Ejercicios de clase dejados en el pizarrón:

1- Calcular la transferencia del RLC a partir de A,B,C y D obtenidas para describir en espacio de estados.
2- Obtener la descripción en espacio de estados y la transferencia para el sistema masa, resorte, fricción:
   a. De la fuerza "$u = F$" como entrada a la posición "$q = y = x_1$" como salida.
   b. De la fuerza "$u = F$" como entrada a la velocidad "$v = y$" como salida en los siguientes dos casos:
      i. Con "$k = 0$". ¿De qué orden da el sistema en este caso?
      ii. Con "$k \neq 0$". ¿De qué orden da el sistema en este caso?

1-

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Encontrar la expresión de la transferencia $Y(s)/U(s)$ en función de A, B, C y D y mostrar que da lo mismo que la obtenida por el método de las impedancias.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s)(sI - A) = BU(s) + x(0)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(BU(s) + x(0))$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}\left(BU(s) + x(0)\right) + DU(s)$$

si Tomo condiciones Iniciales nulas:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/c \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/c \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}\right)^{-1}}_{j^{-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} + 0$$

Para $\mathbb{R}^{2x2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} s & -1/c \\ 1/L & s+R/L \end{bmatrix} = s(s+RL) + \frac{1}{Lc}$$

$$j^{-1} = \frac{1}{s(s+R/L) + \frac{1}{Lc}} \begin{bmatrix} s+R/L & 1/c \\ -1/L & s \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s\left(s+R/L\right)+\frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s+R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s\left(s+R/L\right)+\frac{1}{LC}} \cdot \begin{bmatrix} s+R/L & 1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

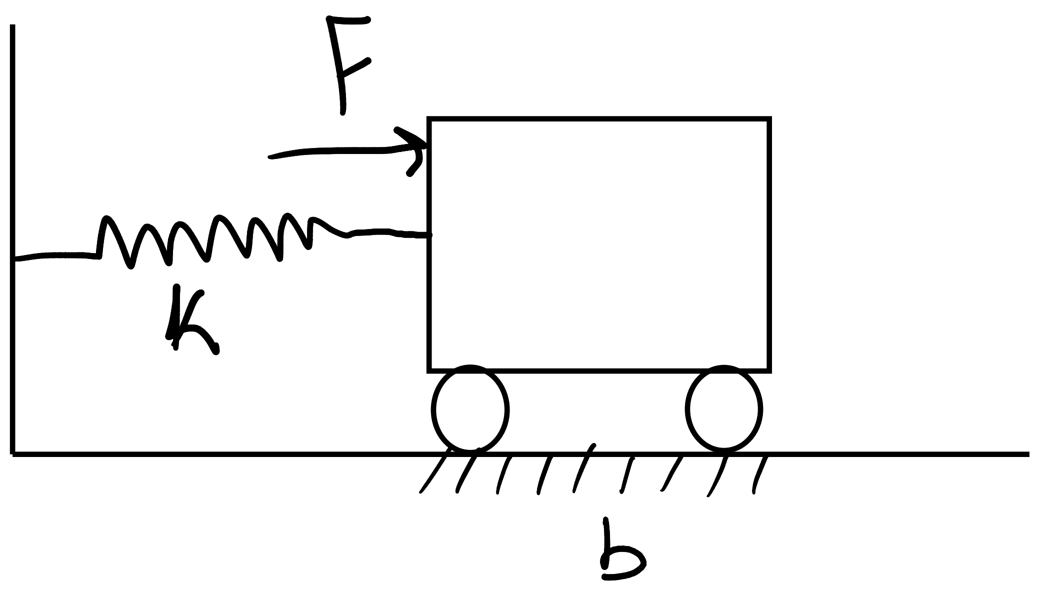
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/LC}{s\left(s+R/L\right)+1/LC} = \boxed{\frac{1}{LCs^2+RCs+1}}$$

$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+sL+R}$
$\frac{1}{s^2LC+sCR+1} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \xi = \frac{\frac{R}{L}}{2\omega_n}$

$\Rightarrow$ TA Bien

2- Obtener la descripción en espacio de estados y la transferencia para el sistema masa, resorte, fricción:

a. De la fuerza "$u = F$" como entrada a la posición "$q = y = x_1$" como salida.
b. De la fuerza "$u = F$" como entrada a la velocidad "$v = y$" como salida en los siguientes dos casos:
   i. Con "$k = 0$". ¿De qué orden da el sistema en este caso?
   ii. Con "$k \neq 0$". ¿De qué orden da el sistema en este caso?



$$\boxed{F - Kq - bv = m.a}$$

2-a) $Y = q$

b) $Y = v$

$X_1 = q$

$X_2 = \dot{q}$

$\dot{X}_1 = X_2$

$\dot{X}_2 = a = \frac{F}{m} - \frac{K}{m}X_1 - \frac{b}{m}X_2$

$Y = q$

$u = F$

$$\dot{X} = Ax + Bu \qquad Y = Cx + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Para $Y = V = X_2 \Rightarrow$ Con $K \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Sistema de Orden 2

Con $K = 0$

$$a = \frac{F}{m} - \frac{bV}{m}$$

$$Y = V = \dot{q} = X$$

$$u = F$$

$$\dot{X} = \ddot{q} = a = \frac{F}{m} - \frac{bV}{m}$$

$$A = \frac{b}{m} \quad B = \frac{1}{m}$$

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad Y = CX + Du$$

$$C = 1 \qquad D = 0$$

Sistema de orden 1

Más ejercicios

1- Encuentre las antitransformadas:

a. $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

b. $G(s) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$

c. $F(s) = \dfrac{2s+12}{s^2+2s+5}$

d. $F(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

2- Verificar usando Matlab/Octave/Python usando la función “residue”.

a)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = \left[(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = 2$$

$$K_2 = \left[(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = -1$$

```
octave:2> num = [1 3]
num =

   1   3

octave:3> den = [1 3 2]
den =

   1   3   2

octave:4> [r, p, k] = residue(num, den)
r =

  -1
   2

p =

  -2
  -1

k = [](0x0)
```

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}}$$

b)

$$G(s) = \frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)} = s+2+\frac{s+3}{(s+1)\cdot(s+2)} \rightarrow F(s)$$

división de polinomios?

$$\begin{array}{rl}
s^3+5s^2+9s+7 & \underline{\left|\, s^2+3s+2 \right.} \\
-\;\underline{s^3+3s^2+2s} \quad & \;\; s+2 \\
0 \quad 2s^2+7s+7 & \\
-\;\underline{2s^2+6s+4} \quad & \\
0 \quad + s+3 &
\end{array}$$

```
octave:9> num = [1 5 9 7]
num =

   1   5   9   7

octave:10> den = [1 3 2]
den =

   1   3   2

octave:11> [q, r] = deconv(num, den)
q =

   1   2

r =

   0   0   1   3

octave:12>
```

$$\mathcal{L}^{-1}[s] = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\boxed{g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}}$$

c)

$$F(s) = \frac{2s+12}{\underbrace{s^2+2s+5}_{\text{Raices complejas } [-1 \pm 2j]}} = \frac{K_1}{(s+1+2j)} + \frac{K_2}{(s+1-2j)}$$

$$\left[(s+1+2j)\frac{2s+12}{(s+1+2j)(s+1-2j)}\right]_{s=-1-2j} = 1+2{,}5j$$

$$\left[(s+1-2j)\frac{2s+12}{(s+1+2j)(s+1-2j)}\right]_{s=-1+2j} = 1-2{,}5j$$

```
octave:12> num = [2 12]
num =

    2   12

octave:13> den = [1 2 5]
den =

   1   2   5

octave:14> [r, p, k] = residue(num, den)
r =

   1.0000 - 2.5000i
   1.0000 + 2.5000i

p =

  -1 + 2i
  -1 - 2i

k = [](0x0)
```

$$F(s) = \frac{1+2{,}5j}{(s+1+2j)} + \frac{1-2{,}5j}{(s+1-2j)}$$

$$f(t) = (1+2{,}5j)e^{(-1-2j)t} + (1-2{,}5j)e^{(-1+2j)t}$$

$$= (1+2{,}5j)\left[e^{-1t}\left(\cos(-2t) + j\,\mathrm{Sen}\,(-2t)\right)\right] + (1-2{,}5j)\left[e^{-1t}\left(\cos(2t) + j\,\mathrm{Sen}(2t)\right)\right]$$

$$e^{-1t}\left(\cos(2t) - j\,\mathrm{Sen}\,(2t)\right) + e^{-1t}\left(\cos(2t) + j\,\mathrm{Sen}(2t)\right) = 2e^{-1t}\cos(2t)$$

$$2{,}5j\left[e^{-1t}\left(\cos(-2t) + j\,\mathrm{Sen}\,(-2t)\right)\right] - 2{,}5j\left[e^{-1t}\left(\cos(2t) + j\,\mathrm{Sen}(2t)\right)\right] =$$

$$2{,}5j\left[e^{-1t}\left(\cos(2t) - j\,\mathrm{Sen}\,(2t)\right) + e^{-1t}\left(-\cos(2t) - j\,\mathrm{Sen}(2t)\right)\right] =$$

$$2{,}5j\left[e^{-1t}\left(-2j\,\mathrm{Sen}(2t)\right)\right] = 5e^{-1t}\,\mathrm{Sen}(2t)$$

$$\boxed{f(t) = e^{-t}\left[2\cos(2t) + 5\,\mathrm{Sen}(2t)\right]}$$

d)

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

Polo Triple en -1

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+1)^2} + \frac{K_3}{(s+1)^3}$$

$$(s+1)^3 F(s) = K_1(s+1)^2 + K_2(s+1) + K_3$$

$$K_3 = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = 2 \qquad K_2 = \frac{d}{ds}(s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = 2s+2\Big|_{s=-1} = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{2!}\Big|_{s=-1} = \frac{2}{2!} = 1$$

```
octave:15> num = [1 2 3]
num =

   1   2   3

octave:16> den = [ 1 3 3 1]
den =

   1   3   3   1

octave:17> [r, p, k] = residue(num, den)
r =

   1.0000e+00
   3.1086e-15 = 0
   2.0000e+00

p =

  -1
  -1
  -1

k = [](0x0)
```

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$\boxed{f(t) = e^{-t} + \frac{2}{2}t^2 e^{-t} = e^{-t}(1 + t^2)}$$