



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Año 2025 - 2º cuatrimestre

**TALLER DE AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL (TA135)**

**TRABAJO PRÁCTICO 3 - CONTROL DIGITAL AVANZADO**

ESTUDIANTES: Grupo 6

Del Rio, Francisco Agustín 110761

[fadelrio@fi.uba.ar](mailto:fadelrio@fi.uba.ar)

Monti, Martina 110574

[mmonti@fi.uba.ar](mailto:mmonti@fi.uba.ar)

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelado</b>	<b>2</b>
<b>3. Observador</b>	<b>2</b>
<b>4. Controladores</b>	<b>5</b>
4.1. Control proporcional . . . . .	6
4.2. Control con seguimiento a referencias . . . . .	8
4.3. Control con acción integral . . . . .	10
<b>5. Conclusiones</b>	<b>13</b>

## 1. Introducción

En este trabajo se implementará un observador en espacio de estados para el sistema de cuatro variables mediante la medición directa de dos de ellas. Luego este observador se utilizará para implementar tres controladores en espacio de estados, el primero solo con capacidad de estabilizar alrededor de un punto de equilibrio, el segundo podrá seguir referencias de escalón con cierto error en estado estacionario, y el último contará con acción integral. Se comprobará el correcto funcionamiento del observador y los controladores a través de las respuestas temporales ante distintas excitaciones.

## 2. Modelado

Se modificó la planta para que el comportamiento se ajuste más a lo real:

$$P = \frac{-2859,765}{s(s + 4,71)(s + 8,4176)(s + 31,133)}$$

Recordando que la asignación de variables de estado es  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ , donde  $x_1$  es la posición del carro,  $x_2$  la velocidad del carro,  $x_3$  el ángulo de la barra y  $x_4$  la velocidad angular de la barra. Las nuevas matrices de representación en espacio de estados resultan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4,7 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -262,0676 & -39,5509 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 114,3906 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = 0$$

Dado que el control realizado es digital se debieron discretizar las matrices de la siguiente forma:

$$A_d = I + A \cdot T_s$$

$$B_d = B \cdot T_s$$

$$C_d = C$$

$$D_d = D$$

## 3. Observador

En primer lugar se verificó que el sistema sea observable y controlable, para esto se plantearon las matrices de observabilidad y controlabilidad para verificar su rango.

Considerando como salidas del sistema la posición del carro  $p$ , y el angulo de la barra  $\theta$ , se modifica la matriz C para poder representar el cambio en el sistema.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, con esta nueva matriz se armaron las matrices mencionadas anteriormente.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

$$Cont = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

En el caso donde se consideran las dos salidas, ambas matrices son de rango completo por lo tanto el sistema es observable y controlable.

Cuando se mide solo la posición del carro siguen siendo ambas de rango completo. Al medir solo el angulo de la barra la matriz de observabilidad no es de rango completo por lo tanto el sistema no es observable, sin embargo la de controlabilidad sigue siendo de rango completo por lo que si es controlable.

Al agregar el observador al sistema las ecuaciones de estados se modifican de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = A_d \hat{\mathbf{x}}_k + L(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) + B_d u_k$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = C_d \hat{\mathbf{x}}_k + D_d u_k$$

En donde  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$  son las observadas e  $\mathbf{y}$  es la salida real, por lo tanto cada estado estimado es calculado en base al error entre la salida medida y estimada.

Si se desarrolla el error entre la estimación y el estado real se puede obtener la matriz por la que hay que multiplicar el error para obtener el error siguiente.

$$e_{k+1} = (A_d - LC_d)e_k$$

Para obtener el observador se hizo uso de la función *place*. Inicialmente se utilizaron polos cinco veces más grandes que el polo más grande de la planta y se observó la respuesta, en base a esta se achicaron y ajustaron los valores para obtener una respuesta satisfactoria. Finalmente los polos discretos que se utilizaron fueron los siguientes:

$$[e^{-T_s \cdot 31,13 \cdot 2} \quad e^{-T_s \cdot 31,13 \cdot 1} \quad e^{-T_s \cdot 31,13 \cdot 5} \quad e^{-T_s \cdot 31,13 \cdot 5}]$$

Con estos polos el  $L$  obtenido fue:

$$L = \begin{bmatrix} 1,3243 & -0,0001 \\ 15,8964 & 0,5027 \\ 0 & 0,8765 \\ 0 & -5,8917 \end{bmatrix}$$

Luego al momento de probar el observador se debió realizar un control proporcional con un  $k_p = 1,5$ , ya que sin este no se lograba enviar referencias significativas manteniendo el carro dentro de los límites de la planta. De esa manera se consiguió obtener los datos necesarios para verificar el correcto funcionamiento del observador, los cuales se presentan a continuación:

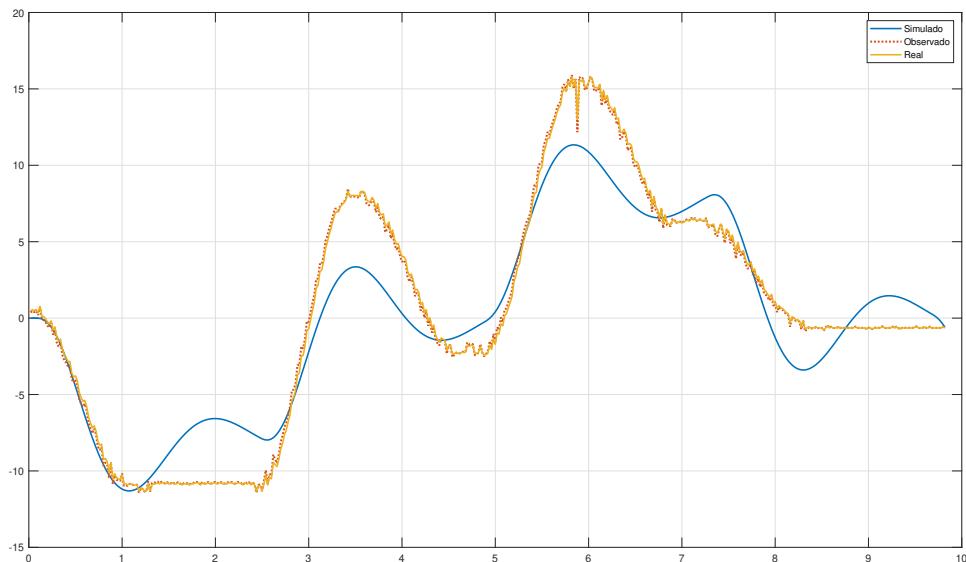


Figura 1: Respuesta simulada, observada y real en la variable posición

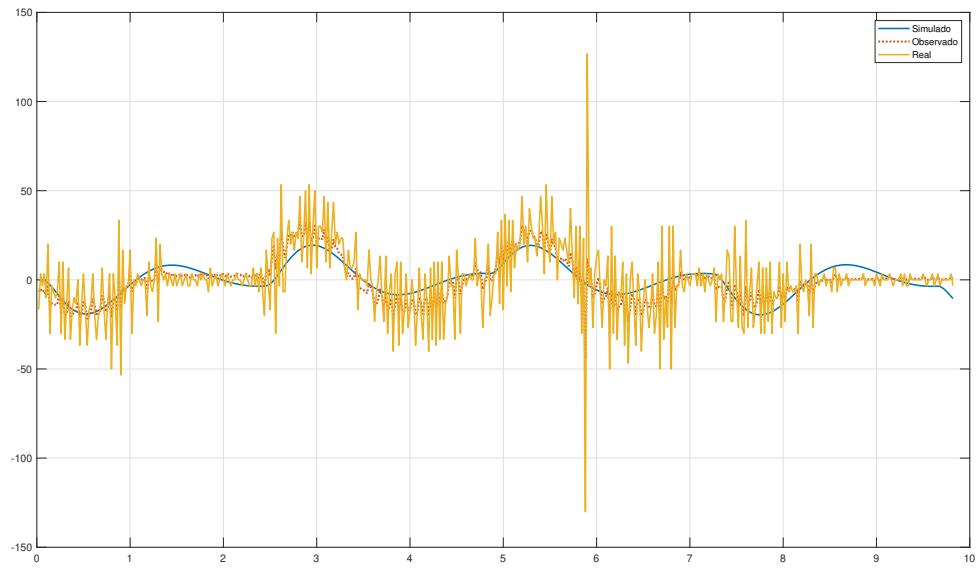


Figura 2: Respuesta simulada, observada y real en la variable velocidad

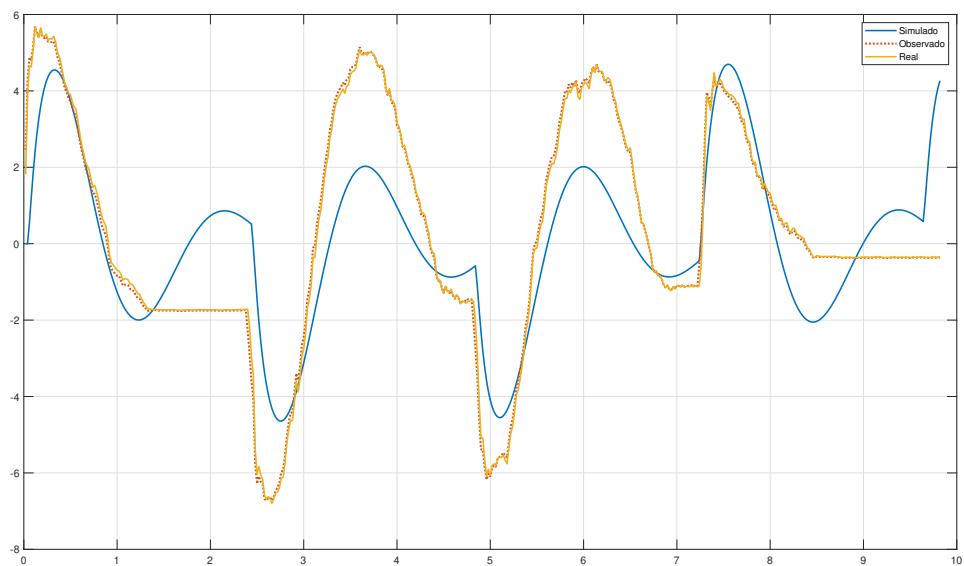


Figura 3: Respuesta simulada, observada y real en la variable ángulo

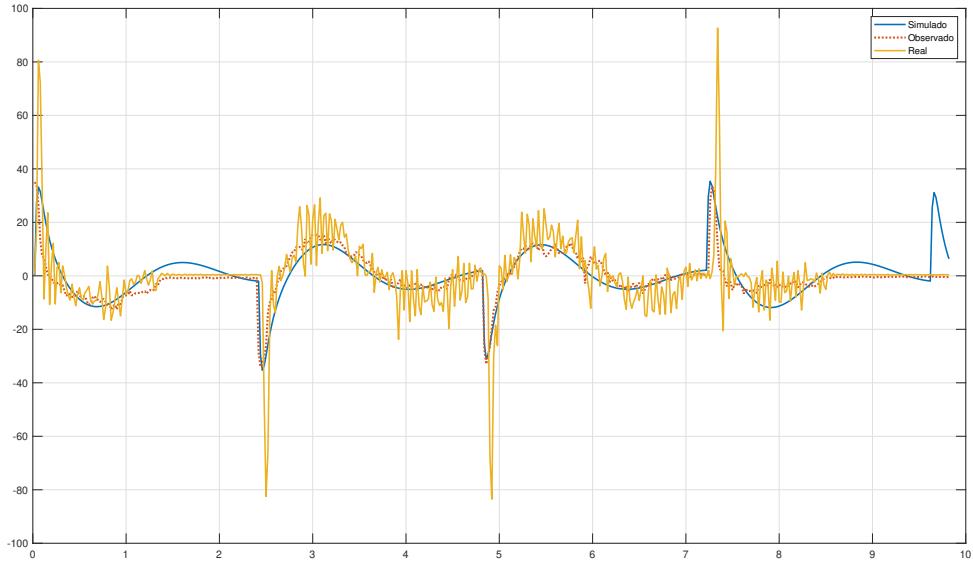


Figura 4: Respuesta simulada, observada y real en la variable velocidad angular

Como se puede ver en las figuras anteriores, el observador permite obtener una señal suavizada manteniendo la forma general de lo medido y acercándose a lo simulado. Esto se puede apreciar especialmente en las mediciones de velocidad que son particularmente ruidosas por ser derivadas, y con el observador se obtiene una señal en donde el ruido se ve significativamente reducido.

## 4. Controladores

Se implementarán tres controladores, el primero es una realimentación de estados que se ocupa de estabilizar el sistema en torno al punto de equilibrio, resultando en una acción de control dada por:

$$u = K\hat{\mathbf{x}} \quad (1)$$

Resultando en un sistema:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d \mathbf{x}_k + B_d K \mathbf{x}_k \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = (A_d + B_d K) \mathbf{x}_k \quad (3)$$

Entonces, modificando los autovalores de  $(A_d + B_d K)$  se puede ajustar el comportamiento del sistema.

Luego, para que el sistema sea capaz de seguir referencias distintas al punto de equilibrio, se utilizan las ecuaciones:

$$\mathbf{x}_{k+1} = (A_d + B_d K) \mathbf{x}_k + B_d F \mathbf{r} \quad (4)$$

$$\mathbf{y} = C \mathbf{x} \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es un vector de referencias y  $F$  se ajusta tal que:

$$(C(\mathbf{I} - (A_d + B_d K)) B_d)^{-1} \quad (6)$$

Por ultimo, se agrega acción integral, para obtener error nulo en estado estacionario ante referencias de escalón. Para esto, se aumenta el sistema, modificando las matrices de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ q_{k+1} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -C_d T & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ q_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

Resultando en una acción de control calculada de la siguiente manera:

$$u_k = [K \quad H] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ q_k \end{bmatrix} = K\mathbf{x}_k + Hq_k \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que el integrador de error se implementa con backwards difference:

$$e_k = r_k - y_k \quad (9)$$

$$q_k = q_{k-1} + Te_k \quad (10)$$

Los valores de  $H$  y  $K$  se obtienen ajustando los autovalores de  $(A_{ext} + B_{ext}KH)$ , donde  $A_{ext}$ ,  $B_{ext}$  y  $KH$  son las matrices extendidas mencionadas anteriormente.

A continuación se presentan los valores utilizados para los parámetros de cada uno de los controladores y las respuestas temporales de todas las variables de estado.

#### 4.1. Control proporcional

El vector  $K$  mencionado anteriormente tendrá un valor de ganancia para cada variable de estado, por lo tanto sera un vector fila de cuatro valores. Para calcularlo se utilizo la función *Place* en MatLab y los siguientes polos:

$$[e^{-T_s \cdot 15} \quad e^{-T_s \cdot 5} \quad e^{-T_s \cdot 15} \quad e^{-T_s \cdot 8}]$$

Los polos se ubicaron considerando que deben ser mas lentos que los del observador, ya que en caso contrario el observador no podrá realizar la medición necesaria para hacer la estimación. Adicionalmente, se decidió que los autovalores correspondientes a la posición y al angulo sean mas rápidos para darle mas peso a dichas mediciones.

Finalmente los valores obtenidos fueron:

$$K = [2,0544 \quad 0,4365 \quad -0,8576 \quad 0,0544]$$

A continuación se midió la respuesta de todas las variables de estados ante condiciones iniciales. Se decidió realizar la respuesta ante condiciones iniciales en reemplazo de una perturbación debido a la dificultad de obtener una excitación equivalente para el sistema simulado y el real. Con las condiciones iniciales se evita las diferencias en las respuestas debido a que el sistema este reaccionando ante distintas perturbaciones.

La condición inicial utilizada fue un corrimiento de 13 cm respecto del cero y se obtuvieron las siguientes respuestas:

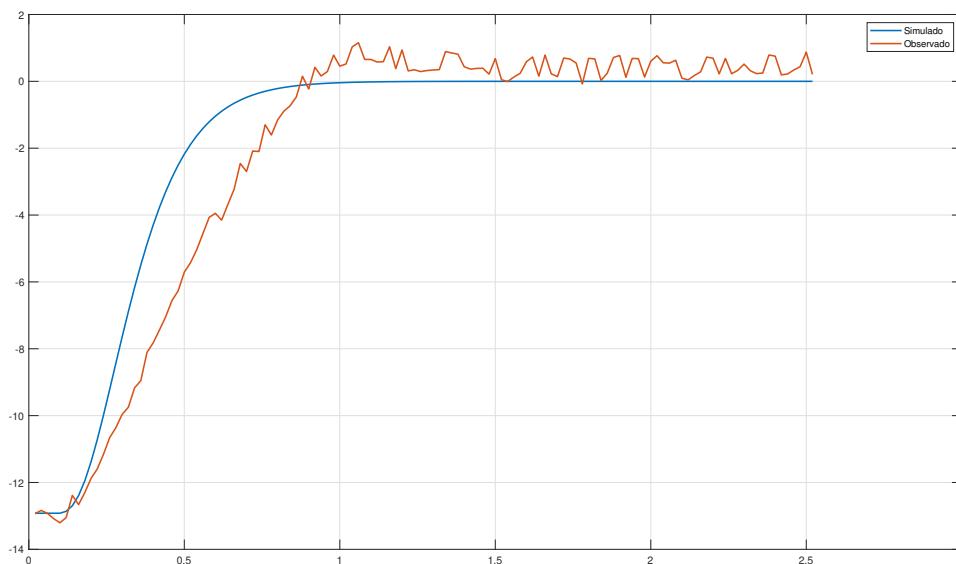


Figura 5: Respuesta de la posición a condiciones iniciales con realimentación de estados

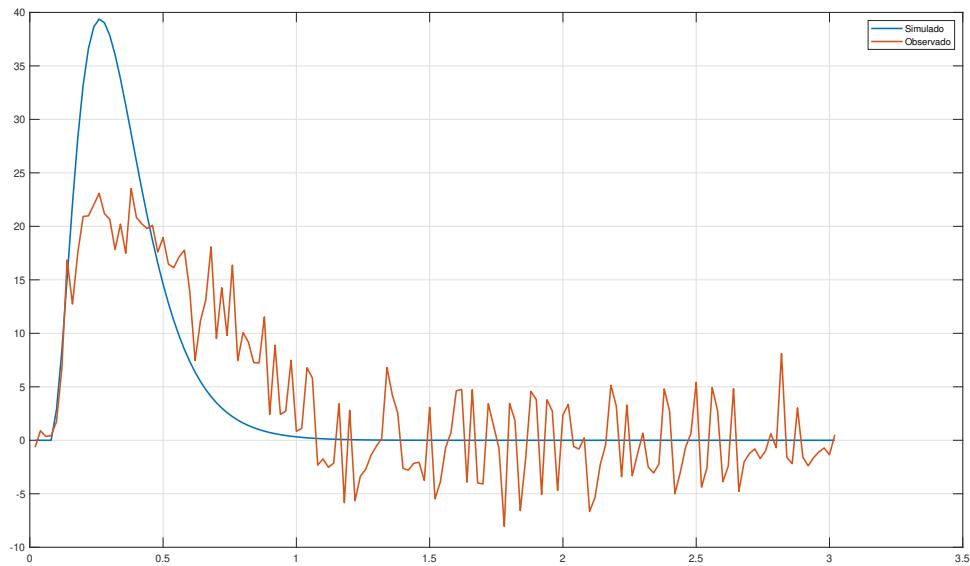


Figura 6: Respuesta de la velocidad a condiciones iniciales con realimentación de estados

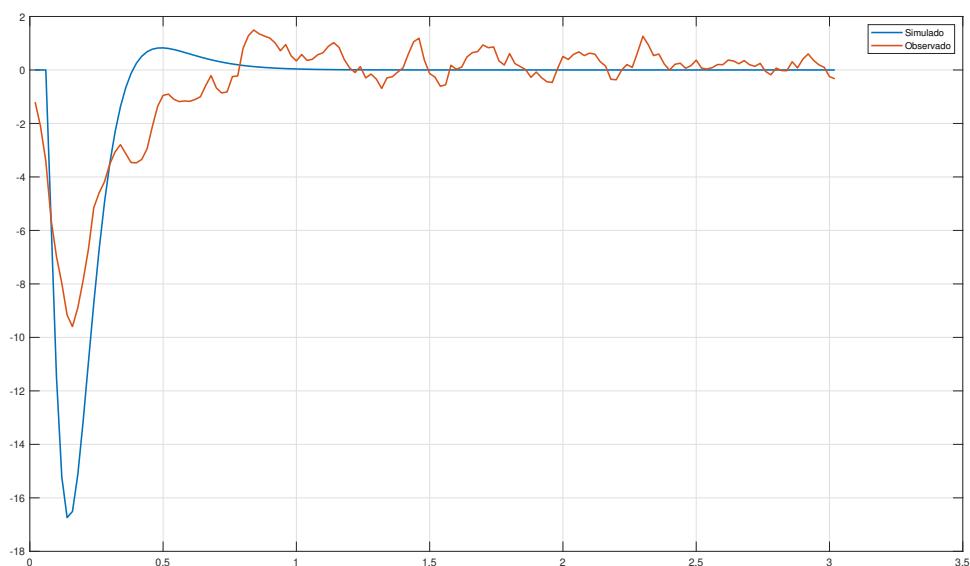


Figura 7: Respuesta angular de la barra ante condiciones iniciales con realimentación de estados

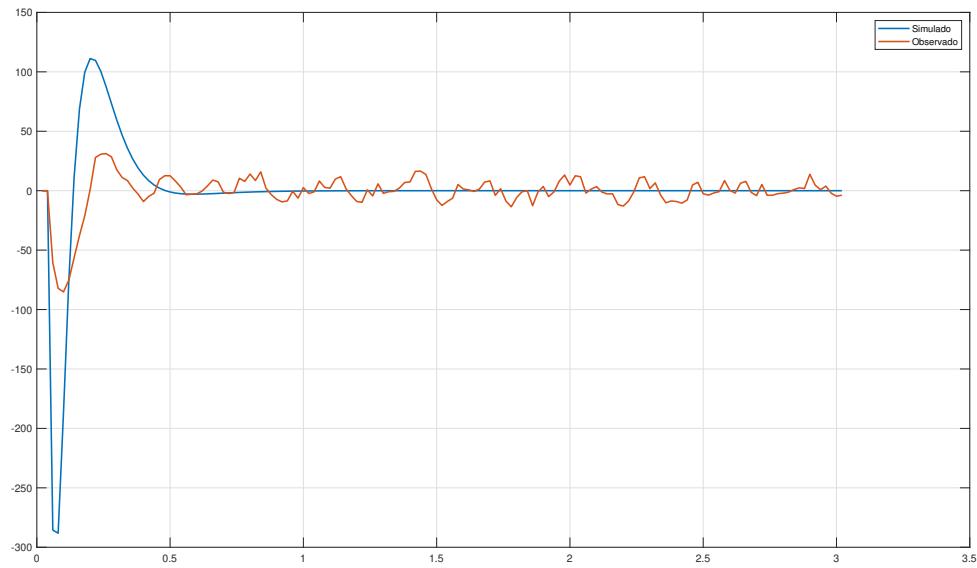


Figura 8: Respuesta velocidad angular de la barra a condiciones iniciales con realimentación de estados

En los gráficos se puede ver que el controlador se comporta de la manera esperada, lleva el sistema al punto de equilibrio en un tiempo similar al simulado. Las diferencias en los picos se deben a las limitaciones del modelo de la planta y el ruido en las observaciones.

## 4.2. Control con seguimiento a referencias

Para este caso se utilizaron los mismos valores de la matriz  $K$  que en el controlador anterior, pero calculando los valores de  $F$  para seguir referencias tanto de posición del carro como de ángulo de la barra. Se obtuvo lo siguiente:

$$F = \begin{bmatrix} -2,0544 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde el primer valor corresponde a la referencia de posición del carro y el segundo valor corresponde a la referencia de ángulo de la barra. Este ultimo es nulo, lo que implica que no se puede dar referencias a ambas variables al mismo tiempo.

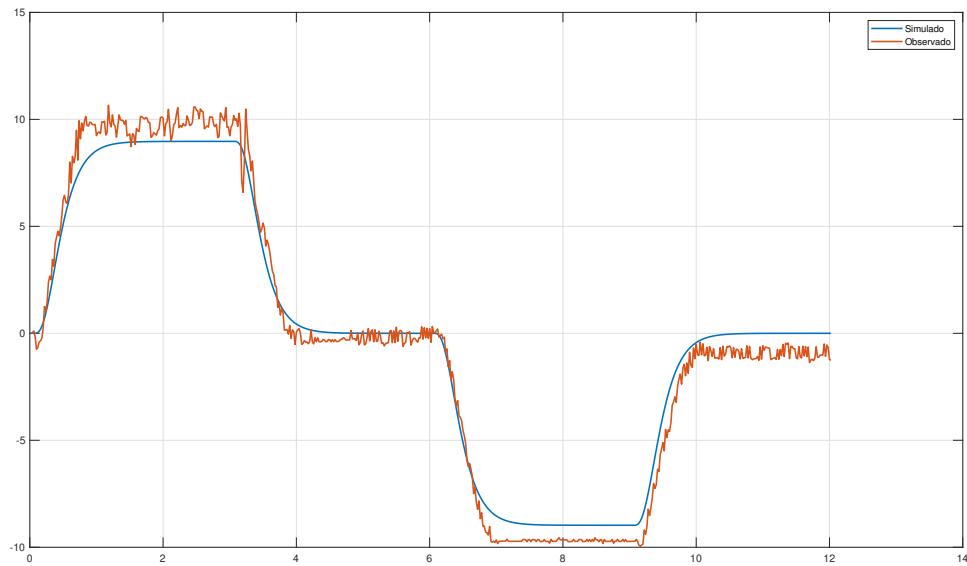


Figura 9: Respuesta de la posición ante referencias de escalón con feedforward

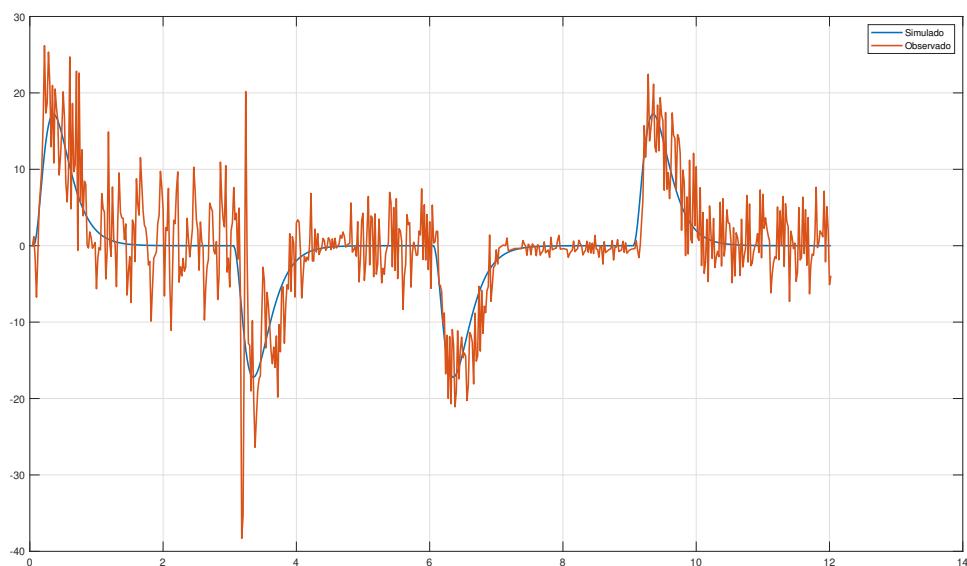


Figura 10: Respuesta de la velocidad ante referencias de escalón con feedforward

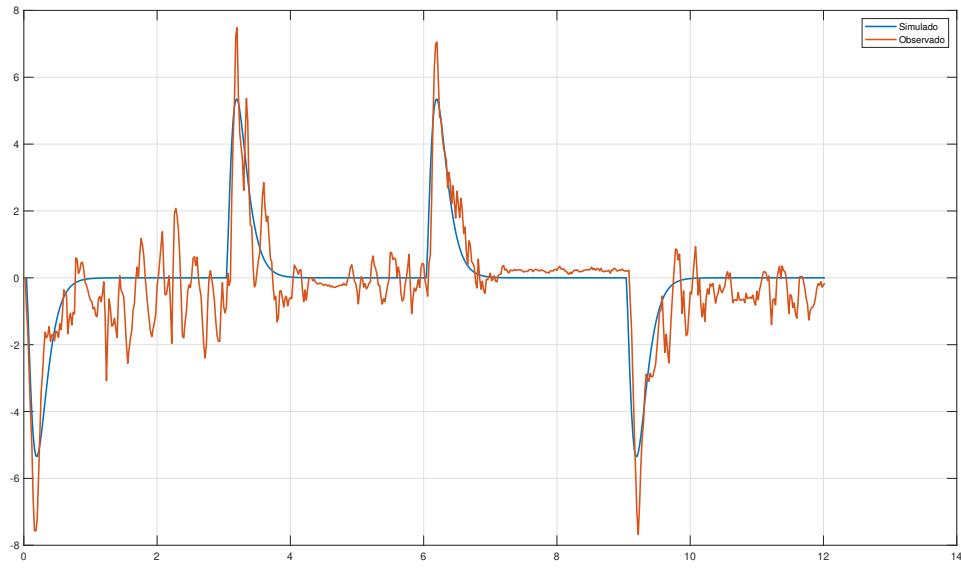


Figura 11: Respuesta del ángulo ante referencias de escalón con feedforward

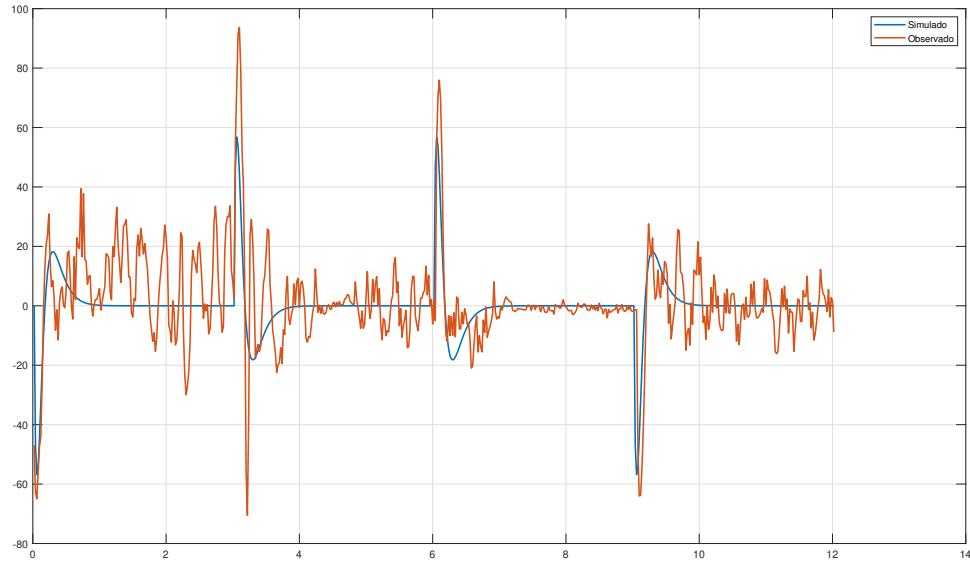


Figura 12: Respuesta de la velocidad angular ante referencias de escalón con feedforward

Como se puede apreciar en la Figura 9, tanto la respuesta de posición simulada como la medida presentan error en estado estacionario. Esto se debe a que, si bien este tipo de controlador es capaz de seguir referencias de tipo escalón, las sigue con un error estacionario, ya que no presenta control integral.

En el resto de las variables de estado, si bien las mediciones de la observación real resultan ruidosas, la forma general de las curvas es similar a la simulada.

#### 4.3. Control con acción integral

En este caso se utilizaron las matrices extendidas que se mencionaron previamente. Luego se ajustaron los valores de KH dandole peso a los polos correspondientes a la posición, el angulo de la barra

y la acción integral. Para obtener los valores se hizo uso nuevamente de la función *place* y los polos se ubicaron en los siguientes valores:

$$\left[ e^{-T_s \cdot \frac{10}{1,3}} \quad e^{-T_s \cdot \frac{3}{1,5}} \quad e^{-T_s \cdot \frac{10}{1,3}} \quad e^{-T_s \cdot \frac{8}{1,5}} \quad e^{-T_s \cdot \frac{10}{1,5}} \right]$$

Los valores obtenidos fueron los siguientes:

$$KH = [1,2537 \quad 0,2174 \quad 0,6684 \quad 0,1467 \quad -1,0873]$$

Utilizando estos valores se implementó el controlador y se comandó una referencia de  $[10, 0, -10, 0]$  para poder comprobar que el comportamiento sea el esperado.

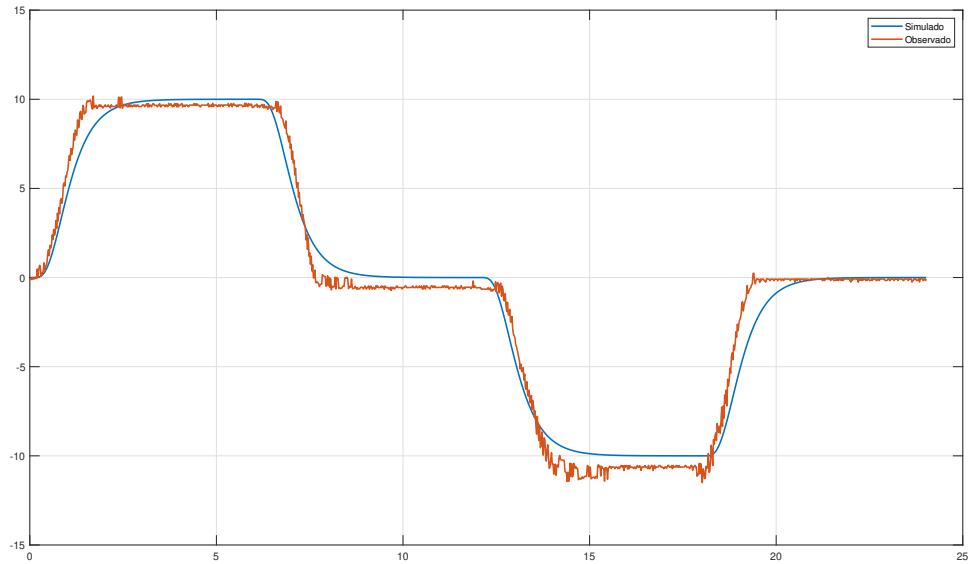


Figura 13: Respuesta de la posición ante referencias de escalón con acción integral

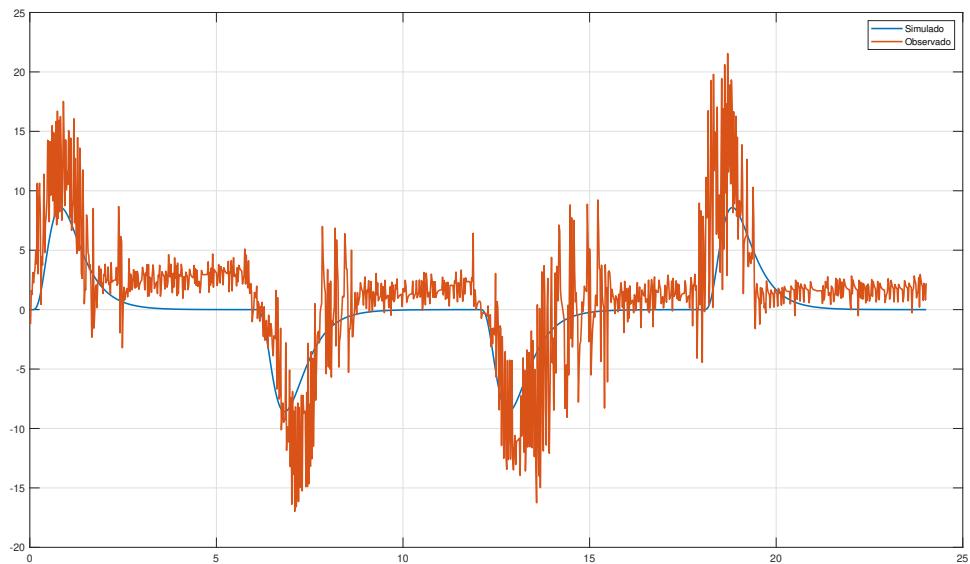


Figura 14: Respuesta de la velocidad ante referencias de escalón con acción integral

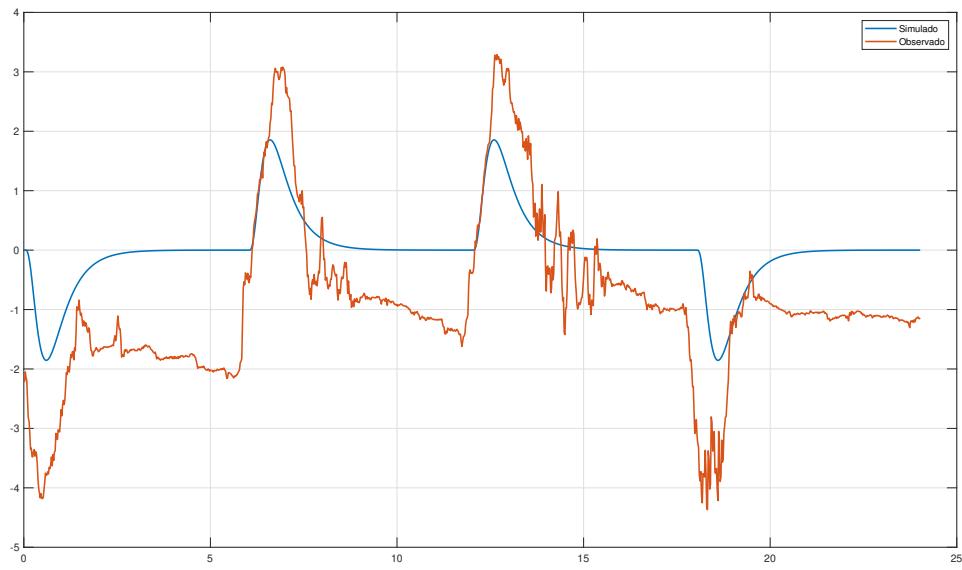


Figura 15: Respuesta del ángulo ante referencias de escalón con acción integral

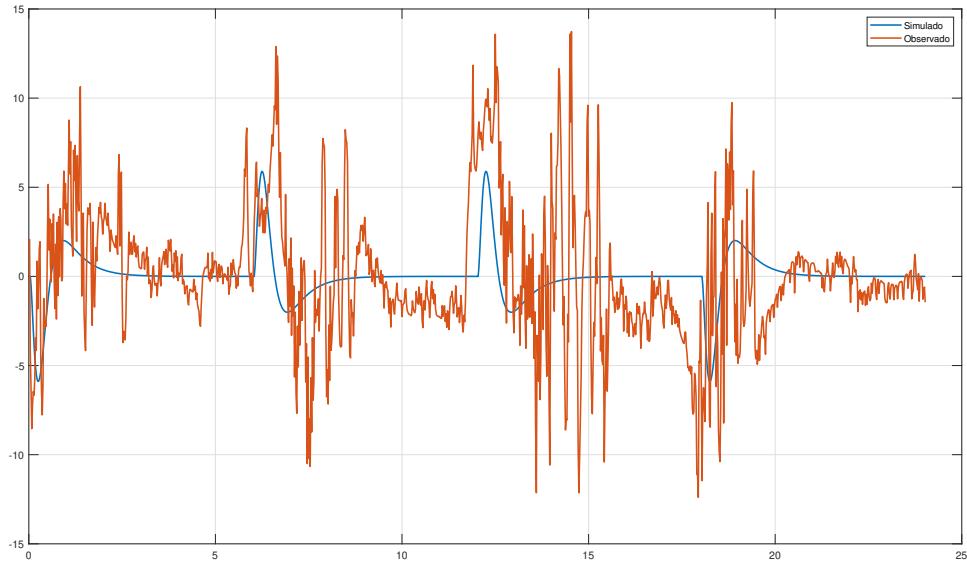


Figura 16: Respuesta de la velocidad angular ante referencias de escalón con acción integral

Se puede ver que el comportamiento es el esperado. La respuesta no presenta un overshoot ya que es una respuesta sobre-amortiguada y tiene un tiempo de establecimiento de aproximadamente 1.5 segundos, lo que cumple con lo pedido. Además sigue las referencias como debe, si bien se puede observar un pequeño error esto se atribuye a que el carrito se traba a bajas velocidades, lo que no fue considerado al realizar el modelo de la planta.

En las mediciones de tanto la velocidad angular como la del carro se puede apreciar un ruido significativo, que se atribuye a las magnitudes de las mediciones y que por su naturaleza son ruidosas.

## 5. Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se pudo implementar un observador en espacio de estados para luego ser utilizado en distintos tipos de controladores en espacio de estados.

Gracias a la caracterización de la planta realizada en trabajos anteriores se logró implementar un observador lo suficientemente preciso como para que los controladores funcionen sin grandes complicaciones.

Mediante el control en espacio de estados se logró primero estabilizar la planta alrededor de un punto de equilibrio, luego seguir referencias de tipo escalón y por último tener error nulo en estado estacionario mediante el anidamiento de controladores para conseguir acción integral.