Ejercicio 2

Sea un proceso aleatorio ESA $X(n)$ definido para $n \in [0, ..., N-1]$, cuyo estimador sesgado de la función de autocorrelación es $\hat{R}_X(k)$. Sabiendo que el periodograma del proceso $X(n)$ se define como:

$$\hat{S}_X(\omega) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{R}_X(k) e^{-j\omega k}$$

Demuestre que esta última expresión es equivalente a:

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\omega k} \right|^2$$

$$\hat{S}_x(w) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-jwk} \right|^2$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{-jwn} \right] \left[\sum_{m=0}^{N-1} X^*(m) e^{+jwm} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X(n) X^*(m)\, e^{-jw(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} \left(\sum_{m} X(m+k) X^*(m) \right) e^{-jwk}$$

Si $k \geq 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1-k} x(m+k) x^*(m) \right) e^{-jwk}$$

Si $k < 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(\sum_{m=-k}^{N-1} x(m+k) x^*(m) \right) e^{-jwk}$$

En General,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\Bigg(\underbrace{\sum_{r=0}^{N-1-|k|} x(r+|k|)\,x^*(r)}_{\hat{R}_x(k)}\Bigg)e^{-jwk} = \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\hat{R}_x(k)e^{-jwk}$$

Por ser ESA

Ejercicio 3

Se define un proceso $X(n)$ como combinación de varios tonos puros de fase aleatoria. Suponiendo que una de sus realizaciones resulta:

$$X(n) = \cos(0.22\pi n) + \cos(0.38\pi n) + \cos(0.12\pi n) + \cos(0.4\pi n) + \cos(0.25\pi n)$$

Determine el largo N que debería tener la realización del proceso para poder visualizar correctamente todas las componentes de frecuencia de la PSD de $X(n)$. Esboce un gráfico indicando las componentes de la PSD teórica superpuesto al periodograma aproximado.

Necesito que, para cada f_1, f_2

$$|f_2 - f_1| \gtrsim \frac{1}{N} \Rightarrow w = 2\pi f \Rightarrow \left|\frac{w_2}{2\pi} - \frac{w_1}{2\pi}\right| \gtrsim \frac{1}{N}$$

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

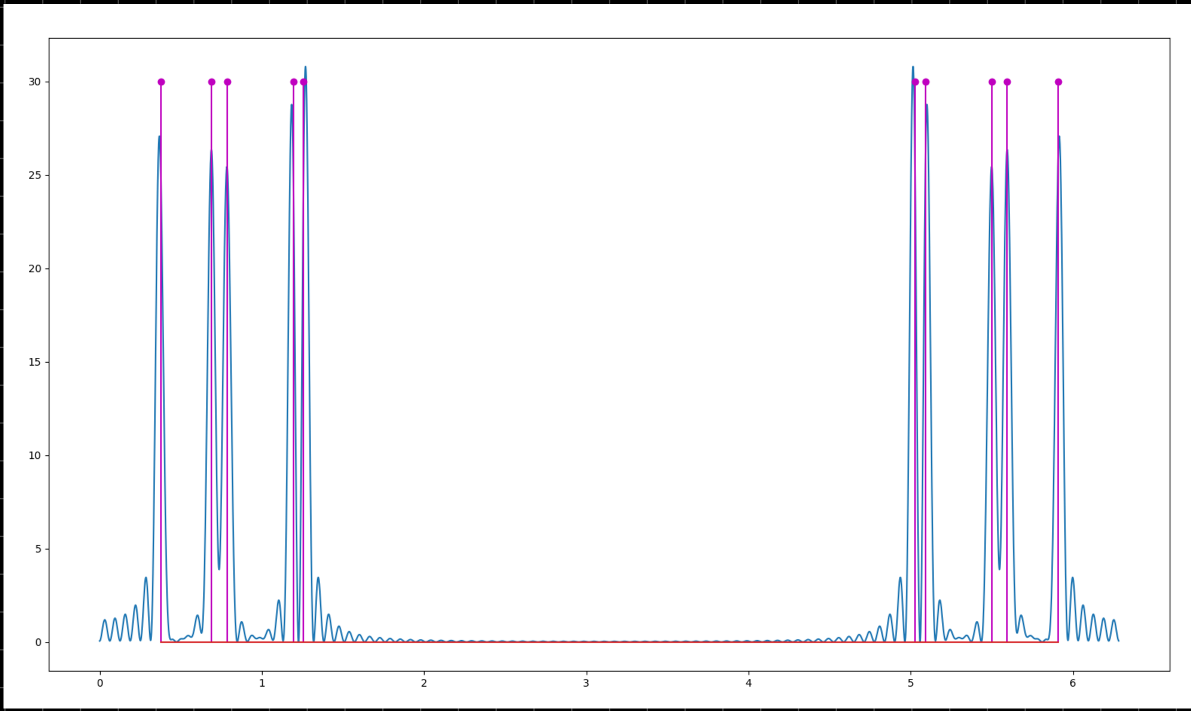
$$\Rightarrow |w_2 - w_1| \gtrsim \frac{2\pi}{N}$$

Para esto, busco el $\min(w_2 - w_1)$, lo que sucede

Con $w_2 = 0{,}4\pi \quad w_1 = 0{,}38\pi$

$$0{,}02\pi \gtrsim \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N \gtrsim \frac{2}{0{,}02} \Rightarrow N \geq 100$$

Como mínimo N puede ser 100



30
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6