Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Tercera fecha. 1 de agosto de 2024.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Comprobar que la función $\dfrac{x^{1/3}}{1+4x^2}$ es absolutamente integrable en $(0,\infty)$. Calcular su integral en $(0,\infty)$.

Ejercicio 2. Hallar m y b para que la serie trigonométrica de Fourier de

$$f:[-2,2]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} mx^2 & \text{si } -2\leqslant x\leqslant 0\\ 2x^3+b & \text{si } 0<x\leqslant 2\end{cases}\qquad (m,b\in\mathbb{R})$$

converja uniformemente. En tal caso, estudiar la convergencia de la serie resultante al derivar término a término la serie anterior y decir a qué función converge.

Ejercicio 3. Sea $f(x)=\pi e^{-25x^2}$. Probar que existe $\hat{f}(w)$ la transformada de Fourier de f y calcular la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(w)|^2dw$. (Ayuda: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}, a>0$)

Ejercicio 4 Sea $u(x,t)$ la solución de la ecuación del calor en la recta infinita con condición inicial $u(x,0)=e^{-x^2}$. Plantear y resolver el problema (se puede presentar la solución expresada en forma integral). ¿Qué sucede con la solución cuando $t\to\infty$?

Ejercicio 5. Resolver:

$$\begin{cases} x(t)+\displaystyle\int_0^t x(\tau)\,y(t-\tau)d\tau=H(t)\\ x'(t)-x(t)=e^{2t}H(t)\end{cases}\qquad \text{con } H(t) \text{ función de Heaviside.}$$

.

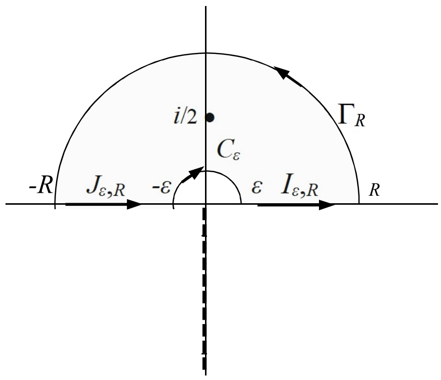
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. *Comprobación de convergencia*: el integrando es continuo y positivo en toda la semirrecta $[0,+\infty)$, y para todo $x\geq 1$ es $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}\leq\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{4x^2}=\dfrac{1}{4x^{\frac{5}{3}}}$. Dado que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{4x^{\frac{5}{3}}}=\left[-\frac{3}{8x^{\frac{2}{3}}}\right]_{x=1}^{x\to+\infty}=\frac{3}{8}$ es claramente convergente, la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx$ converge. Por otra parte, la integral $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx$ es la integral definida de una función continua en $[0,1]$ (se trata de una integral "propia").

Cálculo: Consideremos la función raíz cúbica $\sqrt[3]{} : \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0 \,,\, \mathrm{Im}(z) \leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\sqrt[3]{1} = 1$, es decir: para cada $z = re^{i\theta} \neq 0$ tal que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, es $\sqrt[3]{z} = r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}$. Es decir: la imagen de esta función $\sqrt[3]{}$ (o bien, *la rama*) es el sector angular $\left\{ w \in \mathbb{C} : w \neq 0 \,,\, -\frac{\pi}{6} < Arg(w) < \frac{\pi}{2} \right\}$.

Observación: En el eje real positivo, esta raíz cúbica coincide con la raíz cúbica real. Por otra parte, $\sqrt[3]{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. En general, para cada *x* real positivo es $\sqrt[3]{-x} = x^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$, donde $x^{\frac{1}{3}}$ es la raíz cúbica real de *x*.

Ahora, consideremos la función $f(z) = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{1+4z^2} = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{4\left(z - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{i}{2}\right)}$ y además, para cada par de números reales ε y *R* tales que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} < R$, el circuito $\Omega_{\varepsilon,R} = I_{\varepsilon,R} \cup \Gamma_R \cup J_{\varepsilon,R} \cup C_\varepsilon$ indicado en la siguiente figura.



Por un lado tenemos que para todos ε y *R* tales que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} < R$, es

$$\int_{\Omega_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{\sqrt[3]{z} \big/ 4(z + \frac{i}{2})}{z - \frac{i}{2}} \overset{FIC}{=} 2\pi i \frac{\sqrt[3]{\frac{i}{2}}}{4(\frac{i}{2} + \frac{i}{2})} = 2\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2^{\frac{1}{3}} 4i} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{6}}}{2^{\frac{4}{3}}} \tag{1.1}$$

Por otra parte:

$$\int_{\Omega_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{J_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \tag{1.2}$$

Ahora:

(a) $\displaystyle\int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt[3]{x}}{1+4x^2} dx \xrightarrow[R \to +\infty]{\varepsilon \to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2} dx$

$$(b)\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_0^{\pi} \frac{\left|\sqrt[3]{Re^{i\theta}}\right|\left|Rie^{i\theta}\right|}{\left|1+4R^2e^{2i\theta}\right|}d\theta \overset{(*)}{=} \int_0^{\pi}\frac{\left|R^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}\right|R}{\left|1+4R^2e^{2i\theta}\right|}d\theta = \int_0^{\pi}\frac{R^{\frac{4}{3}}}{\left|1+4R^2e^{2i\theta}\right|}d\theta \le \int_0^{\pi}\frac{R^{\frac{4}{3}}}{\left\|1\right|-\left|-4R^2e^{2i\theta}\right\|}d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{R^{\frac{4}{3}}}{4R^2-1}d\theta = \frac{\pi R^{\frac{4}{3}}}{4R^2-1}\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \quad (\text{ pues } 2 > \frac{4}{3}\ \ldots)$$

(*): Observe que en Γ_R el argumento de $z = Re^{i\theta}$ es $0 \le \theta \le \pi$ y por lo tanto $0 \le \frac{\theta}{3} \le \frac{\pi}{3}$: es la rama correcta.

$$(c)\ \int_{J_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+4x^2}dx \overset{x=-t}{=} \int_R^{\varepsilon}\frac{\sqrt[3]{-t}}{1+4(-t)^2}(-dt) \overset{(**)}{=} \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}t^{\frac{1}{3}}}{1+4t^2}dt \overset{(**)}{=} \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}]{} e^{i\frac{\pi}{3}}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx$$

(**) ver *Observación* página 2.

$$(d)\left|-\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \le \int_0^{\pi}\frac{\left|\sqrt[3]{\varepsilon e^{i\theta}}\right|\left|\varepsilon ie^{i\theta}\right|}{\left|1+4\varepsilon^2e^{2i\theta}\right|}d\theta \overset{(*)}{=} \int_0^{\pi}\frac{\left|\varepsilon^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}\right|\varepsilon}{\left|1+4\varepsilon^2e^{2i\theta}\right|}d\theta = \int_0^{\pi}\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{\left|1+4\varepsilon^2e^{2i\theta}\right|}d\theta \le \int_0^{\pi}\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{\left\|1\right|-\left|-4\varepsilon^2e^{2i\theta}\right\|}d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{1-4\varepsilon^2}d\theta = \frac{\pi\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{1-4\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\ .$$

Entonces, tomando límites en (1.2) para $\varepsilon \longrightarrow 0+$ y $R \longrightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta que el segundo miembro de (1.1) no depende de ε y R (siempre y cuando $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} < R$):

$$\frac{\pi e^{i\frac{\pi}{6}}}{2^{\frac{4}{3}}} = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx + e^{i\frac{\pi}{3}}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx = (1+e^{i\frac{\pi}{3}})\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx\,.$$

Entonces:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+4x^2}dx} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{6}}}{2^{\frac{4}{3}}(1+e^{i\frac{\pi}{3}})} = \frac{\pi}{2^{\frac{4}{3}}(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}})} = \frac{\pi}{2^{\frac{4}{3}}2\cos(\frac{\pi}{6})} = \boxed{\frac{\pi}{2^{\frac{4}{3}}3^{\frac{1}{2}}}}$$

---

2. Sea $\widetilde{f}:\Re \longrightarrow \Re$ la extensión 4-periódica de *f*. La serie de Fourier de *f* es la serie de Fourier de $\widetilde{f}$ y por lo tanto, la convergencia uniforme de esta serie requiere que $\widetilde{f}$ sea continua (pues, en primer lugar, si la serie de Fourier de $\widetilde{f}$ converge uniformemente, converge uniformemente a $\widetilde{f}$, y en segundo lugar, el límite uniforme de funciones continuas – en este caso, las sumas de Fourier de $\widetilde{f}$ – es una función continua: uno de los grandes Teoremas de Weierstrass). Ahora, para que $\widetilde{f}$ sea continua es necesario y suficiente que $m = 4$ y $b = 0$ (se recomienda hacer un gráfico y un par de cuentitas). En este caso, resulta

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & si \quad -2 \le x \le 0 \\ 2x^3 & si \quad 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Observe que $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$ y que $f(-2) = f(2)$. Además, $f'(x) = \begin{cases} 8x & si \quad -2 \le x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 6x^2 & si \quad 0 < x \le 2 \end{cases}$.

(La derivada de *f* en 0 debe calcularse utilizando la definición de derivada). Resulta que su extensión periódica $\widetilde{f}$ admite derivadas laterales finitas en todo punto (en los puntos 2+4*k*, $k \in Z$, estas derivadas laterales son distintas: hacer otro grafiquito). Por lo tanto, la serie de Fourier de f' converge puntualmente a $\frac{1}{2}[\widetilde{f}'(x^-) + \widetilde{f}'(x^+)]$ en todo $x \in \Re$. Pero la serie de Fourier de f' se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de *f*, para cada suma de Fourier:

$$\widetilde{f}'_m(x) = \frac{a_0(f')}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n(f')\cos(\tfrac{n\pi}{2}x) + b_n(f')sen(\tfrac{n\pi}{2}x)]$$

se tiene:

$$a_n(f') = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} f'(t)\cos(\tfrac{n\pi}{2}t)dt = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left\{\frac{d}{dt}[f'(t)\cos(\tfrac{n\pi}{2}t)] + \tfrac{n\pi}{2}f(t)sen(\tfrac{n\pi}{2}t)\right\}dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\overbrace{[f(2)\cos(n\pi) - f(-2)\cos(-n\pi)]}^{=0} + \tfrac{1}{2}\tfrac{n\pi}{2}\int_{-2}^{2} f(t)sen(\tfrac{n\pi}{2}t)dt = \tfrac{n\pi}{2}b_n(f)$$

Observe que para la anulación del corchete es esencial que *f*(-2) = *f*(2). Otro punto clave es la anulación de $a_0(f')$, caso incluido en la cuenta precedente. Análogamente:

$$b_n(f') = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} f'(t)sen(\tfrac{n\pi}{2}t)dt = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left\{\frac{d}{dt}[f'(t)sen(\tfrac{n\pi}{2}t)] - \tfrac{n\pi}{2}f(t)\cos(\tfrac{n\pi}{2}t)\right\}dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\overbrace{[f(2)sen(n\pi) - f(-2)sen(-n\pi)]}^{=0} - \tfrac{1}{2}\tfrac{n\pi}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos(\tfrac{n\pi}{2}t)dt = -\tfrac{n\pi}{2}a_n(f)$$

Por lo tanto:

$$\widetilde{f}'_m(x)=\frac{a_0(f')}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n(f')\cos(\tfrac{n\pi}{2}x)+b_n(f')sen(\tfrac{n\pi}{2}x)]=$$

$$=\sum_{n=1}^{m}[\tfrac{n\pi}{2}b_n(f)\cos(\tfrac{n\pi}{2}x)-\tfrac{n\pi}{2}a_n(f)sen(\tfrac{n\pi}{2}x)]=\frac{d}{dx}\left(\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n(f)\cos(\tfrac{n\pi}{2}x)+b_n(f)sen(\tfrac{n\pi}{2}x)]\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\widetilde{f}_m(x).$$

---

3. Para cada $\omega\in\Re$ la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\pi e^{-25x^2}e^{-i\omega x}dx$ converge absolutamente, lo que puede verse sencillamente mediante la acotación $\left|\pi e^{-25x^2}e^{-i\omega x}\right|=\frac{\pi}{e^{25x^2}}=\frac{\pi}{1+25x^2+\frac{25^2x^4}{2!}+...}\leq\frac{1}{1+25x^2}$ (esta última función es integrable en la recta, como es de dominio público). Por lo tanto, queda bien definida la transformada de Fourier $\hat{f}:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\pi e^{-25x^2}e^{-i\omega x}dx$. Además, la función f es de cuadrado integrable (demostración análoga a la precedente) y por lo tanto se puede aplicar la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^2e^{-50x^2}dx\overset{ayudita}{=}2\pi^3\sqrt{\frac{\pi}{50}}$$

---

4. Se trata del problema (clásico y visto en clase)

$$\begin{array}{ll}(i) & \dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\quad,\quad-\infty<x<+\infty\quad,\quad t>0\\ (ii) & u(x,0)=e^{-x2}\qquad\qquad,\quad t>0\end{array}\tag{4.1}$$

El dominio de la variable espacial y la condición inicial sugieren fuertemente el uso de la transformación de Fourier para buscar una solución "maravillosa". El procedimiento es tan conocido que no explicaremos cada paso. De la ecuación (i) se tiene

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t)\tag{4.2}$$

donde $\hat{u}(\omega,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$. De (4.2) se deduce la existencia de una función $\alpha:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que

$$\hat{u}(\omega,t)=\alpha(\omega)e^{-\omega^2 t} \quad . \tag{4.3}$$

Ahora, $\alpha(\omega)\overset{(4.3)}{=}\hat{u}(\omega,0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx\overset{(ii)}{=}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx$. Reemplazando en (4.3):

$$\hat{u}(\omega,t)=e^{-\omega^2 t}\overbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-p^2-i\omega p}dp}^{\alpha(\omega)} \tag{4.4}$$

Mediante el Teorema de Inversión:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\omega^2 t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-p^2-i\omega p}dp\right)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2 t-p^2+i\omega(x-p)}dp\,d\omega \tag{4.5}$$

Ahora, recordemos un cálculo hecho en clase (ver *Apuntes sobre integrales impropias* – página 21 – integral (1)(c)), precisamente destinado a este tipo de problemas: para todo par de reales $a>0$ y b se tiene:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\theta^2\pm ib\theta}d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \tag{4.6}$$

(Se trata de una cuenta sencilla a partir de la "ayudita" del ejercicio 4 y del teorema de Cauchy–Goursat). Utilizando esta fórmula, de (4.5) tenemos que:

$$\boxed{u(x,t)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\omega^2 t+i\omega x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-p^2-i\omega p}dp\right)d\omega\overset{(4.6)}{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\omega^2 t+i\omega x}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right)d\omega=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\frac{1}{4}+t)\omega^2+i\omega x}d\omega\overset{(4.6)}{=}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4}+t}}e^{-\frac{x^2}{4(\frac{1}{4}+t)}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}=\boxed{\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}}$$

(en efecto, es una solución maravillosa).

---

5. Observe, en primer lugar, que la primera ecuación del sistema

$$(i)\ x(t)+\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = H(t)$$

$$(ii)\ x'(t)-x(t)=e^{2t}H(t)$$

impone la condición inicial $x(0^+)=1$. Ahora, aplicando la transformación de Laplace a cada ecuación del sistema se tiene:

$$(i)_L\ X(s)+X(s)Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$(ii)_L\ sX(s)-\overbrace{x(0^+)}^{=1}-X(s)=\frac{1}{s-2}$$

(ecuaciones válidas para todo complejo s tal que $\mathrm{Re}(s) > 2$). De la segunda ecuación se tiene

$$X(s)=\frac{1}{s-2}$$

Reemplazando en la primera y despejando $Y(s)$ se obtiene:

$$Y(s)=-\frac{2}{s}$$

Por lo tanto la respuesta es: $x(t)=e^{2t}H(t)$, $y(t)=-2H(t)$.
