Demostraciones de Análisis Matemático II

Facundo Linlaud

Contents

1 Sucesiones

1.1 Si A está acotado superiormente entonces existe una sucesión creciente que tiende al supremo

<u>**Formalización**</u>: Si $s = sup(A) \implies \exists$ sucesión creciente $\{a_n\} \subset A \mid \lim_{n\to\infty} a_n = s$

<u>**Observación**</u>: Si $s \notin A \implies \{a_n\}$ puede ser elegida estrictamente creciente.

1.2 Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, a_n converge a su supremo

<u>**Formalización**</u>: Si $\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = sup(\{a_n\})$

1.3 Si $\{a_n\} \in \mathbb{R}^n \implies$ tiene subsucesión monótona

1.4 Si $\{a_n\} \in \mathbb{R}^n$ acotada $\implies$ tiene subsucesión convergente (Bolzano-Weierstrass)

1.5 Convergencia de sucesión

<u>**Formalización**</u>:

- $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$
- $P \in \mathbb{R}^n$
- $\lim P_n = P$

Si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $||P_n - P|| < \epsilon\ \forall\, n \geq n_0$

1.6 Divergencia de sucesión

<u>**Formalización**</u>:

- $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$
- $\lim P_n = \infty$

Si y sólo si $||P_n|| > M\forall\, n \geq n_0$

2 Espacios como n-uplas

2.1 Desigualdad de Cauchy-Schwartz

<u>**Formalización**</u>: $|< P, Q >| \leq ||P|| * ||Q||$

2.2 Conjunto abierto

Un conjunto C es abierto si para cada punto $P \in C, \exists$ bola abierta $B_r(P)$ / $B_r(P) \subset C$

2.3 Bola abierta es un conjunto abierto

Formalización: Sea $B_r(P)$ una bola abierta en $\mathbb{R}^n, \forall\, Q \in B_r(P), \exists t > 0$ / $B_t(Q) \subset B_r(P)$.

Observación: En particular, una bola abierta es un conjunto abierto.

2.4 Punto interior

Formalización: Un punto $P \in C \subset \mathbb{R}^n$ es interior si $\exists\, r > 0$ / $B_r(P) \subset C$.

Observación: El conjunto de todos los puntos interiores de C se denomina **interior de C** y se denota C^0.

2.5 Punto de acumulación

Formalización: Si existe $\{P_n\} \subset C$ / $\lim P_n = P \implies P$ es un punto de acumulación de C.

Observación: El conjunto de todos los puntos de acumulación de C se denomina **clausura de C** y se denota $\bar{C}$.

2.6 Conjunto cerrado

Formalización: $C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\iff \big(\forall\, \{P_n\} \subset C \implies \lim P_n = P \in C\,\big)$

2.7 $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado $\iff$ C^c abierto

3 Conjuntos

3.1 Definiciones

3.1.1 Compacto

Formalización: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** si:

- es cerrado y
- es acotado

3.1.2 Arcoconexo

Formalización: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **arcoconexo** si dados $P, Q \in A$ existe una curva continua $\alpha : [0,1] \to A$ / $\alpha(0) = P$ y $\alpha(1) = Q$.

4 Funciones

4.1 Sucesiones para calcular límites

Formalización: Sea

- $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- $P \in \bar{A}$
- $L \in \mathbb{R}^m$

Tenemos que:

$$\lim_{X \to P} F(X) = L \qquad \iff \qquad \begin{array}{l} \forall\, P_n \subset A : P_n \neq P \\ \quad P_n \to P \end{array}$$

4.2 Propiedades de funciones continuas

4.2.1 Si f cont. y $P_n \subset A$ / $\forall\, n \in \mathbb{N} : f(P_n) \geq 0 \implies \lim f(P) \geq 0$

Formalización: si

- f contínua
- $\{P_n\} \subset A$ / $P_n \to P$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} : f(P_n) \geq 0$

$\implies f(P) \geq 0$

Observación: El caso $\leq$ es análogo.

Idea: Por absurdo. Elegir un ϵ cualquiera para la sucesión, plantear el módulo de la definición, splittear el módulo y concluir que $f(P)$ no puede ser negativo.

4.2.2 Si f cont. y $f(P) > 0 \implies f$ es mayor a 0 en un entorno de P

Formalización: si

- f contínua
- $f(P) > 0$

$\implies \exists\, r > 0$ / $\forall\, X \in U : f(X) > 0$, siendo $U = B_r(P) \cap A$

Observación: El caso $<$ es análogo.

Idea: Por absurdo. Sea $\{a_n\}$ la sucesión que tiende a P pero que $\forall n \in \ltimes : f(a_n) \leq 0$, por el teorema 4.2.1, $f(P)$ tiene el mismo signo (o a lo sumo se nula) que la sucesión, lo cual contradice la hipótesis.

4.2.3 Si f cont. en [a, b] / $f(a)f(b) < 0 \implies \exists\, c \in (a,b)$ / $f(c) = 0$ (Bolzano/T.V.M.)

<u>**Formalización**</u>: si

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $f(a)f(b) < 0$

$\implies \exists\, c \in (a,b)$ / $f(c) = 0.$

<u>**Idea**</u>:

1. Sea $A = \{x \in [a,b]$ / $f(x) > 0\}$
2. Como A acotado y no nulo existe sucesión convergente S_n a su supremo s
3. S_n satisface $f(S_n) \geq 0$ (4.2.1) entonces $\lim f(s) \geq 0$
4. Si $f(s) > 0$ entonces f tiene un entorno en s positivo (4.2.2)
5. $s + \epsilon$ es más grande que s como $f(s+\epsilon) > 0 \implies f + \epsilon \in A$
6. Luego s no es supremo, con lo cual se llega al absurdo. Luego $f(s) = 0$

4.2.4 Si f cont. y su dominio arcoconexo / $f(P)f(Q) < 0 \implies \exists\, R \in (a,b)$ / $f(R) = 0$ (Bolzano $\mathbb{R}^n$/T.V.M.)

<u>**Formalización**</u>: si

- $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- f contínua
- A arcoconexo
- $\exists\, P, Q \in A$ / $f(P)f(Q) < 0$

$\implies \exists\, R \in A$ / $f(R) = 0.$

<u>**Idea**</u>:

1. Como el dominio de la función es arcoconexo, puedo caminar desde P a Q con una curva contínua α tal que:
   - $\alpha(0) = P$
   - $\alpha(1) = Q$
2. Sea $g = f \circ \alpha$
   - Es contínua en $[0,1]$ porque composición de contínuas
   - $g(0) * g(1) < 0$ porque $\alpha(0) = P$ y $\alpha(1) = Q$
3. Luego, por Bolzano en $\mathbb{R}$ sobre g, existe c tal que $g(c) = 0$
4. Finalmente, el R que buscábamos para f es $\alpha(c)$, donde allí se anula

4.2.5 Si f cont. y su dominio compacto $\implies$ f está acotada y tiene máximo y mínimo (Weierstrass)

Formalización: si

$$\begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f \text{ contínua} \\ A \text{ compacto} \end{array} \implies \begin{array}{l} a)\ \exists\, m, M \in \mathbb{R} \,/\, m \leq f(X) \leq M, \forall X \in A \\ b)\ \exists\, P_m, P_M \in A \,/\, f(P_m) = m \wedge f(P_M) = M \end{array}$$

Idea:

1. La imagen está acotada
   (a) Supongamos que no está acotada superiormente, luego $\exists\, \{a_n\} \subset A$ / $\forall\, n \in \mathbb{N} : f(a_n) > n$
   (b) Como esta sucesión $\{a_n\}$ está en A y A es un conjunto acotado, entonces puedo extraer de ella una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ convergente a un punto P, luego $f(a_{n_k}) \to f(P)$
   (c) Pero por **(a)** se tiene que $\forall\, n_k \in \mathbb{N} : f(a_{n_k}) > n_k$, y por hipótesis f es contínua en P, o sea, la función no diverge ni pega saltos ahí
   (d) Finalmente, f debe estar acotada superiormente
2. El máximo y mínimo se alcanzan
   (a) Supongamos que el máximo no se alcanza
   (b) Por **(1)**, sabemos que la imagen está acotada, por lo tanto puedo extraer de allí una sucesión creciente y convergente al supremo $\{y_n\} \subset Im(f)$ / $y_n \to sup(Im(f)) = M$
   (c) Como $\{y_n\} \subset Im(f)$, entonces debe existir una sucesión $\{x_n\} \subset A$ / $\forall\, n \in \mathbb{N} : y_n = f(x_n)$
      - O sea: $\lim f(x_n) = \lim y_n = M$
   (d) Como $\{x_n\}$ acotada, extraemos una sucesión convergente $\{x_{n_k}\}$
   (e) Luego $\lim x_{n_k} = P_M \in A$ porque A (donde vive esta sucesión) es cerrado, ¡y todo punto "tendible" en A es llegable (o sea, pertenece a A) por definición de punto de acumulación!
   (f) Finalmente, como f es contínua, $f(P_M) = M$

Observación: El caso m y P_m es análogo.

4.2.6 Si f cont. y su dominio compacto $\implies$ su imagen también lo es

Formalización: Si $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua $\wedge\, A$ compacto $\implies$ $F(A) \subset \mathbb{R}^n$ compacto

5 Derivadas y diferencial

5.1 Notación: gradiente y plano tangente

Gradiente de f en p: $\nabla f_P = (f_{x_1}(P), \ldots, f_{x_n}(P))$

Diferencial de f en p: $Df_P(Y) = < \nabla f_P, Y > = \sum_{i=1 \ldots n} f_{x_i}(P) * y_i$

Plano tg a f en p: $x_{n+1} = f(P) + < \nabla f_P, X - P >$

Desigualdad Cauchy–Schartz: $|Df_P(X)| = |< \nabla f_P, X >| \leq ||\nabla f_P|| \cdot ||X||$

5.2 Diferenciabilidad

<u>**Formalización**</u>:

f diferenciable en p $\iff$

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$P \in A^0$

Las derivadas parciales de f existen en P

$lim_{X \to P} \frac{|f(X) - f(P) - < \nabla f_P, X - P >|}{||X - P||} = 0$

5.3 Si f diferenciable en $P \implies f$ contínua en P

Formalización:

$$\begin{array}{l} P \in A^0 \\ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f \text{ diferenciable en } P \end{array} \quad \implies \quad f \text{ contínua en } P$$

Idea: quiero ver que $|f(X) - f(P)| \to 0$ con $x \to P$

$$\begin{array}{rcll} |f(X) - f(P)| & = & |f(X) - f(P) - Df_P(X-P) + Df_P(X-P)| & \leq \\ & & |f(X) - f(P) - Df_P(X-P)| + |Df_P(X-P)| & \leq \\ & & |f(X) - f(P) - Df_P(X-P)| + < \nabla f_P, X - P > & \leq \text{(c-s)} \\ & & |f(X) - f(P) - Df_P(X-P)| + || \nabla f_P || \cdot || X - P || & \to 0 \end{array}$$

Porque:

- $|f(X) - f(P) - Df_P(X-P)| = \frac{|f(X)-f(P)-Df_P(X-P)|}{||X-P||} \cdot ||X-P||$
  - Como f es diferenciable, la cosa grande tiende a 0.
  - $||X-P||$ también tiende a 0 dado que $X \to P$
- $||\nabla f_P||$ es anulado por $||X-P||$

5.4 Si existe transformación lineal diferencial $\implies$ existen todas las direccionales

Formalización: si

- $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $P \in A^0$
- $\exists\, T_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ / $\lim_{X \to P} \frac{|f(X) - f(P) - T_P(X-P)|}{||(||X-P)} = 0$

entonces:

1. Existen todas las derivadas direccionales de f en P y vale: $f_V(p) = T_P(V)\ \forall\ V \in \mathbb{R}^n$, con $||V|| = 1$
2. En particular, existen todas las parciales (utilizando los vectores canónicos)
3. Se tiene $T_P(X) = Df_P(X) =< \nabla f_P, X > \forall\ X \in \mathbb{R}^n$ y f diferenciable en P

Idea: quiero ver que $\lim_{t \to 0} \frac{|f(P+tV) - f(P)|}{t} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{X \to P} \frac{|f(X) - f(P) - T_P(X-P)|}{||X-P||} &= \lim_{X \to P} \frac{|f(X) - f(P) - T_P(X-P)|}{||X-P||} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{|f(P+tV) - f(P) - t \cdot T_P(V)|}{||t||} \\
&= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(P+tV) - f(P) - t \cdot T_P(V)}{t} \right| \\
&= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(P+tV) - f(P)}{t} - T_P(V) \right| \\
&= 0, \text{ dado que } f \text{ es diferenciable.}
\end{aligned}$$

1. $\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(P+tV) - f(P)}{t} \right| = T_P(V)$ y $T_P(V)$ está definida para todo $V \in \mathbb{R}^n$ por ser T transformación lineal.
2. En particular, tomando cualquier E_i se tiene que el límite existe, por lo tanto las parciales existen
3. Te la debo

5.5 Si f derivable en $c \in (a, b)$ y c extremo local $\implies$ $f'(c) = 0$ (Fermat $\mathbb{R}$)

Formalización:

$$\begin{array}{l} f : [a, b] \to \mathbb{R} \\ f \text{ derivable en } (a, b) \\ c \in (a, b) \text{ extremo local} \end{array} \implies f'(c) = 0$$

Idea:

1. Supongamos que f tiene un máximo local en c, luego existe un $\epsilon > 0$ / $\forall\, x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) : f(x) \leq f(c)$
2. Si nos acercamos a c por izquierda: $\lim_{t \to 0^-} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} \geq 0$
3. Y si lo hacemos por derecha, tenemos: $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} \leq 0$
4. Por lo tanto, la única posiblidad que queda es que $\lim_{t \to 0} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} = 0$, o sea $f'(c) = 0$

Observación: El caso de extremo mínimo es análogo

5.6 Si f contínua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$ $\implies$ existe $c \in (a, b)$ / $f'(c) = 0$ (Rolle en $\mathbb{R}$)

Formalización:

$$\begin{array}{l} f : [a, b] \to \mathbb{R} \\ f \text{ contínua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \implies \exists\, c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$$

Idea:

1. Si f constante entonces $\forall\, x \in (a, b) : f'(x) = 0$
2. Si f no es constante, como es contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces – por Weierstrass – su imagen está acotada y sus extremos son alcanzados (también se podría decir que su imagen es cerrada por corolario)
3. Sea $c \in (a, b)$ un extremo en f, luego, por Fermat: $f'(c) = 0$

5.7 Si f contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) $\implies$ existe $c \in (a, b)$ / $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (Lagrange en $\mathbb{R}$)

Formalización:

$$\begin{array}{l} f : [a, b] \to \mathbb{R} \\ f \text{ contínua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \end{array} \implies \exists\, c \in (a, b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Idea:

1. Sea L la función lineal que conecta las dos puntas de f, o sea: $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$
2. Y sea $g(x) = f(x) - L(x)$ que es contínua y derivable pues f lo es y L es función lineal
3. Como $g(a) = f(a) - L(a) = 0$ y $g(b) = f(b) - L(b) = 0 \implies g(a) = g(b)$
4. Por Rolle, existe $c \in (a, b)$ / $g'(c) = 0$
5. Tomemos la derivada de g en c, que es: $g'(c) = f'(c) - L'(c) = 0$
6. Pasando para el otro lado: $f'(c) = L'(c)$
   (a) Recordemos que L es de la forma $mx + k$, por lo tanto $L'(x) = m$ con m pendiente de L
7. Por lo tanto $f'(c) = m$ donde $m = \frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
8. Finalmente $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, como se quería probar