$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

FORMA DIFERENCIAL DE LAS LEYES

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = I$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

FORMA INTEGRAL DE LAS LEYES

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

RELACIONES CONSTITUTIVAS.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

DENSIDAD DE CORRIENTE

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CARGA: LA CARGA ELECTRICA NO PUEDE SER CREADA NI DESTRUIDA

DE (2)

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H})}_{=0} = \nabla \cdot \vec{J}$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

NO CUMPLE CON EL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

DEBERÍA QUEDAR

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H})}_{=0} = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

USANDO $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

POR LO TANTO LA EC. (2) QUEDA

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

ES LA ECUACION DE LA LEY DE AMPERE, MODIFICADA PARA CUMPLIR CON EL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

EL TERMINO $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ SE LLAMA DENSIDAD DE CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO, Y FUÉ LA CONTRIBUCION MÁS IMPORTANTE DE JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879)

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}}$$

SON LAS ECUACIONES DE MAXWELL

ρ : DENSIDAD VOLUMETRICA DE CARGAS LIBRES

J : DENSIDAD DE CORRIENTES LIBRES

LAS 4 ECUACIONES DE MAXWELL, CON LA EC. DE CONTINUIDAD, Y LAS FUERZAS DE LORENZ, ES LA TEORÍA ELECTROMAGNETICA. SE PUEDEN EXPLICAR Y PREDECIR LOS FENOMENOS MACROSCÓPICOS DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

FORMA DIFERENCIAL	FORMA INTEGRAL	SIGNIFICADO
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi}{dt}$	LEY DE FARADAY
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$	LEY DE AMPERE GENERALIZADA
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q$	LEY DE GAUSS ELÉCTRICA
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$	LEY DE GAUSS MAGNETICA

SI NO HAY VARIACIONES TEMPORALES EL MODELO SE VUELVE ELECTROESTATICO O MAGNETOESTATICO.

POTENCIALES:

COMO $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

SE PUEDE DEFINIR PARA UN CAMPO SOLENOIDAL

$B = \nabla \times \vec{A}$, YA QUE $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

POR LA LEY DE INDUCCION ELECTROMAGNETICA

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{(\nabla \times \vec{A})}^{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

COMO ES IRROTACIONAL SE PUEDE DEFINIR

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

POR LO TANTO SE OBTIENE:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$\vec{A}$: ES EL POTENCIAL VECTORIAL MAGNÉTICO

V: POTENCIAL ESCALAR ELÉCTRICO.

$\vec{E}$ DEPENDE DE V O SEA DE LA DENSIDAD DE CARGA ρ
ADEMAS DEPENDE DE $\vec{A}$ O SEA DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE J

$$\vec{E}(V(\rho), \vec{A}(\vec{J}))$$

$$\rho(t)$$
$$\vec{J}(t)$$

CONSIDERANDO

$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Y LA EC DE MAXWELL

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ SE OBTIENE:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

COMO $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

SE LLEGA A:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J} + \nabla\left(-\nabla \cdot \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

AQUI SE DEBE ESPECIFICAR $\nabla \cdot \vec{A}$, PARA SIMPLIFICAR SE TOMA

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \leftarrow \text{AJUSTE DE LORENZ}$$

SE OBTIENE

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}}$$

ECUACION DE ONDA INHOMOGENEA DE $\vec{A}$

CONSIDERANDO LA EC. DE MAXWELL

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Y $\vec{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\nabla \cdot \left(\epsilon \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right) = \rho$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

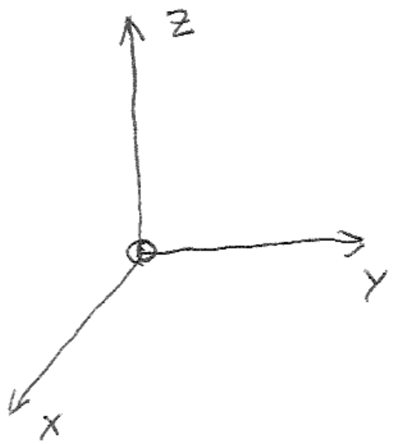
USANDO EL AJUSTE DE LORENTZ $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \dfrac{\partial V}{\partial t}$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

ECUACIÓN DE ONDA INHOMOGENEA DE V

NOTE QUE EL AJUSTE DE LORENZ DESACOPLA LAS ECUACIONES DE $\vec{A}$ Y V



CARGA EN EL ORIGEN $\rho(t)\,\Delta v'$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$$

EC. DE LAPLACE EN COORD ESFÉRICAS

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

COMO LA CARGA PUNTUAL ESTÁ EN EL ORIGEN.
Y POR SIMETRÍA ESFÉRICA NO HAY VARIACION EN θ Y ϕ

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right)$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \leftarrow$$ EN PUNTOS DISTINTOS AL ORIGEN

TOMANDO $V(R,t) = \frac{1}{R} U(R,t)$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U}{R}\right) = \frac{(\partial U/\partial R) R - (\partial R/\partial R) U}{R^2} =$$

$$R^2 \frac{\partial V}{\partial R} = \cancel{R^2}\left[\frac{\frac{\partial U}{\partial R} R - \frac{\partial R}{\partial R} U}{\cancel{R^2}}\right] = \frac{\partial U}{\partial R} R - U$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial U}{\partial R} R - U\right) = \cancel{\frac{\partial U}{\partial R} \underbrace{\frac{\partial R}{\partial R}}_{=1}} + R\frac{\partial^2 U}{\partial R} - \cancel{\frac{\partial U}{\partial R}} = R\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) = \frac{1}{R^{\cancel{2}}}\cancel{R}\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}$$

RESULTA

$$\cancel{\frac{1}{R}}\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon \cancel{\frac{1}{R}}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$$U(Rt) \begin{cases} \nearrow f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) \\ \searrow f(t + R\sqrt{\mu\epsilon}) \end{cases}$$

SOLUCIONES.

$f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ ES LA QUE TIENE SENTIDO FÍSICO.

REPRESENTA UNA ONDA QUE VIAJA EN LAS R POSITIVAS, CON $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ VELOC. DE PROPAGACIÓN

$$V(Rt) = \frac{1}{R} U(Rt) = \frac{1}{R} f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v}\right)$$

CONSIDERANDO $\rho(t)\Delta v'$ EN EL ORIGEN EL POTENCIAL ES:

CASO ESTATICO

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon R}$$

$$\Delta V(R) = \frac{\rho(t)\Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

$$\Delta V(Rt) = \Delta f\left(t - \frac{R}{v}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right)\Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

$$\boxed{V(Rt) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dv'}$$

POTENCIAL ESCALAR ELECTRICO RETARDADO.

ANALOGAMENTE PARA LA EC. DIF DE $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{A}(Rt) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dv'}$$

ECUACION DE ONDAS EN UNA REGION SIN FUENTES

$\rho = 0$

$J = 0$

LAS ECUACIONES DE MAXWELL SE REDUCEN A:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \qquad (4)$$

APLICANDO EL ROTOR EN (1)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

POR LO TANTO SE OBTIENE

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad \text{COMO } v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

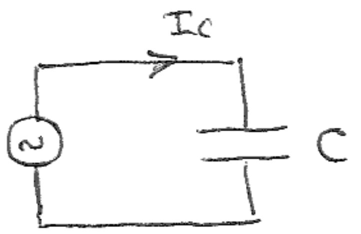
$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

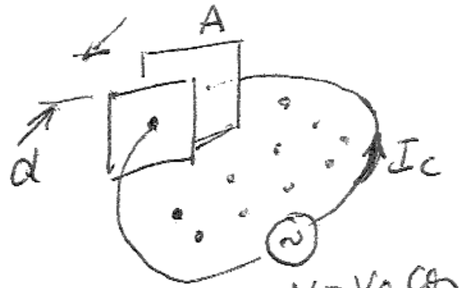
ANALOGAMENTE

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

ECUACION DE ONDA HOMOGENEA, VECTORIAL

EJEMPLO.





$V = V_0 \cos \omega t$
$(V_0 e^{j\omega t})$

$V = V_0 \cos \omega t.$
$(V_0 e^{j\omega t})$

LA CORRIENTE DE CONDUCCIÓN QUE CIRCULA POR EL ALAMBRE ES:

$$I_c = C \frac{dV}{dt}$$

COMO $V = V_0 e^{j\omega t}$

$$I_c = C\, j\omega \underbrace{V_0 e^{j\omega t}}_{V} = j\omega C V$$

LA CAPACIDAD DE UN CAPACITOR DE CARAS PLANAS PARALELAS ES:

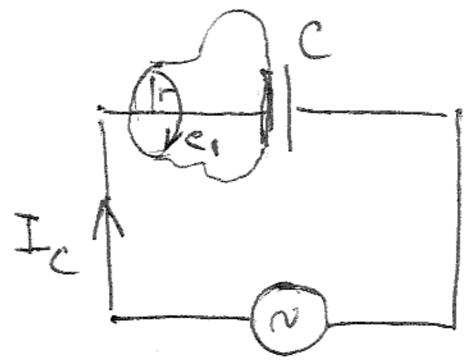
$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

$$I_c = j\omega C V = j\omega \epsilon \frac{A}{d} V$$

LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO:

$$I_d = \int_S \vec{J}_d\, d\vec{s} = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \int ds = A \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = A \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$I_d = A\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(V_0 e^{j\omega t}/d\right) = \underbrace{\frac{A\epsilon}{d}}_{=C}\, j\omega \underbrace{V_0 e^{j\omega t}}_{V} = j\omega C V$$



EL CAMPO MAGNÉTICO SE PUEDE CALCULAR COMO:

$$\oint_{c_1} \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_c + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

LEY DE AMPERE GENERALIZADA.

POR EL ALAMBRE DENTRO DEL CAMINO C_1 SOLO SE TIENE I_C.

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_C$$

A UNA DISTANCIA r

$$2\pi r H_\phi = I_C$$

$$H_\phi = \frac{I_C}{2\pi r} = j\omega \underbrace{\epsilon \frac{A}{d}}_{C} \frac{V}{2\pi r}$$

$$\boxed{H_\phi = \frac{j\omega C}{2\pi r} V_0 \cos\omega t}$$

$$\boxed{E = \frac{V_0}{d} \cos\omega t}$$