

Capítulo 1

DIPOLO HORIZONTAL EN EL ESPACIO LIBRE

En este Capítulo se desarrollarán los casos de dipolo elemental, dipolo corto y dipolo de media onda, para polarización horizontal, que frecuentemente se necesitan para calcular antenas. Se tratará el caso de las antenas lineales. Este concepto de antenas lineales, se emplea porque se consideran que poseen un diámetro tan pequeño que es despreciable, por esa razón se las considera como una línea donde circula la corriente. Es una aproximación que resulta útil en la práctica para resolver matemáticamente casos teóricos de antenas.

El concepto de elemento de corriente o dipolo elemental es importante considerarlo, ya que se lo utiliza para estudiar problemas de antenas y de propagación, como por ejemplo el método de imágenes, y luego se puede extender al caso del dipolo de media onda, ya que solo cambiará la función del dipolo y las constantes del vector campo eléctrico y magnético. El lector debe tener en cuenta que al hablar de dipolo elemental y de dipolo corto, la longitud de estos dipolos será muy pequeña respecto a la longitud de onda, por lo tanto las ecuaciones se reducen y facilitan su tratamiento. En una antena eléctricamente corta como el dipolo corto, o elemental, el rendimiento se reduce comparado con un dipolo de media onda. Las antenas cortas tienen una impedancia de entrada compleja, y prácticamente imaginaria pura, con valores mucho mayores que 50Ω . Es por esa razón que en la práctica hay que considerar la alta impedancia prácticamente reactiva, para operar con dipolos cortos.

1.1. ELEMENTO DE CORRIENTE O DIPOLO DE HERTZ

Los elementos de corriente son aquellos que poseen una longitud mucho menor a la longitud de onda, es decir que se va a considerar cuando la

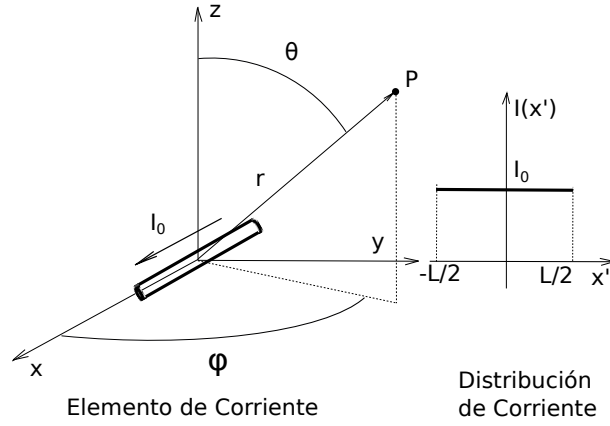


Figura 1.1: Elemento de corriente en polarización horizontal.

longitud cumple la siguiente relación:

$$\frac{L}{\lambda} \leq 1/100 \quad (1.1)$$

donde λ es la longitud de onda producida en la antena

Si el elemento de corriente o dipolo elemental, tiene una distribución de corriente constante, y además, está polarizado en la dirección x, como se observa en la siguiente Figura 1.1, la distribución de corriente es una constante I_0 , dada por la siguiente expresión:

$$I(x') = I_0 \quad -\frac{L}{2} \leq x' \leq \frac{L}{2} \quad (1.2)$$

La expresión del potencial vectorial magnético es [4]:

$$\vec{A} = \mu \int_V \frac{\vec{J} e^{-j\beta R}}{4\pi R} dv \quad (1.3)$$

Al tener solo componentes de la densidad de corriente en el eje x, se obtiene:

$$\vec{A} = \mu \int \frac{\vec{I} e^{-j\beta R}}{4\pi R} dx' \quad (1.4)$$

El potencial vectorial para el elemento de corriente con una longitud $\Delta x'$ se puede escribir como:

$$A_x = \frac{\mu I_0 L e^{-j\beta R}}{4\pi R} \quad (1.5)$$

Si $R \cong r$:

$$A_x = \frac{\mu I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.6)$$

Para calcular el campo magnético el rotor del vector potencial vectorial magnético, resulta:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.7)$$

El rotor en coordenadas esféricas responde a:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como $A = A_x$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ y $H = H_\theta$:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \quad (1.9)$$

El vector \vec{A} en coordenadas esféricas se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Como solo existe la componente A_x , se obtiene:

$$\begin{aligned} A_r &= \sin \theta \cos \phi A_x \\ A_\theta &= \cos \theta \cos \phi A_x \\ A_\phi &= -\sin \phi A_x \end{aligned} \quad (1.11)$$

Reemplazando A_r y A_ϕ de (1.11) en (1.9):

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{1}{\partial \phi} \frac{\partial(\sin \theta \cos \phi A_x)}{\partial \phi} - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial(r(-\sin \phi A_x))}{\partial r} \quad (1.12)$$

Operando:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{r} (-\sin \phi A_x) + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial r}{\partial r} (\sin \phi A_x) + \frac{\hat{\theta}}{r} \sin \phi \frac{\partial A_x}{\partial r} \quad (1.13)$$

Resulta:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\theta} \sin \phi \frac{\partial A_x}{\partial r} \quad (1.14)$$

Para el elemento de corriente se tiene que $R = r - r' \cong r$:

$$A_x = \frac{\mu I_0 L e^{-j\beta R}}{4\pi R} = \frac{\mu I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.15)$$

La derivada parcial $\frac{\partial A_x}{\partial r}$ es:

$$\frac{\partial A_x}{\partial r} = \frac{\mu I_0 L}{4\pi} \left[\frac{\partial(e^{-j\beta r})}{\partial r} \frac{1}{r} + e^{-j\beta r} \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \right] \quad (1.16)$$

Siendo

$$\frac{\partial}{\partial r}(e^{-j\beta r}) = -j\beta e^{-j\beta r} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-1}{r^2} \quad (1.18)$$

El rotor de \vec{A} se calcula como:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\theta} \sin\phi \frac{\partial A_x}{\partial r} \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\theta} \sin\phi \frac{\mu I_0 L}{4\pi} \left[-j\beta e^{-j\beta r} \frac{1}{r} + e^{-j\beta r} \frac{(-1)}{r^2} \right] \quad (1.20)$$

El campo magnético se calcula a partir del rotor de \vec{A} :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = -\hat{\theta} \sin\phi \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \quad (1.21)$$

El campo eléctrico se calcula usando las ecuaciones de Maxwell del rotor de \vec{H} :

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (1.22)$$

El rotor de \vec{H} en coordenadas esféricas es:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} = & \frac{\hat{r}}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial H_\phi \sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(H_r)}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Como $H_\phi = 0$, $H_r = 0$ y $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\hat{r}}{r \sin\theta} \left[-\frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} \right] \quad (1.24)$$

Reemplazando H_θ de (1.21) en (1.24):

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\cos \phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(-\sin \phi) \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\cos \phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(-\sin \phi) \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \quad (1.26)$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r(-\sin \phi) \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \quad (1.27)$$

$$= (-\sin \phi) I_0 L \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-j\beta r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \quad (1.28)$$

$$= (-\sin \phi) I_0 L \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-j\beta r} j\beta + \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \quad (1.29)$$

$$= -\sin \phi I_0 L \frac{1}{4\pi} \left(-(j\beta)^2 e^{-j\beta r} + (-j\beta) \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \quad (1.30)$$

$$= -\sin \phi I_0 L \frac{1}{4\pi} \left(\beta^2 e^{-j\beta r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \quad (1.31)$$

Por lo tanto:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\cos \phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} (-\sin \phi) I_0 L \frac{1}{4\pi} \left(\beta^2 e^{-j\beta r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \quad (1.32)$$

Como

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (1.33)$$

Reemplazando $\nabla \times \vec{H}$ de (1.32) en (1.33) resulta:

$$E_r = \frac{\cos \phi}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{\sin \theta 4\pi} \left[\frac{j\beta}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right] \quad (1.34)$$

$$E_\phi = \frac{-\sin \phi}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi} \left[\frac{\beta^2}{r} - \frac{j\beta}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] \quad (1.35)$$

$$H_\theta = \frac{-\sin \phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \quad (1.36)$$

En el caso de distancias de campo lejano se tiene:

$$E_r \longrightarrow 0 \quad (1.37)$$

$$E_\phi \cong \frac{-\text{sen}\phi}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi} \frac{\beta^2}{r} \quad (1.38)$$

$$H_\theta \cong \frac{-\text{sen}\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi} \frac{j\beta}{r} \quad (1.39)$$

donde:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (1.40)$$

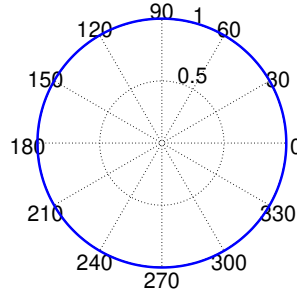


Figura 1.2: Función del elemento de corriente polarizado en la dirección \hat{x} , visto en el plano YZ

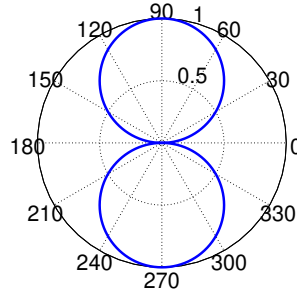


Figura 1.3: Función del elemento de corriente polarizado en la dirección \hat{x} , visto en el plano XY

ademas:

$$\frac{\beta}{\omega\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{00} \quad (1.41)$$

Por lo tanto:

$$E_\phi \cong \frac{j\beta \sin\phi I_0 L Z_{00} e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.42)$$

$$H_\theta \cong \frac{-j\beta \sin\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.43)$$

donde se verifica:

$$\frac{E_\phi}{H_\theta} = -Z_{00} \quad (1.44)$$

1.2. DIPOLO CORTO

Los dipolos cortos son aquellos que poseen una longitud apreciablemente menor a la longitud de onda, es decir, que se va a considerar un dipolo eléctricamente corto cuando la longitud cumple la siguiente relación:

$$\frac{L}{\lambda} \leq 1/10 \quad (1.45)$$

donde λ es la longitud de onda

Se considera que el dipolo corto está polarizado en la dirección x, como se observa en la siguiente Figura 1.4.

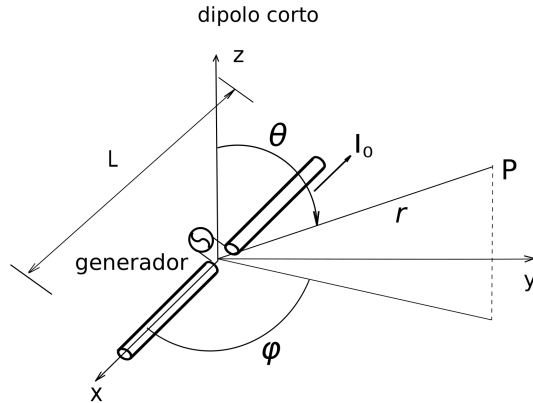


Figura 1.4: Dipolo corto en polarización horizontal.

Si el dipolo se considera como eléctricamente corto la distribución de corriente describe una curva prácticamente lineal como se muestra en la Figura 1.5. El máximo de la corriente se encuentra en el punto de alimentación del dipolo.

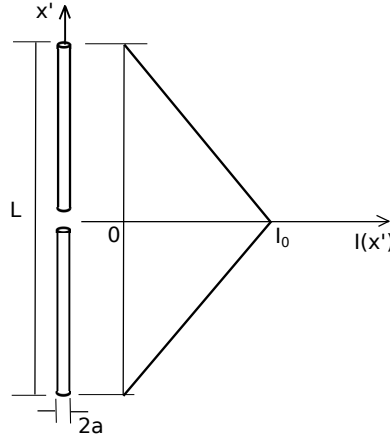


Figura 1.5: Distribución de corriente de un Dipolo corto polarizado en la dirección \hat{x}

La distribución de corriente está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} I(x') &= \frac{2I_0}{L} \left(\frac{L}{2} - x' \right) & x' \geq 0 \\ I(x') &= \frac{2I_0}{L} \left(\frac{L}{2} + x' \right) & x' \leq 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

La expresión del potencial vectorial magnético es [2]:

$$\vec{A} = \mu \int_V \frac{\vec{J} e^{-j\beta R}}{4\pi R} dv \quad (1.47)$$

Al tener solo componentes de la densidad de corriente en el eje x:

$$\vec{A} = \mu \int \frac{\vec{I} e^{-j\beta R}}{4\pi R} dx \quad (1.48)$$

Un elemento $\Delta x'$ se puede escribir como:

$$\Delta A_x = \mu \frac{I(x') e^{-j\beta R}}{4\pi R} \Delta x' \quad (1.49)$$

El potencial vectorial se calcula empleando la integral de (1.49):

$$A_x = \int_{-\frac{L}{2}}^0 dA_x + \int_0^{\frac{L}{2}} dA_x \quad (1.50)$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} A_x &= \int_{-\frac{L}{2}}^0 \frac{2I_0}{L} \left(\frac{L}{2} + x' \right) \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi R} dx' \\ &+ \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2I_0}{L} \left(\frac{L}{2} - x' \right) \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi R} dx' \end{aligned} \quad (1.51)$$

Operando:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi R} \int_{-\frac{L}{2}}^0 \frac{2I_0}{L} \left(\frac{L}{2} + x' \right) dx' \\ &+ \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi R} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2I_0}{L} \left(\frac{L}{2} - x' \right) dx' \end{aligned} \quad (1.52)$$

La integral se calcula como:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^0 \left(\frac{L}{2} + x' \right) dx' = \int_{-\frac{L}{2}}^0 \frac{L}{2} dx' + \int_{-\frac{L}{2}}^0 x' dx' = \frac{L^2}{4} + \frac{x'^2}{2} \Big|_{-\frac{L}{2}}^0 \quad (1.53)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^0 \left(\frac{L}{2} + x' \right) dx' = \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8} = \frac{L^2}{8} \quad (1.54)$$

El potencial vectorial es:

$$A_x = \frac{2I_0}{L} \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi R} \left(\frac{2L^2}{8} \right) \quad (1.55)$$

Simplificando resulta:

$$A_x = \frac{\mu I_0 L e^{-j\beta R}}{8\pi R} \quad (1.56)$$

Para calcular el campo magnético se utiliza el rotor del vector potencial vectorial magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.57)$$

Hay que escribir el rotor del vector \vec{A} en coordenadas esféricas [2]:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.58)$$

Como $A = A_x$ entonces $A_\theta = 0$ y $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ se simplifica:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \quad (1.59)$$

Teniendo en cuenta que el vector potencial vectorial magnético \vec{A} en coordenadas esféricas en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

O también:

$$\begin{aligned} A_r &= \sin \theta \cos \phi A_x \\ A_\theta &= 0 \\ A_\phi &= -\sin \phi A_x \end{aligned} \quad (1.61)$$

De (1.59) y (1.61):

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \cos \phi A_x)}{\partial \phi} - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial (r (-\sin \phi A_x))}{\partial r} \quad (1.62)$$

Efectuando las derivadas se tiene:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{r}(-\text{sen}\phi A_x) + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial r}{\partial r}(\text{sen}\phi A_x) + \frac{\hat{\theta}}{r} r \text{sen}\phi \frac{\partial A_x}{\partial r} \quad (1.63)$$

Simplificando:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\theta} \text{sen}\phi \frac{\partial A_x}{\partial r} \quad (1.64)$$

De (1.56) y (1.64):

$$A_x = \frac{\mu I_0 L e^{-j\beta R}}{8\pi R} \quad (1.65)$$

Resulta:

$$\frac{\partial A_x}{\partial r} = \frac{\mu I_0 L}{8\pi} \left[\frac{\partial(e^{-j\beta R})}{\partial r} \frac{1}{R} + e^{-j\beta R} \frac{\partial(1/R)}{\partial r} \right] \quad (1.66)$$

Siendo:

$$\frac{\partial}{\partial r}(e^{-j\beta(r-r')}) = -j\beta e^{-j\beta(r-r')} \quad (1.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r-r'} \right) = \frac{-1}{R^2} = \frac{-1}{(r-r')^2} \quad (1.68)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\theta} \text{sen}\phi \frac{\partial A_x}{\partial r} \quad (1.69)$$

La expresión (1.64) resulta:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\theta} \text{sen}\phi \frac{\mu I_0 L}{8\pi} \left[-j\beta e^{-j\beta(r-r')} \frac{1}{R} + e^{-j\beta(r-r')} \frac{(-1)}{(r-r')^2} \right] \quad (1.70)$$

Por lo tanto el campo magnético resulta:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = -\hat{\theta} \text{sen}\phi \frac{I_0 L e^{-j\beta R}}{8\pi R} \left[j\beta + \frac{1}{R} \right] \quad (1.71)$$

El campo eléctrico se calcula de acuerdo a la ecuación de Maxwell del rotor (1.22):

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (1.72)$$

Empleando el rotor de un campo vectorial en coordenadas esféricas de (1.58):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} = & \frac{\hat{r}}{r \text{sen}\theta} \left[\frac{\partial H_\phi \text{sen}\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.73)$$

Como $H_\phi = 0$, $H_r = 0$ y $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, resulta:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[-\frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} \right] \quad (1.74)$$

De (1.71) y (1.74):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\cos \phi I_0 L e^{-j\beta R}}{8\pi R} \left[j\beta + \frac{1}{R} \right] \\ &+ \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(-\sin \phi) \frac{I_0 L e^{-j\beta R}}{8\pi R} \left[j\beta + \frac{1}{R} \right] \right) \end{aligned} \quad (1.75)$$

Considerando que: $R \gg r' = r - r' \cong r$, para $R > \lambda$ hay un 10 % de error máximo

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\cos \phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \\ &+ \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(-\sin \phi) \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \end{aligned} \quad (1.76)$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r(-\sin \phi) \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \quad (1.77)$$

$$= (-\sin \phi) I_0 L \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-j\beta r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \right) \quad (1.78)$$

$$= (-\sin \phi) I_0 L \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-j\beta r} j\beta + \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \quad (1.79)$$

Efectuando las derivadas:

$$= -\sin \phi I_0 L \frac{1}{8\pi} \left(-(j\beta)^2 e^{-j\beta r} + (-j\beta) \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \quad (1.80)$$

Operando:

$$= -\sin \phi I_0 L \frac{1}{8\pi} \left(\beta^2 e^{-j\beta r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \quad (1.81)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\cos \phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \\ &+ \frac{\hat{\phi}}{r} (-\sin \phi) I_0 L \frac{1}{8\pi} \left(\beta^2 e^{-j\beta r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1.82)$$

El campo eléctrico se calcula de acuerdo a la ecuación de Maxwell del rotor (1.22):

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (1.83)$$

Reemplazando $\nabla \times \vec{H}$ resulta:

$$E_r = \frac{\cos\phi}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{\sin\theta 8\pi} \left[\frac{j\beta}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right] \quad (1.84)$$

$$E_\phi = \frac{-\sin\phi}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi} \left[\frac{\beta^2}{r} - \frac{j\beta}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] \quad (1.85)$$

$$H_\theta = \frac{-\sin\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \quad (1.86)$$

En situación de campo lejano se tendrá:

$$E_r \longrightarrow 0 \quad (1.87)$$

$$E_\phi \cong \frac{-\sin\phi}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi} \frac{\beta^2}{r} \quad (1.88)$$

$$H_\theta \cong \frac{-\sin\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi} \frac{j\beta}{r} \quad (1.89)$$

donde:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (1.90)$$

ademas:

$$\frac{\beta}{\omega\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{00} \quad (1.91)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{E_\phi \cong \frac{j\beta \sin\phi I_0 L Z_{00} e^{-j\beta r}}{8\pi r}} \quad (1.92)$$

$$\boxed{H_\theta \cong \frac{-j\beta \sin\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r}} \quad (1.93)$$

donde se verifica:

$$\frac{|E_\phi|}{|H_\theta|} = Z_{00} \quad (1.94)$$

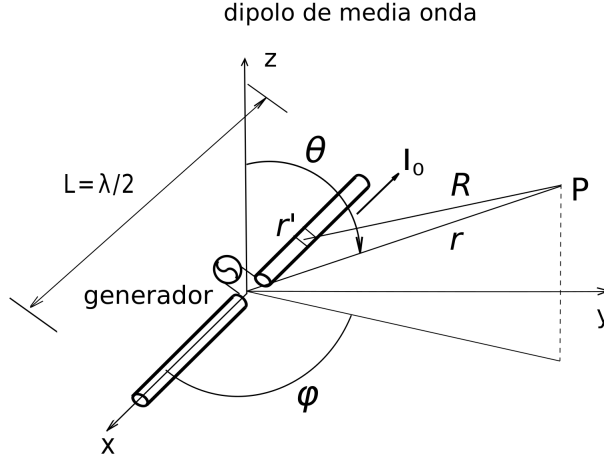


Figura 1.6: Dipolo de media onda polarización horizontal $L = \lambda/2$.

1.3. DIPOLO DE MEDIA ONDA

Se considera un dipolo cuya longitud es $L = \lambda/2$, que se encuentra polarizado en la dirección del eje x, es decir con polarización horizontal como se observa en la Figura 1.6. Igualmente a los casos anteriores que se han tratado de dipolo elemental y dipolo corto, se considera a este dipolo delgado o lineal, por tener un diámetro muy pequeño respecto a la longitud L .

Se ha visto la expresión del potencial vectorial magnético del dipolo elemental de (1.6):

$$\vec{A} = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r} \Delta L \hat{x}}{4\pi r} \quad (1.95)$$

Además el campo eléctrico y magnético en polarización horizontal de un dipolo elemental se han obtenido en las expresiones (1.42) y (1.43), análogas a las expresiones para un dipolo elemental con polarización vertical [2]:

$$E_\phi = j\omega\mu I_0 \Delta L \sin\phi \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.96)$$

$$H_\theta = -j\beta I_0 \Delta L \sin\phi \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.97)$$

Considerando que la distribución de corriente en un dipolo delgado de media onda es senoidal, tal como se ha visto en [2]:

$$\begin{aligned} I(x') &= I_0 \text{sen} \beta \left(\frac{L}{2} - x' \right) & 0 \leq x' \leq \frac{L}{2} \\ I(x') &= I_0 \text{sen} \beta \left(\frac{L}{2} + x' \right) & -\frac{L}{2} \leq x' \leq \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (1.98)$$

El campo eléctrico de un dipolo horizontal de media onda se puede escribir como:

$$E_\phi = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{+L}{2}} dE_\phi \quad (1.99)$$

Usando (1.42) y (1.99):

$$E_\phi = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{+L}{2}} j\omega\mu I(x') \text{sen} \phi \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dx' \quad (1.100)$$

Considere las aproximaciones para el módulo y la fase de R , de la siguiente manera:

$$R = r - x' \cos \phi \quad (1.101)$$

$$R \cong r \quad (1.102)$$

Por lo tanto el campo eléctrico de (1.100) se expresa como:

$$E_\phi = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{+L}{2}} j\omega\mu I(x') \text{sen} \phi \frac{e^{-j\beta(r-x' \cos \phi)}}{4\pi r} dx' \quad (1.103)$$

Operando:

$$E_\phi = j\omega\mu \text{sen} \phi \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{+L}{2}} I(x') e^{j\beta x' \cos \phi} dx' \quad (1.104)$$

La integral es:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{+L}{2}} I(x') e^{j\beta x' \cos \phi} dx' &= \\ \int_{-\frac{L}{2}}^0 I_0 \text{sen} \beta \left(\frac{L}{2} + x' \right) e^{j\beta x' \cos \phi} dx' &+ \\ \int_0^{\frac{L}{2}} I_0 \text{sen} \beta \left(\frac{L}{2} - x' \right) e^{j\beta x' \cos \phi} dx' & \end{aligned} \quad (1.105)$$

Resolviendo la integral:

$$E_\phi = jZ_{00} \text{sen} \phi I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} 2 \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos \phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\text{sen}^2 \phi} \right] \quad (1.106)$$

Simplificando resulta:

$$E_\phi = jZ_{00} I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos \phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\text{sen} \phi} \right] \quad (1.107)$$

Por lo tanto:

$$E_\phi = jZ_{00}I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\sin\phi} \right] \quad (1.108)$$

El campo magnético en campo lejano se puede calcular como:

$$|H_\theta| = \frac{|E_\phi|}{Z_{00}} \quad (1.109)$$

Por lo tanto:

$$H_\theta = -jI_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\sin\phi} \right] \quad (1.110)$$

Dipolo de media onda, Plano XY

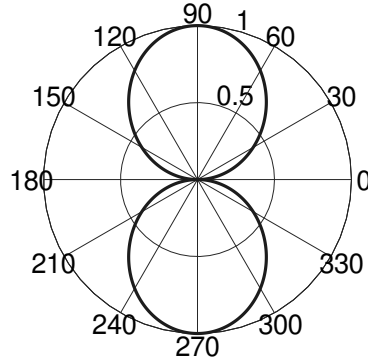


Figura 1.7: Dipolo de media onda polarización horizontal $L = \lambda/2$ en el plano XY.

Se puede observar en las Figuras 1.7 y 1.8 el diagrama de radiación de un dipolo de media onda, en polarización horizontal, que se representa gráficamente en los planos XY y YZ. Dicho diagrama de radiación resulta similar al Dipolo corto y elemental que se ha visto anteriormente.

Las integrales que se han calculado son iguales al caso de polarización vertical, solo cambia la variable θ en Polarización Vertical por ϕ en Polarización Horizontal. Es necesario aclarar que aparece el signo $-$ en el campo magnético, análogamente al dipolo elemental en polarización Horizontal.

Para el caso que el dipolo posea un longitud $L = 0,8\lambda$ por ejemplo, se representa el diagrama de radiación como se observa en la Figuras 1.9 y 1.10, el diagrama de radiación en el plano XY se hace mas afilado o directivo que para el caso de media onda.

Dipolo de media onda, Plano YZ

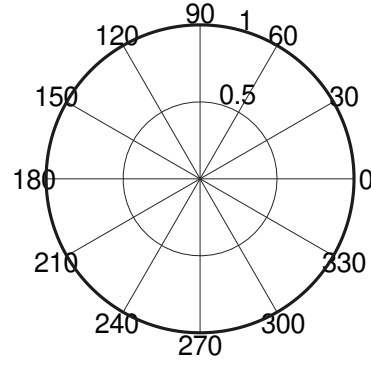


Figura 1.8: Dipolo de media onda polarización horizontal $L = \lambda/2$ en el plano YZ.

Dipolo de $L=0.8\lambda$, Plano XY

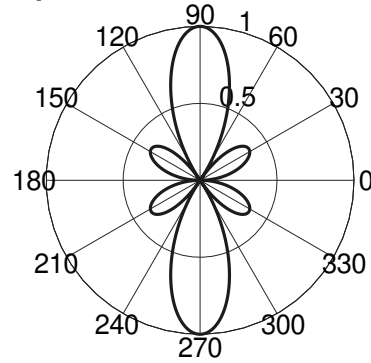
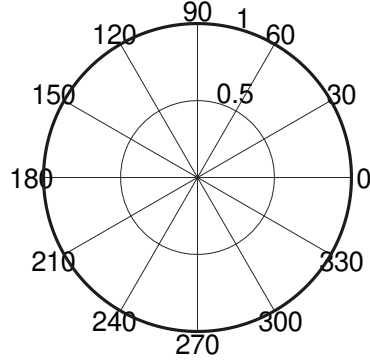


Figura 1.9: Dipolo de $L = 0,8\lambda$ en polarización horizontal en el plano XY.

Dipolo de $L=0.8\lambda$, Plano YZFigura 1.10: Dipolo de $L = 0,8\lambda$ en polarización horizontal en el plano YZ.

1.4. RESUMEN

Hasta aquí se han obtenido los tres casos de dipolos lineales en polarización horizontal: dipolo elemental, dipolo corto y dipolo de media onda. Que se van a resumir en la siguiente Tabla que se muestra a continuación:

Polarización Horizontal

Dipolo Elemental

$$E_{\phi} \cong \frac{j\beta Z_{00} \text{sen}\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.111)$$

$$H_{\theta} \cong \frac{-j\beta \text{sen}\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.112)$$

Dipolo corto

$$E_{\phi} \cong \frac{j\beta Z_{00} \text{sen}\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \quad (1.113)$$

$$H_{\theta} \cong \frac{-j\beta \text{sen}\phi I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \quad (1.114)$$

Dipolo de media onda:

$$E_{\phi} = jZ_{00} I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\text{sen}\phi} \right] \quad (1.115)$$

$$H_{\theta} = -jI_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\text{sen}\phi} \right] \quad (1.116)$$

Polarización Vertical

Dipolo Elemental

$$E_{\theta} \cong \frac{j\beta Z_{00} L \sin\theta I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.117)$$

$$H_{\phi} \cong \frac{j\beta L \sin\theta I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.118)$$

Dipolo corto

$$E_{\theta} \cong \frac{j\beta Z_{00} L \sin\theta I_0 e^{-j\beta r}}{8\pi r} \quad (1.119)$$

$$H_{\phi} \cong \frac{j\beta \sin\theta I_0 L e^{-j\beta r}}{8\pi r} \quad (1.120)$$

Dipolo de media onda:

$$E_{\theta} = jZ_{00} I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\theta) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\sin\theta} \right] \quad (1.121)$$

$$H_{\phi} = jI_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\theta) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\sin\theta} \right] \quad (1.122)$$

Una expresión general para todos los campos eléctricos, tanto en Polarización Horizontal(PH) como Polarización Vertical(PV) es la siguiente:

$$E_{\theta,\phi} = I_0 p_1 \frac{e^{-j\beta r}}{p_2 \pi r} f(\theta, \phi) \quad (1.123)$$

donde:

$p_1 = jZ_{00}\beta L$, $p_2 = 4$ y $f(\theta, \phi) = \sin\phi$ dipolo elemental PH

$p_1 = jZ_{00}\beta L$, $p_2 = 8$ y $f(\theta, \phi) = \sin\phi$ dipolo corto PH

$p_1 = jZ_{00}$, $p_2 = 2$ y $f(\theta, \phi) = \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\sin\phi} \right]$ dipolo de media onda PH

Para PV cambia la variable ϕ por θ

Análogamente el campo magnético:

$$H_{\theta,\phi} = I_0 p_1 \frac{e^{-j\beta r}}{p_2 \pi r} f(\theta, \phi) \quad (1.124)$$

donde:

$p_1 = -j\beta L$, $p_2 = 4$ y $f(\theta, \phi) = \text{sen}\phi$ dipolo elemental PH

$p_1 = -j\beta L$, $p_2 = 8$ y $f(\theta, \phi) = \text{sen}\phi$ dipolo corto PH

$p_1 = -j$, $p_2 = 2$ y $f(\theta, \phi) = \left[\frac{\cos(\beta \frac{L}{2} \cos\phi) - \cos(\beta \frac{L}{2})}{\text{sen}\phi} \right]$ dipolo de media onda PH

Para PV cambia la variable ϕ por θ y cambia el signo de p_1 a positivo

Se han visto las expresiones generales tanto para el campo eléctrico como para el campo magnético, que se pueden usar para dipolos de cualquier longitud. Note el lector que la función de los campos en la zona de campo lejano para cualquier tipo de dipolo, será de $1/r$, y en las variables angulares será similar a la función seno, aunque se apartará del seno a medida que varíe L/λ respecto del caso de media longitud de onda. Esto permite entender que los dipolos tendrán un comportamiento similar entre ellos. Algunos autores utilizan solamente el dipolo elemental para demostrar alguna propiedad que se quiera estudiar para simplificar el estudio como [?]. En la práctica se van a encontrar los dipolos de media onda, que se usan como antenas transmisoras y receptoras. También se encuentran los dipolos de media onda como un elemento de un conjunto de antenas, como es el caso de una antena logperiódica, Yagi-Uda, Antenas con reflector, etc...

Bibliografía

- [1] E. C. Jordan, *Electromagnetics Waves and Radiating Systems*. Prentice-Hall, 1950.
- [2] V. Trainotti and W. G. Fano, *Ingenieria Electromagnetica*, vol. 1. Nueva Libreria, 1 ed., 2004.
- [3] S. Schelkunoff and H. Friis, *Antennas: Theory and Practice*. Applied mathematics series, Wiley, 1966.
- [4] V. Trainotti, W. G. Fano, and L. Dorado, *Ingenieria Electromagnetica*, vol. 2. Nueva Libreria, 1 ed., 2006.
- [5] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley-Interscience, 2005.
- [6] S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic Waves*. Van Nostrand Company Inc., 1943.
- [7] E. A. Wolff, *Antenna Analysis*. Wiley and Sons, 1966.
- [8] J. Kraus, *Antennas*. McGraw-Hill, 1950.