FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

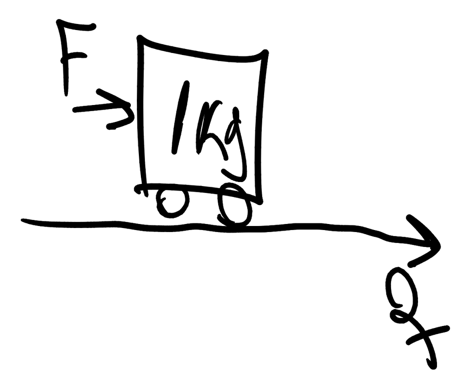
Introducción a Sistemas de Control

ALEJANDRO S. GHERSIN

ej.

$\dot{x} = f(x, u)$

$a = \frac{d^2}{dt} q = \ddot{q} \quad v = \dot{q}$



$F = m . a$

1

el orden depende de si busco la posición o la velocidad.

$X_1 = q \quad X_2 = v = \dot{q}$

$\dot{X}_1 = X_2$

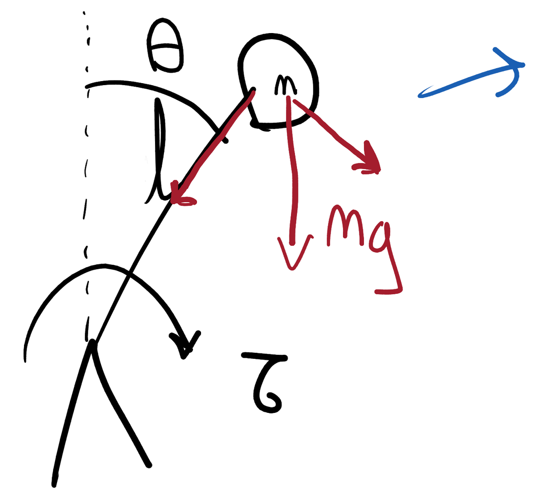
$\dot{X}_2 = a = \frac{F}{m} = u$

$u = F$

$Y = X_1$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = u\end{array}\right\} \longrightarrow \dot{x} = AX + Bu \qquad Y = Cx + Du$$

Pendulo Invertido (Sist. de 1° de Libertad)



Peso Tangencial y Radial

Par de fuerza sobre el pendulo

$J\ddot{\theta} = \tau + mgl\,\mathrm{sen}(\theta)$

Inercia del pendulo depende de l y m

$mgL = 1$

$J = 1$

$\ddot{\theta} = \mathrm{Sen}(\theta) + \tau$

$x_1 = \theta$

$x_2 = \dot{\theta}$

$\dot{X}_1 = \dot{\theta} = X_2$

$u = \tau$?

$\dot{X}_2 = \ddot{\theta} = \mathrm{Sen}(X_1) + u$

para pequeños angulos

$\mathrm{Sen}(X_1) = X_1$

Sistemas en Espacio de Estados

El modelo en espacio de estados está dado por la ecuación diferencial de primer orden "n" dimensional:

Vector de N dimensiones.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)$$

Pueden ser no lineales (en C1 casi no)

Acá no puede aparecer la derivada de x

junto con la ecuación de salida

Pueden ser no lineales (en C1 casi no)

$$y = h(x,u,t)$$

donde

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y
- $u(t) \in \mathbb{R}^p$, es el vector de entradas → a lo largo de todo control ⇒ en C1 es escalar ($p=1$)
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$, es el vector de salidas → ⇒ en C1 es escalar ($q=1$)

SISO = Sing. Input Sing. Output

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} u$$

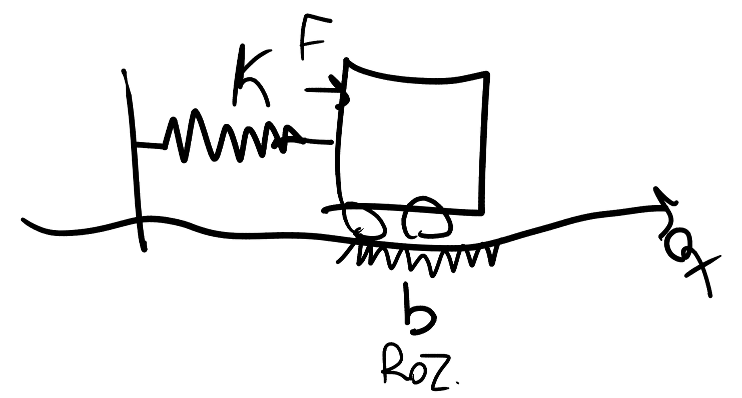
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$ $Y = \frac{1}{s^2} u \ (1)$

ej: 1- Suponer que la salida es V (velocidad)
2- Agregarle un resorte con constante de restitución K y

2- a) $Y = x$

b) $Y = v$

2-



$$\boxed{F - Kx - bv = m.a}$$

sen$(x_1) = x_1$

$\dot{x} = Ax + Bu$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sistemas en Espacio de Estados

También se puede tener el caso donde ni la "f"

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$ ⇒ eq de estados (Diferencial)

ni la "h"

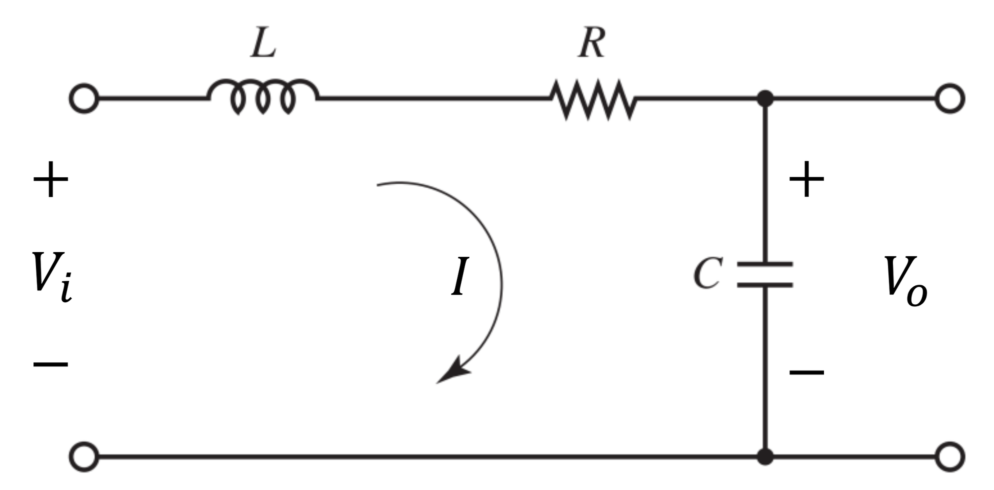
$$y = h(x,u)$$ ⇒ eq de salida

dependen de "t".

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas *variables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geqslant t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geqslant t_0$.

Obsérvese que el concepto de estado no está limitado a sistemas físicos. Es aplicable a sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros.

Un ejemplo simple



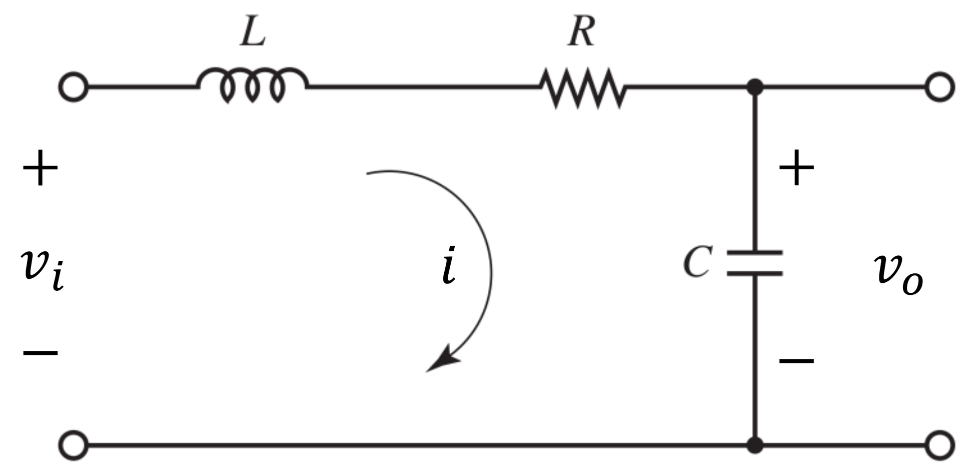
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{sC}}}{\frac{1}{\mathrm{sC}} + \mathrm{sL} + \mathrm{R}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{s^2LC} + \mathrm{sCR} + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \xi = \frac{\frac{R}{L}}{2\omega_n}$$

Un ejemplo simple

Circuito de 2° orden ⇒ V. de estado de 2° orden.



$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C$
$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L$
$v_L = v_i - R\, i_L - v_C$
$i = i_R = i_C = i_L$

Entrada

V. de estado

Se suelen usar de VE Las Tensiones de los caps y las corrientes de los Ind.

$$v_o = v_C$$
$$x_1 = v_C, x_2 = i_L$$
V. de estado.
$$u = v_i, y = x_1$$

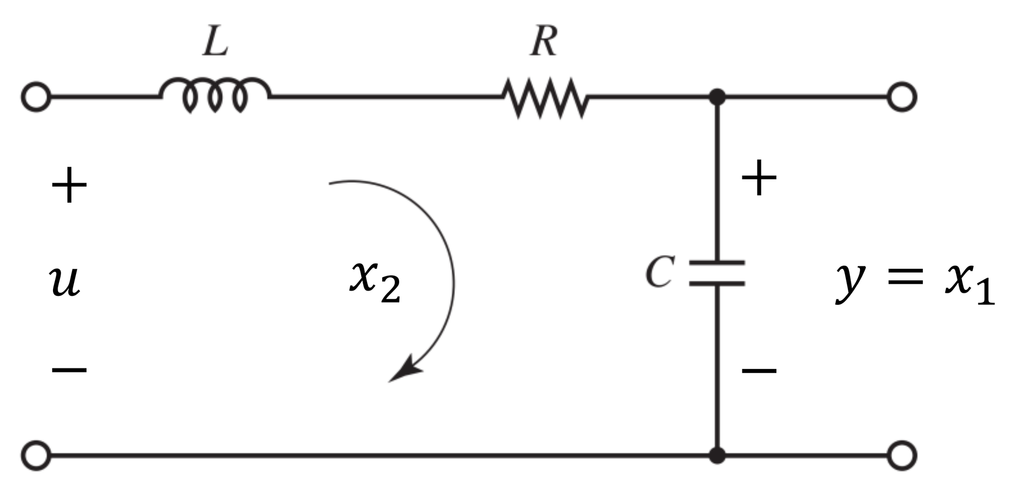
Un ejemplo simple

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u)$$

$\frac{dx}{dt}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C}\, x_2 \\ \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{bmatrix}}_{f(x,u)}$$



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Un ejemplo simple

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} x_2 \\ \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{bmatrix}$	$\dot{x} = Ax + Bu$ estados
$y = x_1$	$y = Cx + Du$ salida
$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$
$C = [1 \quad 0]$	$D = 0$

forma estandar de escribir problemas en Tiempo Invariante.

Espacio de estados a transferencia

$\dot{x} = Ax + Bu$	$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$
$y = Cx + Du$	$Y(s) = CX(s) + DU(s)$

Laplace (es LTI)

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)]}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = C\{(sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)]\} + DU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \boxed{[C(sI - A)^{-1}B + D]}U(s)$$

Transferencia en función de Mat. A, B, C, D

Ejercicio:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

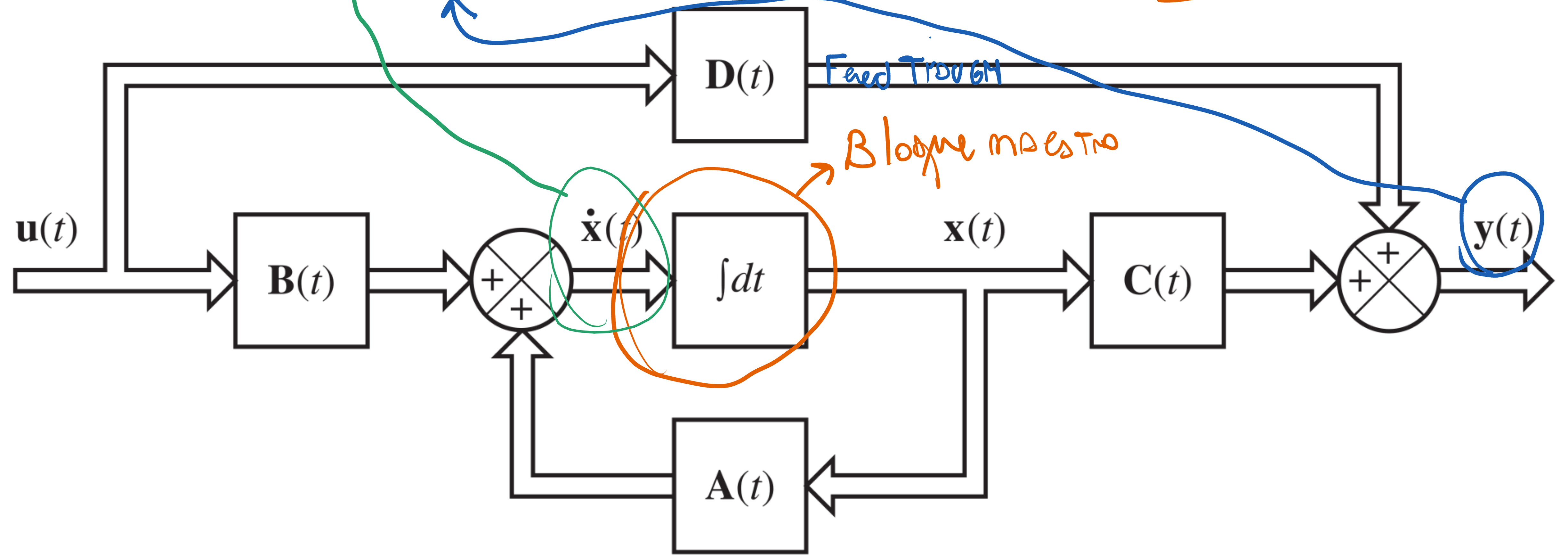
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = 0$$

Encontrar la expresión de la transferencia $Y(s)/U(s)$ en función de A, B, C y D y mostrar que da lo mismo que la obtenida por el método de las impedancias.

Modelos en Espacio de Estados:
En BLOQUES

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\right\}$$

Tiempo Variante



¿Cómo se ve que es lineal?

Lineal Tiempo Variante (LTV): Control II y Control No Lineal

$$\underbrace{\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad x(t_0) = x_0}_{} \rightarrow \text{Problema de Valores Iniciales}$$

$$\underbrace{y = C(t)x + D(t)u}_{} \quad \text{Solución del prob.}$$

$$x(t) = \Phi(\mathrm{t}, \mathrm{t_0})\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\mathrm{t}, \mathrm{t_0}) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Lineal Tiempo Invariante (LTI): Control I y Control II

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0$$

$$y = Cx + Du$$

Podemos usar la transformada de Laplace (Wiii)

El caso lineal

Lineal Tiempo Variante (LTV)
$\dot{x} = f(x,u,t) = A(t)x + B(t)u$
$y = h(x,u,t) = C(t)x + D(t)u$

Lineal Tiempo Invariante (LTI)
$\dot{x} = f(x,u) = Ax + Bu$
$y = h(x,u) = Cx + Du$

Solución de la Ec. de Estados vía Laplace (para hacer el TPO1):

Caso Escalar:

Sistema autonomo

$$\dot{x} = ax$$

$$sX(s) - x(0) = aX(s)$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s - a} = (s - a)^{-1}x(0)$$

$$\boxed{x(t) = e^{at}x(0)}$$

Caso Vectorial:

Sistema Autónomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

quiero probar esto

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}$$

Esta es la

EXPONENCIAL MATRICIAL

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

$$\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \underbrace{\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots}_{\text{Taylor de } e^{\mathbf{A}t}} = e^{\mathbf{A}t}$$

Solución de la Ec. de Estados vía Laplace

$$(sI-A)\left(\frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\frac{A^3}{s^4}+\cdots\right)=s\left(\frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\frac{A^3}{s^4}+\cdots\right)-A\left(\frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\frac{A^3}{s^4}+\cdots\right)$$

$$\left(I+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\frac{A^3}{s^3}+\frac{A^4}{s^4}\right)-\left(\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\frac{A^3}{s^3}+\frac{A^4}{s^4}+\cdots\right)=I$$

$$\left(\frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\frac{A^3}{s^4}+\cdots\right)=(sI-A)^{-1}$$

Esta es la

EXPONENCIAL MATRICIAL

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\mathbf{I}}{s}+\frac{\mathbf{A}}{s^2}+\frac{\mathbf{A}^2}{s^3}+\cdots$$

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}+\cdots=e^{\mathbf{A}t}$$

Nota Sobre la Exponencial Matricial

- Se define como una serie sobre la cual, al igual que en el caso de la exponencial escalar, se prueba la convergencia. En lo relativo a nuestro curso, daremos esta prueba por válida.

- Para el TPO1 se calculará la exponencial matricial a través de la transformada inversa de Laplace de la inversa de (sI-A), la cual existe ***para casi todo "s"***.

- Sobre la base de la exponencial matricial sacamos conclusiones de estabilidad.

- Es conveniente diagonalizar la matriz "A" o llevarla a la forma de Jordan para calcular la exponencial matricial.

Solución Forzada en el Tiempo

Dada:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad \text{con} \qquad x(0) = x_0$$

Queremos ver que:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Tiene como derivada temporal a:

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{At}x(0) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t)$$

Solución Forzada

Regla de Leibniz (Teorema fundamental del cálculo):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{f(t)}^{g(t)} H(t,\tau)d\tau = H(t,g(t))\dot{g}(t) - H(t,f(t))\dot{f}(t) + \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial}{\partial t}H(t,\tau)d\tau}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] = e^{A(t-t)}Bu(t) - 0 + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t)$$

Existencia y Unicidad

Problema de Valores Iniciales (PVI):

- Dado el PVI para el sistema autónomo

$$\dot{x}(t) = f(x,t) \text{ con } x(t_0) = x_0$$

con

existe una $x_*(t)$ que es solución, y es única.

- Dada

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \; con \; x(t_0) = x_0 \; y \; u(t) = u_*(t)$$

existe una $x_*(t)$ que es solución de la ecuación diferencial y es única.

Departamento de Electrónica

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Alejandro S. GHERSIN

Profesor Regular Asociado
Dpto. de Electrónica - FIUBA
aghersin@fi.uba.ar

Control Automático I 86.08/66.18

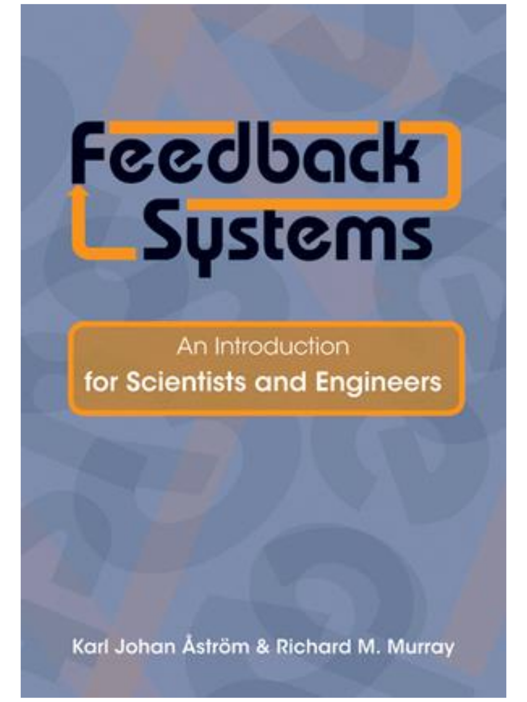
Presentación de la materia

Control Automático I: Equipo docente

Guillermo Sellerio, gsellerio@fi.uba.ar
Marcelo Bruno, mabruno@fi.uba.ar
Andrés Angelopulo, aangelopulo@fi.uba.ar
Pedro Martos, pmartos@fi.uba.ar

Bibliografía: Åstrom & Murray

el que más usan
Los profes

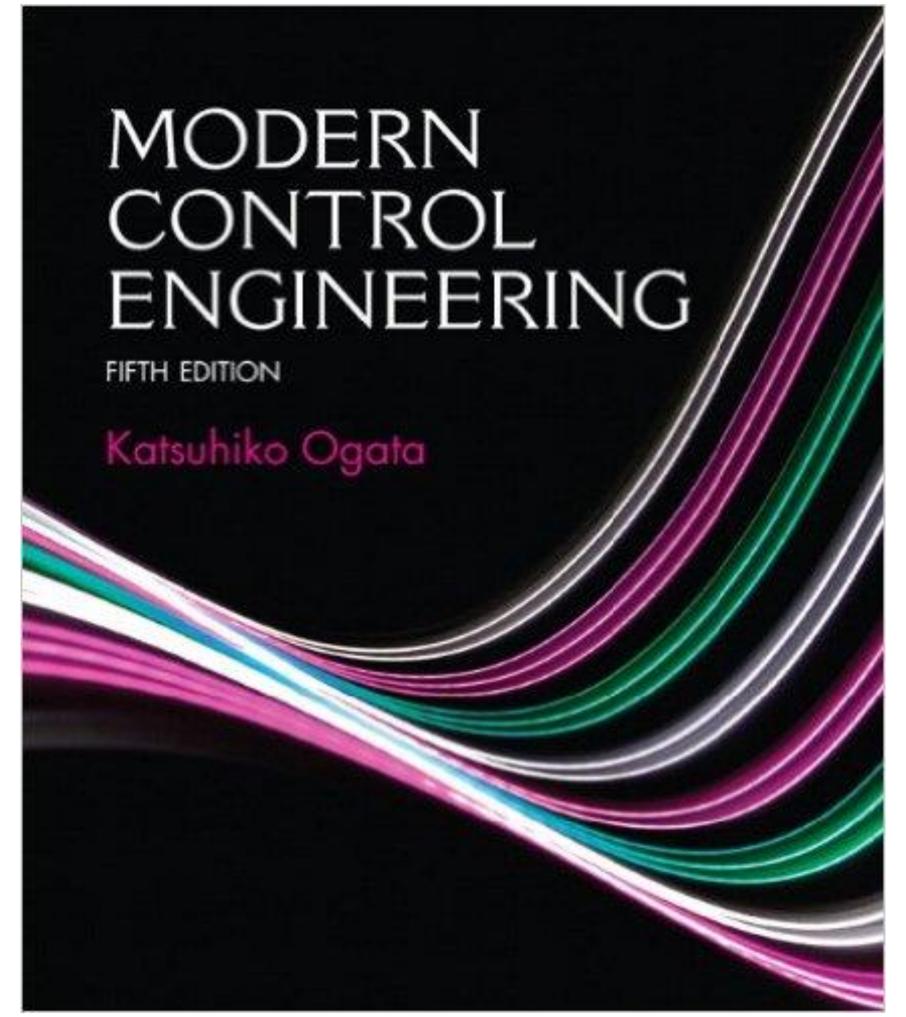


[Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers](#)

Libre para descarga en PDF. Muy buena página wiki

SEGUNDA EDICIÓN, 2020

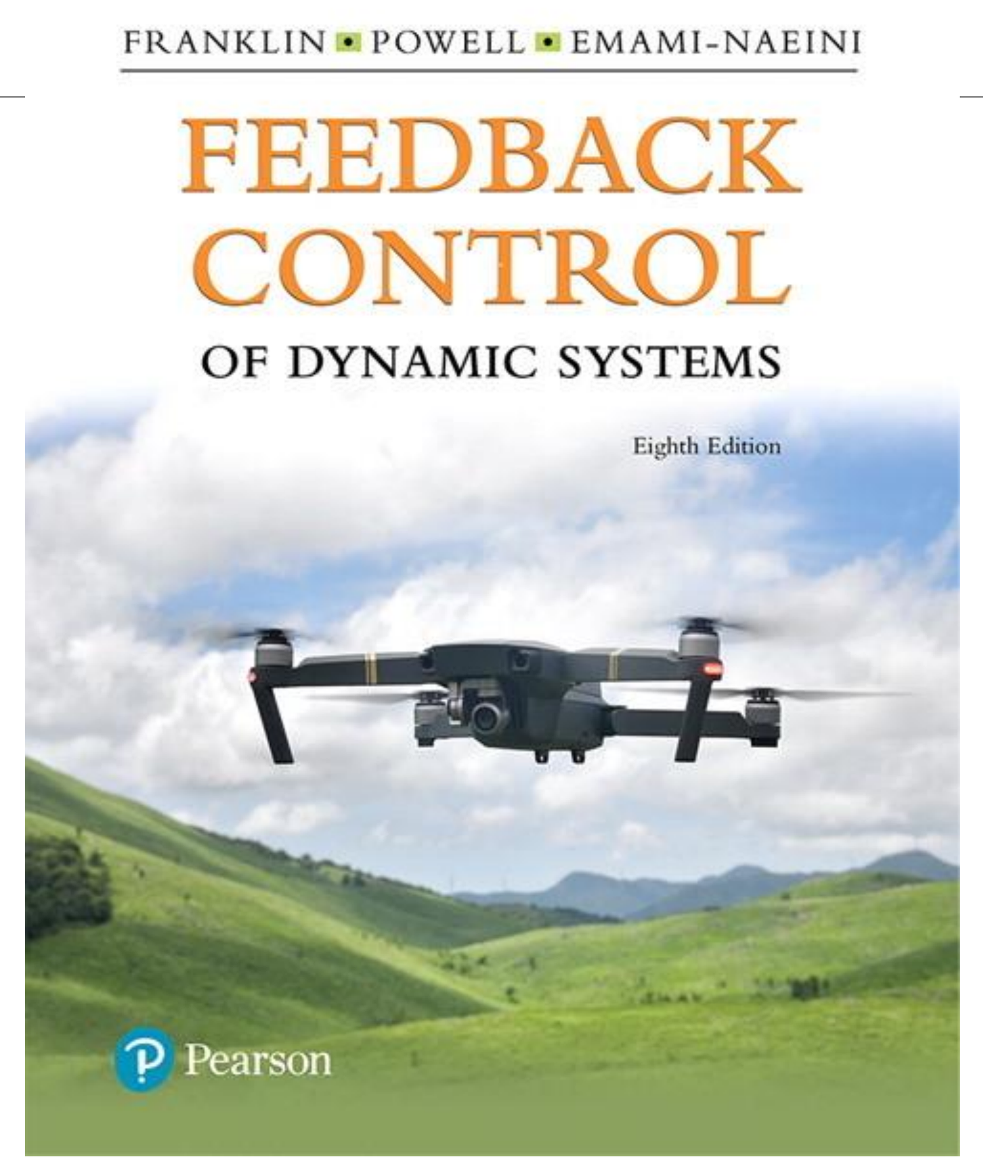
Link de descarga directa:
www.cds.caltech.edu/~murray/books/AM08/pdf/fbs-public_18Aug2019.pdf



Bibliografía: Ogata

Más Amigable para Students

Bibliografía:



Global Edition Paperback – 2014by Abbas Emami-Naeini J. Da Powell Gene F. Franklin (Author)

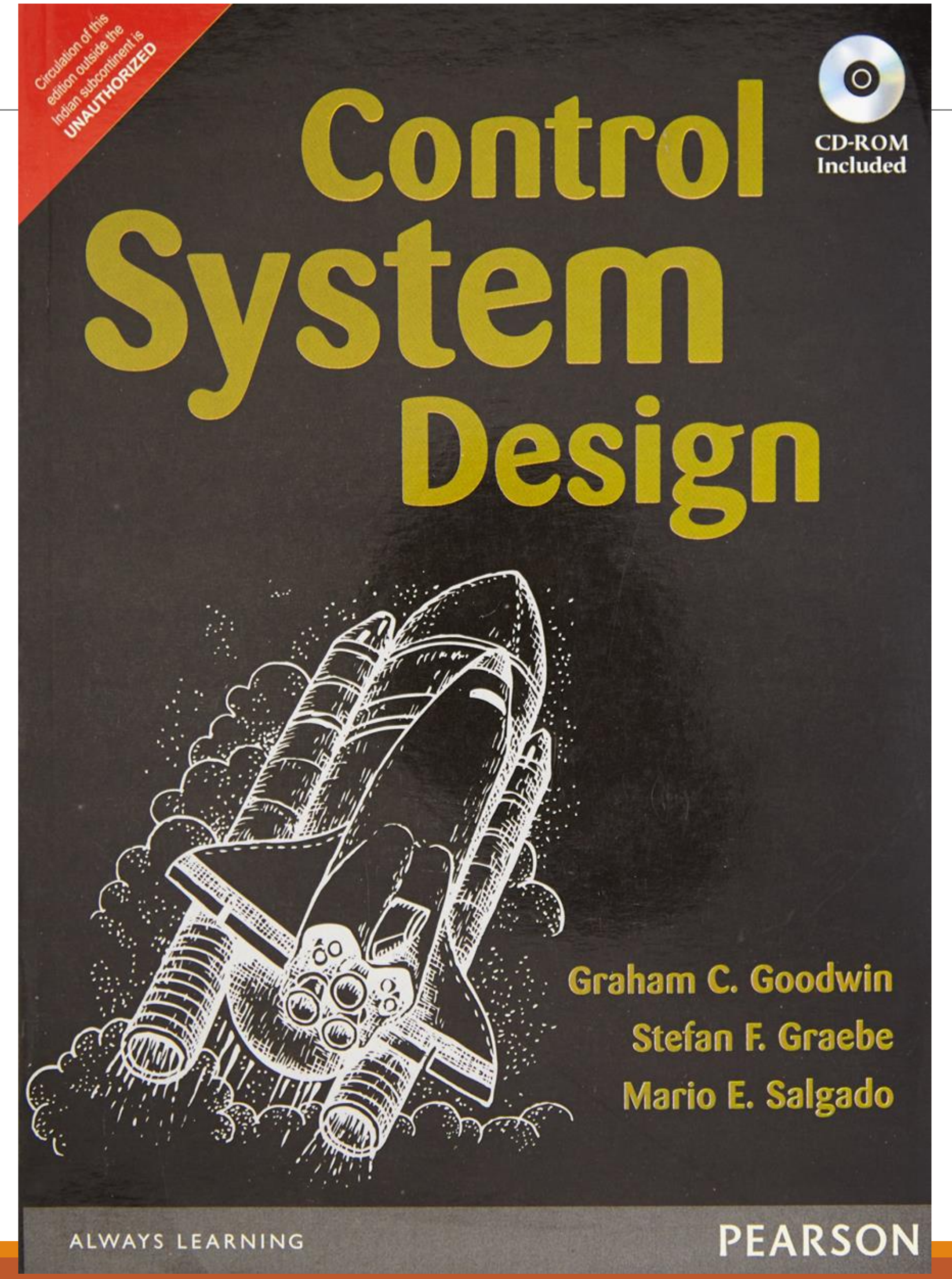
La tercera edición (1991) está en castellano y posiblemente en la biblioteca, como

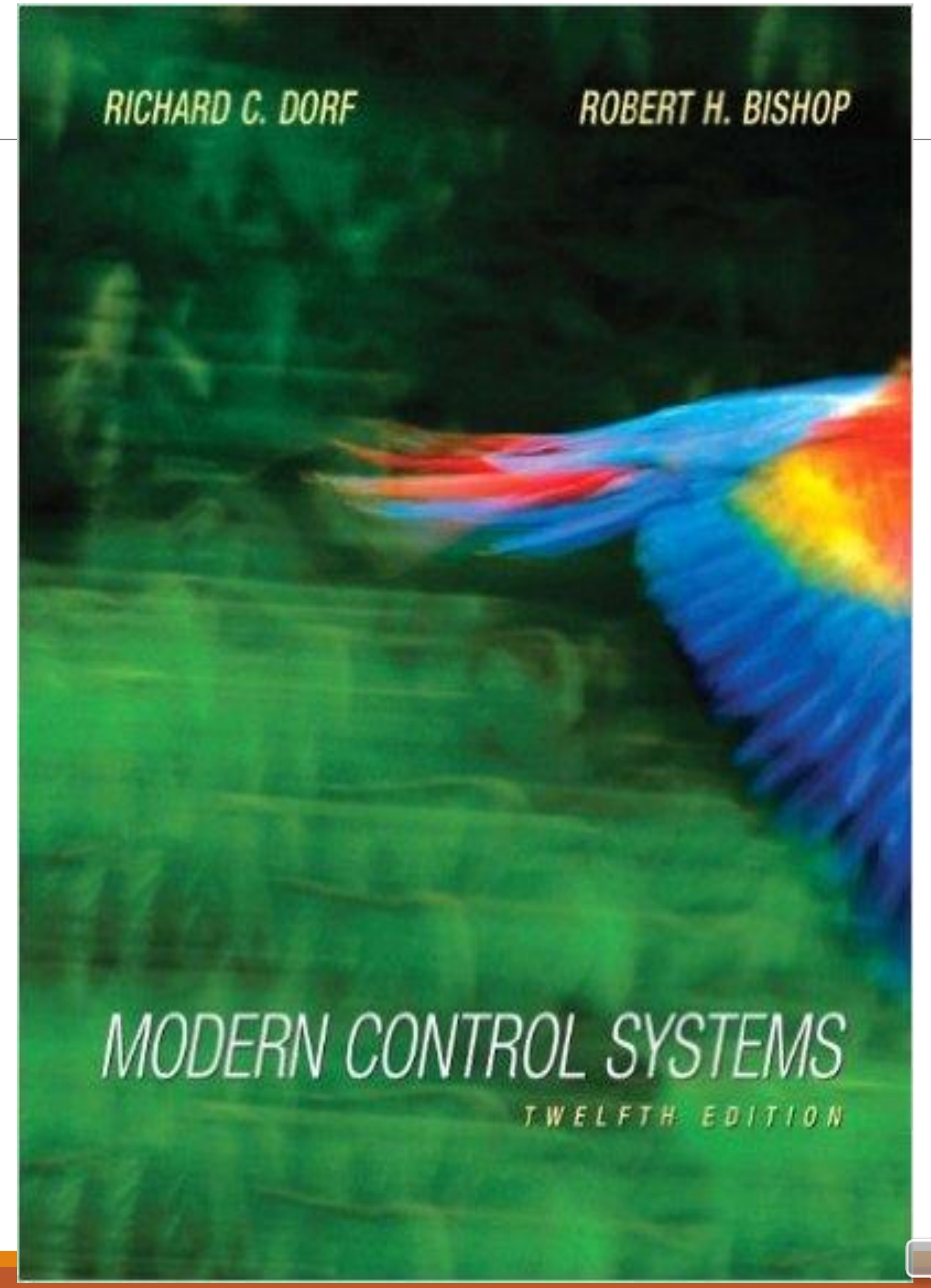
Sistemas dinámicos con retroalimentación.

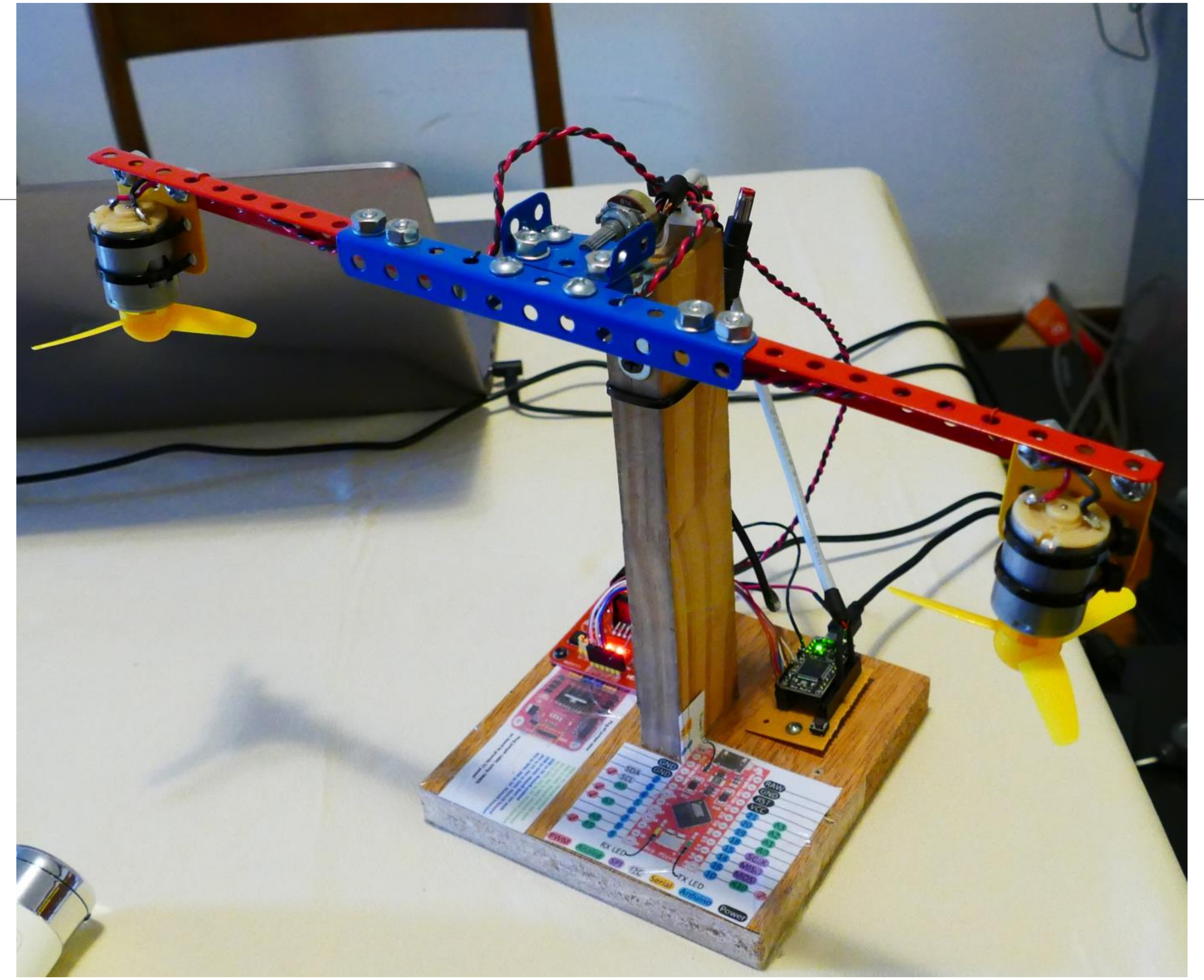
Muy buena.

Feedback Control of Dynamic Systems

Bibliografía (más):

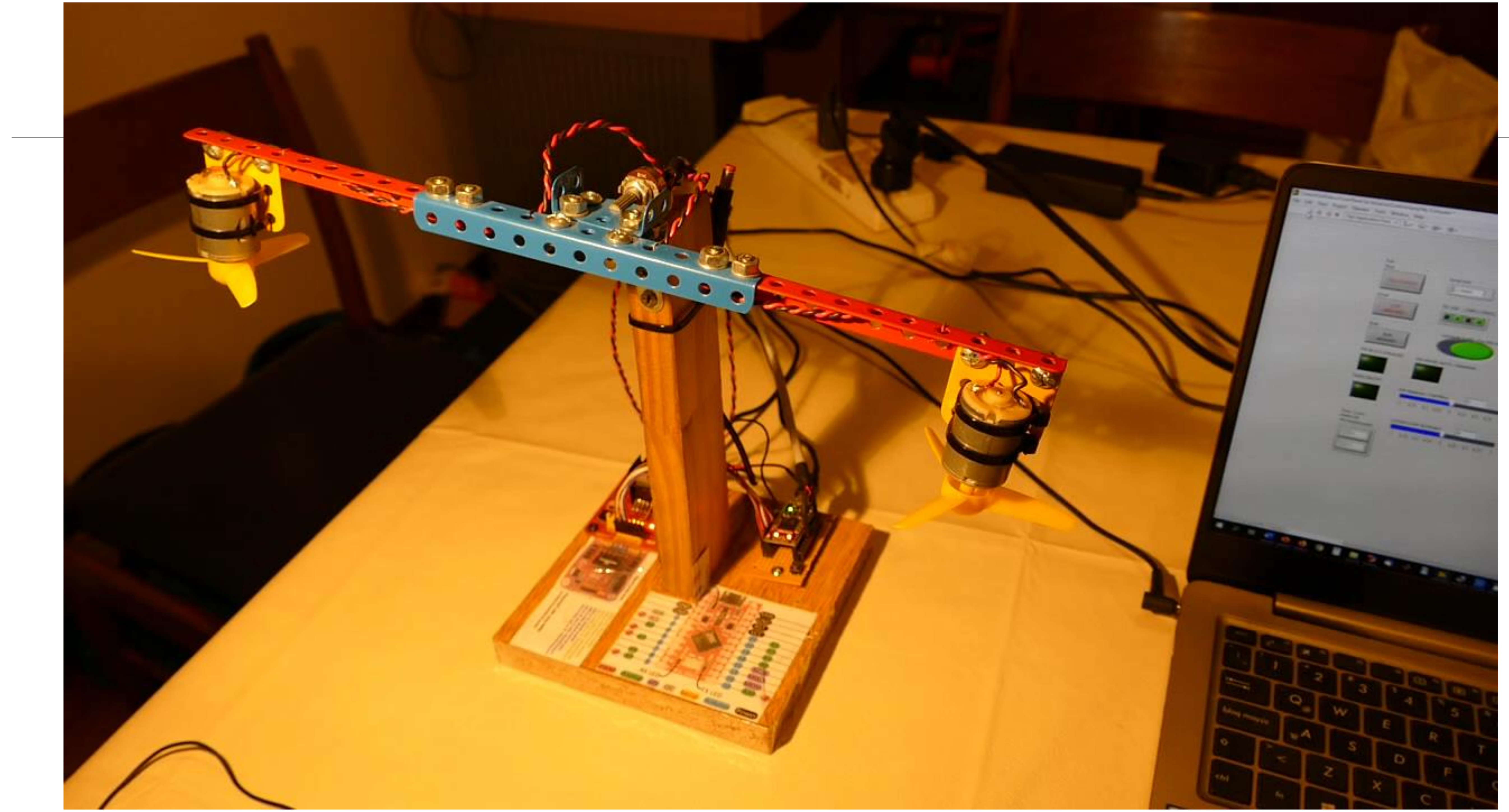




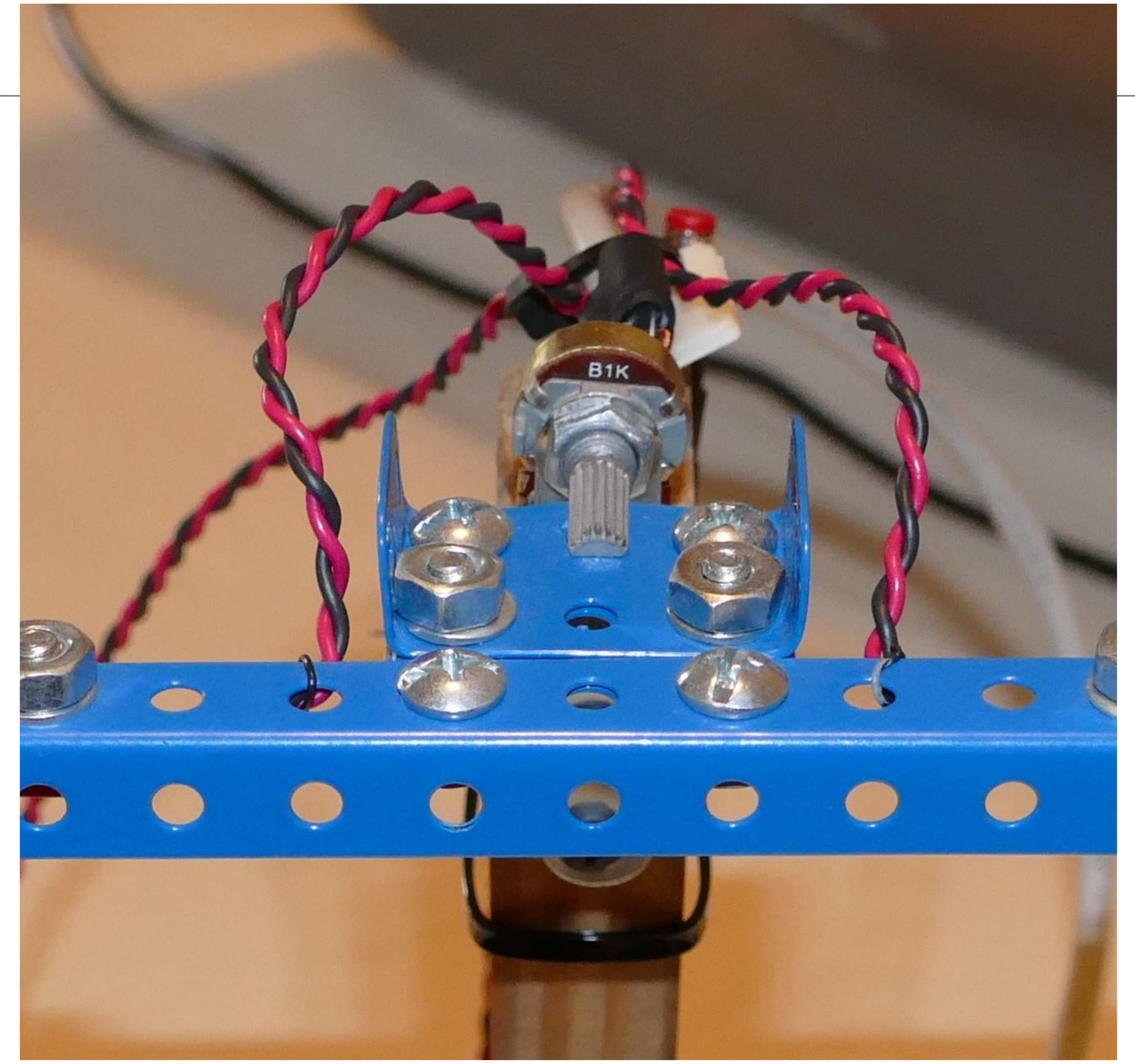


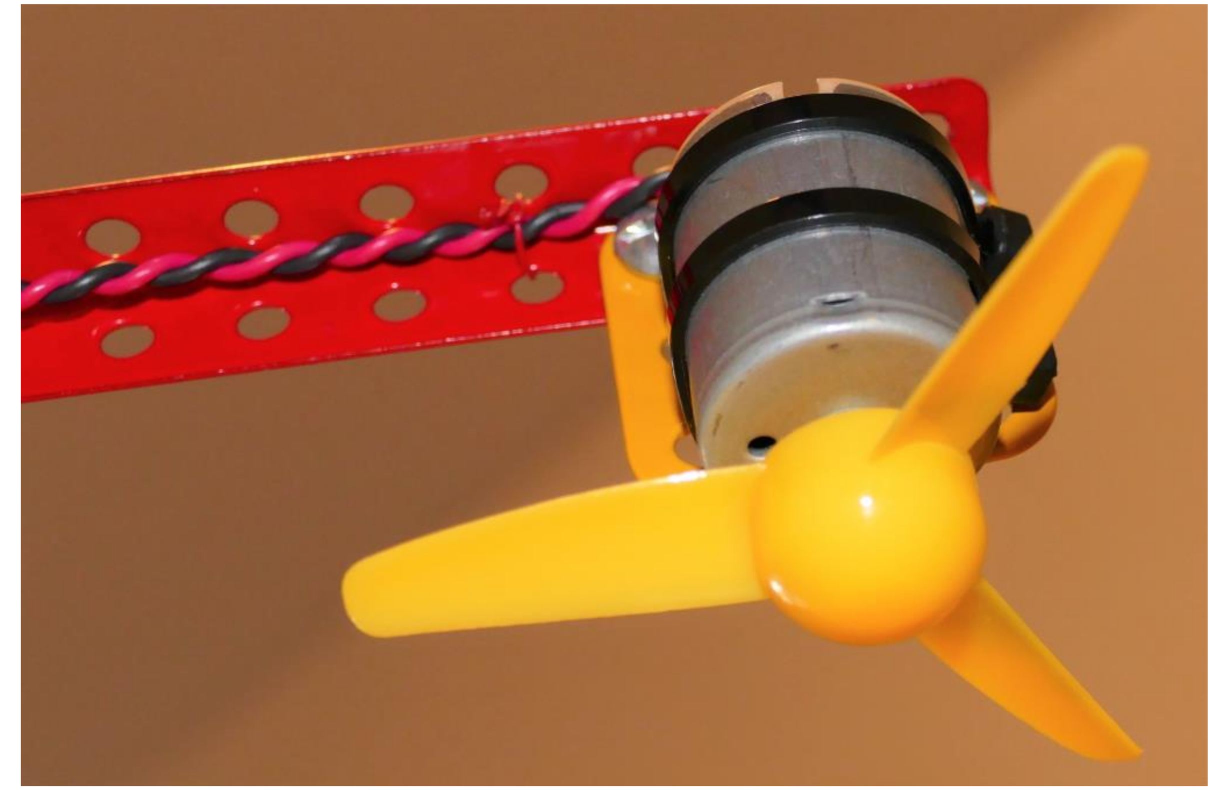
Experimento:
Control del
Sube y Baja.

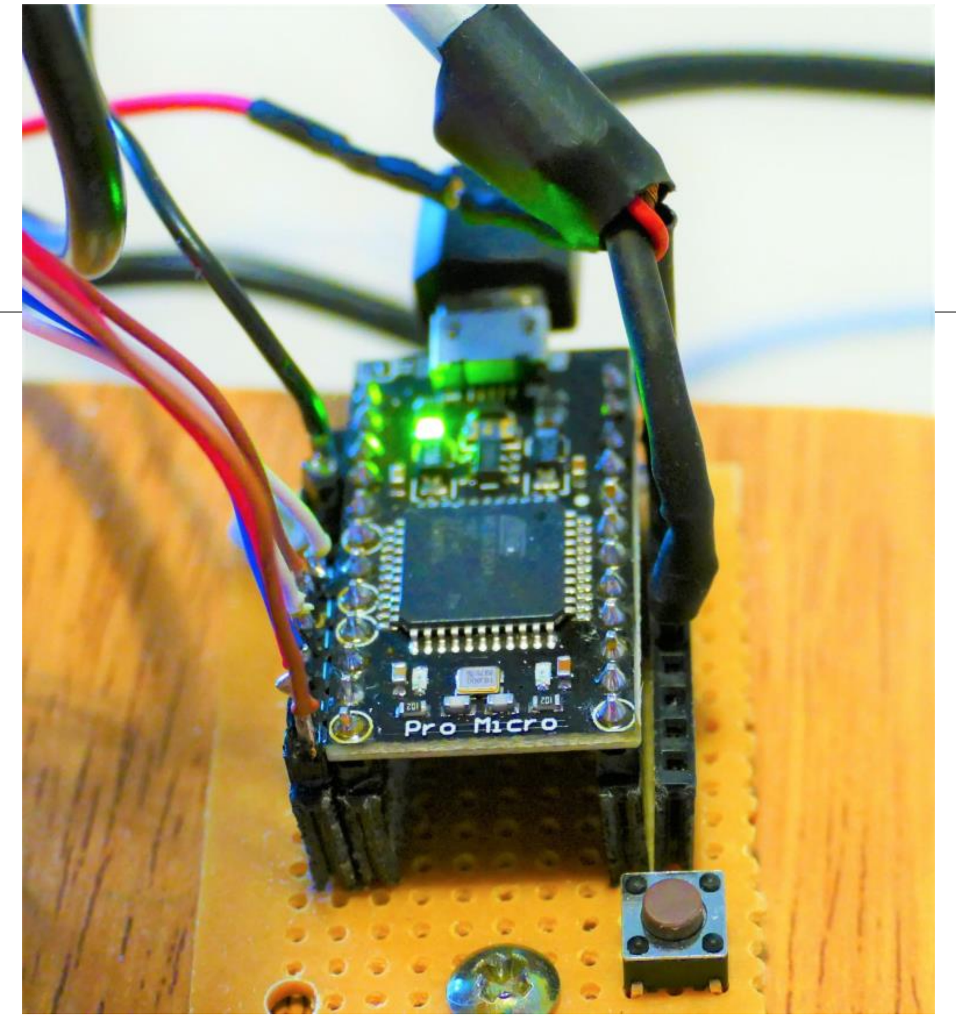
Experimento: Control del Sube y Baja: Video 1

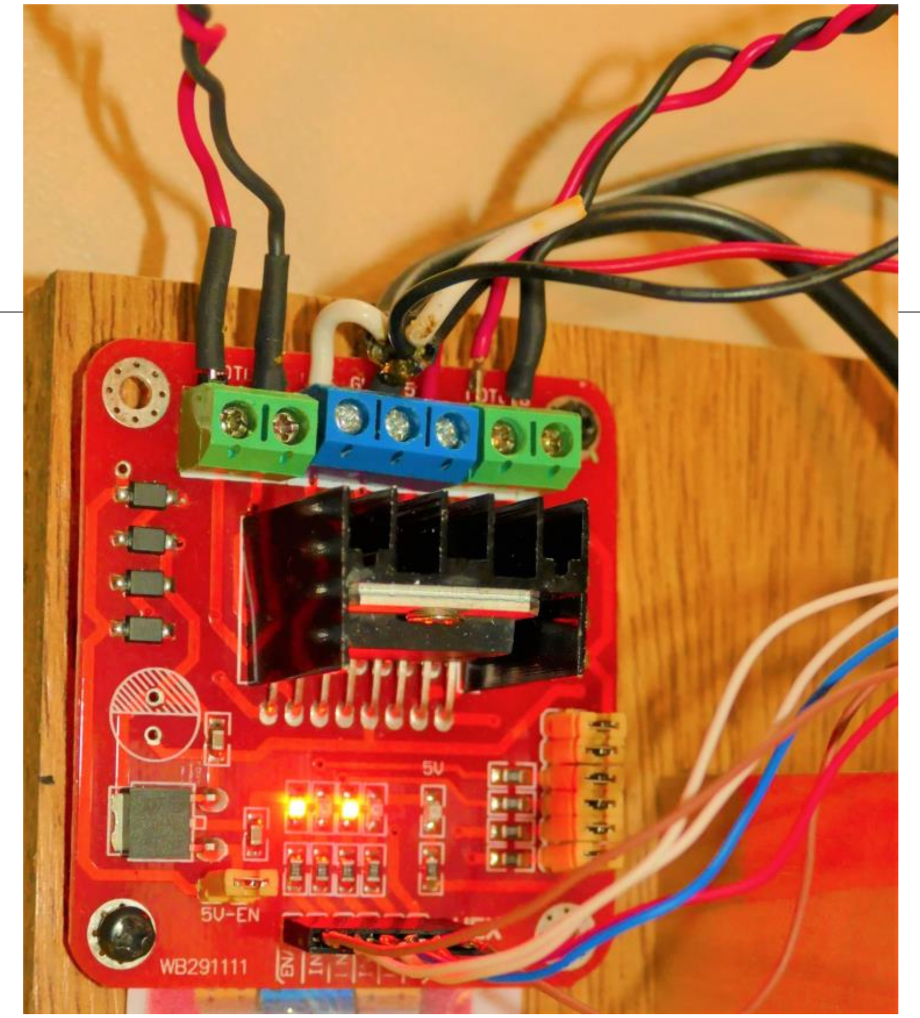


Experimento: Control del Sube y Baja

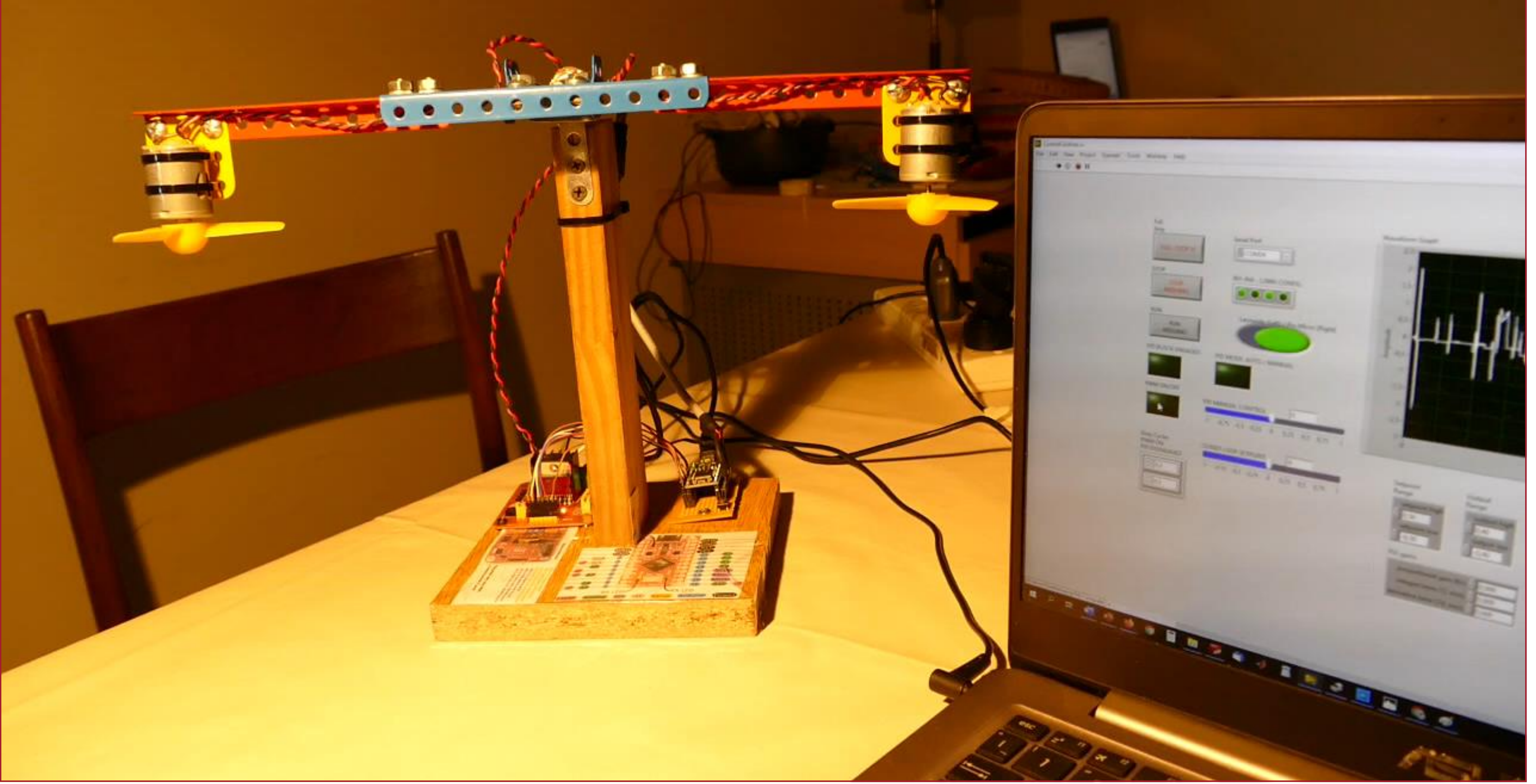




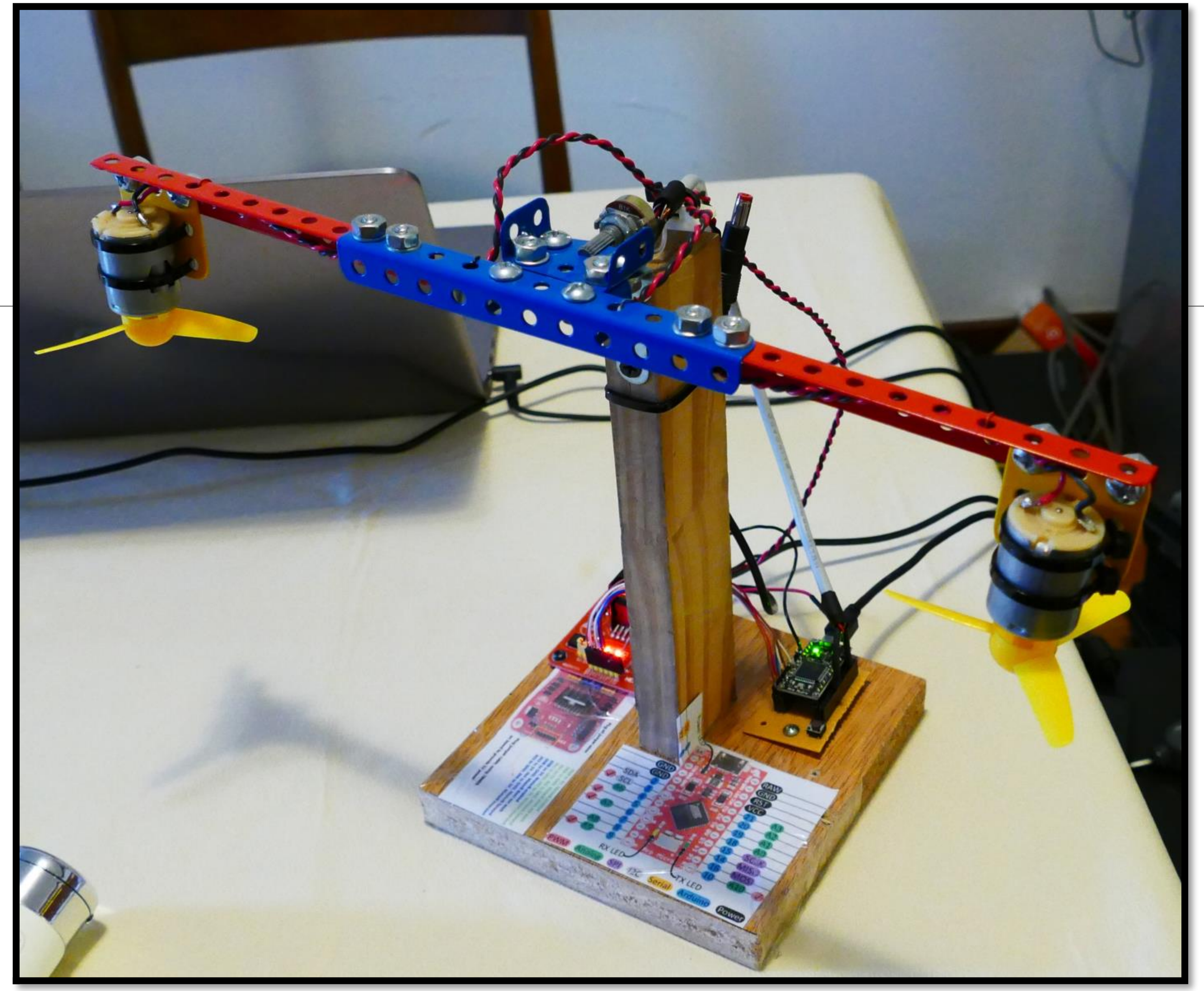

Pro Micro



Experimento: Control del Sube y Baja: Video 1

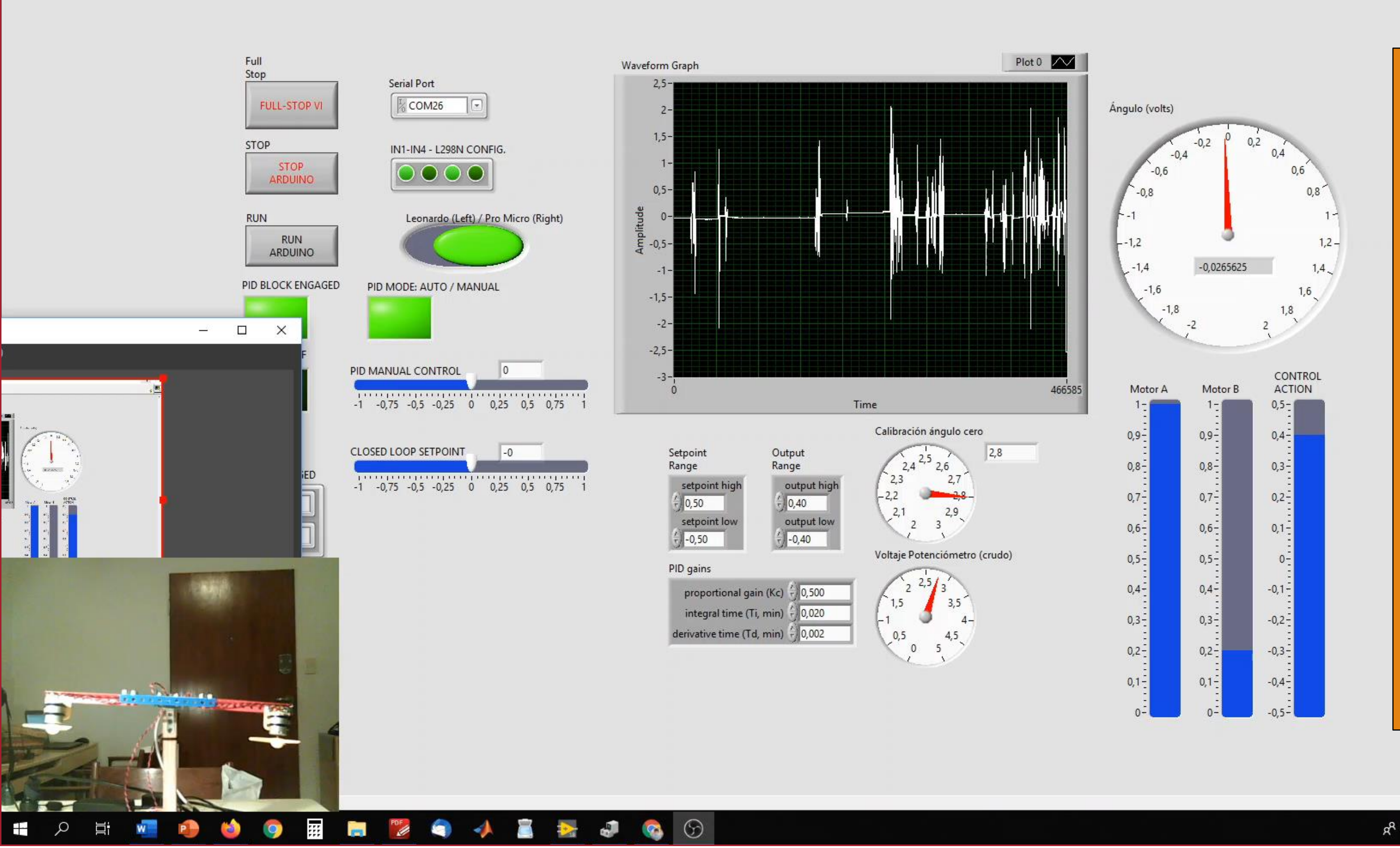


Experimento: Control del Sube y Baja: Video 2

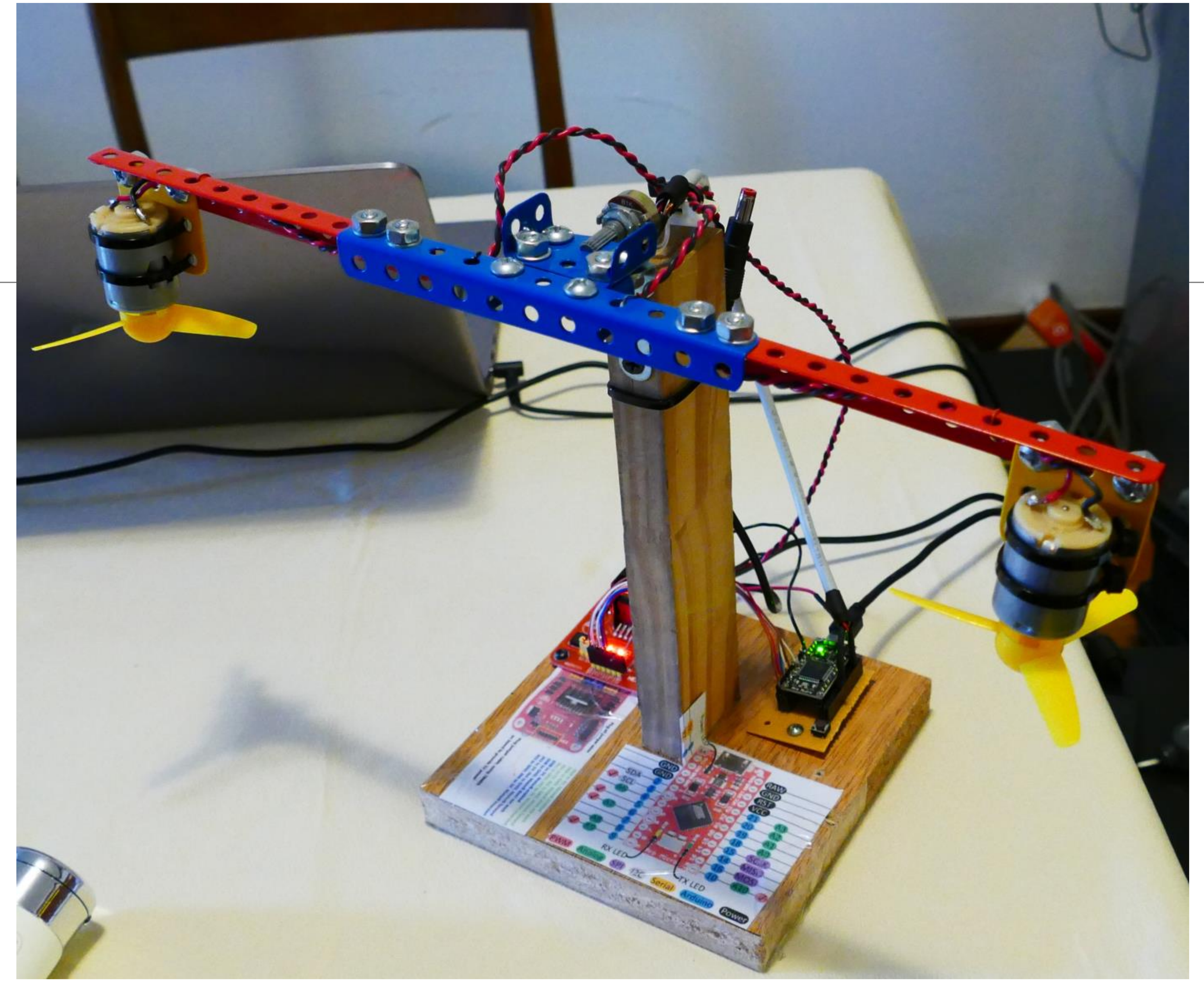


Control del Sube y Baja: Explicación sobre el video de la próx. dispositiva.

Experimento: Control del Sube y Baja: Video 3



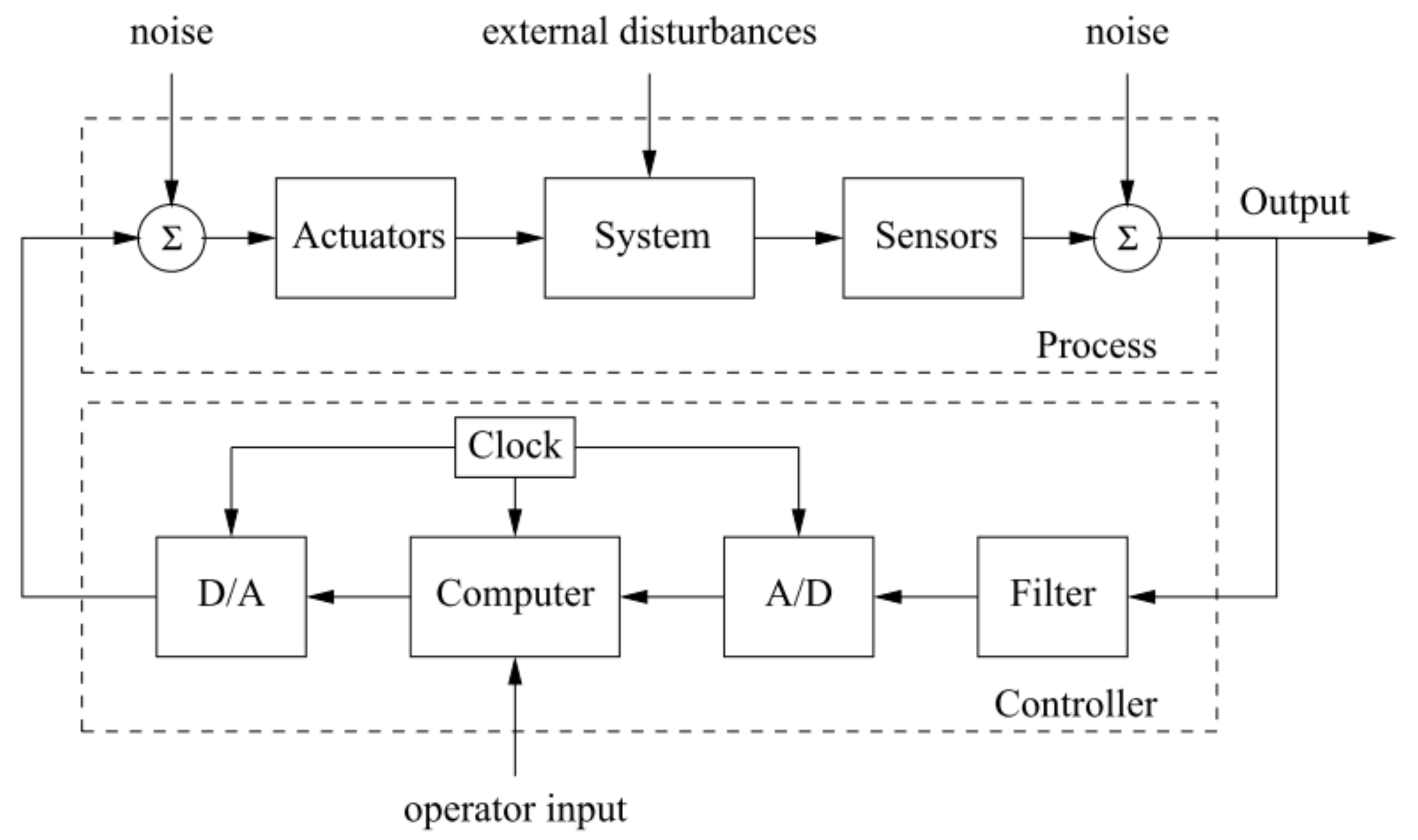
Importante: "Closed Loop Setpoint" es el valor de referencia de que se desea seguir. El relojito grande es el valor de la tension de salida del potenciómetro proporcional al ángulo (1 V = 60 grados aproximadamente).



Comentarios adicionales sobre el video de la dispositive anterior.

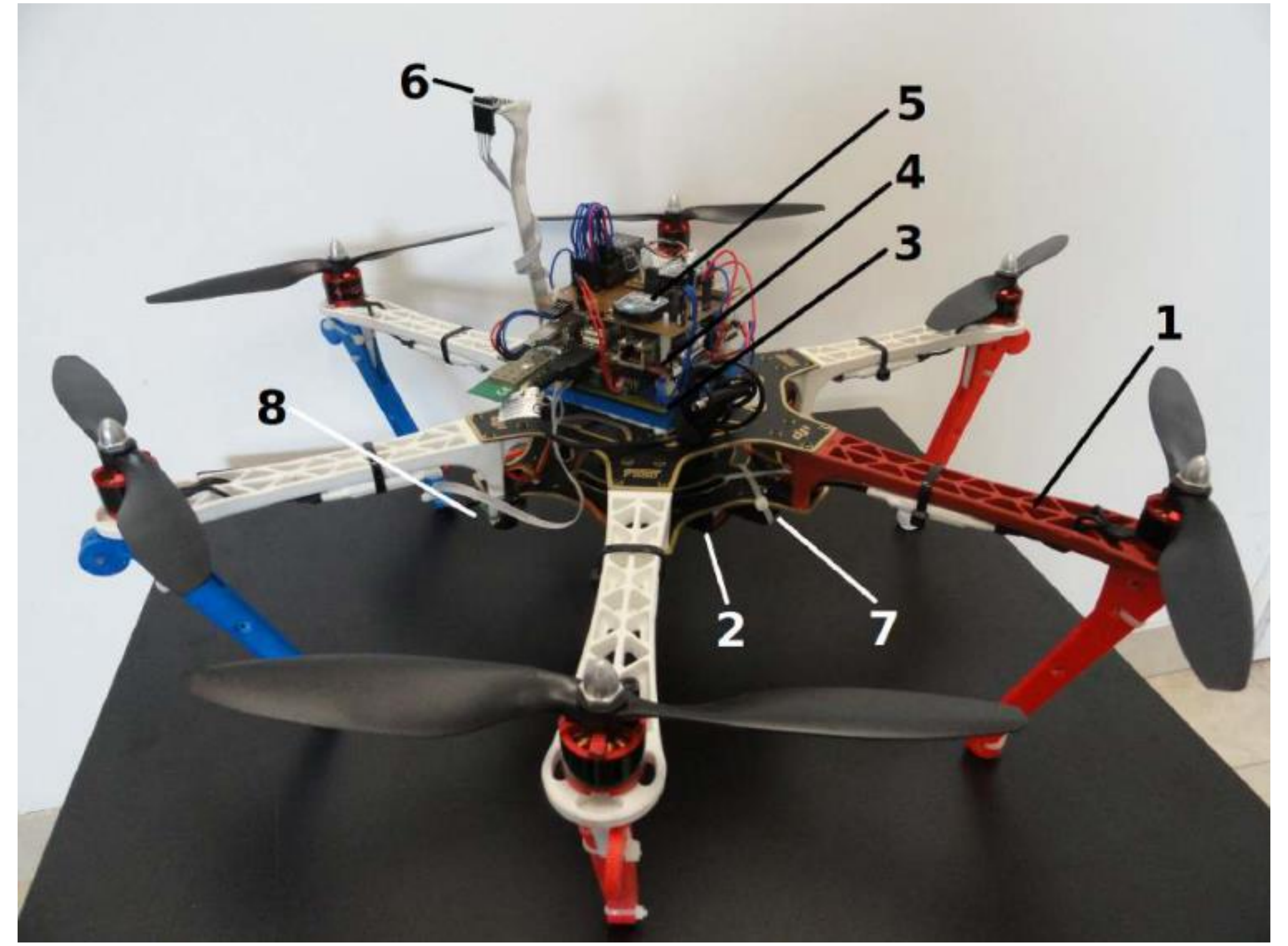
Ejemplos: planta, sensores, actuadores, controlador.

Sistema de Control Realimentado: ¿Qué es "Control"?



Ejemplos: planta, sensores, actuadores, controlador.

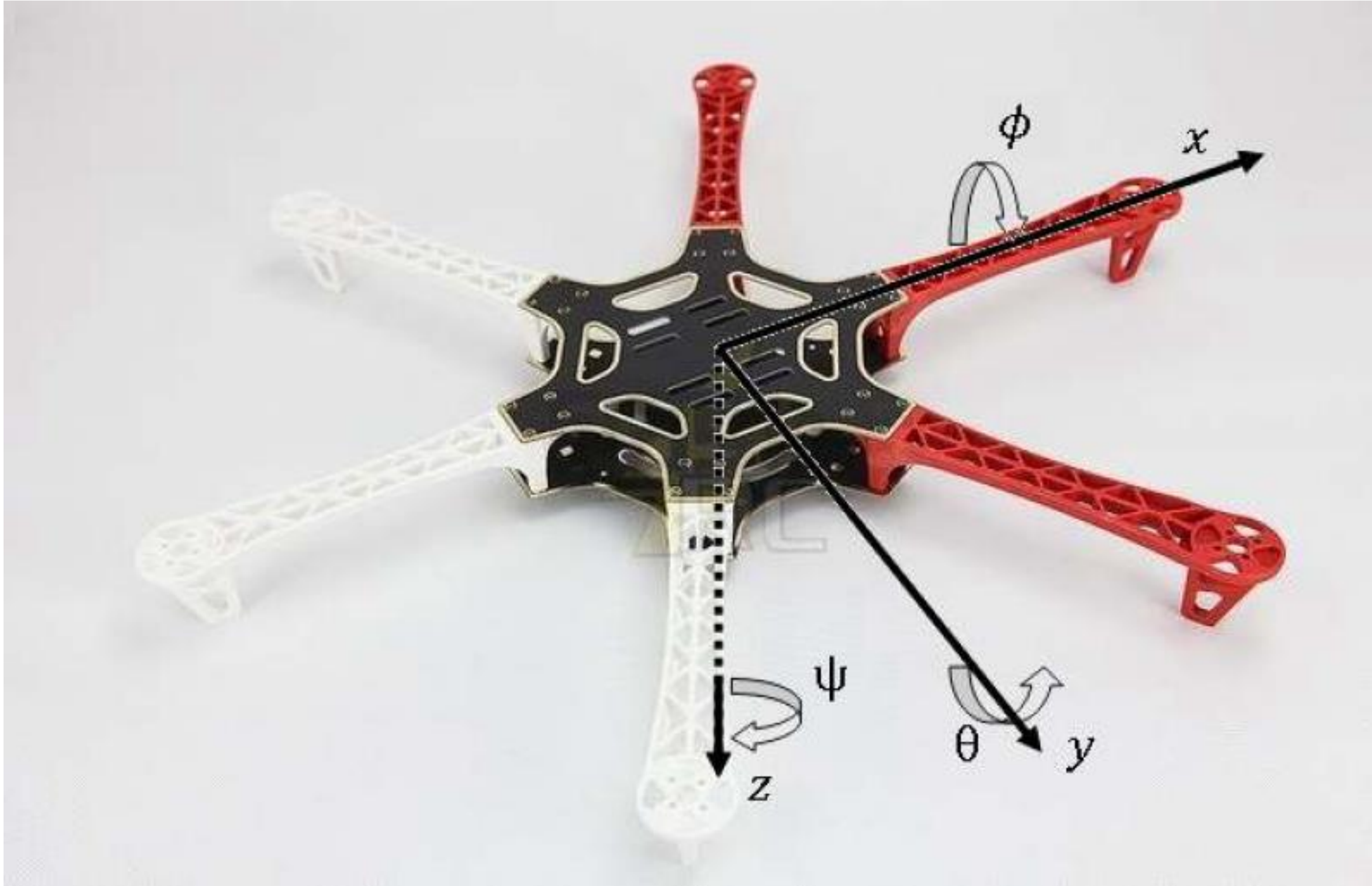
EJEMPLO: Helicóptero multirotor GPSIC – FIUBA.



Cortesía del Ing. C.D. Pose – GPSIC – FIUBA

Ejemplos: planta, sensores, actuadores, controlador.

EJEMPLO: Helicóptero multirotor : LA PLANTA



Cortesía del Ing. C.D. Pose – GPSIC – FIUBA

Ejemplos: planta, sensores, actuadores, controlador.

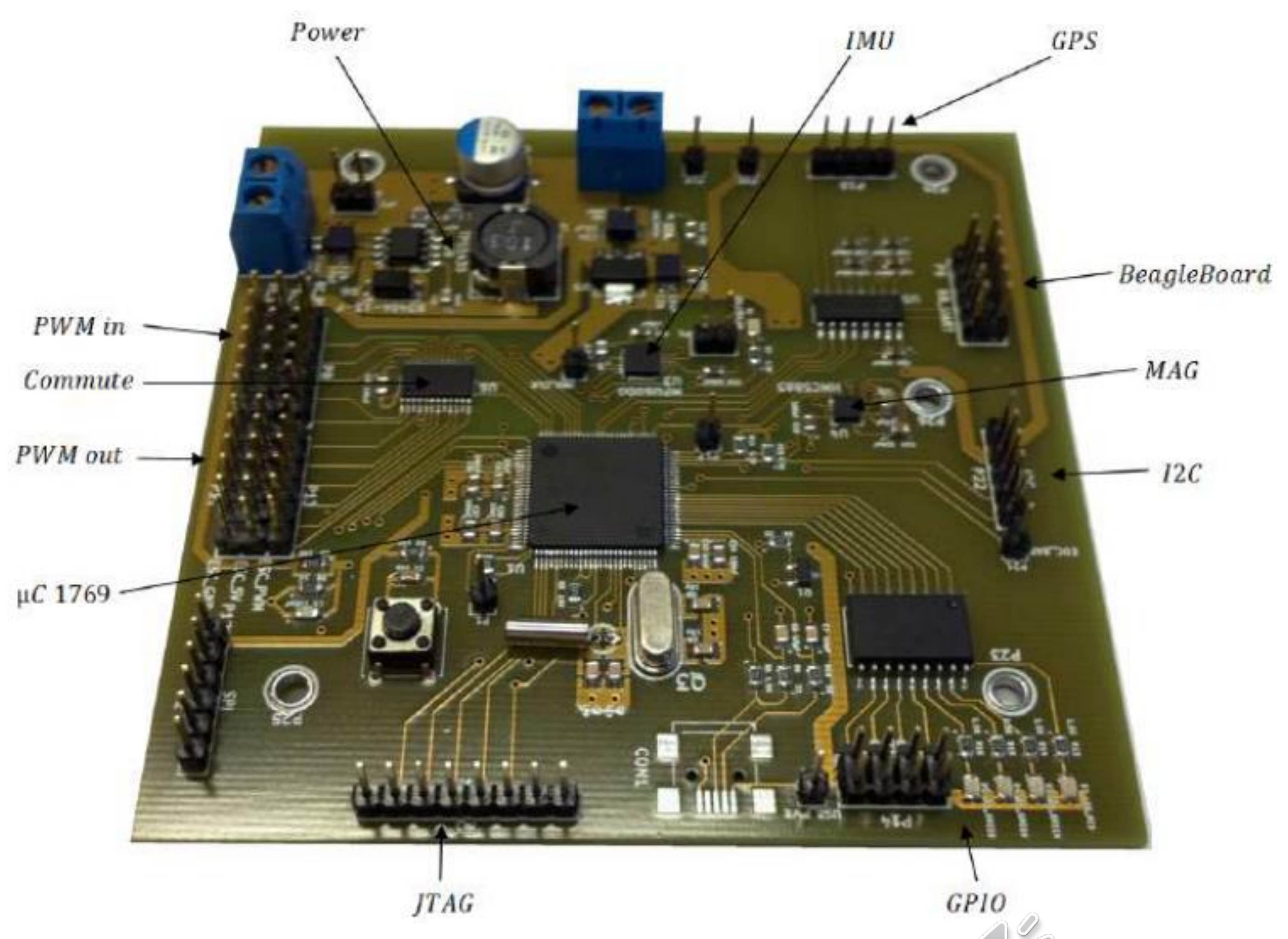
EJEMPLO: LA PLANTA c ACTUADORES

Cortesía del Ing. C.D. Pose – GPSIC – FIUBA

Ejemplos: planta, sensores, actuadores, controlador.

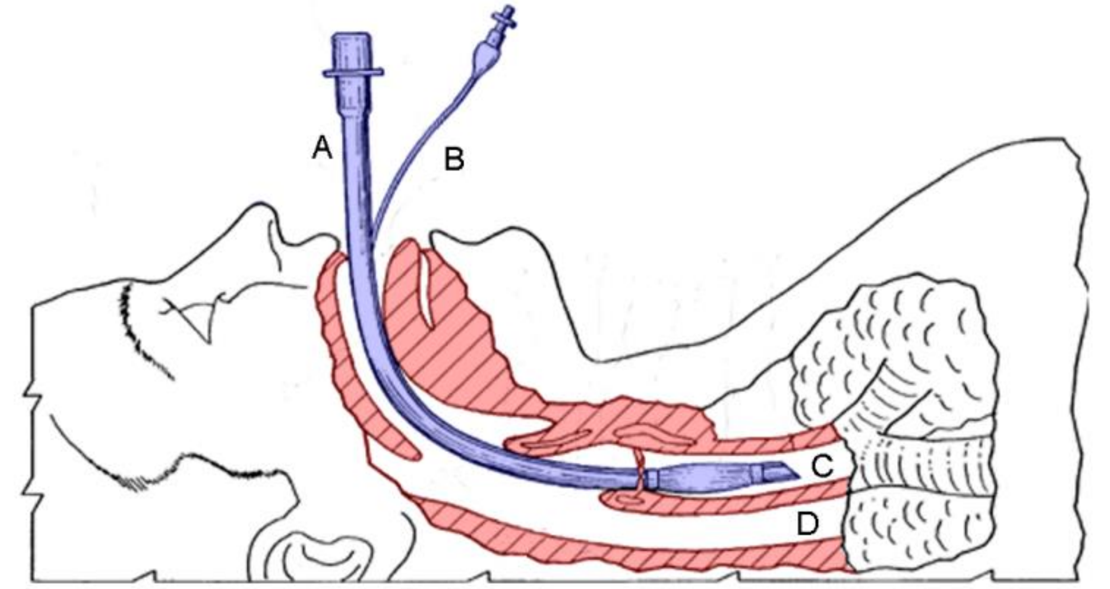
EL CONTROLADOR CON LOS SENSORES (casi todos).

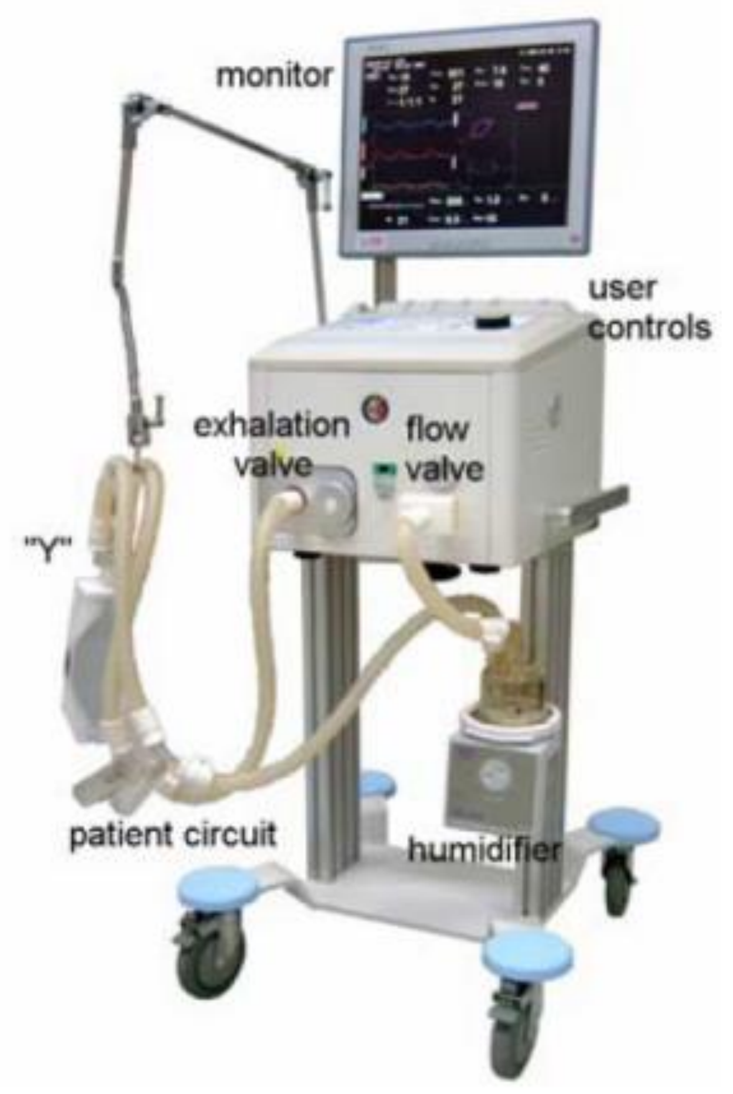
Controladora de vuelo "CHORIBOARD I" Diseño del Claudio Pose
GPSIC – FIUBA



Ejemplos (en los que yo intervine)

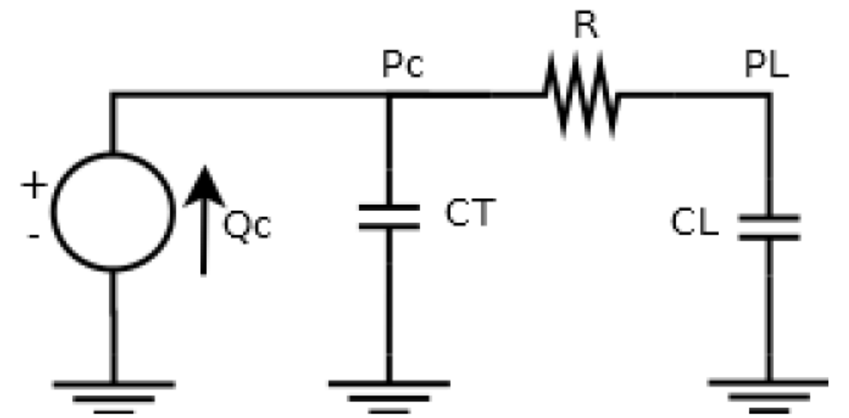
Ventilación mecánica para terapia intensiva





Ejemplos (en los que yo intervine)

Ventilación mecánica para terapia intensiva



$$\frac{P_c}{Q_c} = \frac{\frac{1}{C_T}\,(s+\omega_L)}{s\,(s+\omega_P)}$$

$$\omega_L = \frac{1}{RC_L}$$

$$\omega_T = \frac{1}{RC_T}$$

$$\omega_P = \omega_T + \omega_T$$

Lazo de control:

$\mathcal{S}$ Sistema.

$K(s)$ Controlador.

$d(s)$ Perturbación.

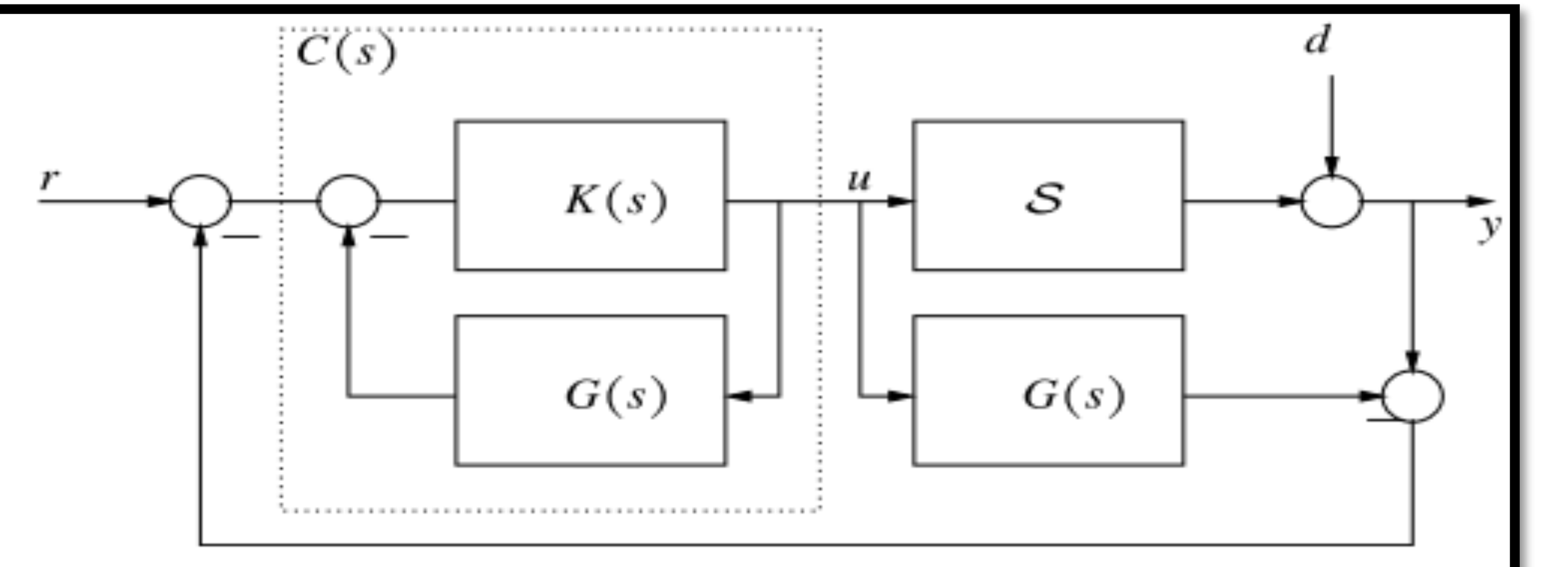


Figura: Transformación de Bloques

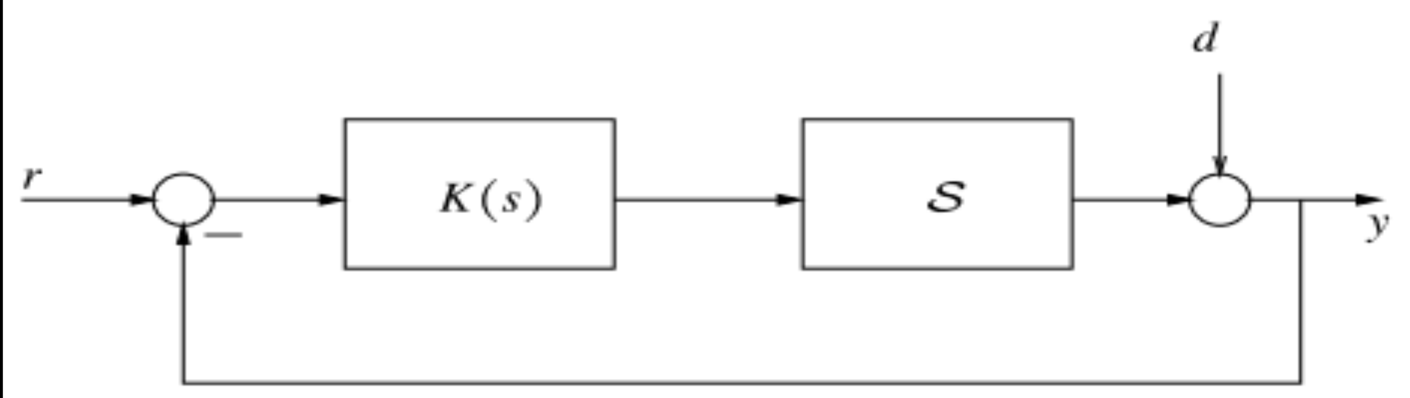


Figura: Lazo de control

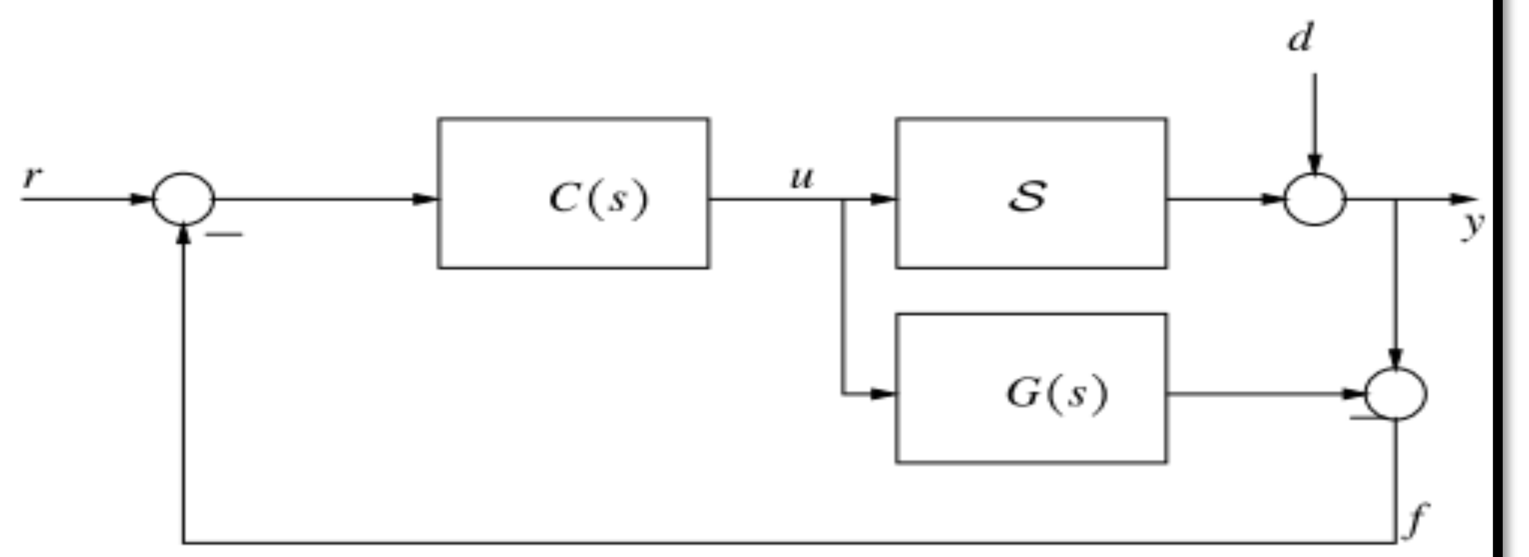


Figura: Lazo transformado

Por qué realimentamos?

Por qué realimentamos?

Hay REALIMENTACIÓN porque hay “incerteza”

De la ecuación para la señal de realimentación:

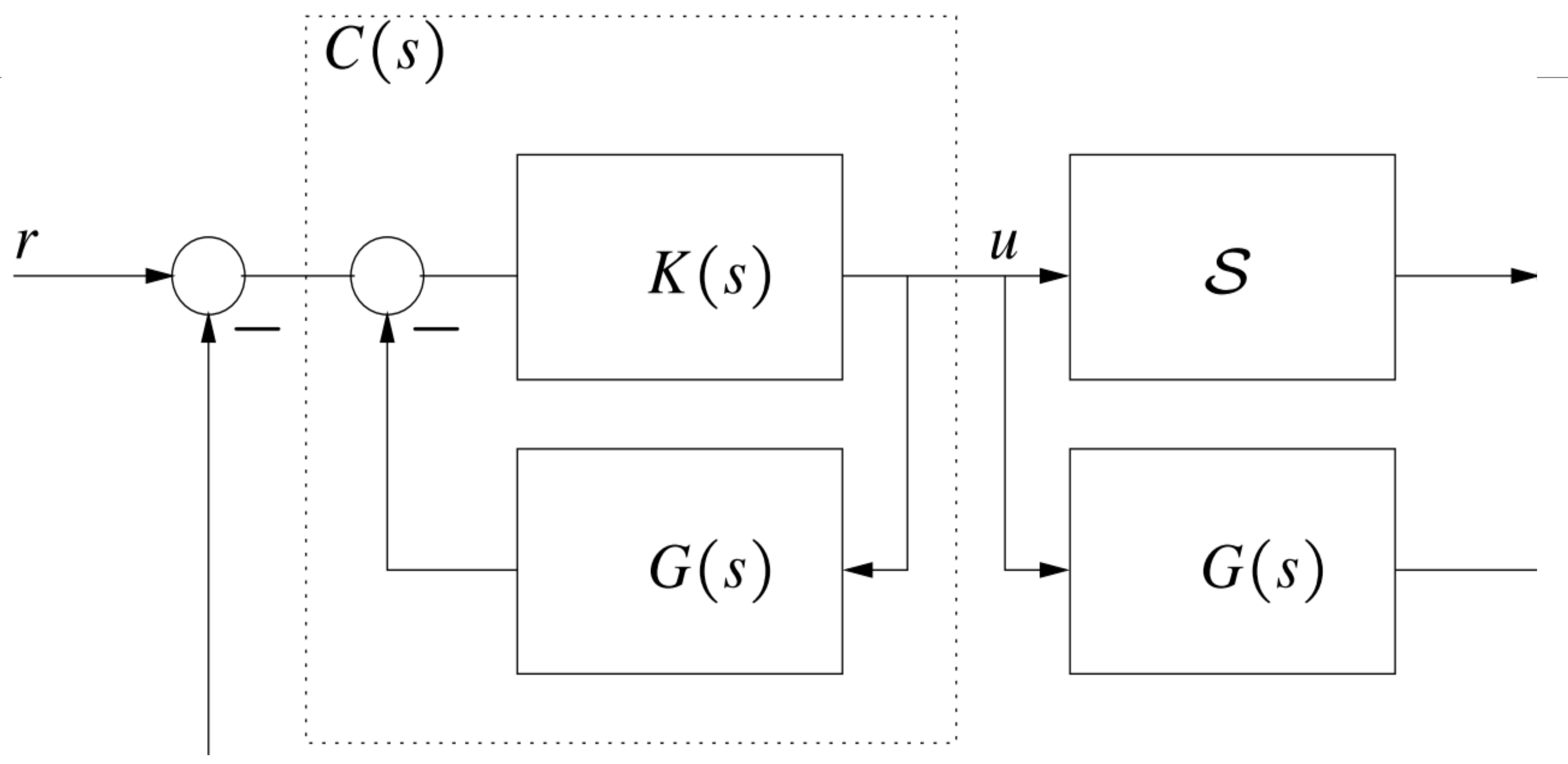
$$f(s) = d(s) + \underbrace{[\mathcal{S} - G(s)]}_{\Delta} u(s).$$

Observamos:

- Distinguimos *Sistema* ($\mathcal{S}$) de *Modelo* (G)
- Si no hay elementos inciertos ($d(s) = 0$ y $\Delta = 0$)

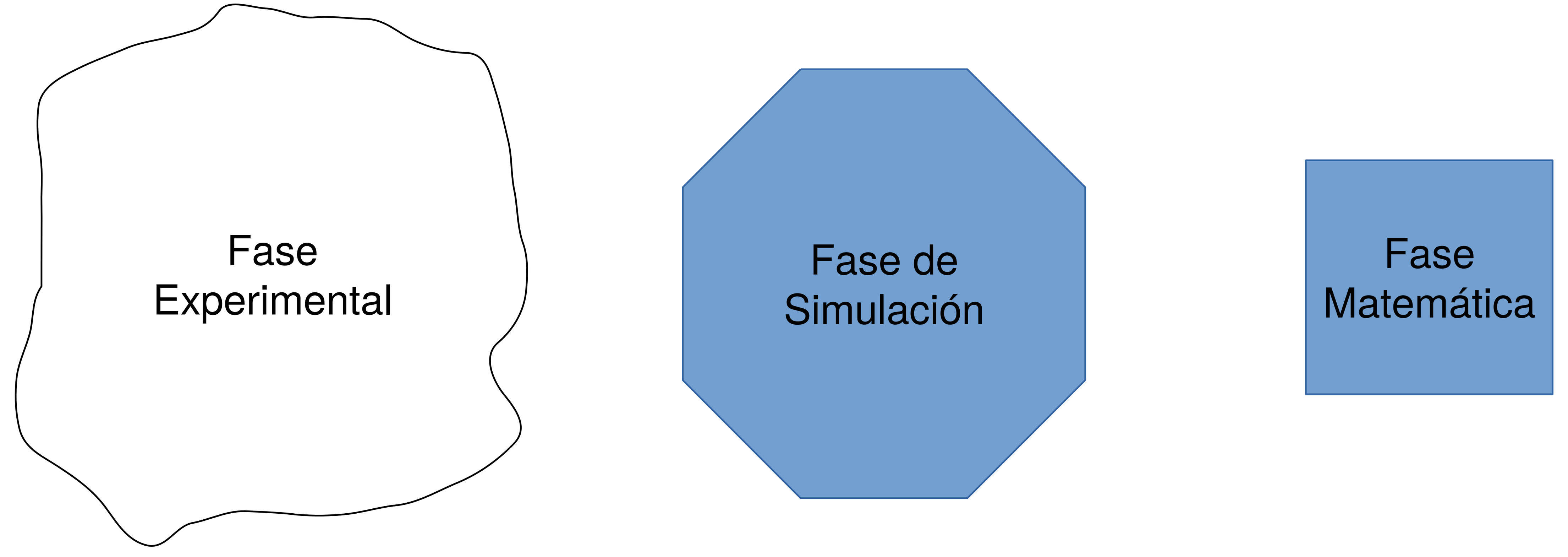
$\Longrightarrow$ No hay realimentación ($f = 0$)

Por qué realimentamos?



El problema general de Control

Fases del Problema de Control (Sánchez Peña)



Otros Ejemplos (libro)

LA REALIMENTACIÓN Y EL CONTROL SON UBICUOS

OTROS EJEMPLOS DE REALIMENTACIÓN Y CONTROL (ver libro)

- ***CONTROL DE TRÁFICO EN REDES DE DATOS (por ej. internet).***
- ***MACROECONOMÍA (interrelación entre PBI, inversión, consumo y gasto público).***
- ***MICROECONOMÍA, dinámica de CADENA de SUMINISTROS.***
- ***SISTEMAS BIOLÓGICOS.***