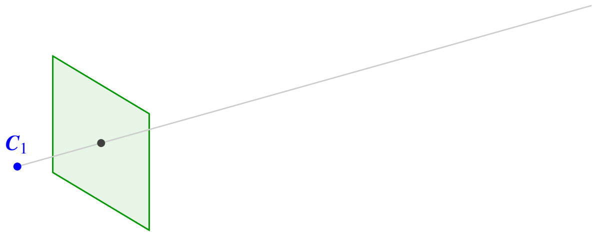
Geometría epipolar

Araguás, Gastón   Redolfi, Javier

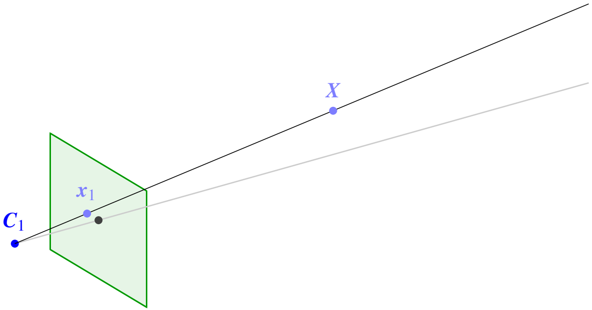
2 de mayo de 2018

Geometría epipolar



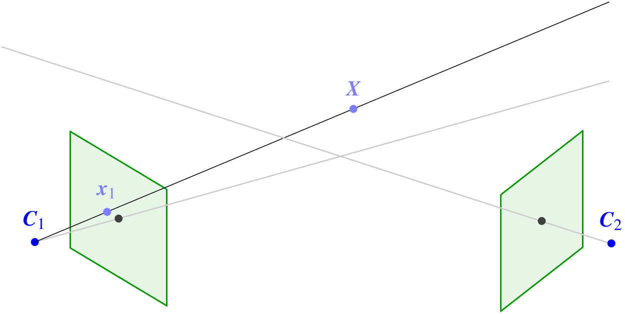
$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

Geometría epipolar



$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$
$$\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{X}$$

Geometría epipolar

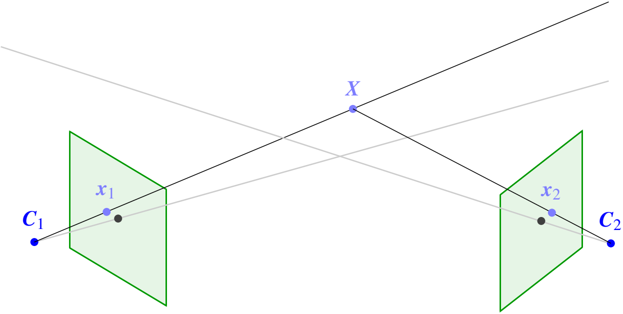


$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$

$\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{X}$

$P_2 = K_2[R|\boldsymbol{t}]$

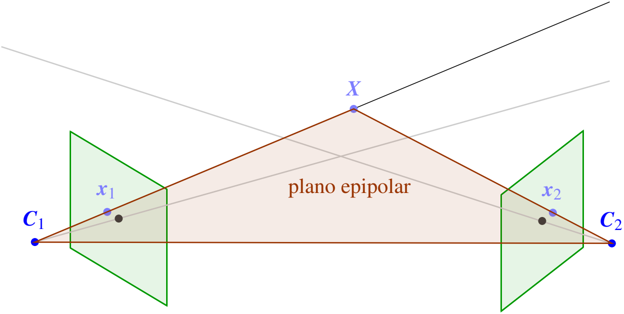
Geometría epipolar



$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$
$$\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{X}$$

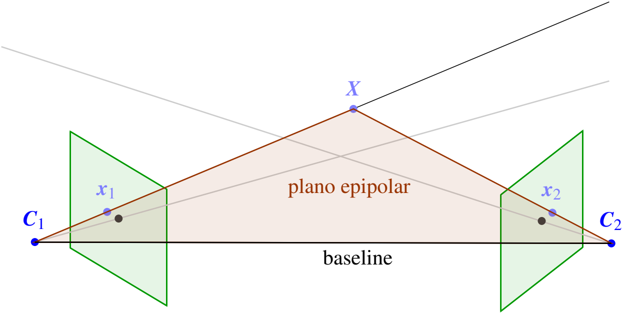
$$P_2 = K_2[R|\boldsymbol{t}]$$
$$\boldsymbol{x}_2 = P_2\boldsymbol{X}$$

Geometría epipolar



El punto $\boldsymbol{X}$ y los centros de las cámaras forman un plano, llamado plano epipolar

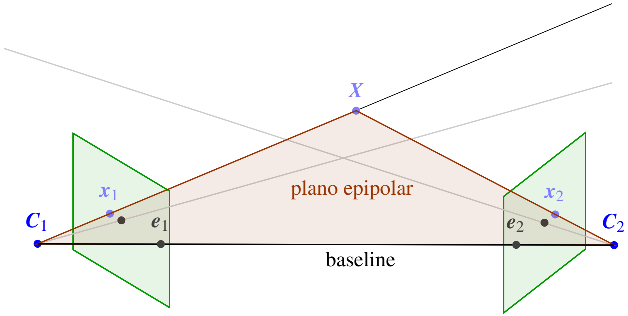
Geometría epipolar



El punto $\boldsymbol{X}$ y los centros de las cámaras forman un plano, llamado plano epipolar

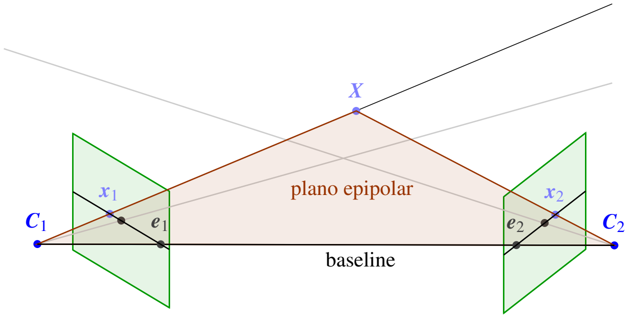
La línea que une los centros de las cámaras se llama línea base o baseline

Geometría epipolar



Los puntos de intersección de la línea base con los panos de imagen se llaman epípolos

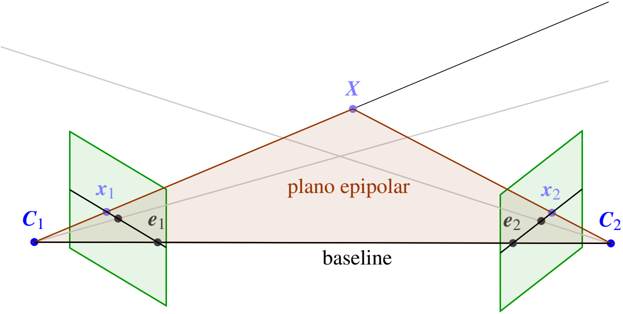
Geometría epipolar



Los puntos de intersección de la línea base con los panos de imagen se llaman epípolos

La línea que une los epípolos con los puntos proyectados $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ se llaman líneas epipolares

Geometría epipolar



De que sirven conocer las lineas epipolares y los epipolos?
Vamos a GeoGebra[1]…

[1] http://www.geogebra.org

Geometría epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas

Geometría epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- Es independiente de las escena, depende sólo de las cámaras

Geometría epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- Es independiente de las escena, depende sólo de las cámaras
- Algebraicamente se define como

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

  donde F es una matriz 3×3 llamada matriz fundamental

Geometría epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- Es independiente de las escena, depende sólo de las cámaras
- Algebraicamente se define como

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

  donde F es una matriz 3×3 llamada matriz fundamental
- A partir de la proyección

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= K_1[I|\mathbf{0}]\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x}_2 &= K_2[R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} \end{aligned}$$

Geometría epipolar

- La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- Es independiente de las escena, depende sólo de las cámaras
- Algebraicamente se define como

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

  donde F es una matriz 3×3 llamada matriz fundamental

- A partir de la proyección

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= K_1[I|\boldsymbol{0}]\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x}_2 &= K_2[R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} \end{aligned}$$

  operando se llega a

$$F = K_2^{-T}[\boldsymbol{t}]_x R K_1^{-1}$$

  con $[\boldsymbol{t}]_x$ una matriz antisimétrica

$$[\boldsymbol{t}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Geometría epipolar

Línea epipolar

Como $\boldsymbol{x}_2$ se mapea en su línea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ se tiene que $\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$, ya que

$$\boldsymbol{x}_2^T F\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{l}_2 = 0$$

igualmente, de $\boldsymbol{x}_1^T F^T\boldsymbol{x}_2 = 0$ se tiene $\boldsymbol{l}_1 = F^T\boldsymbol{x}_2$

Geometría epipolar

Línea epipolar

Como $\boldsymbol{x}_2$ se mapea en su línea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ se tiene que $\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$, ya que

$$\boldsymbol{x}_2^T F\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{l}_2 = 0$$

igualmente, de $\boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$ se tiene $\boldsymbol{l}_1 = F^T \boldsymbol{x}_2$

Epípolos

Los epípolos pertenecen a todas las líneas epipolares, entonces para toda línea epipolar $\boldsymbol{l}_1 = F^T \boldsymbol{x}_2$

$$\boldsymbol{e}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{e}_1^T F^T = F\boldsymbol{e}_1 = 0$$

Geometría epipolar

Línea epipolar

Como $\boldsymbol{x}_2$ se mapea en su línea epipolar $\boldsymbol{l}_2$ se tiene que $\boldsymbol{l}_2 = F\boldsymbol{x}_1$, ya que

$$\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{l}_2 = 0$$

igualmente, de $\boldsymbol{x}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0$ se tiene $\boldsymbol{l}_1 = F^T \boldsymbol{x}_2$

Epípolos

Los epípolos pertenecen a todas las líneas epipolares, entonces para toda línea epipolar $\boldsymbol{l}_1 = F^T \boldsymbol{x}_2$

$$\boldsymbol{e}_1^T F^T \boldsymbol{x}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{e}_1^T F^T = F\boldsymbol{e}_1 = 0$$

identicamente

$$\boldsymbol{e}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{e}_2^T F = F^T \boldsymbol{e}_2 = 0$$

Matriz esencial E

Si se conoce K_1 y K_2 se puede normalizar

$$K_1^{-1}\boldsymbol{x}_1 = K_1^{-1}P_1\boldsymbol{X} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_1 = [I|\boldsymbol{0}]\boldsymbol{X}$$

$$K_2^{-1}\boldsymbol{x}_2 = K_2^{-1}P_2\boldsymbol{X} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_2 = [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X}$$

$K^{-1}P$ se llama cámara normalizada y el sistema se dice calibrado.

Matriz esencial E

Si se conoce K_1 y K_2 se puede normalizar

$$K_1^{-1}\boldsymbol{x}_1 = K_1^{-1}P_1\boldsymbol{X} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_1 = [I|\boldsymbol{0}]\boldsymbol{X}$$

$$K_2^{-1}\boldsymbol{x}_2 = K_2^{-1}P_2\boldsymbol{X} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_2 = [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X}$$

$K^{-1}P$ se llama cámara normalizada y el sistema se dice calibrado.

La matriz fundamental de un sistema calibrado se llama matriz esencial E.

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2^T E \hat{\boldsymbol{x}}_1 = 0$$

con $E = K_2^T F K_1 = [\boldsymbol{t}]_x R$.

Cálculo de F

Desarrollando $\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$ con $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} +$$

$$+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

Cálculo de F

Desarrollando $\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$ con $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} +$$

$$+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

F puede hallarse hasta un factor de escala, por lo que se necesitan 8 puntos correspondientes

$$A\boldsymbol{f} = 0$$

Cálculo de F

Desarrollando $\boldsymbol{x}_2^T F \boldsymbol{x}_1 = 0$ con $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} +$$
$$+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

F puede hallarse hasta un factor de escala, por lo que se necesitan 8 puntos correspondientes

$$A\boldsymbol{f} = 0$$

Con $n > 8$ el sistema queda sobredeterminado, puede resolverse usando SVD

para minimizar $||A\boldsymbol{f}||$ sujeto a $||\boldsymbol{f}|| = 1$

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U\mathrm{diag}(r,s,t)V^T; \qquad r \geq s \geq t$$

$$F' = U\mathrm{diag}(r,s,0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\min ||F - F'||_F$$

El algorítmo se conoce como algorítmo de los ocho puntos.

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U\mathrm{diag}(r, s, t)V^T; \qquad r \geq s \geq t$$

$$F' = U\mathrm{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\text{mín}\, ||F - F'||_F$$

El algorítmo se conoce como algorítmo de los ocho puntos.

- Requiere normalización.

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U\text{diag}(r, s, t)V^T; \qquad r \geq s \geq t$$
$$F' = U\text{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\text{mín}\, ||F - F'||_F$$

El algorítmo se conoce como algorítmo de los ocho puntos.

- Requiere normalización.
- Los puntos $n \geq 8$ no deben ser coplanares.

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$
   - $\bar{F}$ es el vector singular correspondinte al menor valor singular de A

Algorítmo de los ocho puntos

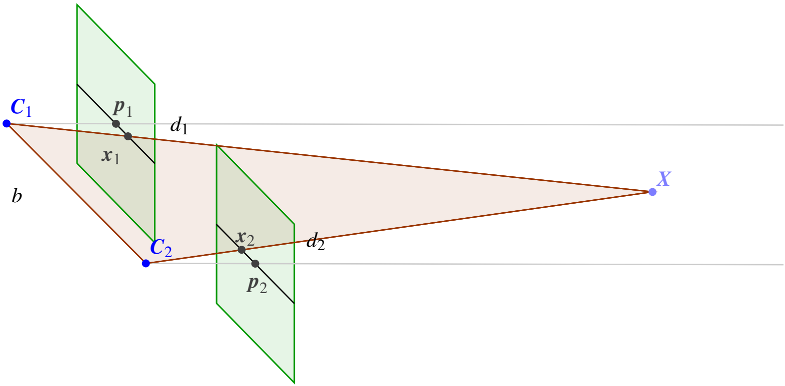
1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$
    - $\bar{F}$ es el vector singular correspondinte al menor valor singular de A
    - $\bar{F}' = U\text{diag}(r, s, 0)V^T$ con $\bar{F} = U\text{diag}(r, s, t)V^T$

Algorítmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{\boldsymbol{x}}_i = T\boldsymbol{x}_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0,0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al orígen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar $\bar{F}'$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}}_2^T \bar{F}' \bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$ para todo $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$
   - $\bar{F}$ es el vector singular correspondinte al menor valor singular de A
   - $\bar{F}' = U\mathrm{diag}(r,s,0)V^T$ con $\bar{F} = U\mathrm{diag}(r,s,t)V^T$
3. Denormalización: $F = T_2^T \bar{F}' T_1$

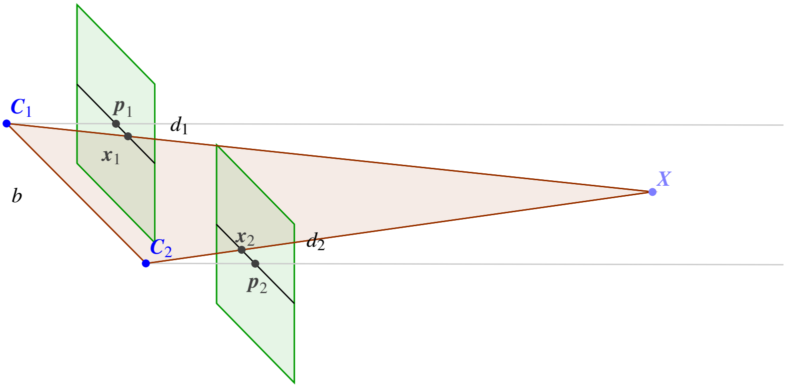
Visión estéreo

Dos cámaras con su eje focal paralelo y sus planos de imagen coincidentes conforman un arreglo estéreo (stereo rig)



Visión estéreo

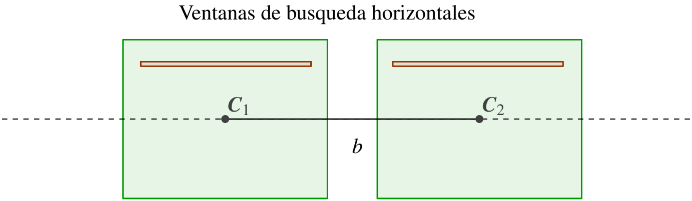
Dos cámaras con su eje focal paralelo y sus planos de imagen coincidentes conforman un arreglo estéreo (stereo rig)



La profundidad es proporcional a d_1 y d_2. GeoGebra!!

Visión estéreo

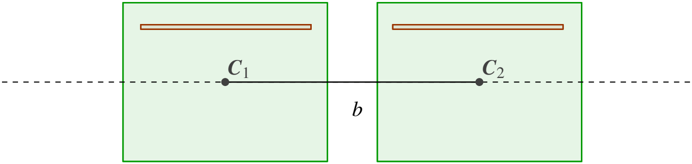
Las lineas epipolares pueden ser horizontales o inclinadas.



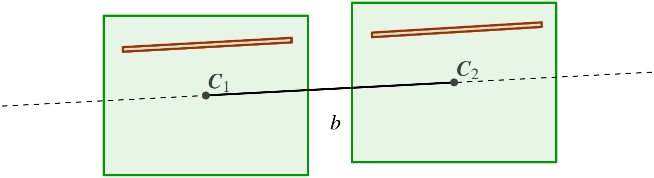
Visión estéreo

Las lineas epipolares pueden ser horizontales o inclinadas.

Ventanas de busqueda horizontales



Ventanas de busqueda inclinadas

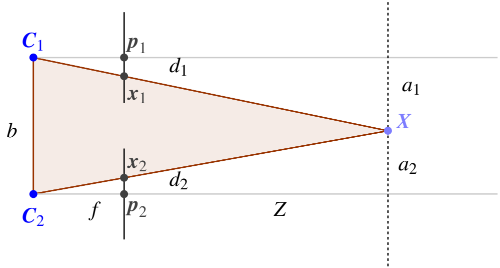


Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)

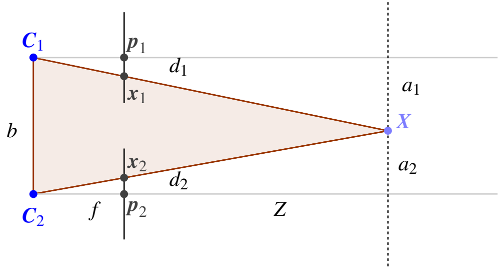
Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)



Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)

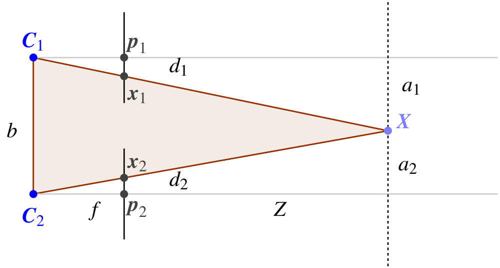


$$\frac{a_1}{Z} = \frac{d_1}{f}$$

$$\frac{a_2}{Z} = \frac{d_2}{f}$$

Visión estéreo

Después de calibrar (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)



$$\frac{a_1}{Z} = \frac{d_1}{f}$$

$$\frac{a_2}{Z} = \frac{d_2}{f}$$

$$b = a_1 + a_2 = Z\frac{d_1}{f} + Z\frac{d_2}{f} = \frac{Z}{f}(d_1 + d_2) \Rightarrow \quad Z = \frac{fb}{d}$$

d se llama disparidad, y se representa como una imagen.

Mapa de disparidad