4. En el ejemplo del 11.3 vimos que a partir del vector $\mathbf{A}(a_1, a_2)$ del plano se puede formar el pseudovector $\mathbf{B}(-a_2, a_1)$. La divergencia de este pseudovector será $\operatorname{div}\mathbf{B} = -a_{2x} + a_{1y}$, que efectivamente sabemos que es un pseudoescalar, según el ejemplo de 11.4.

3. Interpretaciones físicas de la divergencia. Aunque más adelante, al dar el llamado teorema de la divergencia (apartado 21), justificaremos de manera más rigurosa y precisa lo que ahora vamos a decir, podemos ya adelantar una idea del importante significado físico de la divergencia.

Supongamos un fluido en movimiento y sea $\mathbf{A} = a_1\mathbf{I} + a_2\mathbf{J} + a_3\mathbf{K}$ el vector velocidad del mismo en cada punto. Es decir, $\mathbf{A}$ es un campo de velocidades, cuyas componentes a_i las suponemos funciones derivables de las tres coordenadas x, y, z. Consideremos el punto $P(x, y, z)$ y un paralelepípedo elemental que a partir de P tiene las aristas paralelas a los versores fundamentales $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ y de longitudes respectivas $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (fig. 49).

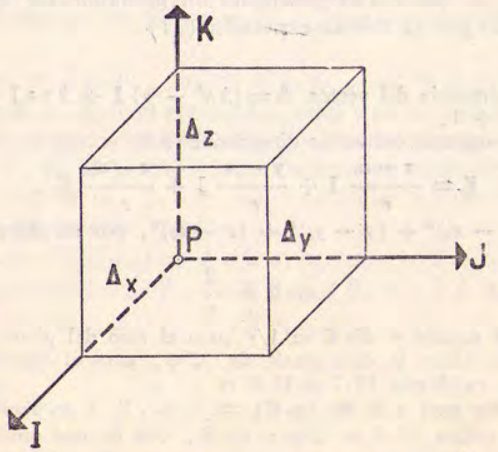

FIGURA 49

La cantidad de fluido que entrará en el paralelepípedo por la cara normal al vector $\mathbf{I}$ por unidad de tiempo será $a_1(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z$ (producto de la componente de la velocidad según $\mathbf{I}$, por el área de la sección de entrada) y la cantidad que saldrá por la cara opuesta será $a_1(x + \Delta x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z$. Para $\Delta x \to 0$ la diferencia entre estas dos cantidades es $a_{1x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$.

De igual manera, las diferencias análogas para las otras caras del paralelepípedo son $a_{2y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, $a_{3z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Por tanto, la cantidad de fluido que por unidad de tiempo se ha creado en el paralelepípedo elemental considerado es $(a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \operatorname{div}\mathbf{A}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. De aquí resulta que: *la divergencia del vector* $\mathbf{A}$ *en el punto* P *es el cociente entre la cantidad de fluido que se crea por unidad de tiempo en el volumen elemental correspondiente a* P *y este volumen, cuando el mismo tiende a reducirse al punto* P.

Naturalmente que si $\operatorname{div}\mathbf{A}$ resulta negativa, en vez de "crearse" fluido en P, hay que entender que se "consume" fluido en este punto. En el primer caso se dice que en P hay una *fuente* y en el segundo un *desagüe* o *sumidero*.

De manera abreviada y general, se tiene por tanto la *ecuación de conservación*:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = F - D \tag{16}$$

donde F (fuente) indica la cantidad de fluído que se crea y D (desagüe) la que se consume en P, por unidad de tiempo.

Vamos a considerar algunos ejemplos particulares de esta fórmula general.

a) Ecuación de continuidad de la hidrodinámica. Consideremos el caso en que el fluido es un líquido de densidad ϱ (función de las coordenadas x, y, z y también del tiempo t) y apliquemos el razonamiento anterior al vector $\mathbf{A} = \varrho\mathbf{V}$, siendo $\mathbf{V}$ la velocidad. En este caso, en vez de "cantidad de fluido", medida en volumen, que se crea o consume en el volumen elemental correspondiente a P por unidad de tiempo, tendremos el producto de aquel volumen por la densidad, o sea, la *masa* del líquido. La $\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}(\varrho\mathbf{V})$ será, por tanto, la cantidad de masa que se crea o consume por unidad de tiempo en P. Entre estas cantidades hay que incluir ahora la cantidad que se "acumula" en el mismo punto, debido a una variación en la densidad ϱ. Esta masa que se acumula por unidad de tiempo vendrá medida por la derivada $\partial\varrho/\partial t$ y habrá que tomarla negativa, pues es una masa que entra en P y no sale, apareciendo por consiguiente como un desagüe *.

Si representamos por $\psi = \psi(x, y, z, t)$, la masa creada $(\psi > 0)$ o consumida $(\psi < 0)$ por unidad de tiempo en P, tendremos entonces

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{V}) = \psi - \frac{\partial\varrho}{\partial t} \tag{17}$$

que es la *ecuación de continuidad* de la hidrodinámica. Como vemos, ella no expresa otra cosa que la conservación de la masa.

Si el líquido es incompresible, es $\varrho = \text{cte.}$ y la ecuación de continuidad queda

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{V}) = \psi \tag{18}$$

* Si la derivada de ϱ respecto de t es negativa, en vez de acumulación de masa hay una dilución y entonces aparece esta derivada como fuente, lo cual está de acuerdo con el signo tomado para la misma en la ecuación (17).

y si, además, no hay fuentes ni desagües, queda

(19) $$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \;.$$

b) *Ecuación del calor.* Si en vez de un líquido, interpretamos el fluido como el calor que se desplaza a través de un cuerpo, el vector **A** representará ahora la *corriente calórica,* o sea, el vector cuyo producto por un elemento de área normal a él es igual a la cantidad de calor que atraviesa este elemento por unidad de tiempo. La cantidad de calor creada, consumida o acumulada por unidad de tiempo en un punto P, será también igual a la div **A**.

Si no hay fuentes ni desagües de calor, la cantidad del mismo que se acumula en P se traducirá en una variación de la temperatura T en P, medida por la expresión $c\varrho(\partial T/\partial t)$, donde c es el calor específico y ϱ la densidad del medio. Si en un punto la temperatura aumenta $(\partial T/\partial t) > 0)$ significa que hay acumulación de calor, es decir, que sale menos calor del que entra y por tanto que el punto debe considerarse como un desagüe. En cambio, si la temperatura disminuye $(\partial T/\partial t) < 0)$, quiere decir que sale más calor que el que entra; el punto se comporta como una fuente. Por consiguiente la ecuación de conservación será en este caso

(20) $$\operatorname{div} \mathbf{A} = - c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} \;.$$

La ley más simple de conducción del calor postula que sea

(21) $$\mathbf{A} = - k \operatorname{grad} T$$

siendo k una constante. Sustituyendo en (20) aparece la div grad T que es un escalar, llamado *laplaciano* de T (ver apartado 16) y que se representa por

$$\Delta T = \operatorname{div} \operatorname{grad} T$$

con lo cual la ecuación (20) se escribe

(22) $$k\Delta T - c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

que es la ecuación fundamental de la conducción del calor.

c) *Campo eléctrico.* El caso del campo eléctrico **E** (en ausencia de conductores) que aparece en la teoría de Maxwell es muy distinto, en principio, de los anteriores. Aquí no hay movimiento de ningún fluido, ni por tanto tiene sentido la ecuación de conservación en la forma (16).

Sin embargo se puede proceder por analogía (confirmada por la experiencia) y sentar como principio que: el campo eléctrico **E** creado por una carga e es idéntico al campo de velocidades correspondiente a un fluido incompresible de densidad $1/4\pi$ producido por una fuente puntual de intensidad e.

En general, si las cargas están distribuidas de manera continua en el espacio, con densidad $\varrho(x, y, z)$, al pasar al modelo del fluido tendremos la ecuación (18), en la cual es ahora $\psi = \varrho$ y la densidad ϱ que allí figura es ahora igual a $1/4\pi$. Queda de esta manera

(23) $$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho$$

que es la primera de las ecuaciones fundamentales de la teoría de Maxwell (ver apartado 26).

EJERCICIOS

1. Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales

a) $(3x^2 - y + z)\,\mathbf{I} + \cos y\,\mathbf{J} - e^z\mathbf{K}$

b) $x^2\mathbf{I} + y^2\mathbf{J} + z^2\mathbf{K}$

c) $r^n(\mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K})$ siendo $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

d) $x^2 y\,\mathbf{I} - \cos y\,\mathbf{J} + z\mathbf{K}$.

2. Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales en el punto indicado

a) $(x^2 + y)\,\mathbf{I} + z^2\mathbf{J} - xz\mathbf{K}$ en $(-3, 0, 1)$

b) $xyz\,\mathbf{I} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{J} - z^2\mathbf{K}$ en $(0, \pi/4, 1)$

c) $x\mathbf{I} - y\mathbf{J} + e^z\mathbf{K}$ en $(1, 1, 0)$.

3. Calcular la divergencia y luego el gradiente de la divergencia de los siguientes campos vectoriales.

a) $x^2\mathbf{I} - xy\mathbf{J} + z^2\mathbf{K}$

b) $\operatorname{sen} x\,\mathbf{I} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{J} + \operatorname{sen} z\,\mathbf{K}$

c) $r^2\mathbf{I} + yr\mathbf{J} + zr\mathbf{K}$, $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$.

4. Sea $\mathbf{A} = (3x^2 + y)\,\mathbf{I} - (\operatorname{sen} x - z)\,\mathbf{J} + \alpha\mathbf{K}$. Hallar α con la condición de que sea $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

5. Sea $\mathbf{A} = (\operatorname{sen} x - z)\,\mathbf{I} + \alpha\mathbf{J} + zy\mathbf{K}$. Hallar α con la condición de que sea $\operatorname{div}\mathbf{A} = -x$.

6. Probar las identidades

a) $\operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) = (\mathbf{A}.\mathbf{C}) \operatorname{div}\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B}) \operatorname{div}\mathbf{C} + \mathbf{B}.\operatorname{grad}(\mathbf{A}.\mathbf{C}) - \mathbf{C}.\operatorname{grad}(\mathbf{A}.\mathbf{B})$.

b) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi \wedge \varphi \operatorname{grad}\psi) = 0$.

c) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi \wedge \operatorname{grad}\psi) = 0$.

15. EL ROTOR

1. El rotor. De manera análoga a como se han obtenido las ecuaciones 14.7 se obtiene

$$a'_{2z'} = (\Sigma\,\beta_i\,a_{ix})\,\gamma_1 + (\Sigma\,\beta_i\,a_{iy})\,\gamma_2 + (\Sigma\,\beta_i\,a_{iz})\,\gamma_3$$
$$a'_{3y'} = (\Sigma\,\gamma_i\,a_{ix})\,\beta_1 + (\Sigma\,\gamma_i\,a_{iy})\,\beta_2 + (\Sigma\,\gamma_i\,a_{iz})\,\beta_3$$

donde, como siempre, los índices x, y, z o x', y', z' indican derivadas parciales y las sumas se suponen extendidas desde $i = 1$ hasta $i = 3$.

De aquí, restando miembro a miembro y teniendo en cuenta el teorema 3 del apartado 10, resulta que si el triedro primitivo y su transformado tienen la misma orientación, vale

(1) $$a'_{3y'} - a'_{2z'} = \alpha_1\,(a_{3y} - a_{2z}) + \alpha_2\,(a_{1z} - a_{3x}) + \alpha_3\,(a_{2x} - a_{1y})$$

y la misma fórmula con el signo cambiado si tienen orientaciones opuestas.

Por tanto, estas fórmulas de transformación nos dicen que la diferencia $a_{3y} - a_{2z}$ se transforma como la primera componente de un pseudovector. Análogamente se obtiene que las diferencias $a_{1z} - a_{3x}$ y

$a_{2x} - a_{1y}$ se transforman como segunda y tercera componentes del mismo pseudovector. Está por tanto justificada la siguiente

DEF. 1: Se llama *rotor* (o *rotacional*) de un vector **A** de componentes a_1, a_2, a_3 (funciones de x, y, z) al pseudovector de componentes

(2) $$a_{3y} - a_{2z} \quad , \quad a_{1z} - a_{3x} \quad , \quad a_{2x} - a_{1y}$$

el cual se indica por rot **A**.

Es decir,

(3) $$\text{rot}\,\mathbf{A} = (a_{3y} - a_{2z})\,\mathbf{I} + (a_{1z} - a_{3x})\,\mathbf{J} + (a_{2x} - a_{1y})\,\mathbf{K}\ .$$

Como regla mnemotécnica, obsérvese que rot **A** resulta como desarrollo del determinante

(4) $$\text{rot}\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

donde los productos simbólicos $\dfrac{\partial}{\partial x} a_2$, $\dfrac{\partial}{\partial y} a_3$, ... hay que entenderlos como las derivadas parciales respectivas $\dfrac{\partial}{\partial x} a_2 = a_{2x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} a_3 = a_{3y}$, ...

Consecuencia inmediata de la definición es que

(5) $$\text{rot}\,(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{rot}\,\mathbf{A} \pm \text{rot}\,\mathbf{B}\ .$$

Si se trata de un pseudovector en vez de un vector, el rotor se define por las mismas componentes (2). Solamente hay que observar que el resultado es ahora un vector, puesto que por cambios de coordenadas que invierten la orientación del espacio, las componentes del pseudovector cambian de signo, y al formar las combinaciones (2) aparece otro cambio de signo, lo que equivale, en conjunto, a ningún cambio, quedando la ley de transformación de los vectores. Por tanto se tiene:

DEF. 1′: Se llama *rotor* de un pseudovector **A** de componentes a_1, a_2, a_3 (funciones de x, y, z) al vector cuyas componentes son las expresiones (2).

En particular, si **A** es un vector, el resultado de aplicar dos veces el operador rot, o sea, rot rot **A** es nuevamente un vector.

2. **Líneas de rotor o torbellino.** Dado un campo vectorial **A**, el conjunto de los rot **A** forma otro campo vectorial (o mejor, un campo pseudovectorial) llamado *campo de rotores*. Las líneas de campo (14.1) de un campo de rotores se suelen llamar *líneas de torbellino*. Sus ecuaciones diferenciales serán las 14.2 sustituyendo a_1, a_2, a_3 por las componentes del rotor, o sea,

(6) $$\frac{dx}{a_{3y} - a_{2z}} = \frac{dy}{a_{1z} - a_{3x}} = \frac{dz}{a_{2x} - a_{1y}}\ .$$

Ejemplos:

1. Si es $\mathbf{A} = x^2\mathbf{I} - (x+y)\,\mathbf{J} + (z^3 - \text{sen}\,x)\,\mathbf{K}$, entonces será $\text{rot}\,\mathbf{A} = \cos x\ \mathbf{J} - \mathbf{K}$.

2. Sea $\mathbf{A} = x r\,\mathbf{I} + y r\,\mathbf{J} + z r\,\mathbf{K}$, con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. La primera componente del rotor es

$$z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z} = z\frac{y}{r} - y\frac{z}{r} = 0$$

y análogamente las otras componentes, de manera que resulta $\text{rot}\,\mathbf{A} = 0$.

3. Si es $\mathbf{A} = a(r)\,\mathbf{I} + b(r)\,\mathbf{J} + c(r)\,\mathbf{K}$, siendo a, b, c funciones de r, es

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = [\,(y c' - z b')\,\mathbf{I} + (z a' - x c')\,\mathbf{J} + (x b' - y a')\,\mathbf{K}]\,r^{-1}$$

donde los acentos indican derivadas respecto de r.

4. Dado el campo de vectores $\mathbf{A} = x z\,\mathbf{I} - (3x + y)\,\mathbf{J} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{K}$ las líneas de torbellino estarán dadas por el sistema

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-3}\ ;$$

que igualado a dt, e indicando con puntos las derivadas respecto del parámetro auxiliar t, equivale a

$$\dot{x} = 2y \quad , \quad \dot{y} = -x \quad , \quad \dot{z} = -3\ .$$

Las dos primeras ecuaciones dan $\ddot{x} + 2x = 0$, o sea, $x = a\cos\sqrt{2}\,t + b\,\text{sen}\,\sqrt{2}\,t$; la segunda ecuación da entonces $y = -(a/\sqrt{2})\,\text{sen}\,\sqrt{2}\,t + (b/\sqrt{2})\cos\sqrt{2}\,t$ y la última $z = -3t + c$. Éstas son las ecuaciones paramétricas de las líneas de torbellino; a, b, c son constantes arbitrarias.

3. **Significado físico del rotor. Ejemplos.** El concepto de rotor tiene mucha importancia en física, sobre todo en mecánica de fluidos y en electrodinámica. Vamos a dar una idea intuitiva de su significado.

Consideremos un campo de vectores $\mathbf{A} = a_1\mathbf{I} + a_2\mathbf{J} + a_3\mathbf{K}$ y la circunferencia C de radio r situada en el plano x, y con centro en el origen de coordenadas. Sea P un punto de la circunferencia y **T** el versor tangente (fig. 50). Las componentes de **T** son $-\text{sen}\,\varphi$, $\cos\varphi$ y por tanto

(7) $$\mathbf{A}.\mathbf{T} = -a_1\,\text{sen}\,\varphi + a_2\cos\varphi\ .$$

Interpretando **A** como un campo de fuerzas, la integral

(8) $$\gamma = \int_C \mathbf{A}.\mathbf{T}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}.\mathbf{T}\,r\,d\varphi$$

es el *trabajo* de las fuerzas **A** al desplazarse sobre toda la circunferencia C. En general, para vectores **A** cualesquiera, la integral (8) se llama *circulación* de **A** sobre C.

Para calcular γ necesitamos conocer las funciones $a_1(x, y, z)$

$a_2(x, y, z)$, $a_3(x, y, z)$. Suponiendo r suficientemente pequeño, el desarrollo en serie de Taylor nos da

$$a_1(x,y,0) = a_{10} + a_{1x}x + a_{1y}y + \ldots = a_{10} + a_{1x}\, r \cos\varphi + a_{1y}\, r \operatorname{sen}\varphi + \ldots$$

$$a_2(x,y,0) = a_{20} + a_{2x}x + a_{2y}y + \ldots = a_{20} + a_{2x}\, r \cos\varphi + a_{2y}\, r \operatorname{sen}\varphi + \ldots$$

Sustituyendo estos valores en (7) y (8) resulta

$$\gamma = -\, a_{1y}\, \pi r^2 + a_{2x}\, \pi r^2 + r^3\, (\ldots)$$

y por tanto

$$a_{2x} - a_{1y} = \lim_{r \to 0} \frac{\gamma}{\pi r^2}\,. \tag{9}$$

Es decir: *si en un campo de vectores se coloca una circunferencia C de radio r y centro en un punto O, la componente del rotor en O según la normal al plano que contiene C, es igual al límite, para $r \to 0$, de*

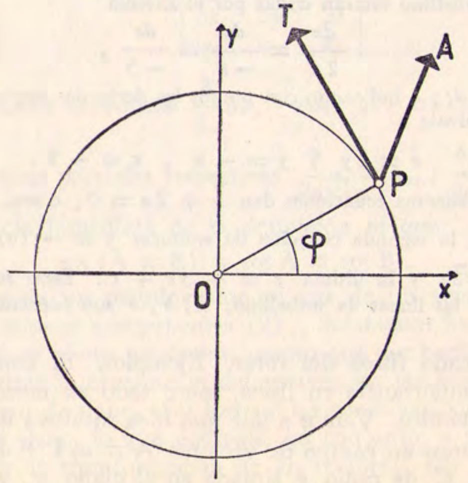

Figura 50

la circulación del campo a lo largo de C, dividida por el área del círculo que encierra.

En cuanto al sentido, una vez fijada una orientación para C (o sea, el sentido del versor tangente **T**), se determina por la regla del sacacorchos u otra análoga (ver 4.2), teniendo en cuenta que la orientación de C más la de rot **A** debe dar una orientación directa al espacio si $\gamma > 0$ e inversa si $\gamma < 0$.

El resultado obtenido, como veremos más adelante (apartado 22) es general para cualquier curva cerrada infinitamente pequeña y desde ahora nos permite dar una idea del significado físico del rotor.

Supongamos que **A** es un campo de fuerzas y la circunferencia C una rueda que puede girar en su plano, sin rozamiento, alrededor de O por acción de la fuerza **A**; si $\gamma > 0$, la acción total de las fuerzas originará una rotación de la rueda en sentido directo (el de **T**); si $\gamma < 0$ el movimiento será en sentido inverso y si $\gamma = 0$ no habrá tal rotación.

Es decir, colocando una ruedecita de prueba en los distintos puntos de un campo, ella tenderá a girar en los puntos en que el rotor sea distinto de cero y quedará quieta en los puntos en que el rotor sea nulo.

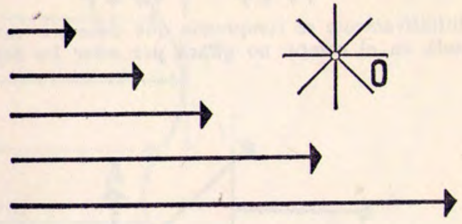

Figura 51

Lo mismo ocurre si interpretamos **A** como un campo de velocidades de las partículas de un fluido en movimiento. Supongamos (fig. 51) un fluido que se mueve paralelamente al eje x con velocidad decreciente con la altura. Una rueda con aspas colocada en un punto O

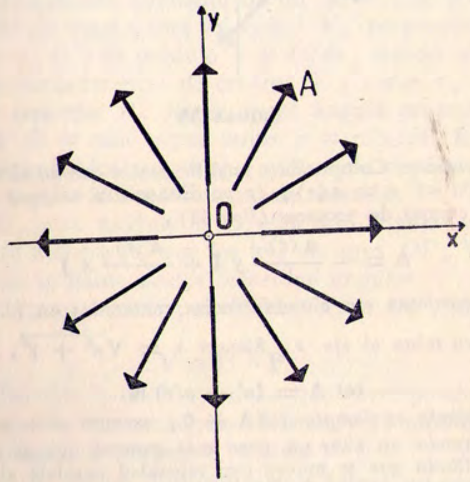

Figura 52

girará, empujada por el flúido, en el sentido indicado en la figura, pues la mayor velocidad de arrastre de las aspas inferiores prevalecerá sobre la de las aspas superiores que tienden a girar en sentido contrario. Esto quiere decir que en O el rotor del campo es distinto de cero; su sentido es el normal al plano del dibujo, hacia adelante.

Ejemplos:

1. Consideremos el campo radial de la figura 52, o sea,

$$\mathbf{A} = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{I} + \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{J}$$

con $a = \text{cte}$. Intuitivamente se comprende que debe ser $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$, pues una ruedecilla colocada en el campo no girará por estar las aspas empujadas por

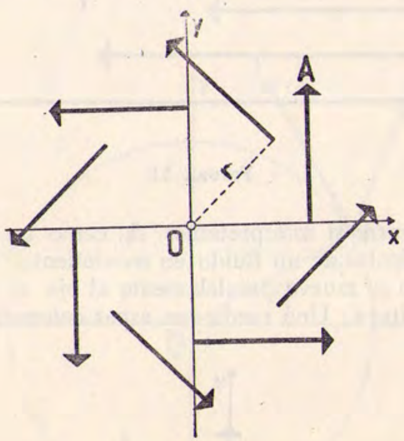

Figura 53

igual en ambos sentidos. Compruébese analíticamente que en efecto es $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$, aun en el caso de ser $a = a(r)$, (r = distancia al origen).

2. Sea el campo de vectores (fig. 53),

$$\mathbf{A} = -\frac{a(r)}{r}\,y\,\mathbf{I} + \frac{a(r)}{r}\,x\,\mathbf{J}$$

cuyas líneas de corriente son circunferencias contenidas en planos paralelos al x, y y de centro sobre el eje z. Siendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$, la definición de rotor da

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = (a' + a/r)\,\mathbf{K}\,.$$

Por consiguiente es siempre $\operatorname{rot}\mathbf{A} \neq 0$, excepto si $a = c/r$.

3. Consideremos un caso un poco más general que el de la figura 51. Supongamos un flúido que se mueve con velocidad paralela al eje x, la cual varía con la altura según cierta función dada $\varphi = \varphi(z)$ (fig. 54). El campo de velocidades será $\mathbf{A} = \varphi(z)\,\mathbf{I}$.

Por tanto $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \varphi'\,\mathbf{J}$. Para que el rotor sea nulo debe ser $\varphi' = 0$, o sea, debe tratarse de un punto (como el P de la figura) en que la tangente a la curva $x = \varphi(z)$ sea vertical. Ello está de acuerdo con el significado intuitivo mencionado del rotor, pues en estos puntos las aspas de un molinete infinitesimal colocado en ellos estarán empujadas por igual, las superiores y las inferiores, y el molinete no girará.

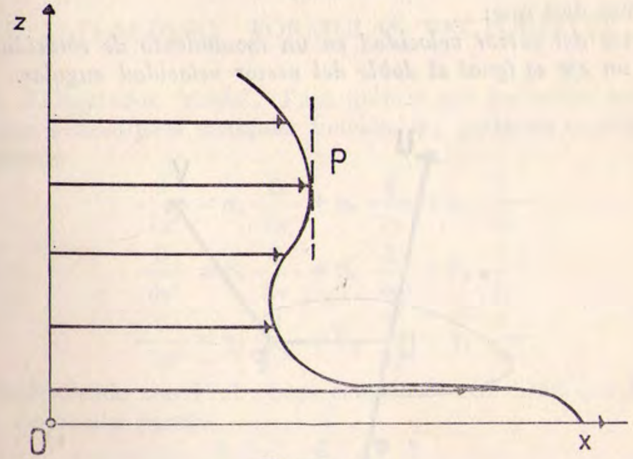

Figura 54

4. Velocidad angular. Otra interpretación del rotor. Supongamos un movimiento de rotación alrededor de un eje e (fig. 55). Un punto P que dista r del eje tendrá una velocidad $\mathbf{V}$, perpendicular al plano determinado por e, P y de módulo $v = ds/dt$, siendo ds el elemento de arco sobre la circunferencia de centro O y radio r, o sea, la circunferencia que describe P. Si ω es el ángulo central de esta circunferencia, será $ds = r d\omega$ y por tanto $v = r d\omega/dt$. El valor $d\omega/dt$ es el mismo para todos los puntos que giran (no depende de r) y se llama *velocidad angular* del movimiento de rotación.

El vector $\mathbf{U}$, cuyo módulo es la velocidad angular y está dirigido según el eje e de manera tal que los tres vectores OP, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ formen un triedro directo, se llama *vector velocidad angular*.

Según esto, representando por $\mathbf{P}$ el vector OP, de módulo r, será

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{P}$$

puesto que la dirección y sentido son los que corresponden por formar $\mathbf{P}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ un triedro trirrectángulo directo, y el módulo es también igual en ambos miembros por ser $v = r\,d\omega/dt$.

La velocidad $\mathbf{V}$ de los distintos puntos forma un campo vectorial. Queremos hallar el rotor de este campo. Puesto que el rotor no depende de los ejes coordenados (mientras se mantenga la orientación del espacio), podemos tomar el eje e como eje z y el plano normal en que se mueve P como plano x, y. Entonces, llamando α a la velocidad angular, es $\mathbf{U} = \alpha \mathbf{K}$, $\mathbf{P} = x\mathbf{I} + y\mathbf{J}$. Por tanto $\mathbf{U} \wedge \mathbf{P} = -\alpha y \mathbf{I} + \alpha x \mathbf{J}$ De aquí, $\operatorname{rot}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{P}) = 2\alpha \mathbf{K} = 2\mathbf{U}$. Es decir

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 2\mathbf{U} .$$

Esto nos dice que:

El rotor del vector velocidad en un movimiento de rotación alrededor de un eje es igual al doble del vector velocidad angular.

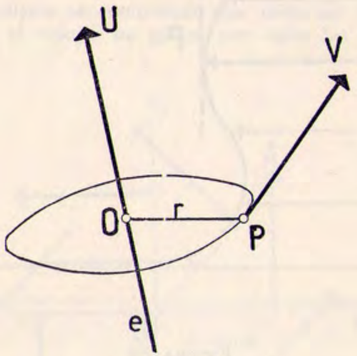

FIGURA 55

EJERCICIOS

1. Hallar el rotor de los siguientes campos vectoriales

a) $(\operatorname{sen} x - y)\,\mathbf{I} + (x^2 + z)\,\mathbf{J} - z^3\mathbf{K}$

b) $e^x\mathbf{I} - y\mathbf{J} + z\mathbf{K}$

c) $x^2\mathbf{I} + y^2\mathbf{J} + z^2\mathbf{K}$

d) $\log x\,\mathbf{I} + \log y\,\mathbf{J} + \log z\,\mathbf{K}$

e) $(x^3 - y^3)\,\mathbf{I} + xyz\,\mathbf{J} - z^3\mathbf{K}$.

2. Hallar el rotor de los siguientes campos vectoriales en el punto indicado

a) $(x^2 - \log y)\,\mathbf{I} + xyz\,\mathbf{I} - z^3\mathbf{K}$ en $(-1, 1, 0)$

b) $3xy\mathbf{I} + \sqrt{y}\,\mathbf{J} + \sqrt{z}\,\mathbf{K}$ en $(3, 4, 2)$

c) $\operatorname{sen} x\,\mathbf{I} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{J} + \operatorname{sen} z\,\mathbf{K}$ en $(0, \pi/2, \pi)$.

3. Siendo $\varphi = 3x^2e^y \operatorname{sen} z$, hallar rot grad φ.

4. Siendo $\mathbf{A} = x^2\mathbf{I} - (x + y + z)\,\mathbf{J} - xz\mathbf{K}$ hallar rot grad div $\mathbf{A}$ en el punto $(1, -1, 2)$.

5. Si $\mathbf{A} = \varphi(r)\,\mathbf{X}$ siendo $\mathbf{X} = x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}$ y φ una función de $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, probar que $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$.

6. Si $\mathbf{A}$ es un vector constante y $\mathbf{X}$ el mismo vector del ejercicio anterior, probar que $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{X}) = 2\mathbf{A}$.

7. Si $\mathbf{A}$ es un vector constante, probar la identidad

$$\mathbf{A}.[\operatorname{grad}(\mathbf{B}.\mathbf{A}) - \operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})] = \operatorname{div}\mathbf{B}$$

válida cualquiera que sea el vector $\mathbf{B}$.

8. Probar la identidad

$$\operatorname{rot}[\operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi] = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} .$$

9. Hallar las líneas de torbellino del campo de velocidades $\mathbf{V} = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{I}$.

10. Sea el vector $\mathbf{A} = 2x\mathbf{I} - z^2y\mathbf{J} + h\mathbf{K}$. Hallar la expresión general de la función $h(x, y, z)$, para que sea $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$.

16. EL LAPLACIANO. FÓRMULAS VECTORIALES

1. El operador "nabla". Para indicar que las ecuaciones 13.2 y 13.2′ son válidas para cualquier función φ, podemos escribirlas, simbólicamente

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

Comparando con 11.1, estas ecuaciones nos dicen que los símbolos de derivación parcial

(1) $$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

pueden considerarse como las componentes de un vector simbólico, puesto que por un cambio de coordenadas se transforman según la ley característica de los vectores.

Este vector simbólico u operador se representa por ∇ ("nabla") Se llama operador porque representa una operación que debe efectuarse sobre una función.

Lo importante de este concepto es que, transformándose sus tres componentes como las de un vector, se puede considerar como tal y por tanto combinarlo con otros vectores mediante las operaciones vectoriales conocidas.

Así, por ejemplo, el producto escalar de ∇ por un vector $\mathbf{A}$ nos da precisamente la *divergencia*:

(2) $$\nabla\, \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} a_1 + \frac{\partial}{\partial y} a_2 + \frac{\partial}{\partial z} a_3 = \operatorname{div}\mathbf{A} .$$

El producto vectorial de ∇ por $\mathbf{A}$ es el rot $\mathbf{A}$. En efecto, según 4.17 y 15.4, es

(3) $$\nabla \wedge \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\mathbf{A} .$$