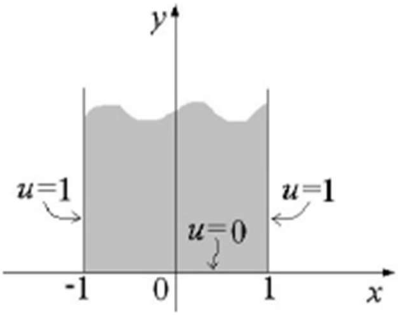
Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Quinta fecha. 29 de febrero de 2024.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Verificar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x+x^3}\,dx$ y calcular su valor.

Ejercicio 2. Hallar las isotermas de la placa de la figura con temperatura u en régimen estacionario y con sus fronteras a las temperaturas indicadas.



Ejercicio 3. Desarrollar $f(x)=e^{2x}$ en serie de Fourier de senos en $[0,1]$. Estudiar la convergencia puntual de la serie resultante en $\mathbb{R}$. ¿Es uniformemente convergente?

Ejercicio 4. Resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t) & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ u_t(x,0)=0 & -\infty\leqslant x\leqslant+\infty \\ u(x,0)=x\mathbb{1}_{(-1,1)}(x) & -\infty\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

Ejercicio 5. Hallar $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ solución de la ecuación integral:

$$f(x)=x^2+\int_0^x f(t)\,\text{sen}(x-t)\,dt$$

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. La función $\sigma:\Re\longrightarrow\Re$ tal que $\sigma(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{x} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$, conocida por todos los alumnos de Análisis Matemático III, no solamente es continua en toda la recta: es analítica, pues admite el desarrollo en serie de potencias $\sigma(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots.$, maravillosamente convergente en toda la recta real. Fue bautizada por los ingenieros en telecomunicaciones como *seno cardinal* y su notación habitual es *sinc*. Por otra parte, es muy fácil ver que para todo $x \in \Re : |\sigma(x)| \leq 1$.

Remojito 1: Para comprobar que, efectivamente, $x \in \Re : |\sigma(x)| \leq 1$, podemos recurrir a nuestros recuerdos de infancia. El Teorema del Valor Medio (versión Lagrange) aplicado a la función *seno* (que es derivable en toda la recta, y la recta es un intervalo) permite afirmar que para cada $x \neq 0$ existe θ_x en el intervalo (0, x) – si $x > 0$ – o (x, 0) – si $x < 0$ – tal que $\frac{sen(x) - sen(0)}{x - 0} = \cos(\theta_x)$, de donde se deduce inmediatamente que $\left|\frac{sen(x)}{x}\right| \leq 1$. *Fin de Remojito* 1.

Entonces, el integrando $h(x) = \frac{sen(x)}{x + x^3} = \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} = \frac{\sigma(x)}{1+x^2}$ es continuo en toda la recta y verifica que para todo $x \in \Re : |h(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, por lo tanto la integral $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge absolutamente. Más aún: ya sabemos que $\left|\int_0^{+\infty} h(x)dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |h(x)|\, dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} artg(b) = \frac{\pi}{2}$. (No es muy preciso, pero ya es un dato).

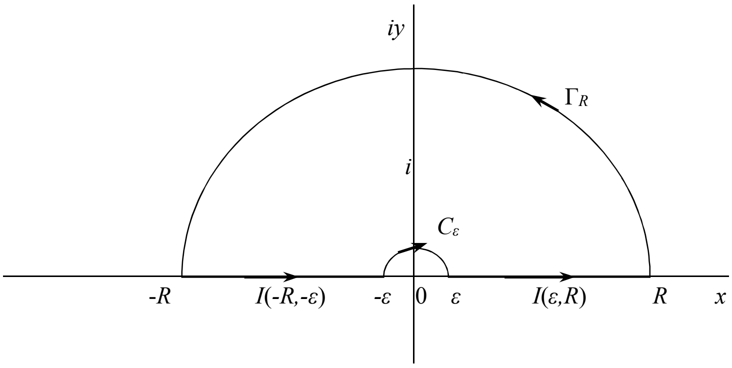
Cálculo: El cálculo de $\int_0^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} dx$ puede hacerse de manera casi idéntica la utilizada en clase para calcular $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x} dx$ (*Apunte sobre integrales impropias* – página 25).

Utilizaremos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} = \frac{e^{iz}}{z(z-i)(z+i)}$, holomorfa en $\mathbb{C} - \{0, i, -i\}$. Claramente, 0, i y $-i$ son polos simples de f. Para cada par de números reales ε y R tales que $0 < \varepsilon < 1 < R$, consideremos el circuito

$$I(-R,-\varepsilon) \cup C_\varepsilon \cup I(\varepsilon, R) \cup \Gamma_R$$

ilustrado en la figura siguiente, donde:

$$I(-R,-\varepsilon) = \{x \in \Re : -R \leq x \leq -\varepsilon\} \quad , \quad C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\} \text{ (sentido } \theta : \pi \to 0)$$
$$I(\varepsilon, R) = \{x \in \Re : \varepsilon \leq x \leq R\} \quad \text{y} \quad \Gamma_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



Por el Teorema de los residuos, para todos ε y R tales que $0 < \varepsilon < 1 < R$:

$$\int_{I(-R,-\varepsilon)} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{I(\varepsilon,R)} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i RES(f,i) \qquad (*)$$

Estudiemos estas integrales con la idea de hacer tender $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$:

(a) $$\int_{I(-R,-\varepsilon)} f(z)dz + \int_{I(\varepsilon,R)} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t(1+t^2)}dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}dx \overset{t=-x}{=} \int_{R}^{\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{-x(1+x^2)}d(-x) + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x(1+x^2)}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}dx = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x(1+x^2)}dx = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0+} 2i\int_{0}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)}dx$$

(b) $$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = -\int_{0}^{\pi} f(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = -\int_{0}^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}(1+\varepsilon^2 e^{2i\theta})}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = -i\int_{0}^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{1+\varepsilon^2 e^{2i\theta}}d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} -i\pi .$$

En el último paso hemos utilizado la igualdad $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{0}^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{1+\varepsilon^2 e^{2i\theta}}d\theta\right) = \int_{0}^{\pi} \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{1+\varepsilon^2 e^{2i\theta}}\right)d\theta$, lo que requiere una buena justificación, pues los intercambios de límites con integrales pueden ser muy peligrosos. En nuestro caso, la continuidad uniforme del integrando en el rectángulo cerrado $\{(\varepsilon,\theta): 0 \le \varepsilon \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}$ es suficiente garantía para validar este intercambio. Si bien el alumno de ingeniería tiene permitido llevar a cabo este intercambio sin mostrar la garantía, por lo menos debe respirar hondo antes de hacerlo.

(c) $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. Probemos esto:

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{i[R\cos(\theta)+iRsen(\theta)]}}{Re^{i\theta}(1+R^2e^{2i\theta})} iRe^{i\theta}d\theta\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos(\theta)}e^{-Rsen(\theta)}}{1+R^2e^{2i\theta}} id\theta\right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{iR\cos(\theta)}e^{-Rsen(\theta)}}{1+R^2e^{2i\theta}} i\right| d\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{-Rsen(\theta)}}{\left|1+R^2e^{2i\theta}\right|}d\theta \le \int_0^{\pi} \frac{e^{-Rsen(\theta)}}{\left|1-R^2\right|}d\theta \overset{R>1}{=} \frac{1}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-Rsen(\theta)}d\theta \le$$

$$\overset{Lema\ de\ Jordan}{\le} \frac{1}{(R^2-1)}\frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 .$$

Observación: Swami Diaguishankar, que todo lo observa con su sabiduría infinita, objetaría el uso abusivo del Lema de Jordan en la última desigualdad, dado que alcanza con la acotación más gruesa $\int_0^{\pi} e^{-\pi sen(\theta)}d\theta \le \pi$, suficiente para la última conclusión.

Ya tenemos todo lo necesario para tomar límites en (*) para $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$, obteniendo:

$$i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)}dx - i\pi = 2\pi iRES(f,i) = 2\pi i\frac{e^{i.i}}{i(i+i)} = \pi\frac{e^{-1}}{i}$$

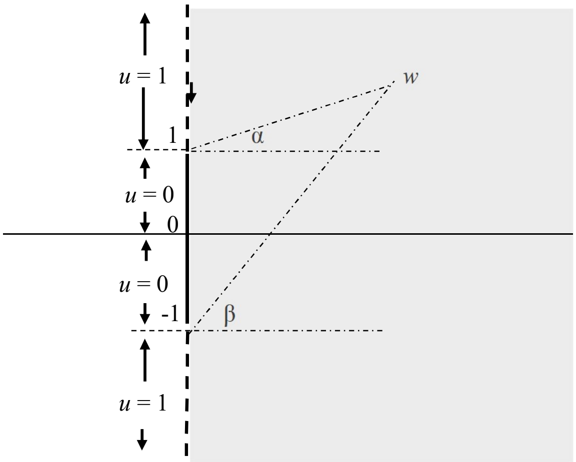
Es decir: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)}dx = \pi - \frac{\pi}{e}$. Por lo tanto, la respuesta es

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{sen(x)}{x+x^3}dx = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

---

2. La ecuación general de las isotermas es $u(x,y) = cte$, donde u es la distribución de temperaturas en la placa. Dado que el régimen es estacionario, u es armónica y por lo tanto debemos resolver la ecuación de Laplace en el dominio indicado con las condiciones de borde indicadas. La solución debe ser acotada, dada su significado físico, y entonces es única. Como las condiciones de borde son seccionalmente constantes, utilizaremos el método de las transformaciones conformes.

La función $z \mapsto w = -isen\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ es inyectiva en el rectángulo infinito que representa la placa (lo hemos visto en clase), conforme en todos sus puntos excepto en los vértices de dicho rectángulo y transforma este rectángulo el semiplano H de la siguiente figura, donde hemos indicado los correspondientes valores requeridos en el borde:



$$\alpha = Arg(w-i) \qquad\qquad \beta = Arg(w+i)$$

Buscamos la solución acotada en la forma $u = A\alpha + B\beta + C$, donde las constantes A, B y C se determinan por las condiciones de borde:

$$(1) \qquad A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 1$$

$$(2) \qquad -A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 0$$

$$(3) \qquad -A\frac{\pi}{2} - B\frac{\pi}{2} + C = 1$$

Resolviendo este sistemita lineal muy sencillo, tenemos $A = \dfrac{1}{\pi}$, $B = -\dfrac{1}{\pi}$ y $C = 1$, es decir:

$$u = \tfrac{1}{\pi}\alpha - \tfrac{1}{\pi}\beta + 1 = \tfrac{1}{\pi}Arg(w-i) - \tfrac{1}{\pi}Arg(w+i) + 1 =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}Arg[-isen(\tfrac{\pi}{2}(x+iy) - i] - \tfrac{1}{\pi}Arg[-isen(\tfrac{\pi}{2}(x+iy) + i] + 1$$

Por lo tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\tfrac{1}{\pi}Arg[-isen(\tfrac{\pi}{2}(x+iy) - i)] - \tfrac{1}{\pi}Arg[-isen(\tfrac{\pi}{2}(x+iy) + i)] + 1 = cte}$$

---

3. Sea $\widetilde{f}$ la extensión 2-periódica impar de *f*.

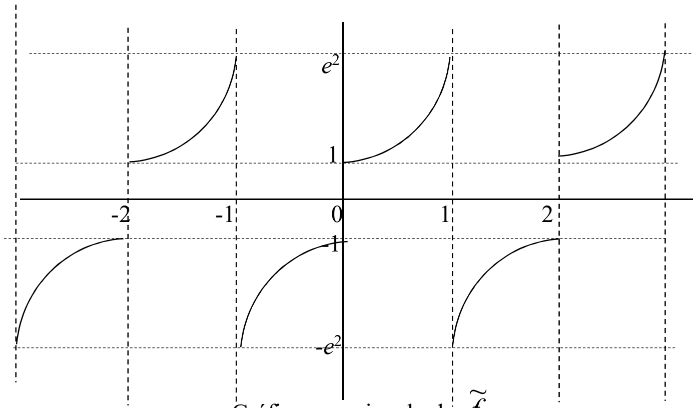


Gráfico aproximado de $\widetilde{f}$

Claramente, la función $\widetilde{f}$ verifica las condiciones de Dirichlet para la convergencia de su serie de Fourier. En particular, esta serie converge puntualmente a $\dfrac{\widetilde{f}(0^-)+\widetilde{f}(0^+)}{2}=0=\dfrac{\widetilde{f}(1^-)+\widetilde{f}(1^+)}{2}$ en los puntos 0 y 1 . Por lo tanto, la serie converge puntualmente en [0,1] a la función $\not f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad 0<x<1 \\ 0 & si \quad x\in\{0,1\} \end{cases}$. Dado que esta función no es continua, la convergencia no puede ser uniforme. [Una vez más: si la serie converge uniformemente a *f*, entonces *f* es necesariamente continua, pero la continuidad de *f* no garantiza la convergencia uniforme (ni siquiera puntual) de su serie de Fourier].

Ahora, hagamos las cuentas: para todo entero $n\geq 1$:

$$b_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(t)sen\left(\frac{2n\pi}{2}t\right)=\int_{-1}^{1}\overbrace{\widetilde{f}(t)sen(n\pi t)}^{par}dt=2\int_{0}^{1}f(t)sen(n\pi t)dt=2\int_{0}^{1}e^{2t}sen(n\pi t)dt=$$

$$=2\left\{\left(\frac{-n\pi}{4+n^2\pi^2}\cos(n\pi t)+\frac{2}{4+n^2\pi^2}sen(n\pi t)\right)e^{2t}\right\}_{t=0}^{t=1}=\frac{-2n\pi}{4+n^2\pi^2}(-1)^n e^2+\frac{2n\pi}{4+n^2\pi^2}=$$

$$=\frac{2n\pi}{4+n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n e^2\right]$$

Por lo tanto, la serie de Fourier pedida es

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi[1-(-1)^n e^2]}{4+n^2\pi^2}sen(n\pi x)}$$

---

4. Dado que el dominio espacial no es acotado, procederemos con la transformación de Fourier. Esta herramienta requiere que la solución sea una función *maravillosa*, que permita todas las operaciones que vamos a aplicarle (de clase C^{∞}, ella y sus derivadas absolutamente integrables respecto de x para cada t, podremos intercambiar la derivación respecto de t con la integración respecto de x, etc. Es decir: un elemento del espacio de Schwartz). Esquemáticamente:

$$\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx \qquad u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}dx \tag{1}$$

Transformando la ecuación diferencial obtenemos la ecuación $-\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\omega,t)$. La solución general de $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\omega,t) + \omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0$ es

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)sen(\omega t) \tag{2}$$

Una condición inicial es $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, por lo tanto: $\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)e^{-i\omega x}dx = 0$. Reemplazando en (2) resulta $-\omega A(\omega)sen(\omega 0) + \omega B(\omega)\cos(\omega 0) = 0$, es decir: $\omega B(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Re$. Entonces, la expresión (2) se reduce a

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) \tag{3}$$

Ahora, la segunda condición inicial es $u(x,0) = x1_{(-1,1)}(x)$. En términos de $\hat{u}$:

$$\hat{u}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x1_{(-1,1)}e^{-i\omega x}dx = \int_{-1}^{1} xe^{-i\omega x}dx$$

Para $\omega \neq 0$ es $\int_{-1}^{1} xe^{-i\omega x}dx = \left\{\left(\frac{i}{\omega}x + \frac{1}{\omega^2}\right)e^{-i\omega x}\right\}_{x=-1}^{x=1} = \left(\frac{i}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)e^{-i\omega} - \left(-\frac{i}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)e^{i\omega} =$

$$= \frac{i}{\omega}[e^{-i\omega} + e^{i\omega}] + \frac{1}{\omega^2}[e^{-i\omega} - e^{+i\omega}] = \frac{2i}{\omega}\cos(\omega) - \frac{2i}{\omega^2}sen(\omega) =$$

$$= 2i\frac{\omega\cos(\omega) - sen(\omega)}{\omega^2}$$

Observación 1: para $\omega \neq 0$ es

$$\frac{2i}{\omega}\cos(\omega)-\frac{2i}{\omega^2}sen(\omega)=\frac{2i}{\omega}\left(1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}-\frac{\omega^6}{6!}+...\right)-\frac{2i}{\omega^2}\left(\omega-\frac{\omega^3}{3!}+\frac{\omega^5}{5!}-\frac{\omega^7}{7!}+...\right)=$$

$$=2i\left(\omega\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)+\omega^3\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\omega^5\left(-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}\right)+...\right)$$ Por lo tanto, la función $\frac{2i}{\omega}\cos(\omega)-\frac{2i}{\omega^2}sen(\omega)$ se extiende analíticamente a toda la recta real, tomando el valor 0 en $\omega=0$.

Para $\omega=0$ es $\hat{u}(0,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x1_{(-1,1)}dx=\int_{-1}^{1}xdx=0$ (lo que significa, por la observación anterior, que $\hat{u}(\omega,0)$ es analítica). Por lo tanto,

$$A(\omega)\overset{(3)}{=}\hat{u}(\omega,0)=2i\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}=2i\left(\omega\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)+\omega^3\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\omega^5\left(-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}\right)+...\right) \quad (4)$$

Hemos obtenido, entonces:

$$\boxed{\hat{u}(\omega,t)=2i\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)} \quad (5)$$

(función analítica que vale 0 en $\omega=0$). Por lo tanto,

$$\boxed{u(x,t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}dx=\boxed{\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)e^{i\omega x}d\omega} \quad (6)$$

Es la solución requerida.

***Observación* 1:** La convergencia de la integral (6) se puede probar utilizando el criterio de Dirichlet-Abel. Por otra parte, se puede simplificar un poco:

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)e^{i\omega x}d\omega=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)[\cos(\omega x)+isen(\omega x)]d\omega$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)\cos(\omega x)}^{impar}d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)sen(\omega x)}^{par}d\omega =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)sen(\omega x)d\omega = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)sen(\omega x)d\omega$$

Es decir:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sen(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^2}\cos(\omega t)sen(\omega x)d\omega} \qquad (7)$$

(expresión de u en términos de funciones reales).

Ahora, utilizando la identidad trigonométrica $sen(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]$ podemos transformar la expresión (7) en

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sen(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^2}sen(\omega(x+t))d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sen(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^2}sen(\omega(x-t))d\omega} \qquad (8)$$

Se trata de una expresión de la forma $u(x,t) = f(x+t)+g(x-t)$ (ver *método de D'Alembert*). Lo que ninguna de estas expresiones (6), (7) u (8) permite es afirmar que u admita derivadas segundas. Este es un típico problema que se puede resolver mediante funciones generalizadas, tema que ha sido eliminado del programa. Por lo tanto, al alumno que encuentre alguna de estas expresiones se le considerará bien resuelto el ejercicio.

***Observación* 2**: Si hubiéramos aplicado directamente el método de D'Alembert, hubiéramos obtenido

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+t)\mathbb{1}_{(-1,1)}(x+t) + (x-t)\mathbb{1}_{(-1,1)}(x-t)] \qquad (9)$$

Esta función es claramente discontinua en las semirrectas de ecuaciones $|x+t|=1, |x-t|=1$ ($t \geq 0$). Son las discontinuidades (iniciales) de $u(x,0) = x\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$ que se propagan a través del tiempo en la superposición de las dos ondas planas que aparecen en (9). Un buen teorema de unicidad nos permitiría igualar los dos segundos miembros de (8) y (9), pero el dominio espacial no es acotado, y la solución (9) no es acotada (tampoco es inmediato que lo sea el segundo miembro de (8)).

5. Tenemos la ecuación $f(x) = x^2 + (f * \sigma)(x)$, $x \geq 0$, donde $\sigma(x) = sen(x)H(x)$. Aplicando la transformación de Laplace en ambos miembros, e indicando con F la transformada de f:

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + F(s)\frac{1}{s^2+1} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 0 .$$

Despejando resulta:

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

Es decir:

$$\boxed{f(x) = \left(x^2 + \frac{x^4}{12} \right) H(x)}$$
