1. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 bolas azules y 5 bolas rojas. Se extrae una bola al azar y se la repone junto con dos del mismo color. Luego se realiza una segunda extracción. Calcular la probabilidad de que en ambas extracciones se observen bolas del mismo color.

12 bolas en Total

$\mathbb{P}[\text{sacar una blanca}] = 3/12 = 1/4$

$\mathbb{P}[\text{'' '' Azul}] = 4/12 = 1/3$

$\mathbb{P}[\text{'' '' roja}] = 5/12$

$\mathbb{P}[\text{sacar 2 blancas}] = \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{56}$

$\mathbb{P}[\text{sacar 2 Azules}] = \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{14} = \frac{1}{7}$

$\mathbb{P}[\text{sacar 2 rojas}] = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{14} = \frac{5}{24}$

$\mathbb{P}[\text{sacar 2 Iguales}] = \mathbb{P}[\text{sacar 2 blancas}] + \mathbb{P}[\text{sacar 2 Azules}] + \mathbb{P}[\text{sacar 2 rojas}]$

Por ser mutuamente excluyentes.

$\mathbb{P}[\text{sacar 2 Iguales}] = \frac{37}{84}$

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad conjunta:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{x^2 y}{36} \mathbf{1}\{x \in \{-1, 1, 2\}, y \in \{1, 2, 3\}\}$$

Sean $U = \text{mín}(X, Y)$ y $V = \text{máx}(X, Y)$. Calcular $\mathbf{P}(U = 1 | V = 2)$.

Necesito $\mathbb{P}(U=1 \cap V=2)$ y $\mathbb{P}(V=2)$

1. Con las cifras 1,2,3,4 y 5 se escriben todos los números posibles de tres cifras distintas. Si se selecciona un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de dos?

1 2 3 4 5

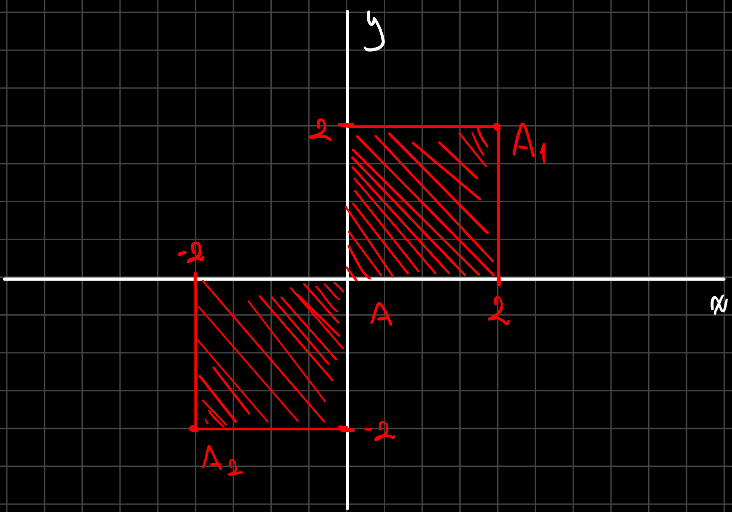
$\overline{5}\ \overline{4}\ \overline{3}$ $\qquad \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ $\Rightarrow$ estos son todos los que puedo armar

$\overline{3}\ \overline{4}\ \overline{2}$ $\qquad 3.4.2 = 24$ $\Rightarrow$ estos los pares

La prob es $\dfrac{24}{60} ? = 0,4$

Parece que le pegué, Proba champagne.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre la unión de los cuadrados definidos por $(0, 2) \times (0, 2)$ y $(-2, 0) \times (-2, 0)$. Hallar la densidad conjunta de $(U, V) = (|X|, |Y|)$.



$\mathbb{P}((U,V) \in A) = \mathbb{P}((|X|,|Y|) \in A)$

Cambio de variable

Los Jacobianos me acompañarán hasta la muerte.

Primero busco $f_{X,Y}(x,y)$, uso $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8}\, \mathbb{1}\{(x,y) \in A\}$

$U = u(x) = |x| \qquad V = v(y) = |y|$ Como no son biyectivas,

Aplico el Generalizado, Las particiones son claras, Una es con $x, y > 0$ y la otra con $x, y < 0$

Entonces, Para $x, y > 0$ $\quad u(x) = x \quad v(y) = y$

$$f'_{U,V}(u,v) = \left.\frac{f_{X,Y}(x,y)\,\mathbb{1}\{(x,y)\in A_1\}}{\det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}}\right|_{\substack{u^{-1}\\ v^{-1}}} = \frac{1}{8}\mathbb{1}\{(u,v)\in A_1\}$$

$x<0,\ y<0 \quad u(x) = -x \quad v(y) = -y$

$$f''_{U,V}(u,v) = \left.\frac{f_{X,Y}(x,y)\,\mathbb{1}\{(x,y)\in A_2\}}{\det\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{vmatrix}}\right|_{\substack{u^{-1}\\ v^{-1}}} = \frac{1}{8}\mathbb{1}\{(-u,-v)\in A_2\}$$

$$f_{U,V}(u,v) = f'_{U,V} + f''_{U,V} = \frac{1}{8}\mathbb{1}\{(u,v)\in A_1\} + \frac{1}{8}\mathbb{1}\{(-u,-v)\in A_2\}$$

$(u,v)\in A_1 = \begin{matrix} 0<u<2 \\ 0<v<2 \end{matrix} \qquad (-u,-v)\in A_2 = \begin{matrix} -2<-u<0 \\ -2<-v<0 \end{matrix} = \begin{matrix} 2>u>0 \\ 2>v>0 \end{matrix}$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}\{(u,v)\in A_1\}$$

3. Vehículos paran a comer en el restaurante de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 6 por hora. El número de pasajeros en cada vehículo es independiente y puede ser 1,2,3 o 4 con probabilidades 0.3, 0.4, 0.2 y 0.1, respectivamente. Calcular la cantidad esperada de personas que entran al restaurante en un periodo de 8 horas, si sabe que en ese mismo intervalo de tiempo pararon en el restaurante 50 vehículos.

Proceso Poisson mezclado con prob. Condicional? $\Rightarrow$ No

Llamo V a los vehiculos que paran en el resto

y llamo Q a la cantidad de personas por auto

Lo voy a plantear como coloreo con 4 colorcitos

Tengo $V \sim Poi(\lambda t) \Rightarrow V \sim Poi(6t)$

Si lo planteo como coloreo, tengo

La cantidad que llega de 1 persona en t tiempo

$N_1(t) \sim Poi(\lambda p_1)$

$N_2(t) \sim Poi(\lambda p_2)$

$N_3(t) \sim Poi(\lambda p_3)$

$N_4(t) \sim Poi(\lambda p_4)$

Yo lo que quiero es

$(N \mid V=50)(t=6)$

Resulta que estuve haciendo cualquier cosa, era mucho más simple.

$$p_Q(q) = 0{,}3\,\mathbb{1}\{Q_x=1\} + 0{,}4\,\mathbb{1}\{Q_x=2\} + 0{,}2\,\mathbb{1}\{Q_x=3\} + 0{,}1\,\mathbb{1}\{Q_x=4\}$$

Y = Cantidad total de personas que entran al resto

$$Y \mid V(0,8)=n\,(y) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

busco $E[Y/V=50] = E\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right] = 50\,E[X] = 50 \times 2{,}1 = 105$

$E[X=] = 0{,}3\times 1 + 0{,}4\times 2 + 0{,}2\times 3 + 0{,}1\times 4 = 2{,}1$

Personas llegan a un puesto de control de salud para realizarse un test que puede dar positivo o negativo. La cantidad de personas testeadas desde comienzo del día hasta la primera que da positivo es una variable aleatoria con distribución geométrica. Se registraron valores de esta variable durante 20 días, obteniendo la siguiente tabla

cantidad de personas	1	2	3	5	7	13	15	22	41
frecuencia	7	3	2	1	3	1	1	1	1

A partir de la información muestral, estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que en un próximo día la cantidad de testeos hasta el primer positivo sea mayor a 19.

X: "Personas testeadas hasta el primer positivo"

$X \sim Geom(p)$

el EMV de p es $\hat{p}_{MV}(X) = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{6,8} = 0,147$

entonces, $\mathbb{P}(X > 19) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 19) = \sum_{i=1}^{19} (1 - \hat{p}_{mv})^{i-1} \hat{p}_{mv} = 0,0487$

5. El número de personas que llega a la boletería de una estación de trenes entre las 14:00 y 14:30 es una variable aleatoria con distribución de Poisson. El jefe de la estación está evaluando la posibilidad de abrir otra ventanilla en ese horario y considera que es necesario sólo si la media de arribos en ese intervalo de tiempo es superior a 20. Durante 45 días se observó el número de personas que arriba en dicho horario, resultando un promedio de 21 individuos. Proponer un test de nivel asintótico 0.01 para este problema y decidir en base a los datos observados.

esto es de lo que no entiendo un choto

X: "N° de personas que llega a la estación entre las 14:00 y 14:30"

$X \sim Poi(\mu)$

$H_0: \overbrace{E[X]}^{\mu} \leq 20$ $\qquad$ $H_1: \overbrace{E[X]}^{\mu} > 20$

Necesito un Test para H_0 con $\alpha_{asin} = 0,01$

Como X es de familia exponencial

$$P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \underbrace{\frac{e^{\overbrace{x}^{t(x)} \overbrace{Ln(\mu)}^{c(\mu)}}}{x!}}_{h(x)} \underbrace{e^{-\mu}}_{A(\mu)}$$

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$c(\mu) = Ln(\mu) \rightarrow$ creciente

Entonces, mi Test será:

$$\delta(\underset{\frown}{X}) = \mathbb{1}\{T > K_\alpha\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mu=20}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > K_\alpha\right) = \mathbb{P}_{\mu=20}\left(\delta(\underset{\frown}{X})=1\right) = 0{,}01$$

Me toca Normalizar, ando a saber x_{α} ⇒ Fucking TCL

Como todas las $X_i \sim Poi(\mu)$, $E(X_i)=\mu$ $Var(X_i)=\mu$

$$\mathbb{P}_{\mu=20}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{\mu n}} > \frac{K_\alpha - n\mu}{\sqrt{\mu n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{K_\alpha - n\mu}{\sqrt{\mu n}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(K'_\alpha) \qquad K'_\alpha = 2{,}32635$$

$$\delta(\underset{\frown}{X}) = \mathbb{1}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 20n}{\sqrt{20n}} > 2{,}32\right\}$$

en mi caso, $\sum_{i=1}^{n} X_i = 21.45$ y $n = 45$, entonces

$$\delta(\underset{\frown}{X}) = \mathbb{1}\{\ 1{,}\overline{5} > 2{,}32\} = 0$$

No abro otra ventanilla.

La tensión de ruptura (en Volts) de ciertos diodos 1N4007 es una variable aleatoria T. Para cada $L = \lambda$, X tiene distribución exponencial de parámetro λ. A priori L puede tomar los valores 0.001 y 0.0005 con probabilidad 0.4 y 0.6 respectivamente. Se observa que un diodo 1N4007 tiene una tensión de ruptura de 978 Volts. En base a la información muestral estimar la probabilidad de que otro diodo del mismo tipo tenga una duración de por lo menos 1000 Volts.

T: "Tensión de Ruptura de diodos" $T = X$, Andá a saber xq.

$T \sim Exp(\lambda)$

Mi Muestra es 1 diodo con $T = 978$

Primero voy a ver en que puta unidad estoy.
Como me Imaginé, en la 12 (Keyword del enunciado: "A priori")

distribución a priori: $\begin{cases} p_\lambda(0{,}001) = 0{,}4 \\ p_\lambda(0{,}0005) = 0{,}6 \end{cases}$

Además, $f_{T|\lambda=L}(t) = L e^{-Lt} \mathbb{1}\{t > 0\}$

A posteriori, $p_{\lambda|T=t}(0{,}001) = \dfrac{f_{T|\lambda=0{,}001}(t) \cdot p_\lambda(0{,}001)}{K}$

$$p_{\lambda|T=t}(0{,}0005) = \frac{f_{T|\lambda=0{,}0005}(t) \cdot p_\lambda(0{,}0005)}{K}$$

$$K = f_{T|\lambda=0{,}001}(t) \cdot p_\lambda(0{,}001) + f_{T|\lambda=0{,}0005}(t) \cdot p_\lambda(0{,}0005)$$

Calculanding: $K = 3{,}3432 \times 10^{-4}$

$p_{\lambda|T=978}(0{,}001) = 0{,}44984$

$p_{\lambda|T=978}(0{,}0005) = 0{,}55017$

Y Finalmente, $\mathbb{P}(T_{t1} > 1000 | T_0 = 978) = \sum_{L \in \Lambda} \mathbb{P}(T_{t1} > 1000 | \lambda) \mathbb{P}(\lambda = L | T = 978)$

$$e^{-0{,}001 \cdot 1000} \cdot 0{,}44984 + e^{-0{,}0005 \cdot 1000} \cdot 0{,}55017$$

$$0{,}36788 \quad '' \quad + 0{,}60653 \cdot '' \quad = 0{,}49918$$

La velocidad del viento (en m/seg) es una variable aleatoria con distribución Rayleigh de parámetro $\sigma > 0$. El vendedor de molinos asegura que la velocidad del viento en una determinada región está caracterizada por $\sigma > 3$. Se tomó una muestra aleatoria de tamaño 20 en diferentes puntos de la región y se registró $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 500$. Hallar un test de hipótesis con un nivel de significación de 0.05 para validar la hipótesis del vendedor. ¿Qué concluye?

☞: *Considerar la distribución de $Y = X^2$.*

Otro de test de Hipótesis, Cap 10

Tengo $V \sim Ray(\sigma > 0)$, el EMV No lo tengo !!

Si Tomo lo que dice el puntito de mierda,

Y Hago el Cambio de Variable $X = V^2 \Rightarrow$ esta Garompa no es biyectiva, pero bueno, $V > 0$

Con el puto Metodo del Jacobiano $\longrightarrow$ era para n Variables, pero Asumo que funca

$$f_V(v) = \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_X(x) = \left. \frac{\frac{\cancel{v}}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}}{2\cancel{v}} \right|_{v=\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}} \Rightarrow \text{Ahora esto es una bella } \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

Hice un Pequilombo con las Variables, pero me dan $\sum_{i=1}^{20} v_i^2 = 500$, que con el cambio de Variable queda

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 500$$

Ahora las Hipo-Tesis

→ Tengo que pasarlo a θ

$$\frac{1}{2\sigma^2} \geq \frac{1}{2\cdot 3^2} \Rightarrow \theta \geq \frac{1}{18}$$

$$H_0: \theta \geq \frac{1}{18} \qquad H_1: \theta < \frac{1}{18}$$

El test no es asintótico Wooo!

Obviamente es flia exponencial, y $C(\theta) = -\theta$ es decreciente? SEEEE

Entonces, (test = contra menor)

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i > \overbrace{-K_\alpha}^{K'_\alpha} \Big\}$$

Ahora, de donde chota saco el K_α

$$0{,}05 = \mathbb{P}(\delta(\underline{x}) = 1) = \mathbb{P}_{\lambda=\frac{1}{18}}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\text{Suma}} > K'_\alpha\Big)$$

de exp, según Andy es una $\Gamma(n,\lambda)$

Anda a saber de donde sale.

Pero bueno, $K'_\alpha = 501{,}82$

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\{500 > 501{,}82\} = 0$$

Slim, pero tiró chamullo el seller

4. La duración de un componente electrónico, en años, es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 3\theta x^{3\theta-1} \mathbb{1}\{0 < x < 1\} \qquad \theta > 0$$

Se tomaron, de forma independiente, los siguientes valores muestrales:

$$0.7795, 0.7135, 0.9939, 0.8571, 0.9822, 0.9492$$

Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que un nuevo componente dure más de 0.8 años.

La parte fuerte de este ejercicio parece ser encontrar el EMV

Primero, se parece a alguna conocida?

Y... medio que no

Segundo, Se parece a Alguno de la Guía?
(Estimadores es Guia 9)

Bueno, Se parece al 9.9, Pero primero lo voy a mirar con un poco de Cariño

Uso el Metodo de Máxima verosimilitud

Primero busco $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 3\theta x_i^{3\theta-1} \mathbb{1}\{0 < x_i < 1\}$$

$$L(\theta) = 3\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{3\theta-1} \mathbb{1}\{Max(x_i) < 1\} \mathbb{1}\{Min(x_i > 0)\}$$

Ahora busco

$$\frac{d}{d\theta} Ln(L(\theta)) = 0$$

$$Ln\left(3\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{3\theta-1} \mathbb{1}\{Max(x_i) < 1\} \mathbb{1}\{Min(x_i) > 0\}\right)$$

$$Ln(3\theta^n) + \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i^{3\theta-1}) + Ln(\mathbb{1}\{Max(x_i) < 1\}) + Ln(\mathbb{1}\{Min(x_i) > 0)$$

$$n Ln(3\theta) + (3\theta-1)\sum_{i=1}^{n} Ln(x_i) + Ln(\mathbb{1}\{Max(x_i) < 1\}) + Ln(\mathbb{1}\{Min(x_i) > 0)$$

$$n Ln(3\theta) + 3\theta \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i) + Ln(\mathbb{1}\{Max(x_i) < 1\}) + Ln(\mathbb{1}\{Min(x_i) > 0)$$

Derivando respecto a θ, Todos los terminos sin θ se Toman el palo.

$$\frac{n}{\theta} + 3\sum_{i=1}^{n} Ln(x_i) = 0$$

$$\frac{1}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{-n}{3\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$ El menos? $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x_i < 1 \\ \ln(x_i) < 0 \end{array}$

Cierra, a ver cuanto me da la prob

$\hat{\theta} = 2{,}44$ $\mathbb{P}(X > 0{,}8)$

Si me acordara como se calcula esto...

Unidad 2:

$$\mathbb{P}(X > 0{,}8) = 1 - \int_{-\infty}^{0{,}8} f_X(x)\,dx = 0{,}8047$$

5. La cantidad de agua que cae en cada lluvia (en mm) en determinada localidad sigue una distribución exponencial de parámetro λ. El municipio considera que debe ampliar el sistema pluvial solo si se comprueba que $\lambda < 1/50$. En las últimas 10 lluvias se registró un promedio muestral de $53mm$. Al 0.05 de significación, ¿qué decisión debe tomar?.

X = "Cantidad de Agua en cada lluvia (mm)"

$X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

$H_0: \lambda \geq 1/50 \qquad H_1: \lambda < 1/50$

Es de familia exponencial con c decreciente entonces:

$$\delta(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{1}\{-T(x) < K_\alpha\} \Rightarrow \delta(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{1}\Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i > \overbrace{-K_\alpha}^{K'_\alpha}\Big\}$$

Luego, $\mathbb{P}_{\lambda = 1/50}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\text{esto tiene dist. } \Gamma(n,\lambda)} > K'_\alpha\Big) = 0{,}05 \Rightarrow K_\alpha = 785{,}26$

Finalmente,

$$\delta(\underset{\sim}{x}) = \mathbb{1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i > 785{,}26 \right\}$$

$$\delta(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{1}\{ 530 > 785 \} = 0$$

No se cambia el sist.

4. Sea X una variable aleatoria que depende de θ, con función de densidad para cada $\theta = t$

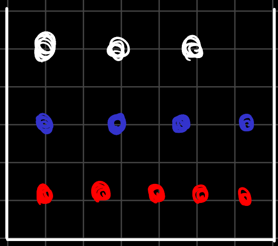
$$f(x) = \frac{1}{2}(x - t)\mathbf{1}\{t < x < t + 2\}.$$

A priori, θ tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 10)$. Se realiza un solo experimento y se observa el resultado 5.5, hallar el estimador bayesiano (esperanza a posteriori) de θ.

$$f_{X|\theta=t}(x) = \frac{1}{2}(x - t)\, \mathbb{1}\{ t < x < t+2 \}$$

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{10}\, \mathbb{1}\{ 0 < \theta < 10 \}$$

1. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 bolas azules y 5 bolas rojas. Se extrae una bola al azar y se la repone junto con dos del mismo color. Luego se realiza una segunda extracción. Calcular la probabilidad de que en ambas extracciones se observen bolas del mismo color.



$\mathbb{P}(\text{"blanca"}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

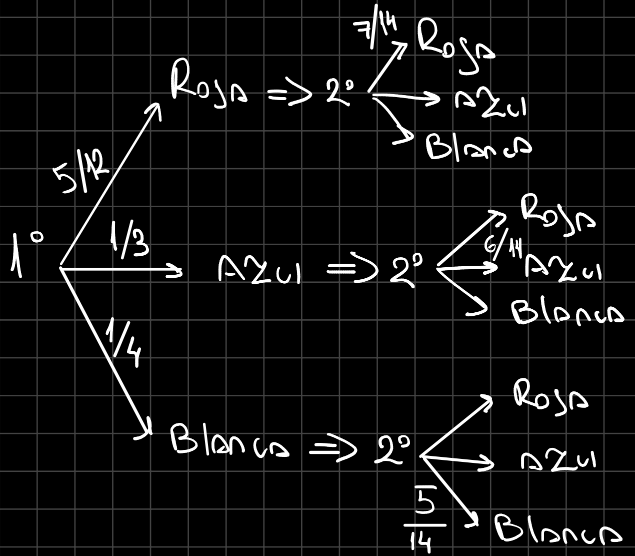
$\mathbb{P}(\text{"Azul"}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(\text{"Roja"}) = \frac{5}{12}$

$\mathbb{P}(\text{"blanca 2°"} \mid \text{"blanca 1°"}) = \frac{5}{14}$

$\mathbb{P}(\text{"Azul 2°"} \mid \text{"Azul 1°"}) = \frac{6}{14}$

$\mathbb{P}(\text{"Roja 2°"} \mid \text{"Roja 1°"}) = \frac{7}{14}$



Por prob. Total

$\mathbb{P}(\text{"dos Iguales"}) = \frac{5}{12}\cdot\frac{7}{14} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{14} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{14}$

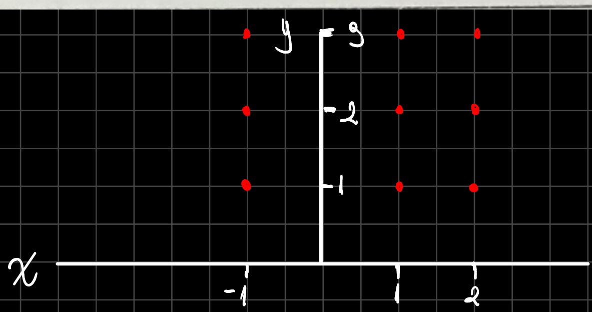
$= \frac{37}{84} = 0{,}44$

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad conjunta:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{x^2 y}{36} \mathbf{1}\{x \in \{-1, 1, 2\}, y \in \{1, 2, 3\}\}$$

Sean $U = \min(X, Y)$ y $V = \max(X, Y)$. Calcular $\mathbf{P}(U = 1 \mid V = 2)$.

Soporte



Se busca $\mathbb{P}(U=1|V=2) = \dfrac{\mathbb{P}(U=1, V=2)}{\mathbb{P}(V=2)}$

$\mathbb{P}(U=1, V=2) = \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) = \dfrac{2}{36} + \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{6}$

$\mathbb{P}(V=2) = \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=-1, Y=2)$
$= 4/36 + 8/36 + 2/36 + 2/36 = \dfrac{16}{36} = 4/9$

$P(U=1|V=2) = 1/6 \cdot \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$ ✓

3. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(2,6)$ y sca Y una variablc alcatoria tal quc $E[Y|X] = 2X^2 - 1$. Calcular $\mathrm{cov}(X+Y, 2X)$.

$$\mathrm{Cov}(X+Y, 2X) = \mathrm{Cov}(X, 2X) + \mathrm{Cov}(Y, 2X)$$
$$= 2\mathrm{Cov}(X,X) + 2\mathrm{Cov}(Y,X)$$
$$2\,\mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(Y,X)$$

Se Tiene que $E[Y|X] = 2X^2-1$

y se sabe que $E[h(X)|X] = h(X)$

Entonces, Resulta evidente que $Y = 2X^2-1$

Poniendolo en La expresión de la cov

$$\mathrm{Cov}(X+Y, 2X) = 2\,\mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(2X^2-1, X)$$
$$= 2\,\mathrm{Var}(X) + 2\left[\mathrm{Cov}(2X^2, X) - \overbrace{\mathrm{Cov}(1, X)}^{0}\right]$$

$$= 2\,Var(X) + 4\,Cov(X^2, X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad Cov(X^2, X) = E(X^3) - E(X^2).E(X)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{6-2}\,\mathbb{1}\{2 < x < 6\}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\frac{1}{4}\,\mathbb{1}\{2<x<6\}\,dx = \int_2^6 \frac{x}{4}\,dx = 4$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.\frac{1}{4}\,\mathbb{1}\{2<x<6\}\,dx = \int_2^6 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{52}{3}$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3\,\frac{1}{4}\,\mathbb{1}\{2<x<6\}\,dx = \int_2^6 \frac{x^3}{4}\,dx = 80$$

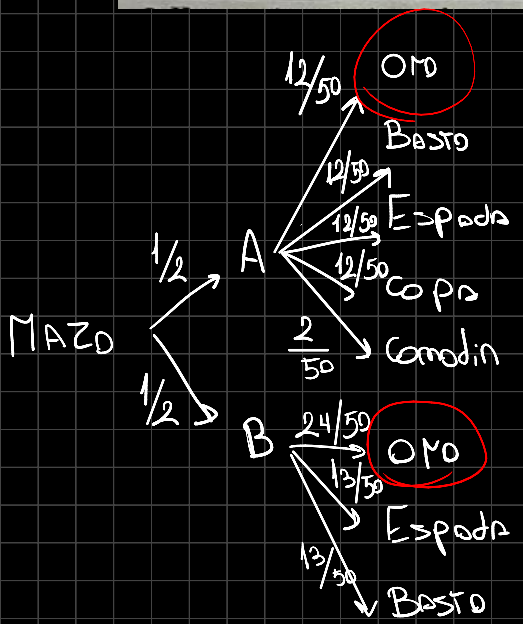
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad Cov(X^2, X) = E(X^3) - E(X^2).E(X)$$

$$= \frac{52}{3} - 4^2 = \frac{4}{3} \qquad = 80 - \frac{52}{3}.4 = \frac{32}{3}$$

$$Cov(X+Y, 2X) = 2\,Var(X) + 4\,Cov(X^2, X)$$

$$= 2.\frac{4}{3} + 4.\frac{32}{3} = \boxed{45{,}\bar{3}}$$

1. Se tienen dos mazos de 50 cartas españolas. El mazo A es convencional, con 4 palos de 12 cartas cada uno y dos comodines. El mazo B está adulterado, ya que 24 de sus 50 cartas son de oro, y las restantes son de espada y basto en igual cantidad. Una persona elige al azar un mazo y saca una carta. Si la carta resultó ser de oro, calcular la probabilidad de que haya elegido el mazo B.



$$\mathbb{P}(B|oro) = \frac{\mathbb{P}(oro|B).\mathbb{P}(B)}{(\mathbb{P}(oro|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(oro|A)\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(oro|A)\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(oro \cap A)}{\cancel{\mathbb{P}(A)}}.\cancel{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(oro \cap A) = \frac{6}{50}$$

$$\mathbb{P}(oro|B)\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(oro \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(oro \cap B) = \frac{12}{50}$$

$$\mathbb{P}(B|oro) = \frac{\frac{12}{50}}{\frac{12}{50} + \frac{6}{50}} = \frac{12}{50}.\frac{50}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = 0,6\overline{6}.$$

2. Un cargador experimental entrega una cantidad aleatoria de energía X (en mAh) a una batería, con función de densidad

$$f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}\{x > 0\}.$$

La batería tiene una capacidad máxima de 2 mAh. Todo exceso se disipa como calor. Hallar y graficar la función de distribución de la energía almacenada.

X = "Carga entregada por el Cargador"

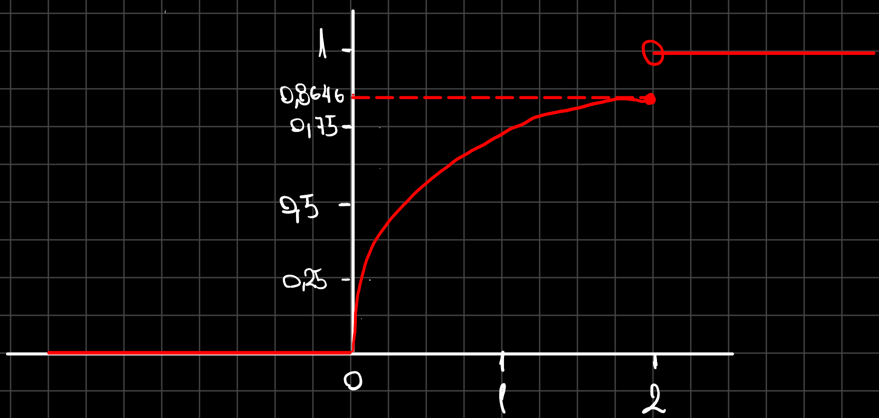
Y = "Carga Almacenada"

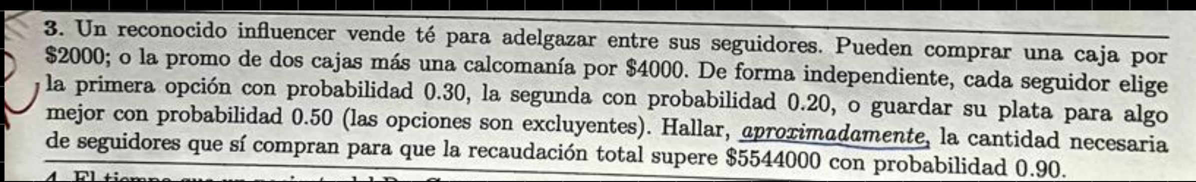
$Y = X$ para $0 < X \leq 2$

$$F_Y(y) \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_X(x) & 0 < y \leq 2 \\ 1 & Y > 2 \Rightarrow \text{La batería está completa.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} e^{-x}\,\mathbb{1}\{x>0\}\,dx = \int_{0}^{x} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^x$$

$$= \left(1 - e^{-x}\right)\mathbb{1}\{x>0\} \qquad F_X(2) = 0{,}8646$$




3. Un reconocido influencer vende té para adelgazar entre sus seguidores. Pueden comprar una caja por \$2000; o la promo de dos cajas más una calcomanía por \$4000. De forma independiente, cada seguidor elige la primera opción con probabilidad 0.30, la segunda con probabilidad 0.20, o guardar su plata para algo mejor con probabilidad 0.50 (las opciones son excluyentes). Hallar, *aproximadamente*, la cantidad necesaria de seguidores que sí compran para que la recaudación total supere \$5544000 con probabilidad 0.90.

Aprox $\Rightarrow$ TCL

X = "Dinero recaudado por seguidor que sí compra"

$$p_X(x) \begin{cases} 0{,}6 & x = 2000 \\ 0{,}4 & x = 4000 \end{cases}$$

Para TCL Necesito $E(x)$ y $Var(x)$

osea que necesito $E(x)$ y $E(x^2)$

$$E(x) = \sum x\, p_x(x) = \quad + 0,6 . 2000 + 0,4 . 4000$$

$$= 2800$$

$$E(x^2) = \sum x^2 p_x(x) = \quad 0,6 . 2000^2 + 0,4 . 4000^2$$

$$= 8\ 800\ 000$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 960.000 \Rightarrow \sqrt{Var(x)} = 979,8$$

Sea $\sum_{i=1}^{n} X_i =$ "Dinero recaudado cada n seguidores que si compran"

Se busca que $P(\sum X_i > 5544000) = 0,9$

Si defino a Z como

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.E(x)}{\sqrt{n \ Var(x)}}$$

Si n es muy grande

$$Y \underset{\substack{\uparrow \\ TCL}}{\sim} N(0,1)$$

$$P\left(Z > \frac{5544000 - n.E(x)}{\sqrt{n}\sqrt{Var(x)}}\right) = 0,9$$

$$\frac{5544000 - n.E(x)}{\sqrt{n}\sqrt{Var(x)}} = \underbrace{-1,28155}_{t}$$

$$5544000 - n E(X) = t \cdot \sqrt{n} \sqrt{Var X}$$

Según software: $n = 1980,64$

Entonces, se necesitan aprox 1981 seguidores que compren.

4. El tiempo que un paciente del Dr. Cureta espera para ser atendido es una variable aleatoria X, en horas, con distribución $\mathcal{U}(0,\theta)$. A priori, θ se corresponde con distribución Par$(1,1)$. María esperó 1.0 hs, 1.5 hs y 0.5 hs, respectivamente, en las últimas tres visitas al Dr. A partir de la información obtenida, estimar la esperanza del tiempo que tendrá que esperar en su próxima visita.

X = "Tiempo de espera para ser atendido"

$X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$

A priori:

$$\theta \sim Par(1,1)$$

A posteriori:

$$f_{\theta|\underline{X}=\underline{x}}(t) = \frac{L(t,x) \cdot f_\theta(t)}{K} =$$

$$L(t,x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X|\theta=t}(x_i) = \frac{1}{t^n} \mathbb{1}\{\max(x_i) < t\}$$

$$f_{\theta|\underline{X}=\underline{x}}(t) = \frac{1}{K} \frac{1}{t^n} \mathbb{1}\{\max(x_i) < t\} \cdot \frac{1 \cdot 1^1}{t^{1+1}}$$

$$= \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{t^{(n+1)+1}} \mathbb{1}\{\max(x_i) < t\}$$

Se parece a una $Par(\max(x_i), (n+1))$

Si defino $Y = X_{n+1}$

$$E[Y|\underset{\frown}{X}=\underset{\frown}{x}] = \int_{\theta \in \Theta} E[Y|\theta = t] \cdot f_{\theta|\underset{\frown}{X}=\underset{\frown}{x}}(t)\,dt$$

$E[Y|\theta = t) = \frac{t}{2}$, por Tabla

$$E[Y|\underset{\frown}{X}=\underset{\frown}{x}] = \int_{\theta \in \Theta} \frac{t}{2} \cdot Par(\max(x_i), (n+1))\,dt$$

mirandolo con cariño, es $\frac{1}{2} \cdot E[\,Par(\max(x_i), (n+1))\,dt$

$$= \frac{1}{2} \frac{(n+1) \cdot \max(x_i)}{(n+1) - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3+1) \cdot 1{,}5}{(3+1) - 1} = 1\ ?$$

Yass

5. El tiempo (en horas) que una persona usa el celular por día es una variable aleatoria con distribución normal. Una empresa telefónica encuestó a 21 clientes de forma independiente y observó que el promedio de uso del celular por día era $\bar{x} = 5.3$ horas, y el desvío muestral resultó $s = 1.1$ horas. En base a la información muestral, hallar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para el desvío estándar del tiempo del uso del celular.

NOTA: El desvío muestral se define $s := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Se buscan A, B tales que

$$\mathbb{P}(A < \sigma < B) = 0{,}95$$

Tengo $W = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$

Si Busco $\mathbb{P}(a < W < b) = 0{,}95$

Como W es decreciente en función de σ,

$a = \chi^2_{20,\frac{\alpha}{2}}$ $b = \chi^2_{20,1-\frac{\alpha}{2}}$

$a = 9{,}59078$ $b = 34{,}16961$

entonces, se tiene

$$a < W < b$$

$$a < \frac{1}{\sigma^2}\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2 < b$$

$$\frac{a}{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{b}{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\frac{1}{a}\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2 > \sigma^2 > \frac{1}{b}\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2} > \sigma > \sqrt{\frac{1}{b}\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Se sabe que $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Entonces, $\sum^{n}(X_i-\bar{X})^2 = S^2(n-1)$

finalmente, Reemplazando

$$1{,}59 > \sigma > 0{,}84$$

4. Sea W una variable aleatoria que depende de $\theta > 0$, con función de densidad para cada $\theta = t$

$$f(w) = \frac{1}{2}(w-t)\mathbb{1}\{t < w < t+2\}.$$

A priori, θ tiene distribución uniforme sobre $(0,8)$. Se toma una muestra de tamaño 3 obteniéndose los resultados $4.8, 5.7, 4.9$. Hallar el estimador bayesiano (esperanza a posteriori) de θ.

$$W \sim f_W(w) = \frac{1}{2}(w-t)\mathbb{1}\{t < w < t+2\}$$

A priori, $\theta \sim \mathcal{U}(0,8)$

$$\underset{\frown}{w} = \{4,8;5,7;4,9\}$$

$$f_{\theta|\underline{W}=\underset{\frown}{w}}(t) = \frac{L(t,x)f_\theta(t)}{\int_{t\in\Theta} L(t,x)f_\theta(t)dt}$$

$$L(t,x) = \prod_{i=1}^{n} f_{W|\theta=t}(w_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(w_i-t)\mathbb{1}\{t < w_i < t+2\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n}(w_i-t) \cdot \mathbb{1}\{t < \min(w_i)\}\mathbb{1}\{\max(w_i) < t+2\}$$

Sin Terminar, falta terminar de calcular

$$f_{\theta|\underline{W}=\underline{w}}(t)$$

y Luego $E[\theta|\underline{W}=\underline{w}]$

5. Se observará una muestra de tamaño 2 de la variable aleatoria X, cuya función de probabilidad $p(x)$ puede ser $p_0(x)$ o $p_1(x)$, definidas en la siguiente tabla:

x	1	2	3
$p_0(x)$	0.70	0.25	0.05
$p_1(x)$	0.20	0.30	0.50

De todos los test de nivel $\alpha \leq 0.03$, de la hipótesis $H_0 : p(x) = p_0(x)$ contra $H_1 : p(x) = p_1(x)$, hallar el de menor β (probabilidad de error de tipo II). Indicar claramente para el test hallado la regla de decisión y los valores α y β.

$H_0 : p(x) = p_0(x) \qquad H_1 : p(x) = p_1(x)$

$\mathbb{P}(\delta(\underset{\sim}{X}) = 1) \leq 0{,}03$

Yo se !!! El truco está en la muestra de tamaño 2

Busco todas las combinaciones de 2 muestras de los 3 números y les calculo la prob., los que tengan prob. menor a 0,03 son posibles tests

No me importa el orden, descarto un par

1 1
1 2
1 3
~~2 1~~
2 2
2 3
~~3 1~~
~~3 2~~
3 3

$\mathbb{P}_{p_0}(1,1) = 0{,}49$

$\mathbb{P}_{p_0}(1,2) = 0{,}175$

$\mathbb{P}_{p_0}(1,3) = 0{,}035$

$\mathbb{P}_{p_0}(2,2) = 0{,}0625$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}_{p_0}(2,3) = 0{,}0125 \\ \mathbb{P}_{p_0}(3,3) = 0{,}0025 \end{array}\right\}$ Únicos viables.

Entonces, tengo

$\delta_1 \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{X} = \{2,3\} \\ 0 & \underset{\sim}{X} \neq \{2,3\} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0{,}0125, \quad \beta = 1 - \mathbb{P}_{p_1}(2,3) = 0{,}85$

$\delta_2 \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{X} = \{3,3\} \\ 0 & \underset{\sim}{X} \neq \{3,3\} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0{,}0025, \quad \beta = 1 - \mathbb{P}_{p_2}(3,3) = 0{,}75 \Rightarrow$ elijo este.