Ecuación de Friis. Ejemplos

Walter Gustavo Fano

Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires

gustavo.fano@ieee.org

April 28, 2017

Índice de la Presentación

- Introducción
- Onda Plana
- Potencia y Campo radiado
- Ecuación de Friis, Atenuación
- Ejemplos

Considerando una zona libre de fuentes, y que la onda electromagnética se propaga en el vacio se tiene:

- $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$
- $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H/m$
- $\rho = 0$
- $J_c = 0$

Reescribiendo las ecs. de Maxwell en el vacío en una zona libre de corrientes y cargas:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = 0 \tag{4}$$

A partir de las ecuaciones anteriores y considerando los campos que varían en forma armónica se obtiene la ecuación de onda reducida o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \overrightarrow{E} - \gamma^2 \overrightarrow{E} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{H} - \gamma^2 \overrightarrow{H} = 0 \tag{6}$$

donde γ es la constante de propagación, que se puede obtener como:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \tag{7}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{8}$$

Para el caso del vacio $\sigma = 0$ y $\alpha = 0$:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \tag{9}$$

Onda Plana

Resolviendo la ec. de Helmholtz, se obtiene la solución de onda plana. Por ejemplo una onda electromagnética plana monocromática, que está polarizada en la dirección "x", y que se propaga en una dirección "z":

$$\overrightarrow{E} = \widehat{x} E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{10}$$

$$\overrightarrow{H} = \widehat{y} H_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{11}$$

donde: $H[A/m]$: es el campo magnético. $E[V/m]$: es el campo eléctrico. $\omega[1/s]$: es la pulsación angular. $\beta[rad/s]$: es la constante de propagación. $t[s]$: es el tiempo.

Se define la impedancia de la onda electromagnética de la onda plana definida antes como:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{12}$$

Para propagación en el Vacio:

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega \simeq 377\Omega \tag{13}$$

La densidad de flujo de Potencia de la onda electromagnética se puede calcular como el módulo del vector de Poynting instantáneo $\overrightarrow{P}$ siguiente:

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H} \tag{14}$$

Habitualmente conviene calcular el valor promedio temporal del vector de Poynting como:

$$< \overrightarrow{P} >= \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H^*}) \tag{15}$$

Reemplazando el campo E y H de las ecuaciones (10) y (11) el módulo del vector de Poynting se obtiene como:

$$< \overrightarrow{P} >= \frac{1}{2}\Re(\widehat{x} E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \times \widehat{y} H_0^* e^{j(\omega t - \beta z)^*}) \tag{16}$$

El vector de Poynting promedio:

$$<\overrightarrow{P}>=\frac{1}{2}\Re\begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ E_0 e^{j(\omega t-\beta z)} & 0 & 0 \\ 0 & H_0^* e^{j(\omega t-\beta z)^*} & 0 \end{vmatrix}=0 \quad (17)$$

$$<\overrightarrow{P}>=\frac{1}{2}\Re(\widehat{z}E_0 H_0^*) \quad (18)$$

Considerando:

$$H_0=\frac{E_0}{Z_{00}} \quad (19)$$

Se obtiene:

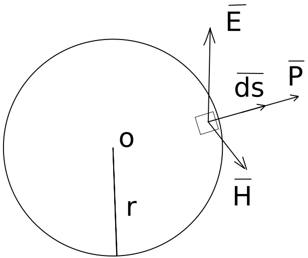
$$<\overrightarrow{P}>=\widehat{z}\frac{E_0^2}{2Z_{00}} \quad (20)$$

Se obtiene:

$$\boxed{<P>=\frac{E_0^2}{2Z_{00}}} \quad (21)$$

P y E radiados por un foco isotrópico puntual

Considerando un foco isotrópico puntual ($P(\theta, \phi) = cte$) desde el centro de una esfera de radio r.



En la superficie de la esfera se tiene una onda plana (campo lejano). Entonces la potencia total radiada será:

$$W_{Rad} = \oint_s < \overrightarrow{P} > \cdot \overrightarrow{ds} = < P > \oint_s ds = < P > 4\pi r^2 \qquad (22)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{< P >= \frac{W_{Rad}}{4\pi r^2}} \tag{23}$$

Igualando las ecuaciones (21) y (23)

$$\frac{E_0^2}{2Z_{00}} = \frac{W_{Rad}}{4\pi r^2} \tag{24}$$

Por lo tanto la intensidad del campo eléctrico es:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2Z_{00}W_{Rad}}{4\pi r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{60W_{Rad}} \tag{25}$$

El campo eléctrico eficaz es:

$$E_{ef} = \frac{1}{r\sqrt{2}}\sqrt{60W_{Rad}} = \frac{1}{r}\sqrt{30W_{Rad}} \tag{26}$$

Directividad, Ganancia y Area efectiva max.

Se definieron estos parámetros como:

$$D = \frac{P_{Max}}{P_{isot}} \tag{27}$$

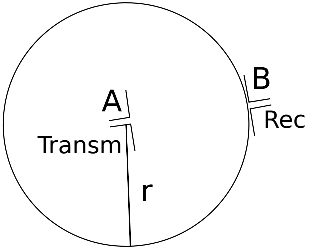
$$\eta = \frac{W_{tot.rad.}}{W_{tot.entregada}} \tag{28}$$

$$G = \eta D \tag{29}$$

$$A_{efmax} = G\frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{30}$$

Ecuación de Friis. Balance de Potencias.

Considerando dos antenas una transmisora (A), desde el centro de una esfera de radio r, y otra antena receptora (B) sobre la sup de la esfera.



$$P_B = \frac{W_{rad}}{4\pi r^2} G_T \tag{31}$$

Ecuación de Friis. Balance de Potencias.

La potencia recibida en la antena receptora (B) es:

$$W_{recB} = P_B A_{ef}(receptora) \tag{32}$$

$$\begin{aligned} P_B &= \tfrac{W_{rad}}{4\pi r^2} G_T \\ A_{efmax} &= G_R \tfrac{\lambda^2}{4\pi} \end{aligned} \tag{33}$$

$$W_{recB} = \frac{W_{rad}}{4\pi r^2} G_T G_R \frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{34}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{W_{recB}}{W_{rad}} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 G_T G_R} \tag{35}$$

$$A_{el} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \text{Atenuación de espacio libre} \tag{36}$$

Ecuación de Friis. Balance de Potencias.

En la expresión (35) se supuso que entre la línea de transmisión que se encuentra entre el generador y la antena transmisora se encuentra adaptada. Analogamente para el caso de la carga que se encuentra conectada la línea de transmisión y la antena receptora. Para contemplar el caso general, que tenga en cuenta las adaptaciones mencionadas y el apuntamiento entre las antenas:

$$\boxed{\frac{W_{recB}}{W_{rad}} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 G_T G_R (1 - |\Gamma_T|^2)(1 - |\Gamma_R|^2)|\widehat{\rho_T} \cdot \widehat{\rho_R}|^2} \quad (37)$$

Ecuación de Friis. Balance de Potencias.

Se puede observar el efecto del apuntamiento entre las antenas con los vectores ρ_T y ρ_R, y el coeficiente de reflexión en las conexiones del generador y la carga en la Figura 1.

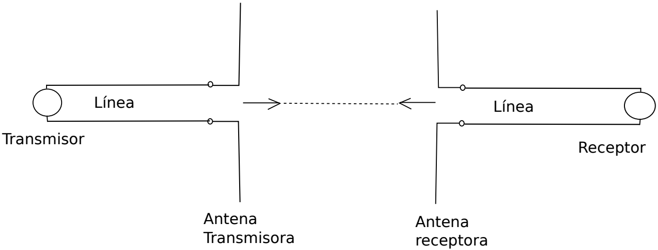
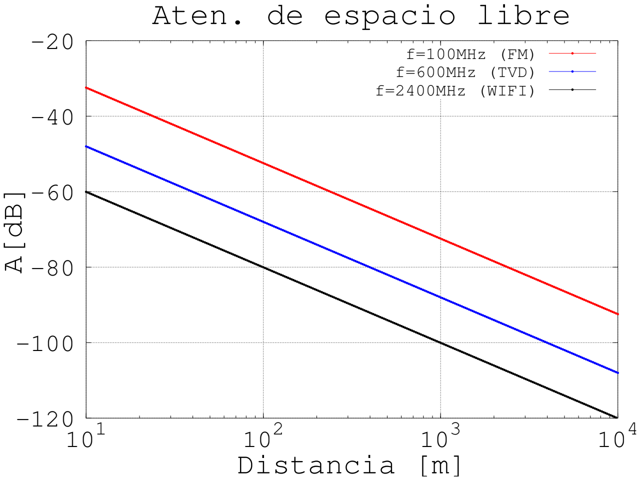
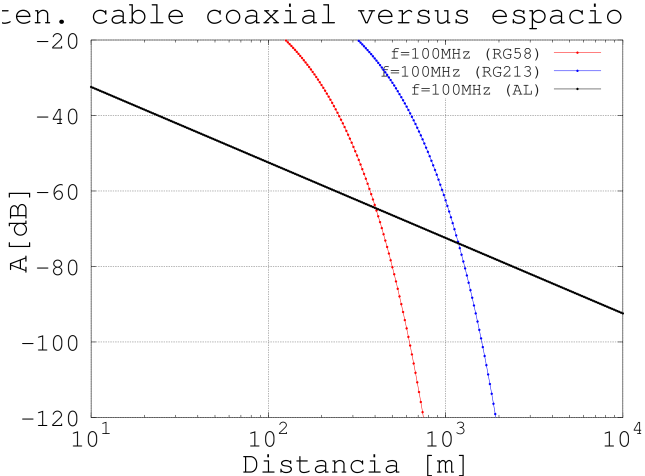


Figure: Efecto de Apuntamiento y adaptación en un enlace de radio

Ejemplo Atenuacion de espacio libre



Ejemplo Atenuacion de espacio libre versus Aten de una linea coaxial



Ejemplo Satelite Amazonas para FTA

Datos del Satélite

- PIRE=$W_{rad}G_T$=47dBW
- Receptor -25 a -65dBm
- Frec. banda Ku 12GHz
- FI 950MHz a 1950MHz
- LNB+Antena: G=48dB a 62 dB
- At cable 18dB

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{12 \cdot 10^9 1/s} = 0.025m \tag{38}$$

$$A_{el}(dB) = 10log\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 = 10log\left(\frac{0.025m}{4\pi 36000 \cdot 10^3 m}\right)^2 = 116dB \tag{39}$$

Datos de Antenas receptoras

ANTENAS BANDA ku

FTApinamar

45 cm	60 cm	70 cm	80 cm	90 cm	100 cm	120 cm	135 cm	150 cm
34.5 dB	36.5 dB	37.5 dB	38.5 dB	39.5 dB	40.5 dB	41.7 dB	43.1 dB	44.6 dB
26.5 dB	27.5 dB	28.5 dB	29.5 dB	30.5 dB	31.5 dB	32.5 dB	33.5 dB	34.5 dB
54 dbw	48-53 dbw	47 dbw	46 dbw	44-45 dbw	43 dbw	40-42 dbw	39 dbw	38 dbw
0.15905	0.28275	0.38485	0.50266	0.63618	0.78540	1.13098	1.43139	1.76715

Diametro: ■ Pire (dbW): ■ Ganancia tipica Banda Ku: ■ Ganancia tipica Banda C: ■ Superficie al Satelite: ■ m2

Datos del Satélite

$$W_{recB} = W_{rad} G_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 G_R / A_{cables} \tag{40}$$

$$W_{recB} = 47dBW - 116dB + G_R - 18dB \tag{41}$$

Si $W_{recB} \cong -65dBm$

$$-25dBm = 47dBW - 116dB + G_R - 18dB \tag{42}$$

$$\boxed{G_R = 62dB} \text{(Ganancia de antena Rec. + G LNB)} \tag{43}$$

Ecuación de Friis. Otra forma. Balance de Potencias.

Otra Forma de expresar la ecuación de Friis La potencia recibida en la antena receptora (B) es:

$$W_{recB} = P_B A_{ef}(receptora) \tag{44}$$

Como la densidad de potencia que incide en la antena receptora es

$$P_B = \frac{W_{rad}}{4\pi r^2} G_T \tag{45}$$

La relación entre el área efectiva y la Ganancia es:
$A_{efmax} = G\frac{\lambda^2}{4\pi}$
Se tiene que la ecuación (45) queda:

$$P_B = \frac{W_{rad}}{4\pi r^2} A_{efmaxT} \frac{4\pi}{\lambda^2} \tag{46}$$

Ecuación de Friis. Otra forma. Balance de Potencias.

La potencia recibida en los bornes de la antena receptora:

$$W_{recB} = \frac{W_{rad}}{4\pi r^2} A_{efmaxT} \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{efmaxR} \tag{47}$$

Reordenando:

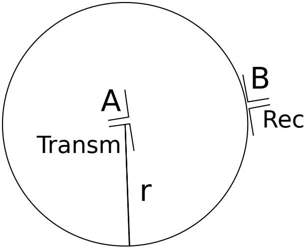
$$\frac{W_{recB}}{W_{rad}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{A_{efmaxT} A_{efmaxR}}{4\pi r^2} \tag{48}$$

Como $4\pi r^2$ es el área de la superficie esférica de la esfera de radio r con centro en la antena transmisora:

$$\boxed{\frac{W_{recB}}{W_{rad}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{A_{efmaxT} A_{efmaxR}}{4\pi r^2}} \tag{49}$$

Esta última ecuación es la ecuación de Friis en términos de las áreas efectivas de las antenas Transmisora, receptora y del área de la superficie esférica mencionada

Ecuación de Friis. Otra forma. Balance de Potencias.



Como se observa en la ecuación anterior la relación entre la potencia recibida a la potencia transmitida entre las antenas, queda en función del producto de las áreas efectivas de las dos antenas dividido el área geométrica de la superficie esférica de la Figura anterior A medida que la distancia entre las dos antenas aumenta esa superficie se hace mayor y aumentará la atenuación aunque el medio sea el vacío.

Ecuación de Friis. Otra forma. Balance de Potencias.

Ejemplo

Se tiene un radioenlace que opera con una potencia de 15W a 5GHz con una distancia de r=10Km, con antenas que tiene $A_{efT} = 2.5m^2$ y $A_{efR} = 0.5m^2$ Calcula la potencia recibida:

$$W_{recB} = W_{rad} \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{A_{efmaxT} A_{efmaxR}}{4\pi r^2} \tag{50}$$

$$W_{recB} = 15W \frac{4\pi}{(0,06m)^2} \frac{2.5m^2 0,5m^2}{4\pi (15000m)^2} \tag{51}$$

$$W_{recB} = 15W \frac{4\pi}{(0,06m)^2} \frac{2.5m^2 0,5m^2}{2,8 \cdot 10^9 m^2} \tag{52}$$

$$W_{recB} = 2.3 \cdot 10^{-5} W \tag{53}$$

Bibliografía

- V.V. Nikolski, Electrodinámica y Propagación de ondas de radio.. Ed. Mir, 1976.
- D.K.Cheng: *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Addison Wesley, Mexico, 1998.
- V. Trainotti and W. G. Fano, Ingeniería Electromagnética, 1ra ed. TomoI, Editorial Nueva Libreria, Argentina, 2004.
- Valentino Trainotti, Walter Gustavo Fano y Luis Antonio Dorado: *Ingeniería electromagnética*, Tomo II., Editorial Nueva Libreria, Argentina, 2005.
- Valentino Trainotti, Walter Gustavo Fano y Luis Antonio Dorado: *Ingeniería electromagnética*, Tomo III., Editorial Nueva Libreria, Argentina, 2009.
- Balanis, Constantine A.: *Antenna Theory Analysis and Design*. Wiley, United States of America, segunda edición, 1997.