Tabla de distribuciones

1. Distribuciones discretas univariadas

Distribución	Notación	$p_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Bernoulli	$\mathrm{Ber}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0,\,1\}$	$p \in (0,1)$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$[\![0,n]\!]$	$p \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Geométrica	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\mathbb{N}$	$p \in (0,1)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Binomial Negativa	$\mathcal{BN}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathbb{Z}_k$	$p \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson	$\mathrm{Poi}(\mu)$	$(\mu^x e^{-\mu})/x!$	$\mathbb{Z}_0$	$\mu > 0$	μ	μ
Hipergeométrica	$\mathcal{H}(N,d,n)$	$\frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$[\![m,M]\!]^\dagger$	$d \le N,\ n \le N \in \mathbb{N}$	$\frac{nd}{N}$	$\frac{nd(N-d)(N-n)}{N^2(N-1)}$

$^\dagger m = \text{máx}\{0, d+n-N\}, M = \text{mín}\{n,d\}$

Notación:

$[\![a,b]\!] := \{x \in \mathbb{Z} : a \le x \le b\}$

$\mathbb{Z}_k := \{x \in \mathbb{Z} : x \ge k\}$

1.1. Notas

- La función de probabilidad tabulada $p_X(x)$ vale para x en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- El número combinatorio (*binomial coefficient*) se define:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r = 0,\ 1\ldots n$$

  y el combinatorio generalizado (*multinomial coefficient*):

$$\binom{n}{r_1\,r_2\ldots r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r_i = 0,1\ldots n,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = n.$$

- Algunos autores llaman Pascal a la distribución “binomial negativa”.

2. Distribuciones continuas univariadas

Distribución	Notación	$f_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}[a,b]$	$1/(b-a)$	$[a,b]$	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponencial	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\lambda>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma	$\Gamma(\nu,\lambda)$	$\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\nu>0,\lambda>0$	ν/λ	ν/λ^2
Normal	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$	μ	σ^2
Chi cuadrado	χ^2_k	$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	$[0,+\infty)$	$k\in\mathbb{N}$	k	$2k$
t-Student	t_ν	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{R}$	$\nu>0$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}*$
Weibull	$\mathrm{Wei}(c,\alpha)$	$\frac{c}{\alpha}(\frac{x}{\alpha})^{c-1}e^{-(\frac{x}{\alpha})^c}$	$[0,+\infty)$	$c>0,\alpha>0$	$\alpha\Gamma(1+\frac{1}{c})$	$\alpha^2\left[\Gamma(1+\frac{2}{c})\right.$ $\left.-\Gamma^2(1+\frac{1}{c})\right]$
Rayleigh	$\mathrm{Ray}(\sigma)$	$\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$	$[0,+\infty)$	$\sigma>0$	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Pareto	$\mathrm{Par}(m,\alpha)$	$\frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$[m,+\infty)$	$m>0,\alpha>0$	$\frac{\alpha m}{\alpha-1}$ †	$\frac{m^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ ‡
Beta	$\beta(a,b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$(0,1)$	$a>0,b>0$	$a/(a+b)$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Cauchy	$\mathrm{Cau}(x_0,\gamma)$	$\frac{1}{\pi\gamma}\left[\frac{\gamma^2}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right]$	$\mathbb{R}$	$x_0\in\mathbb{R},\gamma>0$	no existe	no existe

† Válida si $\alpha>1$. ‡ Válida si $\alpha>2$. * Válida si $\nu>2$.

2.1. Notas

- La función de densidad (o función de densidad puntual, fdp, pdf) tabulada $f_X(x)$ vale para todo x real en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La función Gamma se define $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. Crece muy rápidamente, y para evitar problemas numéricos en algunos algoritmos conviene adaptar las fórmulas para que aparezca el logaritmo de la función $\log|\Gamma(t)|$ (las barras de módulo no molestan pues usaremos habitualmente valores positivos). Algunas propiedades:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2.2. Algunas funciones de supervivencia

Sea T una variable aleatoria continua, $S(t) = \mathbf{P}(T > t)$ (función de supervivencia o *survival function*), vale que:

- si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $S(t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \Gamma(k, \lambda)$ con $k \in \mathbb{N}$ entonces $S(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ para $t > 0$.
- si $T \sim \text{Wei}(c, \alpha)$ entonces $S(t) = e^{-(t/\alpha)^c}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Ray}(\sigma)$ entonces $S(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Par}(m, \alpha)$ entonces $S(t) = (m/t)^\alpha$ para $t \geq m$.

3. Distribuciones multivariadas

3.1. Variable Multinomial

La variable aleatoria Multinomial $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots p_k)$ modela la cantidad de observaciones de cada resultado posible al repetir n veces de forma independiente un experimento que toma valores en $\{1 \ldots k\}$ (variable categórica o Bernoulli generalizada) con probabilidades p_i para cada resultado $i \in \{1 \ldots k\}$.

Su función de probabilidad es:

$$p_{\mathbf{X}}(n, x_1, x_2 \ldots x_k) = \binom{n}{x_1\, x_2 \ldots x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

con soporte $\{\mathbf{x} \in \{0 \ldots n\}^k, \sum_{i=1}^k x_i = n\}$ y parámetros:

$$0 < p_i < 1, \qquad \sum_{i=1}^k p_i = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sus marginales son:

$$X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$$

una de sus condicionales es:

$$(X_2, X_3 \ldots, X_k)|X_1 = x_1 \sim \text{Mul}\left(n - x_1, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}, \ldots, \frac{p_k}{1-p_1}\right)$$

y sus momentos:

$$\mathbf{E}(X_i) = np_i, \qquad \mathbf{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} np_i(1-p_i) & i = j \\ -np_ip_j & i \neq j \end{cases}.$$