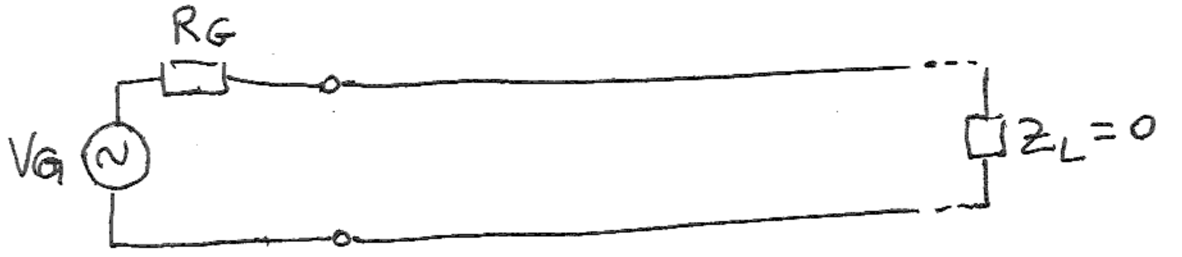
LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

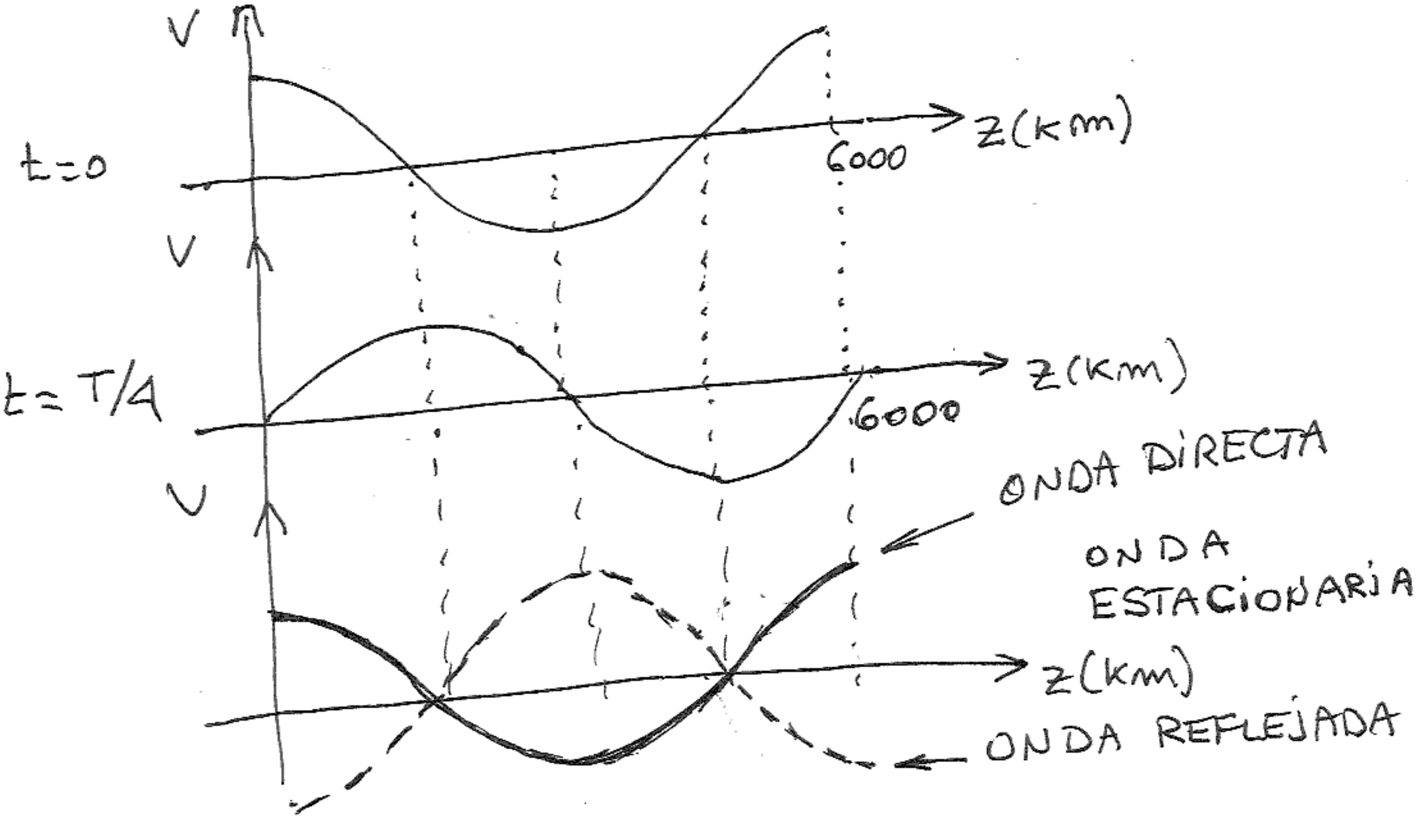
SI SE DESEA TRANSMITIR INFORMACIÓN EN CONDUCTORES METÁLICOS, A ESTE MEDIO SE LO CONOCE CON EL NOMBRE DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN EN GENERAL SERÁ UNA ONDA GUIADA.

CONSIDERE EL SIGUIENTE EJEMPLO:



LÍNEA DE TRANSMISIÓN LARGA.

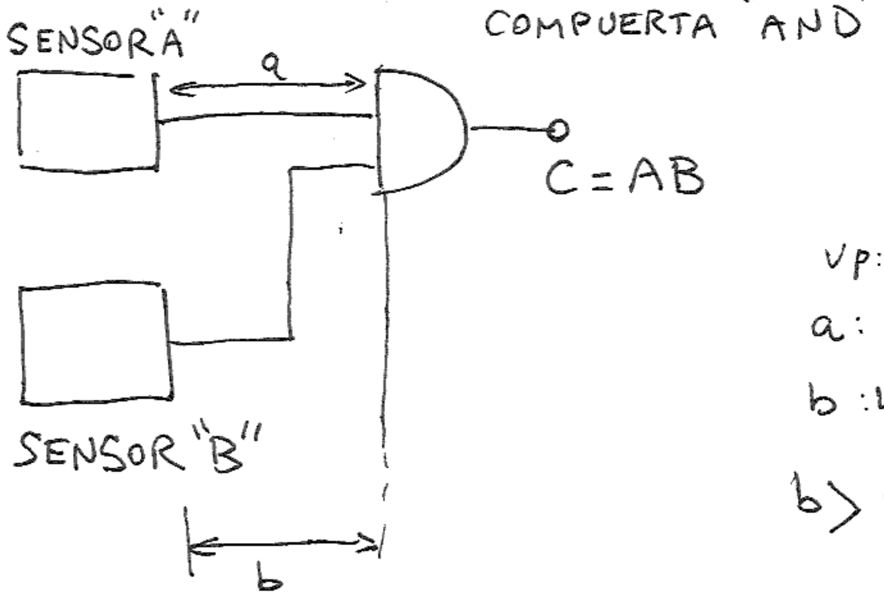
RED DE ENERGÍA DE POTENCIA DE 50HZ



$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8 \ m/s}{50 \ 1/s} = 6000 \ km.$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \ 1/s} = 0{,}020 \ S = 20 \ mS$$

CONSIDERE EL SIGUIENTE EJEMPLO

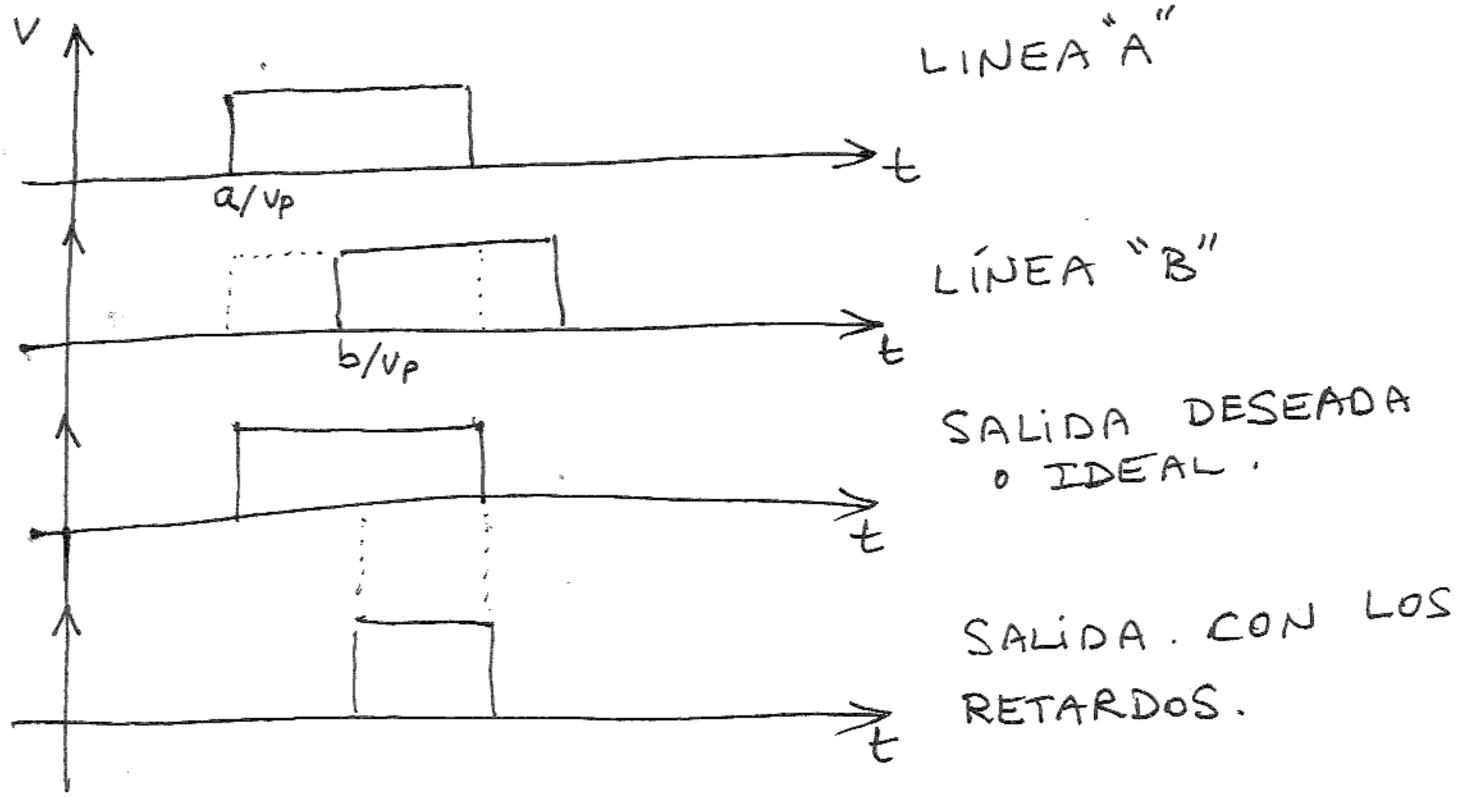


V_p: VELOCIDAD DE LA SEÑAL

a: LONGITUD DEL CONDUCTOR a

b: LONGITUD DEL CONDUCTOR b.

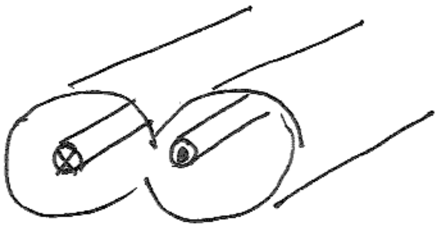
b > a



SI LA LONGITUD DEL CONDUCTOR b ES MAYOR, LA SALIDA DEL CIRCUITO LOGICO SERÁ ERRONEA, DEBIDO A LOS RETARDOS.

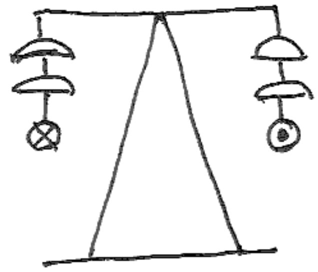
LA SALIDA IDEAL O DESEADA SE OBTENDRÁ CON LOS CONDUCTOR a Y b DE LA MISMA LONGITUD.

SE PUEDE CONSIDERAR QUE UNA LÍNEA DE TRANS_
MISIÓN ES LA TRANSMISIÓN DE ENERGÍA ENTRE
DOS SITIOS.
LOS EJEMPLOS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN SON
LOS SIGUIENTES:



TRANSMISIÓN DE
ENERGÍA ELECTRICA
DE BAJA POTENCIA

CABLES PARA
ELECTRODOMESTICOS

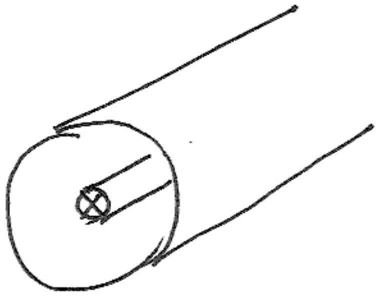


TRANSMISIÓN
DE ENERGÍA
ELÉCTRICA

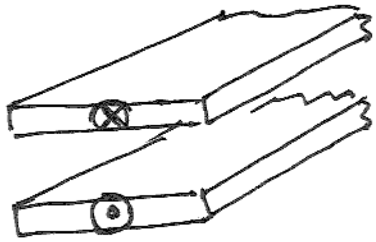
CABLE SUSPENDIDOS
EN TORRES

PAR
TRENZADO

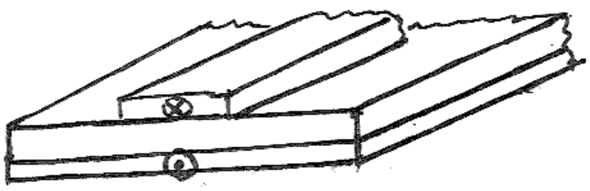
CABLES
TELEFONICOS



TRANSMISIÓN DE
RF
LINEA COAXIAL

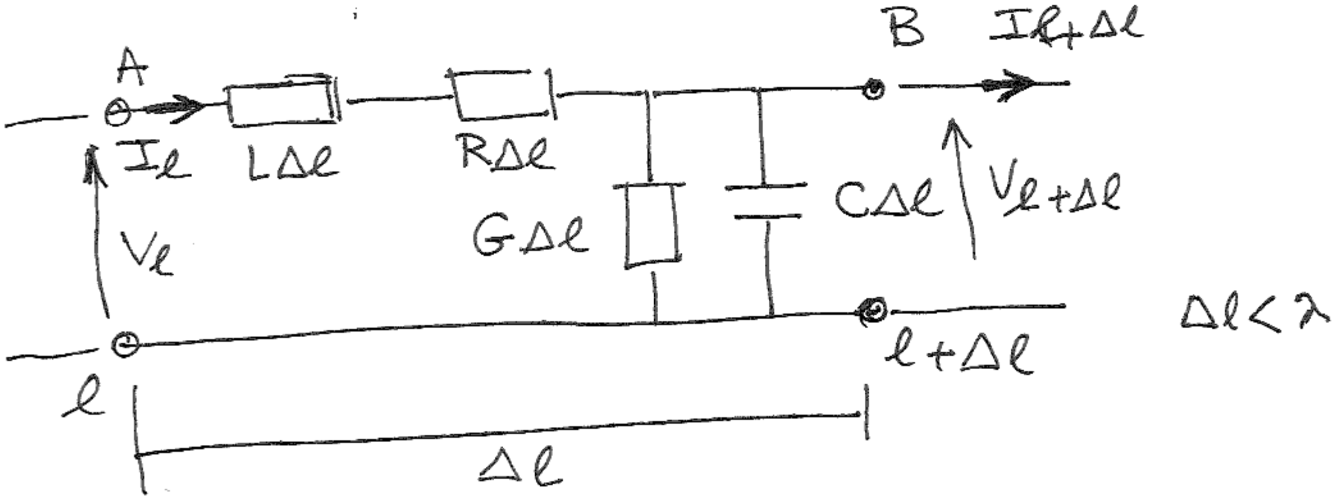


LÍNEAS DE CINTAS
USADAS POR EJEMPLO
EN PCB PARA RF.



LINEA DE MICROCINTAS
USADAS EN RF EN PCB

LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN POSEEN PARÁMETROS R, G, C, Y L DISTRIBUIDOS, POR UNIDAD DE LONGITUD. NO SON COMPONENTES CONCENTRADOS COMO SE TRATAN EN TEORÍA DE CIRCUITOS HABITUALMENTE.



CIRCUITO ELÉCTRICO DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN CON SUS PARÁMETROS DISTRIBUIDOS

SE TIENE:

$$Z = R\Delta\ell + j\omega L\Delta\ell$$

$$Y = G\Delta\ell + j\omega C\Delta\ell$$

Z: IMPEDANCIA SERIE

Y: ADMITANCIA EN PARALELO

APLICANDO LA LEY DE KIRCHOFF DE LA TENSIÓN

$$V(\ell+\Delta\ell) - V(\ell) = -I(\ell)\left[R\Delta\ell + j\omega L\Delta\ell\right]$$

$$\frac{V(\ell+\Delta\ell) - V(\ell)}{\Delta\ell} = -I(\ell)\left[R + j\omega L\right]$$

SI $\Delta\ell \to 0$

$$\boxed{\frac{dV(\ell)}{d\ell} = -I(\ell)\left[R + j\omega L\right]} \quad (1)$$

APLICANDO LA LEY DE KIRCHOFF DE LA CORRIENTE

$$I(l+\Delta l) - I(l) = -V(l+\Delta l)\left(G\Delta l + j\omega C\Delta l\right)$$

SE OBTIENE:

$$\frac{dI(l)}{dl} = -V(l+\Delta l)\cdot\left(G + j\omega C\right)$$

DONDE

$$V(l+\Delta l) = V(l) + \frac{dV(l)}{dl}\frac{\Delta l}{1!} + \frac{d^2V(l)}{dl^2}\frac{\Delta l^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$V(l+\Delta l) \cong V(l)$ DESPRECIANDO LOS TERMINOS CON Δl

POR LO TANTO:

$$\boxed{\frac{dI(l)}{dl} = -V(l)\cdot\left(G + j\omega C\right)} \quad (2)$$

DE (1)

$$I(l) = -\frac{dV(l)}{dl}\cdot\frac{1}{(R+j\omega L)} \quad (3)$$

(3) EN (2)

$$-\frac{d^2V(l)}{dl^2}\cdot\frac{1}{(R+j\omega L)} = -V(l)\left(G+j\omega C\right)$$

$$\boxed{\frac{d^2V(l)}{dl^2} - V(l)\left(G+j\omega C\right)\left(R+j\omega L\right) = 0}$$

SIMILARMENTE DESPEJANDO DE (2)

$$V(l) = -\frac{dI(l)}{dl}\frac{1}{(G+j\omega C)} \quad (4)$$

(4) EN (1)

$$-\frac{d^2 I(l)}{dl^2}\cdot\frac{1}{(G+j\omega C)} = -I(l)\cdot(R+j\omega L)$$

$$\boxed{\frac{d^2 I(l)}{dl^2} - I(l)(G+j\omega C)(R+j\omega L) = 0}$$

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES $\frac{d^2 V(l)}{dl^2}$ y $\frac{d^2 I(l)}{dl^2}$ SON ECUACIONES DE ONDA, SI SE HACE:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(G+j\omega C)(R+j\omega L)}$$

$$\frac{d^2 V}{dl^2} - \gamma^2 V = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dl^2} - \gamma^2 I = 0$$

ANALOGAMENTE AL CASO VISTO EN PROPAGACIÓN SE TIENE:

$$V(l) = V^+ e^{-\gamma l} + V^- e^{+\gamma l}$$

$$I(l) = I^+ e^{-\gamma l} + I^- e^{+\gamma l}$$

AHORA SE DEFINE LA IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA Z_0 DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} \quad [\Omega]$$

USANDO $V(l)$ e $I(l)$ EN LA EC. 1:

$$\frac{d(V^+ e^{-\gamma l} + V^- e^{\gamma l})}{dl} = -(I^+ e^{-\gamma l} + I^- e^{\gamma l})(R+j\omega L)$$

SUPONIENDO QUE EXISTE SOLO LA ONDA V^+ e I^+

$$\boxed{-\gamma V^+ e^{-\gamma l} = -I^+ e^{-\gamma l}(R+jwL)}$$

ANALOGAMENTE $V(l)$ e $I(l)$ EN 2

$$\frac{d}{dl}\left(I^+ e^{-\gamma l} + I^- e^{\gamma l}\right) = \left(V^+ e^{-\gamma l} + V^- e^{\gamma l}\right)(G+jwC)$$

$$\boxed{-\gamma I^+ e^{-\gamma l} = -V^+ e^{-\gamma l}(G+jwC)}$$

POR LOTANTO:

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = \frac{R+jwL}{\gamma} = \frac{\gamma}{G+jwC}$$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+jwL}{G+jwC}} \ (\Omega)}$$

Si SE SUPONE QUE EXISTE SOLO V^- e I^-

$$\gamma V^- e^{\gamma l} = -I^- e^{\gamma l}(R+jwL)$$

$$\gamma I^- e^{\gamma l} = -V^- e^{\gamma l}(G+jwC)$$

$$\frac{V^-}{I^-} = -\frac{(R+jwL)}{\gamma} = \frac{-\gamma}{G+jwC} = -Z_0$$

POR LO TANTO:

$$\boxed{Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = \frac{-V^-}{I^-} = \sqrt{\frac{R+jwL}{G+jwC}} \ (\Omega)}$$

SE PUEDE ESCRIBIR LA CORRIENTE COMO:

$$I(l) = I^+ e^{-\gamma l} + I^- e^{\gamma l}$$

COMO $I^+ = \frac{V^+}{Z_0}$ Y $I^- = -\frac{V^-}{Z_0}$

$$I(l) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma l} + \left(\frac{-V^-}{Z_0}\right) e^{\gamma l}$$

EN RESUMEN:

$$V(l) = V^+ e^{-\gamma l} + V^- e^{\gamma l}$$

$$I(l) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{V^-}{Z_0} e^{\gamma l}$$

ADEMAS $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ Y $v_p = \frac{\omega}{\beta}$

TIPOS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN:

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS

ES SI $R=0$ Y $G=0$ OCURRE CUANDO EL CONDUCTOR Y EL DIELÉCTRICO SON PERFECTOS

$\alpha = 0$ Y $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ES REAL

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

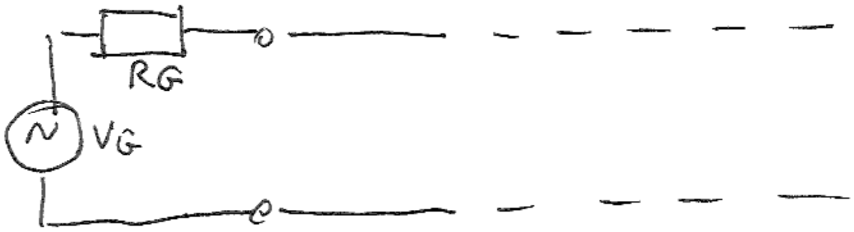
ANTES EN ONDAS PLANAS SE OBTUVO

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

POR LO TANTO: $\underline{\mu\epsilon = LC}$

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN LARGAS

CONSIDERE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN MUY LARGA, QUE SE PUEDE CONSIDERAR INFINITA, DONDE NO VAN A EXISTIR REFLEXIONES, NO VAN A EXISTIR ONDAS QUE VIAJEN DESDE LA CARGA AL GENERADOR.



$$V(\ell) = V^+ e^{-\gamma \ell} \qquad \gamma = \alpha + j\beta$$

$$I(\ell) = I^+ e^{-\gamma\ell} = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma\ell}$$

EJEMPLO

CONSIDERE DISTRIBUCIÓN DE CATV A 20KM DE DISTANCIA, ASUMIENDO UNA PÉRDIDA DE 1 dB/km (LÍNEA DE BAJAS PÉRDIDAS). $f = 80\,MHz$ (VHF CH5)

$\epsilon_r = 4{,}9$

$$V(\ell) = V^+ e^{-\alpha\ell} \cdot e^{-j\beta\ell}$$

LA AMPLITUD

$$V(\ell) = V^+ e^{-\alpha\ell} \Longrightarrow \frac{V(\ell)}{V^+} = e^{-\alpha\ell}$$

$$A_t = 20 \log \frac{V(\ell)}{V^+} = 20 \log . e^{-\alpha\ell} \doteq 1 \frac{dB}{km}.$$

$$e^{-\alpha\ell} = 10^{(A_t/20)}$$

$$-\alpha\ell = \log_e 10^{(A_t/20)} \Longrightarrow -\alpha\ell = \frac{A_t}{20} \ln 10$$

$$\text{si } \ell = 1\,Km \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{10^{-3}}{20} \ln 10 \frac{Nep}{m} = 1{,}15 . 10^{-4} \frac{Nep}{m}}$$

AL SER UNA LÍNEA DE BAJAS PÉRDIDAS

$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\cdot\sqrt{4{,}9}\cdot 80\cdot 10^6$$

$$\beta \cong \frac{2\pi\, 80\cdot \cancel{10^6}\,\sqrt{4{,}9}}{3\cdot 10^{\cancel{8}\,2}}\left(1/m\right) = 3{,}7\ \frac{rad}{m}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 1{,}15\cdot 10^{-4}\,\frac{Nep}{m} + j\,3{,}7\,\frac{rad}{m}$$

CALCULAR V^+ Y I^+ EN CUALQUIER PUNTO DE LA LÍNEA

$$V(z) = 1V\cdot e^{-\gamma z} = 1V\cdot e^{-1{,}15\cdot 10^{-4} z}\cdot e^{-j3{,}7z}$$

$$I(z) = \frac{V(z)}{Z_0} = \frac{1V}{75\Omega}\cdot e^{-1{,}15\cdot 10^{-4}\cdot z}\cdot e^{-j3{,}7\cdot z}$$

CALCULAR $V(z)\Big|_{z=20km}$

$$V(z)\Big|_{z=20km} = 1V\cdot e^{-1{,}15\cdot 10^{-4}\cdot 20000}\cdot e^{-j3{,}7\cdot 20000}$$

$$\boxed{V(z)\Big|_{z=20km} = 0{,}1V\cdot e^{-j74000}}$$

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN

SI SE HACE $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$, LA CTE DE PROPAGACIÓN ES:

$$\gamma = \sqrt{(jwL + R)(jwC + G)}$$

R/L

$$\gamma = \sqrt{jwL \cdot jwC \left(1 + \frac{R}{jwL}\right)\left(1 + \frac{G}{jwC}\right)}$$

$$\gamma = jw\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{jwL}\right)$$

$$\alpha = \sqrt{LC} \cdot \frac{R}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}}\, R \qquad [Nep/m]$$

$$\beta = w\sqrt{LC} \qquad [rad/m]$$

$$v_p = \frac{w}{\beta} = \frac{\cancel{w}}{\cancel{w}\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

LA ATENUACIÓN Y LA v_p NO DEPENDEN DE w

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}} = \sqrt{\frac{jwL\,\cancel{(R/jwL + 1)}}{jwC\,\cancel{(G/jwC + 1)}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Z_0 TAMPOCO DEPENDERÁ DE w.

POR LO TANTO ES UNA LÍNEA SIN DISTORSIÓN

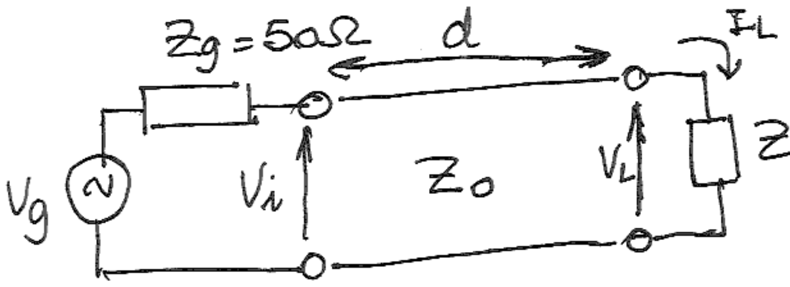
SI SE CUMPLE $\boxed{\frac{R}{L} = \frac{G}{C}}$

PARA LA LÍNEA FINITA SE CONSIDERA LA VARIABLE Z

$$V(z) = V^{+} e^{\gamma z} + V^{-} e^{-\gamma z}$$
$$I(z) = I^{+} e^{\gamma z} + I^{-} e^{-\gamma z}$$

<u>EJEMPLO:</u>

CONSIDERE LA SIGUIENTE LÍNEA DE TRANSMISIÓN SÍN PÉRDIDAS



$Z_0 = 100\Omega$

$d = 2{,}3\lambda$

$V_L = 50V$

CALCULAR LAS ONDAS V^{+} y V^{-} Si $V_L = 50V$

$$V(z)\Big|_{z=0} = V^{+} + V^{-} = 50V = V_L$$
$$I(z)\Big|_{z=0} = I^{+} + I^{-} = \frac{V^{+}}{Z_0} - \frac{V^{-}}{Z_0} = I_L = \frac{V_L}{Z_L} = 1A$$

$$\begin{cases} V^{+} + V^{-} = 50V \\ V^{+} - V^{-} = 100V \end{cases}$$

$$2V^{+} = 150V$$
$$\boxed{V^{+} = 75V}$$

$$75V + V^{-} = 50V \Rightarrow \boxed{V^{-} = -25V}$$

CALCULAR LAS ONDAS V^{+} y V^{-} Si $V_i = 50V$ y $I_i = 1A$

$$V_i = V(z)\Big|_{z=d} = V^{+} e^{\gamma d} + V^{-} e^{-\gamma d} = V^{+} e^{j\beta d} + V^{-} e^{-j\beta d} = 50V$$
$$I_i = I(z)\Big|_{z=d} = I^{+} e^{\gamma d} + I^{-\gamma d} = I^{+} e^{j\beta d} - I^{-} e^{-j\beta d} = 1A$$

LÍNEA DE TRANSMISIÓN DE BAJA RESISTENCIA.

SI EN LA LÍNEA SE PUEDE CONSIDERAR $R=0$

$$\gamma = \sqrt{j\omega L\,(j\omega C + G)} = j\omega\sqrt{LC}\,\sqrt{1+\frac{G}{j\omega C}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{G + j\omega C}}$$

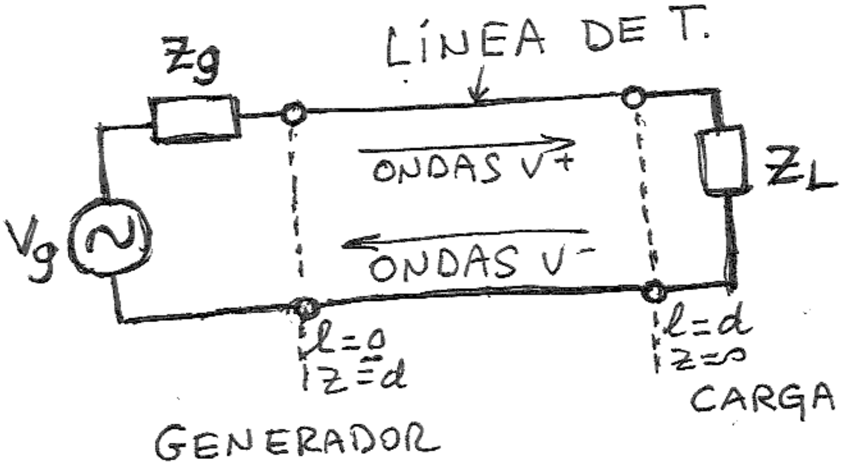
SE HA VISTO EN PROPAGACIÓN EN UN MEDIO CON PÉRDIDAS CON μ Y ϵ, σ

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}+1\right)}$$

DE AQUÍ SE PUEDE OBSERVAR

$$LC = \mu\epsilon \quad \text{Y} \quad \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{G}{C}$$

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN FINITAS:



EN UNA LÍNEA FINITA CON CARGA EXISTIRÁN ONDAS QUE VIAJAN EN AMBOS SENTIDOS

$$V(l) = V^+ e^{-\gamma l} + V^- e^{\gamma l}$$

$$I(l) = I^+ e^{-\gamma l} + I^- e^{\gamma l}$$

$$\begin{cases} V^+ e^{j\beta d} + V^- e^{-j\beta d} = 50V \\ \frac{V^+}{Z_0} e^{j\beta d} + \frac{V^-}{Z_0} e^{-j\beta d} = 1A \end{cases}$$

$$\begin{cases} V^+ e^{j\beta d} + V^- e^{-j\beta d} = 50V \\ V^+ e^{j\beta d} - V^- e^{-j\beta d} = 100V \end{cases}$$

$$2V^+ e^{j\beta d} = 150V \Rightarrow V^+ = 75V e^{-j\beta d}$$

$$2V^- e^{-j\beta d} = -50V \Rightarrow V^- = -25V e^{j\beta d}$$

$$\beta d = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}} 2{,}3\cancel{\lambda} = 4{,}6\pi$$

$$V^+ = 75V e^{-j4{,}6\pi}$$

$$V^- = -25V e^{j4{,}6\pi}$$

COEFICIENTE DE REFLEXIÓN EN LA CARGA

$$\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+} \quad (z=0)$$

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V^+ + V^-}{I^+ + I^-} = \frac{V^+ + V^-}{\frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0}} = Z_0 \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-}$$

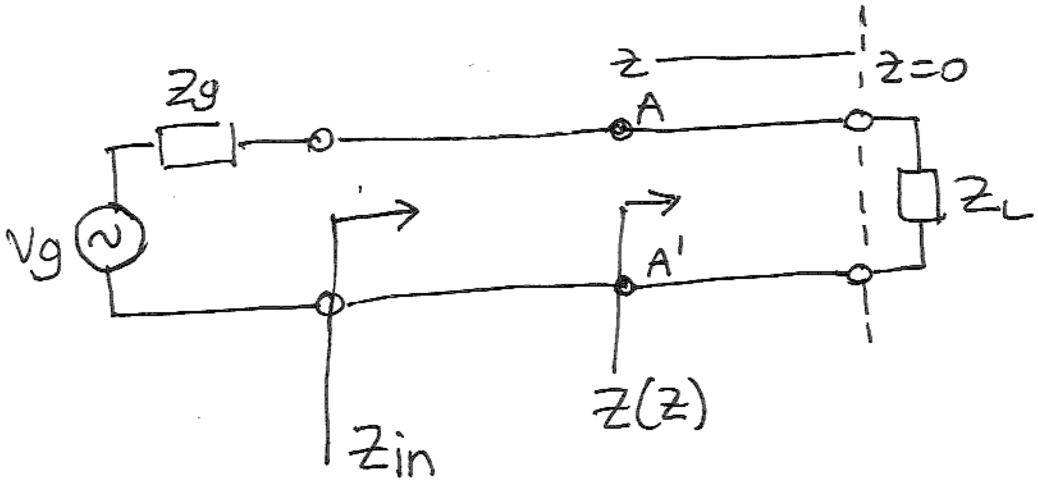
$$(V^+ - V^-) Z_L = (V^+ + V^-) Z_0$$

$$-V^- Z_L - V^- Z_0 = V^+ Z_0 - V^+ Z_L$$

$$-V^-(Z_L + Z_0) = V^+(Z_0 - Z_L)$$

$$V^- = V^+ \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)} \Rightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

IMPEDANCIA DE ENTRADA A UNA LÍNEA. IMPEDANCIA EN UN PUNTO DE LA LÍNEA



LA TENSIÓN Y CORRIENTE EN UN PUNTO CUALQUIERA z DE LA LÍNEA, ES:

$$V(z) = V^+ e^{\gamma z} + V^- e^{-\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{\gamma z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

COMO $\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+}$

$$V(z) = V^+ \left(e^{\gamma z} + \Gamma_L e^{-\gamma z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} \left(e^{\gamma z} - \Gamma_L e^{-\gamma z}\right)$$

POR LO TANTO:

$$\boxed{Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{\left(e^{\gamma z} + \Gamma_L e^{-\gamma z}\right)}{\left(e^{\gamma z} - \Gamma_L e^{-\gamma z}\right)}}$$

Z EN UN PUNTO CUALQUIERA DE LA LÍNEA z

COMO $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

$$Z(z) = Z_0 \cdot \left[\frac{e^{\gamma z} + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \cdot e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-\gamma z}}\right]$$

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{(Z_L+Z_0)e^{\gamma z} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma z}}{(Z_L+Z_0)\cdot e^{\gamma z} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma z}}$$

$$Z(z) = Z_0 \quad \frac{Z_L(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_0 \cdot (e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})}{Z_L(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}) + Z_0(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z})}$$

COMO $\frac{e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}}{2} = \cosh \gamma z \qquad \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} = \operatorname{senh} \gamma z$

$$\boxed{\begin{aligned} Z(z) &= Z_0 \, \frac{Z_L \cosh \gamma z + Z_0 \operatorname{senh} \gamma z}{Z_L \operatorname{senh} \gamma z + Z_0 \cosh \gamma z} \\ Z(z) &= Z_0 \cdot \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma z}{Z_L \tanh \gamma z + Z_0} \end{aligned}}$$

SE PUEDE DEFINIR $\Gamma(z)$ COMO

$$\Gamma(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \frac{V^+ \cdot \Gamma_L e^{-\gamma z}}{V^+ \cdot e^{\gamma z}} = \Gamma_L e^{-2\gamma z}$$, como $\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\theta}$

$$\Gamma(z) = |\Gamma_L| e^{-2\alpha z} \cdot e^{j\theta} e^{-2j\beta z}$$

COEF. DE REFLEXIÓN GENERALIZADO $\Gamma(z)$.