Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 22 de febrero de 2024.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sea $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\phi(z)$ con $\phi(z)=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Estudiar qué tipo de singularidad tiene f en infinito y, si existe, calcular $\text{Res}[f,\infty]$.

Ejercicio 2. Formular en términos de una ecuación diferencial en derivadas parciales el problema de la temperatura $u(x,y)$ en estado estacionario en una placa plana y homogénea que se extiende en el primer cuadrante con condiciones de contorno $u(x,0)=\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ para $x \geqslant 0$ y $u(0,y)=\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$ para $y \geqslant 0$, suponiendo que la constante de difusividad térmica es igual a 1. Hallar $u(x,y)$.

Ejercicio 3. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx}+4u_{yy}=0 & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ u(0,y)=u(1,y)=0 & 0\leqslant y\leqslant 1 \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(x,1)=3\,\text{sen}(10\pi x) & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{sen}(n\pi x)\,dx=\frac{1}{n}$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant L \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$, establecer hipótesis sobre $g(x)$ de modo que exista la transformada de Fourier de f. Calcularla en el caso $g\equiv 1$. Obtener $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-3iw}-1}{w}\right|^2 dw$.

Ejercicio 5. Sea f una función cuya transformada de Laplace es

$$F(s)=e^{-as}\text{Log}\left(\frac{\text{[redacted]}s-2}{s-5}\right),\ a>0 \quad (s\in\mathbb{C}).$$

Hallar f e indicar la abscisa de convergencia de F.

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA:

1. En primer lugar, observemos que la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia infinito y por lo tanto define una función entera. Más precisamente, salvo una constante aditiva, se trata de una de las protagonistas de toda la materia (y de muchas otras obras): para todo $z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$. Por lo tanto, la función $\phi(z) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = -3 + 4e^z$ es holomorfa en todo el plano. Entonces, la única singularidad de la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\phi\left(\frac{1}{z}\right)$ es $z = 0$ y – por razones de dominio público – resulta ser una singularidad aislada. Es decir: el punto del infinito es una singularidad aislada de la función *f*. Para clasificarla, tenemos ya servido en bandeja desde el enunciado el desarrollo en serie de potencias de *z*:

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\phi\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\left(1 + 4\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots\right)\right) =$$

$$= z^2 + 4z + \frac{4}{2!} + \overbrace{\frac{4}{3!z} + \frac{4}{4!z^2} + \frac{4}{5!z^3} + \dots}^{\textit{parte principal}}$$

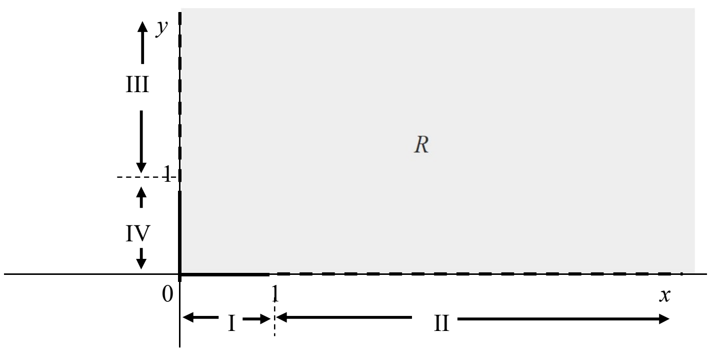
(desarrollo válido para todo $z \neq 0$). Se trata, por lo tanto, de una singularidad esencial. Ahora, el residuo de *f* en el punto del infinito es el residuo de *h* en 0, siendo $h(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} g(z)$. Del desarrollo precedente, tenemos directamente que para todo $z \neq 0$ es:

$$h(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} g(z) = -1 \boxed{-\frac{4}{z}} - \frac{4}{2!z^2} - \frac{4}{3!z^3} - \dots$$

Por lo tanto, la respuesta es: el punto del infinito es una singularidad aislada esencial de la función *f* y $RES(f, \infty) = -4$.

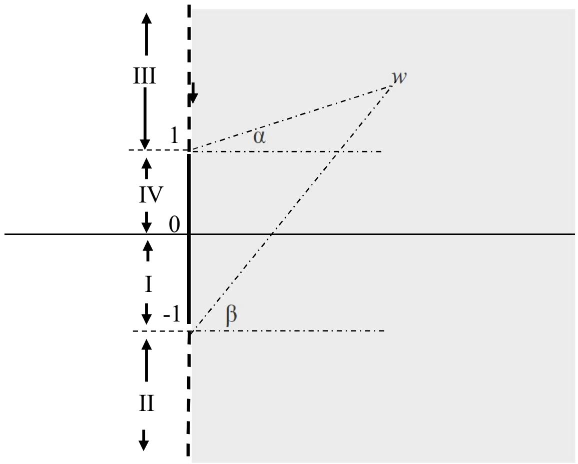
---

2. Se trata de la ecuación de Laplace en el primer cuadrante con condiciones de borde seccionalmente constantes. Parecería que el método de las transformaciones conformes nos puede ayudar bastante.



(1) $\Delta u = 0$ en *R* (2) *u* = 0 en (II) y (III) (3) *u* = 1 en (I) y (IV)

La función $z \mapsto w = -iz^2$ es inyectiva en R , conforme en todos sus puntos excepto en el punto 0 de su borde y transforma el recinto R en el semiplano H de la siguiente figura, donde hemos indicado las correspondientes secciones transformadas del borde de R:



$$\alpha = Arg(w-i) \qquad \beta = Arg(w+i)$$

Buscamos la solución acotada en la forma $u = A\alpha + B\beta + C$, donde las constantes A, B y C se determinan por las condiciones de borde:

en III: $\quad A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 0$

en IV y en I: $\quad -A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 1$

en II: $\quad -A\frac{\pi}{2} - B\frac{\pi}{2} + C = 0$

Resolviendo este sistemita lineal muy sencillo, tenemos $A = -\frac{1}{\pi}$, $B = \frac{1}{\pi}$ y $C = 0$, es decir:

$$\boxed{u = -\frac{1}{\pi}\alpha + \frac{1}{\pi}\beta = -\frac{1}{\pi}Arg(w-i) + \frac{1}{\pi}Arg(w+i) = -\frac{1}{\pi}Arg(-iz^2 - i) + \frac{1}{\pi}Arg(-iz^2 + i)}$$

Hagamos algunas cuentitas:

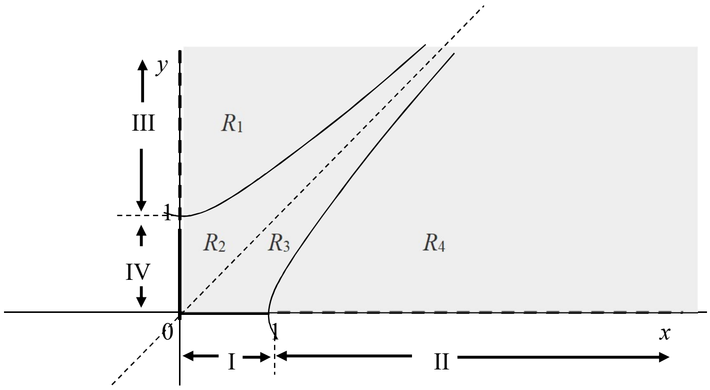
(a) $Arg(-iz^2 - i) = Arg[-i(x^2 - y^2 + 2xyi) - i] = Arg[2xy + i(-x^2 + y^2 - 1)] = artg\left(\frac{-x^2 + y^2 - 1}{2xy}\right)$

(b) $Arg(-iz^2 + i) = Arg[-i(x^2 - y^2 + 2xyi) + i] = Arg[2xy + i(-x^2 + y^2 + 1)] = artg\left(\frac{-x^2 + y^2 + 1}{2xy}\right)$

Entonces:

$$\boxed{u=-\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{-x^2+y^2-1}{2xy}\right)+\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{-x^2+y^2+1}{2xy}\right)=\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)-\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)}$$

Comprobaciones (no se requieren, pero el comportamiento de estas armónicas en los bordes siempre es mágico…)



En la región R_1: $x^2-y^2+1<0$ y $x^2-y^2-1<0$, por lo tanto:

$$\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)-\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)\xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{y>1}-\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=0$$

En las regiones R_2 y R_3: $x^2-y^2+1>0$ y $x^2-y^2-1<0$, por lo tanto:

$$\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)-\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)\xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{0<y<1}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=1$$

$$\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)-\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)\xrightarrow[y\longrightarrow 0+]{0<x<1}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=1$$

En la región R_4: $x^2-y^2+1>0$ y $x^2-y^2-1>0$, por lo tanto:

$$\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)-\frac{1}{\pi}artg\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)\xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{y>1}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=0$$

---

3. $$\begin{cases} (1)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & ,\quad 0<x<1\,,\,0<y<1 \\ (2)\ u(0,y)=u(1,y)=0 & ,\quad 0\le y\le 1 \\ (3)\ u(x,0)=f(x) & ,\quad 0\le x\le 1 \\ (4)\ u(x,1)=3sen(10\pi x) & ,\quad 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Típico problema para resolver mediante separación de variables, superposición y series de Fourier. Un sistema de soluciones básicas de la ecuación (1) es

$$\cos(n\pi x)\cosh\left(\frac{n}{2}\pi y\right)\ ,\ \cos(n\pi x)senh\left(\frac{n}{2}\pi y\right)\ ,\ sen(n\pi x)\cosh\left(\frac{n}{2}\pi y\right),\ sen(n\pi x)senh\left(\frac{n}{2}\pi y\right)$$

$n\in\{0,1,2,3,...\}$

Observación: otro sistema es: $\cos(n\pi x)e^{\frac{n\pi}{2}y}$, $\cos(n\pi x)e^{-\frac{n\pi}{2}y}$, $sen(n\pi x)e^{\frac{n\pi}{2}y}$, $sen(n\pi x)e^{-\frac{n\pi}{2}y}$, $n\in\{0,1,2,3,...\}$

De éstas, las que verifican la condición (2) son

$$sen(n\pi x)\cosh\left(\frac{n}{2}\pi y\right),\ sen(n\pi x)senh\left(\frac{n}{2}\pi y\right)\quad ,\quad n\in\{0,1,2,3,...\}$$

Ya hemos considerado la parte lineal del problema, por lo tanto, procedemos a la superposición:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)\left(A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)+B_n senh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)\right)\qquad (1)$$

Vamos por (3):

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)A_n=f(x)$$

Se trata del desarrollo en series de Fourier de $\widetilde{f}$, extensión 2-periódica impar de *f*. Por lo tanto,

$$A_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(t)sen(n\pi t)dt=\int_{-1}^{1}\overbrace{\widetilde{f}(t)sen(n\pi t)}^{par}dt=2\int_{0}^{1}\widetilde{f}(t)sen(n\pi t)dt=2\int_{0}^{1}f(t)sen(n\pi t)dt$$

Pero, precisamente, tenemos (enunciado) que $\int_0^1 f(t)sen(n\pi t)dt=\frac{1}{n}$. Por lo tanto:

$$A_n = \frac{2}{n} \qquad (2)$$

Es decir: cualesquiera sean las constantes B_n, la función

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)\left(\frac{2}{n}\cosh\left(\frac{n\pi}{2}y\right) + B_n senh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)\right) \qquad (3)$$

es solución de (1), (2) y (3). Veamos la cuarta:

$$u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)\left(\frac{2}{n}\cosh\left(\frac{n\pi}{2}\right) + B_n senh\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 3sen(10\pi x)$$

La unicidad de los coeficientes de Fourier impone:

$$\begin{cases} (i)\ \ \dfrac{1}{10}\cosh\left(\dfrac{10\pi}{2}\right) + B_{10} senh\left(\dfrac{10\pi}{2}\right) = 3 \\ (ii)\ \dfrac{1}{n}\cosh\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + B_n senh\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0 \quad si\ n \neq 10 \end{cases}$$

Es decir: $\begin{cases} (i)\ \ B_{10} = \dfrac{30 - \cosh(5\pi)}{10 senh(5\pi)} \\ \\ (ii)\ B_n = -\dfrac{\cosh\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{n\, senh\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)} \quad si\ n \neq 10 \end{cases}$

Por lo tanto, la solución es

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) = {} & sen(10\pi x)\left(\frac{2}{10}\cosh(5\pi y) + \frac{30 - \cosh(5\pi)}{10 sen(5\pi)} senh(5\pi y)\right) + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 10}}^{\infty} sen(n\pi x)\left(\frac{2}{n}\cosh\left(\frac{n\pi}{2}y\right) - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\, senh\left(\frac{n\pi}{2}\right)} senh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)\right) \end{aligned}}$$

---

4. Cualquiera sea g seccionalmente continua en el intervalo [0 , L], la función f resulta absolutamente integrable (es obvio, dado que se anula fuera de este intervalo) y lo mismo ocurre con f^2 (lo que permite aplicar la identidad de Parseval). Para el teorema de inversión, sin embargo, se requiere que g, además de ser seccionalmente continua, admita derivadas laterales finitas en todos los puntos del intervalo [0 , L]. El caso $g \equiv 1$ en [0 , L] verifica sobradamente todas estas condiciones. Ahora, calculemos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^L e^{-i\omega x} dx \overset{\omega \neq 0}{=} \left\{ \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right\}_{x=0}^{x=L} = \frac{e^{-i\omega L} - 1}{-i\omega} = \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega} i$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^L dx = L$$

Observe que $\hat{f}$ no solo resulta continua en 0: es analítica en toda la recta, pues

$$\frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega} i = \frac{i}{\omega} \left(1 - i\omega L - \frac{1}{2!}\omega^2 L^2 - \frac{i}{3!}\omega^3 L^3 + \frac{1}{4!}\omega^4 L^4 + ... - 1 \right) =$$
$$= i \left(-iL - \frac{1}{2!}\omega L^2 - \frac{i}{3!}\omega^2 L^3 + \frac{1}{4!}\omega^3 L^4 + ... \right) = L - \frac{i}{2!}\omega L^2 + \frac{1}{3!}\omega^2 L^3 + \frac{1}{4!}\omega^3 L + ...$$

Serie con radio de convergencia infinito y con valor L en $\omega = 0$. (Esta observación no era necesaria).

Para L = 3, tenemos $\hat{f}(\omega) = \dfrac{e^{-3i\omega} - 1}{\omega} i$ (y su valor en 0 es 3; no volveremos a aclarar esto). Ya vimos que podemos aplicar la identidad de Parseval:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{-3i\omega} - 1}{\omega} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \right|^2 dx = 2\pi \int_0^3 dx = 6\pi}$$

---

5. Una transformada de Laplace está siempre definida en un semiplano $\mathbb{H}_c = \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > c \}$, para algún real c (= abscisa de convergencia). En el caso $F(s) = e^{-as} Log\left(\dfrac{s-2}{s-5} \right)$, claramente debe ser $c \geq 5$ (en primer lugar). Ahora, debemos tomar en consideración el dominio del logaritmo principal.

Pero si s verifica $\mathrm{Re}(s) > 5$, resulta

$$\mathrm{Re}\left(\frac{s-2}{s-5}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{s-5+3}{s-5}\right) = \mathrm{Re}\left(1+\frac{3}{s-5}\right) = \mathrm{Re}\left(1+3\frac{\bar{s}-5}{|s-5|^2}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(1+3\frac{\mathrm{Re}(s)-5}{|s-5|^2} - 3i\frac{\mathrm{Im}(s)}{|s-5|^2}\right) = 1+3\frac{\overbrace{\mathrm{Re}(s)-5}^{>0}}{|s-5|^2} > 0$$

Hemos probado que para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > 5$ se verifica $\mathrm{Re}\left(\frac{s-2}{s-5}\right) > 0$, lo que significa que si $\mathrm{Re}(s) > 5$, $\frac{s-2}{s-5}$ es un punto del dominio del logaritmo principal. Por lo tanto, el dominio de F es, efectivamente, el semiplano

$$\mathbb{H}_5 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 5\}$$

(es decir: la abscisa de convergencia solicitada es 5).

<u>*Observación*</u> 1: No estamos afirmando que $\mathbb{H}_5$ sea el dominio de $e^{-as}Log\left(\frac{s-2}{s-5}\right)$, si no que $\mathbb{H}_5$ <u>está contenido</u> en dicho dominio. Más aún, hemos probado que $\mathbb{H}_5$ es el mayor de los semiplanos $\mathbb{H}_c$ contenidos en ese dominio, y eso es lo que permite afirmar que 5 es la abscisa de convergencia.

Ahora, calculemos (haremos las cuentas esquemáticamente). En primer lugar:

$$g(t)H(t) \xrightarrow{Laplace} Log\left(\frac{s-2}{s-5}\right)$$

Observe que $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} Log\left(\frac{s-2}{s-3}\right) = 0$, como corresponde. Sigamos:

$$g(t-a)H(t-a) \xrightarrow{Laplace} e^{-as}Log\left(\frac{s-2}{s-5}\right) = F(s)$$

Observe que también $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} e^{-as}Log\left(\frac{s-2}{s-5}\right) = 0$, pues a es un número real positivo.

Por lo tanto, podemos poner $f(t) = g(t-a)H(t-a)$, y ahora necesitamos calcular $g(t)$. Cuando uno se asusta con los logaritmos, como puede ser el caso, a veces conviene derivar:

$$tg(t)H(t) \xrightarrow{Laplace} -\frac{d}{ds}Log\left(\frac{s-2}{s-5}\right) = \frac{3}{(s-5)(s-2)} = \frac{1}{s-5} - \frac{1}{s-2}$$

<u>*Observación* 2</u>: en el dominio en el que estamos trabajando, es válida la identidad $Log\left(\frac{s-2}{s-5}\right) =$ $Log(s-2) - Log(s-5)$, de donde se deduce más sencillamente la última igualdad (prestar atención al signo $-$) . Pero debe tenerse cuidado cuando se utilizan estas propiedades con una determinación dada del logaritmo, como advierte el ejercicio 36 (b) del Trabajo Práctico 6. En nuestro caso, observe que si Re(s) > 5, es también $\text{Re}(s-2) > 0$.

Ahora, esta última función es la transformada de Laplace de $[e^{5t} - e^{2t}]H(t)$, por lo tanto, tenemos que:

$$g(t)H(t) = \frac{e^{5t} - e^{2t}}{t} H(t)$$

<u>*Observación* 3</u>: $\underset{t \to 0}{Lim} \frac{e^{5t} - e^{2t}}{t} = 5 - 2 = 3$, por lo tanto $g(0^+)H(0^+) = 3$.

Finalmente,

$$\boxed{f(t) = g(t-a)H(t-a) = \frac{e^{5(t-a)} - e^{2(t-a)}}{t-a} H(t-a)}$$
