1 Distribución Normal Multivariante

Si $Z_1, Z_2, ...Z_n$ son variables independientes con distribución $N(0,1)$, su función densidad conjunta puede escribirse como

$$f_{\mathbf{Z}}(z_1, z_2....z_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{z}\right]$$

Se dice que $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad y corresponde a la matriz de varianzas (y covarianzas) del vector $\mathbf{Z}$. Esto da pie para definir un vector aleatorio Normal multivariado del siguiente modo.

Definition 1 *Se dice que el vector aleatorio* $\mathbf{X}$ *tiene distribución normal multivariada si la densidad conjunta es de la forma*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2....x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\Sigma\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ *es el vector de medias de* $\mathbf{X}$ *y la matriz* Σ *da varianzas y covarianzas de* $\mathbf{X}$ *(*$Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$*). En este caso notaremos* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Proposition 2 *Si existe una matriz* H *inversible tal que* $\mathbf{X} = H\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$ *con* $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$*, entonces* $\mathbf{X}$ *tiene distribución normal multivariada con* $\Sigma = HH'$ *y vector de medias* $\boldsymbol{\mu}$.

2 Distribución Normal bivariada

Para el caso $n = 2$ la función densidad conjunta de $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ corresponde a

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)\left|\Sigma\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Para dar una expresión en coordenadas de la densidad, notar que a partir de la definición, $Var(X_1) = \sigma_1^2 = \sigma_{11}, Var(X_2) = \sigma_2^2 = \sigma_{22}, Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}$ y de aquí, se tiene $\rho = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$.

Entonces

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$

con lo que se tiene la siguiente expresión de la densidad conjunta:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\Delta\right]$$

con

$$\Delta = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

Example 3 *Consideremos* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ *con* $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ *y* $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$.

La expresión de la densidad conjunta es ($\rho = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{12\pi\sqrt{1-\frac{1}{3}}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\frac{1}{3})}\left[\left(\frac{x_1-5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{x_1-5}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x_2-7}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x_2-7}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right] = \\ &= \frac{1}{24\pi}\sqrt{6}\exp\left[-\frac{3}{4}\left[\left(\frac{x_1-5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{x_1-5}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x_2-7}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x_2-7}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right] \end{aligned}$$

Veamos ahora algunas propiedades:

Proposition 4 *La densidad es simétrica alrededor de* $\boldsymbol{\mu}$. *Esto es,* $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\mu}+\mathbf{a}) = f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\mu}-\mathbf{a})$

Proposition 5 *La densidad tiene un único máximo en* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$

Proposition 6 *Si* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ *entonces cada componente* X_i *se distribuye Normal univariada con media* μ_i *y varianza* $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$ *(de ahí la conveniencia de esta notación).*

Para demostrarlo reescribimos la forma cuadrática Δ :

$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] =$

1. $= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right] =$

$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right] =$

$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right]$

La densidad marginal de X_2 resulta:

$f_{X_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2)dx_1 =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right]\right] dx_1 =$

$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right]\right] dx_1 =$

$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right]\right] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right] dx_1 = (*)$

Observar que puede escribirse:

$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left(x_1 - \mu_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right)^2$

Esto correspondería a tener una variable Normal con $media = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$ y varianza igual a $(1-\rho^2)\sigma_1^2$, para la que se sabe que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left(x_1 - \mu_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right)^2\right] dx_1 = 1$$

Entonces, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right] dx_1 = \sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{(1-\rho^2)}$

Retomando $(*)$:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right]\right] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right] dx_1$$

con lo que se encuentra la expresión de la densidad marginal de X_2 buscada.

Proposition 7 *Si* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$: X_1 *y* X_2 *variables independientes* $\Leftrightarrow \rho = 0$

Para variables cualesquiera se tiene la implicación $\Rightarrow$, la recíproca ($\rho = 0 \Rightarrow$ *independencia*) **no** vale en general, sí en el caso de normal multivariada.

Para demostrarlo reemplazamos en la forma cuadrática

$f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right] =$

$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] = f_1(x_1)f_2(x_2)$

lo que prueba la independencia.

Proposition 8 *Si* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, *entonces la variable* $W = aX_1 + bX_2 \sim \mathbf{N}(\mu_w = a\mu_1 + b\mu_2, \sigma_w^2 = a\sigma_1^2 + b\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12})$