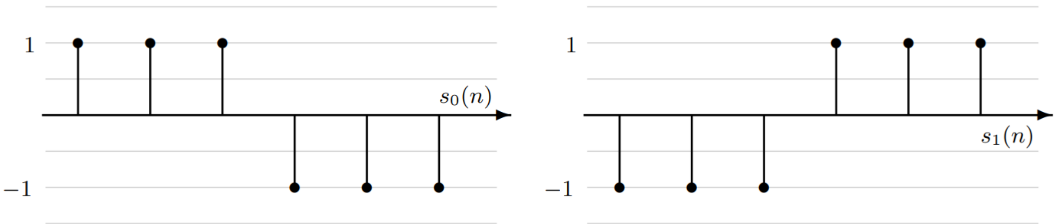
Ejercicio 1

A través de un canal de comunicación digital se envían de manera aleatoria dos señales de longitud $N = 6$, $s_0(n)$ y $s_1(n)$ graficadas a continuación. La señal recibida a la salida del canal es $X(n) = s_i(n) + W(n)$, donde $W(n)$ es una señal de ruido blanco Gaussiano y $s_i(n)$ puede ser $s_0(n)$ o $s_1(n)$ de acuerdo a la señal que haya sido enviada.



1. Calcule los filtros que permiten detectar cuándo $s_0(n)$ o $s_1(n)$ han sido transmitidas.
2. Calcule las autocorrelaciones de las señales. Dibújelas en sendos gráficos y compárelas con la salida de los filtros.

$H_0: X(n) = W(n)$

$H_1: X(n) = S_i(n) + W(n)$

$W(n)$ es blanco Gauss.

$S_i(n)$ es Alguno de los Graphs

$f(X, H_0) = N(0, \sigma^2 I_6)$

$f(X, H_1) = N(\mu_i, \sigma^2 I_6)$

$\mu_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

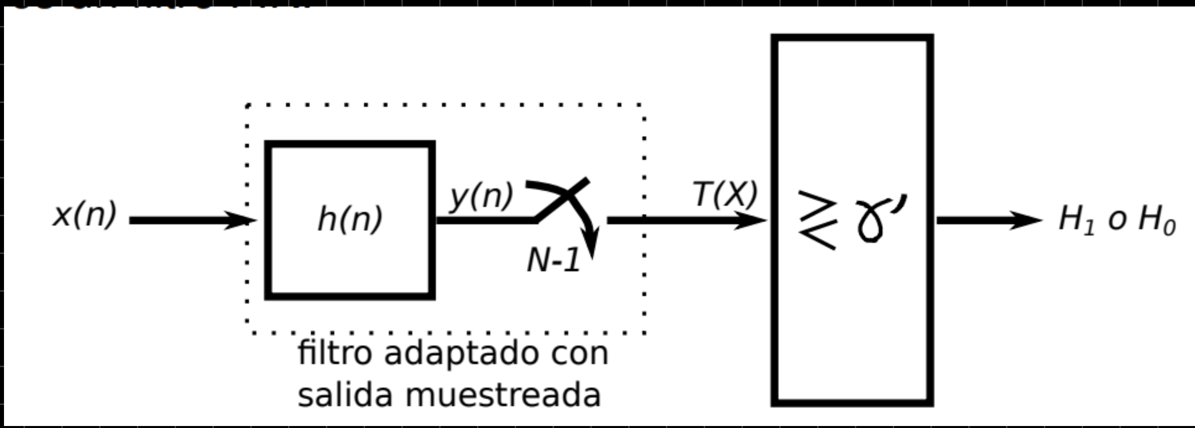
$$L(X) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^T \sigma^2 I_6 (X-\mu_i)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} X^T \sigma^2 I_6 X\right)}$$

$$L(X) = \exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu_i)\right.$$

$$\mu_i^T X \geq \underbrace{\sigma^2 \ln(\gamma) - \frac{1}{2}\|S\|^2}_{\gamma'}$$

$$h(n) = s(5-n)$$

$$T(x) = h(n) * x(n)\Big|_{n=5}$$

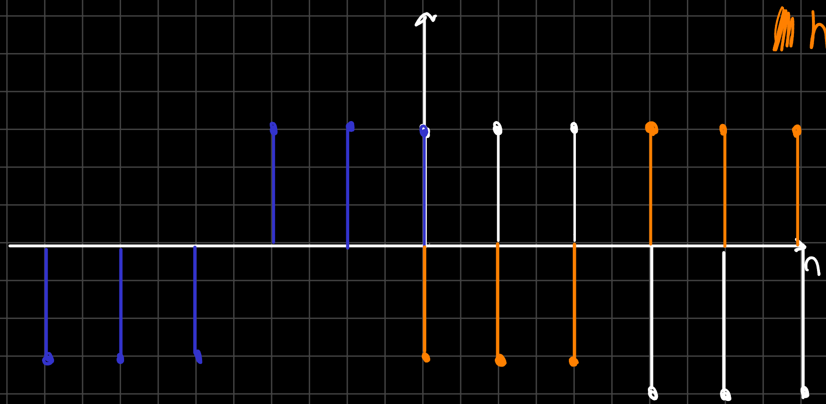


filtro adaptado

$S_0 = -S_1$

$S_0(5-n)$

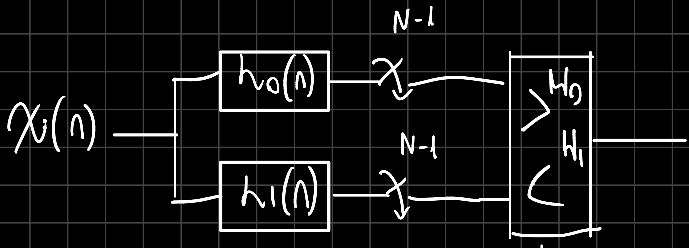
$h_0(n) = -h_1(n)$



$$\bar{s}_0 = \begin{bmatrix} s_0(0) \\ s_0(1) \\ s_0(2) \\ s_0(3) \\ s_0(4) \\ s_0(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad h_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$H_0 = \vec{x} = \vec{s}_0 + \vec{w}$

$H_1 = \vec{x} = \vec{s}_1 + \vec{w}$



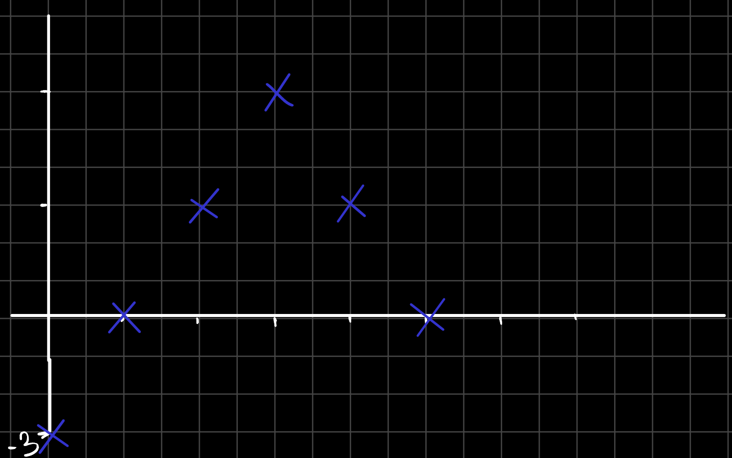
Como lo que sale del filtro es la proyeccion, el que sea más grande va a ser más similiar a la señal deseada

Me quedo con el más Grande

2)

$X(n)$ $\qquad R_x(k) = \mathbb{E}[X(n)X(n+k)]$

$$\simeq \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,x(n+k)}_{\text{Autocorrelación determinística}}$$



Si H_0: C_w

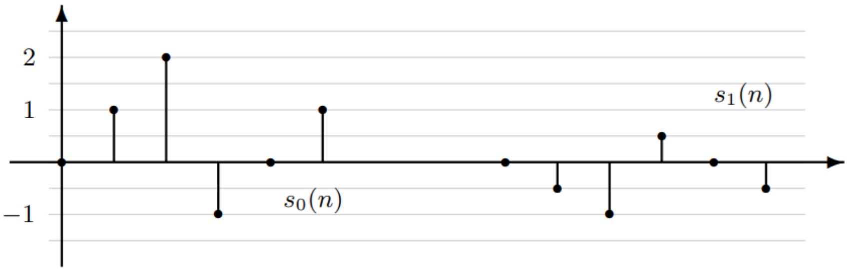
$$T(\vec{x}) = \vec{x}^{\,t} C_w \vec{s}$$

$$= \underbrace{\vec{x}^{\,t} P}_{x'} \Lambda^{-1} \underbrace{P^t \vec{s}}_{s'}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x'_i\, s'_i}{\lambda_i}$$

Ejercicio 2

Repetir el ejercicio anterior para s_0 y s_1 como en la figura siguiente

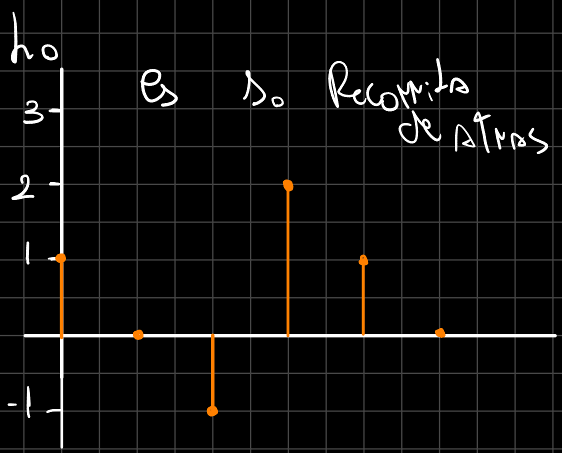


$$H_0 : \vec{X} = \vec{W} + \vec{s}_0$$

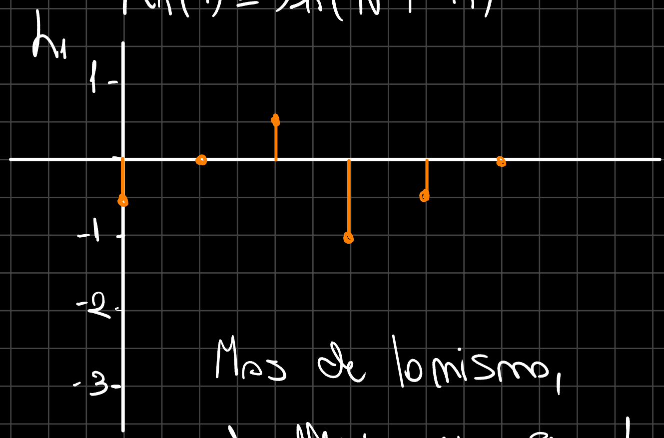
$$H_1 : \vec{X} = \vec{W} + \vec{s}_1$$

Los filtros tienen la forma

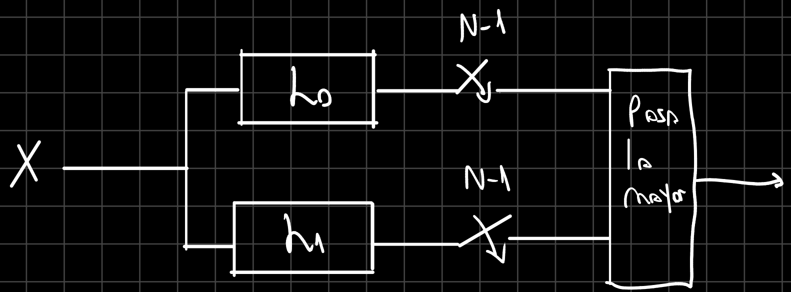
$$h_n(n) = s_n(N-1-n)$$



es s_0 Recorrida de atras palante.



Mas de lo mismo, de hecho una es $-\frac{1}{2}$ veces la otra



Ahora la Autocorrelación deterministica

$$R_s(k) = E[s(n)s(n+k)]$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum s(n)s(n+k)$$

es hacer la Σ para cada señal, hará falta? Es una pasa

Ejercicio 3

El objetivo de este problema es analizar cómo actúa un filtro adaptado en un ruido de tipo AR1. La señal determinística a detectar es:

$$x(n) = 1, \quad 1 \leq n \leq N.$$

1. Genere una secuencia de ruido AR1 $V(n)$ de parámetro a, potencia σ_V^2 y duración $M \gg N$. La señal superpuesta al ruido se aplica a la entrada de un filtro adaptado cuya función es maximizar la relación: potencia de pico de señal a la salida/potencia de ruido a la salida. Diseñe el filtro adaptado para distintos valores del parámetro a y de la potencia de ruido σ_V^2.

2. Para las distintas combinaciones de los parámetros a y σ_V^2 represente la señal, el ruido y la señal superpuesta al ruido en la entrada. En otro gráfico represente la salida del filtro. Interprete los resultados.

$$V(n) = aV(n-1) + W(n)$$

$$V(0) = W(0) \qquad V(1) = aW(0) + W(1)$$

$$V(2) = a^2 W(0) + aW(1) + W(2)$$

$$\mathrm{Var}[V(n)] = \mathrm{Var}[W(n) + aV(n-1)]$$

$$= \sigma_W^2(n) + a^2\sigma_V^2 = \sigma_V^2$$

$$\sigma_V^2 = \frac{\sigma_W^2}{1-a^2}$$

$$V(n) = \sum_{i=0}^{n} a^i \, W(n-i)$$

$$E[V(n)] = E\left[\sum_{i=0}^{n} a^i W(n-i)\right] = \sum_{i=0}^{n} a^i \underbrace{E[W(n-i)]}_{0} = 0$$

$$R_V(k) = \mathbb{E}[V(n)V(n+k)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n} a^i W(n-i) \sum_{j=0}^{n+k} a^j W(n+k-j)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+k} a^i a^j \underbrace{\mathbb{E}[W(n-i)W(n+k-j)]}_{R_W(k-j+i) \Rightarrow \neq 0 \text{ para } j=k+i} = \sum_{i=0}^{n} a^i a^{k+i} \sigma_W^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a^{2i} a^k \sigma_W^2 = a^k \sigma_W^2 \sum_{i=0}^{n} (a^2)^i \qquad m = a^2 \quad \sum_{i=0}^{n} m^i$$

$X = 1 + m + m^2 + m^3 + \dots \Rightarrow mX = m + m^2 + m^3 + \dots = X - 1$

$mX = X - 1 \Rightarrow \quad 1 = X(1-m)$

$X = \frac{1}{1-m} \qquad X = \frac{1}{1-a^2}$

$$R_v(k) = \underbrace{\sigma^2_w \frac{a^k}{1-a^2}}_{\sigma^2_v} = \sigma^2_v a^k$$

GRACIAS DANI ♡

Sea $\mathbb{V} = \begin{bmatrix} V(0) \\ \vdots \\ V(M) \end{bmatrix}$ $\quad C_V = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathbb{V}^T] = \sigma^2_v \begin{bmatrix} R_v(0) & R_v(1) & \dots & R_v(M-1) \\ R_v(1) & R_v(0) & & \vdots \\ \vdots & & R_v(0) & \\ R_v(M-1) & \dots & & R_v(0) \end{bmatrix}$

Como $\sigma_w^2 = 1$

$$C_V = \sigma^2_v \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{M-1} \\ a & 1 & & & \vdots \\ a^2 & & 1 & & a^2 \\ \vdots & & & \ddots & a \\ a^{M-1} & \dots & & a^2\, a & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora con esto solo queda diagonalizar C_V y buscar el γ'

Como $\mathbb{V} \sim N(0, C_V) \Rightarrow \quad \begin{aligned} H_0 &: \mathbb{X} \sim N(0, C_w) \\ H_1 &: \mathbb{X} \sim N(s, C_w) \end{aligned}$

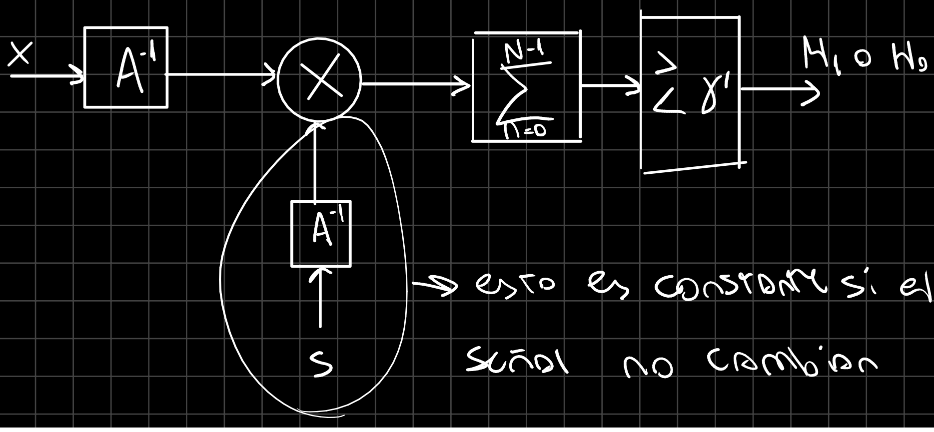
La Región de decisión Resulta

$$R_1 = \{ \mathbb{X} \in \mathbb{R}^N : T(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^T C_V^{-1} s \geq \gamma' \}$$

Con $\gamma' = \ln(\gamma) + \frac{1}{2} s^T C_v^{-1} s$

Y luego, escribiendo $C_v = P \Delta P^T$ con P ortonormal

y $A = P\sqrt{\Delta}$



→ esto es constante si el ruido y la señal no cambian

Ejercicio 4

En el mismo sistema del ejercicio anterior, se decide utilizar la siguiente señal determinística. La misma se denomina código de Barker, también conocida como la palabra perfecta.

$$x(n) = \{\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\ \}$$

1. Repita el ejercicio anterior con esta nueva señal.
2. En qué se diferencia la salida del filtro utilizando el código de Barker y la señal utilizada en el ejercico anterior. ¿Tiene alguna ventaja?

Será para programar después

Ejercicio 5

A partir del instante n_0 se recibe la señal:

$$X(n) = A\,s(n) + W(n), \quad n = n_0, n_0+1, \ldots$$

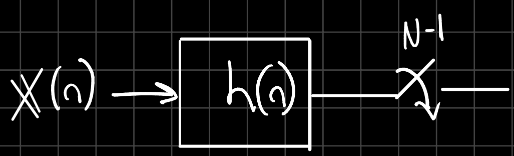
donde $s(n)$ es una señal determinística de largo L, A es una variable aleatoria Gaussiana de media μ_A y varianza σ_A^2, y $W(n)$ es ruido blanco de media nula y varianza unitaria. La señal $X(n)$ es filtrada a través del filtro adaptado a la señal $s(n)$. Sea Y_L el valor de la salida del filtro adaptado en el instante $n = n_0 + L - 1$.

1. Calcule el valor de Y_L.
2. Calcule la media y la varianza de Y_L.
3. ¿Es posible utilizar Y_L para estimar la variable aleatoria A? En caso afirmativo, explique el procedimiento.
4. Elija valores numéricos apropiados para n_0, $s(n)$, L, μ_A, σ_A^2 y constate numéricamente sus resultados.

el Filtro está hecho para

$H_0: X = W(n)$ o $H_0: X = W(n)$?
$H_1: X = s(n) + W(n)$ $H_1: X = A\,s(n) + W(n)$

De todas formas, El filtro adaptado es



Con $h(n) = s(L-1-n)$

entonces lo que me interesa es

$$h(n_0+L-1) * X(n_0+L-1)$$

o lo que es lo mismo, $s(L-1-n_0-L+1) * X(n_0+L-1)$

$$s(-n_0) * X(n_0+L-1) = \sum_{l=n_0}^{n_0+L-1}$$ No se hacer una convolución