PROPAGACIÓN EN EL VACÍO

LOS CAMPOS SE PUEDEN EXPRESAR:

$$\vec{E} = \hat{x}\, E_x(z) = \hat{x}\, E_0\, e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\, E_y(z) = \hat{y}\, \frac{E_0}{Z_{00}}\, e^{-j\beta z}.$$

DONDE $Z_{00} = 120\pi\,\Omega = 377\,\Omega$

LOS VECTORES CON VARIACIÓN TEMPORAL:

SE PUEDEN ESCRIBIR:

$$\vec{E} = \hat{x}\, E_0\, e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\, \frac{E_0}{Z_{00}}\, e^{j(\omega t - \beta z)}$$

LA POTENCIA INSTANTÁNEA SERÁ:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_0^2}{Z_{00}}\, e^{j(2\omega t - 2\beta z)}\hat{z}$$

LA POTENCIA PROMEDIO TEMPORAL:

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2}\, \mathrm{Re}\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

$$\boxed{\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0^2}{Z_{00}}\hat{z}}$$ ESTA ES LA POTENCIA ACTIVA.

CONSIDERANDO QUE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA EN UN MEDIO CON PERDIDAS, LOS CAMPOS SON:

$$\vec{E} = \hat{x}\, E_x(z) = \hat{x}\, E_0\, e^{-\alpha z - j\beta z}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\, H_y(z) = \hat{y}\, \frac{E_0}{Z_m} \cdot e^{-\alpha z - j\beta z} = \hat{y}\, \frac{E_0}{|Z_m|\, e^{j\phi_m}}\, e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H} = \hat{y}\, \frac{E_0}{|Z_m|}\, e^{-\alpha z}\, e^{-j(\beta z + \phi_m)}$$

$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$. VECTOR DE POYNTING INSTANTANEO

TOMANDO LA PARTE REAL

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \mathbb{R}e\left[E(z)\, e^{j\omega t}\right] \times \mathbb{R}e\left[H(z)\, e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{P} = \hat{x}\, \mathbb{R}e\left(E_0\, e^{-\alpha z}\, e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}\right) \times \hat{y}\, \mathbb{R}e\left(\frac{E_0}{|Z_m|}\, e^{-\alpha z}\, e^{-j\beta z}\, e^{-j\phi_m} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$\vec{P} = \hat{z}\, \frac{E_0^2\, e^{-2\alpha z}}{|Z_m|} \cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z - \phi_m)$$

PARA CALCULA $P_{activa} = \langle \vec{P} \rangle$

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2}\, \mathbb{R}e\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

$$\boxed{\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2}\, \frac{E_0^2\, e^{-2\alpha z}}{|Z_m|} \cdot \cos\phi_m\, \hat{z}} \quad \left[W/m^2\right]$$

VELOCIDAD DE GRUPO:

SE HA DEFINIDO LA VELOCIDAD DE FASE DE LA ONDA PLANA E.M. COMO:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (m/s)$$

ES LA VELOCIDAD DE PROPAGACION DEL FRENTE EQUIFASICO DEL FRENTE DE ONDA

EN EL VACÍO, SE TIENE:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

ES UNA FUNCION LINEAL DE β, POR LO TANTO LA VELOCIDAD DE FASE ES:

$$v_p = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

ES UNA CONSTANTE Y NO DEPENDE DE LA FRECUENCIA.

SI LA ONDA SE PROPAGA EN UN MEDIO CON PÉRDIDAS:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta(\omega)}$$

LA VELOCIDAD DEPENDE DE LA FRECUENCIA QUIERE DECIR QUE EL MEDIO SERA DISPERSIVO

HABITUALMENTE UNA SEÑAL TIENE UNA PORTADORA DE ALTA FRECUENCIA Y UNA PEQUEÑA PORCIÓN DE FRECUENCIAS ALRREDEDOR. TAL SITUACIÓN REPRESENTA UN "GRUPO DE FRECUENCIAS" Y FORMA UN "PAQUETE DE ONDAS".

LA VELOCIDAD DE GRUPO ES LA VELOCIDAD DE LA ENVOLVENTE DEL PAQUETE DE ONDAS.

CONSIDERE DOS ONDAS QUE TIENEN LA MISMA AMPLITUD Y UNA FRECUENCIA

$\omega_0 + \Delta\omega$ Y $\beta_0 + \Delta\beta$

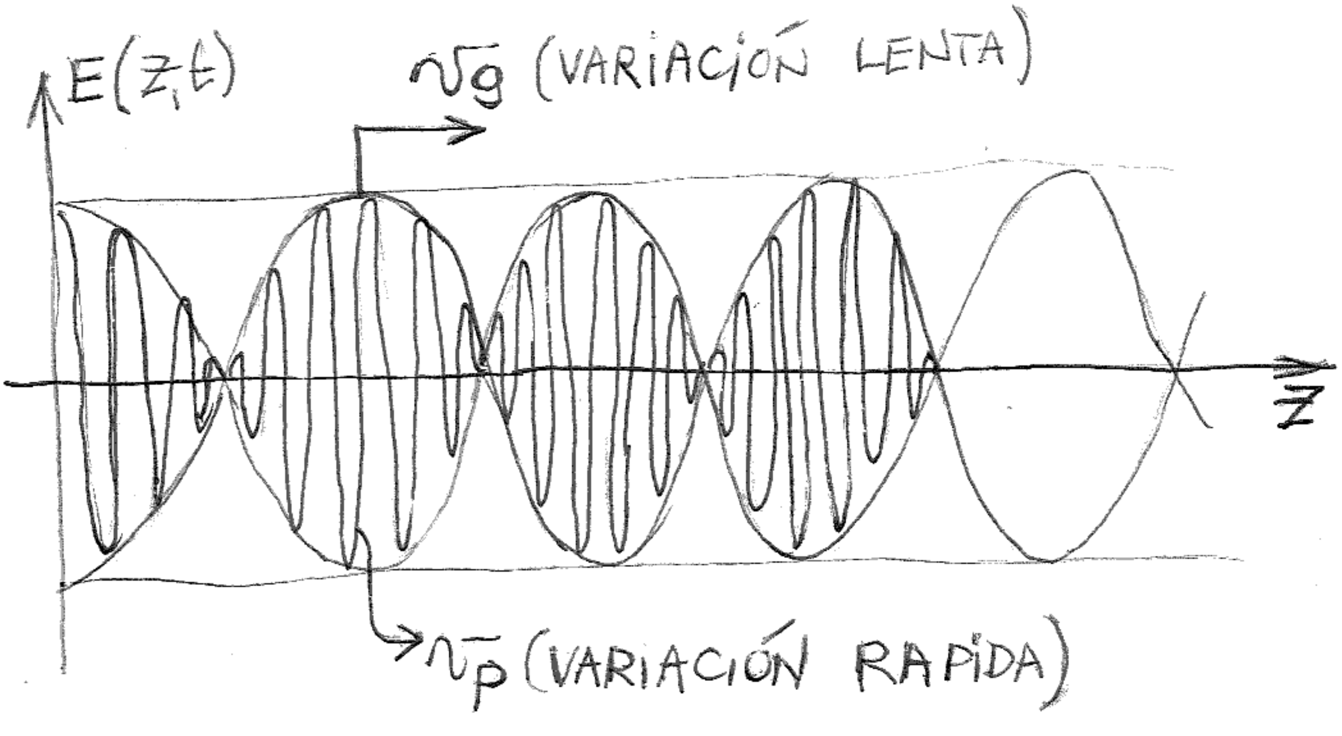
$\omega_0 - \Delta\omega$ Y $\beta_0 - \Delta\beta$

DONDE $(\Delta\omega \ll \omega_0)$

SI LAS ONDAS SE PROPAGAN EN LA DIRECCIÓN Z

$$E(z,t) = E_0 \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z\right] + E_0 \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z\right]$$

$$E(z t) = 2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta)\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$



LA ONDA DENTRO DE LA ENVOLVENTE

$(\omega_0 t - \beta_0 z) = cte.$ (CONSTANTE)

$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$ ES LA VELOCIDAD DE FASE

LA VELOCIDAD DE LA ENVOLVENTE:

$(t\Delta\omega - z\Delta\beta) = cte.$

$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta/\Delta\omega}$

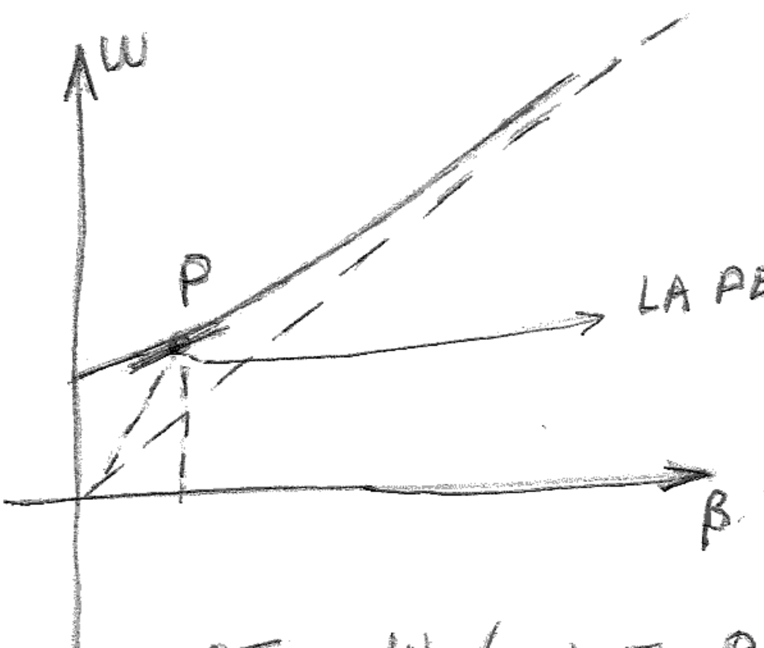
EN EL LÍMITE $\Delta\omega \to 0$

$$\boxed{v_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (m/s)}$$

ES LA VELOCIDAD DE GRUPO
SIRVE ESTA EXPRESIÓN TAMBIÉN PARA UN MEDIO DISPERSIVO.

ES LA VELOCIDAD DEL PAQUETE DE ONDAS

GRAFICO $\omega - \beta$.



LA PENDIENTE ES $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$

$v_p = \frac{\omega}{\beta}$ (EN EL PUNTO P)

EJEMPLO: UN DIELECTRICO DE BAJAS PERDIDAS, LA CONSTANTE DE PROPAGACION.

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

SE PUEDE APROXIMAR A:

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 - j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$$

DONDE:

$$\alpha \cong \frac{\omega\epsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$$

$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\cdot\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \qquad \sigma = \omega\epsilon''$$

CALCULAR LAS VELOCIDADES v_p Y v_g SI EL DIELECTRICO POSEE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS:

$\epsilon' = 4$ Y $\epsilon''/\epsilon' = 0{,}2$

LA FREC. DE LA ONDA ELECTROMAGNETICA ES $f = 1\,MHz$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]}$$

SE OBTIENE $v_p \equiv v_g = 1{,}49 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

EJEMPLO: CONSIDERE UN BUEN CONDUCTOR COMO LA TIERRA PARA BAJAS FRECUENCIAS DONDE: $\epsilon' = \epsilon_0 \cdot 10$ Y $\sigma = 10 \cdot 10^{-3}$ S/m

CALCULAR LA VELOCIDAD DE FASE Y GRUPO.

LA CONSTANTE DE PROPAGACIÓN

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \qquad f = 10\,KHz \quad \mu = \mu_0.$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2\pi\, 10 \cdot 10^{3} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 1797$$

SE VERIFICA QUE ES UN BUEN CONDUCTOR

$$\gamma \cong \sqrt{j\omega\mu \cdot \sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma\, e^{j\pi/2}} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \cdot e^{j\pi/4}$$

$$\gamma \cong \sqrt{\omega\mu\sigma} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + j \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\omega\mu\sigma}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \sqrt{\omega\mu\sigma}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = \sqrt{\omega\mu\sigma}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2\pi\, 10 \cdot 10^{3}\, 4\pi 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}\;\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}062\,\frac{rad}{s}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{3}}{0{,}062} = 1 \cdot 10^{7}\, m/s.$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\mu\sigma}\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\omega^{-1/2}\sqrt{\mu\sigma 2}}$$

$$v_g = \frac{4\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\mu\sigma}} = 4\sqrt{\frac{\omega}{2\mu\sigma}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{3}}{4\pi 10^{-7}\, 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2}} = 6{,}32\, 10^{6}\,\frac{m}{s}$$