Ejercicio 1.1.

Un módem transmite una señal bidimensional (X, Y) dada por

$$X = r\cos(2\pi\Theta/8), \quad Y = r\sin(2\pi\Theta/8),$$

donde Θ es una variable aleatoria discreta uniforme en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Encontrar la distribución conjunta de (X, Y).

X e Y son coordenadas polares

No tengo ni idea que quier, (X, Y) son rectas que cruzan el origen, cada una con prob $1/8$

Ejercicio 1.2.

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

(a) Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.

(b) Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.

(c) Si $X \in \{0, 1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $P(X = 0) = p$ y $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$, expresar $f_Y(y)$.

(d) Suponiendo que $p = 0.3$ y $N \sim N(0, 0.1)$, grafique (en python/matlab) la curva de $f_Y(y)$.

a) $\mathbb{P}(Y|X=x) = \dfrac{\mathbb{P}(Y<y, X=x)}{\mathbb{P}(X=x)} = \dfrac{\mathbb{P}(X+N<y, X=x)}{\mathbb{P}(X=x)}$

$\dfrac{\mathbb{P}(x+N<y, X=x)}{\mathbb{P}(X=x)} = \dfrac{\mathbb{P}(N<y-x, X=x)}{\mathbb{P}(X=x)}$ $\Rightarrow$ Como X y N son Ind.

$\dfrac{\mathbb{P}(N<y-x)\mathbb{P}(X=x)}{\mathbb{P}(X=x)} = \mathbb{P}(N<y-x) \Rightarrow$ derivando: $f_N(y-x)$

b) Es evidente que lo que acá nos hace falta es un cambio de variable

$$g(X,N)\begin{cases} Y = X+N \\ V = X \end{cases}$$

$$f_{YV}(y,v) = \left.\frac{f_{X,N}(x,n)}{|J_g|}\right|_{\substack{x=v \\ N=y-v}}$$

$$|J_g| = \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & \frac{dy}{dN} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dN} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$f_{Y,V} = f_{X,N}(v, y-v) = f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y,V}(y,v)\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,N}(v, y-v)\,dv \overset{X,N \text{ Ind}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_N(y-v)\,dv =$$

$$f_X(y) * f_N(y) \quad \checkmark$$

c) $\mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X+N \leq y, X=0) + \mathbb{P}(X+N \leq y, X=1)$

$= \mathbb{P}(N \leq y, X=0) + \mathbb{P}(N \leq y-1, X=1)$

$= \mathbb{P}(N \leq y)\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(N \leq y-1)\mathbb{P}(X=1)$

$f_Y(y) = f_N(y)p + f_N(y-1)(1-p)$

Ejercicio 1.3. +s

Dados dos VeA, $X_1 \sim U(-1,1)$ y $X_2 \sim U(-1.5, 1.5)$ independientes, con $N = 1000$ realizaciones. Genere muestras de un vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2]^t$ a partir del vector $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^t$ aplicando una transformación $\mathbf{Y} = \mathrm{R}\mathbf{X}$, donde R es una matriz de rotación (definida abajo) considerando un ángulo de rotación $\theta = 0$ [rad]. Haga un gráfico de dispersión para $\mathbf{X}$ y para $\mathbf{Y}$. Calcule su coeficiente de correlación. Estime la matriz de autocovarianza del vector aleatorio $\mathbf{Y}$. Repita los puntos 1 y 2, pero para un ángulo rotación $\theta = \pi/10$. y $\theta = \pi/4$. Sugerencia: configure una relación de aspecto cuadrada.

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Hecho en clase práctica

Ejercicio 1.4.

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes, ambas de media nula y de varianza σ^2. Defina las variables aleatorias:

$$X_1 = \cos(\theta)U_1 - \sin(\theta)U_2 \ ; \qquad X_2 = \sin(\theta)U_1 + \cos(\theta)U_2 \ ; \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

(a) Demuestre que $\mathbf{X} = \mathrm{R}(\theta)\mathbf{U}$, donde $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, $\mathbf{U} = [U_1, U_2]^T$ y

(b) Muestre que, salvo para los casos en que $\mathrm{R}(\theta)$ es diagonal o antidiagonal, las componentes de $\mathbf{X}$ están descorrelacionadas, pero no son independientes.

a)

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta U_1 - \sin\theta U_2 \\ \sin\theta U_1 + \cos\theta U_2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\underset{\frown}{X} = R\underset{\frown}{U}$$

$$C_x = R C_\mu R^T$$

$$= E\left[(\underset{\frown}{X} - \mu_x)(\underset{\frown}{X} - \mu_x)^T\right]$$

$$= E\left[(R\underset{\frown}{U} - R\mu_u)(R\underset{\frown}{U} - R\mu_u)\right.$$