Ejercicio 1

Sean X e Y variables aleatoria con distribución normal bivariada con densidad

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Demostrar que X y $Z = (Y-\rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ son variables normales estándar independientes.

$$g(X,Y)\begin{cases} Z = \dfrac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ W = X \end{cases} \qquad g^{-1}(W,Z)\begin{cases} Y = Z\sqrt{1-\rho^2} + \rho W \\ X = W \end{cases}$$

$$|Jg^{-1}| = \begin{vmatrix} \dfrac{dy}{dz} & \dfrac{dy}{dw} \\ \dfrac{dx}{dz} & \dfrac{dx}{dw} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1-\rho^2}$$

Luego, $f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(x,y)\,|Jg^{-1}|$

$$= \frac{1}{2\pi\cancel{\sqrt{(1-\rho^2)}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(w^2 - 2\rho w\left[z\sqrt{1-\rho^2}+\rho w\right] + \left[z\sqrt{1-\rho^2}+\rho w\right]^2\right)\right)\cdot\cancel{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Analizo el exponente por separado, para no tener que repetir lo otro

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\rho^2)}\left(w^2 \cancel{- 2\rho w z\sqrt{1-\rho^2}} - \cancel{2}\rho^2 w^2 + z^2(1-\rho^2) \cancel{+ 2\rho w z\sqrt{1-\rho^2}} + \rho^2 \cancel{w}^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\rho^2)}\left(w^2-\rho^2w^2+z^2(1-\rho^2)\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{1+\rho^2}}\left(w^2\cancel{(1-\rho^2)}+z^2\cancel{(1-\rho^2)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(w^2+z^2\right)$$

Finalmente, $f_{ZW}(z,w) = \dfrac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(w^2+z^2\right)\right)$

Luego, como $X = W \Rightarrow f_{XZ}(z,x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2)}$

y resulta evidente que, tomando $\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sim N(0,1) \\ f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sim N(0,1) \end{cases}$

Por lo que $f_{XZ}(z,x) = f_X(x) f_Z(z)$

Lo que implica que X y Z son Ind.

Ejercicio 2

Sean un vector aleatorio normal $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}_X, C_X) \in \mathbb{R}^2$ de acuerdo a los siguientes datos:

$$\boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar una transfomración afín $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$, tal que $\mathbf{Y}$ sea una variable aleatoria con la siguiente media y covarianza:

$$\boldsymbol{\mu}_Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Esbozar un gráfico con la elipse de concentración canónica ($\mathbf{x}^T C_X^{-1} \mathbf{x} = 1$) para ambos vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

(c) Exprese la densidad conjunta $f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$ y las marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$.

$$E[Y] = E[AX+b] = E[AX] + E[b] = AE[X] + b$$
$$= A\mu_X + b$$

$$C_Y = E[(Y-E[Y])(Y-E[Y])^T] = E[(AX+\cancel{b}-AE[X]-\cancel{b})(AX+\cancel{b}-AE[X]-\cancel{b})^T]$$
$$= E[(AX-AE[X])(AX-AE[X])^T] = E[A(X-E[X])(X-E[X])^T A^T]$$
$$= AE[(X-E[X])(X-E[X])^T]A^T = AC_XA^T$$

$$C_Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{5} = a4$ $\qquad$ $\frac{6}{5} = b9$

$a = \frac{1}{20}$ $\qquad$ $b = \frac{2}{15}$

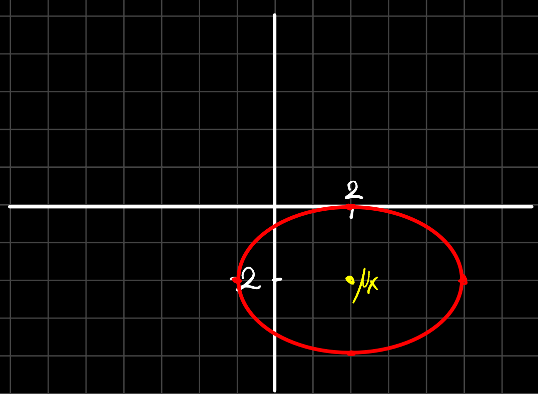
$$C_Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \underbrace{\overset{a}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}} \overset{c}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}}}_{A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & -2\sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{-2}{\sqrt{20}} & -\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}} \overset{d}{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}} \underbrace{\overset{c}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}} \overset{a}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}}_{A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{-2}{\sqrt{20}} \\ -2\sqrt{\frac{2}{15}} & -\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}} =$$

$$A\mu_x + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & -2\sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{-2}{\sqrt{20}} & -\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

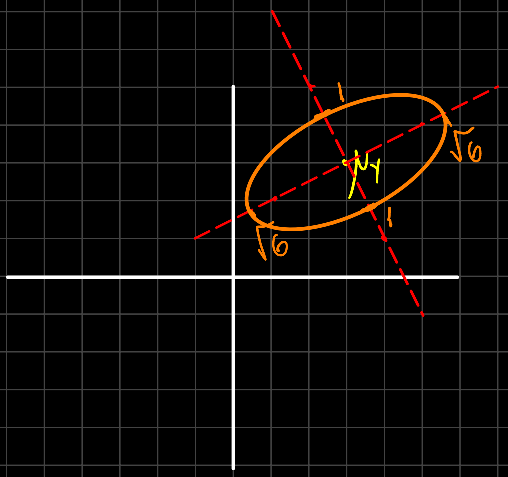
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{20}} + 2\sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{-4}{\sqrt{20}} + 2\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{matrix} 1,8224 \\ 3,164130 \end{matrix}$$

b) Para X: $\quad C_x = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mu_x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$



Para Y: $\quad C_Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mu_Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Diagonalizando C_Y: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

c) $f_Y(y) = \dfrac{1}{2\pi \, |C_Y|^{1/2}} \exp\left[\frac{1}{2} (y - \mu_Y)^T C_Y^{-1} (y - \mu_Y) \right]$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 1} \exp\left[\frac{-(y_1 - 3)^2}{2 \cdot 1} \right]$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{6}} \exp\left[\frac{-(y_2 - 3)^2}{2 \cdot 6} \right]$$

Ejercicio 3

Sea Y una variable aleatoria de distribución exponencial de media 2. Dadas 5 realizaciones de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$:

$$0.442, 0.091, 0.514, 0.608, 0.175.$$

(a) Obtenga 5 realizaciones de la variable Y.

(b) Con los valores obtenidos en el inciso anterior estime $\mathbb{P}(Y > 2)$ usando Monte Carlo. Justifique.

a) $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad F_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \lambda e^{-\lambda t} \, dt = 1 - e^{-\lambda y}$

$$F_Y^{-1}(t) = \frac{-\ln(1-t)}{\lambda} \qquad \text{con } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$F_Y^{-1}(t) = -2\ln(1-t) \begin{cases} t = 0{,}442 & y = 1{,}1667 \\ t = 0{,}091 & y = 0{,}1908 \\ t = 0{,}514 & y = 1{,}4430 \\ t = 0{,}618 & y = 1{,}9246 \\ t = 0{,}175 & y = 0{,}3847 \end{cases}$$

b) $$\mathbb{P}(y > 2) = \frac{\#\,\text{Realizaciones} > 2}{\#\,\text{Realizaciones}} = 0$$

A mayor numero de Realizaciones, mejor será la estimación.