es *siempre verdadera* para cualquier proposición **p**, es formidable, ya que tenemos para nuestro sistema lógico, una *verdad absoluta* con la cual podremos de alguna manera, establecer la validez de ciertos esquemas de pensamiento. Pero esto, lo discutiremos luego.

2.2.3. Disyunción.

Otra forma de combinar oraciones en el lenguaje cotidiano, es la de conectarlas mediante el vocablo **"o"**, como en:

Viajaré a Londres con Juan o María.

en la cual se conectan la oración: *viajaré a Londres con Juan* y la oración: *viajaré a Londres con María*.

Sin embargo, este vocablo **"o"** posee cierta ambigüedad dentro del lenguaje ordinario, ya que lo utilizamos en el sentido ***incluyente*** (o Juan o María, o ambos), y también en sentido ***excluyente*** (o Juan o María, pero no ambos).

En las siguientes oraciones, podremos ver representados claramente estos dos usos:

(a) Juan es oriundo de Mendoza o de Córdoba.

(b) Prohibido salivar o fumar en el coche.

En efecto, en (a) *Juan* pudo haber nacido en Mendoza o en Córdoba, pero no en ambas (sentido excluyente) y (b), nos lanzan del colectivo si fumamos, si salivamos, y con mayor razón, si hacemos ambas cosas a la vez (sentido incluyente).

Definiremos para la lógica matemática, el siguiente conectivo binario (no ambiguo) que, a partir de dos proposiciones dadas permite generar una nueva proposición:

Definición: Dadas dos proposiciones ***p* y *q*,** llamaremos ***disyunción incluyente*** de ***p y q*** o simplemente ***disyunción de p y q* ,** a la proposición ***p∨q*** *(*que leeremos ***p o q*),** la cual es falsa si ambas**, *p* y *q*** lo son y verdadera en todos los otros casos.

Esta definición establece estrictamente el **sentido incluyente** del conectivo lógico **"o"** (se comporta como el **y/o** del lenguaje ordinario), y puede resumirse en la siguiente tabla de verdad:

p	q	p ∨ q
V	**V**	V
V	**F**	V
F	**V**	V
F	**F**	F

Fig. 2.6: Tabla de verdad de la disyunción de **p** y **q**.

El símbolo "$\vee$", utilizado para denotar al conectivo lógico "**o**", proviene de la palabra latina ***vel*** que significa ***o*** en un sentido ***inclusivo***.

En lugar de este símbolo se suele a veces encontrar en la bibliografía como " | " o como "+", y suele también denominarse a la operación que representa como ***suma lógica***.

Ejemplo: Dadas las siguientes proposiciones simples:

p: 2 es un número impar.

q: 7 es un número primo.

a) Indique la notación simbólica y en lenguaje natural, de la disyunción de ellas.

b) Determine el valor de verdad de (i) **p $\vee$ q**, (ii) **q $\vee$ p**, (iii) **~(p $\vee$ q)**.

c) Construya las tablas de verdad de **p $\vee$ q,** y de **~(~p $\wedge$ ~q)**.

Solución:

a) **P: 2 es un número impar o 7 es un número primo.**

P: p $\vee$ q.

b) Resolviendo en forma algebraica:

(i)	**p $\vee$ q**	es la proposición a valuar.
	F$\vee$V	reemplazo las proposiciones por sus valores de verdad.
	V	según la definición de disyunción.
(ii)	**q $\vee$ p**	es la proposición a valuar.
	V$\vee$F	reemplazo las proposiciones por sus valores de verdad.
	V	según la definición de disyunción.
(iii)	**~(p $\vee$ q)**	es la proposición a valuar.
	~(V$\vee$F)	reemplazo las proposiciones por sus valores de verdad.
	~(V)	según la definición de disyunción.
	F	según la definición de negación.

c) Las tablas de verdad de **p $\vee$ q** y de **~(~p $\wedge$ ~q)**, son:

p	q	p $\vee$ q	~p	~q	~p $\wedge$ ~q	~(~p $\wedge$ ~q)
V	**V**	**V**	F	F	F	**V**
V	**F**	**V**	F	V	F	**V**
F	**V**	**V**	V	F	F	**V**
F	**F**	**F**	V	V	V	**F**

las que hemos construido juntas, por simple cuestión económica e intentando destacar "ciertas" semejanzas.♦

En la resolución de la tercera parte del anterior ejemplo, podemos notar que para cualquier par de proposiciones **p, q**, se obtendrían los mismos valores de verdad combinándolas como **(p $\vee$ q)**, o como **~(~p $\wedge$ ~q)**. Esto de alguna manera está estableciendo "algo" respecto de estas proposiciones. ¿Se imagina qué? ... . Lo veremos luego.

Disyunción Exclusiva

En el ejemplo **Juan es nacido en Mendoza o en Córdoba** el “o” tiene un sentido excluyente ya que **Juan** pudo haber nacido en Mendoza o en Córdoba, pero no en ambas.

Presentamos, entonces, una definición del **sentido excluyente** del conectivo lógico “o”.

Definición: Dadas dos proposiciones ***p* y *q*,** llamaremos ***disyunción exclusiva*** de ***p* y *q*,** a la proposición $\boldsymbol{p \underline{\vee} q}$ (que leeremos ***p* o exclusivo *q***), la cual es verdadera cuando ambas proposiciones tienen distinto valor de verdad y falsa cuando ambas tienen igual valor de verdad.

En lugar de éste símbolo $\underline{\vee}$ se suele a veces encontrar en la bibliografía como $\oplus$ **.**

Como se puede apreciar, excluye la posibilidad de que, al ser ambas proposiciones verdaderas, su disyunción sea verdadera, como ocurre con la disyunción en sentido incluyente. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción Exclusiva de p y q

Traducción del Español a símbolos

Muchas palabras del español se traducen en lógica como $\vee$, $\wedge$, ~

La palabra ***pero*** se traduce como $\wedge$ cuando vincula dos cláusulas independientes, Así por ejemplo: *Juan es alto pero él no es gordo* se interpreta *Juan es alto y él no es gordo.*

Las palabras ***ni-ni*** se traducen como dos negaciones unidas por una conjunción, así el ejemplo, *Ni lerdo ni perezoso José aprovechó la oportunidad* se interpreta *José que no es lerdo y que no es perezoso, aprovechó la oportunidad.*

Si *p* y *q* son enunciados, entonces:

p pero *q* se interpreta $p \wedge q$

ni *p* ni *q* se interpreta $\sim p \wedge \sim q$

Así, por ejemplo, si ***p:* hoy hace calor** y ***q:* hoy hay sol**

Las siguientes frases se escriben simbólicamente:

a) ***No hace calor, pero hay sol*** equivale a ***No hace calor y hay sol*** simbólicamente $\boldsymbol{\sim p \wedge q}$

b) ***No hace calor ni hay sol*** equivale a ***No hace calor y no hay sol*** simbólicamente $\boldsymbol{\sim p \wedge \sim q}$

2.2.4. Implicación simple.

Consideremos la siguiente oración:

Si apruebo el examen, entonces podré rendir la materia correlativa.

la cual expresa que existe cierta condición entre las proposiciones simples **apruebo el examen** y **podré cursar la materia correlativa**. Este tipo de oración, recibe el nombre de **proposición condicional** y definiremos el conectivo lógico *"si ... entonces"* utilizado para formarla, como sigue:

Definición: Dadas dos proposiciones ***p* y *q*,** llamaremos ***implicación simple de p y q*,** a la proposición $\mathbf{p \to q}$ (que leeremos *"p implica q" o "si p entonces q"*)**,** la cual es ***falsa*** si ***p*** es ***verdadera*** y ***q falsa*,** y ***verdadera*** en ***todos*** los otros casos.

Otras formas equivalentes de expresar la proposición *"si **p** entonces **q**"* es en el lenguaje cotidiano *"**q** sólo si **p**"* (*podré rendir la materia correlativa, sólo si apruebo el examen*), o reemplazando el *entonces* por el signo de puntuación *coma*, como en *"si apruebo el examen, podré rendir la materia correlativa".*

En la definición anterior, **p** recibe el nombre de *antecedente* (o hipótesis) de la implicación o condicional simple[5], y **q** el nombre de *consecuente* (o conclusión).

p	**q**	**p → q**
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	V
F	**F**	V

Fig. 2.7: Tabla de verdad de la implicación simple de **p** y **q**.

En general, y siempre que no se preste a malas interpretaciones, hablaremos de *implicación* "a secas" para referirnos a la implicación simple.

Resulta confusa, en cierta forma, la relación entre el significado en el lenguaje ordinario de la palabra *implicar* y los valores de la tabla de verdad de la figura 2.7. que resume la definición del conectivo lógico **"→"**.

Para intentar aclararla, podemos pensar en la implicación, como en un compromiso[6] entre el antecedente y el consecuente de la proposición condicional, en el siguiente sentido:

Si **P: p→q** es la siguiente proposición condicional:

P: Si me prestan el auto, entonces te llevo al cine.

a) Si **p** (me prestan el auto) se cumple y **q** (te llevo al cine) también (esto es, son ambas verdaderas), entonces el compromiso se cumple, y el condicional resulta verdadero.

b) Si **p** se cumple y **q** no, está claro que he roto mi compromiso, por lo cual el condicional es falso.

c) Pero si **p** no se cumple (no me prestan el auto), sea **q** cierto o no, me veo de alguna forma liberado del compromiso establecido y puedo pensar que, la lleve al cine o no, no lo he roto, por lo cual el condicional resulta verdadero.

El símbolo **"→"**, utilizado para denotar al conectivo lógico **"si, ... entonces"**, es por algunos autores reemplazado por **"⊃"**, sobre todo en la literatura más antigua.

Ejemplo: Escribir en símbolos y construir la tabla de verdad, de la siguiente proposición condicional:

P: Si compro una moto o un auto, no iré de vacaciones.

Solución:

a) Las proposiciones simples que componen **P** son:

p: Compro una moto.

q: Compro un auto.

r: Iré de vacaciones.

---

[5] En **Lógica Matemática**, J.F. Mora y H. Leblanc, Fondo de Cultura Económica, 1955, páginas 34 a 37, los autores distinguen enfáticamente la diferencia entre *implicación* y *condicional*. Todos los problemas que allí se atribuyen a la consideración de estos términos como sinónimos, creo que quedan claramente resueltos con la especificación del término *implicación lógica* que ellos no utilizan y que se verá luego en este capítulo.

[6] Un ejemplo similar, puede encontrarse en **Álgebra I**, A.O. Rojo, El Ateneo, 1972, pág. 5.

por lo que simbólicamente podemos escribir:

P(p, q, r): $(p \vee q) \rightarrow \sim r$.

b) La correspondiente tabla de verdad, es la que se muestra a continuación, y en la cual se han colocado las columnas para **$p \vee q$** y para **~r**, intentando aclarar los pasos intermedios necesarios para llegar a la determinación de los valores de verdad de **P**.

p	**q**	**r**	**$p \vee q$**	**~r**	**$(p \vee q) \rightarrow \sim r$**
V	**V**	**V**	V	F	F
V	**V**	**F**	V	V	V
V	**F**	**V**	V	F	F
V	**F**	**F**	V	V	V
F	**V**	**V**	V	F	F
F	**V**	**F**	V	V	V
F	**F**	**V**	F	F	V
F	**F**	**F**	F	V	V

En su construcción, se aplicaron las definiciones de disyunción, negación e implicación simple. La tabla tiene 8 filas ya que siendo tres las variables, $2^3 = 8$. ♦

Si **P:p→q**, daremos nombre especial a las siguientes proposiciones compuestas:

- La proposición **q→p** recibe el nombre de ***recíproca de P***.
- La proposición **~p→~q** se denomina ***contraria de P***.
- La proposición **~q→~p** es llamada ***contrarecíproca de P***. (contraria de la recíproca de **P)**

Sus tablas de verdad serán:

p	**q**	**p→q**	**q→p**	**~p→~q**	**~q→~p**
V	**V**	V	V	V	V
V	**F**	F	V	V	F
F	**V**	V	F	F	V
F	**F**	V	V	V	V

En la tabla de verdad precedente, puede notarse la estrecha relación que existe entre una proposición condicional y su contrarecíproca.

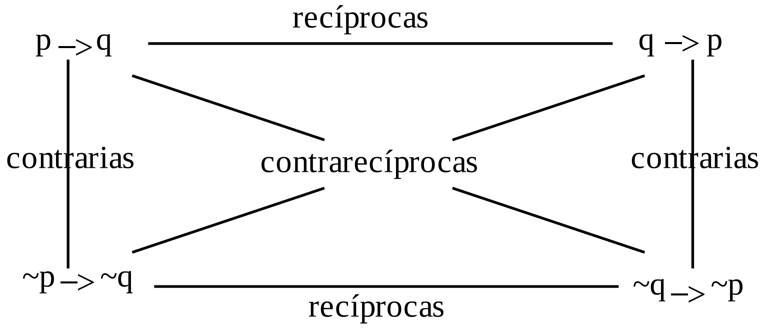

Fig. 2.8: Relaciones entre las proposiciones contrarias, recíprocas y contrarecíprocas de **p→q**.

Por último, y notando un hecho ya comentado para el caso de la disyunción, se debería reflexionar sobre el siguiente ejemplo que muestra la posibilidad (en cuanto a tablas veritativas se refiere), de reescribir la implicación utilizando los conectivos de conjunción y negación.

Ejemplo: Construya las tablas de verdad de las proposiciones **p→q** y **~(p ∧ ~q)**.

Solución:

p	q	p → q	~q	p ∧ ~q	~(p ∧ ~q)
V	**V**	V	F	F	V
V	**F**	F	V	V	F
F	**V**	V	F	F	V
F	**F**	V	V	F	V

las que hemos construido juntas, para acentuar las semejanzas.♦

2.2.5. Doble Implicación.

En la proposición condicional:

P: Si me prestan el auto, entonces te llevo al cine.

se establece de alguna forma, una relación de *"ida"*, pero la *"vuelta"* (la recíproca de **P**):

Q: Si te llevo al cine, entonces me prestaron el auto.

también existe.

Si efectuamos la conjunción de estas proposiciones (**P ∧ Q**), tendremos algo así como una relación de *ida y vuelta* entre las proposiciones **P** y **Q**. Arribamos así a la siguiente:

Definición: Dadas dos proposiciones ***p*** **y** ***q*****,** llamaremo***s doble implicación de p y q,*** a la proposición ***p ↔ q*** *(*que leeremos *"p implica doblemente a q"* o *"p si y sólo si q")***,** la cual es falsa si ***p*** **y** ***q*** tienen distintos valores de verdad, y verdadera si tienen igual valor de verdad.

En la definición anterior, ***p↔q*** recibe también el nombre de ***proposición bicondicional*** o de *equivalencia condicional*[7], y se dice que ***p*** es *condición necesaria y suficiente* para ***q***, y viceversa.

p	q	p↔q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	V

p→q	q→p	p→q ∧ q→p
V	V	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Fig. 2.9: Tabla de verdad de la doble implicación de **p** y **q**.

Como se indicó, el bicondicional puede interpretarse como la conjunción de dos proposiciones recíprocas: **(p→q) ∧ (q→p)**, lo que justifica su denominación.

El símbolo **"↔"**, utilizado para denotar al conectivo lógico **"si, y sólo si"**, es reemplazado por algunos autores (sobre todo en textos de álgebra y de análisis matemático) por **"sii"**.

Eventualmente nosotros también lo haremos, en nuestros enunciados de propiedades y teoremas.

Ejemplo: Escribir en símbolos y construir la tabla de verdad, de la siguiente proposición:

P: Iré de vacaciones, si y sólo si, compro una moto o un auto.

[7] Véase **Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación**, B. Kolman / R.C. Busby, Prentice Hall, 1986, Apéndice de lógica, páginas 398 a 400, donde se utiliza este término.

Solución:

a) Las proposiciones simples que componen **P** son:

p: Iré de vacaciones.

q: Compro una moto.

r: Compro un auto.

por lo que simbólicamente podemos escribir:

$$\mathbf{P(p, q, r): p \leftrightarrow (q \vee r)}.$$

b) La correspondiente tabla de verdad, es la que construimos a continuación:

p	**q**	**r**	**$q \vee r$**	**$p \leftrightarrow (q \vee r)$**
V	**V**	**V**	V	V
V	**V**	**F**	V	V
V	**F**	**V**	V	V
V	**F**	**F**	F	F
F	**V**	**V**	V	F
F	**V**	**F**	V	F
F	**F**	**V**	V	F
F	**F**	**F**	F	V

en cuya construcción se aplicaron las definiciones de disyunción y doble implicación.♦

El siguiente ejemplo, reúne las semejanzas ya establecidas entre los distintos conectivos lógicos presentados:

Ejemplo: Construya las tablas de verdad de $\mathbf{p \leftrightarrow q}$ y de $\mathbf{\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)}$.

Solución:

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**	**$\sim q$**	**$p \wedge \sim q$**	**$\sim(p \wedge \sim q)$**	**$\sim p$**	**$q \wedge \sim p$**	**$\sim(q \wedge \sim p)$**	**$\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$**
V	**V**	V	F	F	V	F	F	V	V
V	**F**	F	V	V	F	F	F	V	F
F	**V**	F	F	F	V	V	V	F	F
F	**F**	V	V	F	V	V	F	V	V

donde deben observarse la tercera y la décima columnas.♦

<u>**Jerarquía de Conectores**</u> (*precedencia*)

Jerarquía	**Conector**
1°	$\sim$
2°	$\wedge$ **.**
3°	$\vee$ +
4°	$\rightarrow$
5°	$\leftrightarrow$
El uso de paréntesis ( ) permite modificar la jerarquía	

2.2.6. Implicación lógica (o consecuencia lógica) y equivalencia lógica.

Definimos dos conceptos importantes que establecen *relaciones* entre dos o más proposiciones compuestas[8]. No son conectivos ya que no generan una nueva proposición lógica.

Hablamos de los conceptos de *implicación lógica* (o también *consecuencia lógica)* y de *equivalencia lógica*, los cuales son sólo un nombre propio otorgado a dos formas tautológicas, pero que simplifican ciertos temas con su uso.

En particular en la *equivalencia lógica,* la idea subyacente es que si dos proposiciones compuestas tienen idénticas tablas de verdad, las mismas son *reemplazables*, lo que ayuda mucho en la prueba de propiedades no evidentes.

Definición: Dadas dos proposiciones compuestas ***P(p, q, ..., z)*** y ***Q(p, q, ..., z),*** se dice que ***P implica lógicamente a Q*** **(**o que ***Q es consecuencia lógica de P*****)** , y se denota con ***P⇒Q,*** si para cualquier combinación de valores de verdad de ***p , q,..., z*** que haga a ***P*** verdadera, resulta ***Q*** también verdadera**.**

Es decir, que si para cada combinación de valores de verdad de *p* y *q* que hagan verdadera a ***P*** también hacen verdadera a ***Q***, se dice que ***P*** *implica lógicamente a* ***Q*** (o que ***Q*** *es consecuencia lógica de* ***P***).

Nótese, que no se impone nada para cuando **P** es falsa, lo que hace que la *implicación lógica* se verifique precisamente cuando la implicación simple:

P(p, r, ..., z) → Q(p, r, ..., z) es una **tautología**.

Esto nos brinda una regla práctica sencilla (comprobar si la implicación simple es una tautología), para determinar cuándo dos proposiciones compuestas se implican lógicamente, sin importar qué tan complejas éstas sean.

Analizando la tabla de verdad de la ***Implicación Simple***, que se muestra a continuación, vemos que cuando ***P*** es V y ***Q*** también es V, (condición para que sea una ***Implicación Lógica***) ***P→Q*** también es V, por lo que la ***implicación lógica*** determina que la ***implicación simple*** es una **tautología**.

P	***Q***	***P →Q***
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de la Implicación simple de ***P*** y ***Q***

Análogamente:

Definición: Dadas dos proposiciones compuestas ***P(p, q, ..., z)* y *Q(p, q, ..., z),*** se dice que ***P es lógicamente equivalente a Q,*** y se denota con ***P≡Q,*** si para cualquier combinación de valores de verdad de ***p, q, ..., z***, **r**esultan ***P* y *Q*** con igual valor de verdad**.**

Dicho de otra manera, si para los mismos valores de verdad de ***p*** y ***q*** (cualquiera sea la combinación de ellos), resultan con igual valor de verdad ***P*** y ***Q***, podemos decir que éstas son ***lógicamente equivalentes*** (tienen la misma tabla de verdad).

Aquí, la *equivalencia lógica* o simplemente *equivalencia* de las proposiciones **P** y **Q**, se cumple precisamente cuando:

P(p, r, ..., z) ↔ Q(p, r, ..., z) es una **tautología**.

[8] Véase **Matemática Discreta**, R. Johnsonbaugh, Grupo Editorial Iberoamérica, 1988, páginas 12 a 17 para un tratamiento de estos conceptos.

Analizando la tabla de verdad de la ***Doble Implicación*** de ***P*** y ***Q*,** que se muestra a continuación**,** vemos que cuando **P** y **Q** tienen igual valor de verdad, (condición para que sean ***lógicamente equivalente)*** **P↔Q** es Verdadera, por lo que la ***equivalencia lógica*** de **P** y **Q** determina que la ***doble implicación*** sea una **tautología.**

P	***Q***	***P ↔Q***
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de la ***Doble Implicación*** de ***P*** y ***Q***

A veces, el símbolo **"≡"**, utilizado para denotar la equivalencia lógica, suele ser reemplazado por **"⇔"** o simplemente por **"="**, y se le llama también ***identidad*** o ***igualdad lógica***.

La definición anterior, en otras palabras, establece que dos proposiciones son lógicamente equivalentes (o sustituibles!), si sus respectivas tablas de verdad son iguales renglón a renglón, hecho destacado anteriormente e "insinuado" en nuestra búsqueda de semejanzas a lo largo del estudio de las operaciones lógicas.

Ejemplo: Dada la proposición **P:p→q** determine si las proposiciones recíproca, contraria y contrarecíproca de **P**, son equivalentes a la misma.

Solución: Reescribiendo las tablas de verdad de estas proposiciones:

p	**q**	**p→q**	**q→p**	**~p→~q**	**~q→~p**
V	**V**	V	V	V	V
V	**F**	F	V	V	F
F	**V**	V	F	F	V
F	**F**	V	V	V	V

puede verse claramente que las proposiciones contraria y recíproca, no son equivalentes a **P**; sin embargo, la contrarecíproca **~q→~p** sí lo es. En símbolos:

p→q ≡ ~q→~p♦

2.2.7. Algunas leyes lógicas.

Las leyes lógicas son meras tautologías, esto es, equivalencias entre proposiciones, como la ya indicada entre "**p ∨ q**" y "**~(~p ∧ ~q)**", (... eso era!), y no deben confundirse con los principios o las definiciones. *Las leyes se pueden demostrar*.

Definiremos en lo que sigue, de manera algo informal, algunos términos comunes a la lógica y a la matemática, que aportarán claridad al concepto de *leyes* enunciado, para luego listar las leyes más importantes, las que nos serán útiles en el estudio de los *razonamientos,* en la próxima unidad.

Definido ya en forma estricta, nuestro lenguaje lógico, podemos establecer las siguientes propiedades generales (equivalencias), que pueden demostrarse entre las operaciones lógicas y las proposiciones compuestas que ellas generan.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES LÓGICAS

1. Involución:

$\sim(\sim p) \equiv p$

2. Idempotencia:

a) $p \wedge p \equiv p$
b) $p \vee p \equiv p$

3. Conmutatividad:

a) De la conjunción: $p \wedge q \equiv q \wedge p$
b) De la disyunción: $p \vee q \equiv q \vee p$

4. Asociatividad:

a) De la conjunción: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
b) De la disyunción: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

5. Distributividad:

a) De la conjunción respecto de la disyunción: $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) De la disyunción respecto de la conjunción: $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

6. Leyes de DeMorgan:

a) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ b) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

7. Leyes de Neutro:

a) $p \vee F_0 \equiv p$ b) $p \wedge V_0 \equiv p$

8. Leyes de Dominación o Acotación:

a) $p \vee V_0 \equiv V_0$ b) $p \wedge F_0 \equiv F_0$

9. Leyes de Complementos:

a) $p \vee \sim p \equiv V_0$ b) $p \wedge \sim p \equiv F_0$

Fig. 2.8. Algunas leyes lógicas.

Se debe hacer hincapié, en dos aspectos:

a) Las leyes lógicas expuestas en el cuadro anterior, son sólo ***algunas*** de las que pueden formularse, ya que existen virtualmente infinitas tautologías.

b) ***No son ni principios ni definiciones***, sino que se trata de ***teoremas*** que pueden demostrarse mediante la confección de sus respectivas tablas de verdad.

El siguiente principio es un valioso auxiliar para demostrar los duales de cada una de las leyes (teoremas) anteriores.

Principio de Dualidad: *Si **T** es un teorema de la lógica matemática, entonces* ***el dual*** *de* ***T****, denotado por* ***T*****, construido reemplazando los símbolos* V_0, F_0, $\wedge$, $\vee$ *de* ***T*** *por los símbolos* V_0, F_0, $\vee$, $\wedge$, *respectivamente****, es también un teorema.***

Ejemplo: Demostrar el enunciado a) de la primera ley de DeMorgan.

Solución: Construimos las tablas de verdad de los miembros derecho e izquierdo de la equivalencia lógica $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

p	q	p∨q	~(p ∨ q)	~p	~q	~p ∧ ~q
V	**V**	V	F	F	F	F
V	**F**	V	F	F	V	F
F	**V**	V	F	V	F	F
F	**F**	F	V	V	V	V

y dado que las columnas cuarta y séptima resultan iguales renglón a renglón, queda demostrada la equivalencia.♦

Ejemplo: Demostrar el enunciado b) de la primera ley de DeMorgan habiendo demostrado, en el ejemplo anterior, el enunciado a).

Solución: El enunciado a) ya demostrado es: **$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$**.

Aplicamos el Principio de Dualidad, y cambiamos $\vee$ por $\wedge$ y $\wedge$ por $\vee$ y la expresión anterior queda transformada en: **$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$** que es el enunciado b) de la Primera Ley de De Morgan

---

PREGUNTAS DE REPASO

1. Dadas dos proposiciones compuestas P(x, y, z) y Q(x, y, z) es lo mismo afirmar **P** , que la expresión : **Si Q entonces P y Q**?. De un ejemplo y justifique su respuesta.
2. ¿Como se conoce el principio fundamental de la lógica que permite afirmar que *un hombre no puede ser padre* y *no ser padre de la misma persona* o más brevemente, que *A es A* y su contradictorio *A no es A* no pueden ser ambos verdaderos a la vez?
3. ¿Como se conoce el principio fundamental de la lógica que permite afirmar que no es posible que *A es A* no sea, ni verdadero ni falso?
4. ¿Como se conoce el principio fundamental de la lógica que permite afirmar *si un vaso está rajado no puede no estar rajado?*
5. Dada dos proposiciones contradictorias entre sí:

   no pueden ser distintas □ no pueden ser ambas falsas □
   no pueden ser ambas verdaderas □ ninguna de las anteriores □

6. ¿Por qué no es una proposición la siguiente oración?

   ¿Cuál es el aula de cursado de Matemática Discreta?

   a) Porque solo las preguntas que se responden por **si** o por **no** son proposiciones.
   b) Porque las preguntas nunca son proposiciones.
   c) Porque la respuesta a la pregunta cambia en el tiempo según el aula asignada.
   d) Ninguna de las anteriores opciones es correcta.

7. *No puede ser que alguien sea la madre y no sea la madre de la misma persona*. ¿Qué principio de la lógica nos permite afirmar lo anterior?
8. Dada la siguiente proposición en castellano:

   R: Si usted quiere ir al centro entonces debería tomar un ómnibus

   ¿Cuál o cuáles de las siguientes construcciones considera que es correcta?

   a) p:ir al centro, q:tomar un ómnibus, R:p implica q.
   b) p:si usted quiere ir al centro, q:entonces debería tomar un ómnibus, R: p y q.
   c) p:si usted quiere ir al centro, q:entonces debería tomar un ómnibus, R: p implica q.

d) p:usted quiere ir al centro, q:usted debería tomar un ómnibus, R: p implica q.
e) p:usted quiere ir al centro, q:usted debería tomar un ómnibus, R: p y q.

9. Considere la oración: *Hay vida en Europa, la sexta luna de Júpiter*.

a) No es una proposición lógica porque aún no se sabe si hay vida allí.
b) Es una proposición “abierta”, hasta que se sepa si existe o no vida en Europa.
c) Es una proposición lógica, porque de haber vida será verdadera y si no será falsa.
d) Es una proposición lógica por el solo hecho de afirmar algo.
e) Ninguna de las anteriores es correcta.

10. La oración: *Esta proposición es falsa*.

a) Es una proposición lógica porque es una afirmación que será verdadera o falsa.
b) No es una proposición lógica porque no puede saberse su valor de verdad.
c) No es una proposición lógica porque una proposición no puede hablar de sí misma.
d) Ninguna de las anteriores es correcta.

11. La oración: *Esta proposición es verdadera*.

a) Es una proposición lógica porque es una afirmación que será verdadera o falsa.
b) No es una proposición lógica porque no puede saberse su valor de verdad.
c) No es una proposición lógica porque una proposición no puede hablar de sí misma.
d) Ninguna de las anteriores es correcta.

12. En la oración: *En último partido Talleres-Belgrano, ganó Talleres o ganó Belgrano.*

a) La “o” es inclusiva.
b) La “o” es exclusiva.
c) La “o” en este caso está haciendo las veces de “y”.
d) Ninguna de las anteriores es correcta.

13. Suponga que se desean fabricar nuevos conectivos llamados *AlMenosUnaEsVerdaderaN* que pueda ser aplicado a **N** proposiciones simples; por ejemplo, con tres proposiciones simples utilizaríamos el formato *AlMenosUnaEsVerdadera3(p, q, r)*.

a) Muestre la tabla de verdad para este conectivo con N=1, 2 y 3.

b) Para cada uno de esos conectivos, encuentre una proposición lógica equivalente que solo utilice la negación, conjunción y disyunción de sus proposiciones simples.

14. Muestre que $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$ es equivalente a $\sim p$.

15. Dadas las proposiciones compuestas **P(p, q, r)** y **Q(p, q, r)** ¿es lo mismo afirmar **P**, que afirmar **Si Q entonces P y Q**?. Justifique su respuesta y muestre un ejemplo en castellano.

16. Clasifique las siguientes proposiciones, según sus valores de verdad:

a) $\sim(p \wedge \sim p)$ ________________________________

b) $p \vee \sim q$ ________________________________

c) $p \vee \sim p$ ________________________________

d) $p \wedge \sim p$ ________________________________

17. Dada $P: p \rightarrow q$, indique el nombre usual dado a las siguientes proposiciones:

a) $\sim p \rightarrow \sim q$: ________________________________

b) $q \rightarrow p$: ________________________________

c) $\sim q \rightarrow \sim p$: ________________________________