**FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

***Análisis Matemático III* – 2º C 2023 . *Primer Parcial* - 2ª *fecha*: 17-11-2023**

***Docentes: De Rossi – Prelat* . *TIEMPO:* 3 *HORAS* . *Condiciones de aprobación:* 5 *ejercicios bien resueltos.***

***RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA***

---

**(1)** Determinar y graficar el conjunto de puntos (si existen) en los que la función $f(z)=2z\bar{z}-\bar{z}^2+\cos(z)$ es derivable y aquellos donde es holomorfa. Calcular las derivadas (en los puntos donde existan).

***Resolución* 1**: La función cos($z$) es entera, por lo tanto, $f$ es derivable (resp. holomorfa) en los puntos donde $g(z)=2z\bar{z}-\bar{z}^2$ es derivable (resp. holomorfa), y solamente en estos puntos. Ahora bien: para todo $z =$ $= x+iy\in\mathbb{C}$ :

$$g(z)=2z\bar{z}-\bar{z}^2=2\,|\,z\,|^2-\bar{z}^2\overset{z=x+iy}{=}2(x^2+y^2)-(x^2-2xyi-y^2)=\overbrace{x^2+3y^2}^{u(x,y)}+i\,\overbrace{2xy}^{v(x,y)}$$

Las funciones $u$ y $v$ son polinómicas y por lo tanto diferenciables en todo $\Re^2$. Ahora, veamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$(1)\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\quad\Leftrightarrow\quad 2x=2x$$

$$(2)\quad -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\quad\Leftrightarrow\quad -6y=2y\quad\Leftrightarrow\quad y=0$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos donde $g$ (y por lo tanto $f$) es derivable es el eje real. Dado que este subconjunto del plano complejo no tiene puntos interiores, $g$ (y por lo tanto $f$) no es holomorfa en ningún punto. En los puntos del eje real, $g'(x+i0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,0)=2x$. Por lo tanto, la derivada de $f$ en cada uno de estos puntos es $f'(x+i0)=g'(x+i0)=2x-sen(x)$.

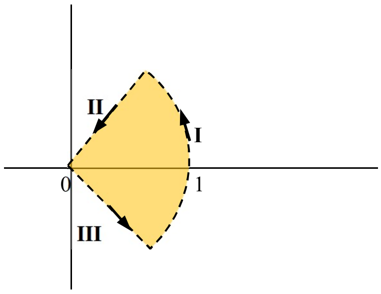
***Observación***: Otra forma: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0\quad\Leftrightarrow\quad 2z-2\bar{z}=0\quad\Leftrightarrow\quad z=\bar{z}$ **.**

***Respuesta* 1**: Por lo tanto, el conjunto de puntos donde $f$ es derivable es el eje real y $f$ no es holomorfa en ningún punto. En los puntos del eje real, $f'(x+i0)=2x-sen(x)$.

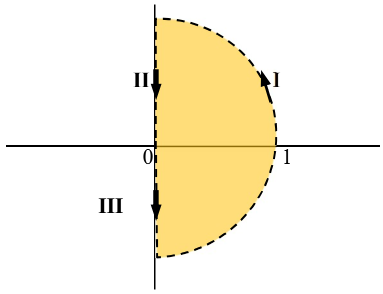
---

**2)** Graficar la imagen de $D=\left\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1,-\frac{\pi}{4}<Arg(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$ por la función $f(z)=\frac{z^2-i}{z^2+i}$. Indicar claramente la transformación del borde orientado de $D$.

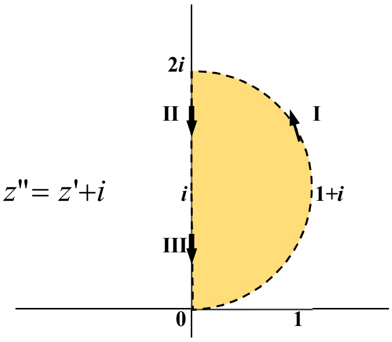
***Resolución* 2**: $f(z)=\frac{z^2-i}{z^2+i}=\frac{z^2+i-2i}{z^2+i}=1-2i\,\frac{1}{z^2+i}$.



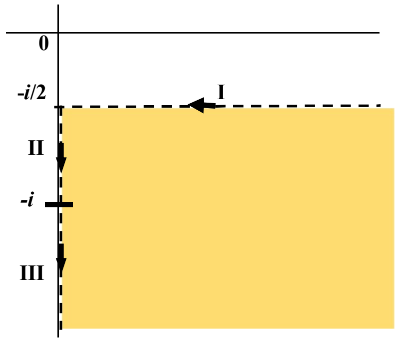

$$z \longrightarrow z' = z^2$$



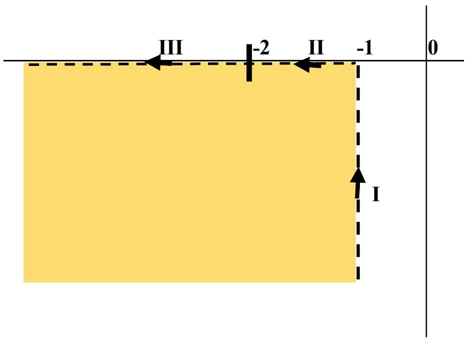

$$z' \longrightarrow z'' = z' + i$$



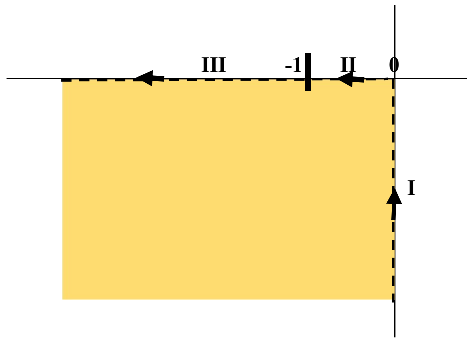

$$z'' \longrightarrow z''' = \frac{1}{z''}$$




$$z''' \longrightarrow z'''' = -2iz'''$$




$$z'''' \longrightarrow w = 1 + z''''$$




---

**3)** Determinar, si existen, todos los pares de números reales $a$ y $b$ para los cuales la función $u(x,y) = $ $= ax^4 - bx^2y^2 + y^4$ es armónica. Si existen, para cada uno de estos pares calcular una conjugada armónica de $u$ y dar ecuación implícita de la línea de campo de $\nabla u$ que pasa por el punto $(2, \frac{1}{2})$.

***Resolución* 3**: Calculemos el laplaciano de $u$ en cada punto $(x,y) \in \Re^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4ax^3 - 2bxy^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12ax^2 - 2by^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2bx^2y + 4y^3 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2bx^2 + 12y^2$$

$$\Delta u(x,y) = 12ax^2 - 2by^2 - 2bx^2 + 12y^2 = (12a - 2b)x^2 + (12 - 2b)y^2$$

Por lo tanto, $u$ es armónica sii para todo $(x,y) \in \Re^2$ se verifica

$$\boxed{(12a - 2b)x^2 - 2bx^2 + (12 - 2b)y^2 = 0} \qquad (*)$$

Para que la igualdad $(*)$ se verifique para todo $(x,y)\in\Re^2$, <u>es necesario</u> que se verifique , en particular, para $(x,y)=(0,1)$, es decir, que $12-2b=0$. También es necesario que $(*)$ se verifique, en particular, para $(x,y)=(1,0)$, es decir, que $12a-2b=0$. Por lo tanto, para que $u$ sea armónica, es necesario que se verifiquen las igualdades $12-2b=0$ y $12a-2b=0$. El único par de números que verifica ambas igualdades es $(a, b)$ = = (1,6). Ahora, se ve fácilmente que para $(a, b)$ = (1,6), la igualdad se verifica para todo $(x,y)\in\Re^2$. Por lo tanto, para que $u$ sea armónica es necesario y suficiente que $(a, b)$ = (1,6). Tenemos, en ese caso

$$u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$$

y una conjugada armónica se calcula fácilmente. Por ejemplo, a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann o bien observando que

$$(x+iy)^4=x^4+4x^3iy+6x^2(iy)^2+4x(iy)^3+(iy)^4=\overbrace{x^4-6x^2y^2+y^4}^{u(x,y)}+i\overbrace{[4x^3y-4xy^3]}^{v(x,y)}$$

Finalmente, las ecuaciones de las línea de campo de $\nabla u$ son $4x^3y-4xy^3=c$, para cada constante real $c$. En particular, la que contiene al punto $(2,\frac{1}{2})$ es la que corresponde a la constante $4\times2^3\times\frac{1}{2}-4\times2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=c$, es decir: $c$ = 15.

***Respuesta* 3**: El único par de números reales que verifica las condiciones del enunciado es $(a, b)$ = (1,6). Para este par de números reales, una conjugada armónica de $u$ es $v(x,y)=4x^3y-4xy^3$ y la ecuación de la línea de campo de $\nabla u$ que pasa por el punto $(2,\frac{1}{2})$ es $4x^3y-4xy^3=15$.

---

**4)** Sea $f:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa en el semiplano $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$ tal que $f(e^{i\theta})=\cos(\theta)$ para todo $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. Calcular $f(2i)$.

***Resolución* 4**: Para todo $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ es $f(e^{i\theta})=\cos(\theta)=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)$. Por lo tanto, la función $g:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $g(z)=f(z)-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ se anula en el arco de circunferencia $\left\{e^{i\theta}:\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\right\}$, contenido en $\mathbb{H}$. Por el «principio de los ceros aislados», $g$ es idénticamente nula en $\mathbb{H}$ y por lo tanto, $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ para todo $z\in\mathbb{H}$. En particular, $f(2i)=\frac{1}{2}\left(2i+\frac{1}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left(2i-\frac{i}{2}\right)=\frac{i}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3i}{4}$.

***Respuesta* 4**: $f(2i)=\frac{3i}{4}$

---

**5)** Determinar y graficar el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n z^n}$ y calcular su suma para $z = -2$.

***Resolución* 5**: Se trata de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$, donde $w = \frac{z-1}{2z}$. Entonces, la serie converge sii $|w| < 1$, es decir, sii $\left|\frac{z-1}{2z}\right| < 1$. Cuentitas: para todo $z = x + iy \neq 0$:

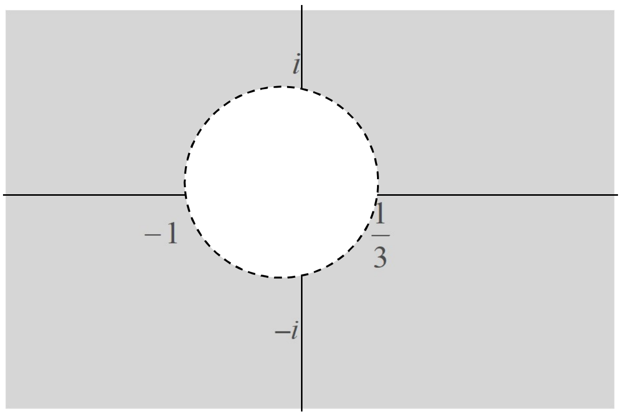
$$\left|\frac{z-1}{2z}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1|^2 < 4|z|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(\bar{z}-1) < 4z\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z\bar{z} - (z+\bar{z}) + 1 < 4z\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 3z\bar{z} + z + \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < 3|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) = 3(x^2+y^2) + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}^{\frac{4}{9}} < \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2$$

Por lo tanto, el dominio de convergencia de la serie es el exterior del disco cerrado de centro $-\frac{1}{3}$ y radio $\frac{2}{3}$

Además, para $|w| < 1$ es $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$ y por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n z^n} = \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2z}} = \frac{2z}{z+1}$ para todo $z$ en dicho dominio. En particular, para $z = -2$ la suma de la serie es $\frac{-4}{-1} = 4$.

***Respuesta* 5**: El dominio de convergencia de la serie es $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left|z + \frac{1}{3}\right| > \frac{2}{3} \right\}$ (ver figura a continuación) y para $z = -2$ la suma de la serie es 4.




---

**6)** Dada $f(z) = e^{\pi z} - \frac{1}{1-z^3}$, desarrollarla en la forma $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ de manera que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i^n 2^n$ sea convergente y calcular su suma. ¿Cuáles son los coeficientes $c_{-3}$ y $c_3$?

***Resolución* 6**: La función exponencial es entera y la serie debe $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ ser convergente para $z = 2i$. Entonces, la opción es clara:

$$f(z)=e^{\pi z}-\frac{1}{1-z^3}=e^{\pi z}-\frac{1}{z^3}\frac{1}{\frac{1}{z^3}-1}=e^{\pi z}+\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z^3}}\overset{|z|>1}{=}$$

$$\overset{|z|>1}{=}\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^9}+\ldots\right)+\overbrace{1+\pi z+\frac{\pi^2}{2!}z^2+\frac{\pi^3}{3!}z^3+\ldots}^{e^{\pi z}}=$$

$$=\ldots+\frac{1}{z^{12}}+\frac{1}{z^9}+\frac{1}{z^3}+1+\pi z+\frac{\pi^2}{2!}z^2+\frac{\pi^3}{3!}z^3+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{z^{3n}}+1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^n}{n!}z^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n \text{ , donde } c_{-n}=1 \text{ y } c_n=\frac{\pi^n}{n!} \text{ para todo } n\geq 0 .$$

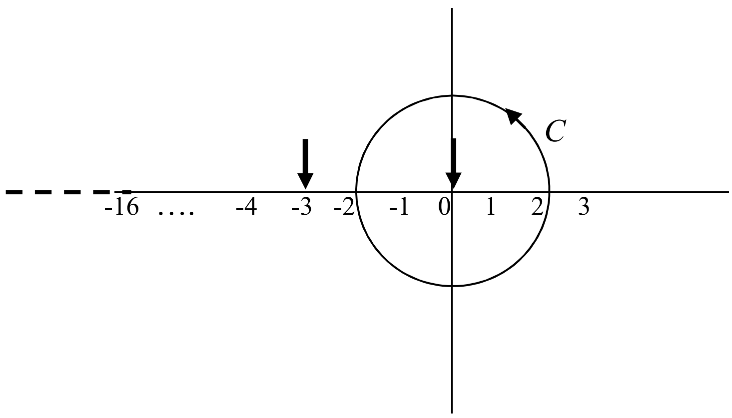
Este desarrollo es válido para todo $z$ tal que $|z| > 1$. En particular, para $z = 2i$ es $=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(2i)^n=f(2i)=$ $=e^{2\pi i}-\frac{1}{1-(2i)^3}=1-\frac{1}{1+8i}=1-\frac{1-8i}{65}=\frac{64}{65}+\frac{8}{65}i$ .

***Respuesta* 6**: Para todo $z$ tal que $|z| > 1$ es $e^{\pi z}-\frac{1}{1-z^3}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n$ , donde $c_{-n}=1$ y $c_n=\frac{\pi^n}{n!}$ para todo $n\geq 0$ . En particular, $c_{-3}=1$ y $c_3=\frac{\pi^3}{3!}$ . Por último: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n 2^n i^n=\frac{64}{65}+\frac{8}{65}i$ .

---

**7)** Calcular $\oint_C \frac{\sqrt[4]{z+16}}{z^2+3z}dz$ , donde $C=\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ (circuito simple positivo) y $\sqrt[4]{\ }$ está definida en el dominio $\mathbb{C}-\{x\in\Re : x\leq 0\}$ y verifica $\sqrt[4]{i}=e^{i\frac{5\pi}{8}}$ .

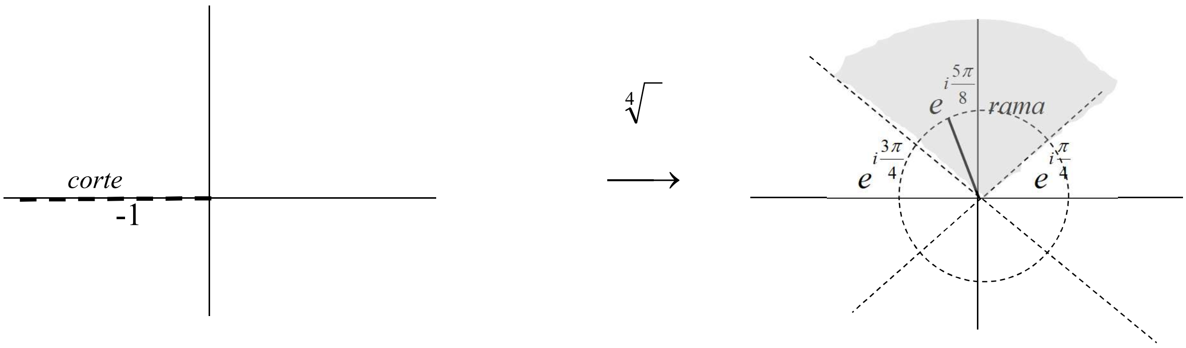
***Resolución* 7**: El integrando es holomorfo en el dominio $\mathbb{C}-\{x\in\Re : x\leq -4\}$, que contiene al circuito de integración.



Se puede aplicar, entonces, la primera fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_C \frac{\sqrt[4]{z+16}}{z^2+3z}dz = \oint_C \frac{\sqrt[4]{z+16}}{z(z+3)}dz = \oint_C \frac{\frac{\sqrt[4]{z+16}}{z+3}}{z}dz = 2\pi i\frac{\sqrt[4]{0+16}}{0+3} = 2\pi i\frac{\sqrt[4]{16}}{3}$$

Nos queda, entonces, calcular $\sqrt[4]{4}$.




Las cuatro raíces cuartas de 16 son 2, –2, 2*i* y –2*i*. La que corresponde a la rama indicada en el enunciado es $2i$. Por lo tanto, $\oint_C \frac{\sqrt[4]{z+16}}{z^2+3z}dz = 2\pi i\frac{\sqrt[4]{16}}{3} = 2\pi i\frac{2i}{3} = -\frac{4\pi}{3}$.

***Respuesta* 7**: $\oint_C \frac{\sqrt[4]{z+16}}{z^2+3z}dz = -\frac{4\pi}{3}$.

---

**8)** Calcular $\oint_C \frac{dz}{z(e^z-1)}$, donde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (circuito simple positivo)

***Resolución* 8**: Las singularidades del integrando son $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Son todas aisladas y la única que pertenece al interior del circuito de integración es $z_0 = 0$. Veamos de qué se trata:

$$\frac{1}{z(e^z-1)} = \frac{1}{z\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+....-1\right)} = \frac{1}{z\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+....\right)} = \frac{1}{z^2\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^3}{5!}+...\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^2}\overbrace{\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^3}{5!}+...}}^{h(z)}$$

Donde $h(z) = \dfrac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^3}{5!}+...}$ es holomorfa en un entorno de 0. Entonces,

$$\frac{1}{z(e^z-1)}=\frac{1}{z^2}h(z)=\frac{1}{z^2}\left(h(0)+h'(0)z+\frac{1}{2!}h''(0)z^2+\frac{1}{3!}h'''(0)z^3+\ldots\right)=\frac{h(0)}{z^2}+\frac{h'(0)}{z}+\frac{h''(0)}{2!}+\frac{h'''(0)z}{3!}+\ldots$$

Por lo tanto, se trata de un polo doble con residuo $h'(0)$. Calculemos: $h'(z)=-\dfrac{\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2z}{4!}+\dfrac{3z^2}{5!}+\ldots}{\left(1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^3}{5!}+\ldots\right)^2}$ ;

entonces, el residuo es $h'(0)=-\dfrac{1}{2}$. (Este cálculo se puede hacer con las fórmulas dadas en clase). Entonces,

$$\oint_C \frac{dz}{z(e^z-1)}=2\pi\, i\times\frac{-1}{2}=-\pi\, i$$

***Respuesta* 8**: $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z(e^z-1)}=-\pi\, i$

---