10 (diez)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (81.16 - 61.09 - 81.04)

Evaluación Parcial
Duración: 4 horas.

Segundo cuatrimestre – 2023
4/11/23 – 9:00 hs.

Curso: BOUZA. Corrector/a:

Apellido y Nombres: BILBAO, MANUEL IÑAKI

Padrón: 102.732

B **1.** Un hipermercado dispone de tres estacionamientos: A, B y C. En el evento de apertura ingresaron 10 automóviles, eligiendo cada uno al azar el estacionamiento donde permanecer. Calcular la probabilidad de que en dicho evento, ningún estacionamiento haya quedado vacío y en el A hubieran estacionado exactamente 5 autos.

B **2.** Chocolatines Jack lanza una colección de muñequitos con las figuras de La liga de la Justicia: Superman, Batman, Robin, Aquaman y Mujer Maravilla. Cada vez que Nacho compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Una tarde sale para la facultad, con plata solo para comprar cinco, y decide comprar hasta conseguir un Batman o quedarse sin plata, lo que ocurra primero. Hallar la cantidad esperada de chocolatines que comprará Nacho.

B **3.** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{2x}{15}\mathbf{1}\{1 < x < 4\}.$$

Si se define $W = (X-2)^2$, hallar la función de densidad de W.

B **4.** Los mármoles de la facultad caen de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 al año. Sabiendo que en el primer año cayeron exactamente dos mármoles, calcular la probabilidad de que el segundo mármol haya caído en la primer mitad del año.

B **5.** En una pizzería se hornean pizzas de muzzarella con probabilidad 0.5, de fugazetta con probabilidad 0.2, y de otros tipos con probabilidad 0.3, de forma independiente. Calcular *aproximadamente* la probabilidad de que en 200 pizzas horneadas, más de 50 hayan sido de fugazzeta.

BILBAO, MANUEL IÑAKI

102.732

HOJA N° 1

FECHA 4/11/23

1) 10 Autos, 3 Estacionamientos.

X: "Ningún estacionamiento vacío"

Y: "5 autos en A"

~~P(A~~ $P(X \cap Y) = ?$

$\Omega = \{(w_1, w_2, \dots, w_{10}) / w_i \in \{A,B,C\}, 1 \leq i \leq 10\}$

$\# \Omega = 3^{10} = 59049$ Uso anagramas

$$\underset{w_1}{A} \quad \underset{w_2}{A} \quad \underset{w_3}{A} \quad \underset{w_4}{A} \quad \underset{w_5}{A} \quad \underset{w_6}{B} \quad \underset{w_7}{C} \quad \underset{w_8}{B/C} \quad \underset{w_9}{B/C} \quad \underset{w_{10}}{B/C}$$

POR Y POR X POR Y ?

$$\#(X \cap Y) = \frac{10!}{\underset{5A}{5!}\,\underset{4B}{4!}\,\underset{1C}{1!}} + \frac{10!}{5!\,\underset{3B}{3!}\,\underset{2C}{2!}} + \frac{10!}{\underset{2B/3C}{5!\,2!\,3!}} + \frac{10!}{\underset{1B/4C}{5!\,1!\,4!}} = 2.1260 + 2.2520 = 7560$$

Como cada auto elige al azar, el espacio es equiprobable. Uso Laplace.

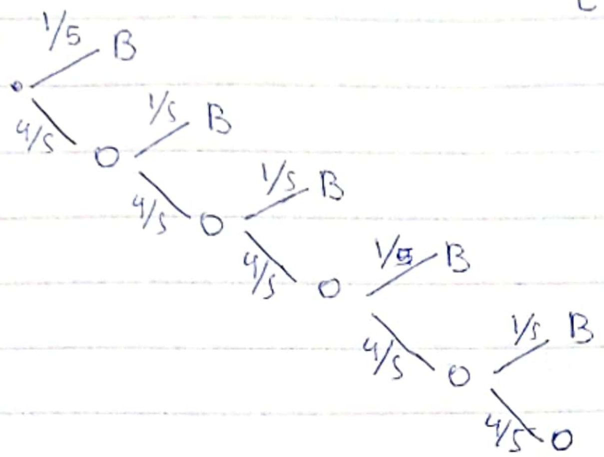
$$P(X \cap Y) = \frac{\#(X \cap Y)}{\# \Omega} = \frac{7560}{59049} = \frac{280}{2187} = \boxed{0,1280}$$

BILBAO, MANUEL IÑAKI
102.732.

2
4/11/23

2) N: "Cantidad de chocolatines que compra Nacho"
$R_N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$E[N] = ?$



Hasta $n=4$ distribuye como una geometrica de parámetro $1/5$. Luego, en $n=5$ da igual la rama

$$p_C(c) = \begin{cases} \left(4/5\right)^{n-1} 1/5 & \text{Si } 1 \leq n \leq 4 \\ 256/625 & \text{Si } n = 5 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$E[N] = \sum_{i=1}^{5} n\, p_N(n) = \frac{1}{5} + 2 . \frac{4}{25} + 3 . \frac{16}{125} + 4 . \frac{64}{625} + 5 . \frac{256}{625}$$

$$E[N] = \frac{2101}{625} = \boxed{3,3616}$$

BILBAO, MANUEL IÑAKI
102.732

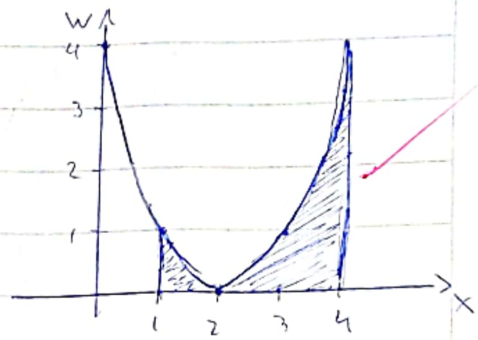
3) $f_X(x) = \dfrac{2x}{15} \mathbb{1}\{1 < x < 4\}$ $\quad W = (X-2)^2 \quad f_W(w) = ?$

$$f_W(w) = F_W'(w)$$

$$F_X(x) = \int f_X(x)\,dx = \frac{x^2 - 1}{15} \mathbb{1}\{1 < x < 4\} + \mathbb{1}\{x \geq 4\}$$

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P[(X-2)^2 \leq w] = P[|X-2| \leq \sqrt{w}]$$
$$= P(-\sqrt{w} \leq X-2 \leq \sqrt{w}) = P(2-\sqrt{w} \leq X \leq 2+\sqrt{w})$$
$$= P(X \geq 2-\sqrt{w},\ X \leq 2+\sqrt{w}) = F_X(2+\sqrt{w}) - F_X(2-\sqrt{w})$$

$Sop(W) = (0, 4)$



$$F_X(2+\sqrt{w}) = \frac{(2+\sqrt{w})^2 - 1}{15}$$

$$F_X(2-\sqrt{w}) = \begin{cases} [(2-\sqrt{w})^2 - 1]/15 & \text{si } 0 < w < 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$\cancel{F_W(w) = (2+\sqrt{w})^2 - 1 +}$

$$\frac{(2+\sqrt{w})^2 - \cancel{1}}{15} - \frac{(2-\sqrt{w})^2 - \cancel{1}}{15} = \frac{\cancel{4} + 4\sqrt{w} + \cancel{w} - \cancel{4} + 4\sqrt{w} - \cancel{w}}{15} = \frac{8\sqrt{w}}{15}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 8\sqrt{w}/15 & \text{si } 0 < w < 1 \\ \dfrac{(2+\sqrt{w})^2 - 1}{15} & \text{si } 1 \leq w < 4 \\ 1 & \text{si } w \geq 4 \\ 0 & \text{si } w \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{(2+\sqrt{w})^2 - 1}{15} = \frac{w + 4\sqrt{w} + 3}{15}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} 4/(15\sqrt{w}) & \text{si } 0 < w \leq 1 \\ 2/(15\sqrt{w}) + 1/15 & \text{si } 1 < w < 4 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

C

BILBAO, MANUEL IÑAKI
102.732

4) $N(a,b)$ = "Cantidad de mármoles que caen en $(b-a)$ años"

definir G_2

$N(a,b) \sim Poi(3.(b-a))$ ✓ $\qquad P(G_2 \leq 1/2 \mid N(0,1)=2) = ?$

BAYES

$P(N(0,1)=2)>0$

$$P(G_2 \leq 1/2 \mid N(0,1)=2) = P(N(0,1/2) \geq 2 \mid N(0,1)=2)$$ ✓

$$= \frac{P(N(0,1/2) \geq 2,\ N(0,1)=2)}{P(N(0,1)=2)} = \frac{P(N(0,1/2)=2,\ N(1/2,1)=0)}{P(N(0,1)=2)}$$

Como $N(0,1/2)$ y $N(1/2,1)$ son disjuntos, son independientes.

Además, $N(0,1/2), N(1/2,1) \overset{iid}{\sim} Poi(3/2)$ y $N(0,1) \sim Poi(3)$

$$\Rightarrow \frac{P(N(0,1/2)=2,\ N(1/2,1)=0)}{P(N(0,1)=2)} = \frac{P(N(0,1/2)=2)\, P(N(\ ,1)=0)}{P(N(0,1)=2)}$$

$$= \frac{\frac{(3/2)^2 \cancel{e^{-3/2}}}{\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{(3/2)^0} \cancel{e^{-3/2}}}{\cancel{0!}}}{\frac{3^2 \cancel{e^{-3}}}{\cancel{2!}}} = \frac{(3/2)^2}{3^2} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$$ ✓

BILBAO, MANUEL IÑAKI

102.732

asi definido evento, no v.a.

5

4/11/23

5) X_i: "La pizza i es de fugazetta" $i = 1, 2, \ldots, 200$

$R_{X_i} = \{0, 1\}$ ↳ (1: Sí, 0: No)

$P(X_i = 1) = 0,2$ $\quad X_i \overset{iid}{\sim} Ber(0,2)$ ✓

$P\left(\sum_{i=1}^{200} X_i > 50\right) = ?$

$E[X_i] = 0,2 \quad Var(X_i) = 0,2(1-0,2) = 0,16 \rightarrow \sigma_{X_i} = 0,4$ ✓

$$P\left(\sum_i^{200} X_i > 50\right) = P\left(\frac{\sum^{200} X_i - 200.0,2}{\sqrt{200.0,16}} > \frac{50 - 200.0,2}{\sqrt{200.0,16}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum^{200} X_i - 40}{4\sqrt{2}} > \frac{5\sqrt{2}}{4}\right) \overset{T.C.L}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = \boxed{0,0385}$$ ✓

- SUMA V.A. iiD.
- $E[X_i] < \infty$
- $Var(X_i) < \infty$

1