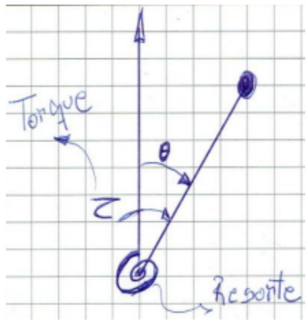
Problema 2.



Dado el sistema de la figura el cual consta de un péndulo invertido con un resorte cúbico más una fricción biscosa lineal, regido por las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\theta} = -\alpha \cdot \theta^3 + \sin\theta - \dot{\theta} + \tau$$

donde "τ" es el torque que se aplica sobre el péndulo. Este torque está accionado por un actuador tipo electromecánico tal que en el dominio de Laplace

$$\tau(s) = \frac{p}{s+p} V(s)$$

$$p = 1000 \frac{rad}{s}$$

siendo $V(s) = \mathcal{L}(v(t))$ la señal que sale del controlador para manejar el torque.

a. Suponer que el sistema está en equilibrio para ($\theta = \pm\frac{\pi}{4}, \dot{\theta} = 0, \tau = 0, v = 0$). Cuánto debe valer "$\alpha$"?
b. Para qué otro valor de θ puede el sistema estar en equilibrio ($\dot{\theta} = 0, \tau = 0, v = 0$).
c. Encontrar una representación no lineal en espacio de estados para este sistema.
d. Encontrar una representación lineal aproximada (linealización) del sistema en el punto de equilibrio ($\theta = \frac{\pi}{4}, \dot{\theta} = 0, \tau = 0, v = 0$). Analizar si es estable.

a)

Si el sistema se encuentra en equilibrio, entonces la aceleración angular debe ser nula.

$\ddot{\theta} = 0$, $-\alpha\theta^3 + \mathrm{Sen}(\theta) - \dot{\theta} + \tau = 0$, dado que

$$\mathrm{Sen}(\theta) = \alpha\theta^3 \qquad \dot{\theta} = 0 \quad \tau = 0$$

$$\alpha = \left.\frac{\mathrm{Sen}(\theta)}{\theta^3}\right|_{\theta = \pm\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\alpha = 1{,}459}_{\text{Para ambos casos de } \theta}$$

b) de la ecuación $\mathrm{Sen}(\theta) = \alpha\theta^3$

También resulta evidente que el sistema es estable para tita = 0, ya que se cumple la igualdad, sin importar el valor de alfa.

C)

$$x_1 = \tau \qquad \dot{x}_1 = \dot{\tau} \qquad y = \theta$$

$$x_2 = \theta \qquad \dot{x}_2 = \dot{\theta} \qquad u = v$$

$$x_3 = \dot{\theta} \qquad \dot{x}_3 = \ddot{\theta}$$

$$T(s) = \frac{p}{p+s} V(s) \Longrightarrow \underbrace{sT(s)}_{\mathcal{L}^{-1}[\dot{\tau}]} + pT(s) = pV(s)$$

$$\dot{\tau} = -p\tau + pv$$

finalmente: $\dot{x}_1 = -px_1 + pu$

$\dot{x}_2 = x_3$ $\qquad y = x_2$

$\dot{x}_3 = -\alpha x_2^3 + \mathrm{sen}(x_2) - x_3 + x_1$ $\qquad u = v$

Paso a desarrollar la linealización mediante el jacobiano, en matlab.

en el equilibrio: $x_{1e} = 0 \qquad x_{2e} = \frac{\pi}{4} \qquad x_{3e} = 0$

$y_e = \frac{\pi}{4} \qquad u_e = 0$

La transferencia obtenida del sistema linealizado es:

```
P =

              1000
  --------------------------
  (s+1000) (s^2 + s + 1.994)
```

Sobre la estabilidad: todos sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo, si bien los polos complejos tienen un módulo muy pequeño, son estables.