RESOLUCIÓN DEL PARCIAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO III

2 de julio 2021 - Segunda Oportunidad - 1C 2021 - CURSO 2

---

1) La función $f(z)=\sqrt[4]{z}$ está definida en $\mathbb{C}-\{x\in\Re : x\geq 0\}$ y verifica $f(i)=e^{i\frac{\pi}{8}}$. Sea W la imagen de f. Determinar el conjunto $A=\{z\in\mathbb{C} : z^2-1\in W\}$.

Resolución: Las ramas de la raíz cuarta correspondientes al corte $\{x\in\Re : x\geq 0\}$ son los cuatro cuadrantes del plano complejo, pues la función $w\mapsto w^4$ transforma cada uno de los cuadrantes en $\mathbb{C}-\{x\in\Re : x\geq 0\}$ (esto puede verse fácilmente observando que las cuatro raíces cuartas de $1\in\{x\in\Re : x\geq 0\}$ son 1, i, -1 y $-i$). La determinación $f(i)=e^{i\frac{\pi}{8}}$ corresponde a la primera rama, por lo tanto W es el primer cuadrante. Entonces:

$$z\in A \Leftrightarrow z^2-1\in W \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2-1)>0 \wedge \mathrm{Im}(z^2-1)>0 \overset{z=x+iy}{\Leftrightarrow} x^2-y^2-1>0 \wedge 2xy>0$$

Haciendo cuentas (graficar la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1$ ayuda bastante…) tenemos la respuesta:

Respuesta:

$$A=\left\{x+iy\in\mathbb{C} : x>1\,,\, 0<y<\sqrt{x^2-1}\right\}\cup\left\{x+iy\in\mathbb{C} : x<-1\,,\, -\sqrt{x^2-1}<y<0\right\}$$

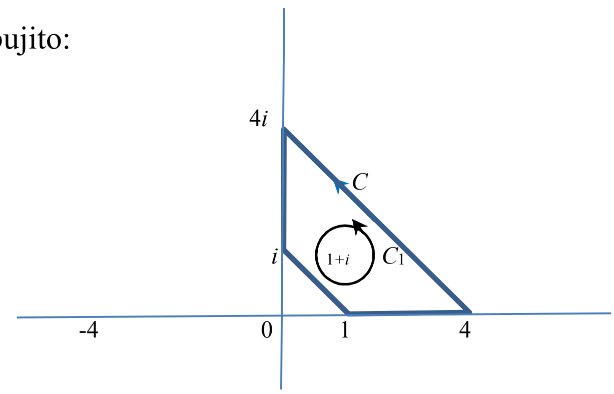
---

2) Calcular $\oint_C \frac{z+1}{z[z^2-2(1+i)z+2i]}dz$, siendo C el trapecio de vértices 4, $4i$, i y 1, considerado como circuito simple positivo.

Resolución: Comencemos con una cuenta sencillita:

$$z[z^2-2(1+i)z+2i]=z[z-(1+i)]^2\,.$$

Ahora un dibujito:



Dado que 0 no pertenece al recinto interior de C, podemos aplicar la "segunda" fórmula integral de Cauchy a la función $f(z) = \dfrac{z+1}{z} = 1 + \dfrac{1}{z}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z+1}{z[z^2-2(1+i)z+2i]}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{[z-(1+i)]^2}dz = \frac{f'(1+i)}{1!} = -\frac{1}{(1+i)^2} = -\frac{1}{2i}$$

Por lo tanto: $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z[z^2-2(1+i)z+2i]}dz = -\frac{2\pi i}{2i} = -\pi$

Respuesta: $-\pi$

---

3) Determine el conjunto de puntos donde es derivable y el conjunto de puntos donde es holomorfa la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = sen(\bar{z}) + i\cos(z)$

Resolución: La función $z \mapsto \cos(z)$ es entera, por lo tanto *f* es derivable en los puntos donde la función $z \mapsto sen(\bar{z})$ es derivable. Para cada $z = x + iy$, la parte real de esta función es $\alpha(x,y) = sen(x)\cosh(-y) = sen(x)\cosh(y)$ y su parte imaginaria es $\beta(x,y) = \cos(x)senh(-y) = -\cos(x)senh(y)$, ambas diferenciables en todo el plano. Las correspondientes ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\begin{cases} 1) \quad \cos(x)\cosh(y) = -\cos(x)\cosh(y) \\ 2) - sen(x)senh(y) = sen(x)senh(y) \end{cases}$$

Es decir: $\cos(x)\cosh(y) = 0$ y $sen(x)senh(y) = 0$. Dado que el coseno hiperbólico de un número real nunca es nulo, de la primera ecuación tenemos $\cos(x) = 0$. En particular, esto implica que $sen(x) \neq 0$. Por lo tanto de la segunda ecuación se deduce $senh(y) = 0$. Entonces, el conjunto de puntos donde *f* es derivable es $\left\{\dfrac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Puesto que este es un conjunto de puntos aislados, *f* no es holomorfa en ningún punto.

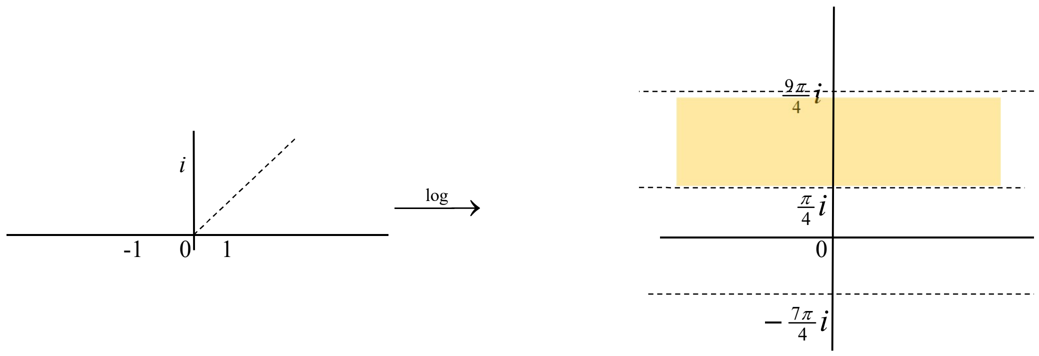
Respuesta: El conjunto de puntos donde *f* es derivable es $\left\{\dfrac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ y el conjunto de puntos donde es holomorfa es Ø.

---

4) La función log está definida en $\mathbb{C}-\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ y verifica $\log(i)=\frac{\pi}{2}i$

Calcular $\log(\sqrt{e})$.

Resolución: Se recomienda releer el Capítulo VII (Funciones Elementales) de los Apuntes sobre Análisis de Variable Compleja que están en la página del curso.



corte *rama*

Para el corte dado y el dato $\log(i)=\frac{\pi}{2}i$, la rama es la sombreada. De todos los argumentos posibles del número real positivo $\sqrt{e}$, el único que está en la franja sombreada es 2π. Por lo tanto:

Respuesta: $\log(\sqrt{e})=\ln(|\sqrt{e}|)+i\arg(\sqrt{e})=\frac{1}{2}+2\pi i$

---

5) Dada la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$ de la función $f(z)=2z\cosh(z^2)$, calcular la suma de la serie numérica $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}c_n$

Resolución: La función f es entera y la primitiva de f que se anula en $z=0$ es, para todo $z\in\mathbb{C}$:

$$F(z)=senh(z^2)=c_0 z+\frac{c_1}{2}z^2+\frac{c_2}{3}z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$$

por lo tanto $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}c_n=F(1)=senh(1)=\frac{e-e^{-1}}{2}$

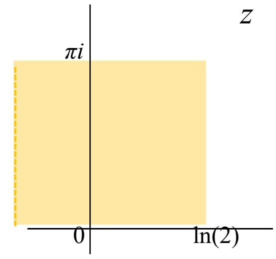
Respuesta: $S=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

---

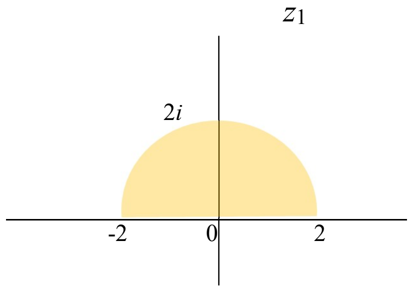
6) La imagen por la transformación $w = i\dfrac{2-\exp(z)}{2+\exp(z)}$ del abierto

$$A = \{x + iy \in \mathbb{C} : x < \ln(2), 0 < y < \pi\} \quad \text{es …}$$

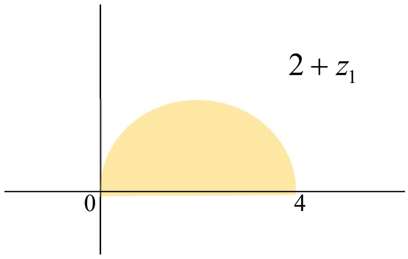
Resolución:



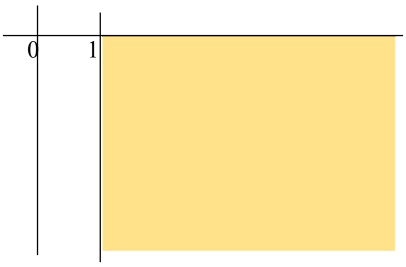
$$z \longrightarrow z_1 = \exp(z)$$



$$z_1 \longrightarrow z_2 = \frac{2-z_1}{2+z_1} = \frac{4-(2+z_1)}{2+z_1} = \frac{4}{2+z_1} - 1$$



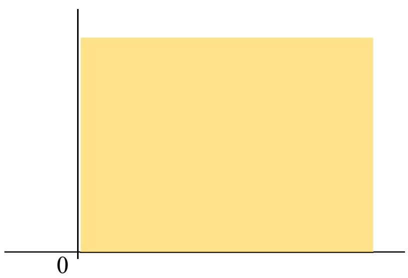
Descomponemos esta homografía en tres pasos, aunque puede estudiarse directamente



$$\frac{4}{2+z_1}$$

$$\frac{4}{2+z_1} - 1 = z_2$$

Finalmente: $\quad w = iz_2 = i\left(\dfrac{4}{2+z_1} - 1\right) = i\dfrac{4-2-z_1}{2+z_1} = i\dfrac{2-z_1}{2+z_1} = i\dfrac{2-\exp(z)}{2+\exp(z)}$



$$w = i\frac{2-\exp(z)}{2+\exp(z)}$$

Por lo tanto,

Respuesta: $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$

---

7) Sea C la curva parametrizada por $\gamma:[0,1]\longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t)=t(1-t)+i\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Calcular $\int_C \frac{z-1}{z+1}dz$.

Resolución: La función $f(z)=\frac{z-1}{z+1}=\frac{z+1-2}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}$ es holomorfa en un dominio que contiene al semiplano $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\}$ y la curva está contenida en dicho semiplano (pues para todo $t\in[0,1]$, es $t(1-t)\geq 0$).[Esto lo hemos observado para verificar la corrección del enunciado]. En este semiplano (al menos) , f admite la primitiva $F(z)=z-2Log(1+z)$, donde Log es el logaritmo principal. Por lo tanto,

$$\int_C \frac{z-1}{z+1}dz=F(\gamma(1))-F(\gamma(0))=F(i)-\overbrace{F(0)}^{=0}=i-2Log(1+i)=$$

$$=i-2[\ln(|1+i|)+iArg(1+i)]=i-2[\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}]=i-\ln(2)-i\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

Respuesta: $-\ln(2)+i\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$

---

8) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{inz}$ converge absolutamente para todo $z\in D$. Sea $f:\ D\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{inz}$ para todo $z\in D$. Determinar D y calcular $f(\pi+i)$

Resolución: Para cada $z=x+iy$: $|e^{inz}|=|e^{iz}|^n=|e^{i(x+iy)}|^n=|e^{-y+ix}|^n=e^{-yn}$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|ne^{inz}|=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-yn} \qquad (*)$$

converge sii $y>0$: que la serie $(*)$ converge cuando $y>0$ puede deducirse – por ejemplo – del criterio del cociente: $\frac{(n+1)e^{-y(n+1)}}{ne^{-yn}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-y}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-y}$; por otra parte, que la serie diverge si $y\leq 0$ se debe a la sencilla razón que en ese caso el término general de la serie $(*)$ no tiende a 0. Por lo tanto, $D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$. En este mismo dominio y por razones que a esta altura ya son de conocimiento público, también converge absolutamente la serie geométrica

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{inz}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}(e^{iz})^n=-1+\frac{1}{1-e^{iz}} \qquad (**)$$

La función g es claramente holomorfa en un dominio que incluye a D y además para todo $z\in D$:

$$g'(z)=i\sum_{n=1}^{\infty}ne^{inz}=\frac{ie^{iz}}{(1-e^{iz})^2}$$

y entonces, para todo $z\in D$: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{inz}=\dfrac{e^{iz}}{(1-e^{iz})^2}$. Dado que $\pi+i\in D$, tenemos, en particular:

$$f(\pi+i)=\frac{e^{i(\pi+i)}}{(1-e^{i(\pi+i)})^2}=\frac{e^{-1}e^{i\pi}}{(1-e^{-1}e^{i\pi})^2}=\frac{-e^{-1}}{(1+e^{-1})^2}=-\frac{e}{(1+e)^2}$$

Respuesta: El dominio de convergencia absoluta de la serie es $D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)>0\}$ y $f(\pi+i)=-\dfrac{e}{(1+e)^2}$.

---

9) Sea $f:\mathbb{C}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f\left(\dfrac{n}{1+n}\right)=1+\dfrac{1}{n}$ para todo entero positivo n. Calcular $f(-1), f(1)$ y $f(i)$

Resolución: La función $h(z)=\dfrac{1}{z}-f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}-\{0\}$ y verifica

$$h\left(\frac{n}{1+n}\right)=\frac{1+n}{n}-f\left(\frac{n}{1+n}\right)=1+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$$

para todo entero positivo n. Además, por ser f continua en $z=1$,

$$f(1)=f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)\right)\overset{continuidad}{=}\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{n}{1+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

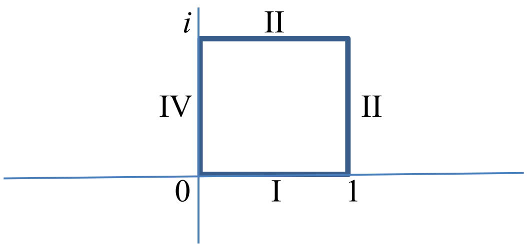
Por lo tanto, $h(1)=\frac{1}{1}-f(1)=0$. Por lo tanto, h se anula (al menos) en los puntos $z_n=\frac{n}{1+n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ (con n entero positivo) y también en 1, que es punto de acumulación de $\{z_n : n\in\mathbb{N}\}$. Dado que el dominio $\mathbb{C}-\{0\}$ es conexo, resulta – por el *Principio de los Ceros Aislados* – que h es idénticamente nula en $\mathbb{C}-\{0\}$, es decir: $f(z)=\frac{1}{z}$.

Respuesta: $f(-1)=-1$, $f(1)=1$ y $f(i)=-i$

---

10) Calcular máximo y mínimo de $\left|ze^z\right|$ en $R=\{z\in\mathbb{C} : 0\le \mathrm{Re}(z)\le 1,\, 0\le \mathrm{Im}(z)\le 1\}$ y los puntos donde se alcanzan.

Resolución: La función $f(z)=ze^z$ es entera y se anula solamente en $z = 0$. Por lo tanto, el mínimo absoluto de $\left|ze^z\right|$ es 0 y solamente se alcanza en $z = 0$ (que pertenece a R). Por el Principio del Módulo Máximo, el máximo de $\left|f(x+iy)\right|=\left|x+iy\right|e^x$ en R se alcanza en el borde ∂R , es decir, en el cuadrado de vértices 0 , 1, 1+i, i.



Veamos qué pasa en cada uno de los cuatro lados, indicados como en la figura:

I) $y = 0$, $0\le x\le 1$: $\left|f(x)\right|=\left|x\right|e^x=xe^x$: esta función es estrictamente creciente, por lo tanto su mínimo es 0 (y se alcanza en $x = 0$) y su máximo es e (y se alcanza en $x = 1$)

II) $x = 1$, $0\le y\le 1$: $\left|f(1+iy)\right|=\left|1+iy\right|e=e\sqrt{1+y^2}$: esta función es estrictamente creciente, por lo tanto su mínimo es e (y se alcanza en $y = 0$) y su máximo es $e\sqrt{2}$ (y se alcanza en $y = 1$)

III) $y = 1$, $0\le x\le 1$: $\left|f(x+i)\right|=\left|x+i\right|e^x=\sqrt{x^2+1}\,e^x$: esta función es estrictamente creciente, por lo tanto su mínimo es 1 (y se alcanza en $x = 0$) y su máximo es $\sqrt{2}\,e$ (y se alcanza en $x = 1$)

IV) $x = 0,\ \ 0 \le y \le 1$: $|f(iy)| = |iy| = |y| \overset{0\le y}{=} y$. Obviamente el mínimo es 0 y el máximo es 1.

Observando los cuatro máximos (los mínimos no hacen falta pues ya sabemos cuál es el mínimo de $|f|$ en R y dónde se alcanza), encontramos que el máximo de $|f|$ es $e\sqrt{2}$ y se alcanza en $1 + i$.

Respuesta: El máximo de $|ze^z|$ en R es $e\sqrt{2}$ y se alcanza en $z = 1+i$. El mínimo de $|ze^z|$ en R es 0 y se alcanza en $z = 0$.
