普松過程與指數分布之間關係的程式設計作業說明

作業目標: 如課堂所述，若抵達(arrivals)型態呈現普松過程(Poisson process)，而且平均速率為λ，則整體間隔抵達時間（inter-arrival time）將會呈現指數分佈（Exponential distribution），並且平均間隔抵達時間將會是 1/λ。因此，作業目標為：

基本款:

1. 從[0..1]之間隨機取得一個值p，並從指數分佈的 CDF（如下公式）中，換算出對應的間隔抵達時間t。然後重複上述步驟，隨機得出一百萬筆間隔抵達時間t，<u>並求其平均看是否等於 1/λ</u>。

$$
\begin{aligned}
& p = \boldsymbol{F}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\
=> \quad & 1 - p = e^{-\lambda t} \\
=> \quad & ln(1-p) = \ln(e^{-\lambda t}) = -\lambda t \\
=> \quad & t = -ln(1-p)/\lambda
\end{aligned}
$$

進階款:

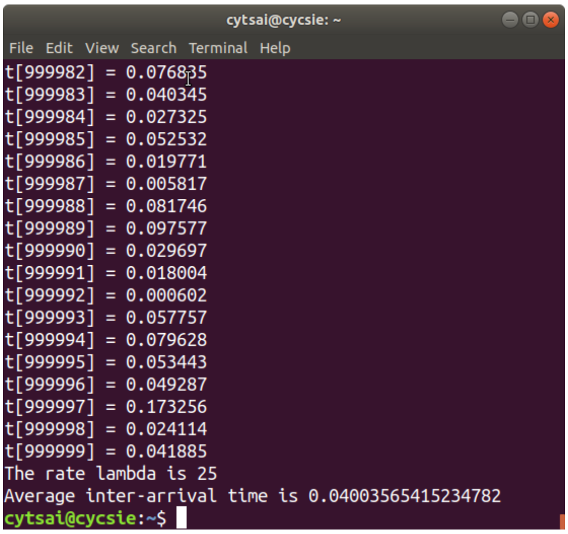
2. 後續，再將這 1 百萬筆時間資料，分為 1 萬個小區間進行統計，分別為 S0=(0 .. 0.00001], S1=(0.00001 .. 0.00002], ... , S9999=(0.00999 .. 0.01]進行統計，例如若 t50=0.000016, 表示此筆時間資料座落於 S1,則 S1 計數器+1。以此類推，將 1 百萬筆資料分別找到其所屬的區間，並累計於所對應的計數器。

3. 然而，實務上我們會發現 S3000 以後的計數器值幾乎都是 0。因此，若我們只考慮 S0 至 S3000，令 L0=S0, L1=S3, ... L1000=S3000，然後橫座標再作轉換如下：L0 對應到 x=0, L1 對應到 x=0.003, ... ,L1000 對應到 x=0.3，將 x 所對應的 L 計數器的值畫出來，即可反過來獲得<u>近似的</u>指數分佈 pdf 函數圖形。

作業繳交:

1. 程式碼(語言不限，但建議用 python 較為方便)。
2. 執行畫面及簡單說明。

參考執行結果: 令$\lambda = 25$, 求得 1 百萬筆的平均抵達時間為0.040035，十分接近$1/\lambda$。



```
t[999982] = 0.076835
t[999983] = 0.040345
t[999984] = 0.027325
t[999985] = 0.052532
t[999986] = 0.019771
t[999987] = 0.005817
t[999988] = 0.081746
t[999989] = 0.097577
t[999990] = 0.029697
t[999991] = 0.018004
t[999992] = 0.000602
t[999993] = 0.057757
t[999994] = 0.079628
t[999995] = 0.053443
t[999996] = 0.049287
t[999997] = 0.173256
t[999998] = 0.024114
t[999999] = 0.041885
The rate lambda is 25
Average inter-arrival time is 0.04003565415234782
cytsai@cycsie:~$
```

在得出如下的近似指數分佈的圖形中，分別驗證$x = 0.02, 0.04, 0.1, 0.2$等若干個函數值，發現皆與實際的指數分佈函數值近似，亦即：

$$p(0.02) = 25 * e^{-25*0.02} = 15.163$$

$$p(0.04) = 25 * e^{-25*0.04} = 9.197$$

$$p(0.1) = 25 * e^{-25*0.1} = 2.052$$

$$p(0.2) = 25 * e^{-25*0.1} = 0.168$$