



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Trabajo Práctico II

---

Probabilidad y Estadística  
Primer Cuatrimestre de 2019

Integrante	LU	Correo electrónico
Facundo Linlaud	561/16	facundolinlaud@gmail.com
Marco Sotomayor	?	marco.soto1995@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

# Índice

1. Ejercicio 1	3
1.1. Momentos de la muestra . . . . .	3
1.2. Estimador de Máxima Verosimilitud . . . . .	3
2. Ejercicio 2	4
3. Ejercicio 3	4
4. Ejercicio 4	4
5. Ejercicio 5	4
6. Ejercicio 6	4
7. Ejercicio 7	5

## 1. Ejercicio 1

### 1.1. Momentos de la muestra

Como sabemos que  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra aleatoria con distribución  $U[0, b]$ , sabemos que el primer momento de una distribución uniforme es su esperanza, mientras que su segundo momento su varianza. De esta manera podemos estimar el primer y segundo momento de la muestra:

$$m_1 = E[X] = \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

Sabiendo además que  $a = 0$ , podemos utilizar la equivalencia (1) para estimar el valor de  $b$ :

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n X_i \\ \iff \bar{X}_n &= \frac{1}{n} * n * \frac{a+b}{2} \\ \iff \bar{X}_n &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Luego, despejando  $b$  y reemplazando  $a$  por 0, obtenemos su estimador:

$$\hat{b}_{mom} = 2 * \bar{X}_n$$

### 1.2. Estimador de Máxima Verosimilitud

Sabemos que la función de densidad de una distribución uniforme es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

Sabiendo que  $a = 0$  y que  $a < b$  por propiedades de distribución uniforme, procederemos a maximizar  $f_X(x)$  para estimar el valor de máxima verosimilitud de  $b$ :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x) \\ \iff L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-0} I_{(a,b)}(x) \\ \iff L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} I_{(x_i, +\infty)}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{b^n} & \text{si } \max\{x_1, \dots, x_n\} < \theta \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Esto implica que  $\frac{1}{b^n}$  es máximo cuando  $b^n$  es mínimo. Luego, el valor más chico posible de  $b$  es el valor más grande que haya tomado algún resultado en la muestra  $X_1, \dots, X_n$ . Porque si  $b$  fuese menor a alguno de ellos, la probabilidad total sería nula (por contener un elemento fuera del rango de la distribución). Finalmente, tenemos un valor para nuestro estimador:

$$\hat{b}_{mv} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

## 2. Ejercicio 2

Dada una muestra  $X_1, \dots, X_n$ , estimar el doble de su mediana implica tomar los únicos datos que tenemos, es decir la muestra, calcular su mediana muestral y multiplicarla por dos. Su implementación puede ser observada en el archivo **tp2.py**.

## 3. Ejercicio 3

El procedimiento para resolver este ejercicio fue obtener el estimador  $\hat{\theta}_{mv}$  y restarlo por  $b = 1$  para obtener el error de máxima verosimilitud. El mismo procedimiento fue realizado análogamente para el estimador de momento  $\hat{\theta}_{mom}$ . Al ejecutar **tp2.py**, se puede observar que módulo del error tiende a ser menor o igual a 0,1.

## 4. Ejercicio 4

A continuación se exponen los datos requeridos por el ejercicio 4. Para más detalles, ver **tp2.py**.

Estimador	$\hat{\theta}_{mv}$	$\hat{\theta}_{mom}$	$\hat{\theta}_{med}$
Promedio	0,935	1,003	1,005
Sesgo	0,064	-0,003	-0,005
Varianza	0,003	0,022	0,057
ECM	0,007	0,022	0,057

## 5. Ejercicio 5

Ver **tp2.py**.

## 6. Ejercicio 6

A continuación, procederemos a graficar los sesgos, varianzas y errores cuadráticos medios de los estimadores en función de los distintos valores de **b** a estimar.

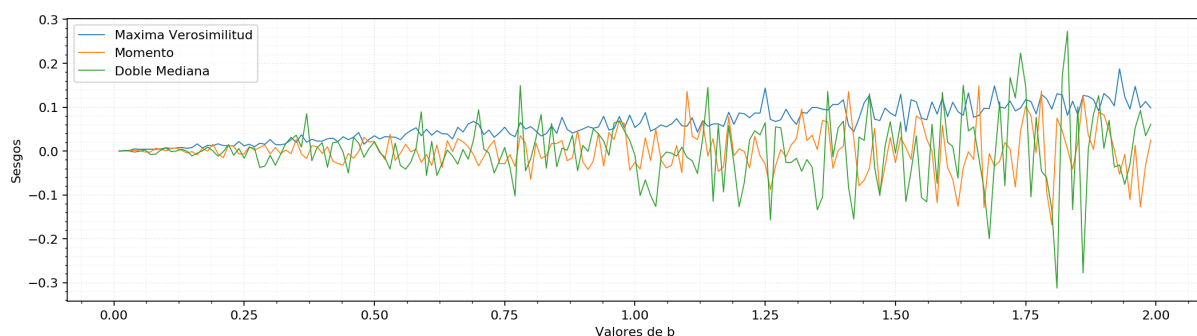


Figura 1: Sesgos de los estimadores en función de los valores de **b**.  $a = 0, n = 15$

En la figura 1 se puede observar que, a medida que el valor de  $b$  aumenta, el valor absoluto del sesgo del estimador de  $b$  también incrementa. Esto tiene sentido porque, al observar la figura 2, a medida que  $b$  aumenta, la varianza de los estimadores también.

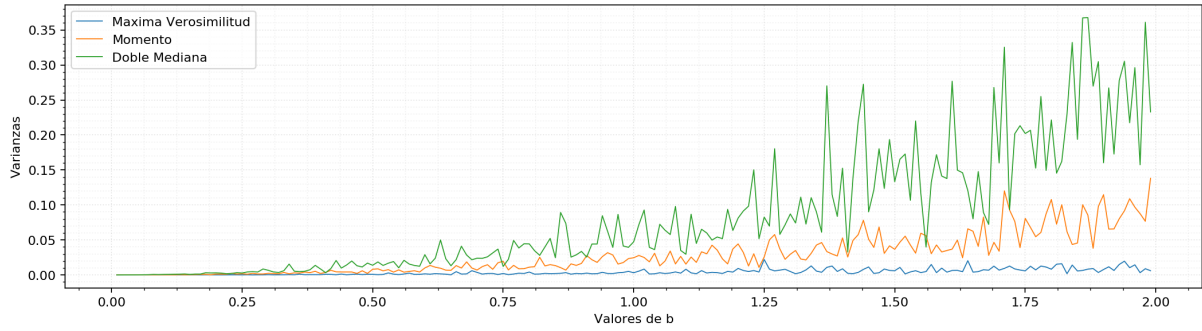


Figura 2: Varianzas de los estimadores en función de los valores de  $\mathbf{b}$ .  $a = 0, n = 15$

La figura 2 nos muestra el comportamiento de las varianzas. Podemos observar cómo la varianza del estimador de la doble mediana  $\hat{\theta}_{med}$  tiene el crecimiento máximo de entre los tres, seguida por la varianza del estimador  $\hat{\theta}_{mom}$  y en último lugar, la varianza del estimador  $\hat{\theta}_{mv}$ . Podemos inferir que el estimador de máxima verosimilitud es el estimador de mejor calidad de entre los tres, pues su varianza no crece tan agresivamente al aumentar el valor de  $b$  como en las otras alternativas.

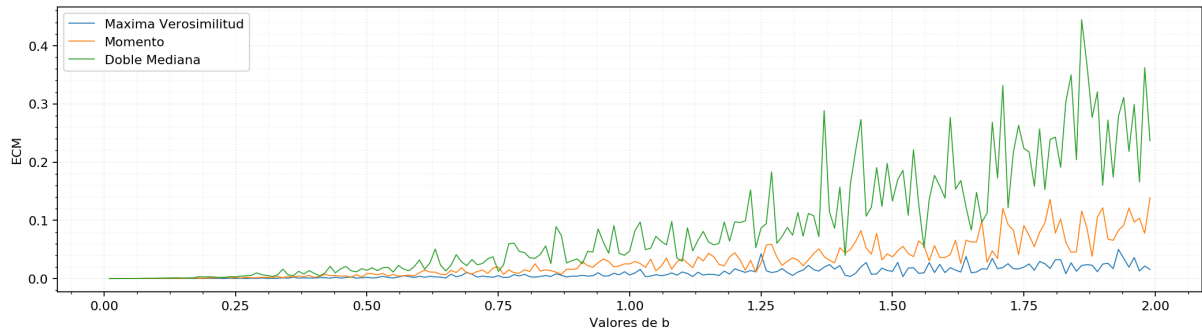


Figura 3: ECM de los estimadores en función de los valores de  $\mathbf{b}$ .  $a = 0, n = 15$

Finalmente, la figura 3, complementa la conclusión llegada en los análisis anteriores. A medida que el valor de  $b$  aumenta, el error cuadrático medio de cada estimador también. Podemos asegurar que el mejor estimador de los tres es el de **máxima verosimilitud**, que posee el menor crecimiento de los tres.

## 7. Ejercicio 7

En este experimento observaremos el error cuadrático medio para cada estimador en función de  $n$ , con  $n$  siendo la cantidad de muestras de tamaño 15. En el gráfico siguiente, podemos observar que errores cuadráticos medios de cada estimador convergen a valores no nulos. En particular, observando los datos adquiridos en el **ejercicio 4**, podemos observar que el error cuadrático medio de  $\hat{\theta}_{mom}$  y  $\hat{\theta}_{med}$  tienden a 0,022 y 0,057 respectivamente, que no coincidentalmente aproximan al valor de sus varianzas con  $n \rightarrow \infty$ .

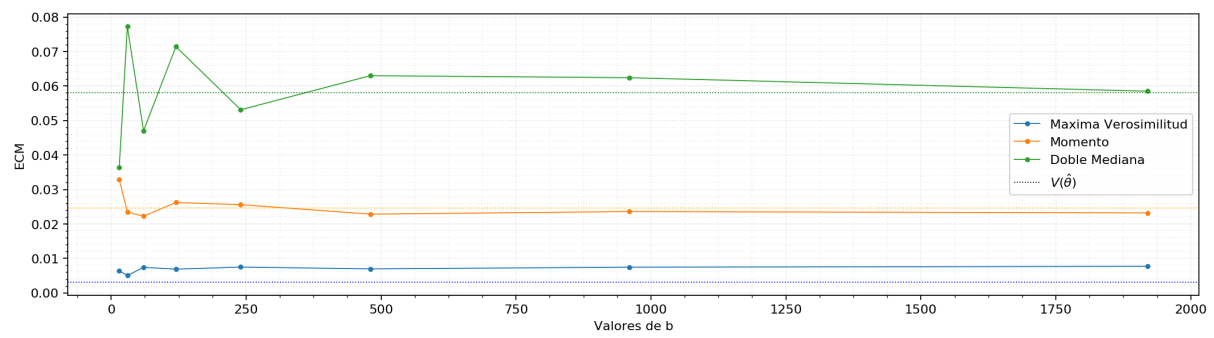


Figura 4: ECM de los estimadores en función de  $n$ .  $a = 0, b = 1$