Ejercicio 1

Sean dos procesos ESA $X(n)$ e $Y(n)$ que responden a las siguientes ecuaciones:

$$X(n) = V(n) + V(n-1) \quad ; \quad Y(n) = X(n) + 4X(n-1) + X(n-2)$$

(a) Suponiendo que $V(n)$ es un proceso blanco de media nula y varianza unitaria. Determine la densidad espectral de potencia $S_X(\omega)$.

(b) Determine las densidades espectrales $S_Y(\omega)$ y $S_{XY}(\omega)$.

a) Primero busco $R_x(k)$

$$R_x(k) = E[X(n)X(n+k)] = E[(V(n)+V(n-1))(V(n+k)+V(n-1+k))]$$

$$= E[V(n)V(n+k) + V(n)V(n-1+k) + V(n-1)V(n+k) + V(n-1)V(n-1+k)]$$

$$= E[V(n)V(n+k)] + E[V(n)V(n-1+k)] + E[V(n-1)V(n+k)] + E[V(n-1)V(n-1+k)]$$

$$R_v(k) \quad + R_v(k-1) \quad + R_v(k+1) \quad + R_v(k)$$

$$= 2R_v(k) + R_v(k-1) + R_v(k+1)$$

Como V es Ruido blanco de varianza unitaria

$$= 2\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k+1)$$

Transformando

$$= 2 + e^{-jw} + e^{jw} = 2(1+\cos(w))$$

b)

$$Y(n) = X(n) + 4X(n-1) + X(n-2)$$

$$Y(w) = X(w) + 4e^{-jw}X(w) + e^{-2jw}X(w)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = 1 + 4e^{-jw} + e^{-2jw}$$

$$|H(w)|^2 = (1+4e^{-jw}+e^{-2jw})(1+4e^{jw}+e^{2jw})$$

$$1+4e^{jw}+e^{2jw}+4e^{-jw}+16+4e^{jw}+e^{-2jw}+4e^{-jw}+1$$

$$18+16\cos(w)+2\cos(2w)$$

$$S_Y = |H(w)|^2 S_X = [2+2\cos(w)][18+16\cos(w)+2\cos(2w)]$$

$$36+32\cos(w)+4\cos(2w)+36\cos(w)+32\cos^2(w)+4\cos(w)\cos(2w)$$

$$36+68\cos(w)+4\cos(2w)+32\cos^2(w)+4\cos(w)\cos(2w)$$

$$S_{XY} = H(w)S_X(w) = (1+4e^{-jw}+e^{-2jw})(2+2\cos(w))$$

$$= 2+2\cos(w)+8e^{-jw}+8e^{-jw}\cos(w)+2e^{-2jw}+2e^{-2jw}\cos(w)$$

Ejercicio 2

Se desea estimar un vector aleatorio gaussiano $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]^T$ con media nula y matriz de correlación R_X. Para eso se realizan n mediciones $Y_1, ..., Y_n$ del siguiente modo:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = H\mathbf{X} + \mathbf{W},$$

donde H es una matriz de $n \times n$ determinística, conocida e inversible, y $\mathbf{W}$ es un vector de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza unitaria, descorrelacionado de $\mathbf{X}$.

(a) Halle la función de densidad conjunta entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ en términos de R_X y H.

(b) Demuestre que el mejor estimador lineal en el sentido del MSE de $\mathbf{X}$ en función de la observación $\mathbf{Y}$ es:

$$\hat{\mathbf{X}} = R_X H^T (H R_X H^T + I)^{-1} \mathbf{Y}.$$

a) Y Resultará Gaussiana por ser Suma de Gausianas descorrelacionadas

Para la PDF Conjunta Necesito μ_Y y C_Y

$$\mu_Y = E[HX+W] = HE[X]+E[W] = 0$$

$$C_{XY} = \begin{bmatrix} R_X & R_{XY} \\ R_{YX} & R_Y \end{bmatrix}$$

$$R_{XY} = E[XY^T] = E[X(HX+W)^T]$$

$$E[XX^T H^T] + \underbrace{E[XW^T]}_{\substack{\text{Indep} \\ =0}} = E[XX^T]H^T = R_X H^T$$

$$R_{YX} = E[YX^T] = E[HXX^T + \underbrace{WX^T}_{0}] = HR_X$$

$$R_Y = E[YY^T] = E[(HX+W)(HX+W)^T]$$

$$= E[HXX^TH^T + \underbrace{WX^T H}_{0} + \underbrace{HXW^T}_{0} + WW^T]$$

$$= HR_XH^T + I$$

$$C_{XY} = \begin{bmatrix} R_X & R_X H^T \\ HR_X & HR_XH^T + I \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} Z \\ \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} \det(C_{XY})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T C_{XY}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

b) $\hat{X} = \underbrace{\mu_x}_{0} + R_{xy} R_y^{-1} (y - \overbrace{\mu_y}^{0})$

Reemplazando con las R_{xy} y R_y calculadas
Anterior mente

$$\hat{X} = R_x H^T (H R_x H^T + I)^{-1} y$$