86.08/TA133

CONTROL AUTOMÁTICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA

Trabajo Práctico I: Modelos

1er Cuatrimestre 2025

Autor:	**Padrón:**	**Correo:**
Del Rio, Francisco	110761	fadelrio@fi.uba.ar
Monti, Martina	110574	mmonti@fi.uba.ar
Ruggiero, Valentina	109317	vruggiero@fi.uba.ar

Índice

1. Introducción

En el presente trabajo se resolverán cuatro sistemas de distintos ordenes con el fin de poder modelizar mediante variables de estado, y utilizando transformadas de Laplace y linealización de ser necesario. Luego se corroborarán los resultados analíticos con una simulación.

2. Problema 1: Masa-Resorte-Fricción

2.1. 1.1 Problema un grado de libertad

Se busca un modelo en espacio de estados para el sistema de control de la posicion de la masa representado en la Figura 1

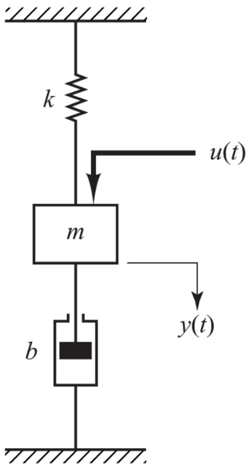


Figura 1: Esquema del sistema masa-resorte-amortiguador

2.1.1. Descripción en espacio de estados

Para describir el sistema en el espacio de estados primero se recurre a las ecuaciones de la dinámica del sistema, originadas en la segunda ley de newton:

$$u(t) - kq - b\dot{q} = m\ddot{q} \tag{1}$$

Sabiendo que $k = 1$, $m = 1$ y $b = 1$:

$$u(t) - q - \dot{q} = \ddot{q} \tag{2}$$

Se propone como variables de estado y salida del sistema:

$$x_1 = q \quad x_2 = \dot{q} \quad y = q = x_1 \tag{3}$$

Luego, las variables de estado derivadas respecto al tiempo resultan:

$$\dot{x_1} = x_2 \quad \dot{x_2} = \ddot{q} \tag{4}$$

A partir de la eq. 2, reemplazando las variables de estado se obtiene:

$$\dot{x_2} = \ddot{q} = u(t) - x_1 - x_2 \tag{5}$$

Luego, las matrices A, B, C y D definidas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = (0) \tag{6}$$

2.1.2. Transferencia del sistema

Primero se obtiene la transferencia a partir de la transformacion de LaPlace de la ecuación de la dinámica del sistema, considerando condiciones iniciales nulas. Transformando la Ecuación 2:

$$U(s) - X(s) - sX(s) = s^2 X(s) \tag{7}$$

Luego de un simple despeje se obtiene:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \tag{8}$$

Tambien se puede obtener la transferencia a partir de las matrices A, B, C y D, como se puede ver en:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \tag{9}$$

Finalmente, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \tag{10}$$

Como se puede observar, se obtuvo el mismo resultado utilizando los dos métodos, por lo que se puede asumir que el resultado es correcto.

2.1.3. Respuesta al escalón

La respuesta al escalón se obtiene a partir de la transferencia, aprovechando que la transformada de LaPlace de la respuesta al escalón es:

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s} H(s) \tag{11}$$

Entonces, para encontrar la respuesta al escalón se debe hallar la antitransformada de:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} \tag{12}$$

Para esto se utilizará el desarrollo en fracciones simples mediante el método de residuos, quedando expresado:

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-\alpha_1} + \frac{k_2}{s-\alpha_2} \tag{13}$$

Donde $\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ y $\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$ y los k_i se obtienen de la siguiente forma:

$$k_i = [(s-p_i)Y(s)]_{s=p_i} \tag{14}$$

Donde p_i son los polos de la transformada. Los k_i obtenidos son:

$$k_1 = 1 \quad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}j \quad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}j \tag{15}$$

Luego, la anti-transformada de la Ecuación 13 resulta, por tabla:

$$y(t) = k_1 + k_2 e^{\alpha_1 t} + k_3 e^{\alpha_2 t} \quad t > 0 \tag{16}$$

Finalmente, tras operar con la expresión anterior, se obtiene la respuesta al escalón:

$$y(t) = 1 - e^{\frac{-t}{2}} \left[cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \tag{17}$$

2.1.4. Respuesta a condiciones iniciales

Para hallar la respuesta a condiciones iniciales se utiliza la exponencial matricial, la cual se obtiene de la siguiente forma, para este caso:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s\end{pmatrix}\right] \tag{18}$$

Del desarrollo del ultimo miembro de esta ultima ecuación se obtiene:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\frac{-t}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] & \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{-t}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{-t}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & \frac{\sqrt{3}e^{\frac{-t}{2}}}{3}\left[\sqrt{3} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \end{pmatrix} \tag{19}$$

2.2. 1.2 Problema dos grados de libertad

2.2.1. Descripción en espacio de estado

En este problema se pueden considerar dos posibles salidas, una con la posición de la masa 1 y otra con la de la masa 2, por lo tanto se pueden obtener dos transferencias y descripciones de estados distintas segun que caso se considere. El analisis es similar para ambos casos, por lo tanto, se desarrollara solo el caso de la masa 2 como salida. El primer paso es plantear las ecuaciones de Newton del sistema.

$$m_1\ddot{q}_1 = -D\dot{q}_1 - k(q_1 - q_2) \tag{20}$$

$$m_2\ddot{q}_2 = f(t) - k(q_1 - q_2) \tag{21}$$

Al momento de elegir las variables de estados se debe considerar que las ecuaciones deben contener sus derivadas, por lo tanto se consideran 4 variables de estado.

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} u = f(t) y = q_2$$

Se reescriben las ecuaciones considerando estas definiciones.

$$m_1\dot{x}_2 = -Dx_2 - kx_1 + kx_3 \tag{22}$$

$$m_2\dot{x}_4 = u - kx_3 + kx_1 \tag{23}$$

Teniendo todas las derivadas, se pueden obtener las matrices A, B, C y D usando las ecuaciones $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = Cx + Du$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{D}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = 0$$

Si se reemplaza con los datos del problema.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Conociendo las matrices se puede calcular la transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + s + 2}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + \frac{1}{2}s} \tag{24}$$

2.2.2. Desarrollo con Laplace

Partiendo de las ecuaciones de Newton planteadas en las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.1, se puede sacar la transferencia transformando y despejando.

$$m_1 Q_1 s^2 = -DQ_1 s - kQ_1 + kQ_2 \tag{25}$$

$$m_2 Q_2 s^2 = F - kQ_2 + kQ_1 \tag{26}$$

Despejando Q_1 de 2.2.2, y reemplazando en 2.2.2 se obtiene

$$m_2 Q_2 s^2 = F - kQ_2 - k\frac{Q_1}{m_1 s^2 + Ds + k} \tag{27}$$

De esta ultima ecuacion se puede despejar la transferencia $\frac{Q_2}{F} = H(s)$

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{2}s + 1}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + \frac{1}{2}s} \tag{28}$$

2.2.3. Respuesta al escalón

Para calcular la respuesta al escalón, de forma similar que en la sección 2.1.3, se utiliza el desarrollo en fracciones simples de el producto entre la transferencia y la transformada de el escalón unitario:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s + 0{,}173} + \frac{k_4}{s + 0{,}163 + 1{,}19j} + \frac{k_5}{s + 0{,}163 - 1{,}19j} \tag{29}$$

Luego, utilizando el método de residuos se obtienen:

$$k_1 = 2 \quad k_2 = -11 \quad k_3 = 11{,}09 \quad k_4 = -0{,}049 - 0{,}039j \quad k_5 = -0{,}049 + 0{,}039j \tag{30}$$

Entonces, se puede anti-transformar la Ecuación 29 utilizando una tabla de transformadas, obteniendo:

$$y(t) = 2t + 11 + 11{,}09e^{-0{,}173t} + (-0{,}049 - 0{,}039j)e^{(-0{,}16-1{,}19j)t} + (-0{,}049 + 0{,}039j)e^{(-0{,}16+1{,}19j)t} \tag{31}$$

Desarrollando las exponenciales complejas se obtiene una respuesta real:

$$y(t) = -11 + 2t + 11{,}1e^{-0{,}173t} + e^{-0{,}16t}[-0{,}098cos(1{,}19t) + 0{,}078sen(1{,}19t)] \tag{32}$$

3. Problema 2: Red RLC de tercer orden

3.1. Descripción en espacio de estados

En primer lugar se plantea el ejercicio para obtener una descripción en espacio de estados de este considerando la tension en el segundo capacitor la salida. Se plantean las ecuaciones de las dos mallas internas y la del nodo P.

$$I_L = C_1 \frac{dV_{c1}}{dt} - C_2 \frac{dV_{c2}}{dt} \tag{33}$$

$$V_i = V_{c1} + L\frac{dI_L}{dt} \tag{34}$$

$$0 = V_{c2} + RC_2 \frac{dV_{c2}}{dt} - L\frac{dI_L}{dt} \tag{35}$$

Como para elegir mis variables de estados neceisto que este presente su derivada en mis ecuaciones consiero las siguientes variables.

$$x = \begin{pmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \\ I_L \end{pmatrix} \tag{36}$$

Junto con $y = V_o = V_{c2} = x_2$ y $u = V_i$. Por lo tanto se pueden reescribir las ecuaciones anteriores teniendo en cuenta las variables definidas y despejando las derivadas.

$$\dot{x_1} = \frac{1}{C_1} x_3 + \frac{C_2}{C_1}\dot{x_2} \tag{37}$$

$$\dot{x_2} = \frac{L}{C_2 R}\dot{x_3} - \frac{1}{C_2 R} x_2 \tag{38}$$

$$\dot{x_3} = \frac{1}{L}(u - x_1) \tag{39}$$

Dado que se necesita que las derivadas de las variables de estado no dependan de si mismas, se reemplaza con 3.1 en 3.1 y en 3.1 con la nueva 3.1.

$$\dot{x_2} = \frac{1}{C_2 L}(u - x_1 - x_2) \tag{40}$$

$$\dot{x_1} = \frac{1}{C_1} x_3 + \frac{1}{C_1 R}(u - x_1 - x_3) \tag{41}$$

Ahora se pueden buscar las matrices A, B, C y D que cumplan $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = Cx + D$. Se obtiene rapidamente

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R} & -\frac{1}{C_1 R} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2 R} & -\frac{1}{C_2 R} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R} \\ \frac{1}{C_2 R} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

Si se reemplaza con los datos del problema se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -10 & 100k \\ -5 & -5 & 0 \\ -\frac{4000}{11} & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ \frac{4000}{11} \end{pmatrix}$$

Usando esto podemos obtener la transferencia del sistema $\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s)$ usando la ecuación de espacio de est. Y se llega a

$$H(s) = \frac{5s^2}{s^3 + 15s^2 + 36,36e6s + 181{,}81e6} \tag{42}$$

3.2. Desarrollo con Laplace

Lo primero para poder plantear la solución con Laplace es transformar los componentes. A los capacitores se los considera $\frac{1}{Cs}$, al inductor Ls y a la resistencia R. Teniendo en cuenta eso, se pueden obtener plantear dos nodos para resolver el circutito. El primero el del inductor y el segundo el del segundo capacitor. Adicionalmente, para facilitar el desarrollo se considera $C_2 = 2C_1 = 2C$

$$V_i sC = V_p(sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}) - V_q\frac{1}{R} \tag{43}$$

$$0 = -V_p\frac{1}{R} + V_q(\frac{1}{R} + s2C) \tag{44}$$

Si de 3.2 se despeja V_p se puede reemplazar en 3.2 para poder despejar la transferiencia $\frac{V_q}{V_i} = \frac{V_o}{V_i} = H(s)$.

$$V_i sC = V_q(1 + 2CRs)(sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}) - V_q\frac{1}{R} \tag{45}$$

$$\frac{V_i}{V_o} = 3 + \frac{1}{s^2CL} + 2CRs + \frac{2R}{sL} \tag{46}$$

$$\frac{V_q}{V_i} = \frac{s^2L^2C}{2C^2RL^2s^3 + 3L^2Cs^2 + 2RCLs + L} \tag{47}$$

$$H(s) = \frac{5s^2}{s^3 + 15s^2 + 36{,}36e6s + 181{,}82e6} \tag{48}$$

Tal como se esperaba se llega a la misma expresión obtenida mediante el desarrollo con espacio de estados.

3.3. Respuesta al escalón

Para obtener la respuesta al escalón se puede usar la transferencia obtenida. Se sabe que $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ y si se multiplican la transferencia y la transformada del escalón, antitransformando se obtiene la respuesta al escalón. Siguiendo ese procedimiento se debe calcular:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s}{s^3 + 15s^2 + 36{,}36e6s + 181{,}81e6}\right] \tag{49}$$

Si se escribe el polinomio del denominador como multiplicación de sus raices, se pueden plantear residuos para resolverlo.

$$\frac{5s}{(s+5)(s+5-6030j)(s+5+6030j)} = \frac{k_1}{s+5} + \frac{k_2}{s+5-6030j} + \frac{k_3}{s+5-6030j} \tag{50}$$

Sabiendo que los residuos de raices complejas conjugadas son complejos conjugados, solo es necesario desarrollar k_1 y k_2.

$$k_1 = \lim_{s\to-5} \frac{5s(s+5)}{(s+5)(s+5-6030j)(s+5+6030j)} = -6{,}87e-7 \tag{51}$$

$$k_2 = \lim_{s\to-5+6030j} \frac{5s(s+5-6030j)}{(s+5)(s+5-6030j)(s+5+6030j)} = 3{,}44e-7-4{,}15e-4j \tag{52}$$

$$k_3 = k_2^* = 3{,}44e-7+4{,}15e-4j \tag{53}$$

Ahora, sabiendo que $\mathcal{L}^{-1}[\frac{k}{s+a}] = ke^{-at}$ se puede obtener la respuesta al escalón.

$$y(t) = 6{,}87e-7e^{-5t}+(3{,}44e-7-4{,}15e-4j)e^{-5t}e^{-6030jt}+(3{,}44e-7+4{,}15e-4j)e^{-5t}e^{6030jt} \tag{54}$$

Distribuyendo y aplicando Euler se llega a:

$$y(t) = e^{-5t}[-6{,}87e-7+6{,}87e-7cos(6030t)-8{,}3e-4sen(6030t)] \tag{55}$$

3.4. Respuesta a condiciones iniciales

La respuesta a condiciones iniciales se puede hallar encontrando la exponencial matricial.

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{11s^3+165s^2+400e6s+2e9}\begin{pmatrix} 11s^2+55s & -110s & 1{,}1e6s+5{,}5e6 \\ -55s & 11s^2+110s-400e6 & -5{,}5e6 \\ 4000s+20e3 & -40e3 & 11s^2+165s \end{pmatrix}\right]$$

Para calcular esta antitrasformada primero se antitransforma el denominador y luego se opera sabiendo que multiplicar por s en frecuencia es lo mismo que derivar en tiempo. Se utiliza el mismo procedimiento que en 3.3 para obtener la antitransformada del denominador.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{11s^3+165s^2+400e6s+2e9}\right] = 2{,}74e-8e^{-5t}(1-cos(6030t)) \tag{56}$$

Teniendo la antitransformada, lo unico que hay que hacer es derivar y multiplicar por las constantes correspondientes.

$$\begin{aligned} e^{At} = &\begin{pmatrix} 2{,}74\times10^{-8}e^{-5t}(-331650\sin(6030t)+400M\cos(6030t)) \\ -1{,}51\times10^{-5}e^{-5t}(1206\sin(6030t)+\cos(6030t)-1) \\ 2{,}74\times10^{-8}e^{-5t}(6{,}63\times10^9\sin(6030t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ + &\begin{pmatrix} -7{,}53\times10^{-10}e^{-5t}(1206\sin(6030t)+\cos(6030t)-1) \\ 2{,}74\times10^{-8}e^{-5t}(-29825\cos(6030t)+400M) \\ 150{,}7\times10^{-3}e^{-5t}(1-\cos(6030t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \\ + &\begin{pmatrix} 2{,}74\times10^{-8}e^{-5t}(241{,}2\times10^6\sin(6030t)-1{,}45\times10^{11}\cos(6030t)-120K) \\ 1{,}096\times10^{-3}e^{-5t}(1-\cos(6030t)) \\ 2{,}74\times10^{-8}e^{-5t}(331650\sin(6030t)+400M\cos(6030t)-550) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{57}$$

4. Problema 3: Motor de continua

El objetivo es obtener un modelo en espacio de estados del sistema de control de posición angular (ángulo θ) de la imagen Figura 2.

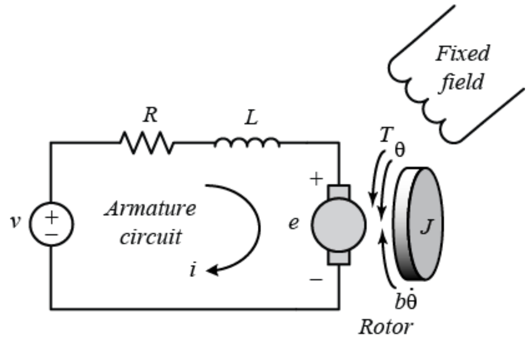


Figura 2: Esquema del Motor de C.C.

Los datos proporcionados son los volcados en la Tabla 1.

Símbolo	**Magnitud**	**Valor**
(J)	Momento de Inercia del Rotor	$3{,}2284 \cdot 10^{-6}$ kg $\cdot$ m^2
(b)	Fricción Viscosa	$3{,}5077 \cdot 10^{-6}$ N $\cdot$ m $\cdot$ s
(Kb)	Constante de la FCEM	$0{,}0274\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{rad/s}}$
(Kt)	Constante de Torque	$0{,}0274$ N $\cdot$ m/A
(R)	Resistencia del devanado	4 Ω
(L)	Inductancia del devanado	$2{,}75 \cdot 10^{-6}$ H

Tabla 1: Valores del Problema del Motor.

4.1. Descripción en espacio de estados

Este problema parte de dos ecuaciones para el motor: la mecánica y la eléctrica de la malla, que son respectivamente:

$$\tau - b \cdot \dot{\theta} = J \cdot \ddot{\theta} \tag{58}$$

$$v - R \cdot i - L \cdot \dot{i} - e = 0 \tag{59}$$

Además, la fuerza electromotriz del motor es proporcional a la velocidad angular, y el torque a su vez es proporcional a la corriente de la malla, por lo que se tiene:

$$\tau = K_t \cdot i \tag{60}$$

$$e = K_b \cdot \dot{\theta} \tag{61}$$

Introduciendo la Ecuación 61 en la Ecuación 58, y la Ecuación 60 en la Ecuación 59 y despejando se tiene

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{J}\dot{\theta} + \frac{K_t}{J}i \tag{62}$$
$$\dot{i} = -\frac{K_b}{L}\dot{\theta} - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v \tag{63}$$

Teniendo tres incógnitas $(\theta, \dot{\theta}, i)$ y teniendo en cuenta que lo que se quiere controlar es el ángulo θ y la entrada es la tensión v se pueden proponer que las variables de estado, señal de control y salida del sitema sean

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{pmatrix}$$
$$u = v$$
$$y = x_1 = \theta$$

Traduciendo las ecuaciones 62 y 63 a variables de estado se llega a:

$$\dot{x}_1 = \quad 0\cdot x_1 \quad +1\cdot \quad x_2+ \quad 0\cdot x_3 \quad +0\cdot \quad u \tag{64}$$
$$\dot{x}_2 = \quad 0\cdot x_1 \quad +\frac{-b}{J}\cdot \quad x_2+ \quad \frac{K_t}{J}\cdot x_3 \quad +0\cdot \quad u \tag{65}$$
$$\dot{x}_3 = \quad 0\cdot x_1 \quad +\frac{-K_b}{L}\cdot \quad x_2+ \quad \frac{-R}{L}\cdot x_3 \quad +\frac{1}{L}\cdot \quad u \tag{66}$$

Sabiendo que

$$\dot{x} = A\cdot x + B\cdot u$$
$$y = C\cdot x + D\cdot u$$

Resulta evidente entonces que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{K_b}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

4.2. Cálculo de transferencia

Se calculará la transferencia H(s) a partir de dos métodos distintos y luego se corroborará su equivalencia.

4.2.1. Desarrollo con Laplace

Se transforman con Laplace las ecuaciones 64, 65 y 66 y se obtiene:

$$sX_1(s) = X_2(s) \tag{67}$$

$$sX_2(s) = -\frac{b}{J} \cdot X_2(s) + \frac{K_t}{J} \cdot X_3(s) \tag{68}$$

$$sX_3(s) = -\frac{K_b}{L} \cdot X_2(s) - \frac{R}{L} \cdot X_3(s) + \frac{1}{L} \cdot U(s) \tag{69}$$

A partir de la Ecuación 71 se obtiene que

$$\frac{X_1}{U} = H(s) = \frac{{}^{K_t}\!/_{JL}}{s\left[s^2 + s\left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J}\right) + \frac{K_t K_b + bR}{JL}\right]}$$

4.2.2. Cálculo de transferencia a partir de la descripción en espacio de estados

Ahora la transferencia $\frac{Y(s)}{U(s)}$ se define como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Se tiene

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s + \frac{b}{J} & -\frac{K_t}{J} \\ 0 & \frac{K_b}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \tag{70}$$

Se trabaja sobre la matriz $(sI - A)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{|sI - A|} \cdot Adj(sI - A) \\ &= \frac{1}{s \cdot \left[\left(s + \frac{b}{J}\right)\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{K_t K_b}{JL}\right]} \cdot \begin{bmatrix} (s+\frac{b}{J})(s+\frac{R}{L}) + \frac{K_t K_b}{JL} & 0 & 0 \\ s + \frac{R}{L} & s(s+\frac{R}{L}) & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_t}{J} & \frac{sK_t}{J} & s(s+\frac{b}{J}) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Conociendo la naturaleza de la matriz C y de la matriz B solo nos interesa el tercer componente de la matriz inversa. Resolviendo se puede deducir que

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s\left[s^2 + s\left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L}\right) + \frac{bR + K_t K_b}{JL}\right]} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \frac{K_t}{J} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^1\!/_L \end{bmatrix}$$

Finalmente se llega a que

$$H(s) = \frac{K_t/JL}{s\left[s^2 + s\left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L}\right) + \frac{bR+K_tK_b}{JL}\right]} = \frac{3{,}086 \times 10^9}{s(s^2 + \frac{16}{11} \times 10^6 s + 86{,}143 \times 10^6)} \checkmark$$

Se concluye entonces que de ambos métodos se deduce mismo resultado. Armando el sistema en MATLAB con la funcion `ss(A, B, C, D)` se obtiene lo volcado en la Figura 3.

```
"La transferencia del sistema de motor de continua es"


H_motorcc =

           3.086e09
  -------------------------------
  s^3 + 1.455e06 s^2 + 8.614e07 s

Continuous-time transfer function.
```

Figura 3: Ganancia del sistema obtenido en MATLAB

4.3. Respuesta al escalón

Para obtener la respuesta analítica al escalón de este sistema se debe convolucionar en tiempo a la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema con la función escalón, o lo que es lo mismo, multiplicar en el espectro de frecuencia de Laplace a la transferencia $H(s)$ con la transformada del escalón, que resulta ser $\frac{1}{s}$. Llamaremos a esta nueva salida $Y_2(s)$, que se define como:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s) = \frac{K_t/JL}{s^2\left[s^2 + s\left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L}\right) + \frac{bR+K_tK_b}{JL}\right]}$$

$$Y_2(s) = \frac{3{,}086 \times 10^9}{s^2(s^2 + \frac{16}{11} \times 10^6 s + 86{,}143 \times 10^6)}$$

Los polos de esta función resultan:

$$p_i = \{0, 0, 59{,}23, 1{,}455 \cdot 10^6\}$$

Resolviendo por residuos se puede llegar a que

$$y_2(t) = \left[-0{,}605 + 35{,}827t - 1 \cdot 10^{-9} e^{-1{,}4545 \cdot 10^6 t} + 0{,}605 e^{-59{,}23t}\right] \cdot u(t)$$

La respuesta al escalón obtenida en MATLAB es la que se ve en la Figura 4. Y se la puede comparar a la obtenida de forma analítica en la Figura 5.

```
y2 =

35.83*t - 1.003e-9*exp(-1.454e+6*t) + 0.6049*exp(-59.23*t) - 0.6049
```

Figura 4: Respuesta al escalón calculada en MATLAB

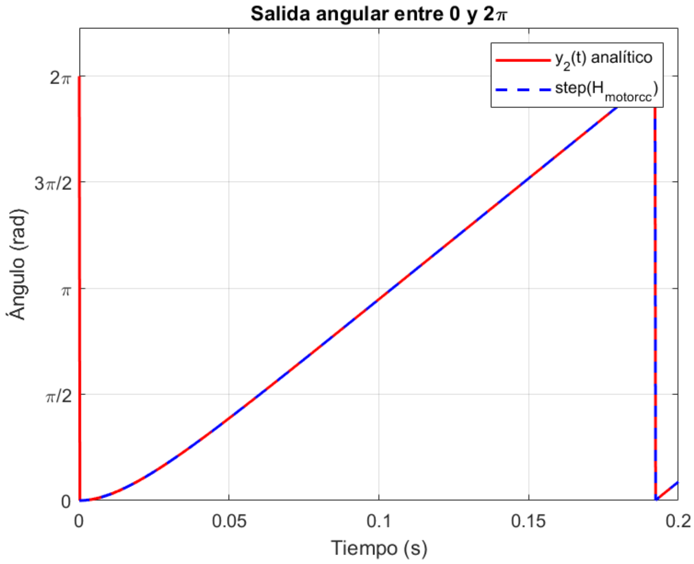


Figura 5: Comparación de la respuesta al escalón del sistema

4.4. Respuesta a condiciones iniciales

Se puede saber como evolucionará el sistema teniendo las condiciones inciales por medio de la exponencial matricial. Esto es

$$\underline{x} = e^{At}\,\underline{x}_0$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+\frac{16}{11}\times 10^6}{s(s^2+\frac{16}{11}\times 10^6 s+86{,}143\times 10^6)} & \frac{8487{,}18}{s(s^2+\frac{16}{11}\times 10^6 s+86{,}143\times 10^6)} \\ 0 & \frac{s(s+\frac{16}{11}\times 10^6)}{s(s^2+\frac{16}{11}\times 10^6 s+86{,}143\times 10^6)} & -\frac{8487{,}18s}{s(s^2+\frac{16}{11}\times 10^6 s+86{,}143\times 10^6)} \\ 0 & \frac{-9963{,}64s}{s(s^2+\frac{16}{11}\times 10^6 s+86{,}143\times 10^6)} & \frac{s(s+1{,}0865)}{s(s^2+\frac{16}{11}\times 10^6 s+86{,}143\times 10^6)} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0169 + 2{,}8\cdot 10^{-11}e^{-1{,}4545\cdot 10^6 t} - 0{,}0169e^{-59{,}23t} \\ -40{,}72\cdot 10^{-6}e^{-1{,}4545\cdot 10^6 t} + e^{-59{,}23t} \\ -6{,}85\cdot 10^{-3}(e^{-1{,}4545\cdot 10^6 t} + e^{-59{,}23t}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1{,}37\cdot 10^{-3} + 4{,}01\cdot 10^{-8}e^{-1{,}4545\cdot 10^6 t} - 1{,}37\cdot 10^{-3}e^{-59{,}23t} \\ 0{,}0584(e^{-1{,}4545\cdot 10^6 t} - e^{-59{,}23t}) \\ e^{-1{,}4545\cdot 10^6 t} - 4\cdot 10^{-5}e^{-59{,}23t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al simularlo en MATLAB, se obtiene lo mostrado en la Figura 6 y se corrobora que ambos resultados coinciden.

```
>> MotorCC
eAt:
Columna 1:
1.0
  0
  0

Columna 2:
2.75e-11*exp(-1.45e+6*t) - 0.0169*exp(-59.2*t) + 0.0169
              1.0*exp(-59.2*t) - 4.0e-5*exp(-1.45e+6*t)
         0.00685*exp(-1.45e+6*t) - 0.00685*exp(-59.2*t)

Columna 3:
4.01e-9*exp(-1.45e+6*t) - 9.85e-5*exp(-59.2*t) + 9.85e-5
          0.00584*exp(-59.2*t) - 0.00584*exp(-1.45e+6*t)
               1.0*exp(-1.45e+6*t) - 4.0e-5*exp(-59.2*t)
```

Figura 6: Exponencial matricial obtenida en MATLAB

5. Problema 4: Tanques de agua acoplados

Se desea un modelo en espacio de estados del sistema de control de nivel de los tanques representado esquemáticamente en la Figura 7.

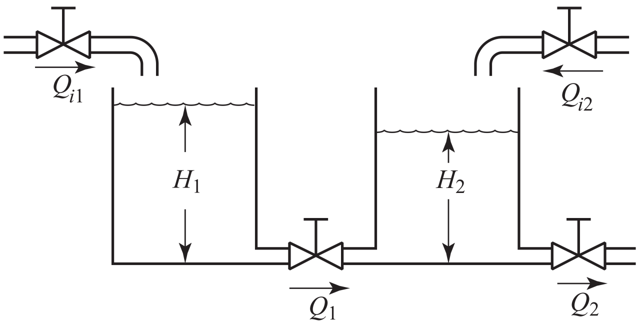


Figura 7: Esquemático del sistema de tanques acoplados

Para resolver el problema, se parte de las siguientes expresiones que describen físicamente al sistema:

Ecuaciones no lineales de la dinámica: $Q_1 = \alpha_1\sqrt{H_1 - H_2},\ Q_2 = \alpha_2\sqrt{H_2}$

Variación de volumen: $\dfrac{dV}{dt} = Q_i - Q_o \Rightarrow \dfrac{dV_1}{dt} = Q_{i1} - Q_1,\ \dfrac{dV_2}{dt} = Q_{i2} + Q_1 - Q_2$

Volumen del tanque: $V = \gamma H \Rightarrow V_1 = \gamma_1 H_1,\ V_2 = \gamma_1 H_2$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, = 1$.

5.1. Descripción en espacio de estados

Se deben definir las variables de estado. Se sabe que las entradas son Q_{i1}, Q_{i2}, y que se quiere controlar el nivel de los tanques, de esta manera se puede proponer que

$$x = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$$
$$u = \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \end{pmatrix}$$
$$y = H_2$$

Sabiendo que $V_1 = H_1, V_2 = H_2$ y reemplazando las ecuaciones no lineales de la dinámica en las de variación de volumen, se traducen las ecuaciones del sistema a variables de estado y se obtiene

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{x_1 - x_2} + u_1$$
$$\dot{x}_2 = -\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1 - x_2} + u_2$$

Resulta evidente que se debe linealizar. Se procede a ello en la Sección 6 (Anexo) y se obtienen los valores de equilibrio:

$$x_e = \begin{pmatrix} H_{1e} \\ H_{2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_e = \begin{pmatrix} Q_{i1e} \\ Q_{i2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego las matrices del sistema resultan:

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ejecuta el script en MATLAB y se obtienen las siguientes matrices:

```
Las matrices del sistema son
A_lin =

   -0.5000    0.5000
    0.5000   -1.0000


B_lin =

     1     0
     0     1


C_lin =

     0     1


D_lin =

     0     0
```

Figura 8: Matrices del sistema linealizado de tanques acoplados

5.2. Control Proporcional Integral

Primeramente, se controla la naturaleza de la transferencia del sistema para luego compararla con la del sistema realimentado. Se ejecuta un comando `step` en MATLAB y además se simula la ganancia en simulink. Resulta entonces las respuestas al escalón provistas en la Figura 9.

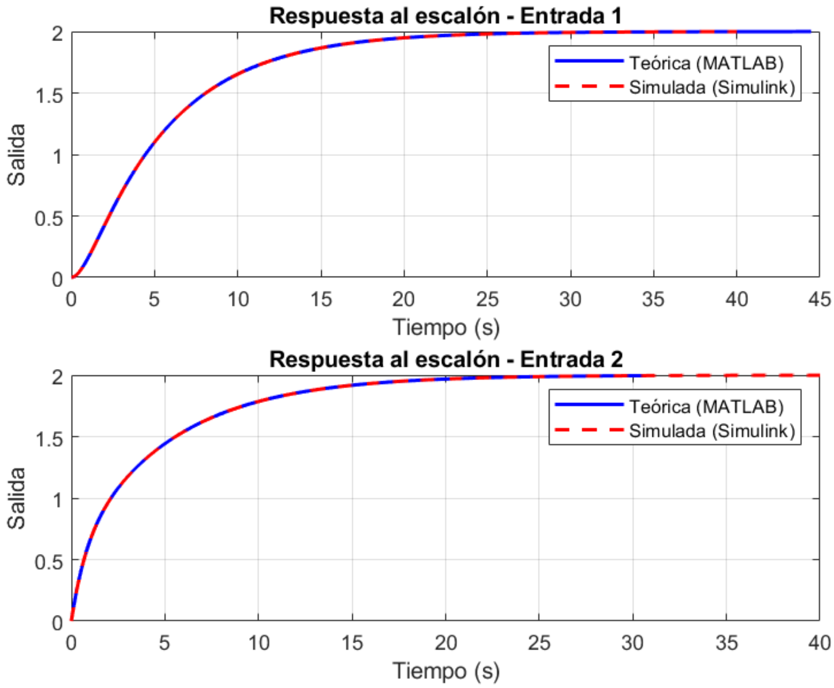


Figura 9: Comparación de la respuesta al escalón a las entradas Q_{i1}, Q_{i2} del sistema de tanques acoplados.

Efectivamente, el valor de la salida, es decir, el nivel del segundo tanque, se estabiliza en 2 m.

Se procede a conectar en simulink al sistema un control PI tal como el de la Figura 10.

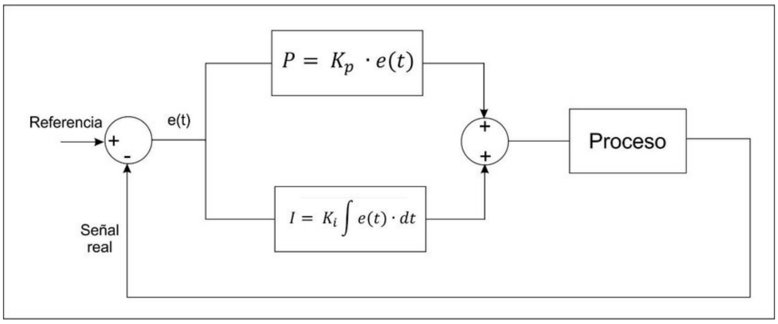


Figura 10: Esquema en bloques de un sistema de control proporcional integral.

La referencia es $r(t) = 1{,}1 Q_2^e = 1{,}1\sqrt{H_{2e}} = 1{,}1$ y la perturbación es $p(t) = Q_{i2} + 0{,}2 Q_{i1e}$ y actúa en un tiempo $t_0 = 60\,\text{s}$. Se conecta en simulink el sistema según se muestra en la Figura 11. Nótese que la llave sirve para introducir una perturbación a la entrada $u_2(t)$, cuya altura de escalón es nula.

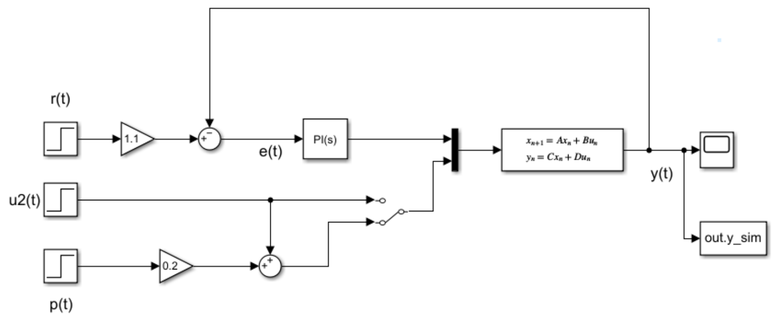
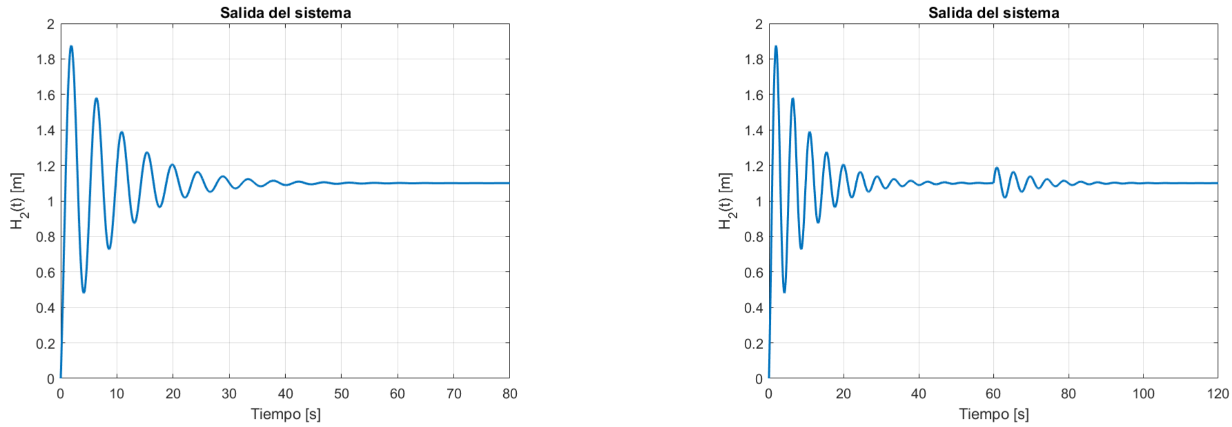


Figura 11: Esquemático simulink del sistema de tanques acoplados con controlador PI

Los resultados se muestran en la Figura 12. Se observa que el sistema realimentado oscila antes de estabilizarse en el valor de equilibrio de 1.1m, y la perturbación también hace que oscile, pero, lógicamente, con una amplitud mucho menor.



(a) Sistema realimentado sin perturbar

(b) Sistema realimentado con perturbación

Figura 12: Salida del sistema realimentado con un controlador PI.

6. Anexo

Trabajando sobre las ecuaciones 67, 68, 69 se obtiene

$$X_3 = \left(-\frac{K_b}{L}X_2 + \frac{1}{L}U\right)\cdot\frac{1}{s+R/L}$$

$$X_2\left[s + \frac{b}{J} + \frac{K_t}{J}\left(\frac{K_b/L}{s+R/L}\right)\right] = \frac{K_t}{JL(s+R/L)}\cdot U \Rightarrow \frac{X_2}{U} = \frac{K_t}{JL\left[\left(s+\frac{b}{J}\right)\left(s+\frac{R}{L}\right)+\frac{K_tK_b}{JL}\right]}$$

$$sX_1 = X_2 \Rightarrow \quad \frac{X_1}{U} = \frac{K_t/JL}{s\left[s^2 + s\left(\frac{R}{L}+\frac{b}{J}\right)+\frac{K_tK_b+bR}{JL}\right]} \tag{71}$$

6.1. Linealización problema tanques acoplados

Se linealizará alrededor del punto de equilibrio:

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{pmatrix}, u_e = \begin{pmatrix} u_{1e} \\ u_{2e} \end{pmatrix}$$

Además, se tiene de dato que $Q_2 = \sqrt{x_{2e}} = 1\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} \Rightarrow x_{2e} = 1 \Rightarrow \dot{x}_{2e} = 0,\ Q_{i2} = u_{2e} = 0\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Resulta entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 1 - \sqrt{x_{1e} - 1} - 0 \Rightarrow x_{1e} = 2 \\ 0 &= \dot{x}_{1e} + \sqrt{x_{1e} - 1} - u_{1e} \Rightarrow u_{1e} = 1 \end{aligned}$$

$$x_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para calcular las matrices del sistema se deben calcular las derivadas parciales:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d\dot{x}_1}{dx_1}\Big|_{x_e} & \frac{d\dot{x}_1}{dx_2}\Big|_{x_e} \\ \frac{d\dot{x}_2}{dx_1}\Big|_{x_e} & \frac{d\dot{x}_2}{dx_2}\Big|_{x_e} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{d\dot{x}_1}{du_1}\Big|_{u_e} & \frac{d\dot{x}_1}{du_2}\Big|_{u_e} \\ \frac{d\dot{x}_2}{du_1}\Big|_{u_e} & \frac{d\dot{x}_2}{du_2}\Big|_{u_e} \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx_1}\Big|_{x_e} & \frac{dy}{dx_2}\Big|_{x_e} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} \frac{dy}{du_1}\Big|_{u_e} & \frac{dy}{du_2}\Big|_{u_e} \end{pmatrix}$$

De allí se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}}\Big|_{x_e} & \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}}\Big|_{x_e} \\ \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}}\Big|_{x_e} & -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}}\Big|_{x_e} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1|_{u_e} & 0|_{u_e} \\ 0|_{u_e} & 1|_{u_e} \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1|_{x_e} & 0|_{x_e} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0|_{u_e} & 0|_{u_e} \end{pmatrix}$$

Finalmente resulta

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$