Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Tercera fecha. 16 de febrero de 2024.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Verificar la convergencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(5x)}{x^4+2x^2+1}dx$ y calcular su valor.

Ejercicio 2. Dada $f : [-3,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2+2 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ mx+b & \text{si } 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$, hallar valores de m y b para los que la serie trigonométrica de Fourier de f en $[-3,5]$ converja uniformemente. En tal caso, analizar la convergencia de la serie resultante al derivar término a término la serie anterior.

Ejercicio 3. Describir un sistema físico que pueda ser modelado como:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(2x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = v(x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

y proponer $v(x)$ tal que su solución $u(x,t)$ verifique $u(\frac{\pi}{2},1) = 1$.

Ejercicio 4. Siendo $\hat{f}(w)$ la transformada de Fourier de f, obtener $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w-a)e^{iwt}dw = \begin{cases} \cos t & |t| < \pi \\ -1/2 & |t| = \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

¿Es única? Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(w)\right|^2 dw$.

Ejercicio 5. Calcular la transformada de Laplace de $|\operatorname{sen} t|$, especificando su dominio de convergencia. Resolver para $t > 0$

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) = 0 \\ x(t) - y'(t) = |\operatorname{sen} t| \end{cases} \quad \text{con } x(0^+) = 0, \ y(0^+) = 0$$

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

***Resolución del ejercicio* 1.**

La integral converge absolutamente, pues para todo $x \in \Re$ es $\left|\frac{\cos(5x)}{x^4+2x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

y la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ es convergente (el integrando es continuo en toda la recta y asintóticamente equivalente a $\frac{1}{x^4}$).

Cálculo:

Para el cálculo de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{(x^2+1)^2}dx$, podemos recurrir al método habitual: consideremos – como en muchos casos análogos vistos en clase – la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{e^{5iz}}{(z^2+1)^2} = \frac{e^{5iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} \tag{1.1}$$

y , para cada $R > 1$, el circuito de la figura . Por el teorema de los residuos, para cada $R > 1$ es

$$\int_{I_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi\, i RES(f,i) \qquad (1.2)$$

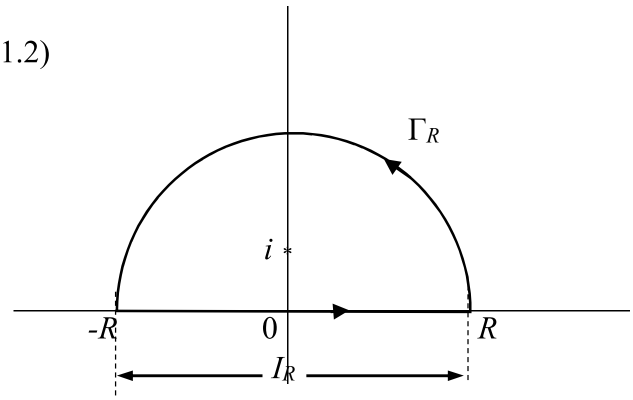

***Figura* 1**

Ahora bien: para cada $R > 1$:

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{5ix}}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(5x)}{(x^2+1)^2}dx + i\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{sen(5x)}{(x^2+1)^2}dx}_{=0}$$

(la segunda integral se anula pues el integrando es impar)

Como el segundo miembro de (1.2) no depende de *R*, si $\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi\, i RES(f,i) \tag{1.3}$$

Veamos entonces si se verifica que $\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$, punto clave de todo este cálculo:

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{5i(R\cos(\theta)+iRsen(\theta))}}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2} iR.e^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \frac{Re^{-5R\,sen(\theta)}}{\left|R^2e^{2i\theta}+1\right|^2}d\theta \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{Re^{-5R\,sen(\theta)}}{\left|R^2-1\right|^2}d\theta \overset{R>1}{=} \frac{R}{(R^2-1)^2}\int_0^{\pi} e^{-5Rsen(\theta)}d\theta \overset{\substack{\text{Lema de}\\ \text{Jordan}}}{\le} \frac{R}{(R^2-1)^2}\,\frac{\pi}{5R} = \frac{\pi}{5(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Comentario: El sabio Swami Diaguishankar observa que el uso del Lema de Jordan es, en este caso, excesiva, pues no hace justicia a su extrema sutileza. Alcanzaría con la cota $\int_0^{\pi} e^{-5Rsen(\theta)}d\theta \leq \pi$, mucho más gruesa y que se deduce trivialmente de la desigualdad $e^{-5Rsen(\theta)} \leq 1$, válida para todo $\theta \in [0,\pi]$.

Entonces, la igualdad (1.3) es válida y solo nos queda el cálculo del residuo de *f* en *i* (se trata de un polo doble):

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}\overbrace{\frac{e^{5iz}}{(z+i)^2}}^{h(z)} = \frac{1}{(z-i)^2}\left(h(i) + h'(i)(z-i) + \frac{h''(i)}{2!}(z-i)^2 + \frac{h'''(i)}{3!}(z-i)^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{h(i)}{(z-i)^2} + \boxed{\frac{h'(i)}{z-i}} + \frac{h''(i)}{2!} + \frac{h'''(i)}{3!}(z-i) + \ldots$$

Es decir: $RES(f,i) = h'(i) = \left.\frac{5ie^{5iz}(z+i)^2 - e^{5iz}2(z+i)}{(z+i)^4}\right|_{z=i} = \frac{5ie^{-5}(2i)^2 - e^{-5}4i}{(2i)^4} = -\frac{24}{16e^5}i = -\frac{3}{2e^5}i$.

Por lo tanto, de (1.3) tenemos:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi\, iRES(f,i) = \frac{3\pi}{e^5}}$$

***Resolución del ejercicio* 2**.

Condición necesaria – <u>no suficiente</u> – para la convergencia uniforme de la serie de Fourier de f (a f) en el intervalo [–3, 5] es que la extensión periódica $\tilde{f}$ de f sea continua.

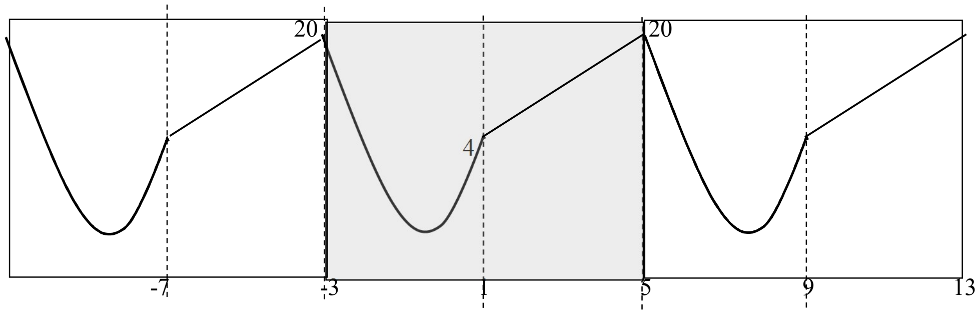

***Figura* 2: Gráfico de** $\tilde{f}$ (no está en escala)

Tenemos, por lo tanto, las ecuaciones $m+b = f(1^+) = f(1^-) = 4$ y $5m+b = f(5^-) = f(-3^+) = 20$, de donde resulta $m = 4$ y $b = 0$. Con estas determinaciones, $\tilde{f}$ es continua además $\tilde{f}\,'$ es seccionalmente continua (puede comprobarse fácilmente). Por lo tanto [Teorema 5.b – pág. 24 – Apunte sobre series de Fourier], la serie de Fourier de $\tilde{f}$ (que es la serie de Fourier de *f*) converge absoluta y uniformemente a $\tilde{f}$ en toda la recta y por lo tanto converge uniformemente a *f* en [–3, 5].

Finalmente, la serie resultante de derivar término a término la serie de Fourier de $\tilde{f}$ no puede ser uniformemente convergente, pues si lo fuera, sería convergente a $\tilde{f}\,'$, que no es continua (*). Dado que $\tilde{f}\,'$ es periódica y seccionalmente continua, su serie de Fourier converge en media (norma 1), en media cuadrática (norma 2) y puntualmente $\tilde{f}\,'$. [Todas estas afirmaciones están demostradas en el apunte ya mencionado]

(*) Recordemos que en los puntos x donde $\tilde{f}$ no es derivable pero tiene derivadas laterales finitas, definimos $\tilde{f}\,'(x) = \dfrac{\tilde{f}\,'(x^+) + \tilde{f}\,'(x^-)}{2}$, consistentemente con el criterio de Dirichlet de convergencia puntual de la serie derivada.

***Resolución del ejercicio* 3**.

El problema

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=0 & , \quad 0<x<\pi\ , t>0 \\ (ii) u(0,t)=u(\pi,t)=0 & , \quad t\geq 0 \\ (iii) u(x,0)=sen(2x) & , \quad 0\leq x\leq \pi \\ (iv) \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v(x) & , \quad 0\leq x\leq \pi \end{cases} \tag{3.1}$$

ya se puede considerar un clásico en nuestro curso – se trata del modelo matemático de una cuerda vibrante – y se puede resolver por separación de variables y superposición de soluciones de la parte lineal (*i*) y (*ii*), obteniéndose

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} sen(n\,x)[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)] \quad . \tag{3.2}$$

Imponiendo la condición (*iii*):

$$u(x,t)=sen(2x)\cos(2t)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\,x)sen(nt) \quad . \tag{3.3}$$

Veamos ahora la condición (*iv*) (asumiendo, como es habitual en estos problemas, la posibilidad de derivar la serie término a término):

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left. -2sen(2x)sen(2t)+\sum_{n=1}^{\infty} nb_n sen(nx)\cos(nt)\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n sen(nx) \overset{(iv)}{=} v(x)$$

Esta ecuación permite determinar los coeficientes b_n, pues cada nb_n es el n-ésimo coeficiente de Fourier de la extensión 2π-periódica impar de v. Tenemos para elegir…. Finalmente, la última condición es $u\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)=1$, que en términos de la serie (3.3) significa

$$1=\overbrace{sen(\pi)}^{=0}\cos(2)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)sen(n)=b_1 sen(1)-b_3 sen(3)+b_5 sen(5)-b_7 sen(7)+\ldots$$

Una elección muy sencilla y que evita problemas de convergencia es

$$b_1=\frac{1}{sen(1)} \qquad \text{y} \quad b_n=0 \ \text{ para todo } \ n\geq 2\,.$$

En este caso, nos quedaría

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x,t) = sen(2x)\cos(2t) + \dfrac{1}{sen(1)} sen(x) sen(t) \\ \\ \text{siendo } v(x) = \dfrac{1}{sen(1)} sen(x) \end{array}}$$

***Resolución del ejercicio* 4.**

Otro clásico. La función $h(t) = \begin{cases} \cos(t) & si \ |t| < \pi \\ -\dfrac{1}{2} & si \ |t| = \pi \\ 0 & si \ |t| > \pi \end{cases}$ es seccionalmente continua, absolutamente integrable y verifica las condiciones de Dirichlet del Teorema de Inversión de la Transformación de Fourier, incluyendo el prolijo valor en las dos discontinuidades (= promedio del salto). Entonces:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - a) e^{i\omega t} d\omega \overset{\omega = a+\beta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\beta) e^{i(a+\beta)t} d\beta = e^{iat} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\beta) e^{i\beta t} d\beta \overset{\substack{Teorema \\ de\ Inversión}}{=} e^{iat} 2\pi f(t)$$

Es decir: $$\boxed{f(t) = \frac{e^{-iat}}{2\pi} h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-iat}}{2\pi}\cos(t) & si \ |t| < \pi \\ -\dfrac{e^{ia\pi}}{4} & si \ t = -\pi \\ -\dfrac{e^{-ia\pi}}{4} & si \ t = \pi \\ 0 & si \ |t| > \pi \end{cases}}$$

Desde ya que esta no es la única función posible: cualquier otra que difiera de ésta en una cantidad finita de puntos en cada intervalo acotado de la recta, tiene la misma transformada de Fourier. Ahora, la integral pedida tiene el aroma inconfundible de la identidad de Parseval. Es claro que el módulo de f es de cuadrado integrable, por lo tanto:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{-iat}\cos(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \{ t + sen(t)\cos(t) \}_{t=0}^{t=\pi} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

***Resolución del ejercicio* 5**.

Para la cuenta que sigue, se recomienda tener en mente el gráfico de $|sen(t)|$:

$$\int_0^{\infty}|sen(t)|e^{-st}dt=\int_0^{\pi}sen(t)e^{-st}dt-\int_{\pi}^{2\pi}sen(t)e^{-st}dt+\int_{2\pi}^{3\pi}sen(t)e^{-st}dt-\int_{3\pi}^{4\pi}sen(t)e^{-st}dt+...=$$

(los cambios de variables que siguen son obvios: $t=\theta$ en la primera, $t=\theta+\pi$ en la segunda, $t=\theta+2\pi$ en la tercera, $t=\theta+3\pi$ en la cuarta…)

$$=\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta-\int_0^{\pi}sen(\theta+\pi)e^{-s(\theta+\pi)}d\theta+\int_0^{\pi}sen(\theta+2\pi)e^{-s(\theta+2\pi)}d\theta-\int_0^{\pi}sen(\theta+3\pi)e^{-s(\theta+3\pi)}d\theta+...=$$

$$=\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta+e^{-s\pi}\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta+e^{-s2\pi}\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta+e^{-s3\pi}\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta+...=$$

$$=\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta(1+e^{-s\pi}+e^{-s2\pi}+e^{-s3\pi}+e^{-s4\pi}+...)\overset{(*)}{=}\int_0^{\pi}sen(\theta)e^{-s\theta}d\theta\,\frac{1}{1-e^{-s\pi}}=$$

$$=\left\{\left(-\frac{s}{1+s^2}sen(\theta)-\frac{1}{1+s^2}\cos(\theta)\right)e^{-s\theta}\right\}_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{1}{1-e^{-s\pi}}=\left(-\frac{1}{1+s^2}\cos(\pi)e^{-s\pi}+\frac{1}{1+s^2}\right)\frac{1}{1-e^{-s\pi}}=$$

$$=\frac{e^{-s\pi}+1}{1+s^2}\,\frac{1}{1-e^{-s\pi}}=\frac{e^{s\pi}+1}{(1+s^2)(e^{s\pi}-1)}$$

La igualdad $(*)$ es válida sii $\left|e^{-s\pi}\right|<1$, es decir, sii $\mathrm{Re}(s)>0$. Resumiendo, la transformada de Laplace de $|sen(t)|$ es $F(s)=\dfrac{e^{s\pi}+1}{(1+s^2)(e^{s\pi}-1)}$, con abscisa de convergencia $\sigma_c=0$.

Ahora, resolvamos el sistema $\begin{cases}(i)\;\; x'(t)-y(t)=0\\ (ii)\; x(t)-y'(t)=|sen(t)|\end{cases}$ con las condiciones iniciales $x(0^+)=0$, $y(0^+)=0$. Aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases}(i)_L\;\; sX(s)-Y(s)=0\\ (ii)_L\; X(s)-sY(s)=F(s)\end{cases}$$

Despejando: $X(s)=\dfrac{F(s)}{1-s^2}$, $Y(s)=\dfrac{sF(s)}{1-s^2}$. Dado que la transformada de Laplace de $\cosh(t)H(t)$ es $\dfrac{s}{s^2-1}$ y la de transformada de Laplace de $senh(t)H(t)$ es $\dfrac{1}{s^2-1}$, podemos concluir que

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t)=(\alpha * f)(t)\;\;,\;\; y(t)=(\beta * f)(t)\;,\\ \text{donde } \alpha(t)=-senh(t)H(t)\,,\; \beta(t)=-\cosh(t)H(t)\quad \text{y}\quad f(t)=|\,sen(t)\,|\,H(t)\end{array}}$$
