Ejercicio 1

Se sabe que aproximadamente el 30 % de las personas poseen una variante del gen MC1R, que está asociado con el color del cabello. Se desea analizar una muestra de 20 personas elegidas al azar para estudiar cuántas de ellas tienen esta variante genética.

(a) ¿Cómo modelaría una variable aleatoria X que represente la cantidad individuos que poseen el gen MC1R dentro de ese grupo? Especifique la distribución con sus parámetros.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo hayan 3 personas con el gen MC1R?

a) Se tiene una muestra de 20 personas y se busca cuantas veces se cumple una condición en la muestra, la mejor forma de modelarlo es con una distribución Binomial de parámetros $n=20$ y $p=0,3$

b) Sea X = "cantidad de personas con gen MC1R en un grupo de 20"

Con $X \sim Bin\left(20, \frac{3}{10}\right)$

Si busco $\mathbb{P}(X=3)$, evalúo la función de probabilidad en $x=3$: $\binom{20}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(1-\frac{3}{10}\right)^{20-3} = 0,0716$

Ejercicio 2

Monk dispara a un blanco y el disparo impacta en un punto aleatorio (X, Y) con densidad conjunta de la forma $f_{XY}(x, y)$ como se desribe en la siguiente ecuación. Mostrar que el punto de impacto, en coordenadas polares (R, Θ), son variables aleatorias independientes.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Coordenadas polares:

$X = R\cos(\Theta) \qquad Y = R\,\mathrm{sen}(\Theta)$

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{R}{2\pi\left(1+R^2\cos(\theta)^2+R^2\operatorname{sen}(\theta)^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{R}{2\pi\left(1+R^2\underbrace{(\cos(\theta)^2+\operatorname{sen}(\theta)^2)}_{1}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{R}{2\pi\,(1+R^2)^{3/2}}$$

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r)\,f_\Theta(\theta)$$

Si son Indep

$$f_R(r) = \frac{R}{(1+R^2)^{3/2}} \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

Ejercicio 3

Sean dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2. Demuestre que si se define una variable aleatoria $Y = aX_1 + bX_2$, donde a y b son constantes, entonces la varianza de Y resulta:

$$\operatorname{Var}(Y) = a^2\operatorname{Var}(X_1) + b^2\operatorname{Var}(X_2).$$

$$\operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}(aX_1 + bX_2)$$

$$= E[(aX_1+bX_2)^2] - E[aX_1+bX_2]^2$$

$$E[a^2X_1^2 + 2abX_1X_2 + b^2X_2^2] - (aE[X_1] + bE[X_2])^2$$

$$a^2E[X_1^2] + 2abE[X_1X_2] + b^2E[X_2^2] - a^2E[X_1]^2 - b^2E[X_2]^2 - 2abE[X_1]E[X_2]$$

$$a^2(E[X_1^2] - E[X_1]^2) + b^2(E[X_2^2] - E[X_2]^2) + 2ab(E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2])$$

$$= a^2\operatorname{Var}(X_1) + b^2\operatorname{Var}(X_2) + \underbrace{2ab\operatorname{Cov}(X_1,X_2)}_{=0}$$

por ser Ind.

Ejercicio 4

Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias con densidad conjunta $f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)$. Demuestre que la densidad conjunta de X_1, X_2, X_3 puede factorizarse como:

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1|X_2X_3}(x_1 \mid x_2, x_3) f_{X_2|X_3}(x_2 \mid x_3) f_{X_3}(x_3).$$

$$f_{X_1|X_2X_3}(x_1 \mid x_2, x_3) = \frac{f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)}{f_{X_2X_3}(x_2, x_3)}$$

$$f_{X_2|X_3} = \frac{f_{X_2X_3}(x_2, x_3)}{f_{X_3}(x_3)} \qquad f_{X_3}(x_3)$$

Multiplicando Todo

$$\frac{f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)}{f_{X_2X_3}(x_2, x_3)} \frac{f_{X_2X_3}(x_2, x_3)}{f_{X_3}(x_3)} f_{X_3}(x_3) = f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)$$