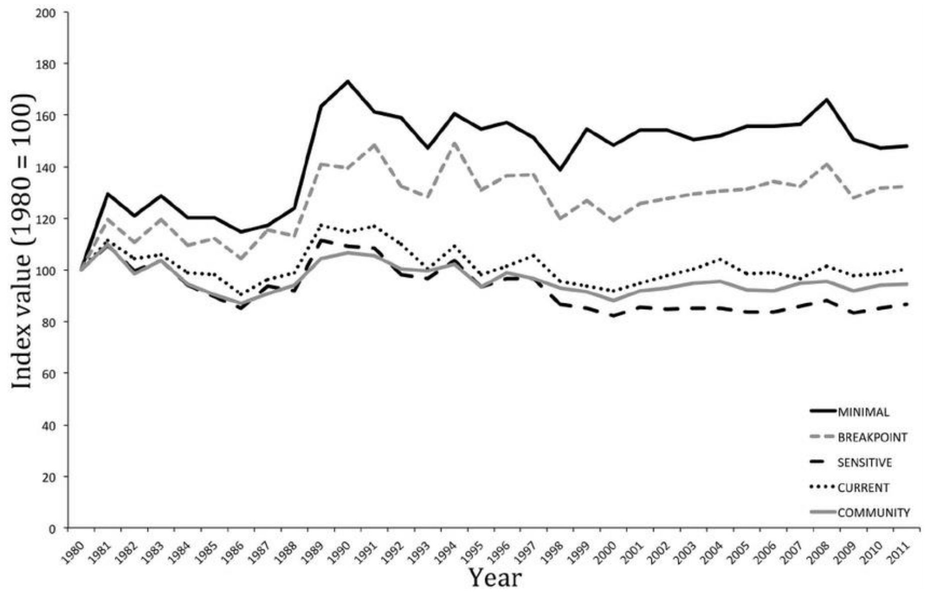
Modelos lineales y aditivos en ecología

Facundo X. Palacio

facundo_palacio@fcnym.unlp.edu.ar

2 al 6 de mayo de 2022 – Universidad Nacional de Tucumán

Modelos no lineales

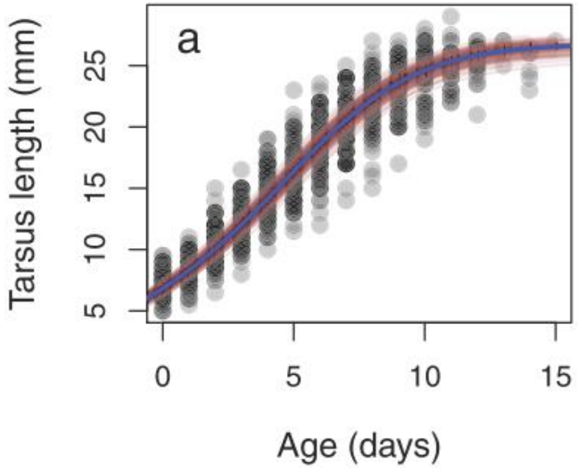


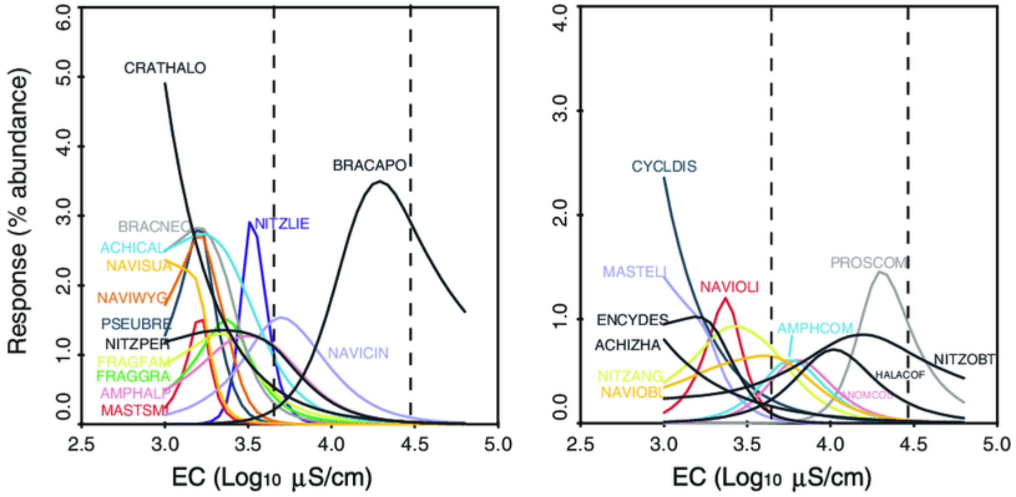
- Ventajas de los modelos lineales:

- Simples de describir e interpretar.

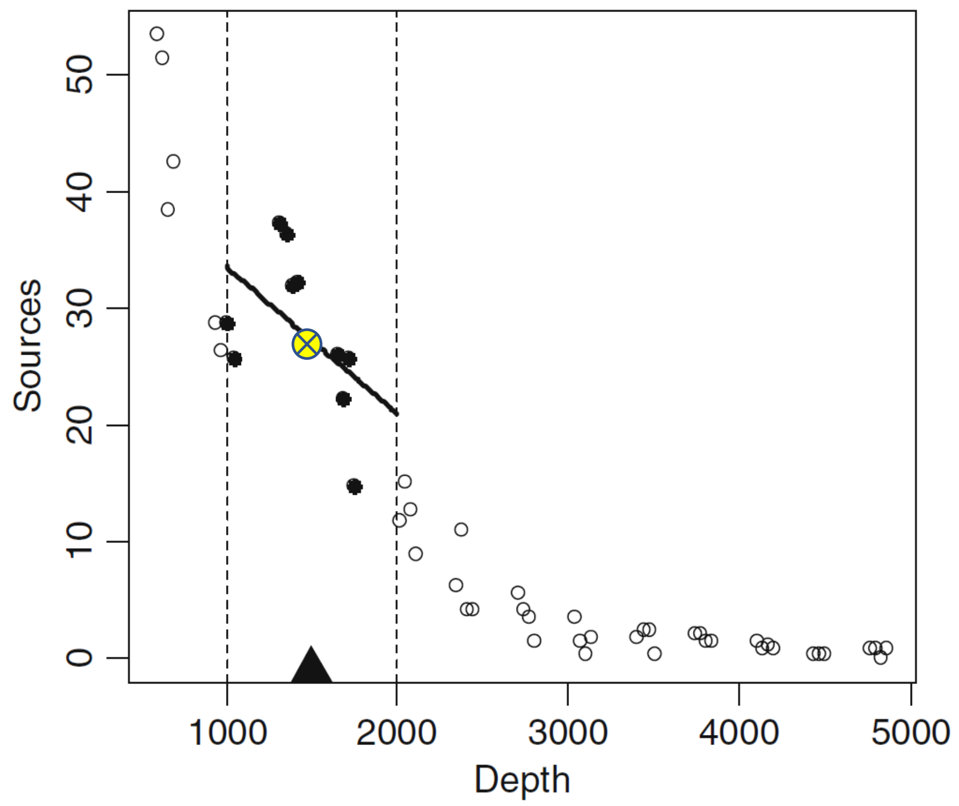
- Desventajas:

- La linealidad generalmente no es la regla en la naturaleza.

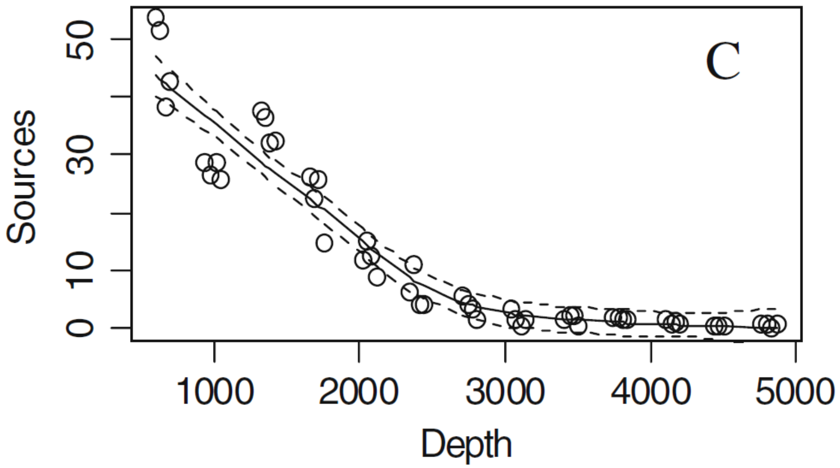




Regresión no paramétrica

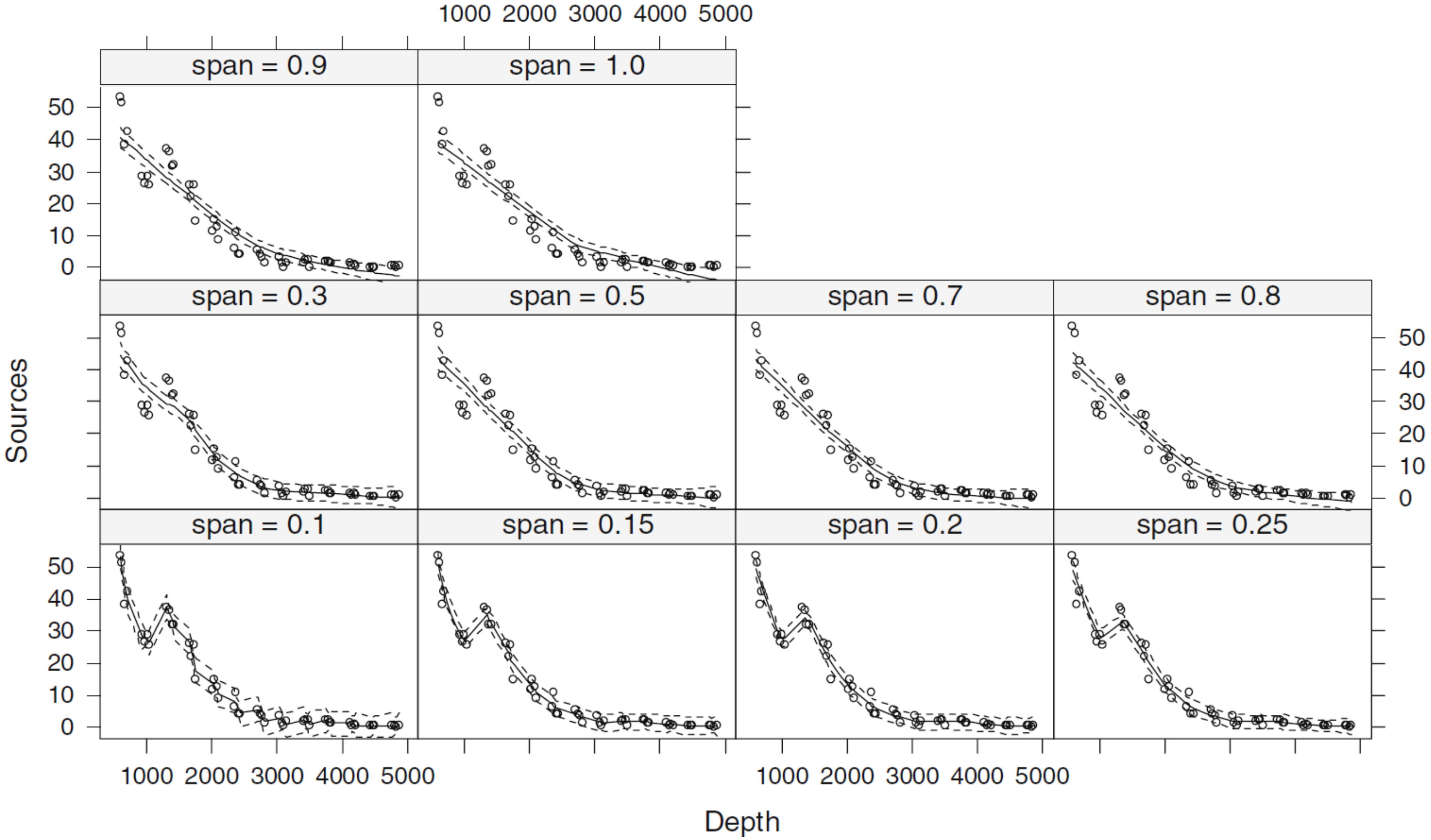


1) Se selecciona un valor de x (“target”) y se determina una “ventana”.
3) Se ajusta una regresión lineal (local). El valor esperado para x es el valor que se encuentra sobre la recta.
4) Se repite el procedimiento para distintos valores de x.



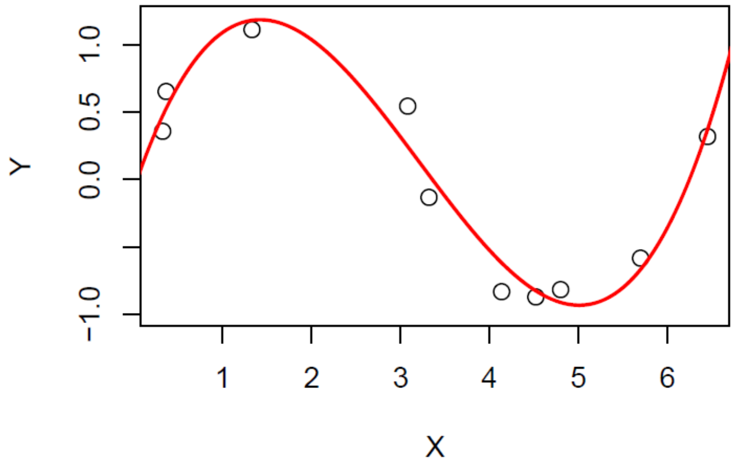
Regresión no paramétrica

Problema → ancho de la ventana (“span width”)

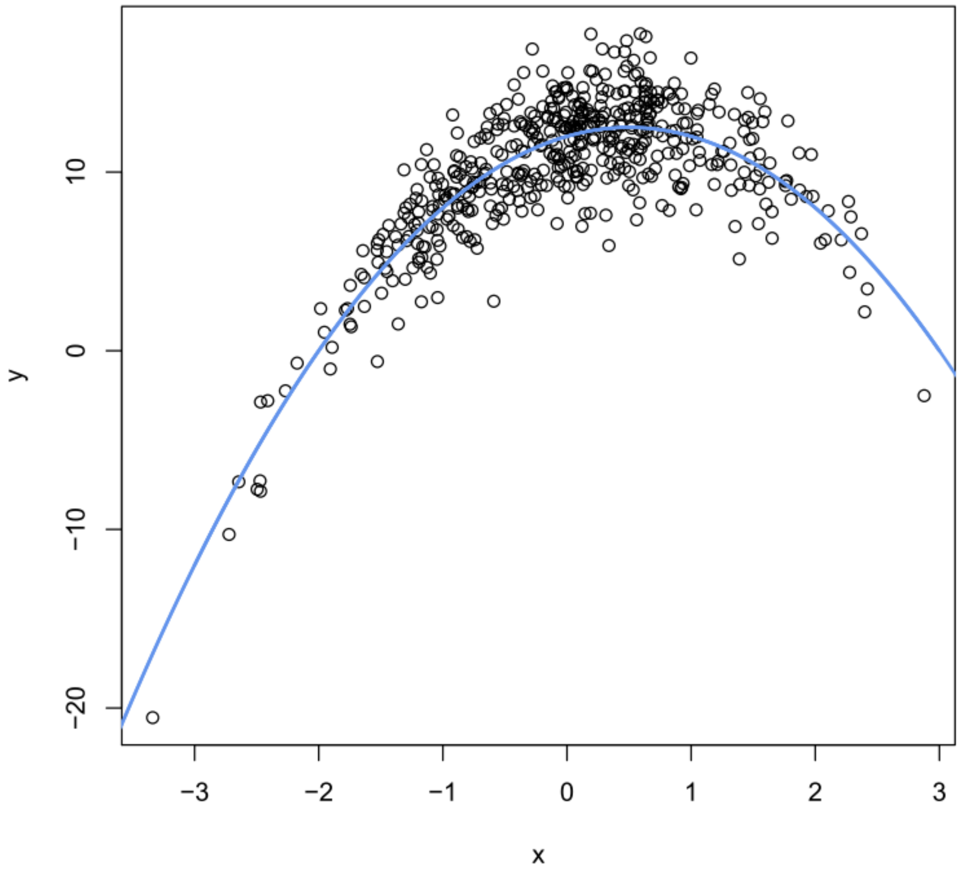


Regresión polinómica

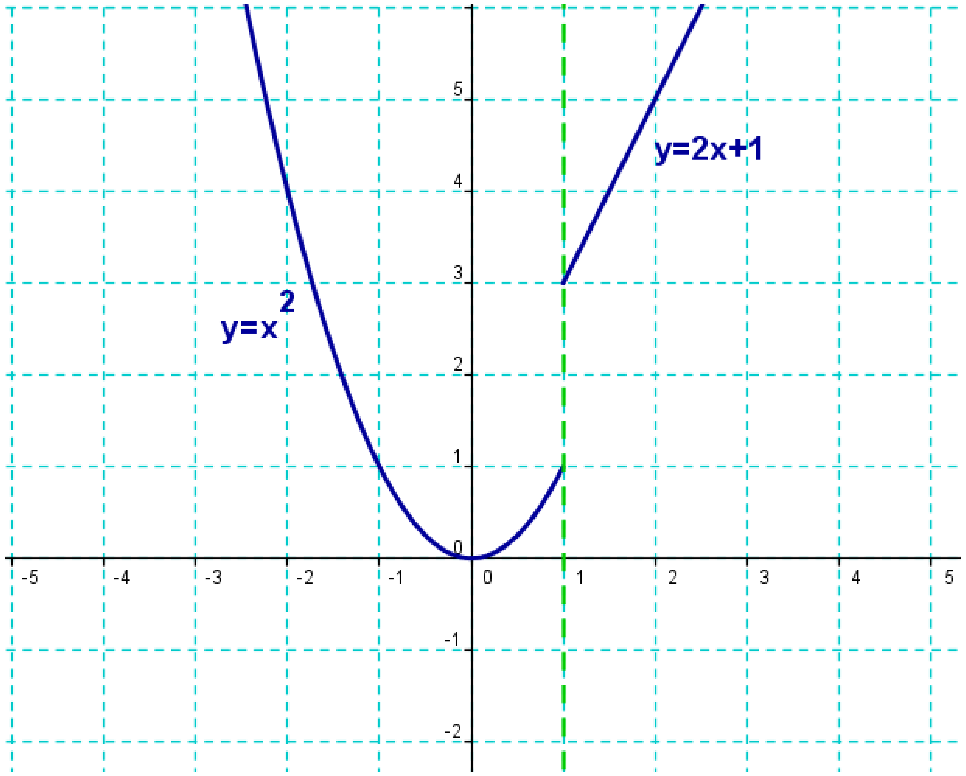
$$\hat{y} = a + b_1 x + b_2 x^2$$



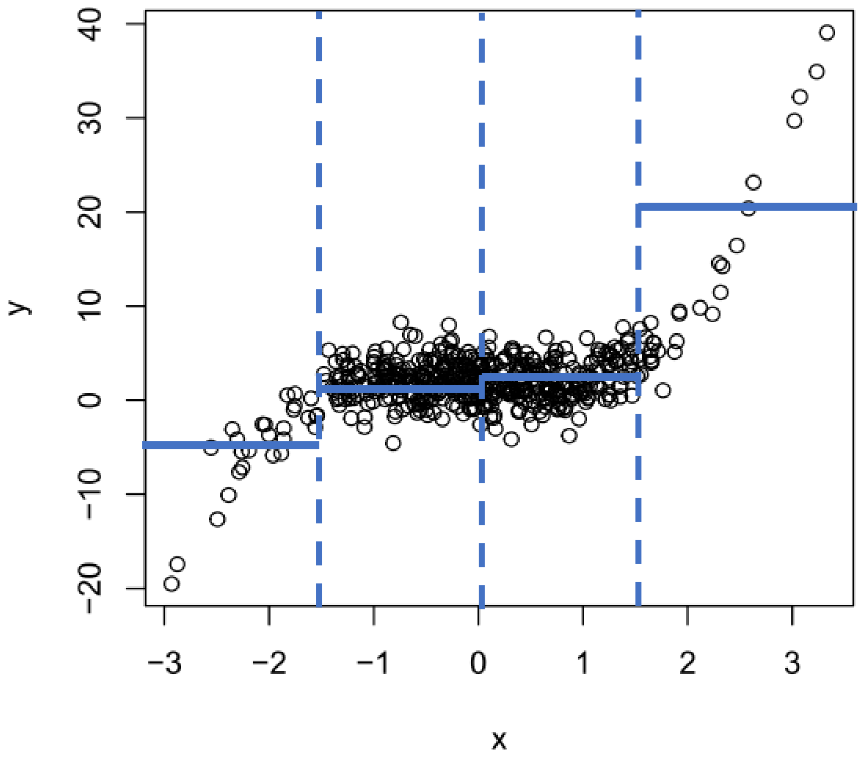
$$\hat{y} = a + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$



Funciones a trozos

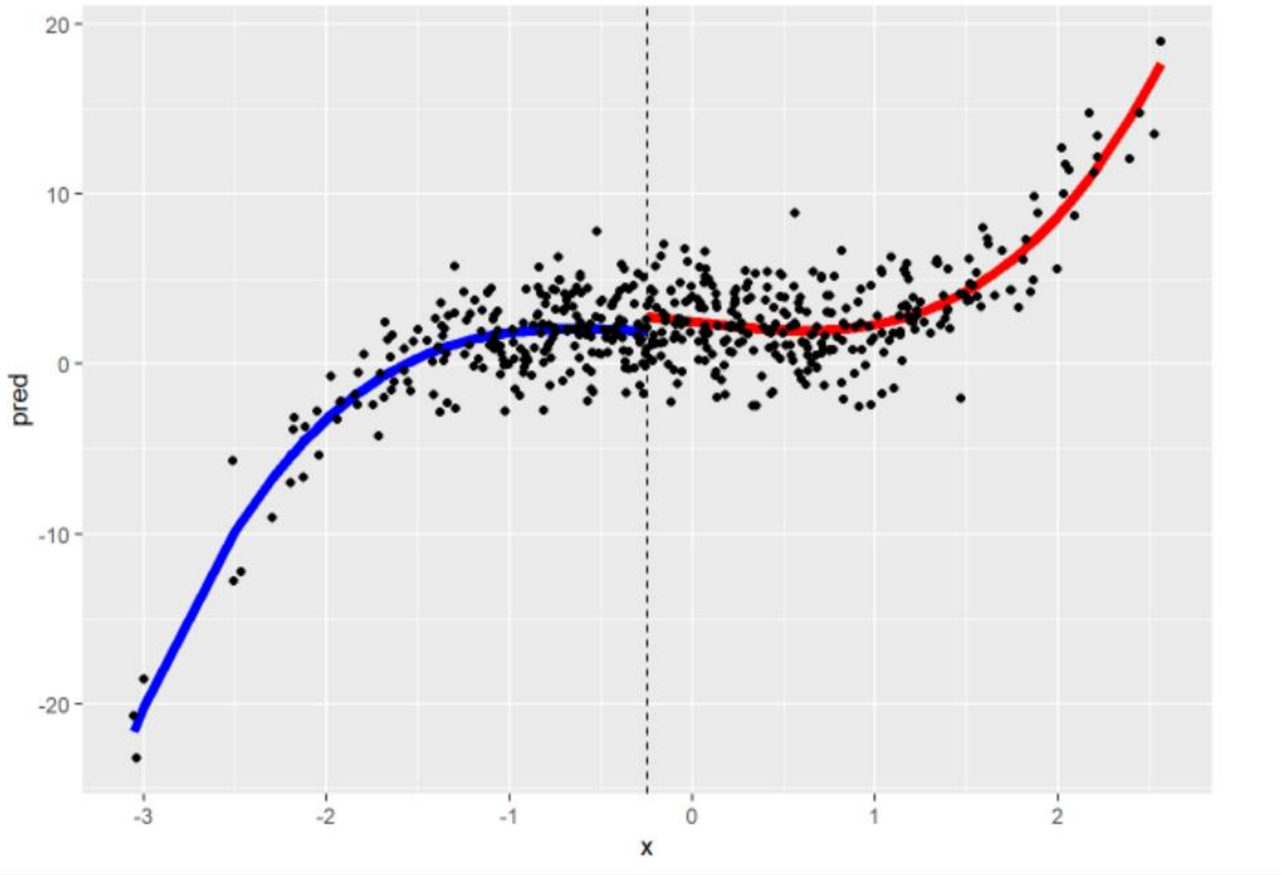


$$y = \begin{cases} x^2, \text{ si } -\infty < x < 1 \\ 2x+1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\hat{y} = \begin{cases} -5, \text{ si } x < -1.5 \\ 1, \text{ si } -1.5 \leq x < 0 \\ 2, \text{ si } 0 \leq x < 1.5 \\ 20, \text{ si } 1.5 \leq x \end{cases}$$

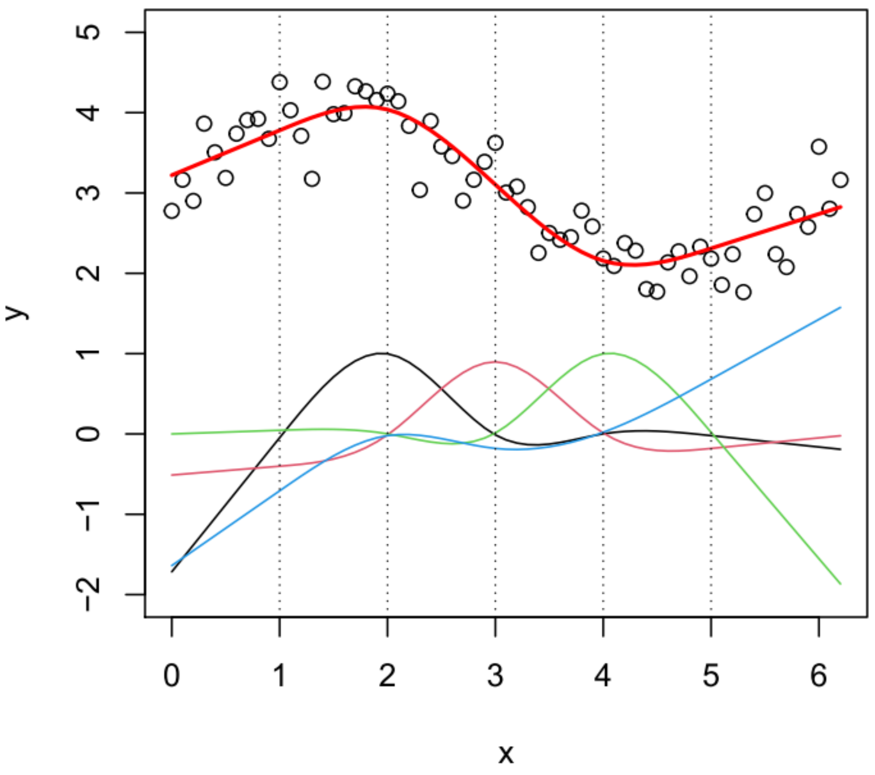
Funciones a trozos



Splines (= funciones “suaves”)

Funciones compuestas de funciones más simples (funciones base)

Funciones base y splines



$$\hat{y} = s(x) = \beta_0 b_0(x) + \beta_1 b_1(x) + \beta_2 b_2(x) + \beta_3 b_3(x)$$

Función base

$$b_0(x) = 1$$

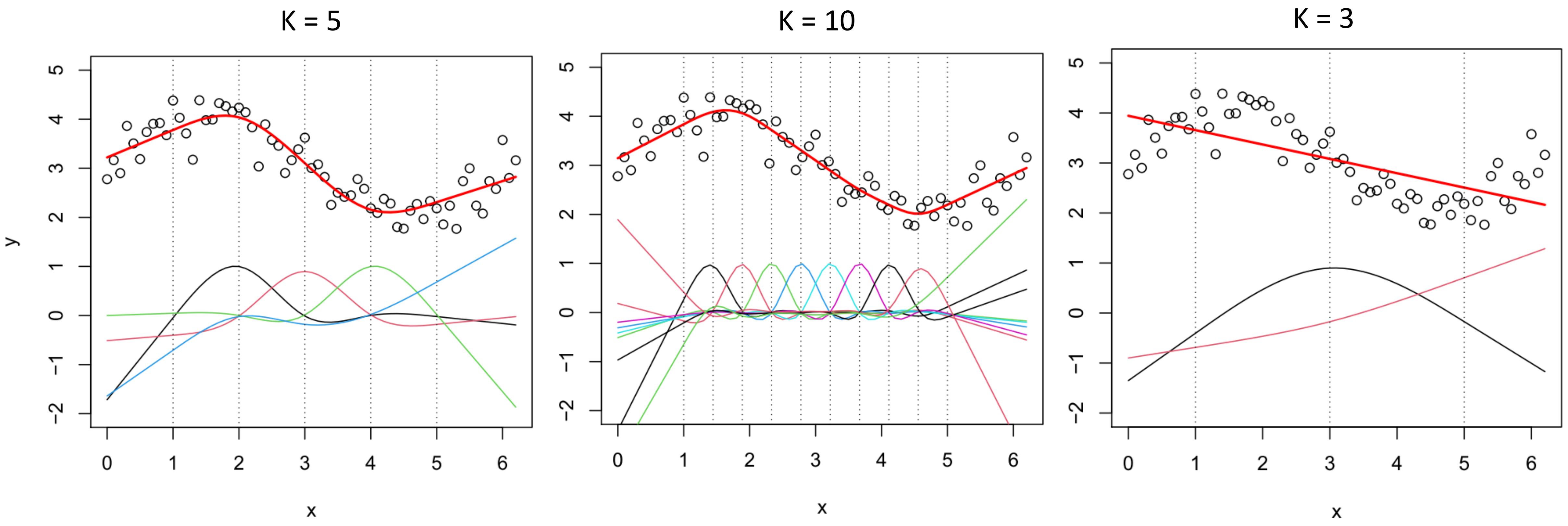
$$b_1(x) = x$$

$$b_2(x) = x^2$$

$$b_3(x) = x^3$$

$$s(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

Funciones base y splines



Splines

- ***Splines de regresión***
    - Cúbicos
    - B-splines
    - Naturales
    - Cíclicos
    - Thin-plate splines
- ***Splines penalizados (= de suavizado)***

Splines (de regresión) cúbicos

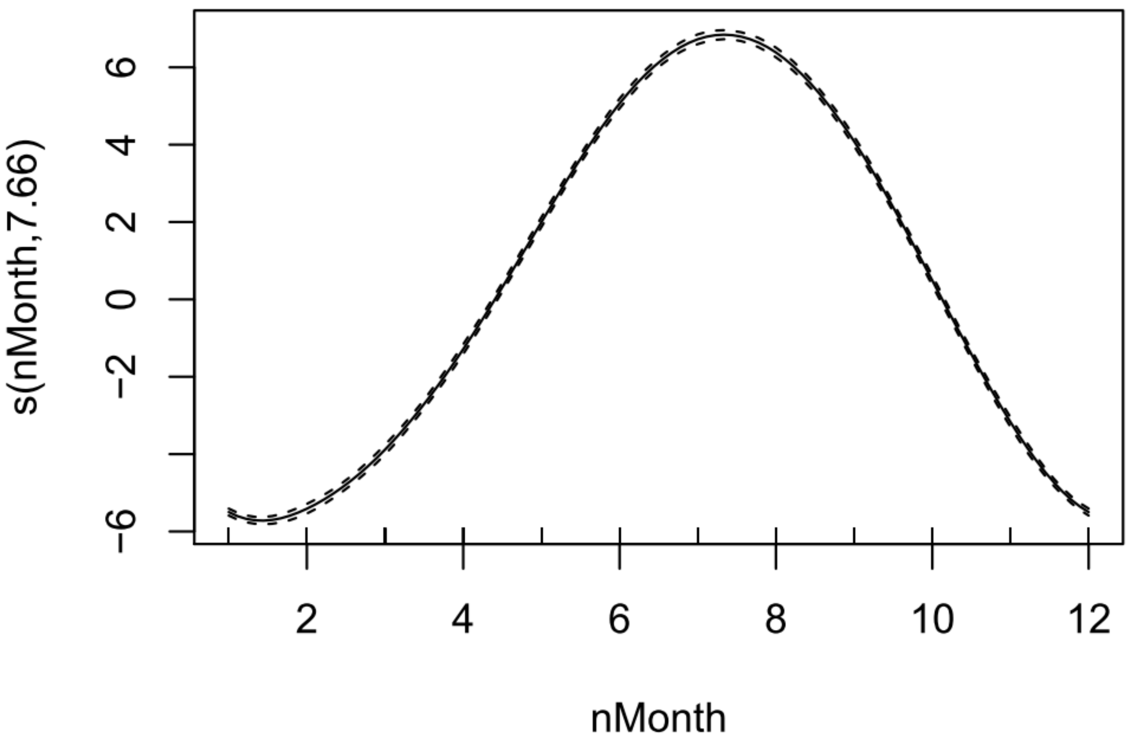
- Polinomios a trozos de grado 3.
- Tienen restricciones que garantiza que la curva sea *suave* en los nodos.
- 4 + k grados de libertad

$$s(x) = \hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x, + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 \left(x - x_1^*\right)^3 + \beta_5 \left(x - x_2^*\right)^3 + \beta_6 \left(x - x_3^*\right)^3$$

Splines naturales

- Los splines pueden tener alta varianza en los límites del predictor.
- Restricción adicional en los extremos: función lineal.

Splines cíclicos

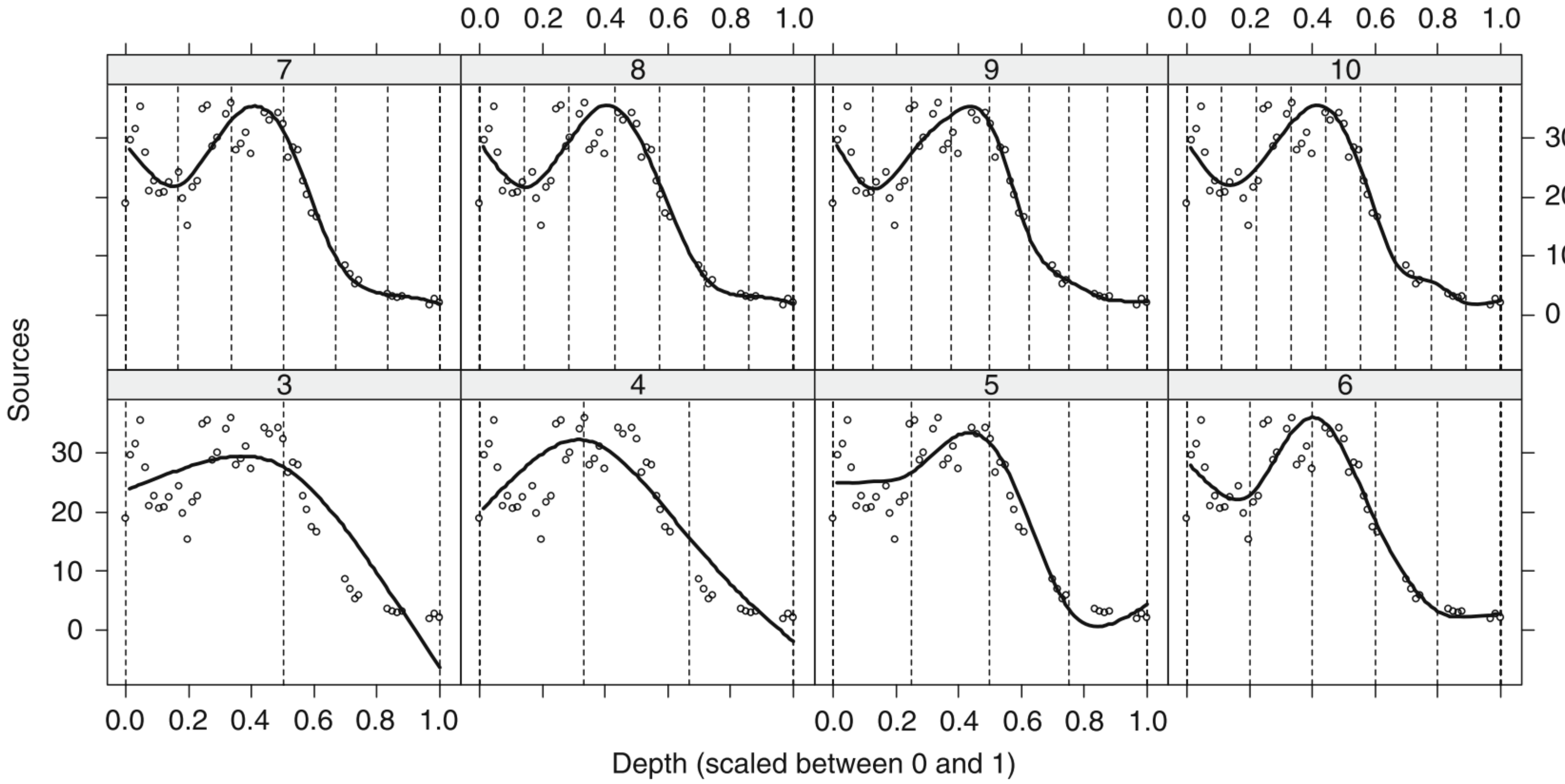


¿Por qué son mejores?

- Polinomios → alto grado para dar una curva flexible
- Splines → aumentamos el nº de nodos sin cambiar el grado

¿Cuántos nodos usar?

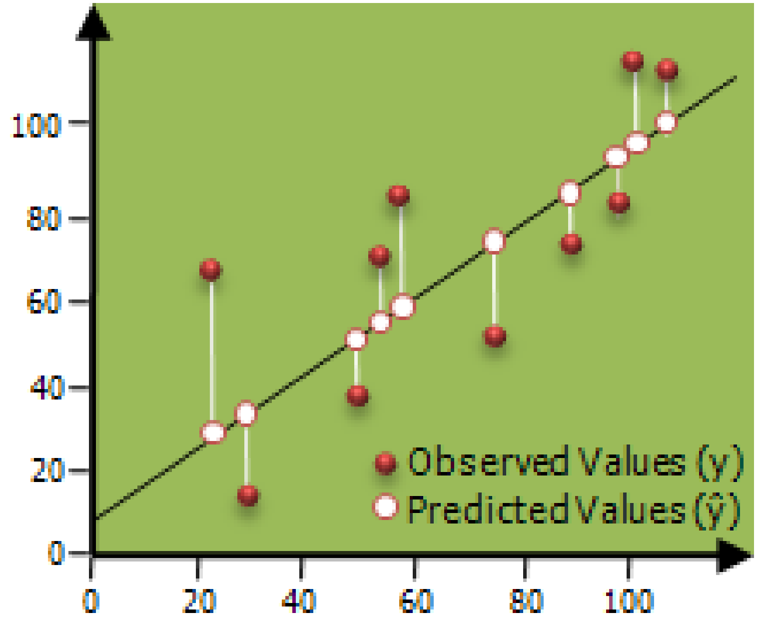
- Número de divisiones + 2 extremos
- ↑ k ↓suavidad

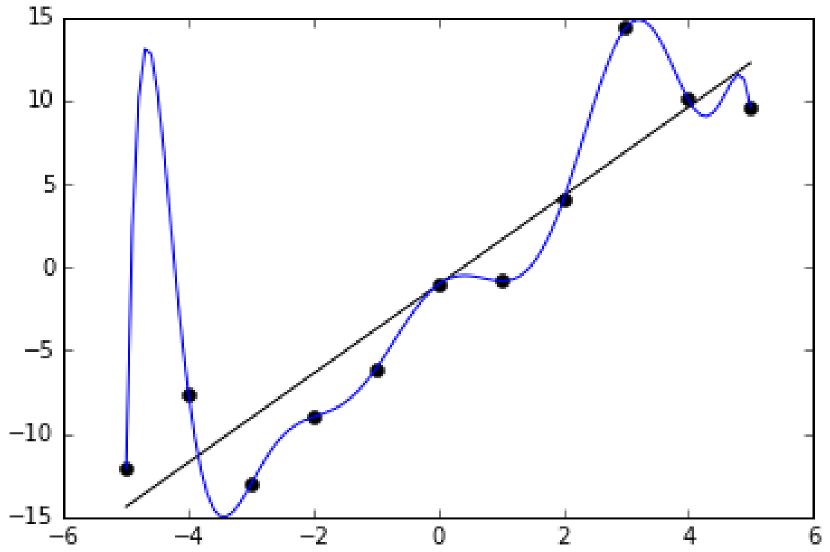


Splines penalizados (de suavizado)

- Enfoque diferente a los splines de regresión

$$SCE = \sum (y - \hat{y})^2$$
$$= \sum (y - f(x))^2$$





Queremos que SCE sea mínimo pero al mismo tiempo, que la curva sea suave

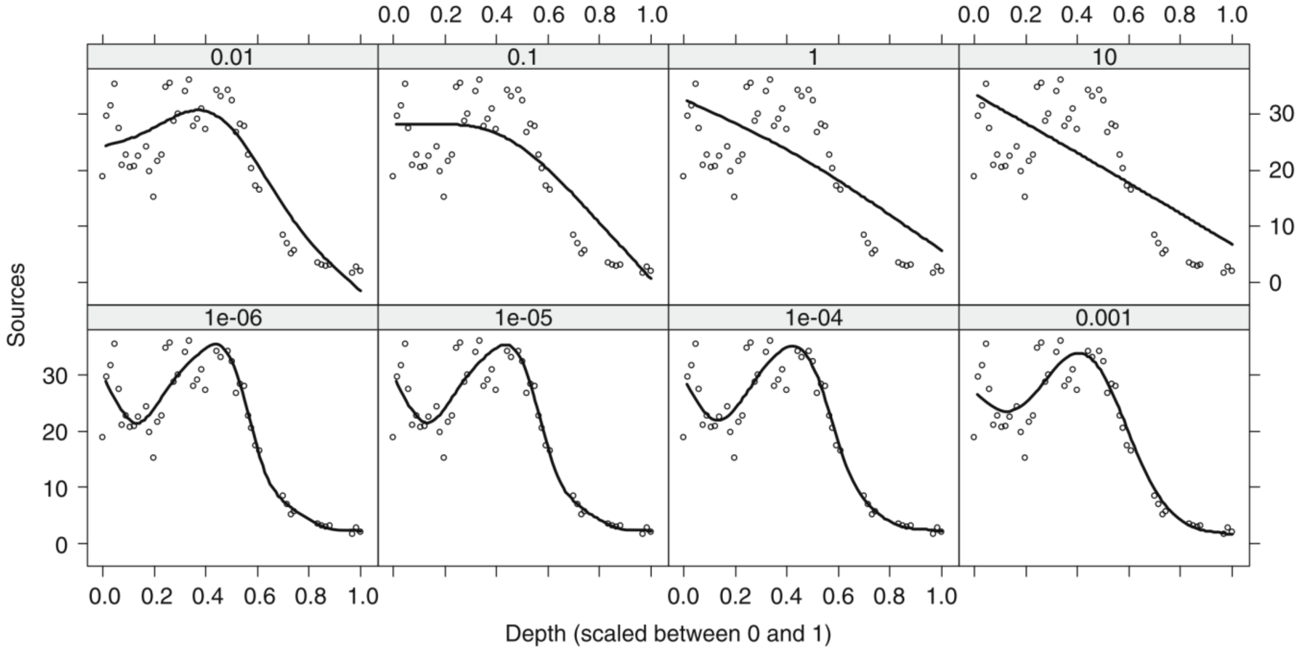
Splines penalizados

$$\sum \left(y - f(x)\right)^2 + \text{penalización}$$

$$\sum \left(y - f(x)\right)^2 + \lambda \int g''(t)^2 dt$$

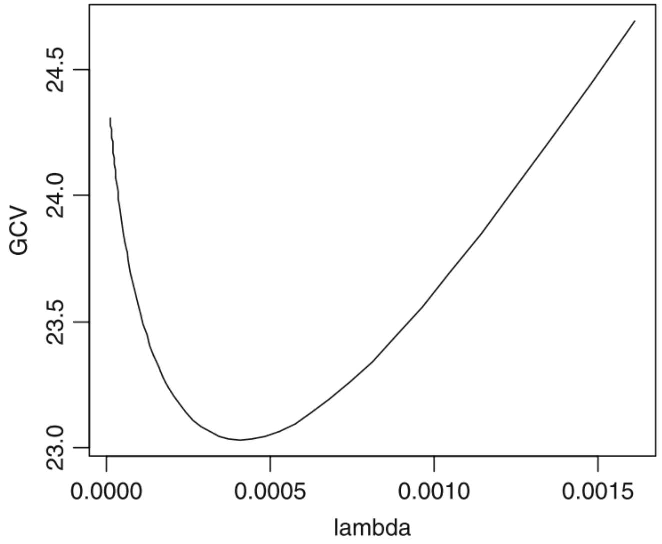
SCE + λ × rugosidad

Parámetro de ajuste



Validación cruzada

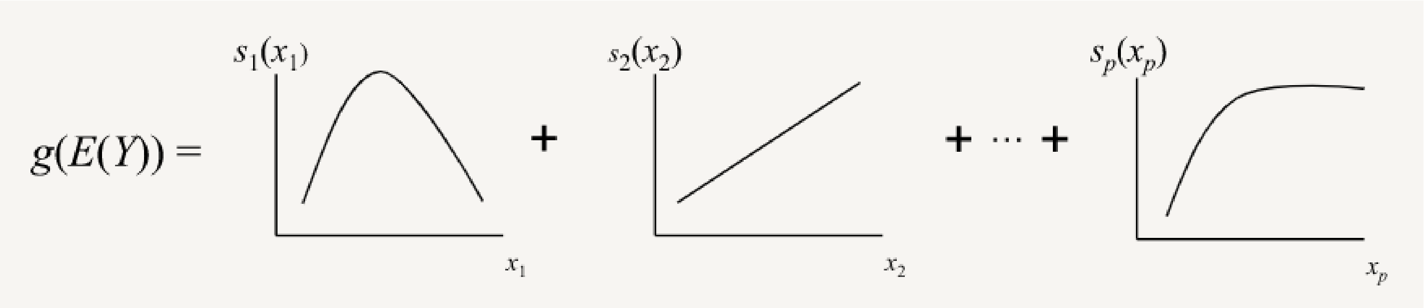
- Minimizar el valor de λ.
- Validación cruzada “dejando uno fuera” (= validación cruzada ordinaria, LOOCV)
- Sacamos una observación, ajustamos el spline con un valor de λ (n – 1 observaciones) y predecimos la observación que dejamos fuera. Repetir n veces y calcular SCE.
- Proceso demandante si n es grande → GCV
- Grados de libertad efectivos: ↑edf ↓lineal



Modelos aditivos generalizados

$$f\left(\hat{y}\right) = b_0 + s_1\left(x_1\right) + s_2\left(x_2\right) + \ldots + s_n\left(x_n\right)$$

- Familia exponencial
- Función de enlace



Modelos no paramétricos

Modelos aditivos generalizados

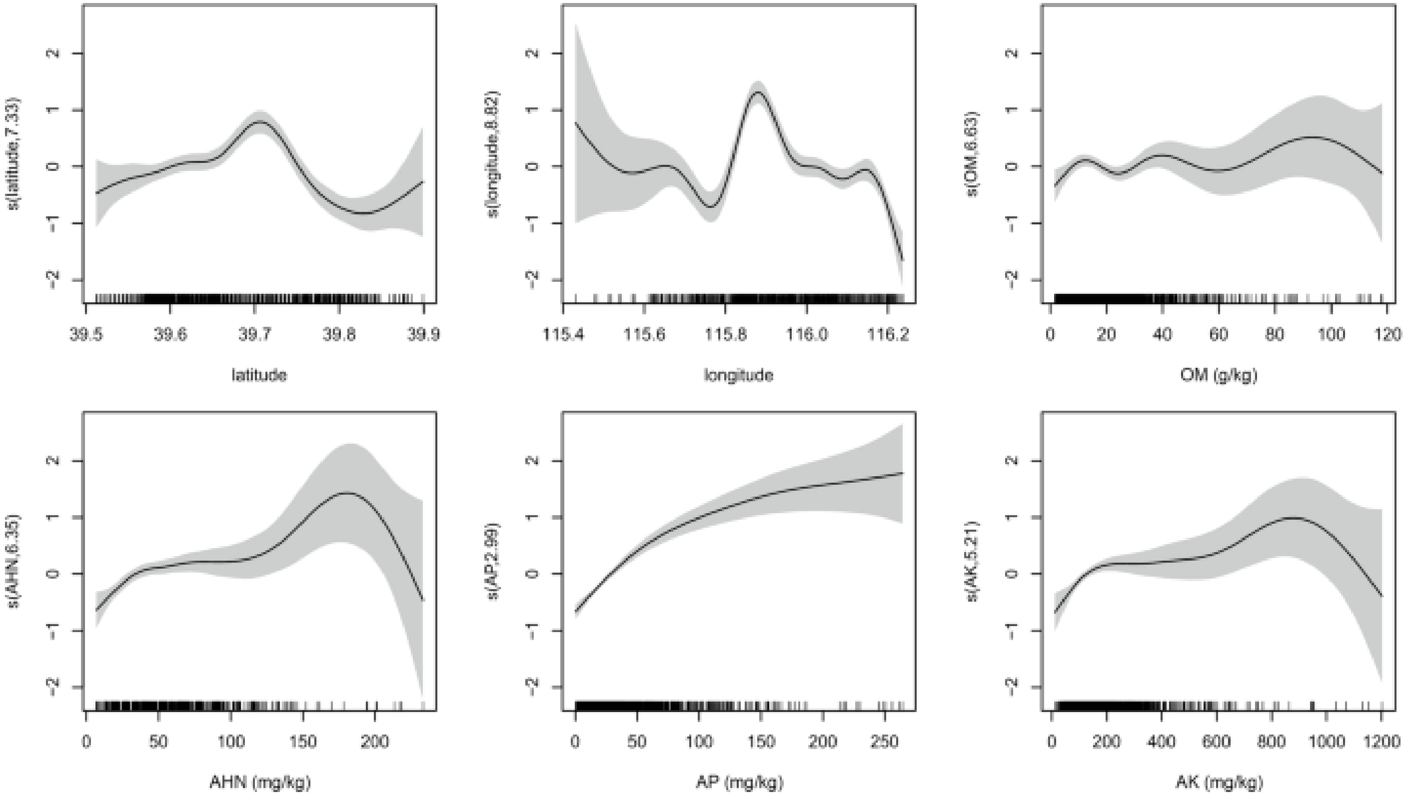
$$\underbrace{s(x) = \beta_0 + \beta_1 b_1(x) + \beta_2 b_2(x) + \beta_3 b_3(x)}$$

$$\hat{y} = \beta_0 + s(x_1) + s(x_2) + \ldots + s(x_n)$$

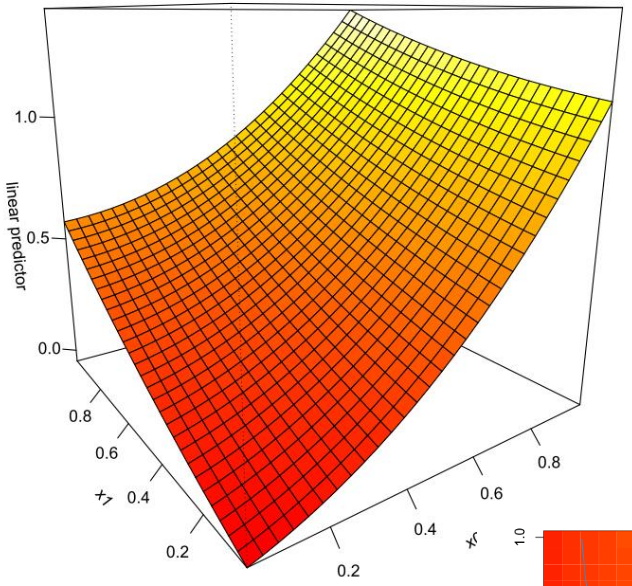
No tenemos una ecuación

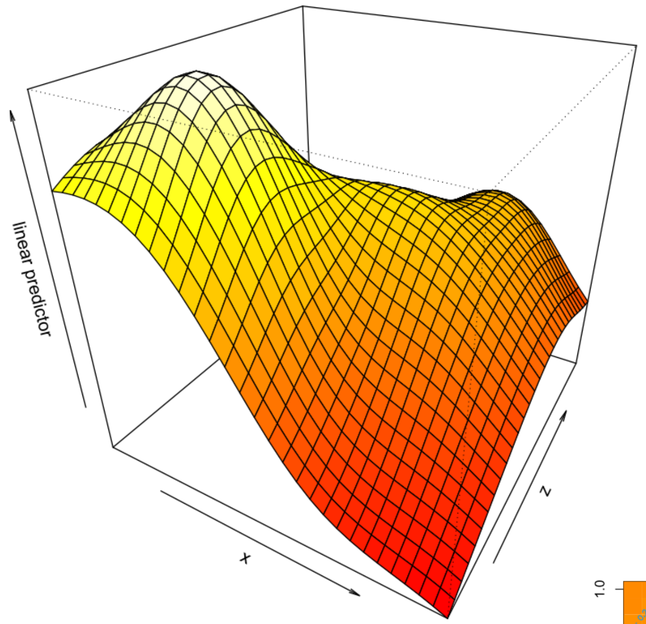
Modelos aditivos generalizados

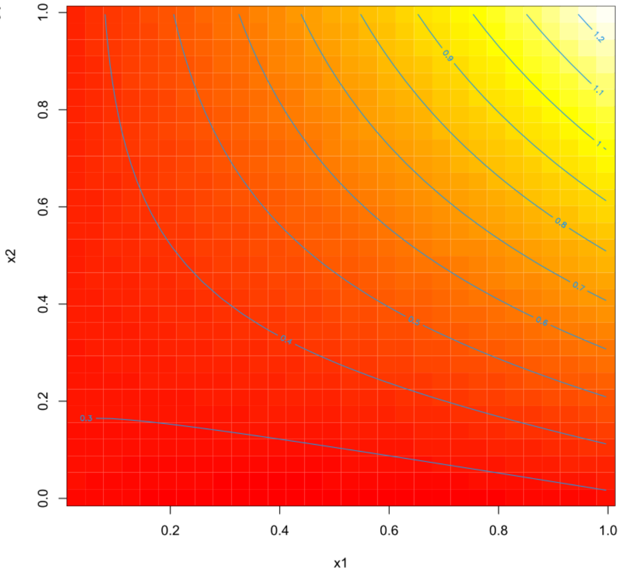
- En la práctica…
- No nos interesan los coeficientes.
- Nos interesa los patrones entre variables y los grados de libertad efectivos.

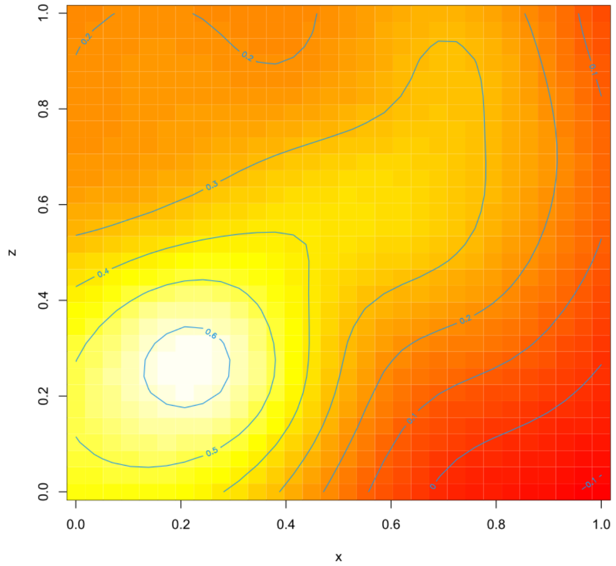


Modelos aditivos generalizados









Interacciones

(1) $x_1 \times x_2$

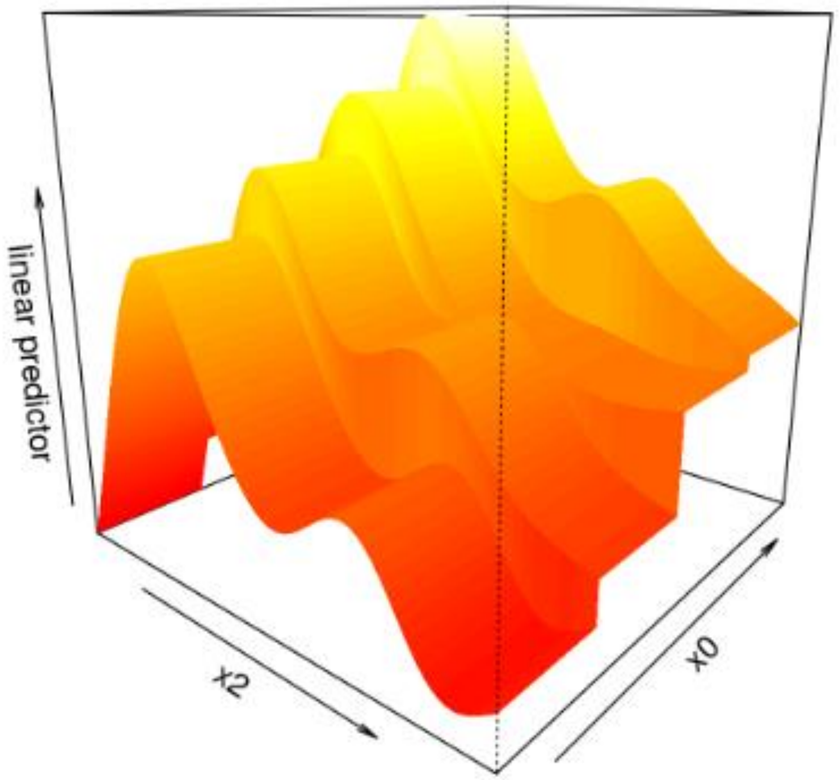
(2) $s_1(x_1) \times x_2$

(3) $s_1(x_1) \times s_1(x_2) = s_1(x_1, x_2)$

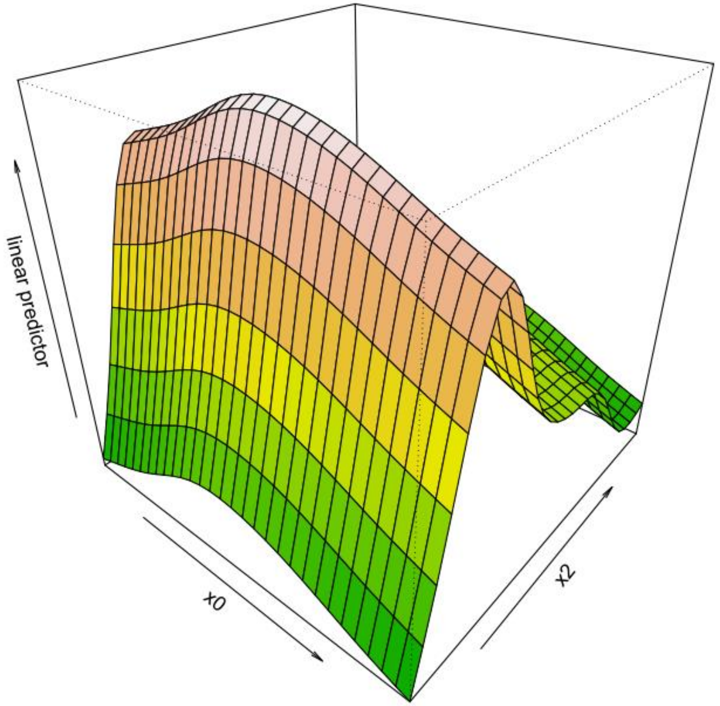
(4) $s_1(x_1) \times s_2(x_2) = s_{12}(x_1, x_2) \rightarrow$ Producto tensorial

Interacciones

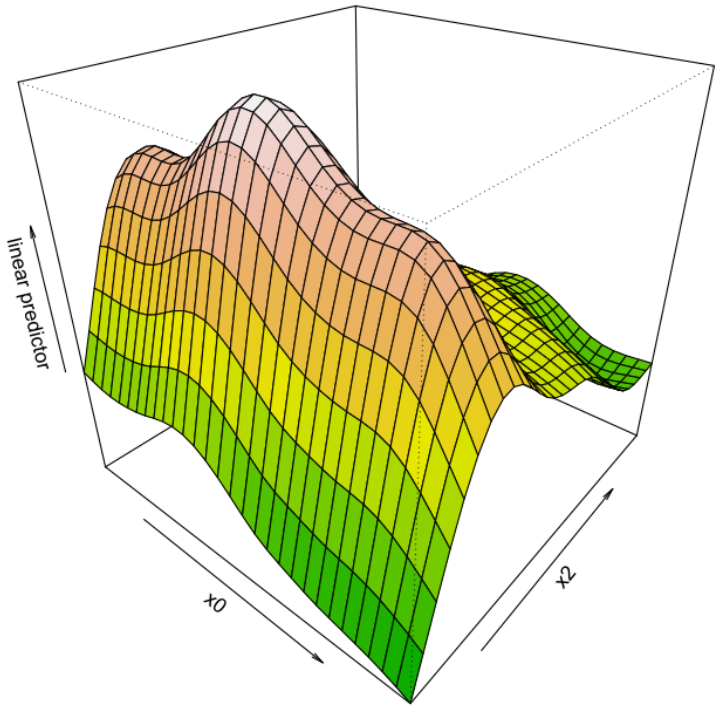
$$\hat{y} = \beta_0 + s(\text{largo}) + s(\text{ancho}) + \beta_3 \text{disturbio}$$



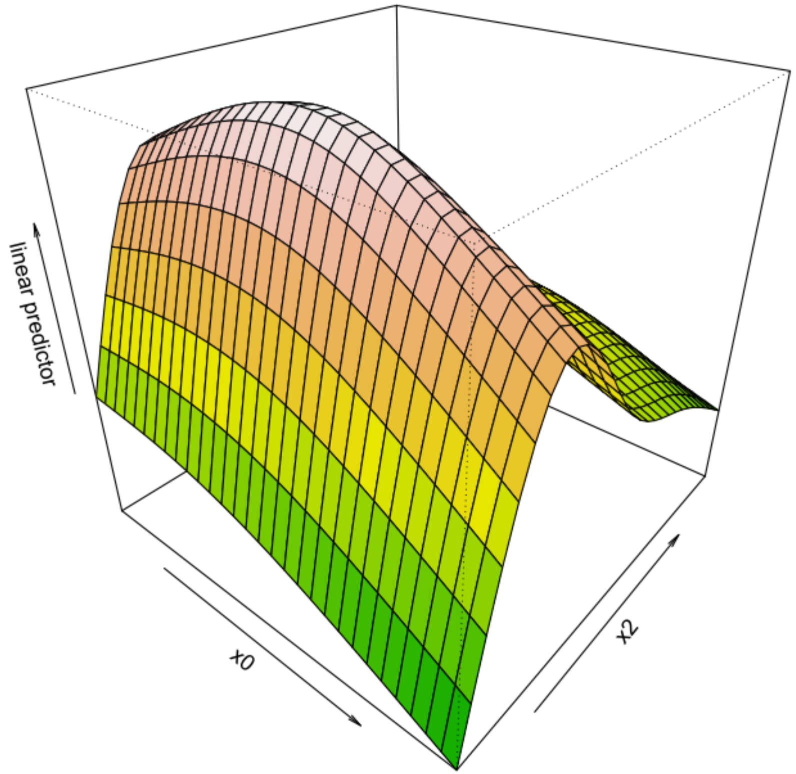
Interacciones



Sin interacción



$s_1(x_1, x_2)$



$s_1(x_1) \times s_2(x_2)$

Modelos aditivos generalizados

- Paquetes:

gam

VGAM

gamm4

bmrs

mgcv → simplicidad, GCV, gamms (17 splines)

gratia → gráficos

Modelos aditivos generalizados

- Test de hipótesis

M: $y = s(x1) + s(x2)$

Devianza M → $y = s(x1) + s(x2)$

Devianza M0 → $y = s(x1)$

$D_M - D_{M0}$ → test de F