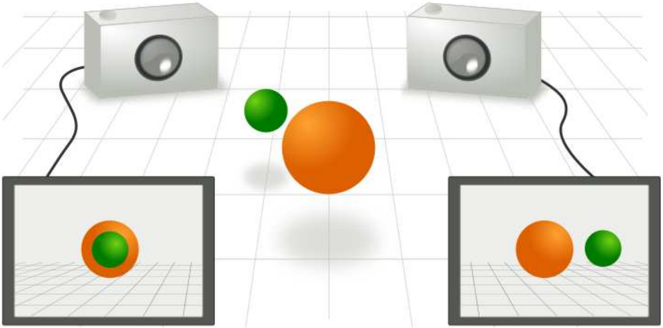
Visión estéreo - Geometría epipolar

Araguás, Gastón   Redolfi, Javier

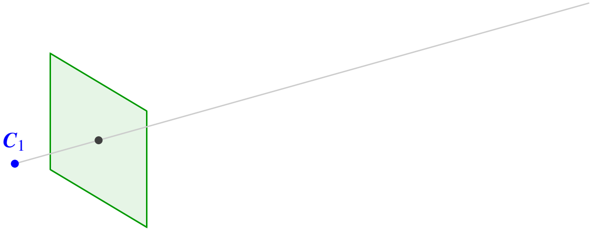
15 de mayo de 2020

Visión estéreo - Concepto



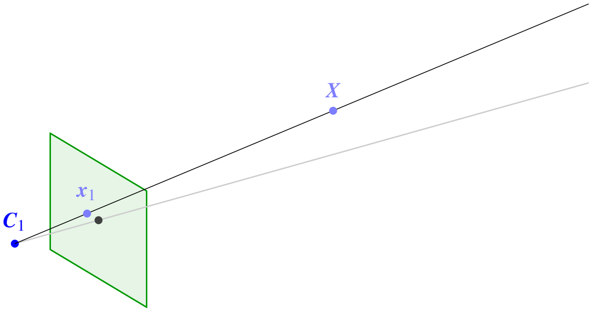
Visión estéreo - Equipos

Geometría epipolar - Definición



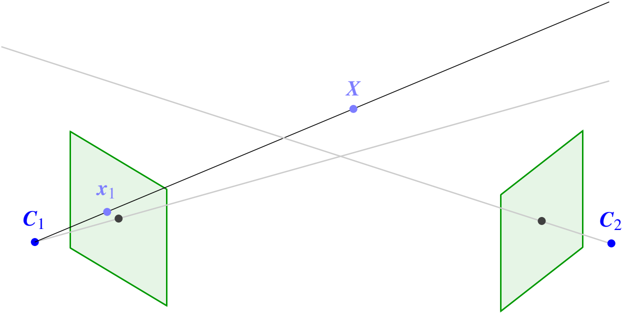
$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

Geometría epipolar - Definición



$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$
$$\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{X}$$

Geometría epipolar - Definición

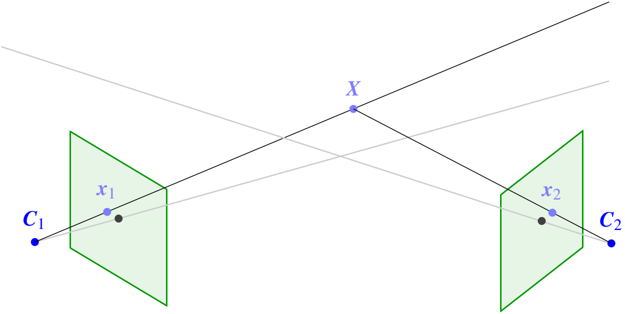


$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

$$\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{X}$$

$$P_2 = K_2[R|\boldsymbol{t}]$$

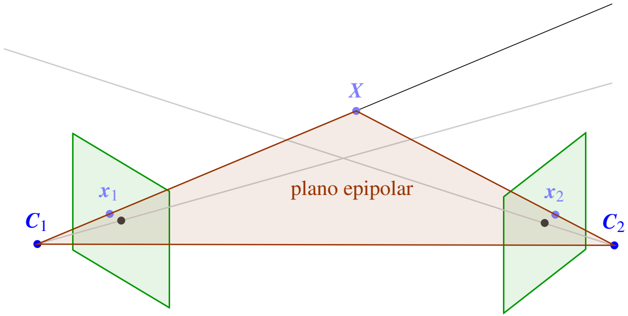
Geometría epipolar - Definición



$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}] \qquad P_2 = K_2[R|\boldsymbol{t}]$$

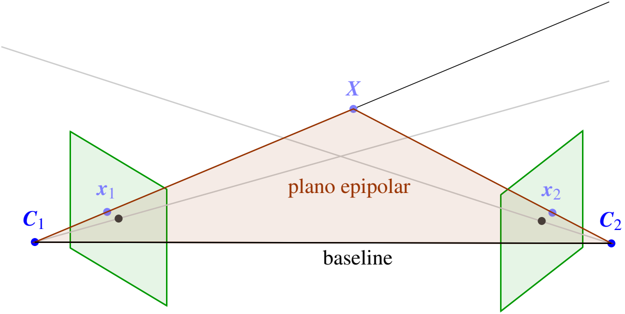
$$\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{X} \qquad \boldsymbol{x}_2 = P_2\boldsymbol{X}$$

Geometría epipolar - Definición



El punto $\boldsymbol{X}$ y los centros de las cámaras forman un plano, llamado plano epipolar

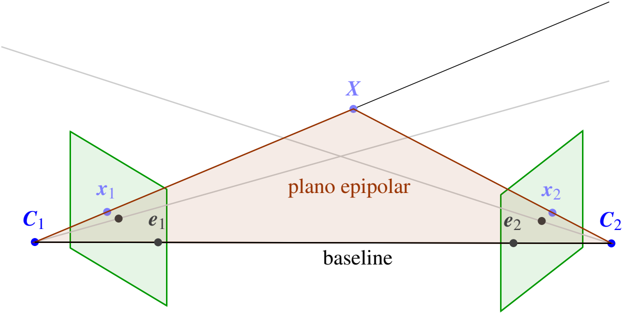
Geometría epipolar - Definición



El punto X y los centros de las cámaras forman un plano, llamado plano epipolar

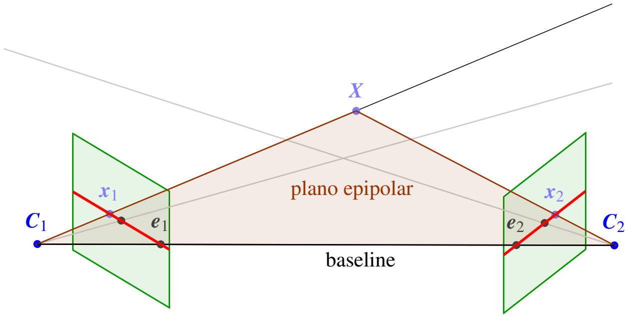
La línea que une los centros de las cámaras se llama línea base o baseline

Geometría epipolar - Definición



Los puntos de intersección de la línea base con los planos de imagen se llaman epípolos

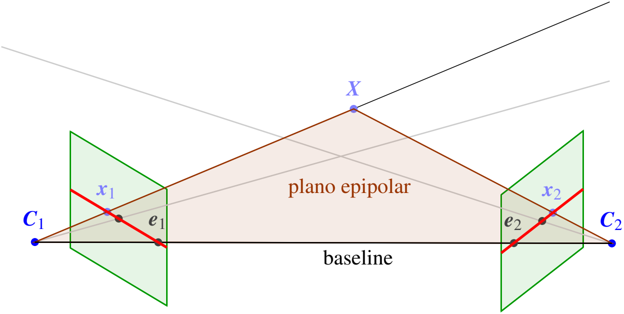
Geometría epipolar - Definición



Los puntos de intersección de la línea base con los planos de imagen se llaman epípolos

La línea que une los epípolos con los puntos proyectados $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ se llaman líneas epipolares

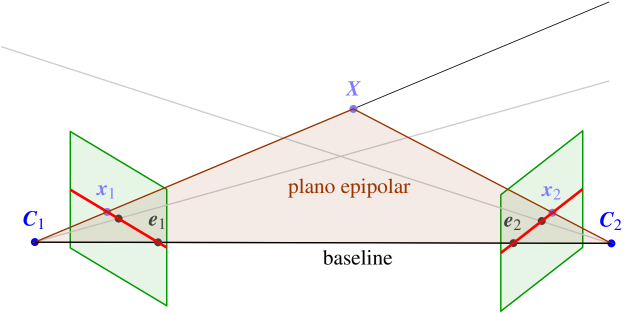
Geometría epipolar - Definición



De que sirven conocer las lineas epipolares y los epipolos?
Vamos a GeoGebra[1]...

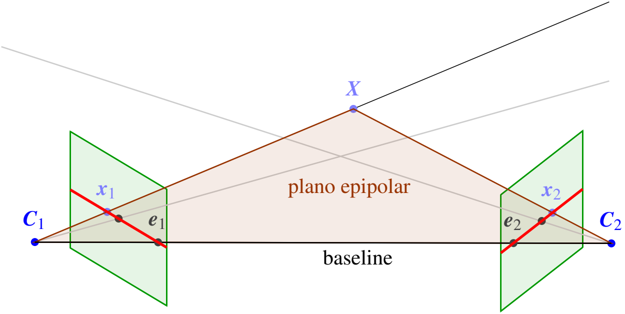
[1] `http://www.geogebra.org`

Geometría epipolar - Definición



Geometría Epipolar

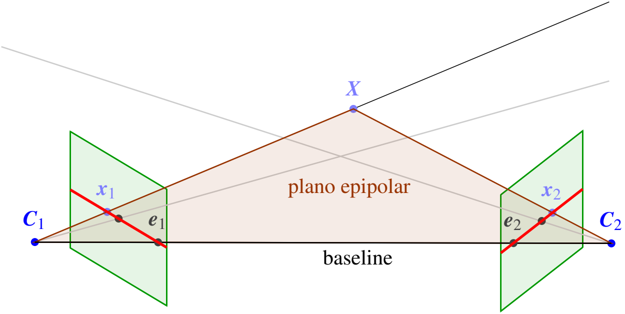
Geometría epipolar - Definición



Geometría Epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre las vistas

Geometría epipolar - Definición



Geometría Epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre las vistas
- Es independiente de las escena, depende sólo de las cámaras

Geometría epipolar - Desarrollo

Línea epipolar

La linea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ es un mapeo del punto $\boldsymbol{x}_1$ en el plano de la imgen 2, es decir

$$\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$$

F representa el mapeo, es una matriz singular (no invertible) de 3×3 y rango 2.

Geometría epipolar - Desarrollo

Línea epipolar

La linea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ es un mapeo del punto $\boldsymbol{x}_1$ en el plano de la imgen 2, es decir

$$\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$$

F representa el mapeo, es una matriz singular (no invertible) de 3×3 y rango 2.
Como $\boldsymbol{x}_2$ está en la línea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ se tiene que $\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{l}_2 = 0$.
Entonces

$$\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$$

Geometría epipolar - Desarrollo

Línea epipolar

La linea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ es un mapeo del punto $\boldsymbol{x}_1$ en el plano de la imgen 2, es decir

$$\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$$

F representa el mapeo, es una matriz singular (no invertible) de 3×3 y rango 2.

Como $\boldsymbol{x}_2$ está en la línea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ se tiene que $\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{l}_2 = 0$.

Entonces

$$\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{x}_2^T F\boldsymbol{x}_1 = 0$$

operando se llega a $\boldsymbol{x}_1^T F^T\boldsymbol{x}_2 = 0$, de donde $\boldsymbol{l}_1 = F^T\boldsymbol{x}_2$

Geometría epipolar - Desarrollo

Línea epipolar

La linea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ es un mapeo del punto $\boldsymbol{x}_1$ en el plano de la imgen 2, es decir

$$\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$$

F representa el mapeo, es una matriz singular (no invertible) de 3×3 y rango 2.
Como $\boldsymbol{x}_2$ está en la línea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ se tiene que $\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{l}_2 = 0$.
Entonces

$$\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$$

operando se llega a $\boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$, de donde $\boldsymbol{l}_1 = F^T \boldsymbol{x}_2$

Epípolos

Los epípolos pertenecen a todas las líneas epipolares, entonces para toda línea epipolar $\boldsymbol{l}_1 = F^T \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0 &\qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{e}_1^T F^T = F\boldsymbol{e}_1 = 0 \\ \boldsymbol{e}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 &\qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{e}_2^T F = F^T \boldsymbol{e}_2 = 0 \end{aligned}$$

Geometría epipolar - Matríz fundamental

Matríz fundamental

Algebraicamente se define como

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

donde F es una matriz 3×3 llamada matriz fundamental

Geometría epipolar - Matríz fundamental

Matríz fundamental

Algebraicamente se define como

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

donde F es una matriz 3×3 llamada matriz fundamental

A partir de la proyección

$$\boldsymbol{x}_1 = P_1 \boldsymbol{X} = K_1 [I | \boldsymbol{0}] \boldsymbol{X}$$
$$\boldsymbol{x}_2 = P_2 \boldsymbol{X} = K_2 [R | \boldsymbol{t}] \boldsymbol{X}$$

Geometría epipolar - Matríz fundamental

Matríz fundamental

Algebraicamente se define como

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

donde F es una matriz 3×3 llamada matriz fundamental

A partir de la proyección

$$\boldsymbol{x}_1 = P_1 \boldsymbol{X} = K_1 [I|\boldsymbol{0}] \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = P_2 \boldsymbol{X} = K_2 [R|\boldsymbol{t}] \boldsymbol{X}$$

operando se llega a (pizarrón ...)

$$F = [P_2 C_1]_x (P_2 P_1^+) = K_2^{-T} [\boldsymbol{t}]_x R K_1^{-1}$$

con C_1 el punto central de la cámara 1 y el $[\boldsymbol{t}]_x$ la matriz antisimétrica asociada al vector traslación

$$[\boldsymbol{t}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Geometría epipolar - Matriz esencial

Matriz esencial E

Si se conoce K_1 y K_2 se puede normalizar

$$\begin{aligned} K_1^{-1}\boldsymbol{x}_1 = K_1^{-1}P_1\boldsymbol{X} \qquad &\Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_1 = [I|\boldsymbol{0}]\boldsymbol{X} \\ K_2^{-1}\boldsymbol{x}_2 = K_2^{-1}P_2\boldsymbol{X} \qquad &\Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_2 = [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} \end{aligned}$$

$K^{-1}P$ se llama cámara normalizada y el sistema se dice calibrado.

Geometría epipolar - Matriz esencial

Matriz esencial E

Si se conoce K_1 y K_2 se puede normalizar

$$
\begin{aligned}
K_1^{-1}\boldsymbol{x}_1 = K_1^{-1}P_1\boldsymbol{X} \quad &\Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{x}}_1 = [I|\boldsymbol{0}]\boldsymbol{X} \\
K_2^{-1}\boldsymbol{x}_2 = K_2^{-1}P_2\boldsymbol{X} \quad &\Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{x}}_2 = [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X}
\end{aligned}
$$

$K^{-1}P$ se llama cámara normalizada y el sistema se dice calibrado.

La matriz fundamental de un sistema calibrado se llama matriz esencial E.

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2^T E \hat{\boldsymbol{x}}_1 = 0$$

con $E = K_2^T F K_1 = [\boldsymbol{t}]_x R$.

Obtención de F

Desarrollando $\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$ con $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} +$$
$$+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

Obtención de F

Desarrollando $\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$ con $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} +$$
$$+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

F puede hallarse hasta un factor de escala, por lo que se necesitan 8 puntos correspondientes

$$A\boldsymbol{f} = 0$$

Obtención de F

Desarrollando $\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$ con $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} +$$
$$+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

F puede hallarse hasta un factor de escala, por lo que se necesitan 8 puntos correspondientes

$$A\boldsymbol{f} = 0$$

Con $n > 8$ el sistema queda sobredeterminado, puede resolverse usando SVD

para minimizar $||A\boldsymbol{f}||$ sujeto a $||\boldsymbol{f}|| = 1$

Geometría epipolar - Obtención de F

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U\mathrm{diag}(r, s, t)V^T; \qquad r \geq s \geq t$$
$$F' = U\mathrm{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\mathrm{mín}\, ||F - F'||_F$$

El algorítmo se conoce como algorítmo de los ocho puntos.

Geometría epipolar - Obtención de F

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U\mathrm{diag}(r, s, t)V^T; \qquad r \geq s \geq t$$
$$F' = U\mathrm{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\min ||F - F'||_F$$

El algorítmo se conoce como algorítmo de los ocho puntos.

- Requiere normalización.

Geometría epipolar - Obtención de F

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$
\begin{aligned}
F &= UDV^T = U\mathrm{diag}(r,s,t)V^T; \qquad r \geq s \geq t \\
F' &= U\mathrm{diag}(r,s,0)V^T
\end{aligned}
$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\min ||F - F'||_F$$

El algorítmo se conoce como algorítmo de los ocho puntos.

- Requiere normalización.
- Los puntos $n \geq 8$ no deben ser todos coplanares.

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$
   - $\bar{F}$ es el vector singular correspondinte al menor valor singular de A

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$
   - $\bar{F}$ es el vector singular correspondinte al menor valor singular de A
   - $\bar{F}' = U\text{diag}(r,s,0)V^T$ con $\bar{F} = U\text{diag}(r,s,t)V^T$

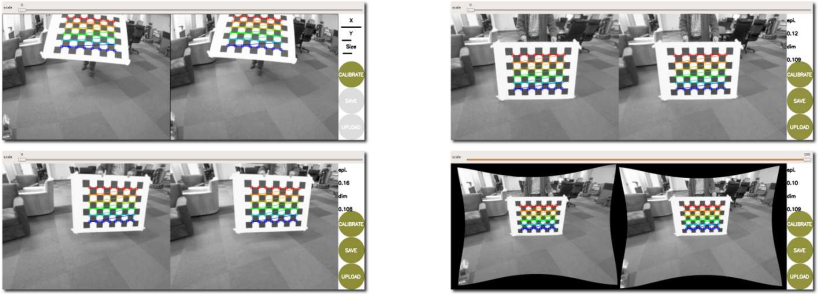
Geometría epipolar

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$
   - $\bar{F}$ es el vector singular correspondinte al menor valor singular de A
   - $\bar{F}' = U\mathrm{diag}(r, s, 0)V^T$ con $\bar{F} = U\mathrm{diag}(r, s, t)V^T$
3. Denormalización: $F = T_2^T \bar{F}' T_1$

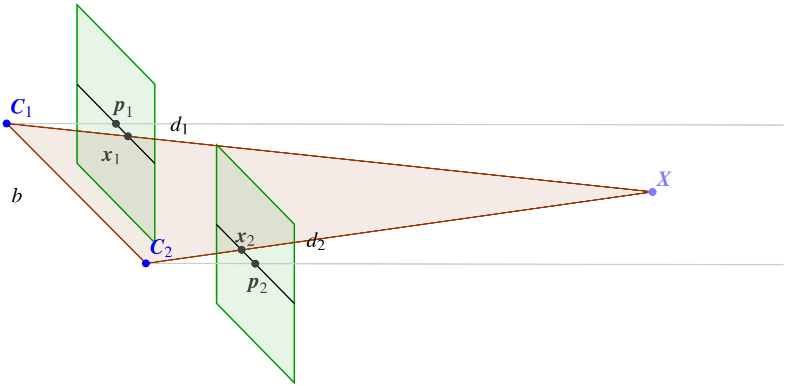
Calibración

Paquete de calibración en OpenCV (ROS).



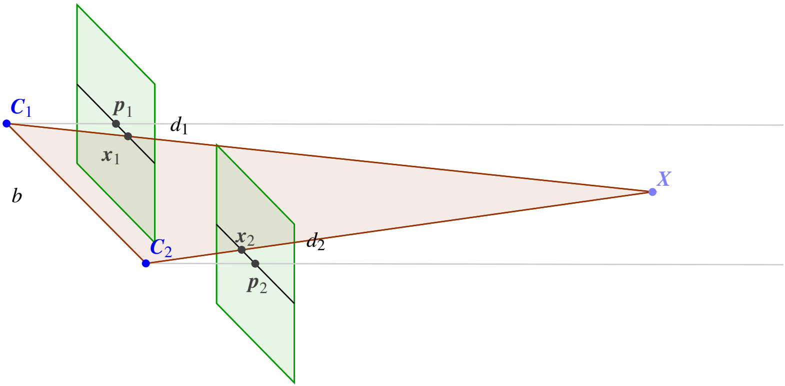
Visión estéreo

Dos cámaras con su eje focal paralelo y sus planos de imagen coincidentes conforman un arreglo estéreo (stereo rig)



Visión estéreo

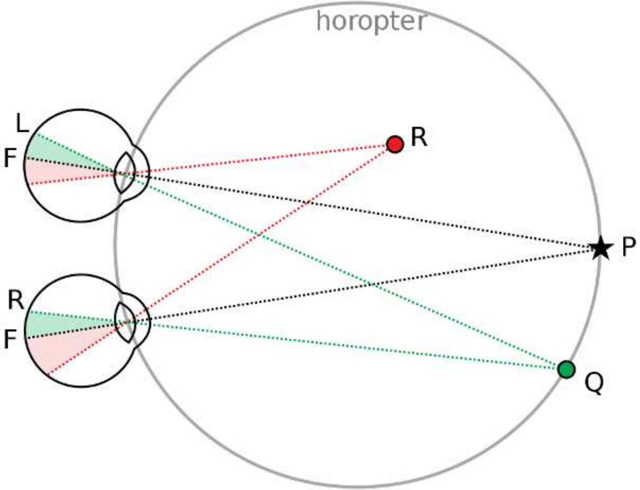
Dos cámaras con su eje focal paralelo y sus planos de imagen coincidentes conforman un arreglo estéreo (stereo rig)



La profundidad es proporcional a d_1 y d_2. GeoGebra!!

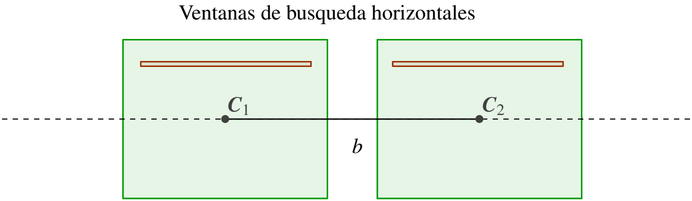
Visión estéreo

Ojo humano (visión binocular)



Visión estéreo

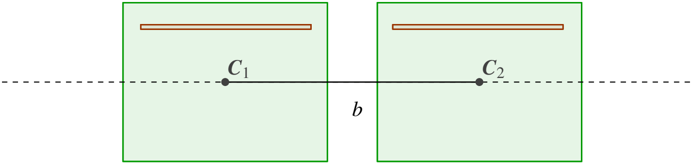
Las lineas epipolares pueden ser horizontales o inclinadas.



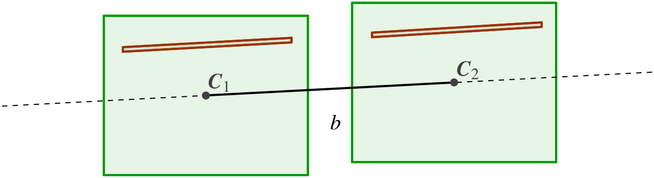
Visión estéreo

Las lineas epipolares pueden ser horizontales o inclinadas.

Ventanas de busqueda horizontales



Ventanas de busqueda inclinadas

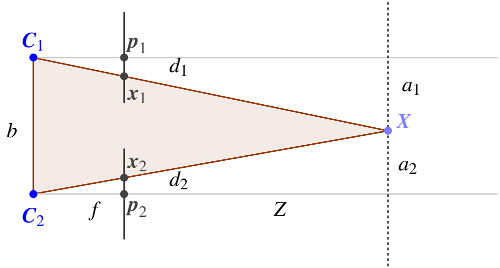


Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)

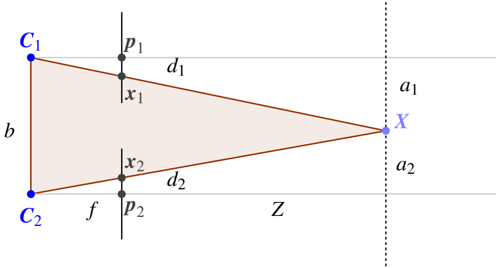
Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)



Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)

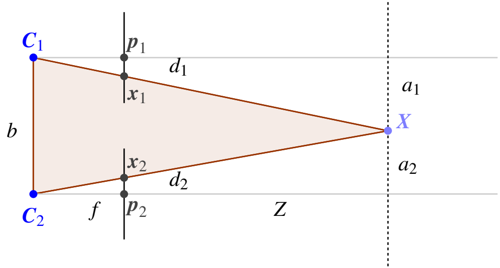


$$\frac{a_1}{Z} = \frac{d_1}{f}$$

$$\frac{a_2}{Z} = \frac{d_2}{f}$$

Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)



$$\frac{a_1}{Z} = \frac{d_1}{f}$$

$$\frac{a_2}{Z} = \frac{d_2}{f}$$

$$b = a_1 + a_2 = Z\frac{d_1}{f} + Z\frac{d_2}{f} = \frac{Z}{f}(d_1 + d_2) \Rightarrow \quad Z = \frac{fb}{d}$$

d se llama disparidad, y se representa como una imagen.

Visión estéreo

Mapa de disparidad