



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2025 - 2º cuatrimestre

TALLER DE AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL (TA135)

TRABAJO PRÁCTICO 2 - CONTROL DIGITAL

ESTUDIANTES: Grupo 6

Del Rio, Francisco Agustín 110761

fadelrio@fi.uba.ar

Monti, Martina 110574

mmonti@fi.uba.ar

Índice

1. Introducción	2
2. Modelado	2
2.1. Señal de control	2
2.2. Posición del carro	2
2.3. Angulo de la barra	2
2.4. Identificación de la planta	2
2.5. Representación en espacio de estados	6
3. Limitaciones de diseño	7
4. Diseño del controlador	7
4.1. Respuestas temporales	7
4.1.1. Control proporcional	7
4.1.2. Control proporcional integral	8
4.1.3. Control proporcional derivativo	9
4.2. Análisis y comparación	10
5. Conclusión	11

1. Introducción

En este trabajo se busca encontrar un modelo que describa el comportamiento de la planta del sistema *ball and beam*, para luego obtener su transferencia.

Luego, con esa transferencia se plantean controladores de diversos tipos para poder controlar el sistema. Se busca comparar los resultados de aplicar los distintos controladores.

2. Modelado

2.1. Señal de control

La señal de control u es una señal virtual de un angulo en grados, que representa el angulo al que se moverá el servo. Físicamente, esta señal se implementa a través de un PWM de 50 Hz donde el ciclo útil varía entre 2380 μ s y 560 μ s. La relación entre el ángulo deseado y el ciclo útil enviado fue obtenida de forma analítica y corroborada de forma empírica, considerándose un comportamiento lineal, es la siguiente:

$$D_c = 11\alpha + 1435 \quad (1)$$

Donde D_c es el ciclo de trabajo en micro segundos y α el angulo deseado.

Debido a las limitaciones físicas de la planta, el rango de ángulos comandables es acotado. En un sentido se ve limitado ya que el brazo de palanca choca con la base del sistema, en el otro sentido el brazo de palanca llega a su limite máximo de extensión. Por esto es que para el desarrollo de este trabajo se toma un ángulo de entrada entre $\pm 35^\circ$.

2.2. Posición del carro

La salida se define como la posición del carro p , la cual se mide usando un sensor de distancia ubicado en un extremo de la barra.

Como se considera el centro de la barra como el origen se tuvo que debe usar la relación

$$p = x - x_o$$

Siendo x_o la distancia medida por el sensor en el centro de la barra. Al posicionar el carrito en ese punto, el valor medido fue $x_o = 14,5\text{cm}$. Considerando este valor se definen los extremos de la barra como $-12,5\text{ cm}$ hacia el lado del sensor y 15 cm hacia el opuesto.

2.3. Angulo de la barra

El angulo de la barra θ se mide en el eje X de la IMU. Se considera un $\theta > 0$ cuando se inclina hacia el sensor de distancia, ubicado en el extremo opuesto al servo. Y un $\theta < 0$ cuando se inclina hacia el servo.

Considerando dichas definiciones, se obtuvieron los límites de θ comandando al servo sus propios valores límites. Los valores obtenidos fueron 13° y -12° .

2.4. Identificación de la planta

Se plantean cuatro variables de estado en el sistema.

- x_1 = posición del carro
- x_2 = velocidad del carro
- x_3 = angulo de la barra
- x_4 = velocidad angular de la barra

Sin embargo para simplificar el modelo se separó la planta en dos plantas conectadas en cascada. Siendo la primera el sistema servo-barra, y la segunda el sistema barra-carro, como se puede ver en la Figura 1.

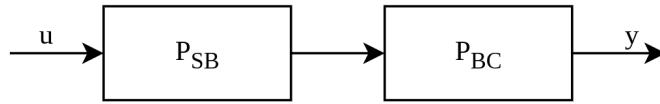


Figura 1: Diagrama de bloques de la descomposición de la planta

La entrada del sistema barra-carrito es el angulo de la barra y su salida es la posición del carrito. Considerando esto queda un sistema con dos variables de estado, que se lleva a la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Considerando el diagrama de cuerpo libre, se plantea la sumatoria de fuerzas.

$$mg\sin(\theta)\hat{x} - mg\cos(\theta)\hat{y} + mg\cos(\theta) - \mu_r v\hat{x} = m\hat{x}$$

Luego considerando, las definiciones de las variables de estado, y que en este caso el angulo de la barra es la entrada se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = g\sin(u) - \frac{\mu_r}{m}x_2$$

$$y = x_1$$

Estas ecuaciones no son lineales, por lo tanto se utilizo el método del Jacobiano para linealizar entorno al punto del equilibrio ($x_1 = 0, x_2 = 0, u = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu_r}{m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g\cos(U_{eq}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

Sabiendo ademas que $D = 0$, se obtuvo la forma de la transferencia con las matrices.

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{g}{s(s + \frac{\mu_r}{m})} \quad (2)$$

Luego se considero $z = e^{sTs}$ para poder pasarlo a valores discretos y analizarlo de esa forma en MATLAB.

$$P_{BC} = \frac{k}{(z - 1)(z + \beta)}$$

Al momento de caracterizarlo en MATLAB se guardaron los datos de la respuesta a un movimiento de 25° del servo y a uno de -25° , debido a que es posible que la planta se comporte de manera asimétrica por la diferencia de peso en los extremos. Cada experimento se realizo cinco veces y se promediaron los resultados para de esa manera obtener una respuesta generalizada para el movimiento hacia cada extremo.

Con los datos obtenidos del promedio y considerando la forma de la planta como conocida, se busco obtener el valor del polo y la ganancia experimentalmente. Cuando lo simulado se comporto de la misma manera que lo obtenido de la planta real se considero que se obtuvieron los valores del polo y la ganancia.

$$p = 0,91$$

$$k = -0,01$$

Luego usando que $s = \frac{\ln(z)}{T_s}$ y el método de *backward difference* se obtuvo la planta continua.

$$P_{BC} = \frac{-25}{s(s + 4,71)}$$

En las Figuras 2 y 3 se pueden ver superpuestas las respuestas a un escalón de $\pm 25^\circ$ de entrada al servo. Las curvas presentan el mismo tiempo de crecimiento y magnitud, por lo que se considera que el ajuste de las constantes de la planta es apropiado.

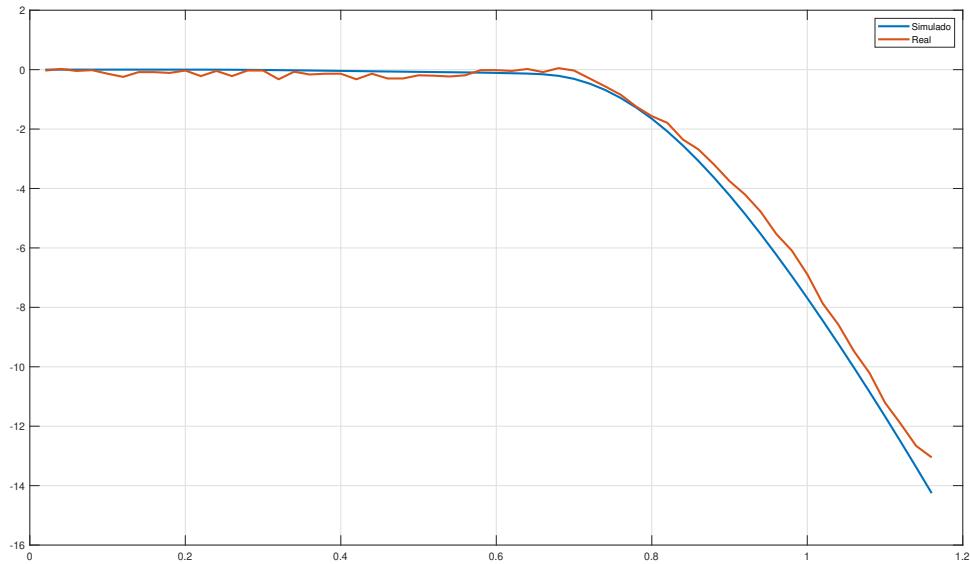


Figura 2: Respuesta simulada y medida a un escalón de 25°

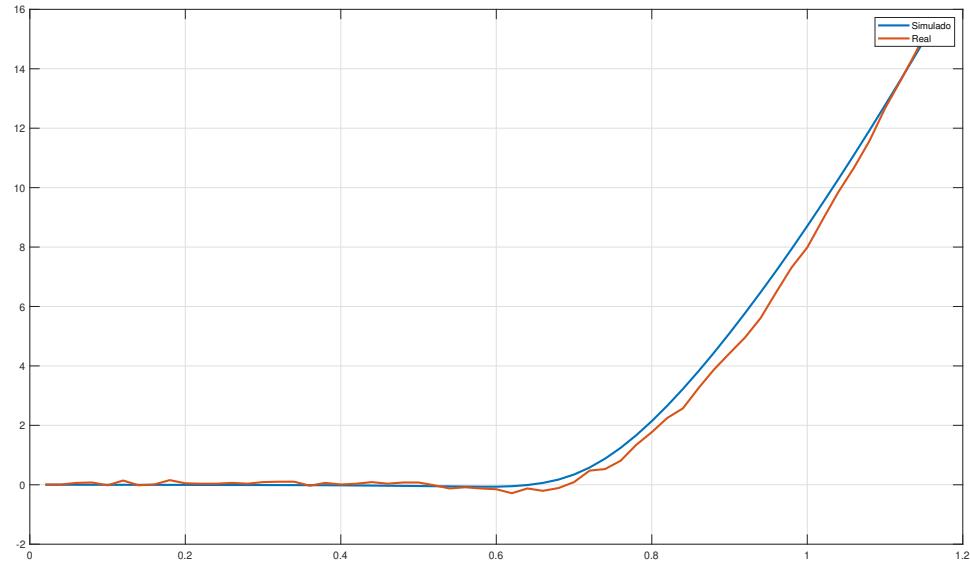


Figura 3: Respuesta simulada y medida a un escalón de -25°

Por otra parte, la entrada del sistema servo-barra es el ángulo del servo, el cual coincide con la entrada del sistema global. Para identificar la transferencia de este sistema se comandaron una sucesión

de ángulos para el servo y se registró la evolución del ángulo de la barra, para luego ajustar mediante una regresión lineal una transferencia de dos polos estables.

Para la regresión lineal se partió de una transferencia discreta con dos polos estables y una ganancia. Desarrollando la transferencia como el cociente entre la salida y la entrada del sistema se llega a la siguiente igualdad:

$$z^2Y(z) + (p_{1d} + p_{2d})zY(z) + p_{1d}p_{2d}Y(z) = kX(z) \quad (3)$$

Antitrasnformando se obtiene:

$$y(m+2) + (p_{1d} + p_{2d})y(m+1) + p_{1d}p_{2d}y(m) = kx(m) \quad (4)$$

Luego, definiendo $\alpha = p_1 + p_2$, $\beta = p_1p_2$ y $\gamma = k$; aplicando el cambio de variable $m = n - 2$ y despejando $y(n)$ se obtiene:

$$y(n) = -\alpha y(n-1) - \beta y(n-2) + \gamma x(n-2) \quad (5)$$

Finalmente, ésta ultima ecuación se puede escribir como producto de matrices $Y = AX$, tomando las siguientes matrices:

$$Y = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} y_2 & y_1 & x_1 \\ y_3 & y_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & y_{n-2} & x_{n-3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Entonces, luego de las definiciones, se podrá aproximar a la matriz A como

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (7)$$

Se realizó el cálculo para el set de datos obtenido al comandar una serie de referencias al servo, y una vez obtenidos los datos se obtuvieron los polos discretos como las raíces del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$. Utilizando la igualdad $p_c = \frac{1}{T_s} \log(p_d)$, con $T_s = \frac{1}{50}$ se obtuvieron los polos continuos:

$$p_{1c} = -4,21 \quad p_{2c} = -31,13 \quad (8)$$

Por ultimo, para obtener la ganancia continua se igualaron las transferencias continua y discreta en régimen estacionario ($s = 0$, $z = 1$), obteniendo así la siguiente ecuación para dicha ganancia:

$$g = \frac{\gamma p_{1c} p_{2c}}{(1 - p_{1d})(1 - p_{2d})} \quad (9)$$

de esta forma se obtuvo una ganancia continua de 57,19

Mediante la regresión lineal se obtuvo la siguiente transferencia para el sistema servo-barra:

$$P_{SB} = \frac{57,19}{(s + 4,21)(s + 31,13)} \quad (10)$$

Por ultimo, se superpuso la respuesta de la planta obtenida a las referencias utilizadas para la adquisición de datos con la respuesta real y se obtuvo el gráfico de la Figura 4. Se puede considerar que las respuestas son similares, y el ajuste por regresión lineal es aceptable.

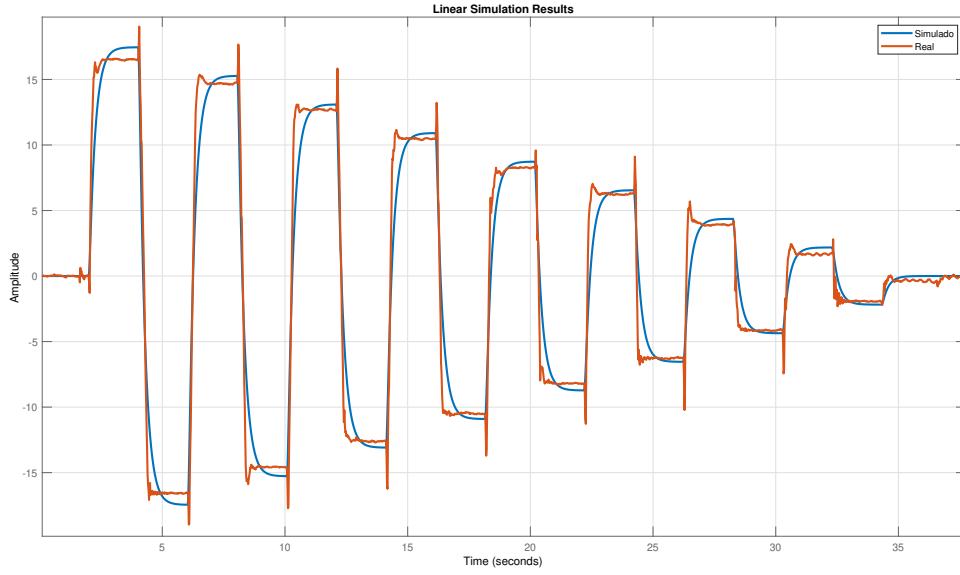


Figura 4: Respuesta real y simulada a distintos ángulos de referencia del servo

La planta completa, definida como $P_{SB}P_{BC}$ es la siguiente:

$$P = \frac{-1429,75}{s(s + 4,71)(s + 4,21)(s + 31,13)} \quad (11)$$

2.5. Representación en espacio de estados

Una vez obtenidas las transferencias, la representación en espacio de estados de la planta completa se puede obtener sin más grandes complicaciones, a través de las ecuaciones diferenciales de cada transferencia.

Para el sistema servo-barra se tiene la ecuación:

$$\dot{x}_4 = -35,339x_4 - 131,02617x_3 + 57,195u \quad (12)$$

Y para el sistema barra-carrito se tiene:

$$\dot{x}_2 = -25x_3 - 4,7x_2 \quad (13)$$

En base a estas ecuaciones se pueden deducir las matrices del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4,7 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -131,026 & 35,339 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 57,195 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (16)$$

$$D = 0 \quad (17)$$

3. Limitaciones de diseño

Si bien la planta obtenida en la sección anterior no presenta limitaciones de diseño, ya que todos sus polos son estables. Lo que se debe tener en cuenta a la hora de diseñar es la frecuencia de control y muestreo de 50 Hz, ya que no se podrá utilizar dinámica de frecuencia cercana a esta en el sistema. Además la limitación física de la señal de control agrega un aspecto a tener en cuenta, ya que la acción de control se tendrá que mantener dentro de estos límites.

El controlador proporcional debe mantener la acción de control dentro de los límites físicos de la planta, por lo tanto como máximo podrá ser $K_p = \frac{D_{max}}{\alpha_{max}} = 2,3$

La principal ventaja de diseñar un controlador con un ancho de banda alto es la velocidad de respuesta, elevar el ancho de banda implica una respuesta más rápida y permite un mejor seguimiento a entradas rápidas.

Sin embargo, también presentará una mayor sensibilidad al ruido, que suele tener alta frecuencia, y menor robustez lo que implicaría menor margen de fase y ganancia. Además se necesitará una mayor señal de control para poder rechazar las perturbaciones y alcanzar el equilibrio, lo cual puede saturar el actuador.

Diminuir el ancho de banda soluciona estos problemas pero trae los propios. La respuesta será considerablemente más lenta, incluso si es lo suficientemente lenta, puede que no llegue a estabilizar la planta dentro de los márgenes de la barra. Además, la respuesta ante perturbaciones será más lenta, lo que resultará en un peor rechazo a perturbaciones.

El ancho de banda estará dado por la frecuencia de uso. Dado que el control es digital habrá que considerar la frecuencia de Nyquist.

$$f_N = \frac{f}{2} = 25\text{Hz}$$

Pasándolo a frecuencia angular se obtiene que $\omega_N = 157\text{rad/s}$. El ancho de banda debe ser mucho menor para evitar problemas. Mínimamente deben ser menor a un tercio de ω_N , es decir $\omega = 52\text{rad/s}$

4. Diseño del controlador

Para el control se utiliza un control PID de la forma

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (18)$$

Donde cada una de las constantes se ajusta, dependiendo del tipo de control solicitado, para que la planta sea estable.

Todos los controladores se implementan con la forma bilineal, llegando a la siguiente ecuación en diferencias:

$$U_n = K_p e_n + K_i I_n + K_d D_n \quad (19)$$

$$I_n = I_{n-1} + \frac{T}{2} e_n + \frac{T}{2} e_{n-1} \quad D_n = 2 \frac{e_n - e_{n-1}}{T} - D_{n-1} \quad (20)$$

Donde T es el periodo con el que se controla, e_n y e_{n-1} los errores anterior, y previo al anterior, respectivamente.

4.1. Respuestas temporales

4.1.1. Control proporcional

Para el control proporcional se utilizó una constante $K_p = 2$ y se obtuvieron las siguientes respuestas a la perturbación tipo impulso y a la perturbación tipo escalón:

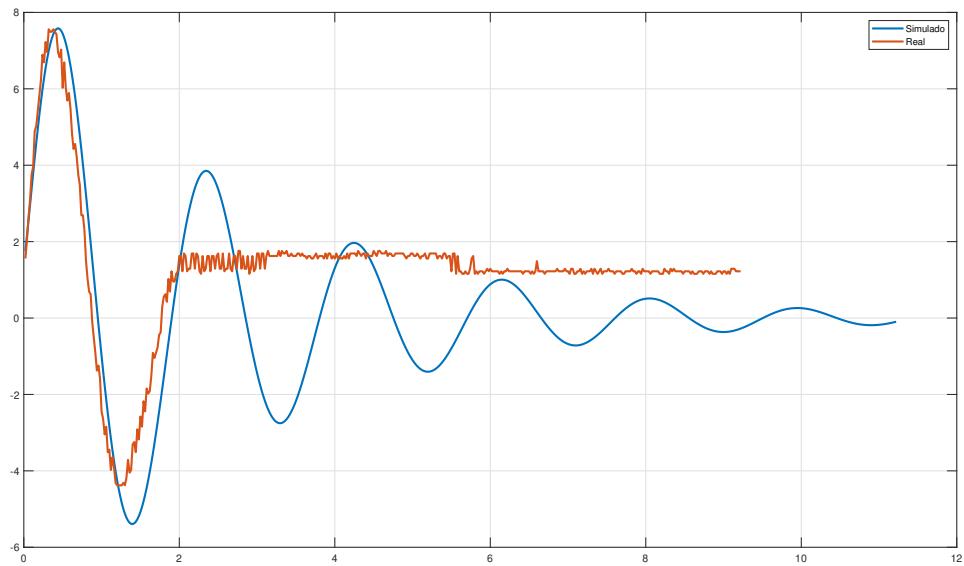


Figura 5: Respuesta a la perturbación tipo impulso del sistema con control proporcional

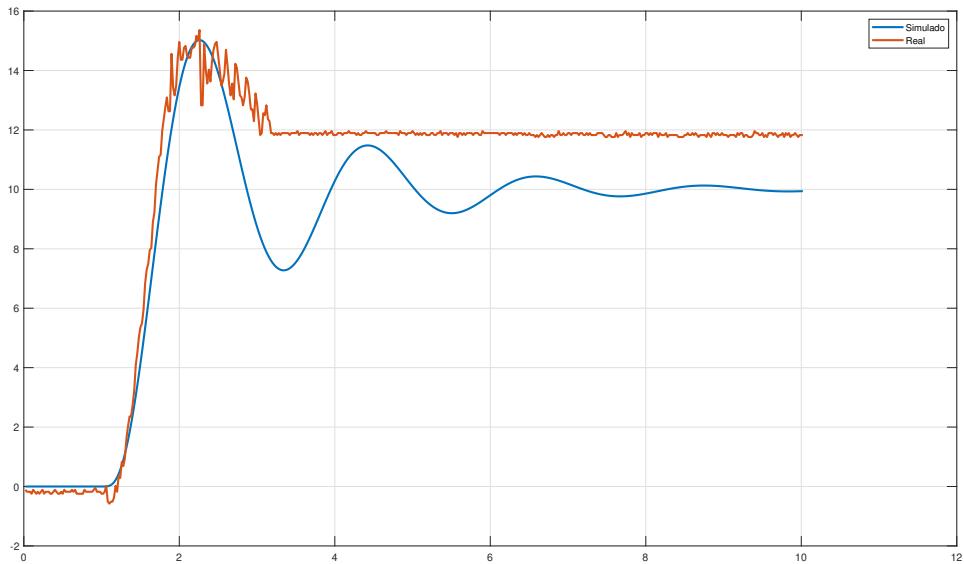


Figura 6: Respuesta al escalón del sistema con control proporcional

4.1.2. Control proporcional integral

Para el control proporcional integral se utilizó la constante $K_i = 0,15$, y la constante proporcional se disminuyó a $K_p = 1,5$ para mantener la acción de control dentro de las limitaciones de diseño y el sobrepico de la respuesta dentro de los límites de la barra. Las respuestas al impulso y escalón fueron las siguientes:

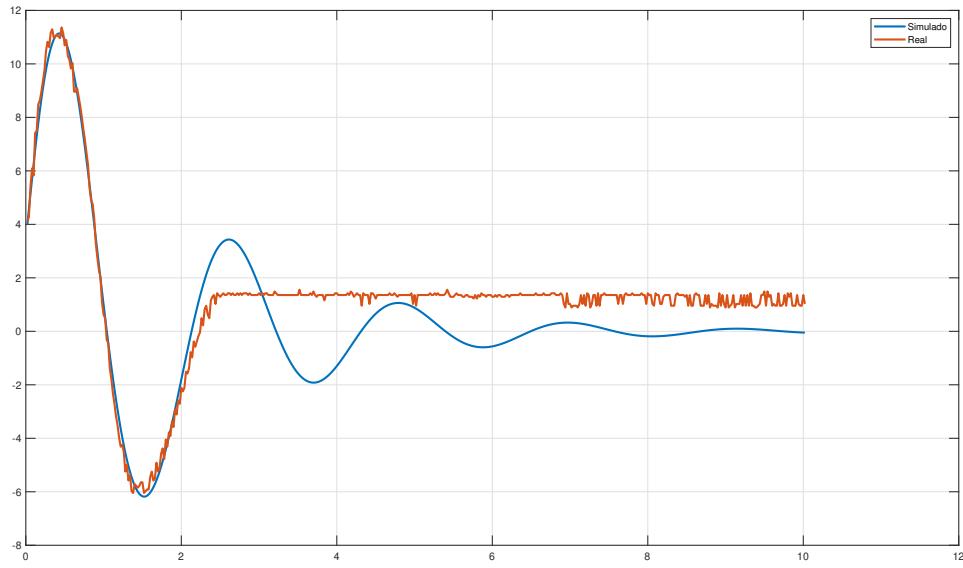


Figura 7: Respuesta a la perturbación tipo impulso del sistema con control proporcional integral

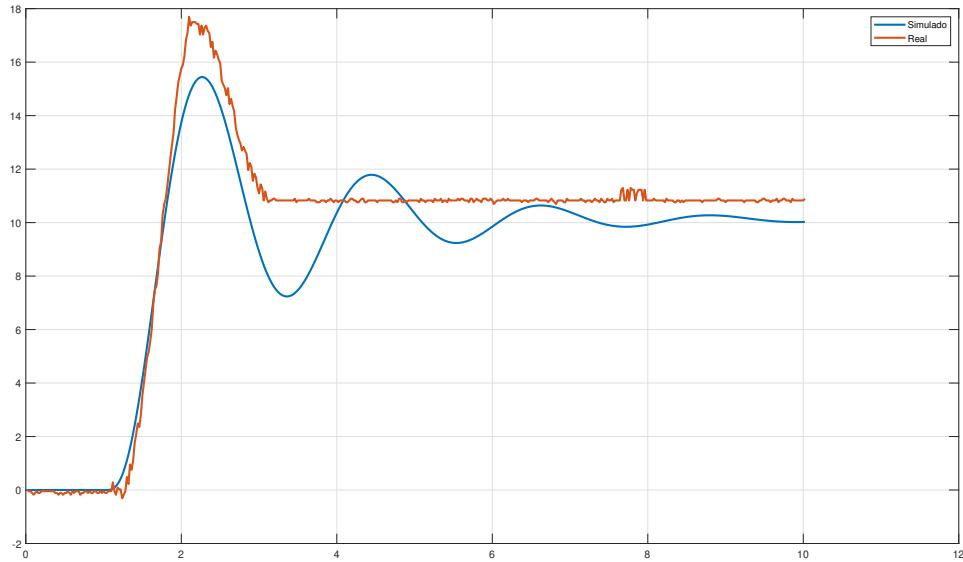


Figura 8: Respuesta al escalón del sistema con control proporcional integral

4.1.3. Control proporcional derivativo

En el caso del control proporcional derivativo, la constante derivativa utilizada fue $K_d = 0,0015$ y la constante proporcional se mantuvo igual al caso del control proporcional integral. La pequeña magnitud de la constante derivativa se debe a el ruido que presenta la medición de la posición del carro, ya que éste ruido al derivarse resulta en una acción de control de alta frecuencia, causando vibraciones en la respuesta. Las respuestas obtenidas son las siguientes:

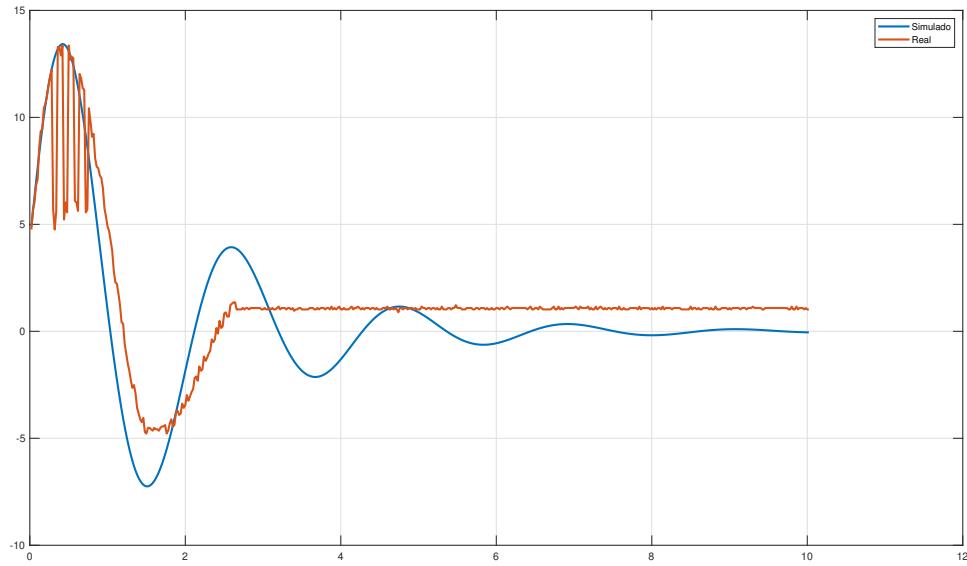


Figura 9: Respuesta a la perturbación tipo impulso del sistema con control proporcional derivativo

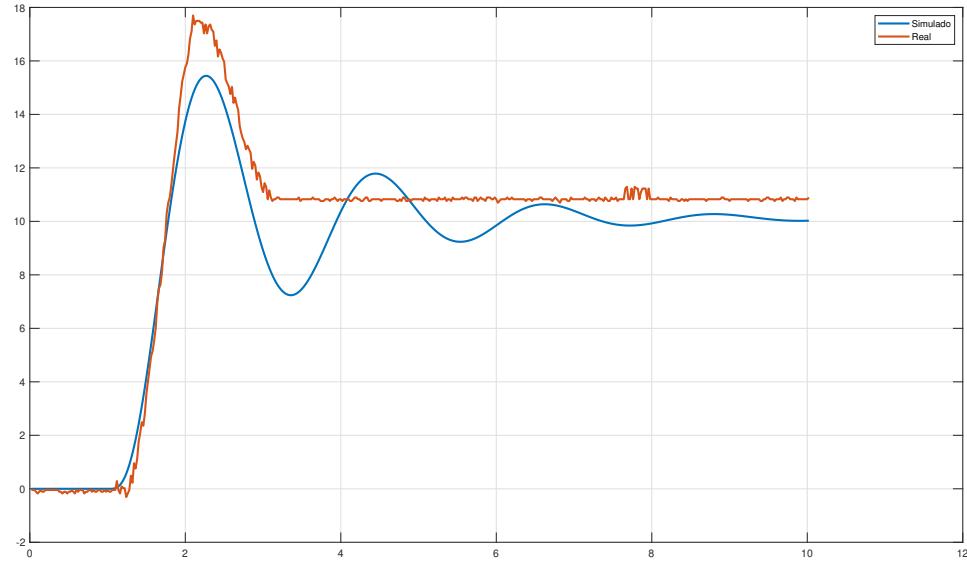


Figura 10: Respuesta al escalón del sistema con control proporcional derivativo

4.2. Análisis y comparación

El primer aspecto destacable de todos los casos es la falta de oscilaciones en las respuestas reales respecto a las simuladas, esto se puede atribuir principalmente a el carro que rueda sobre la barra. Ya que este presenta un rozamiento estático que no se tuvo en cuenta en el modelo, y además las irregularidades tanto de las ruedas del carro como de la barra hacen que el carro se frene antes de lo esperado.

Para el caso proporcional puro, se puede ver que la frecuencia de oscilación es similar a la simulada, y ambas respuestas presentan error constante en estado estacionario, como es esperable en este tipo de controlador.

En el caso proporcional integral, se puede ver como la frecuencia de oscilación es idéntica a la

simulada, pero nuevamente presenta error constante en estado estacionario, en este caso menor al proporcional puro. Si bien el control proporcional integral debería presentar error nulo en estado estacionario, el error presentado en nuestro caso es atribuible a lo mencionado en el primer párrafo de esta sección, principalmente a el rozamiento estático presentado por las ruedas del carro.

Finalmente, para el control proporcional derivativo, la frecuencia de oscilación nuevamente es similar a la simulada y, como en los dos casos anteriores, presenta error constante en estado estacionario. Un aspecto destacable es la vibración presentada en el primer pico de la respuesta de la Figura 9, causado por lo mencionado en la misma subsección en la que se encuentra el gráfico, el derivar la señal ruidosa de el sensor de distancia.

5. Conclusión

En el desarrollo de este trabajo se obtuvo tanto una transferencia entrada-salida de la planta a controlar como una representación en espacio de estados de la misma. Para esto se utilizaron métodos analíticos y empíricos, comparando resultados superponiendo respuestas temporales reales y simuladas.

También se implementaron distintos tipos de controladores, analizando la respuesta ante referencias y perturbaciones, comparándose con la respuesta esperada teórica.