Onda Plana

April 4, 2025

W.G. Fano

En este apunte se van a obtener las ecuaciones de onda en función del tiempo. Se comienzan planteando las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo y se aplica una excitación armónica con el tiempo, empleando notación exponencial compleja. Finalmente los campos se obtienen aplicando la parte real de la función. Debe considerar que los campos eléctrico y magnético son funciones reales y son ondas ya que son soluciones de la ecuación de ondas.

Indice

1 Introducción

Se ha visto que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\
&\nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2 Onda plana en un dieléctrico perfecto

Primero se va a resolver el caso del campo eléctrico y campo magnético en un medio sin pérdidas comunmente denominado dieléctrico perfecto en ausencia de fuentes.

Considere el vacío que es un medio dieléctrico perfecto, y los campos con variación armónica, considere también la notación exponencial compleja $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}$ y $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t}$, donde las derivadas se transforman en $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \to j\omega\vec{E}$, analogamente con el campo magnético $\vec{H}$:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \\
&\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\vec{E} \\
&\nabla \cdot \vec{D} = 0 \\
&\nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

2.1 Ecuación de ondas

Para obtener la ecuación de ondas se aplica el rotor a la ecuación de $\nabla \times \vec{H}$ de (2):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 \nabla \times \vec{E} \tag{3}$$

recordando

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H} \\
&\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

se tiene:

$$-\nabla^2\vec{H} = j\omega\epsilon_0(-j\omega\mu_0\vec{H}) \tag{5}$$

Se llega a las ecuación de ondas reducidas de Helmholtz:

$$\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\vec{H} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\vec{E} = 0 \tag{7}$$

haciendo γ:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \tag{8}$$

Se llega a la ecuación de onda reducida o ecuación de Helmholtz siguiente:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0} \tag{9}$$

Se obtiene un resultado análogo con el campo magnético:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0} \tag{10}$$

operando con la constante de propagación γ en el vacío se obtiene:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \tag{11}$$

donde γ es la constante de propagación, en general es una magnitud compleja

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{12}$$

α[1/m] constante de atenuación, β[rad/m] constante de fase

para el caso del vacío se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \end{array}} \tag{13}$$

- En el vacío no habrá disipación de potencia de la onda electromagnética en forma de calor: $\alpha = 0$, porque $\sigma = 0$
- Los medios que son dieléctricos perfectos, se conocen como medio SIN PÉRDIDAS
- En medios donde $\sigma \neq 0$ se tendrá disipación de calor en el medio donde se propaga la onda. El medio será un MEDIO CON PÉRDIDAS

Reescribiendo las ecuaciones de onda reducidas de Helmholtz:

$$\begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0 \end{array} \tag{14}$$

Considerando que el campo eléctrico tiene solo la componente E_x, en una dimensión. Reemplazando el laplaciano se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma^2\right)E_x=0 \tag{15}$$

Considerando que la onda vibra solo en z, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}&=0\\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}&=0\end{aligned} \tag{16}$$

se obtiene la siguiente ec. diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2E_x}{dz^2}-\gamma^2E_x=0 \tag{17}$$

La solución de la ec. diferencial ordinaria anterior es:

$$E_x(z)=E_x^+(z)+E_x^-(z) \tag{18}$$

El primer término representa una onda que se propaga en $z>0$ y el segundo término representa una onda que se propaga en $z<0$, considerando que $\gamma=j\beta$, resulta:

$$E_x(z)=E_0^+e^{-\gamma z}+E_x^-e^{+\gamma z}=E_0^+e^{-j\beta z}+E_x^-e^{+j\beta z} \tag{19}$$

Introduciendo la variación temporal armónica:

$$E_x(z)=E_0^+e^{j(\omega t-\beta z)}+E_0^-e^{j(\omega t+\beta z)} \tag{20}$$

Para visualizar el resultado, se aplica la parte real a cada exponencial:

$$E_x(z)=E_0^+cos(\omega t-\beta z)+E_0^-cos(\omega t+\beta z) \tag{21}$$

$$E_x(z)=E_0^+cos(\omega t-\beta z)+E_0^-cos(\omega t+\beta z) \tag{22}$$

Se puede observar que se trata de soluciones particulares de la solución general:

$$E_x(z)=f^+(\omega t-\beta z)+f^-(\omega t+\beta z) \tag{23}$$

Para calcular el campo magnético se usa la ecuación de Maxwell

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu_0\vec{H} \tag{24}$$

donde el campo magnético se obtiene como:

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{E_x} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-j\omega\mu_0} = \frac{-(-\hat{y})\frac{dE_x}{dz}}{-j\omega\mu_0} \tag{25}$$

El campo magnético resulta:

$$\vec{H} = j\hat{y}\frac{\frac{dE_x}{dz}}{\omega\mu_0} = j\hat{y}\left(\frac{-j\beta E_0^+ e^{-j\beta z} + j\beta E_0^- e^{j\beta z}}{\omega\mu_0}\right) \tag{26}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\frac{\beta}{\omega\mu_0}\left(E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}\right) \tag{27}$$

donde:

$$\frac{\beta}{\omega\mu_0} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\omega\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_{00}} \tag{28}$$

y la impedancia intrínseca del vacío es:

$$Z_{00} \cong 377\Omega \tag{29}$$

Por lo tanto:

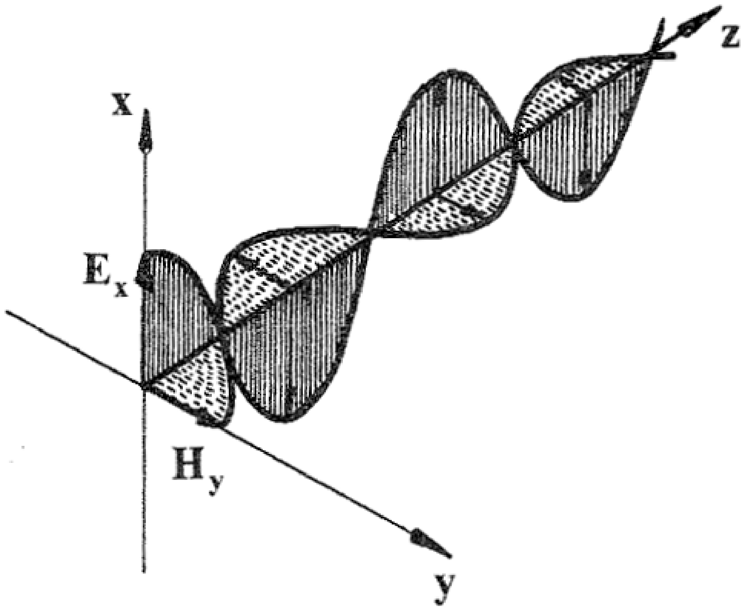
$$H_y = \frac{E_0^+}{Z_{00}}e^{-j\beta z} - \frac{E_0^-}{Z_{00}}e^{j\beta z} = \frac{E_0^+}{Z_{00}}cos(\omega t - \beta z) - \frac{E_0^-}{Z_{00}}cos(\omega t + \beta z) \tag{30}$$

2.2 Onda TEM

Onda transversal electromagnética (TEM) que se propaga en $+z$ polarizada en x

$$\boxed{\begin{array}{l} E_x(z) = E_0^+ cos(\omega t - \beta z) + E_0^- cos(\omega t + \beta z) \\ H_y = \frac{E_0^+}{Z_{00}}cos(\omega t - \beta z) - \frac{E_0^-}{Z_{00}}cos(\omega t + \beta z) \end{array}} \tag{31}$$

- Onda electromagnética plana en el vacío (dieléctrico perfecto)
- Considerando la onda que se propaga en $z > 0$, la relación entre E^+ y H^+ es $\frac{E^+}{H^+} = Z_{00} = 377\Omega$
- El campo eléctrico es perpendicular al campo magnético
- Onda polarizada en x



- E y H se encuentran en un plano perpendicular a la dirección de propagación
- Onda electromagnética transversal (TEM) a la dirección de propagación $+z$

Considere la onda que se propaga en $z > 0$

$$E_x^+(zt) = E_0^+ cos(\omega t - \beta z) \tag{32}$$

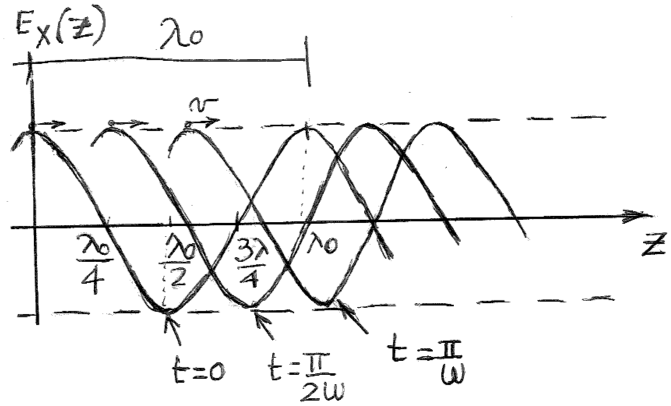
Para tiempos sucesivos, la onda viaja en las $z > 0$ Si se considera la fase constante:

$$(\omega t - \beta z) = cte \tag{33}$$

aplicando derivada d/dt

$$\omega \frac{dt}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} = 0 \tag{34}$$

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \cong 3 \cdot 10^8 \ m/s \tag{35}$$



La velocidad de fase en el vacío será la velocidad de la luz en el vacío

$$E_x^+(zt) = E_0^+ cos(\omega t - \beta z) \tag{36}$$

si t=0

$$E_x^+(zt)|_{t=0} = E_0^+ cos(-\beta z) = E_0^+ cos(\beta z) \tag{37}$$

si el argumento del coseno es 2π el campo vuelve al mismo punto que $z = 0$ recorre λ_0:

$$\beta \lambda_0 = 2\pi \tag{38}$$

La constante de propagación ya se vió anteriormente:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} \tag{39}$$

por lo tanto:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}} = \frac{c}{f} \tag{40}$$

3 Onda plana en un buen conductor

3.1 Ecuación de ondas

Se ha visto que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \tfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\
&\nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned} \tag{41}
$$

Para una zona en un conductor, la permeabilidad magnética puede ser distinta a la del vacío μ_0, los campos con variación armónica, donde la corriente de conducción es mucho mayor que la corriente de desplazamiento, se puede despreciar la corriente de desplazamiento frente a la corriente de conducción queda:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\
&\nabla \times \vec{H} \cong \vec{J} \\
&\nabla \cdot \vec{D} = 0 \\
&\nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned} \tag{42}
$$

Aplicando el rotor a la primer ecuación:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} \tag{43}$$

recordando

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} \\
&\nabla \times \vec{H} \cong \vec{J}
\end{aligned} \tag{44}
$$

se tiene:

$$-\nabla^2\vec{E} = -j\omega\mu\vec{J} = -j\omega\mu\sigma\vec{E} \tag{45}$$

Se llega a las ecuación de ondas reducidas de Helmholtz:

$$-\nabla^2\vec{E} + j\omega\mu\sigma\vec{E} = 0 \tag{46}$$

multiplicando por (-1) se obtiene:

$$\nabla^2\vec{E} - j\omega\mu\sigma\vec{E} = 0 \tag{47}$$

haciendo:

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma \tag{48}$$

Se llega a la ecuación de onda reducida o ecuación de Helmholtz siguiente:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \gamma^2\vec{E} = 0} \tag{49}$$

operando con la constante de propagación γ en el medio conductor se obtiene:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma}\sqrt{j} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+j) \tag{50}$$

donde γ es la constante de propagación compleja es:

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{51}$$

α[1/m] constante de atenuación, β[rad/m] constante de fase

para el caso del conductor se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \\ \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \end{array}} \tag{52}$$

La solución de la ec. diferencial ordinaria anterior es:

$$E_x(z) = E_x^+(z) + E_x^-(z) \tag{53}$$

El primer término representa una onda que se propaga en $z > 0$ y el segundo término representa una onda que se propaga en $z < 0$:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_x^- e^{+\gamma z} \tag{54}$$

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_x^- e^{\alpha z} e^{+j\beta z} \tag{55}$$

Introduciendo la variación temporal armónica:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} + E_0^- e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \tag{56}$$

Para visualizar el resultado, se aplica la parte real a cada exponencial:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z) + E_0^- e^{\alpha z} cos(\omega t + \beta z) \tag{57}$$

Se puede observar que se trata de soluciones particulares de la solución general:

$$E_x(z) = f^+(\omega t - \beta z) + f^-(\omega t + \beta z) \tag{58}$$

Para calcular el campo magnético se usa la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \tag{59}$$

donde el campo magnético se obtiene como:

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{E_x} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-j\omega\mu} = \frac{-(-\hat{y})\frac{dE_x}{dz}}{-j\omega\mu} \tag{60}$$

El campo magnético resulta:

$$\vec{H} = \hat{y}\frac{\frac{dE_x}{dz}}{-j\omega\mu} = \hat{y}\left(\frac{-\gamma E_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \gamma E_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}}{-j\omega\mu}\right) \tag{61}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\left(\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}\right) \tag{62}$$

Considerando solo la onda que se propaga en la $z+$ la impedancia del medio es:

$$Z_m = \frac{E^+}{H^+} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) \tag{63}$$

Se puede observar que la impedancia tendrá parte real e imaginiaria que son iguales. Además en un medio conductor se supone que el módulo de la impedancia debería ser de pocos Ohms, sin embargo la impedancia va a aumentar con la frecuencia (para un análisis más detallado ver sección 2.8 Libro de Ingeniería Electromagnética Vol.I Trainotti, Fano).

$$Z_m = R_m + jX_m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{64}$$

La velocidad de fase será:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \tag{65}$$

La longitud de onda en el medio conductor:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{66}$$

4 Onda plana en un dieléctrico con pérdidas

Se ha visto que las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \tfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{67}$$

Para una zona libre de fuentes, en un dieléctrico con pérdidas ($\sigma \neq 0$), considerando al medio no magnético ($\mu = \mu_0$), con $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ con variación armónica en los campos:

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \\ &\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega\epsilon \vec{E} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \\ &\nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

Aplicando el rotor

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\nabla \times \vec{E} \tag{69}$$

recordando

$$\begin{aligned} &\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H} \\ &\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \end{aligned} \tag{70}$$

se tiene:

$$-\nabla^2 \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)(-j\omega\mu_0 \vec{H}) \tag{71}$$

$$-\nabla^2 \vec{H} + (\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu_0 \vec{H} = 0 \tag{72}$$

haciendo $\gamma^2 = j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)$, se llega a la ecuación de onda de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0 \tag{73}$$

donde la constante de propagación es:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)} \tag{74}$$

Analogamente:

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \tag{75}$$

con la constante de propagación:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)} \tag{76}$$

Si la onda electromagnética vibra en el eje x, y se propaga en z igual que en la propagación en el vacío:

se obtiene la siguiente ec. diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} - \gamma^2 E_x = 0 \tag{77}$$

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_x^- e^{+\gamma z} \tag{78}$$

con la constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)} \tag{79}$$

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_0^- e^{+\gamma z} \tag{80}$$

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+\alpha z} e^{j\beta z} \tag{81}$$

multiplicando por $e^j\omega t$

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} + E_0^- e^{+\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \tag{82}$$

Tomando la parte real de cada término:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z) + E_0^- e^{+\alpha z} cos(\omega t + \beta z) \tag{83}$$

Onda plana que se propaga en un medio con pérdidas en la dirección $+z$, polarizada en x.

$E_0^+ e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z)$

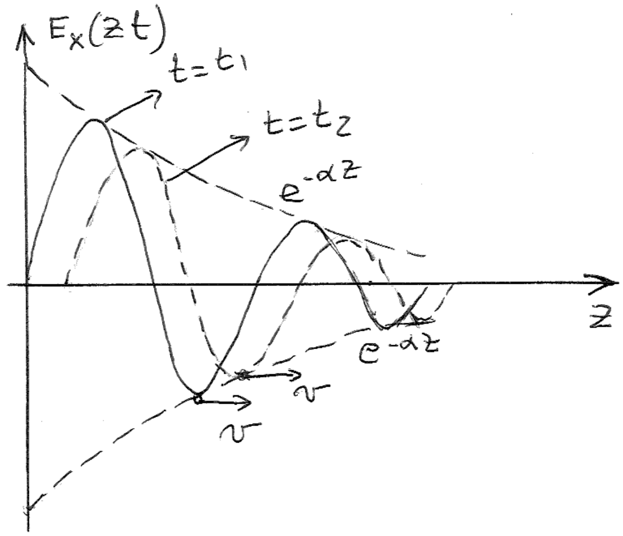
Siendo $\vec{E}$:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_0^- e^{+\gamma z} \tag{84}$$

Para calcular el campo magnético se usa la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \tag{85}$$

donde el campo magnético se obtiene como:



$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{E_x} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-j\omega\mu_0} = \frac{-(-\hat{y})\frac{dE_x}{dz}}{-j\omega\mu_0} \tag{86}$$

el campo magnético es:

$$\vec{H} = \hat{y}\frac{j}{\omega\mu_0}\frac{dE_x}{dz} \tag{87}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\frac{j}{\omega\mu_0}\left(-\gamma E_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma E_0^- e^{+\gamma z}\right) \tag{88}$$

Considerando la onda que se propaga en z+ $z > 0$:

$$\vec{H} = \hat{y}\frac{j(-\gamma)}{\omega\mu_0}E_0^+ e^{-\gamma z} \tag{89}$$

como $\gamma = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)}$

$$\vec{H} = \hat{y}\frac{E_0^+ e^{-\gamma z}}{Z_m} \tag{90}$$

donde la impedancia intrínseca del medio $Z_m = \frac{\omega\mu_0}{j(-\gamma)}$
La impedancia intrínseca del medio con pérdidas Z_m es:

$$Z_m = \frac{\omega\mu_0}{j(-\gamma)} = \frac{\omega\mu_0}{j(-\sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)})} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (91)$$

Z_m se vuelve compleja:

$$Z_m = R_m + jX_m = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (92)$$

Z_m (Ω) es la impedancia del medio
R_m (Ω) es la resistencia del medio
X_m (Ω) es la reactancia del medio
La velocidad de fase en un dieléctrico con pérdidas es:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (93)$$

La longitud de onda en el medio dieléctrico con pérdidas es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (94)$$

Nótese que tanto la velocidad de fase como la longitud de onda en un medio dieléctrico con pérdidas se debe calcular a partir de β que es la parte imaginaria de la constante de propagación γ.

4.1 Clasificación de los medios

Los medios se pueden clasificar en medios como, buenos dieléctricos o buenos conductores, para ello hay que hacer el cociente entre las corrientes:

$$\frac{Jc}{Jd} = \frac{\sigma E}{j\omega\epsilon E} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \quad (95)$$

tomando el módulo del complejo se define la tangente de pérdidas:

$$tg\delta = \frac{Jc}{Jd} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad (96)$$

Por lo tanto

- Buenos dieléctricos $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} << 1$
- Buenos conductores $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} >> 1$

Ejemplo Una onda electromagnética se propaga en un medio dieléctrico a $f = 100kHz$, con pérdidas con $\sigma = 2 \cdot 10^{-3}$ y $\epsilon_r = 4$. Calcular la impedancia intrínseca del medio, y la tangente de pérdidas.

$$Z_m = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j2\pi \cdot 10^5 \ Hz 4\pi \cdot 10^{-7} \ H/m}{2 \cdot 10^{-3} + j2\pi \cdot 10^5 \ Hz 4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \ F/m}} \tag{97}$$

$$Z_m \cong \sqrt{\frac{j2\pi \cdot 10^6 \ Hz 4\pi \cdot 10^{-7} \ H/m}{2 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{\frac{j \cdot 4\pi^2 \cdot 10^{-1} \ HzH/m}{10^{-3}}} \tag{98}$$

$$Z_m \cong \sqrt{j \cdot 4\pi^2 \cdot 10^2}\,\Omega = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 62.8\,\Omega \tag{99}$$

$$Z_m \cong 44.4 + j44.4 \ \Omega \tag{100}$$

$$tg\delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \tag{101}$$

$$tg\delta = \frac{10^4}{\pi \cdot 4 \cdot 8.854} \cong 89,9 \tag{102}$$

como

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} >> 1 \tag{103}$$

es un medio buen conductor a esa frecuencia de trabajo
la constante de propagación:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)} \tag{104}$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \cdot 10^5 4\pi \cdot 10^{-7}(2 \cdot 10^{-3} + j2\pi \cdot 10^5 4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12})} \ (1/m) \tag{105}$$

$$\gamma \cong \sqrt{j2\pi \cdot 10^5 4\pi \cdot 10^{-7}(2 \cdot 10^{-3})} = \sqrt{j4^2\pi^2 \cdot 10^{-5}} \ (1/m) \tag{106}$$

$$\gamma \cong 0.028099 \ (1/m) + j0.028099 \ (rad/m) \tag{107}$$

$$\begin{aligned} \alpha &\cong 0.028\ (1/m) \\ \beta &\cong 0.028\ (rad/m) \end{aligned} \tag{108}$$

la velocidad de fase, que al ser una onda monocromática es la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^5}{0.028}\ (m/s) \tag{109}$$

$$v = 2.2361 \cdot 10^7\ (m/s) \tag{110}$$

la velocidad de propagación como porcentaje respecto a c:

$$\frac{v}{c} = \frac{2.2361 \cdot 10^7\ (m/s)}{3 \cdot 10^8\ (m/s)} = 0.074536 \tag{111}$$

Ejercicio A fin de entender el comportamiento de la propagación en función de la frecuencia, el lector puede repetir los calculos hechos en el ejemplo anterior, para una frecuencia: $f = 1\ GHz$ para observar los cambios y, asi obtener conclusiones.

5 Medios de Propagación

En este curso se va a considerar al medio de propagación como Medio simple: **Lineal, homogéneo e isótropo**

Los medios donde se propaga una onda electromagnética se pueden clasificar en función de su conductividad eléctrica:

- Medio conductor perfecto $\sigma \to \infty$
- Medio buen conductor $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} >> 1$
- Medio buen dieléctrico $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} << 1$
- Medio dieléctrico perfecto $\sigma = 0$

Aqui se ha considerado a un medio como No magnético donde $\mu = \mu_0$. Otros medios que se pueden encontrar son:

- Medios Anisótropos: varían sus propiedades eléctricas o magnéticas con la dirección.

- Medios heterogéneos: esta constituido por ejemplo por capas o estratos, donde varían sus propiedades eléctricas o magnéticas, como el suelo.
- Medios No lineales, por ejemplo en un medio magnético como el hierro de un transformador, que la magnetización tiende a saturar.

5.1 Profundidad de penetración

Recordando que la intensidad de campo eléctrico se expresó como:

$$E_0^+ e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z) \tag{112}$$

la prof. de penetración se va a definir de acuerdo a que la onda va a atenuar e^{-1} en la amplitud desde la superficie de un medio:

$$\alpha z = 1 \tag{113}$$

por lo tanto:

$$z = tg\delta = \frac{1}{\alpha} \tag{114}$$

Para un medio conductor $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$:

$$tg\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} \tag{115}$$

Para un medio en general $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$:

$$tg\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{Re(\gamma)} = \frac{1}{Re(\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)})} \tag{116}$$

Ejemplo: calcular la profundidad de penetración para el Cobre donde $\sigma \cong 5,8 \cdot 10^7$ (S/m), $\epsilon_r = 1$ y $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m) para una frecuencia $f = 1\ MHz$

$$tg\delta = \frac{2}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi 1\ MHz 4\pi \cdot 10^{-7}\ (H/m) 5,8 \cdot 10^7\ (S/m)}} \tag{117}$$

$$tg\delta = 6,61 \cdot 10^{-5}\ m = 66,1\ \mu m \tag{118}$$

Bibliografía

- Valentino Trainotti, Walter Gustavo Fano: *Ingeniería electromagnética*, Tomo I., Editorial Nueva Libreria, Argentina, 2005.
- D.K.Cheng: *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería.* Addison Wesley, Mexico, 1998.
- https://ocw.mit.edu/courses/6-013-electromagnetics-and-applications-spring-2009/download/
- https://ocw.mit.edu/courses/6-632-electromagnetic-wave-theory-spring-2003/download/