Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 19 de diciembre de 2023.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Para la siguiente función definida en el intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta & \text{si} \quad x \in [0, 1/2) \\ x + \gamma x^2 & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

hallar los valores de α, β y γ para los cuales la serie de Fourier en senos de f en $[0, 1]$ coincida con f en todo punto de $[0, 1]$. ¿Es dicha serie uniformemente convergente?

Ejercicio 2. Determinar el desarrollo de Fourier de $g(x)$ que resulte conveniente para resolver:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2x \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0, t) = 1 & t \geqslant 0 \\ u(\pi, t) = 1 & t \geqslant 0 \\ u(x, 0) = g(x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Obtener la solución $u(x, t)$ de este problema, en términos de los coeficientes del desarrollo de Fourier de g.

Ejercicio 3. Resolver el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = x e^{-|x|} & -\infty < x < +\infty \\ u(x, 1) = \operatorname{sen}(\pi x) \mathbb{1}_{(0,1)}(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Ejercicio 4. Siendo F la transformada de Fourier de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \dfrac{e^{-t^2}}{2 + \cos(\pi t)}$, obtener el valor de las siguientes integrales impropias:

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega F(\omega)\, d\omega, \quad ii) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - a) e^{i\omega t} d\omega, \quad iii) \int_{0}^{\infty} F(\omega) \cos(b\omega)\, d\omega \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Ejercicio 5. Sea $\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \operatorname{sen} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \pi/2 \\ 1 & \text{si } t > \pi/2 \end{cases}$. Decidir si existe la transformada de Laplace de ϕ. Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

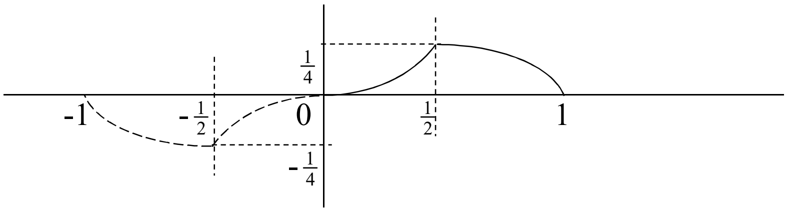
$$y''(t) + 2y'(t) - 4y(t) = (\phi * H)(t) \quad \forall t \geqslant 0$$

con $y(0) = y'(0) = 0$ y H es la función de Heaviside.

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

EJERCICIO 1. La serie de Fourier-seno de *f* en [0,1] es la serie de Fourier de $\widetilde{f}$, extensión 2-periódica impar de *f*. Para que esta serie converja a *f* en todo punto de [0,1], es condición necesaria (<u>no suficiente</u>) que esta extensión impar sea continua. Dado que $f(x) = \overbrace{\alpha x^3 + \beta}^{f_1(x)}$ para $0 \le x < \frac{1}{2}$ y $f(x) = \overbrace{x + \gamma x^2}^{f_2(x)}$ para $\frac{1}{2} \le x \le 1$, la continuidad de $\widetilde{f}$ requiere que : (a) $f_1(0) = 0$; (b) $f_2(1) = 0$ (observe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\pi x)$ se anula para $x = 1$) y (c) $f_1(\frac{1}{2}) = f_2(\frac{1}{2})$. Estas tres condiciones implican (y equivalen) a $\beta = 0$, $\gamma = -1$ y $\alpha = 2$, respectivamente. Por lo tanto, la función *f* es

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & si \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x - x^2 & si \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$



Hemos graficado $\widetilde{f}$ en el intervalo [-1, 1]. Además de ser continua, $\widetilde{f}$ y $\widetilde{f}\,'$ verifican las condiciones de Dirichlet en todo punto, lo que es suficiente para la convergencia uniforme de la serie de Fourier de $\widetilde{f}$ (es decir: la serie converge uniformemente a $\widetilde{f}$ en $\Re$). [Ver Teorema 5.b del *Breve apunte sobre series de Fourier*].

EJERCICIO 2. Como ya es habitual en este tipo de problemas, comenzamos por un cambio de función incógnita: $v(x,t) = u(x,t) + \varphi(x)$, de manera que el problema

$$\begin{cases} (i)_u \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2x sen(x) \quad si \quad 0 < x < \pi \,, t > 0 \\ (ii)_u \quad u(0,t) = 1 \quad si\ t \ge 0 \\ (iii)_u \quad u(\pi,t) = 1 \quad si\ t \ge 0 \\ (iv)_u \quad u(x,0) = g(x) \quad si \quad 0 \le x \le \pi \end{cases} \qquad (2.1)$$

sea equivalente a

$$\begin{cases} (i)_v \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) \quad si \quad 0 < x < \pi \ , t > 0 \\ (ii)_v \quad v(0,t) = 0 \quad si\ t \geq 0 \\ (iii)_v \quad v(\pi,t) = 0 \quad si\ t \geq 0 \\ (iv)_v \quad v(x,0) = g(x) + \varphi(x) \quad si \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{2.2}$$

Ahora, $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) \Leftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \varphi''(x)$, por lo tanto, debe ser $\varphi''(x) = 2xsen(x)$. Integrando un par de veces, resulta

$$\varphi(x) = -2xsen(x) - 4\cos(x) + ax + b \tag{2.3}$$

para algún par de constantes a y b. Ahora, $v(0,t) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{u(0,t)}^{=1} + \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = 3$. Respecto de (iii) : $v(\pi,t) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{u(\pi,t)}^{=1} + \varphi(\pi) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 + a\pi + b = 0 \Leftrightarrow a\pi + b = -5$. Entonces, tenemos que $b = 3$ y $a = -\dfrac{8}{\pi}$, es decir: $\varphi(x) = -2xsen(x) - 4\cos(x) - \dfrac{8}{\pi}x + 3$ y entonces:

$$v(x,t) = u(x,t) - 2xsen(x) - 4\cos(x) - \frac{8}{\pi}x + 3 \tag{2.4}$$

Ahora, resolviendo el sistema (2.2), obtenemos como solución de $(i)_v, (ii)_v, (iii)_v$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx) e^{-n^2 t} \tag{2.5}$$

La condición restante $(iv)_v$ $v(x,0) = g(x) + \varphi(x) = g(x) - 2xsen(x) - 4\cos(x) - \dfrac{8}{\pi}x + 3$, queda la ecuación

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx) = g(x) - 2xsen(x) - 4\cos(x) - \frac{8}{\pi}x + 3 \tag{2.6}$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

La serie del segundo miembro de (2.6) es $2\pi -$periódica e impar. Necesitamos, entonces, las extensiones $2\pi -$periódicas impares del último miembro de (2.6):

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n sen(nx) \tag{2.7.a}$$

$$\varphi(x)=-2xsen(x)-4\cos(x)-\frac{8}{\pi}x+3=\sum_{n=1}^{\infty}d_n sen(nx)\ . \tag{2.7.b}$$

Los coeficientes están dados por

$$c_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(\theta)sen(n\theta)d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\tilde{g}(\theta)sen(n\theta)}^{par}d\theta=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(\theta)sen(n\theta)d\theta \tag{2.8.a}$$

$$d_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\varphi}(\theta)sen(n\theta)d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\tilde{\varphi}(\theta)sen(n\theta)}^{par}d\theta=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(\theta)sen(n\theta)d\theta\ . \tag{2.8.b}$$

La ecuación (2.6) se reduce, entonces, a $b_n=c_n+d_n$ para todo entero $n\geq 1$. Por lo tanto, el desarrollo de Fourier de *g*, *adecuado* para la resolución de este problema, es su desarrollo en serie de Fourier-seno (2.7.a), es decir, su desarrollo en serie de Fourier de su extensión $2\pi-$periódica impar. Finalmente, entonces:

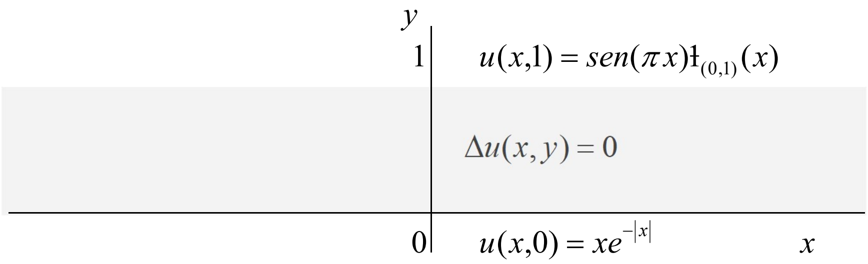
$$\boxed{u(x,t)=v(x,t)-\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)sen(nx)e^{-n^2t}+\overbrace{2xsen(x)+4\cos(x)+\frac{8}{\pi}x-3}^{-\varphi(x)}}$$

donde los coeficientes están dados por las fórmulas (2.8). Observe que, en efecto:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)sen(nx)-\varphi(x)=\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_n sen(nx)}^{g(x)}+\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}d_n sen(nx)}^{\varphi(x)}-\varphi(x)=g(x)$$

EJERCICIO 3

Se trata del problema ilustrado en la siguiente figura



Indiquemos, para abreviar, $\alpha(x) = xe^{-|x|}$ y $\beta(x) = sen(\pi x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. Buscaremos como solución una función armónica, maravillosa como todas las armónicas acotadas. Entre otras cosas, utilizaremos libremente la transformación de Fourier de *u* respecto de *x*, con la correspondiente fórmula de inversión y el intercambio de esta transformación con la derivación respecto de *y*. Es decir:

$$\hat{u}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)e^{-i\omega x}dx \qquad u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\hat{u}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)e^{-i\omega x}dx = \hat{\alpha}(\omega)$$

$$\hat{u}(\omega,1) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,1)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x)e^{-i\omega x}dx = \hat{\beta}(\omega)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)e^{-i\omega x}dx = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(\omega,y)$$

Entonces, aplicando esta transformación de Fourier a la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ tenemos (se trata de un procedimiento habitual y clásico): $-\omega^2\hat{u}(\omega,y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega,y) = 0$ y resulta

$$\hat{u}(\omega,y) = A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}$$

donde *A* y *B* son dos funciones que determinaremos a partir de las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega,0) &= \hat{\alpha}(\omega) = A(\omega) + B(\omega) \\ \hat{u}(\omega,1) &= \hat{\beta}(\omega) = A(\omega)e^{\omega} + B(\omega)e^{-\omega} \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Despejando, resulta (para $\omega \neq 0$):

$$A(\omega)=\frac{\hat{\alpha}(\omega)e^{-\omega}-\hat{\beta}(\omega)}{e^{-\omega}-e^{\omega}} \quad , \quad B(\omega)=\frac{-\hat{\alpha}(\omega)e^{\omega}+\hat{\beta}(\omega)}{e^{-\omega}-e^{\omega}}$$

y por lo tanto:

$$\hat{u}(\omega,y)=\frac{\hat{\alpha}(\omega)e^{-\omega}-\hat{\beta}(\omega)}{e^{-\omega}-e^{\omega}}e^{\omega y}+\frac{-\hat{\alpha}(\omega)e^{\omega}+\hat{\beta}(\omega)}{e^{-\omega}-e^{\omega}}e^{-\omega y}=$$

$$=\hat{\alpha}(\omega)\frac{e^{\omega(y-1)}-e^{-\omega(y-1)}}{e^{-\omega}-e^{\omega}}+\hat{\beta}(\omega)\frac{-e^{\omega y}+e^{-\omega y}}{e^{-\omega}-e^{\omega}} \qquad (3.2)$$

***Observación* 1:** Con la notación $\varphi(y,\omega)=\dfrac{e^{\omega y}-e^{-\omega y}}{e^{-\omega}-e^{\omega}}$, (3.2) se escribe sencillamente en la forma

$$\hat{u}(\omega,y)=\hat{\alpha}(\omega)\varphi(y-1,\omega)-\hat{\beta}(\omega)\varphi(y,\omega) \qquad (3.3)$$

y puede comprobarse que para todo $y \in (0,1)$ se verifica $\lim_{\omega \to +\infty}\varphi(y,\omega)=0$. Dado que $\varphi(y,-\omega)=$ $=\varphi(y,\omega)$, se deduce que también $\lim_{\omega \to -\infty}\varphi(y,\omega)=0$.

***Observación* 2:** Se puede comprobar fácilmente que existe el límite de (3.2) para $\omega \longrightarrow 0$, resultando

$$\hat{u}(0,y)=-\hat{\alpha}(0)(y-1)+\hat{\beta}(0)y \qquad (3.3)$$

Finalmente, la solución se obtiene a partir de (3.2) mediante la fórmula de inversión $u(x,y)=$ $=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega$. No haremos aquí las cuentas. Observe que también, a partir de (3.3) se puede expresar la solución en la forma $u(x,y)=(\alpha * \phi_{y-1})(x)-(\beta * \phi_{y})(x)$, donde la convolución se realiza respecto de la variable *x*, obviamente, y $\phi_y(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y,\omega)e^{i\omega y}d\omega$.

EJERCICIO 4. La función $f(t)=\dfrac{e^{-t^2}}{2+\cos(\pi t)}$ es *maravillosa*, por lo tanto también lo es su transformada de Fourier $F(\omega)$. Entonces, podemos operar cómodamente con las integrales impropias involucradas. Comencemos con el teorema de inversión:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (4.1)$$

donde la integral converge absolutamente, no solamente en valor principal. Además, podemos derivar sin problemas:

$$f'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}i\omega F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

En particular, para $t = 0$ resulta $f'(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}i\omega F(\omega)d\omega=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\omega F(\omega)d\omega$ y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega F(\omega)d\omega=\frac{2\pi}{i}f'(0)=-2\pi i\left.\frac{-2te^{-t^2}[2+\cos(\pi t)]+e^{t^2}\pi\, sen(\pi t)}{[2+\cos(\pi t)]^2}\right|_{t=0}=0 \qquad (4.2)$$

(este resultado se puede deducir, también, del hecho de que F es par, como veremos a continuación).

Sigamos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega-a)e^{i\omega t}d\omega \overset{\omega-a=\theta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}F(\theta)e^{i(\theta+a)t}d\theta=e^{iat}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\theta)e^{i\theta t}d\theta \overset{(4.1)}{=} 2\pi e^{iat}f(t) \qquad (4.3).$$

Ahora, para el último ítem, veamos primero que por ser f par, también lo es F:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt-\overbrace{i\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)sen(\omega t)dt}^{=0} \qquad (4.4)$$

Entonces, $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cos(\omega t)d\omega+\overbrace{i\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)sen(\omega t)d\omega}^{=0}$, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cos(b\omega)d\omega = 2\pi\, f(b) = 2\pi \frac{e^{-b^2}}{2+\cos(\pi b)} \quad . \qquad (4.5)$$

Resumiendo:

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega F(\omega)d\omega = 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - a)e^{i\omega t}d\omega = 2\pi\, e^{iat} f(t) = \dfrac{2\pi\, e^{at-t^2}}{2+\cos(\pi t)}$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cos(b\omega)d\omega = 2\pi\, f(b) = \dfrac{2\pi\, e^{-b^2}}{2+\cos(\pi b)}$

EJERCICIO 5. La función ϕ es seccionalmente continua (más aún: es continua), causal y de orden exponencial (más aún, es acotada). Por lo tanto admite transformada de Laplace.

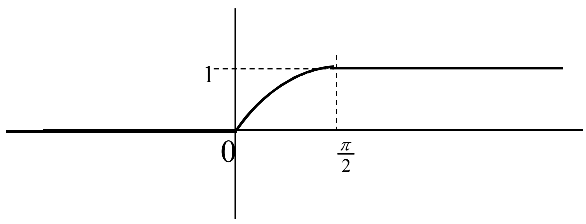


Gráfico de ϕ

Indiquemos con Φ la transformada de Laplace de ϕ. Entonces, aplicando la transformación de Laplace a la ecuación $y''+2y'-4y = \phi * H$, con las condiciones iniciales $y(0^+) = y'(0^+) = 0$ se tiene

$$s^2Y(s) + 2sY(s) - 4Y(s) = \frac{\Phi(s)}{s}$$

(donde Y es la transformada de Laplace de y). Despejando, tenemos

$$Y(s)=\frac{\Phi(s)}{s(s^2+2s-4)} \tag{5.1}$$

donde $\lambda=-1+\sqrt{5}$ y $\mu=-1-\sqrt{5}$. Indiquemos con f una función objeto cuya transformada de Laplace es $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+2s-4)}$. Entonces, de (5.1) tenemos que

$$\boxed{y=f*\phi} \tag{5.2}$$

Cálculo de *f*: $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+2s-4)}=\dfrac{1}{s(s-\lambda)(s-\mu)}$, donde $\lambda=-1+\sqrt{5}$ y $\mu=-1-\sqrt{5}$. Entonces,

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-\lambda}+\frac{C}{s-\mu} \quad ,$$

donde $A=\dfrac{1}{\lambda\mu}=-\dfrac{1}{4}$, $B=\dfrac{1}{\lambda(\lambda-\mu)}=\dfrac{1}{2(5-\sqrt{5})}$ y $C=\dfrac{1}{\mu(\mu-\lambda)}=\dfrac{1}{2(5+\sqrt{5})}$. Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} f(t)&=-\frac{1}{4}H(t)+\frac{1}{2(5-\sqrt{5})}e^{\lambda t}H(t)+\frac{1}{2(5+\sqrt{5})}e^{\mu t}H(t)=\\ &=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(5-\sqrt{5})}e^{(-1+\sqrt{5})t}+\frac{1}{2(5+\sqrt{5})}e^{(-1-\sqrt{5})t}\right)H(t)\end{aligned}}$$
