Flujo Óptico

Araguás, Gastón   Redolfi, Javier

12 de Junio del 2019

Trabajo original:

- B. D. Lucas and T. Kanade (1981), An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Proceedings of Imaging Understanding Workshop, pages 121-130*

Objetivo

Sean dos funciones identicas $I_1(x)$ e $I_2(x)$ desplazadas

$$I_1(x+p) = I_2(x)$$

se desea estimar p

Aproximación lineal

En un entorno de x

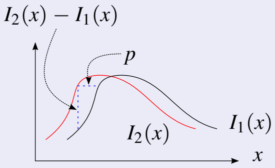
$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \approx \frac{I_1(x+p) - I_1(x)}{p} = \frac{I_2(x) - I_1(x)}{p}$$

de donde

$$p \approx \frac{I_2(x) - I_1(x)}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}}$$

Considerando el entorno, se puede promediar p

$$p \approx \left(\sum_x \frac{I_2(x) - I_1(x)}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}} \right) \frac{1}{\sum_x 1} \qquad (1)$$



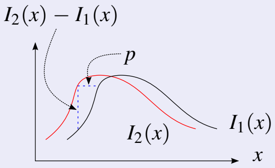
Aproximación lineal

En un entorno de x

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \approx \frac{I_1(x+p) - I_1(x)}{p} = \frac{I_2(x) - I_1(x)}{p}$$

de donde

$$p \approx \frac{I_2(x) - I_1(x)}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}}$$



Considerando el entorno, se puede promediar p

$$p \approx \left(\sum_x \frac{I_2(x) - I_1(x)}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}} \right) \frac{1}{\sum_x 1} \qquad (1)$$

Problema: No sirve si la derivada se anula en algún punto.

Alternativa

Minimizar el error cuadratico (encontrar p que minimice E)

$$E = \sum_x \left[I_1(x+p) - I_2(x) \right]^2$$

Alternativa

Minimizar el error cuadratico (encontrar p que minimice E)

$$E = \sum_x \left[I_1(x+p) - I_2(x)\right]^2$$

aproximando $I_1(x+p) \approx I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}p$

$$E \approx \sum_x \left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}p - I_2(x)\right]^2$$

Alternativa

Minimizar el error cuadratico (encontrar p que minimice E)

$$E = \sum_x \left[I_1(x+p) - I_2(x)\right]^2$$

aproximando $I_1(x+p) \approx I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p$

$$E \approx \sum_x \left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p - I_2(x)\right]^2$$

buscar el mínimo derivando respecto de p e igualando a cero

$$0 = \frac{\partial E}{\partial p} \approx \sum_x 2\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}\left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p - I_2(x)\right] \Rightarrow p \approx \frac{\sum_x \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}\left[I_2(x) - I_1(x)\right]}{\sum_x \left(\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Alternativa

Minimizar el error cuadratico (encontrar p que minimice E)

$$E = \sum_x \left[I_1(x+p) - I_2(x)\right]^2$$

aproximando $I_1(x+p) \approx I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p$

$$E \approx \sum_x \left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p - I_2(x)\right]^2$$

buscar el mínimo derivando respecto de p e igualando a cero

$$0 = \frac{\partial E}{\partial p} \approx \sum_x 2 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p - I_2(x)\right] \Rightarrow p \approx \frac{\sum_x \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \left[I_2(x) - I_1(x)\right]}{\sum_x \left(\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Similar al anterior pero salva división por cero.

Alternativa

Minimizar el error cuadratico (encontrar p que minimice E)

$$E = \sum_x \left[I_1(x+p) - I_2(x)\right]^2$$

aproximando $I_1(x+p) \approx I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p$

$$E \approx \sum_x \left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p - I_2(x)\right]^2$$

buscar el mínimo derivando respecto de p e igualando a cero

$$0 = \frac{\partial E}{\partial p} \approx \sum_x 2 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \left[I_1(x) + \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} p - I_2(x)\right] \Rightarrow p \approx \frac{\sum_x \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \left[I_2(x) - I_1(x)\right]}{\sum_x \left(\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Similar al anterior pero salva división por cero.

- Se resuelve usualmente por aproximación tipo Gauss-Newton

$$p_0 = 0; \qquad p_{k+1} = p_k + \frac{\sum_x \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} \left[I_2(x) - I_1(x)\right]}{\sum_x \left(\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Linealización

Suponiendo a $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p}$ vectores n-dimensionales

$$I_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}) \approx I_1(\boldsymbol{x}) + \nabla I_1 \boldsymbol{p} \quad \Rightarrow \quad E \approx \sum_{\boldsymbol{x}} \left[I_1(\boldsymbol{x}) + \nabla I_1 \boldsymbol{p} - I_2(\boldsymbol{x})\right]^2$$

donde $\nabla I_1 = \left(\frac{\partial I_1}{\partial x}, \frac{\partial I_1}{\partial y}\right)$ es el operador gradiente.

Mínimo error

Luego se busca el valor mínimo de E y se despeja $\boldsymbol{p}$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}} \approx \sum_{\boldsymbol{x}} 2(\nabla I_1)^T \left[I_1(\boldsymbol{x}) + \nabla I_1 \boldsymbol{p} - I_2(\boldsymbol{x})\right] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{p} = \left[\sum_{\boldsymbol{x}} (\nabla I_1)^T (\nabla I_1)\right]^{-1} \left[\sum_{\boldsymbol{x}} (\nabla I_1)^T \left[I_2(\boldsymbol{x}) - I_1(\boldsymbol{x})\right]\right]$$

En “The Robotics Institute“, instituto de Takeo Kanade en la Carnegie Mellon, hicieron una unificación de la técnica.

Lucas-Kanade 20 Years On (2002)

Generalización

- Se busca registrar $T(\boldsymbol{x})$ con la imagen $I(\boldsymbol{x})$ bajo una transformación.
- Un “warp” mapea el pixel $\boldsymbol{x}$ del SC de $T(\boldsymbol{x})$ a la posición sub-pixel $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ del SC de $I(\boldsymbol{x})$.
- Requiere interpolar $I(\boldsymbol{x})$.

Objetivo generalizado

Sea $w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ tal que $T(\boldsymbol{x}) = I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))$ se busca el vector $\boldsymbol{p}$ que minimiza

$$E = \sum_{\boldsymbol{x}} \left[I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) - T(\boldsymbol{x})\right]^2$$

Como se minimiza en forma iterativa, en realidad se hace respecto a $\Delta\boldsymbol{p}$

$$E = \sum_{\boldsymbol{x}} \left[I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p})) - T(\boldsymbol{x})\right]^2$$

luego

$$\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}$$

Mediante una aproximación lineal se calcula $\Delta \boldsymbol{p}$ para luego iterar.

Aproximación lineal

Aplicando Taylor a $I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p}))$ en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$

$$I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p})) \approx I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})) + \nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta\boldsymbol{p}\Big|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}$$

donde

- ∇I es el gradiente de I valuado en $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$, es decir se computan $I_x = \frac{\partial I}{\partial x}$ y $I_y = \frac{\partial I}{\partial y}$ y luego se remapean usando $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$.
- $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ es el Jacobiano de $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = (w_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}), w_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))^T$

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial p_1} & \frac{\partial w_x}{\partial p_2} \\ \frac{\partial w_y}{\partial p_1} & \frac{\partial w_y}{\partial p_2} \end{pmatrix}$$

Minimización

$$E \approx \sum_{\boldsymbol{x}} \left[I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})) + \nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta \boldsymbol{p} \bigg|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})} - T(\boldsymbol{x}) \right]^2$$

Derivando respecto de $\Delta \boldsymbol{p}$ e igualando a cero se despeja $\Delta \boldsymbol{p}$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \Delta \boldsymbol{p}} \approx 2 \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T \left[I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})) + \nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta \boldsymbol{p} - T(\boldsymbol{x}) \right] \Rightarrow$$

$$\Delta \boldsymbol{p} = H^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T [T(\boldsymbol{x}) - I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))]$$

con H

$$H = \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T \left[\nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]$$

una aproximación a la matriz Hessiana.

Pseudocodigo

Iterar

1. Warpear I con $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ para calcular $I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))$
2. Computar el error $T(\boldsymbol{x}) - I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))$
3. Warpear el gradiente ∇I con $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$
4. Evaluar el Jacobiano $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$
5. Computar $\nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ (steepest descent)
6. Computar la matriz Hessiana H
7. Calcular $\Delta \boldsymbol{p} = H^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla I \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}\right]^T [T(\boldsymbol{x}) - I(w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))]$
8. Actualizar $\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{p} + \Delta \boldsymbol{p}$

hasta que $||\Delta \boldsymbol{p}|| < \varepsilon$

Primer alternativa al alrgoritmo Lucas-Kanade. Minimiza el error a cada paso utilizando un warp incremental $w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p})$ para luego componerlo con el warp anterior.

Objetivo

A cada paso minimizar

$$E = \sum_{\boldsymbol{x}} \left[I(w(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})) - T(\boldsymbol{x}) \right]^2$$

y comoponer los warp

$$w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \leftarrow w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \circ w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p}) \equiv w(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})$$

Aproximación lineal

Aplicando Taylor a $I(w(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}))$ en $(\boldsymbol{x}, 0)$

$$I(w(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})) \approx I(w(w(\boldsymbol{x}, 0), \boldsymbol{p})) + \nabla I(w) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta\boldsymbol{p} \Big|_{(\boldsymbol{x},0)}$$

$$= I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) + \nabla I(w) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta\boldsymbol{p} \Big|_{(\boldsymbol{x},0)}$$

donde $w(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{x}$ (warp identidad). Luego, el error cuadratico queda

$$E \approx \sum_{\boldsymbol{x}} \left[I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) + \nabla I(w) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta\boldsymbol{p} - T(\boldsymbol{x}) \right]^2$$

Composicional directo

Algoritmo (Continuación)

Aproximación lineal

Despejando $\Delta\boldsymbol{p}$ de $\frac{\partial E}{\partial \Delta\boldsymbol{p}} = 0$ se llega a

$$\Delta\boldsymbol{p} = H^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla I(w) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T \left[T(\boldsymbol{x}) - I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) \right]$$

Diferencias:

- $\nabla I(w)$ es el gradiente de la imagen warpeada.
- $\left.\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{(\boldsymbol{x},0)}$ es el Jacobiano en $(\boldsymbol{x}, 0)$, no depende de $\boldsymbol{p}$
- Se actualiza el warp, no el vector $\boldsymbol{p}$.

Pseudocodigo

Precomputar

1. Evaluar el Jacobiano $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ en $(\boldsymbol{x}, 0)$

Iterar

1. Warpear I con $w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ para calcular $I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))$
2. Computar el error $T(\boldsymbol{x}) - I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))$
3. Computar el gradiente $\nabla I(w)$ de la imagen $I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))$
4. Computar $\nabla I(w) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ (steepest descent)
5. Computar la matriz Hessiana H
6. Calcular $\Delta \boldsymbol{p} = H^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla I(w) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T [T(\boldsymbol{x}) - I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))]$
7. Actualizar el warp $w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \leftarrow w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \circ w(\boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{p})$

hasta que $||\Delta \boldsymbol{p}|| < \varepsilon$

El mayor costo computacional de los anteriores es el calculo de H en cada iteración.

Objetivo

Minimiza el error utilizando un warp incremental $w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p})$ pero cambiando los roles de T e I

$$\sum_{\boldsymbol{x}} \left[T(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p})) - I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))\right]^2$$

Luego comopone los warp invirtiendo el warp incremental

$$w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \leftarrow w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \circ w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p})^{-1}$$

- No puede ser aplicado si el warp no es invertible (se excluyen muy pocas aplicaciones como Active Shape Models y similares)

Aproximación lineal

Aplicando Taylor a $T(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p}))$ en $(\boldsymbol{x}, 0)$

$$T(w(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{p})) \approx T(w(\boldsymbol{x}, 0)) + \nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta\boldsymbol{p} \bigg|_{(\boldsymbol{x},0)}$$

luego, con $w(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{x}$ el error cuadrático a minimizar queda

$$E \approx \sum_{\boldsymbol{x}} \left[T(\boldsymbol{x}) + \nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \Delta\boldsymbol{p} - I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) \right]^2$$

Minimización

Derivando, igualando a cero y despejando $\Delta \boldsymbol{p}$

$$\Delta \boldsymbol{p} = H^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T \left[I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) - T(\boldsymbol{x}) \right]$$

con H

$$H = \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]^T \left[\nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}} \right]$$

Diferencias:

- ∇T es el gradiente del template.
- Ni el Jacobiano $\left.\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{(\boldsymbol{x},0)}$ ni el gradiente ∇T dependen de $\boldsymbol{p}$, por ende tampoco H.
- Se debe invertir el warp incremental para actualizar.

Pseudocodigo

Precomputar

1. Computar el gradiente ∇T del template
2. Evaluar el Jacobiano $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ en $(\boldsymbol{x}, 0)$
3. Computar $\nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}$ (steepest descent)
4. Computar la matriz Hessiana H

Iterar

1. Warpear I con $w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ para calcular $I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))$
2. Computar el error $I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) - T(\boldsymbol{x})$
3. Calcular $\Delta \boldsymbol{p} = H^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}} \left[\nabla T \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}\right]^T [I(w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) - T(\boldsymbol{x})]$
4. Actualizar el warp $w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \leftarrow w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \circ w(\boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{p})^{-1}$

hasta que $||\Delta \boldsymbol{p}|| < \varepsilon$

Resumen

- Todos son equivalentes en cuanto a los pasos por iteración (hasta $\mathcal{O}(\Delta \boldsymbol{p})$).
- El costo computacional del algoritmo inverso es mucho menor.
- La aplicabilidad de cada uno es diferente
  - Aditivo directo (Lucas-Kanade) $\rightarrow$ Cualquier tipo de warp.
  - Composicional directo $\rightarrow$ Requiere que exista el warp identidad y debe ser cerrado en la composición (semi-grupo). No son requerimientos fuertes.
  - Composicional inverso $\rightarrow$ Además de lo anterior debe ser invertible (grupo). La mayoría de las aplicaciones en visión, incluído homografías y rotaciones 3D.
  - Aditivo inverso (es la versión inversa de LK, muy complejo y poco ventajoso, sólo salva el pedido de invertibilidad del anterior) $\rightarrow$ Muy poco aplicable (traslaciones, similaridades y transformaciones afín en 2D).