

# 1. Modelo del sistema

## 1.1. Movimiento del satélite

Para este estudio, consideramos que la Tierra es esférica y que el satélite describe una órbita circular con velocidad angular constante por lo que se trata de un movimiento circular uniforme.

Llamamos  $\alpha$  a la posición angular del satélite con respecto a la Tierra con origen en el punto en el que el satélite aparece por el horizonte local de la antena. Para nuestro estudio, definimos también  $\theta$ , la posición angular del satélite con respecto a la antena con origen en la normal del arreglo.

La velocidad tangencial del satélite es

$$v_t = \sqrt{\frac{GM_e}{R}}, \quad [\text{m s}^{-1}] \quad (1)$$

y la velocidad angular,

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_t}{R}, \quad [\text{rad s}^{-1}] \quad (2)$$

donde  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  es la constante de gravitación universal,  $M_e = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  es la masa de la Tierra y  $R = R_e + h$  es el radio de la órbita del satélite, siendo el radio de la Tierra  $R_e = 6371 \text{ km}$  y  $h$  la altitud de la trayectoria del satélite.

Si suponemos que el satélite pasará por el cénit de nuestra estación terrena, tal como lo muestra la figura 1, para describir una pasada, es decir, el período en que el satélite está por encima del horizonte local y puede comunicarse con la estación terrena, deberá recorrer una distancia angular [ippolitojr2008]

$$\alpha_{pasada} = 2 \arccos \left( \frac{R_e}{R} \right), \quad [\text{rad}] \quad (3)$$

en un tiempo

$$t_{pasada} = \frac{\alpha_{pasada}}{\omega}. \quad [\text{s}] \quad (4)$$

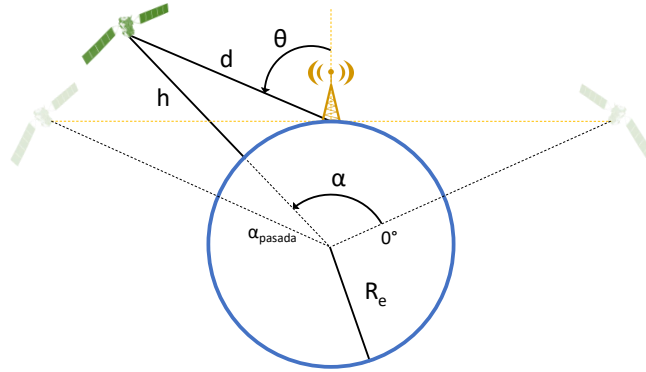


Figura 1: Esquema de la trayectoria del satélite en órbita baja respecto a la estación terrena.

La distancia entre el satélite y la estación terrena dada en términos de  $\theta$  es [popescu2016]

$$d(\theta) = \sqrt{R^2 - R_e^2 \sin^2 \theta} - R_e \cos \theta. \quad [\text{m}] \quad (5)$$

La menor distancia se dará cuando el satélite pase por el cénit de la estación terrena y  $d(0) = h$  y la mayor distancia, cuando el satélite aparece y desaparece por el horizonte local y  $d(\pm 90^\circ) = \sqrt{h^2 + 2R_e h}$ .

## 1.2. Señal base transmitida por el satélite

Consideramos que el satélite es un radiador isotrópico, es decir que emite radiación electromagnética igualmente en todas las direcciones, por lo que la señal recibida en la estación terrena es independiente del apuntamiento del satélite.

El estudio de los esquemas de modulación empleados para la transmisión de la información escapan a los objetivos del presente trabajo, por lo que se supondrá que el satélite transmite una onda sinusoidal a una frecuencia  $f_0$ .

## 1.3. Señales recibidas por los elementos del arreglo de antena

Existen diferentes fenómenos que modifican la señal base y producen que las señales recibidas por los elementos del arreglo de antena varíen en frecuencia, fase y amplitud. Resulta necesario tener esto en cuenta para poder reconstruir correctamente la información emitida por el satélite.

A continuación, analizaremos estas variaciones y los fenómenos que las producen para el caso general de un satélite en órbita baja y un arreglo lineal de antenas. Los gráficos se mostrarán para el caso particular en que la altitud de vuelo del satélite es  $h = 650$  km, la frecuencia de transmisión  $f_0 = 150$  MHz, el número de elementos del arreglo  $K = 4$  y la distancia entre elementos  $d_{elem} = \lambda_0/2 = 1$  m.

### 1.3.1. Diferencia de fase debida a la geometría del arreglo

Debido a la separación equidistante de los elementos del arreglo, la señal proveniente del satélite tendrá un retraso entre los distintos elementos igual a [visser2005]

$$\phi(\theta, elem) = k_0(K - elem)d_{elem}\sin\theta, \quad [\text{rad}] \quad (6)$$

donde  $K$  es el número total de elementos,  $k_0$  es el número de onda y  $d_{elem}$  es la distancia entre elementos.

El número de onda indica el número de veces que vibra una onda en una unidad de distancia y se define como la inversa de la longitud de onda

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi c}{f_0} \quad [\text{rad m}^{-1}] \quad (7)$$

donde  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  es la velocidad de propagación de la radiación electromagnética en el espacio libre.

La figura 2 muestra la variación de fase para el arreglo y condiciones mencionadas previamente. Podemos observar que, debido a la elección de  $d = \lambda_0/2$ , cuando el satélite aparece y desaparece por el horizonte, las señales de elementos continuos están desfasadas medio período y, cuando el satélite está en el cénit de la estación terrena, todas las señales están en fase.

### 1.3.2. Diferencia de frecuencia debida al efecto Doppler

Durante una pasada, el satélite se acercará a la estación terrena desde que aparece por el horizonte hasta que llega a su cénit para luego alejarse hasta desaparecer por el otro horizonte. Este movimiento relativo del satélite respecto a la estación terrena provoca un cambio en la frecuencia recibida conocido como efecto Doppler.

El cambio de frecuencia está dado por [popescu2016]

$$\Delta f(\theta) = f_0 \frac{v_t}{c} \sin\theta, \quad [\text{Hz}] \quad (8)$$

y por lo tanto, la frecuencia recibida por los elementos del arreglo

$$f(\theta) = f_0 + \Delta f(\theta). \quad [\text{Hz}] \quad (9)$$

Las figuras 3 y 4 muestran la el corrimiento de frecuencia y su derivada. Podemos observar que la razón de cambio es máxima en el cénit.

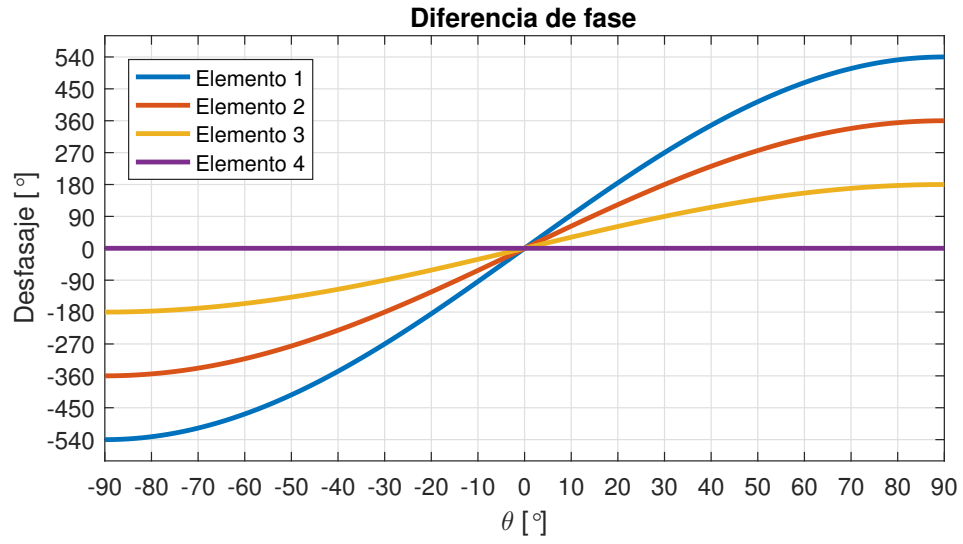


Figura 2: Diferencia de fase debida a la geometría del arreglo.

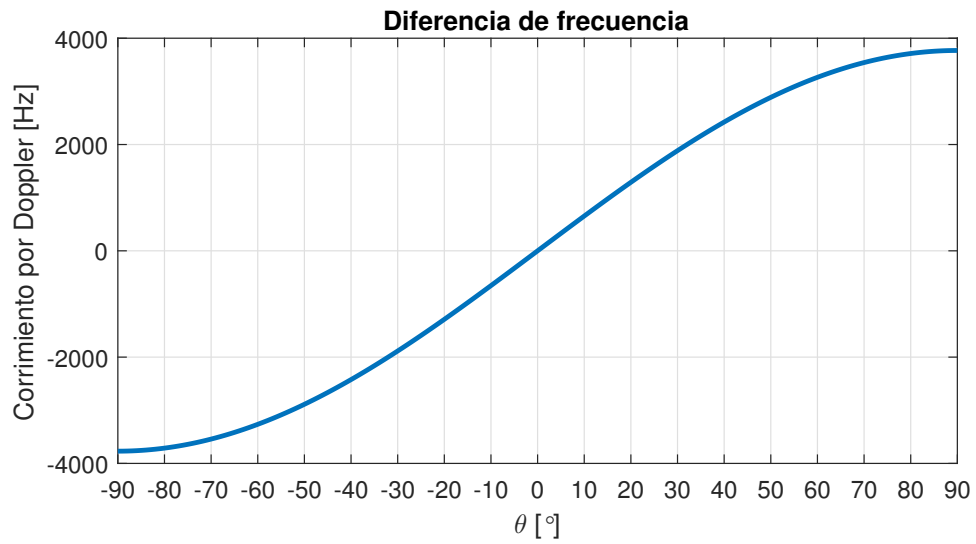


Figura 3: Cambio de frecuencia debido al efecto Doppler.

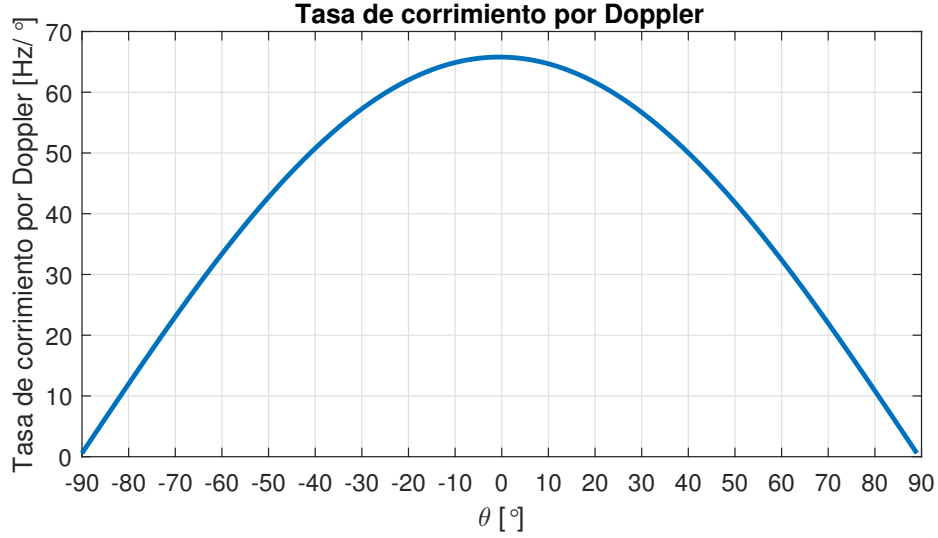


Figura 4: Tasa de cambio del corrimiento de frecuencia debido al efecto Doppler.

### 1.3.3. Diferencia de amplitud debida a pérdidas por trayectoria en espacio libre

Cuando una señal electromagnética viaja a través del espacio libre, se produce una atenuación en la potencia recibida  $P_r$  con respecto a la potencia transmitida  $P_t$  conocida como pérdidas por trayectoria en espacio libre  $P_l$  y que se expresa como [goldsmith2004]

$$P_l = 10 \log_{10} \frac{P_t}{P_r} = -10 \log_{10} \frac{G_t \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2}, \quad [\text{dB}] \quad (10)$$

donde  $\sqrt{G_t}$  es el producto de los patrones de radiación de las antena transmisora y receptora en la dirección de la línea de mira, la línea recta que une transmisor y receptor,  $\lambda$ , la longitud de onda de la señal y  $d$ , la distancia entre emisor y receptor.

Para independizarnos de  $G_t$ , podemos estudiar cuál es la pérdida por trayectoria relativa a la máxima potencia recibida  $P_{lr}$ , que es cuando el satélite pasa por el cénit de la estación terrena y  $d = h$ , ver figura 5.

$$\begin{aligned} P_{lr} &= -10 \log_{10} \frac{G_t \lambda^2 / (4\pi)^2 d^2}{G_t \lambda^2 / (4\pi)^2 h^2} = -10 \log_{10} \left( \frac{h}{d} \right)^2 \\ P_{lr} &= -20 \log_{10} \frac{h}{d} \end{aligned} \quad [\text{dB}] \quad (11)$$

Si queremos representar la potencia recibida normalizada  $P_{rn}$ , es decir, en una escala de 0 a 1,

$$P_{rn} = 10^{-\frac{P_{lr}}{10}} = \left( \frac{h}{d} \right)^2, \quad (12)$$

como se muestra en la figura 6.

Para este estudio, sólo se ha tenido en cuenta las pérdidas por trayectoria en espacio libre, pero también existen atenuaciones debido al patrón de elemento de antena, que normalmente son máximas en el horizonte y mínimas en el cénit, como se vio en la figura 3 de la página 2. Existen además pérdidas por trayectoria que no están asociadas al espacio libre, sino a otros fenómenos, como refracción, difracción, y obstáculos en el terreno. Por estas razones, en la práctica no puede recibirse señales a  $\theta = \pm 90^\circ$ , sino a  $-80^\circ \lesssim \theta \lesssim 80^\circ$ .

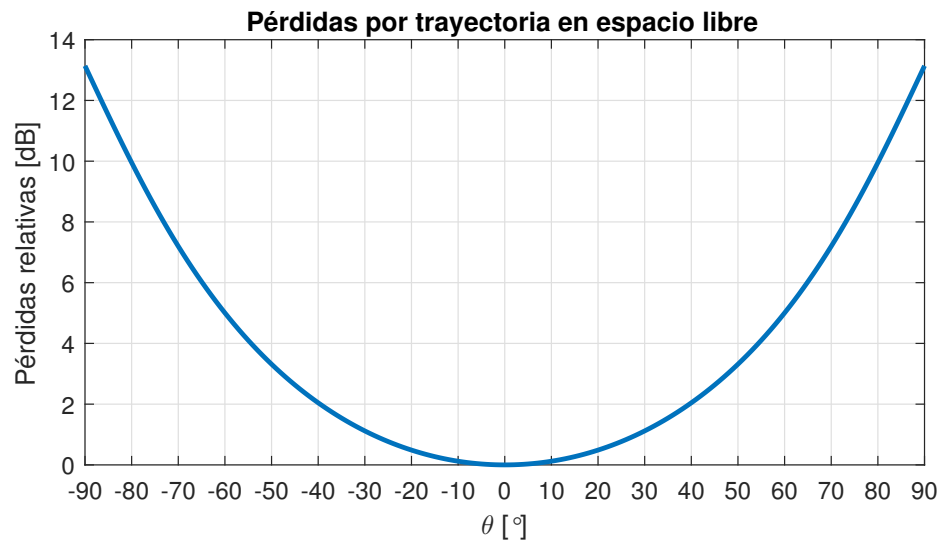


Figura 5: Pérdidas por trayectoria en espacio libre relativo a la potencia máxima relativa.

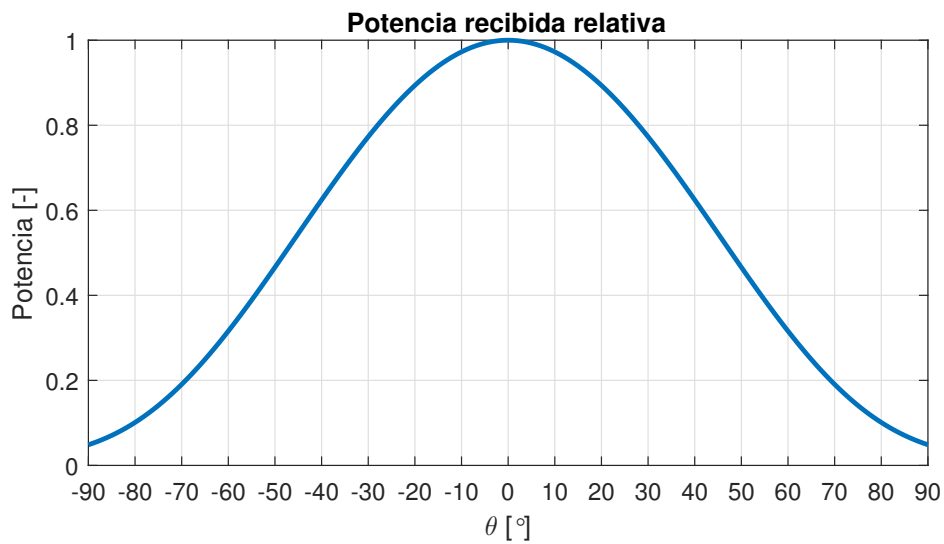


Figura 6: Potencia recibida normalizada.

#### 1.3.4. Señal recibida en función del tiempo

Para completar el modelo, vamos a expresar la frecuencia, fase y amplitud de las señales recibidas en función del tiempo. Para ello, parametrizamos  $\theta$  en función del tiempo,

$$\alpha(t) = \omega t, \quad (13)$$

$$d(t) = \sqrt{\left(R^2 + R_e^2 - 2R_e R \cos\left(\frac{\alpha_{pasada}}{2} - \alpha(t)\right)\right)}, \quad (14)$$

por lo que,

$$\theta(t) = \arcsin\left(\frac{R}{d(t)} \sin\left(\frac{\alpha_{pasada}}{2} - \alpha(t)\right)\right). \quad (15)$$

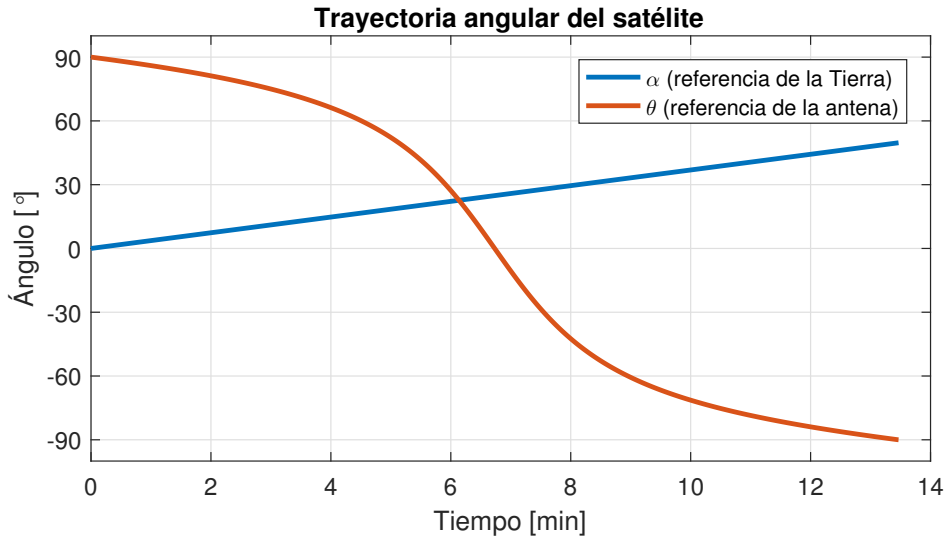


Figura 7: Trayectoria angular del satélite en función del tiempo.

Como podemos ver en la figura 7, la mayor tasa de cambio del ángulo  $\theta$  se da al llegar al cénit. Las figuras 9 a 11 muestran los cambios en las señales recibidas en función del tiempo.

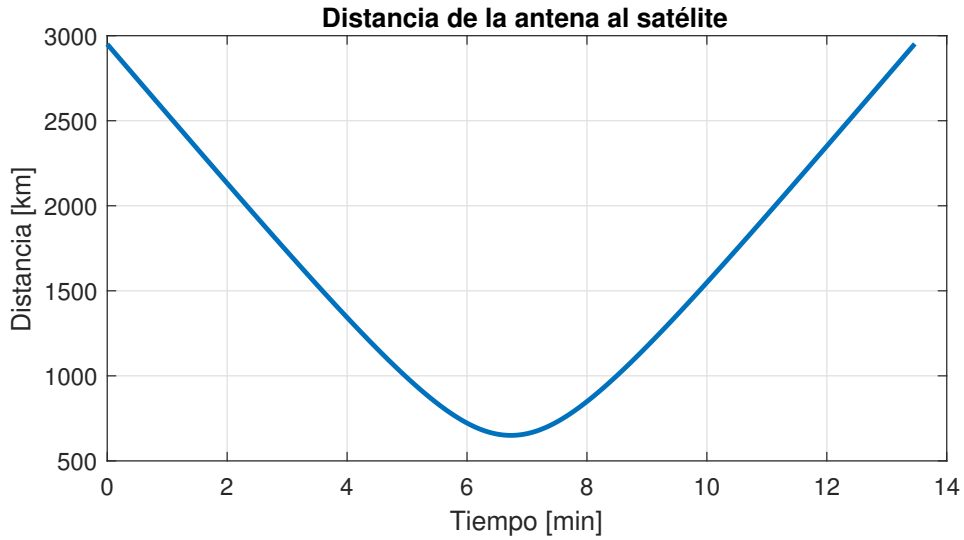


Figura 8: Distancia entre la antena y el satélite en función del tiempo.

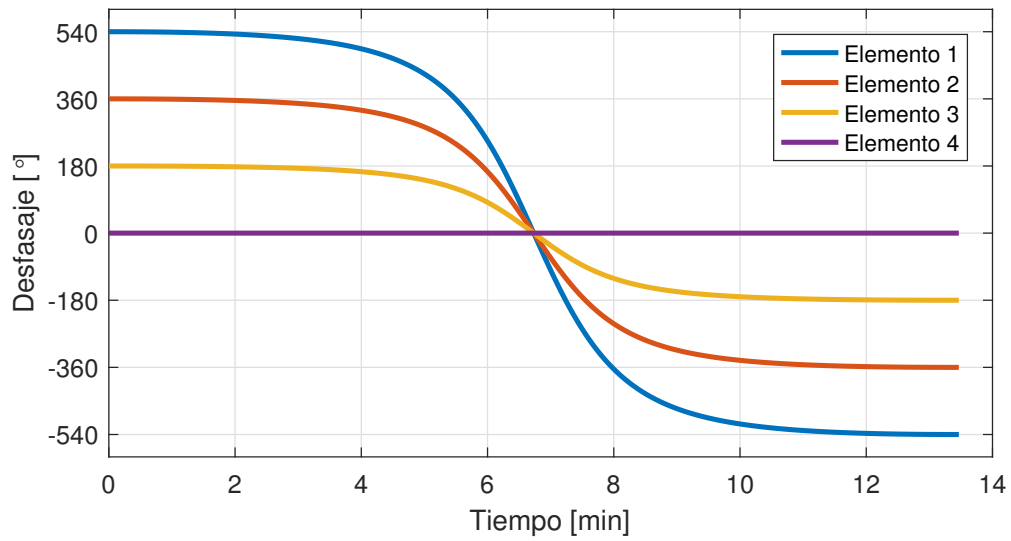


Figura 9: Desfasaje de las señales en función del tiempo.

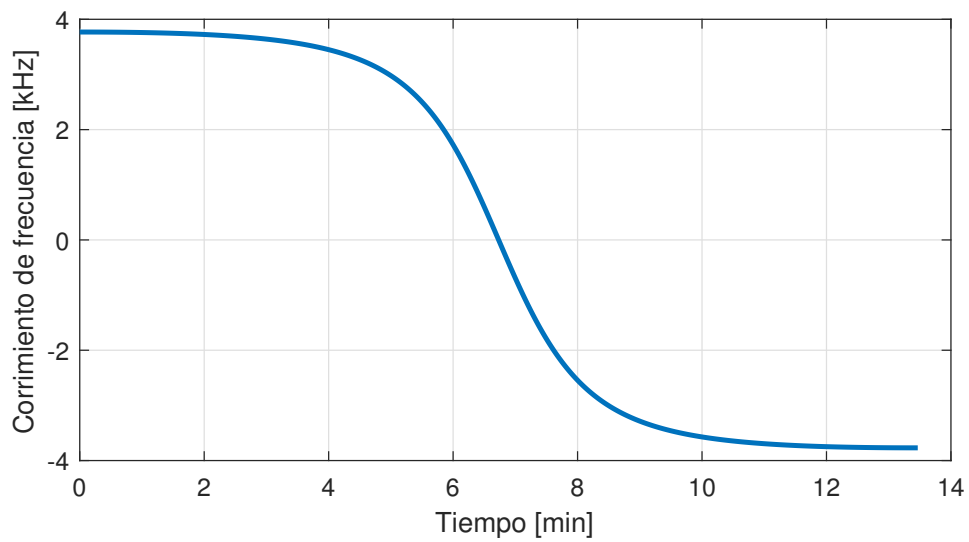


Figura 10: Diferencia de frecuencia en función del tiempo.

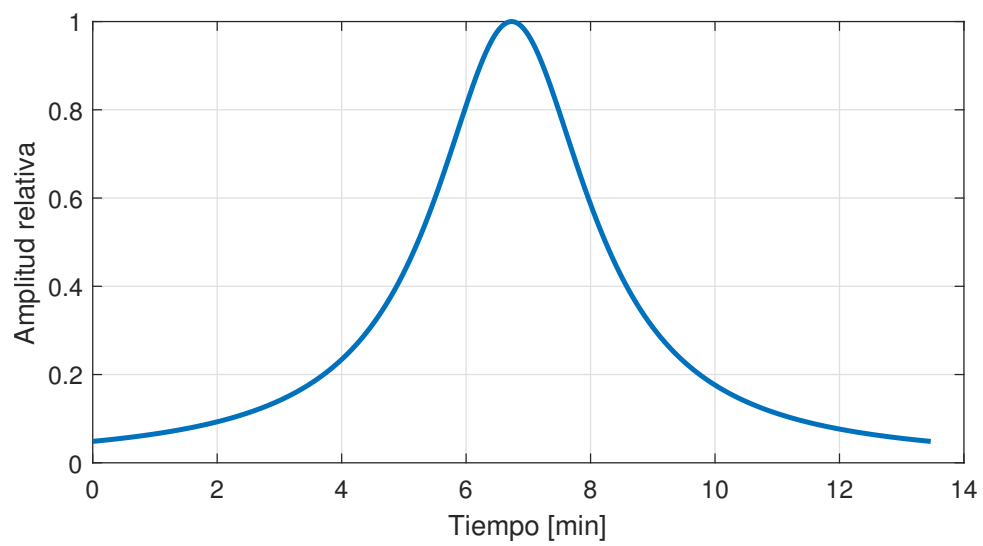


Figura 11: Relación de amplitud de las señales en función del tiempo.