

به نام او

تمرین ۲ درس شبیه سازی

عادل محمدپور

تولید اعداد تصادفی از توزیع نمایی

این تمرین در واقع یک آزمایشگاه است. مانند آزمایشگاه فیزیک. شما سعی می کنید قوانین حاکم بر طبیعت را در آزمایشگاه فیزیک دوباره کشف کنید یا تحقیق کنید. آزمایشگاه آمار نیز چنین است. آموزش آمار بیشتر شبیه فیزیک و شیمی است نه ریاضی محض. ابزار ما در آزمایشگاه آمار شبیه تعبیر احتمال از طریق فراوانی نسبی است. ما می دانیم اگر سکه ای را بارها پرتاب کنیم می توانیم احتمال شیر آمدن آن را از طریق فراوانی نسبی محاسبه کنیم. در واقع بیشتر مسائلی که ما در آمار با آن رو به رو می شویم بر این اساس استوار هستند که اگر این کار بارها و بارها انجام دهیم به چه نتیجه خواهیم رسید. شبیه سازی اساس آزمایشگاه آمار است. برای اینکه بتوانیم به قضایای آمار ایمان بیاوریم راه به جز شبیه سازی نداریم. در این آزمایشگاه به یک سؤال ساده پاسخ می دهیم و قانون ضعیف اعداد بزرگ برای توزیع نمایی بررسی می کنیم. در آزمایشگاه های بعدی قضیه حد مرکزی، خطای آزمون فرض و بازه اطمینان را محاسبه خواهیم کرد. شما می توانید از کلاس جلو باشید یا همراه کلاس.

ابتدا با استفاده از روش تابع توزیع می خواهیم از یک متغیر تصادفی نمایی اعداد تصادفی تولید کنیم. سعی کنید کد زیر را با توجه به توضیحات داده شده در بعضی از دستورها حدس بزنید. مراحل کار به این صورت است:

۱. ابتدا از یک توزیع یکنواخت ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید می کنیم

۲. با توجه به آنکه در روش تابع توزیع با یک منهای توزیع یکنواخت نیاز داریم این متغیر تصادفی را محاسبه و مقادیر آن را در متغیری به نام  $u1$  ذخیره کرده ایم. و حالا می توانیم متغیر تصادفی نمایی را تولید کنیم.

۳. برای اینکه مطمئن شویم این کار را درست انجام داده‌ایم هیستوگرام داده‌های تولید شده را رسم می‌کنیم. چون می‌خواهیم هیستوگرام را با تابع چگالی توزیع نمایی مقایسه کنیم هیستوگرام فراوانی نسبی را رسم کرده‌ایم و روی آن تابع چگالی توزیع نمایی را رسم می‌کنیم.

۴. رسم تابع در R مانند رسم تابع روی کاغذ است. ابتدا محور افقی را اصطلاحاً گرید بندی می‌کنیم توزیع نمایی برای اعداد مثبت تعریف شده است عدد صفر تا ده را به ۱۰۰ قسمت تقسیم کرده‌ایم و تابع چگالی متغیر تصادفی نمایی را در این نقاط محاسبه بر حسب هم رسم کرده‌ایم.

فعلاً با مقایسه چشمی به این نتیجه می‌رسیم که تابع چگالی رسم شده برازنده هیستوگرام است در جلسات بعد روش دقیق‌تری ارائه خواهد شد.

```
n=1000 # sample size
```

```
u=runif(n)
```

```
u1=1-u
```

```
e1=-log(u1)
```

```
hist(e1,probability=T) # Use option probability=T to plot relative frequency histogram
```

```
x=seq(0,10,0.1)
```

```
lines(x,dexp(x,1))
```

با این مقدمه می‌خواهیم آزمایشگاه را شروع کنیم. ابتدا آزمایش قبل را برای توزیع نمایی با پارامتر برابر رقم آخر شماره دانشجویی خود تکرار کنید اگر رقم آخر شماره دانشجویی شما صفر است عدد نیم را در نظر بگیرید.

حال می‌خواهیم قانون ضعیف اعداد بزرگ را برای توزیع نمایی تحقیق کنیم. قانون ضعیف اعداد بزرگ می‌گوید میانگین نمونه به میانگین جامعه همگراست. میانگین متغیر تصادفی که شما از آن اعداد تصادفی تولید کرده‌اید چقدر است؟ میانگین اعداد تصادفی تولید شده چقدر است؟ این دو عدد به هم نزدیک هستند؟ برای آنکه بتوانید همگرایی را نشان دهید میانگین نمونه را برحسب اندازه نمونه رسم کنید. یعنی عدد تصادفی اول را که تولید کرده‌اید در مقابل عدد یک قرار داد. میانگین اعداد تصادفی تولید شده اول و دوم را محاسبه کنیم و آن را در مقابل عدد ۲ رسم کنیم. این کار را ادامه دهید و آخرین عدد میانگین هزار عدد است که آن را در مقابل عدد ۱۰۰۰ رسم خواهید کرد. اعداد رسم شده را به هم وصل کنید همگرایی میانگین نمونه به یک عدد که در واقع میانگین جامعه است را نشان داده‌اید. میانگین‌ها را بر روی محور عمودی اندازه نمونه را بر روی محور افقی نشان دهید. از دستور `plot` برای رسم استفاده کنید با خط بهم وصل کنید نوع خط را می‌توانید مشخص کنید. `plot(x,y, type="l", lty=1)` برای دیدن جزئیات هر دستور با نوشتن ؟ قبل از دستور راهنمای آن را ببینید.

بعد از چه عددی همگرایی رخ داده است؟

آیا می‌توانید همگرایی واریانس نمونه به واریانس جامعه را به همین روش نشان دهید؟