

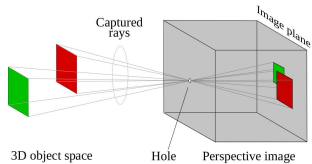
## **Modelo de cámara**

Araguás, Gastón   Redolfi, Javier

6 de mayo de 2020

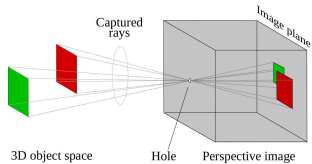
# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva



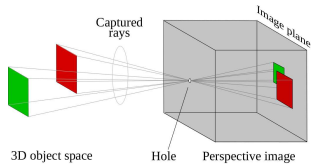
# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva



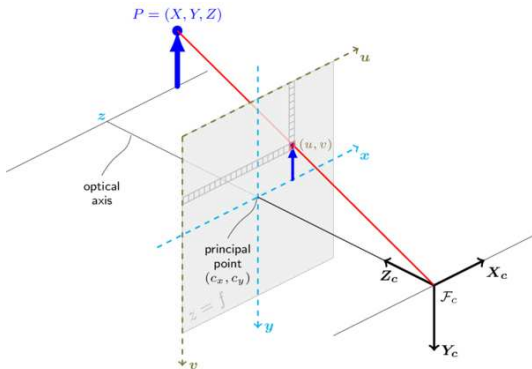
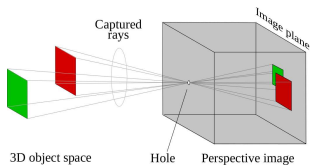
# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva



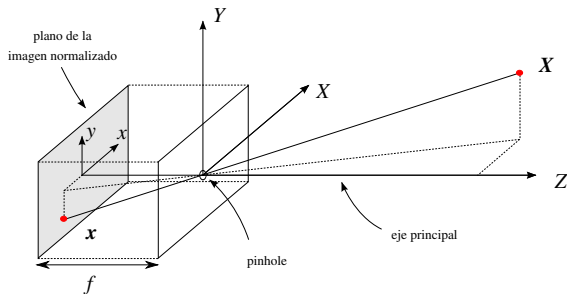
# Modelo de cámara - pinhole

## Proyección central - Proyección perspectiva



# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva



Por triángulos semejantes

$$-\frac{x}{f} = \frac{X}{Z} \quad -\frac{y}{f} = \frac{Y}{Z}$$

# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva

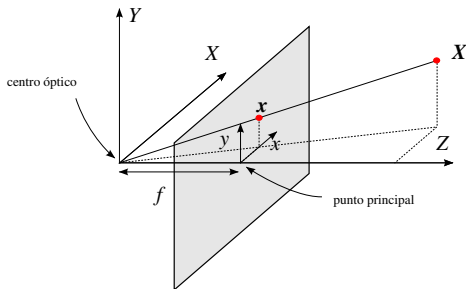


Imagen virtual en el plano  $z = f$

$$\frac{x}{f} = \frac{X}{Z} \quad \frac{y}{f} = \frac{Y}{Z}$$

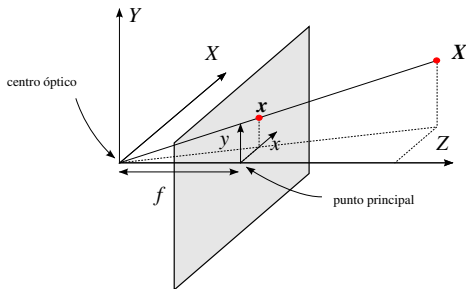
En coord. homogneas

$$X = [X, Y, Z, 1]^T \Rightarrow x = [f \frac{X}{Z}, f \frac{Y}{Z}, 1]^T = [fX, fY, Z]^T$$

Mapa  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ .

# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva



Matricialmente

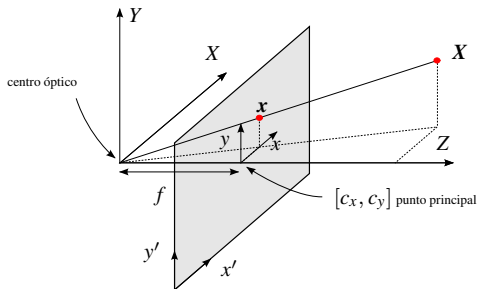
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & & 0 \\ & f & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = P\mathbf{X}$$

con  $P$  una matriz de proyección de  $3 \times 4$  llamada *matriz de la cámara*



# Modelo de cámara - pinhole

## Proyección central - Proyección perspectiva



Offset en el *punto principal*

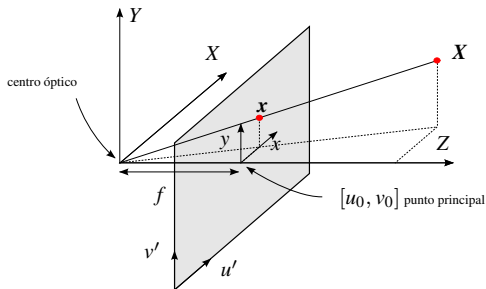
$$\mathbf{x}' = \left[ f \frac{X}{Z} + c_x, f \frac{Y}{Z} + c_y, 1 \right]^T = \begin{bmatrix} f & c_x & 0 \\ f & c_y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{x}' = K[I|\mathbf{0}]\mathbf{X}$$

$K$  es la **matriz de calibración** y  $(c_x, c_y)$  se llama **punto principal**.

# Modelo de cámara - pinhole

## Proyección central - Proyección perspectiva



Sistema de coordenadas en píxeles  $m\mathbf{x}' = [xm_x, ym_y, 1]^T \rightarrow \mathbf{u}' = [u', v', 1]^T$

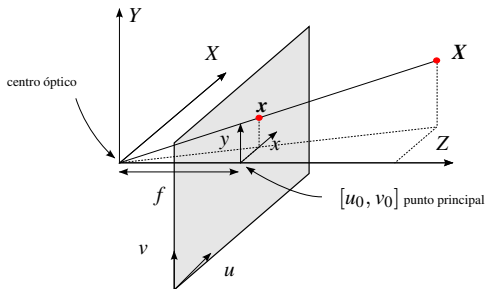
$$\mathbf{u}' = \left[ f \frac{X}{Z} m_x + c_x m_x, f \frac{Y}{Z} m_y + c_y m_y, 1 \right]^T = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [I|\mathbf{0}] \mathbf{X}$$

$$\mathbf{u}' = K[I|\mathbf{0}]\mathbf{X}$$

con  $\alpha_x = fm_x$ ,  $\alpha_y = fm_y$ ,  $u_0 = c_x m_x$  y  $v_0 = c_y m_y$  en píxeles.

# Modelo de cámara - pinhole

Proyección central - Proyección perspectiva



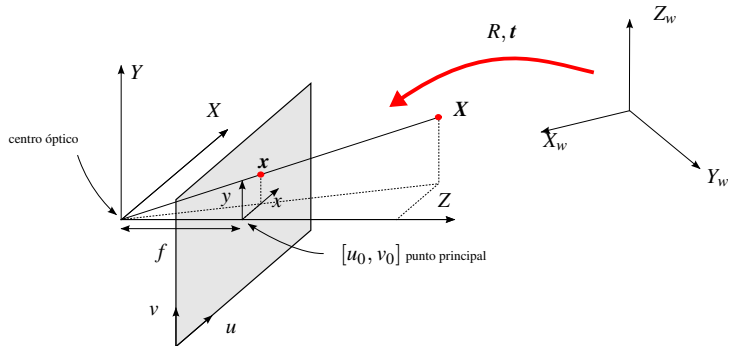
Ejes de la cámara no perpendiculares  $\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u} = [u' + sv', v', 1]^T$

$$\mathbf{u} = \left[ \alpha_x \frac{X}{Z} + u_0 + s \left( \alpha_y \frac{Y}{Z} + v_0 \right), \alpha_y \frac{Y}{Z} + v_0, 1 \right]^T = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & u_0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [I|\mathbf{0}]X$$

$$\mathbf{u} = K[I|\mathbf{0}]X = PX$$

# Modelo de cámara - pinhole

## Proyección central - Proyección perspectiva



Rotación y traslación

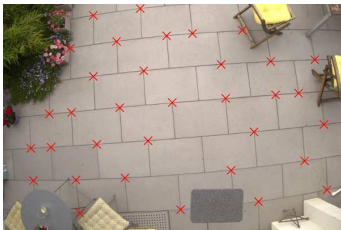
$$X = \begin{bmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} X_w$$

$$u = K[I|\mathbf{0}]X = K[R|t]X_w = PX_w$$

$P$  tiene 11 GDL, 5 de la matriz  $K$ , 3 de la rotación (3D) y 3 de la traslación.

# Modelo de cámara - pinhole

Distorciones ópticas



# Modelo de cámara - pinhole

## Distorciones ópticas



Sean  $x$  y  $\hat{x}$  los puntos ideal y con distorsión

### Distorsión radial

$$\hat{x} = x + x \left[ k_1 (x^2 + y^2) + k_2 (x^2 + y^2)^2 \right]$$

$$\hat{y} = y + y \left[ k_1 (x^2 + y^2) + k_2 (x^2 + y^2)^2 \right]$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son los **coeficientes de distorsión radial**<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Modelos más complejos contemplan  $k_3$ ,  $k_4$  y  $k_5$ , y  $p_1$ ,  $p_2$  (**coeficientes de distorsión tangencial**).

## Homografía entre plano de calibración y plano imagen

Sea  $\mathbf{X}^w$  un punto 3D sobre el plano  $Z = 0$  en el sistema de coordenadas del mundo, entonces  $\mathbf{X}^w = [X, Y, 0, 1]^T$

$$\mathbf{x} = K[\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ t]\mathbf{X}^w = K[\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ t]\mathbf{x}^w = H\mathbf{x}^w$$

donde  $\mathbf{x}^w = [X, Y, 1]^T$ , por lo tanto

$$H = K[\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ t]$$

es una homografía (matriz de  $3 \times 3$ )

---

<sup>1</sup>Z. Zhang. A flexible new technique for camera calibration. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, IEEE Transactions on 2000.

### Algoritmo

- Estimar  $H$  usando Direct Linear Transform (DLT)
- Usando varias imágenes se trata de minimizar:

$$\sum_i^N \sum_j^P d(\mathbf{x}_{ij}, \hat{\mathbf{x}}(K, k_1, k_2, R_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{X}_j^w))$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(K, k_1, k_2, R_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{X}_j^w)$  es la proyección del punto 3D  $\mathbf{X}_j^w$ , en la  $i$ -ésima imagen

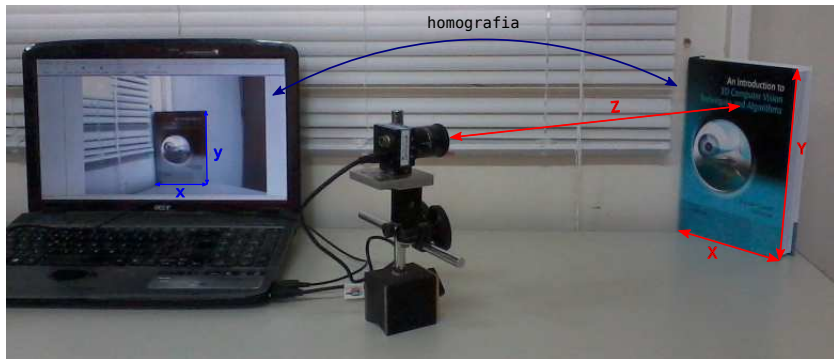
Cada imagen aporta 8 GDL, de los cuales 3 son de la rotación y 3 de la traslación, los dos restantes ajustan los parámetros intrínsecos.



# Calibración

Calibración simple

Asumiendo  $s = 0$  y sin considerar la distorsión de la lente...



$$\alpha_x = \frac{x}{X}Z \quad \alpha_y = \frac{y}{Y}Z \quad u_0 = w/2 \quad v_0 = h/2$$

# Calibración

## Calibración simple - Ejemplo

### Calibración simple

$$K = \begin{bmatrix} 600 & 0 & 372 \\ 0 & 600 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Calibración completa (8 imágenes)

$$K = \begin{bmatrix} 611,47746477 & 0 & 432,3113038 \\ 0. & 613,15654266 & 208,46520386 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2,57e - 01 & 1,44e - 01 & -1,70e - 02 & 4,34e - 03 & 3,24e - 04 \end{bmatrix}$$