Balance de potencia

Walter Gustavo Fano

Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires

gustavo.fano@ieee.org

April 10, 2025

Índice de la Presentación

- Energía eléctrica y magnética
- Balance de potencia
- Potencia, densidad de potencia radiada y disipada
- Vector de Poynting

Balance de energía

Considere un un medio material con propiedades conocidas (ϵ y μ) donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$, la densidad de energía eléctrica por unidad de volúmen como se ha visto en cursos de Física es:

$$\delta w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \ (J/m) \tag{1}$$

La energía en el volumen V es:

$$w_e = \frac{1}{2}\int_v \epsilon E^2 dv \ (J) \tag{2}$$

Analogamente si existe un campo magnético $\vec{H}$ la energía magnética en dicho volumen es:

$$w_m = \frac{1}{2}\int_v \mu H^2 dv \ (J) \tag{3}$$

de modo que la energía electromagnética total es:

$$w = \frac{1}{2}\int_v (\epsilon E^2 + \mu H^2) dv \ (J) \tag{4}$$

Balance de energía

la energía total w disminuirá con el tiempo, ya que parte se va a disipar con el tiempo, por lo tanto:

$$-\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}\int_v (-\epsilon\frac{\partial E^2}{\partial t} - \mu\frac{\partial H^2}{\partial t})dv \ (W) \tag{5}$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 2\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6}$$

analogamente:

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} = 2\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{7}$$

Por lo tanto la disminución de la energía se calcula como:

$$-\frac{dw}{dt} = \int_v \left(-\epsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) dv \ (W) \tag{8}$$

Balance de energía

Las derivadas de los campos se pueden obtener de las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \nabla\times\vec{H}-\sigma\vec{E} \\ \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} &= -\nabla\times\vec{E} \end{aligned} \tag{9}$$

Por lo tanto:

$$\left(-\epsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=\left(-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}-\sigma\vec{E})-\vec{H}\cdot(-\nabla\times\vec{E})\right) \tag{10}$$

operando:

$$\left(-\epsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=\sigma E^2-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) \tag{11}$$

la variación de energía respecto al tiempo es:

$$-\frac{dw}{dt}=\int_v\left(\sigma E^2-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})\right)dv \tag{12}$$

Balance de energía

$$-\frac{dw}{dt} = \int_v \sigma E^2 dv + \int_v (\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}))dv \tag{13}$$

Considerando:

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \tag{14}$$

Se obtiene:

$$-\frac{dw}{dt} = \int_v \sigma E^2 dv + \int_v \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv \tag{15}$$

Balance de energía

$$-\frac{dw}{dt} = \int_v \sigma E^2 dv + \int_v \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv \qquad (16)$$

El primer término de la ec. (16) significa la potencia disipada por efecto Joule

$$W_d = \int_v \sigma E^2 dv \ (W) \qquad (17)$$

En el segundo término de la ec. (16) se aplica el T. de Stokes, a la superficie S que contiene el volumen V:

$$W_T = \int_v \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv = \int_s \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{ds} \ (W) \qquad (18)$$

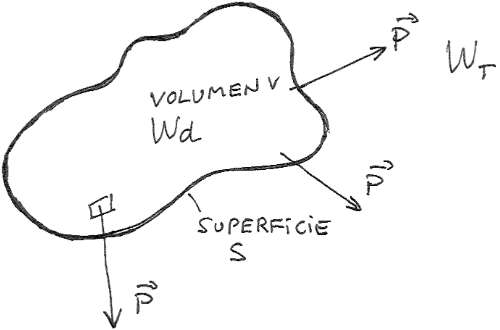
Que representa la potencia total radiada, donde:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \ (W/m^2) \qquad (19)$$

$\vec{P}$ es el vector de Poynting

Balance de energía

El vector de Poynting representa la densidad superficial de potencia en función del tiempo, es una densidad superficial de potencia instantánea.



Wd : POTENCIA DISIPADA
W_T : POTENCIA RADIADA
$\vec{P}$: VECTOR DE POYNTING

Balance de energía. Resumen

La potencia disipada por efecto Joule

$$\boxed{W_d = \int_v \sigma E^2 dv \ (W)} \tag{20}$$

La potencia total radiada:

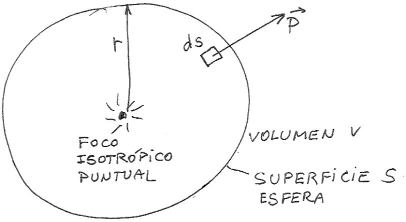
$$\boxed{W_T = \int_s \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{ds} \ (W)} \tag{21}$$

El vector de Poynting o vector de la densidad de potencia:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \ (W/m^2)} \tag{22}$$

Densidad de potencia

Considere que existe un foco puntual que irradia energía en forma isotrópica en todas las direcciones, dicho foco está en el centro de una superficie esférica S, que posee un radio r.



considerando que para distancias r grandes respecto a la longitud de onda de la onda radiada, la superficie de la esfera se va a aproximar a un plano cuando $r/\lambda >> 1$. Esta condición se conoce con el nombre de campo lejano y despues se va a profundizar.

Densidad de potencia

Se vió que la potencia total radiada es:

$$W_T = \int_s \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{ds} \; (W) \tag{23}$$

Como $\vec{P}$ tiene la misma dirección que $\vec{ds}$, y P es constante e isotrópica:

$$W_T = \int_s \vec{P} \cdot \vec{ds} = P \int_s ds = P \cdot S \tag{24}$$

Como la superficie S de la esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$, entonces:

$$P = \frac{W_T}{Sup} = \frac{W_T}{4\pi r^2} \; (W/m^2) \tag{25}$$

Bibliografía

- Valentino Trainotti, Walter Gustavo Fano: *Ingeniería electromagnética*, Tomo I., Editorial Nueva Libreria, Argentina, 2005.
- D.K.Cheng: *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Addison Wesley, Mexico, 1998.
- J.R. Reitz y F.J.Milford. Fundamentos de la Teoría Electromagnética. 4ta Edición. Addison Wesley.