

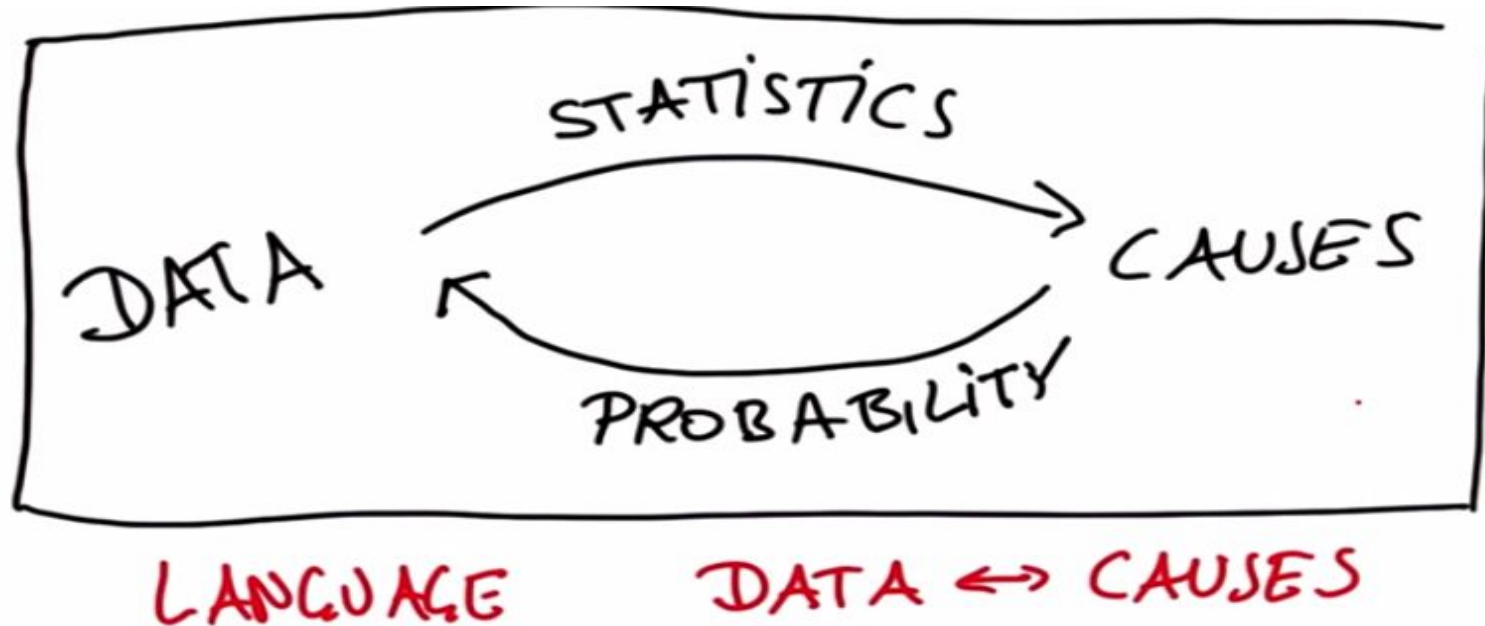
DigitalHouse >
Coding School

DATA SCIENCE

UNIDAD 1
MÓDULO 2

Conceptos de Estadística

Agosto 2017



Probabilidad nos da un lenguaje para describir la relación entre los datos y las causas subyacentes.

1

Experimento Aleatorio - Probabilidad Clásica

2

Probabilidad Condicional - Regla de Bayes

3

Variables Aleatorias - Funciones de Distribución

- Un **experimento aleatorio** es un experimento tal que
 - No se puede anticipar el resultado de una sola repetición del experimento
 - Si este experimento se repite muchas veces la frecuencia (proporción de casos) con que la observamos determinado resultado o conjunto de resultados se acerca a una constante (no es aleatorio).

Hagamos un experimento:

Vamos a <http://students.brown.edu/seeing-theory/basic-probability/index.html#first>

Tiramos una moneda una vez, 10 veces, 100 veces, 1000 veces.

- Espacio Muestral
 - Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio
 - Se lo denota con la letra griega Ω
 - A un resultado particular del experimento se lo denota con ω



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Ejemplo

Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado y observar el número que sale.
El espacio muestral es claramente $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como ejemplo de evento, podríamos definir el conjunto $A = \{1, 3, 5\}$, que corresponde al suceso de obtener como resultado un número impar.

Si al lanzar el dado se obtiene un 3, entonces decimos que se observó la ocurrencia del evento A.

Pero si lanzo el dado y sale 2, entonces no se observa la ocurrencia del evento A

Espacio muestral

$E = \{ \text{1, 2, 3, 4, 5, 6} \}$

Algunos sucesos:

$A = \{ \text{1, 3, 5} \}$ "salir impar"

$B = \{ \text{3, 6} \}$ "salir múltiplo de 3"

$C = \{ \text{6} \}$ "salir un 6"

- Ejemplo

Consideremos el caso de un juego de lotería. Hay un millón de números y un jugador participa con un boleto. Sólo hay un número ganador.

Naturalmente el espacio muestral que surge es el de todos los números hasta un millón, $\Omega = \{1, 2, \dots, 10^6\}$.

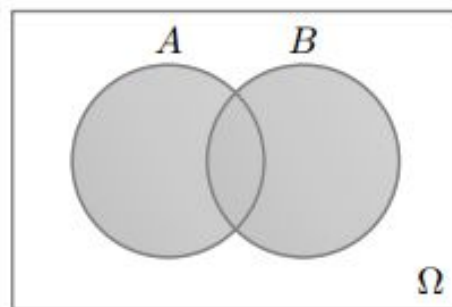
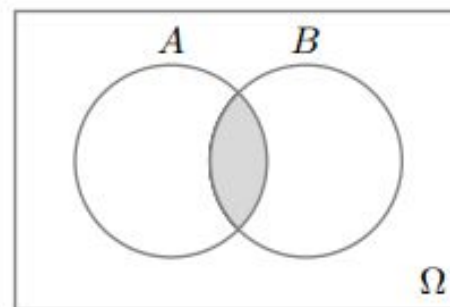
Los resultados posibles se pueden agrupar en eventos arbitrarios. Al jugador le interesa conocer su suerte en este juego. Entonces, también se pueden agrupar los resultados como definir los eventos **“ganar”** o **“perder”** dado el número de lotería que tiene el apostador. .



Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera de Ω . Recordamos a continuación las operaciones básicas de unión, intersección, diferencia y complemento.

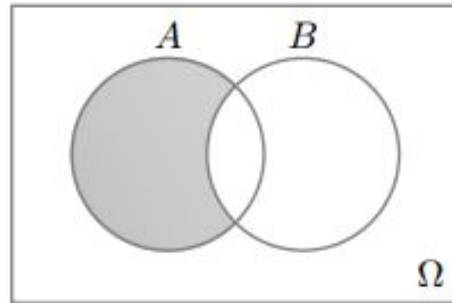
$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ o } \omega \in B\},$$

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \in B\},$$

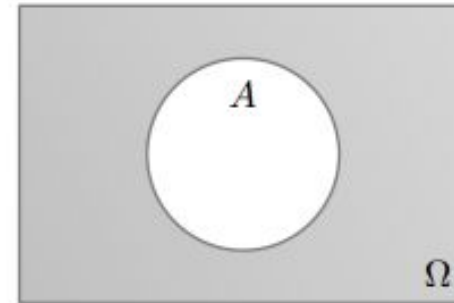
 $A \cup B$  $A \cap B$

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \notin B\},$$

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$



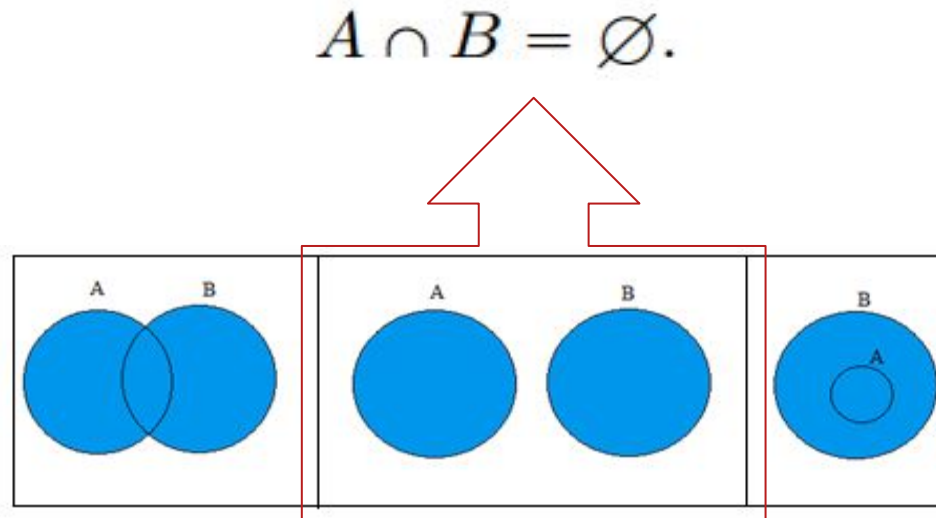
$A - B$



A^c

- Conjuntos disjuntos

Cuando dos conjuntos no tienen ningún elemento en común se dice que son disjuntos..



- Ejercicio

Sean A, B y C tres eventos de un experimento aleatorio.

Exprese las siguientes oraciones en términos de estos conjuntos.

- A. Ocurre A o B, pero no C.
- B. Ninguno de estos tres eventos ocurre.
- C. Sólo uno de ellos ocurre.
- D. Exáctamente dos de ellos ocurre.
- E. Por lo menos uno de ellos.
- F. A lo sumo dos de ellos ocurren.

Definición 1.2 Sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

en donde el símbolo $\#A$ denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A .

- a) el espacio muestral es finito.
- b) todos los elementos del espacio muestral tienen el mismo “peso”.

Ejemplo 1.10 Considere el experimento aleatorio de lanzar un dado equilibrado. El espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si deseamos calcular la probabilidad (clásica) del evento A , correspondiente a obtener un número par, es decir, la probabilidad de $A = \{2, 4, 6\}$, entonces

$$P(A) = \frac{\#\{2, 4, 6\}}{\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Fácilmente se pueden distinguir algunas propiedades

- a) $P(\Omega) = 1$.
- b) $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A .
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando A y B son ajenos.

Cuando tenemos la posibilidad de repetir N veces un experimento aleatorio, podemos registrar la cantidad de veces que ocurre el suceso A . Esta información puede ser utilizada para calcular la probabilidad de A .

Definición 1.4 Sea n_A el número de ocurrencias de un evento A en n realizaciones de un experimento aleatorio. La probabilidad frecuentista del evento A se define como el límite

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}.$$

Como no es humanamente posible realizar un experimento infinitas veces, nos aproximamos:

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}.$$

- Usted va a comprar algo en Internet:
 - ¿Mira la calificación del vendedor?
 - ¿Su evaluación de la calidad del vendedor es la misma si este tiene muchos años en el sitio y/o alto porcentaje de valoraciones positivas que si no lo tiene?

Calcular probabilidades condicionales es como ese proceso que usted realiza al elegir el vendedor en base a la reputación. En base a la información en la que se condiciona actualizamos nuestra creencia (probabilidad) de que el vendedor sea malo o bueno.

- Supongamos una pequeña población de vendedores en sitios de internet con los siguientes atributos.
- Para cada vendedor se registra si tiene 10 o más años vendiendo en el sitio y se sabe su tipo (si es bueno u oportunista)

	bueno	malo
10 años o más	16	8
menos de 10 años	10	16

- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea oportunista dado que lleva 10 o más años vendiendo en el sitio?
 - Condicionar es como **fijar la fila que voy a mirar.**
 - Dado que **sé que el vendedor tiene 10 o más años**, sólo consideramos la proporción de vendedores buenos dentro de la primer fila de la tabla.

	bueno	malo	
10 años o más	16	8	24
menos de 10 años	10	16	26
	26	24	50

- En nuestro ejemplo: La probabilidad de un evento A (ser buen vendedor) dado que ocurrió el evento B (tener 10 años o más vendiendo en el sitio por ejemplo)
 - Sería algo así como *los casos favorables a A (que deben ser aquellos que simultáneamente son favorables a B también porque B ya es conocido) sobre casos posibles (limitandonos a aquellos donde B ocurre).*

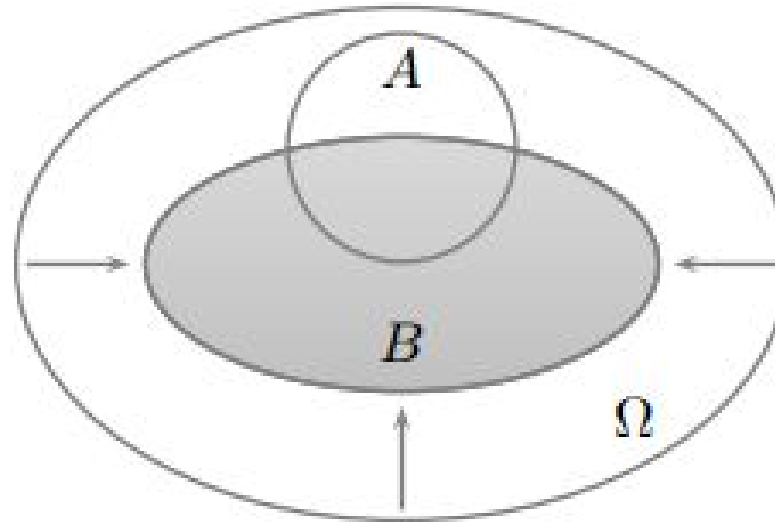
	bueno	malo	
10 años o más	16	8	24
menos de 10 años	10	16	26
	26	24	50

Definición 1.10 Sean A y B dos eventos y supongamos que B tiene probabilidad estrictamente positiva. La probabilidad condicional del evento A , dado el evento B , se denota por el símbolo $P(A | B)$ y se define como el cociente

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1.3)$$

*El término $P(A/B)$ se lee:
“La probabilidad de A dado B ”*

Podemos imaginar que **el espacio muestral del experimento aleatorio se ha reducido al evento B** de tal forma que todo lo que se encuentre fuera de este evento tiene probabilidad condicional cero.



- Volviendo al ejemplo de vendedores online.
 - Definamos los eventos A “bueno” y B “10 años o más vendiendo en el sitio”.
 - $P(A \text{ y } B) = 16/50$, $P(B) = 24/50$.
 - $P(B/A) = (16/50) / (24/50) = (16/50) * (50/24) = 16/24$

	bueno	malo	
10 años o más	16	8	24
menos de 10 años	10	16	26
	26	24	50

- Ejemplo

Considere el experimento de lanzar un dado equilibrado y defina los eventos

$A = \{2\} = \text{"Se obtiene el número 2"}$

$B = \{2, 4, 6\} = \text{"Se obtiene un número par"}$



Es claro que $P(A) = \frac{1}{6}$, sin embargo sabiendo que B ha ocurrido, es decir, sabiendo que el resultado es un número par, la probabilidad del evento A es ahora

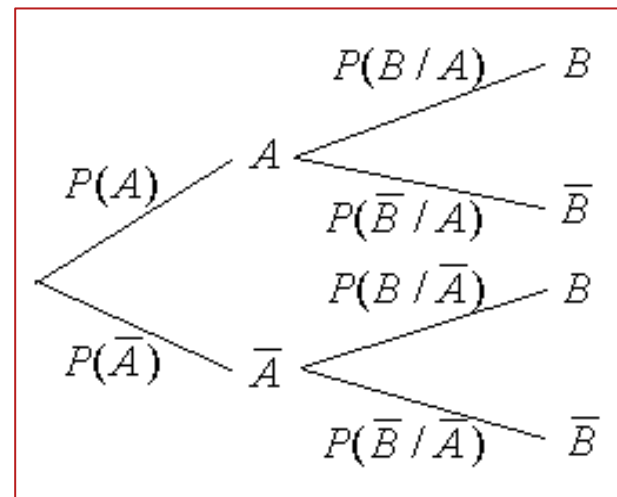
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2, 4, 6\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Es decir, la información adicional de la ocurrencia del evento B, ha hecho que la probabilidad de A se incremente de $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{3}$

● Ejemplo

Un grupo de personas está compuesto de 60% hombres y 40% de mujeres. De los hombres, el 30% fuma y de las mujeres, el 20% fuma. Si una persona de este grupo se escoge al azar, encuentre la probabilidad de que

- A. sea hombre y fume
- B. sea hombre y no fume
- C. sea mujer y fuma
- D. sea mujer y no fume



- Probabilidad Condicional. Ejemplos Finales..
 - Al contestar una pregunta de un examen multiple choice una persona puede o no saber la respuesta y caso de no saberla puede adivinarla al azar.
 - A los ojos del encargado de corregir los exámenes, el participante del curso sabe la respuesta con probabilidad p (y responde correctamente) mientras que si no la sabe tiene probabilidad $1/n$ de acertar respondiendo al azar donde n es la cantidad de opciones del examen.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato sepa la respuesta dado que contestó correctamente?

- Probabilidad Condicional. Ejemplos Finales..
 - Definamos los eventos S “sabe la respuesta” y C “contestó correctamente”.
 - $P(S|C) = P(S \cap C) / P(C)$.
 - $P(S \cap C) = p$ (saber y responder bien)
 - ¿Como podemos pensar **P(C)**? Hay 2 formas de responder correctamente a la pregunta del examen:
 - Saber la respuesta (y contestar bien por lo tanto) con probabilidad p
 - No saber (con probabilidad 1-p) y contestar correctamente (con probabilidad 1/n).
 - **Por lo tanto $P(C) = 1 * p + (1/n) * (1-p)$**
 - Reemplazando en la fórmula $P(S/C) = P(S \cap C) / P(C)$
 - $P(S/C) = p / (1*p + 1/n*(1-p))$

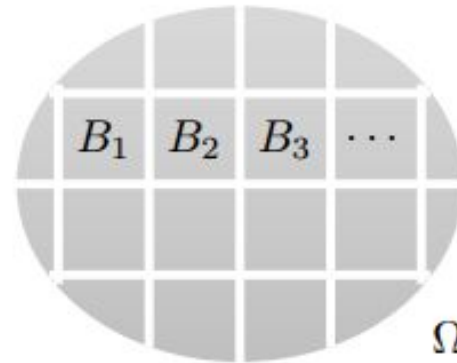
- Partición

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. Decimos que la colección de eventos $\{B_1, \dots, B_n\}$ es una partición finita de Ω si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $B_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$

b) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{para } i \neq j.$

c) $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega.$



Sea B_1, \dots, B_n una partición de Ω tal que $P(B_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$. Para cualquier evento A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i).$$

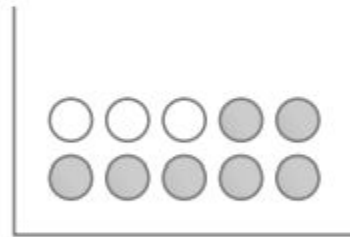
Cuando la partición del espacio muestral consta de únicamente los elementos B y B^c , la fórmula del teorema de probabilidad total se reduce a la expresión

$$P(A) = P(A | B) P(B) + P(A | B^c) P(B^c).$$

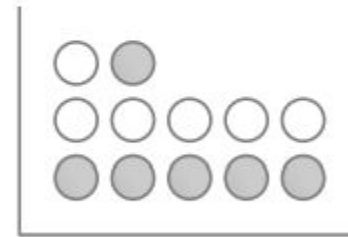
- Ejemplo

Suponga que tenemos dos cajas: una con 3 bolas blancas y 7 bolas de color gris, la otra con 6 blancas y 6 grises.

Si se elije una caja al azar y después se saca una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se blanca?



Caja 1



Caja 2

$$\Omega = \{(C_1, B), (C_1, G), (C_2, B), (C_2, G)\},$$

en donde C_1 y C_2 denotan los eventos en donde las cajas uno y dos fueron escogidas, respectivamente, y B y G denotan los eventos en donde una bola blanca o gris fueron escogidas, respectivamente.

Nos piden calcular la probabilidad de B . Observe que es fácil calcular la probabilidad de este evento cuando se conoce la caja que fue escogida.

Esto sugiere condicionar sobre el resultado de escoger alguna de las dos cajas y aplicar el teorema de probabilidad total, es decir,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | C_1)P(C_1) + P(B | C_2)P(C_2) \\ &= (3/10)(1/2) + (6/12)(1/2) \\ &= 2/5. \end{aligned}$$

- Ejemplo

Suponga que en una población humana de igual número de hombres y mujeres, el 4 % de hombres son daltónicos y el 1 % de las mujeres son daltónicas. Una persona es elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea daltónica?

Solución.

Definamos primero los eventos de interés. Sea:

M el evento “La persona escogida es mujer”,

H el evento “La persona escogida es hombre”,

D el evento “La persona escogida es daltónica”.

Deseamos calcular $P(D)$. Por el teorema de probabilidad total,

$$\begin{aligned}P(D) &= P(D | M)P(M) + P(D | H)P(H) \\&= (1/100)(1/2) + (4/100)(1/2) \\&= 1/40.\end{aligned}$$

- Teorema de Bayes

El resultado interesante que estudiaremos a continuación involucra nuevamente probabilidades condicionales. Fue publicado por primera vez en 1763, dos años después de la muerte de su creador: el matemático y teólogo inglés Thomas Bayes



Thomas Bayes
(Inglaterra 1702–1761)

Teorema 1.2 (Teorema de Bayes) Sea B_1, \dots, B_n una partición de Ω tal que $P(B_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Sea A un evento tal que $P(A) \neq 0$. Entonces para cada $j = 1, 2, \dots, n$,

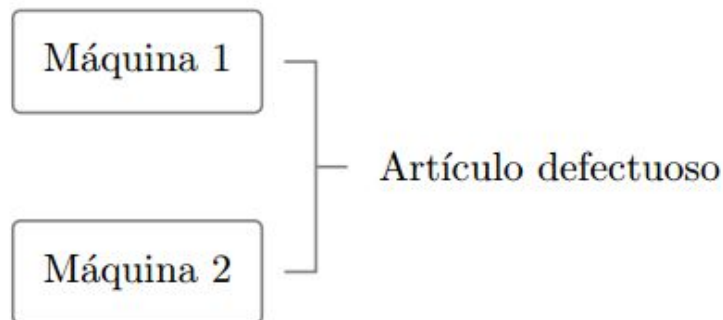
$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}.$$

Demostración. Por definición de probabilidad condicional, y después usando el teorema de probabilidad total, tenemos que para cada $j = 1, \dots, n$,

$$P(B_j | A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}.$$

- Ejemplos

En una fábrica hay dos máquinas. La máquina 1 realiza el 60% de la producción total y la máquina 2 el 40%. De su producción total, la máquina 1 produce 3% de material defectuoso, la 2 el 5%. El asunto es que se ha encontrado un material defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que este material defectuoso provenga de la máquina 2?



Solución.

Es conveniente definir los siguientes eventos:

D = “El material escogido es defectuoso”,

M_1 = “La máquina 1 produjo el material escogido”,

M_2 = “La máquina 2 produjo el material escogido”

La pregunta planteada se traduce en encontrar $P(M_2 | D)$ y observamos que la información que tenemos es $P(D | M_2)$. Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(M_2 | D) &= \frac{P(D | M_2)P(M_2)}{P(D | M_1)P(M_1) + P(D | M_2)P(M_2)} \\ &= \frac{(5/100)(40/100)}{(3/100)(60/100) + (5/100)(40/100)} \\ &= 10/19. \end{aligned}$$

Comprobar que $P(M_1 | D) = 9/19$

- Ejemplos

En un laboratorio se descubrió una prueba para detectar cierta enfermedad, y sobre la eficacia de dicha prueba se conoce lo siguiente: si se denota por E el evento de que un paciente tenga la enfermedad y por N el evento de que la prueba resulte negativa, entonces se sabe que

$$\begin{aligned}P(N^c | E) &= 0.95, \\P(N | E^c) &= 0.96, \\P(E) &= 0.01 .\end{aligned}$$

Observe que esta información corresponde al caso cuando se conoce la situación médica del paciente, es decir, si está enfermo o no lo está. Con únicamente estos datos, uno podría pensar que la prueba es muy buena, sin embargo calcularemos las probabilidades $P(E | N)$ y $P(E | N^c)$ para saber la efectividad de la prueba cuando una persona recibe sus resultados. Usando el teorema de Bayes tenemos que

$$\begin{aligned} P(E | N) &= \frac{P(N | E)P(E)}{P(N | E)P(E) + P(N | E^c)P(E^c)} \\ &= \frac{0.05 \times 0.01}{0.05 \times 0.01 + 0.96 \times 0.99} \\ &= 0.000526. \end{aligned}$$

probabilidad de falso negativo
(bajo es bueno)

$$\begin{aligned}P(E | N^c) &= \frac{P(N^c | E)P(E)}{P(N^c | E)P(E) + P(N^c | E^c)P(E^c)} \\&= \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.04 \times 0.99} \\&= 0.193.\end{aligned}$$

**probabilidad de verdadero positivo
(bajo es malo)**

- Independencia de Eventos

La independencia entre eventos es equivalente a la situación cuando la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento.

Es un concepto importante que en algunos casos nos simplificará considerablemente el cálculo de probabilidades conjuntas.

Definición 1.11 Se dice que los eventos A y B son independientes si se cumple la igualdad

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (1.4)$$

Bajo la hipótesis adicional de que $P(B) > 0$, la condición de independencia puede escribirse como

$$P(A | B) = P(A).$$

Esto significa que la ocurrencia del evento B no afecta la probabilidad del evento A.

Análogamente, cuando $P(A) > 0$, la condición se puede escribir como

$$P(B | A) = P(B),$$

es decir, la ocurrencia del evento A no cambia a la probabilidad de B. Veamos algunos ejemplos

- Ejemplos

Considere un experimento aleatorio con espacio muestral equiprobable $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

- A. Los eventos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3\}$ son independientes pues un tanto $P(A \cap B)$ como $P(A)P(B)$ coinciden en el valor $1/4$.
- B. Los eventos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3\}$ no son independientes pues $P(A \cap B) = 1/2$, mientras que $P(A)P(B) = (3/4)(1/2) = 3/8$

- Independencia vs disjuntos

Considere un evento $A \neq \emptyset$ y el espacio muestral Ω . Recuerde que $P(\Omega)=1$.

Es claro que A y Ω son independientes pues $P(A \cap \Omega) = P(A)=P(A)*1=P(A)* P(\Omega)$.

Sin embargo, $A \cap \Omega = A \neq \emptyset$.

Por lo tanto, el hecho de que dos eventos sean independientes no implica necesariamente que sean disjuntos.

- Ejemplo

Considere el experimento aleatorio de lanzar un dado equilibrado y defina los eventos A como obtener un número par y B como obtener un número impar. Es claro que los eventos A y B son disjuntos, sin embargo no son independientes pues

$$0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = (1/2)(1/2).$$

Por lo tanto, dos eventos pueden ser disjuntos y ello no implica necesariamente que sean independientes

La definición de independencia de dos eventos puede extenderse al caso de tres eventos y, más generalmente, para cualquier colección finita de eventos de la manera siguiente

Definición 1.12 Decimos que n eventos A_1, \dots, A_n son (mutuamente) independientes si se satisfacen todas y cada una de las condiciones siguientes:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \quad i, j \text{ distintos.} \quad (1.5)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad i, j, k \text{ distintos.} \quad (1.6)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n). \quad (1.7)$$

● Radares

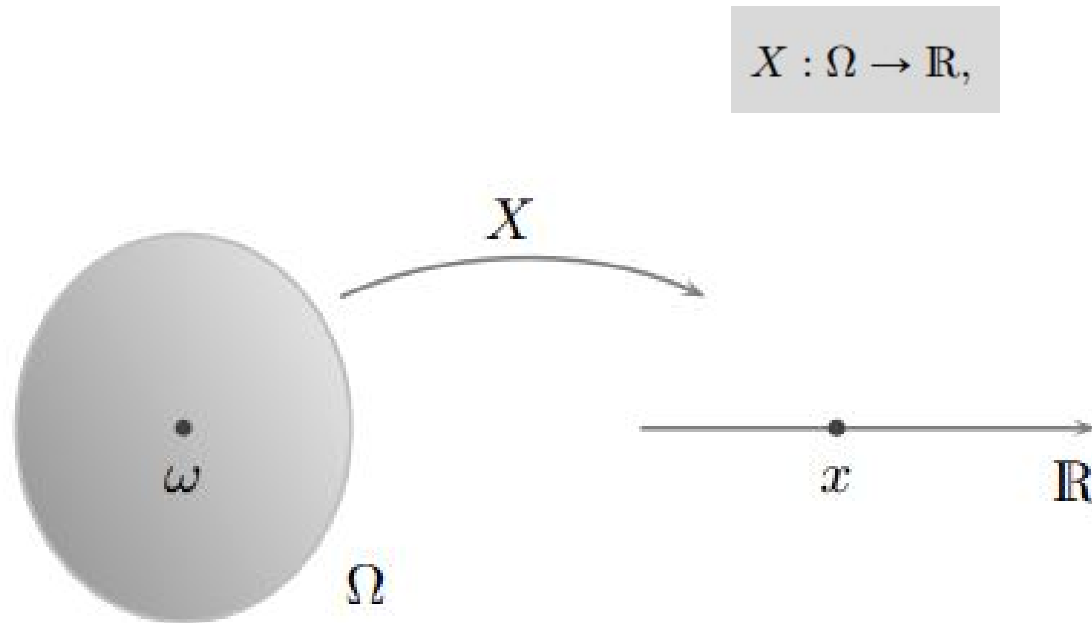
En una cierta zona geográfica estratégica se han colocado tres radares para detectar el vuelo de aviones de baja altura. Cada radar funciona de manera independiente y es capaz de detectar un avión con probabilidad 0.85. Si un avión atraviesa la zona en estudio, calcule la probabilidad de que

- A. no se detectado por ninguno de los radares
- B. sea detectado por lo menos por uno de los radares
- C. sea detectado por lo menos por dos de los radares

NOTA: Una de las métricas de performance de modelos que vamos a usar en el curso se llama ROC y fue usada por primera vez por Operadores de Radares en la segunda guerra mundial

- Variables Aleatorias

Una variable aleatoria es una transformación X del espacio de resultados Ω al conjunto de números reales, esto es,



Nuestro interés en el estudio de los experimentos aleatorios se trasladará al estudio de las distintas variables aleatorias

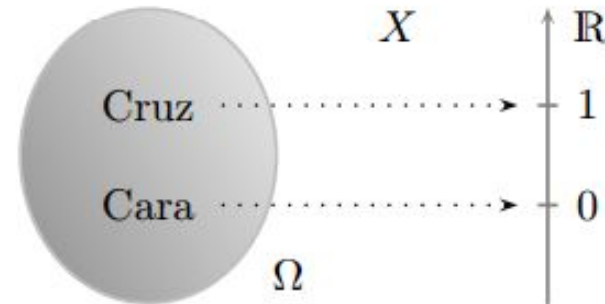
- Ejemplo

Suponga que un experimento aleatorio consiste en lanzar al aire una moneda equilibrada y observar la cara superior una vez que la moneda cae.

Denotemos por “Cara” y “Cruz” los dos lados de la moneda. Entonces, claramente, el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{\text{“Cruz”}, \text{“Cara”}\}$. Defina la variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma siguiente.

$$X(\text{“Cruz”}) = 1,$$

$$X(\text{“Cara”}) = 0.$$



De este modo podemos suponer que el experimento aleatorio tiene dos valores numéricos: 0 y 1.

Observe que estos números son arbitrarios pues cualquier otro par de números puede ser escogido como los valores de la variable aleatoria.

Se muestran a continuación algunos ejemplos de eventos de esta variable aleatoria y sus correspondientes probabilidades

a) $P(X \in [1, 2)) = P(\{\text{"Cruz"}\}) = 1/2.$

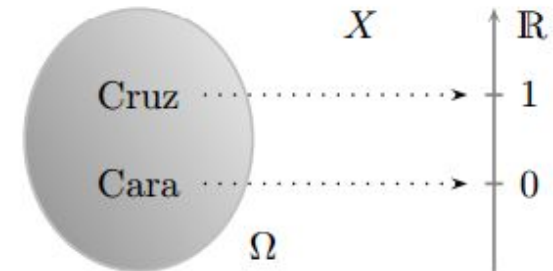
b) $P(X \in [0, 1)) = P(\{\text{"Cara"}\}) = 1/2.$

c) $P(X \in [2, 4]) = P(\emptyset) = 0.$

d) $P(X = 1) = P(\{\text{"Cruz"}\}) = 1/2.$

e) $P(X \leq -1) = P(\emptyset) = 0.$

f) $P(X \geq 0) = P(\Omega) = 1.$



OPCIONAL

- Juego del cumpleaños.
 - ¿Qué probabilidad hay de encontrar 2 personas en este curso de Data Science que hayan nacido el mismo día?
 - ¿Cree que esta probabilidad es baja?
 - Consideremos el caso con 2 personas.

- Juego del cumpleaños.

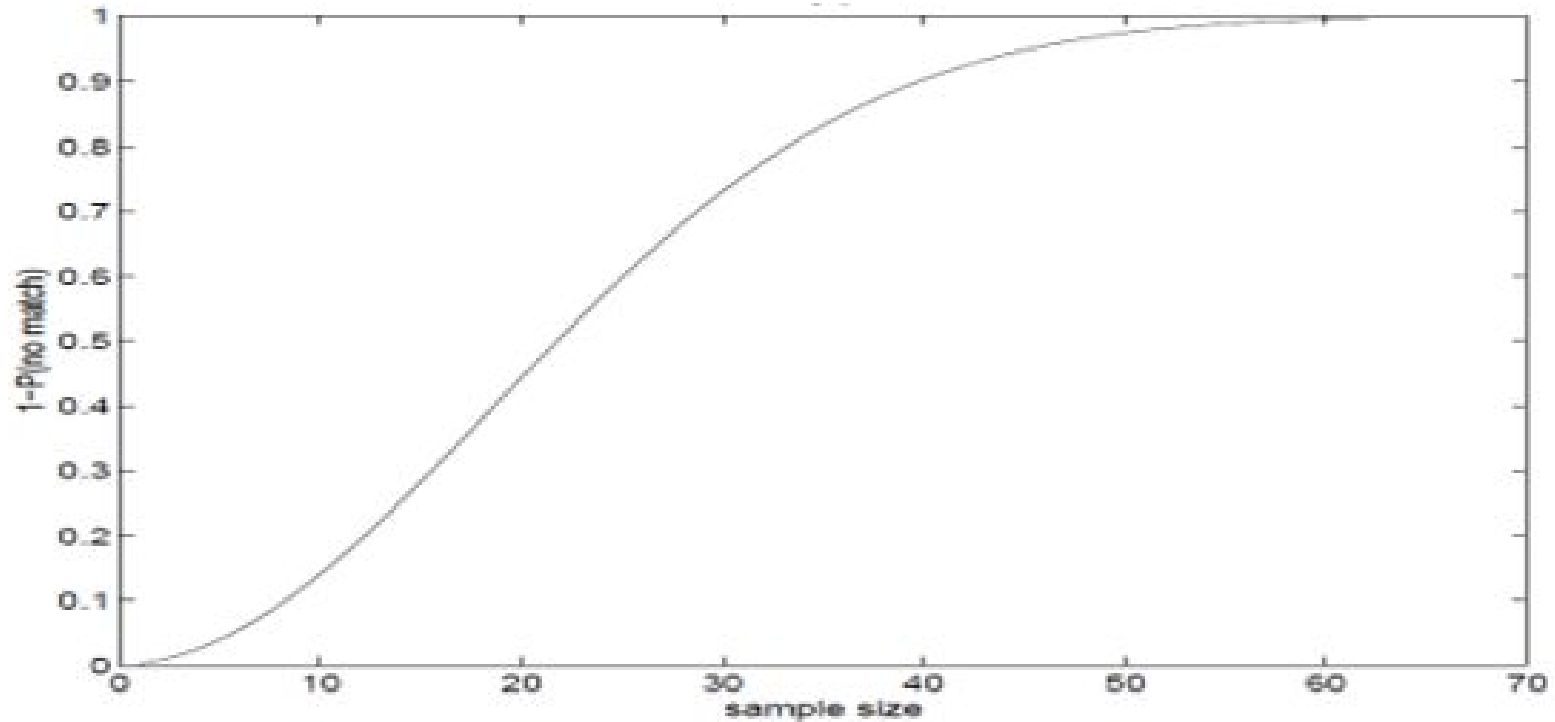
- El experimento lo podemos describir como “sacar aleatoriamente” una fecha de nacimiento para la primer persona y luego otra para la segunda persona.
- La probabilidad buscada será entonces el producto de las probabilidades de “éxito” en cada parte del experimento.
- Buscamos entonces la probabilidad de que la primer persona nazca un día cualquiera y que la segunda nazca un día cualquiera excepto el que nació la primera.
- La probabilidad de que no hayan nacido el mismo día se calcula como:
$$(365/365) * (364/365) = (364/365) = 0,99726$$

- Juego del cumpleaños.

- Si hubiera tres personas $(365/365) * (364/365) * (363/365) = 0,99726$
- Que se puede escribir como $(365 * 364 * 363)/365^3$
- Para n personas...
 $((365-1)/365) * ((365-2)/365) * ((365-3)/365) * \dots * ((365-n+1)/365).$
- Que se puede reescribir como $365! / ((365-n)! * 365^n).$

- Juego del cumpleaños.
 - ¿Qué pasa si hay más de 365 personas? ¿Puedo asignar los días del año para que no haya dos personas con la misma fecha de nacimiento? No!
 - Por eso la fórmula anterior daría 0 en ese caso.
 - En este ejemplo la probabilidad pedida parecería muy compleja de calcular. El problema se simplifica al ver las posibles fechas como la característica a asignar entre las personas.

- Juego del cumpleaños.



- Factoriales.

- Recordar $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$ y por definición $0! = 1$
- Se interpreta como la cantidad de formas diferentes de ordenar n elementos distintos
- Ejemplo: usted tiene 3 libros de Python. ¿De cuántas formas puede ponerlos en un estante para impresionar a sus amigos?
 1. Al poner el primero tiene 3 opciones de libros para ese lugar.
 2. Una vez elegido el primero le quedan 2 opciones para libro que va a ir en el segundo lugar.
 3. Una vez elegidos los primeros 2 libros (en posiciones 1 y 2) le queda solo una opción de libro para el tercer lugar.

- Portafolio.

- Las acciones A y B tiene igual probabilidad de subir o bajar un 10% siendo estadísticamente independientes.
- Un portfolio igualmente ponderado de las acciones A y B tiene como retornos posibles el conjunto {10%, 0, -10%}. El retorno será 10% si los dos suben 10%, 0% si A baja y B sube o bien A sube y B baja mientras que será -10% si ambas bajan

Acción	A	B
	x	p(x)
Baja	-10%	1/2
Sube	10%	1/2

- Portafolio.
 - Los posibles resultados son

Portafolio	x	p(x)
Baja Baja	-10%	1/4
Baja Sube	0	1/4
Sube Baja	0	1/4
Sube Sube	10%	1/4

- Portafolio.
 - La distribución de probabilidad de los retornos es entonces

Retorno del Portafolio (x)	p(x)
-10%	1/4
0%	2/4
10%	1/4