

1. KOMBINASI LINEAR

Definisi

Suatu vektor \mathbf{w} disebut suatu **kombinasi linear** (*linear combination*) dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

Di mana k_1, k_2, \dots, k_r adalah skalar.

Contoh 1 Vektor-vektor pada R^3 adalah Kombinasi Linear dari \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k}

Setiap vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ pada R^3 dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor basis standar

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Karena

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Contoh 2 Memeriksa Kombinasi Linear

Perhatikan vektor-vektor $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ dan $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ pada R^3 . Tunjukkan bahwa $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ adalah suatu kombinasi linear dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} dan bahwa $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ bukan merupakan kombinasi linear dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

Penyelesaian.

Agar \mathbf{w} dapat menjadi kombinasi linear dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} , maka harus terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, yaitu

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

Atau

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyelaraskan komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh

$$k_1 + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

Matriks diperbesarnya adalah:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

Dengan OBE diperoleh matriks

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{-2b1 + b2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ -1 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{1b1 + b3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{8}b2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{8}b3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-b2 + b3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}k_2 &= 2 \\k_1 + 6k_2 &= 9 \\k_1 &= 9 - 12 \\k_1 &= -3\end{aligned}$$

Maka

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Demikian juga, agar \mathbf{w}' dapat merupakan kombinasi linear dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} , harus terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga $\mathbf{w}' = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, yaitu

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

Atau

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyelaraskan komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh

$$\begin{aligned}k_1 + 6k_2 &= 4 \\2k_1 + 4k_2 &= -1 \\-k_1 + 2k_2 &= 8\end{aligned}$$

Matriks diperbesarnya adalah:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Dengan OBE diperoleh matriks

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array} \right] b1 + b3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 12 \end{array} \right] - 2b1 + b2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{array} \right] \frac{1}{4}b3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}2k_2 &= 3 \\2k_2 &= \frac{3}{2} \\-8k_2 &= -9 \\k_2 &= \frac{9}{8}\end{aligned}$$

Sistem persamaan ini tidak konsisten sehingga tidak terdapat skalar k_1 dan k_2 . Sebagai konsekuensinya, \mathbf{w}' bukan merupakan kombinasi linear dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

Merentang (Spanning)

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ adalah vektor-vektor pada suatu ruang vektor V , maka umumnya beberapa vektor pada V mungkin merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ dan vektor lainnya mungkin tidak. Teorema berikut ini menunjukkan bahwa jika disusun suatu himpunan W yang mengandung semua vektor yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, maka W membentuk suatu subruang dari V .

Teorema 1

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ adalah vektor-vektor pada suatu ruang vektor V , maka:

- (a) Himpunan W yang terdiri dari semua kombinasi linear $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ adalah suatu subruang dari V .
- (b) W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ dalam arti bahwa setiap subruang lain dari V yang mengandung $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ pasti mengandung W .

Bukti (a). Untuk menunjukkan bahwa W adalah subruang dari V , harus dibuktikan bahwa W tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar. Terdapat paling tidak satu vektor pada W , yaitu $\mathbf{0}$, karena $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_r$. Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor-vektor pada W , maka

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r$$

dan juga sebagai

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

Di mana $c_1, c_2, \dots, c_r, k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar. Oleh karena itu,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + k_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (c_r + k_r)\mathbf{v}_r$$

Dan, untuk skalar sebarang k ,

$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{v}_1 + (kc_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (kc_r)\mathbf{v}_r$$

Jadi, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dan $k\mathbf{u}$ adalah kombinasi-kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ dan sebagai konsekuensinya terletak pada W . Oleh karena itu, W adalah tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar.

Bukti (b). Setiap vektor \mathbf{v}_i adalah suatu kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ karena dapat dituliskan

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 1\mathbf{v}_i + \dots + 0\mathbf{v}_r$$

Oleh karena itu, subruang W mengandung setiap vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Misalkan W' adalah subruang lain sebarang yang mengandung $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Karena W' tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, W' pasti mengandung semua kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Jadi, W' mengandung setiap vektor dari W .

Definisi

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor V , maka subruang W dari V yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor pada S disebut sebagai **ruang yang direntang** (space spanned) oleh $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ dan vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ merentang (span) W . Untuk menyatakan bahwa W adalah ruang yang direntang oleh vektor-vektor pada himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dituliskan

$$W = \text{rentang}(S) \text{ atau } W = \text{rentang}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

Contoh 3 Himpunan Rentangan untuk P_n

Polinomial $1, x, x^2, \dots, x^n$ merentang ruang vektor P_n karena setiap polinomial \mathbf{p} pada P_n dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linear dari $1, x, x^2, \dots, x^n$. Kita dapat menotasikannya dengan menuliskan

$$P_n = \text{rentang} \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

Contoh 4 Tiga Vektor yang Tidak Merentang R^3

Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, dan $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ merentang ruang vektor R^3 .

Penyelesaian.

Harus ditentukan apakah vektor sebarang $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pada R^3 dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

Dari vektor-vektor \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , dan \mathbf{v}_3 . Dengan menyatakan persamaan ini dalam bentuk komponen-komponennya menghasilkan

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

atau

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

atau

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = b_1$$

$$k_1 + k_3 = b_2$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3$$

Masalahnya kini hanya tinggal menentukan apakah sistem persamaan linear ini konsisten untuk semua nilai b_1, b_2 dan b_3 . Sesuai dengan teorema yang menyatakan jika A adalah suatu matriks $n \times n$, dan jika $T_A: R^n \rightarrow R^n$ adalah perkalian dengan A , maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks \mathbf{b} , $n \times 1$.

(b) $\det(A) \neq 0$,

Sistem ini konsisten untuk semua b_1, b_2 dan b_3 jika dan hanya jika matriks koefisiennya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Memiliki determinan tak nol. Namun demikian,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= (0 + 2 + 2) - (0 + 1 + 3) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\det(A) = 0$, sehingga $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan \mathbf{v}_3 tidak merentang R^3 .

Teorema 2

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ dan $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ adalah dua himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor V , maka

$$\text{rentang}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\} = \text{rentang}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$$

Jika dan hanya jika setiap vektor pada S adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S' dan setiap vektor pada S' adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S .

2. KEBEBASAN LINEAR

Definisi

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan vektor

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Memiliki paling tidak satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan **bebas linear** (*linearly independent*). Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan **tidak bebas linear** (*linearly dependent*).

Contoh 1 Himpunan Bebas Linear

Perhatikan vektor-vektor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ pada R^3 . Persamaan-persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Menjadi

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Atau secara ekuivalen

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Ini mengimplikasikan bahwa $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$, sehingga himpunan $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bebas linear.

Contoh 2 Menentukan Kebebasan atau Ketidakbebasan Linear

Tentukan apakah vektor-vektor

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

Membentuk suatu himpunan tidak bebas linear atau himpunan bebas linear.

Penyelesaian

Persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Menjadi

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Atau secara ekuivalen,

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian akan diperoleh

$$k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0$$

$$-2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

$$3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

Jadi, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan \mathbf{v}_3 membentuk suatu himpunan tidak bebas linear jika sistem ini memiliki solusi nontrivial, atau suatu himpunan bebas linear jika hanya memiliki solusi trivial.

Matriks diperbesarnya adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Dengan OBE diperoleh matriks

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2b1 + b2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3b1 + b3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{16}b2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{16b2 + b3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-5b2 + b1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, k_2 = -\frac{1}{2}t, k_3 = t$$

Jadi, sistem ini memiliki solusi-solusi nontrivial dan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan \mathbf{v}_3 membentuk suatu himpunan tidak bebas linear. Sebagai alternatif, dapat ditunjukkan keberadaan solusi nontrivial tanpa perlu menyelesaikan sistem ini dengan hanya menunjukkan bahwa matriks koefisiennya memiliki determinan nol dan sebagai konsekuensinya tidak dapat dibalik.

Contoh 3 Himpunan Bebas Linear pada P_n

Tunjukkan bahwa polinomial

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

Membentuk suatu himpunan bebas linear vektor-vektor pada P_n .

Penyelesaian.

Misalkan $\mathbf{p}_0 = 1, \mathbf{p}_1 = x, \mathbf{p}_2 = x^2, \dots, \mathbf{p}_n = x^n$ dan asumsikan bahwa beberapa kombinasi linear dari polinomial ini adalah nol, misalnya

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \dots + a_n\mathbf{p}_n = 0$$

Atau secara ekuivalen,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \text{ untuk semua } x \text{ pada } (-\infty, \infty) \quad (1)$$

Harus ditunjukkan bahwa

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Untuk melihat bahwa hal ini memang benar, ingatlah dari aljabar linear bahwa polinomial *tak nol* dengan pangkat n memiliki paling banyak n akar yang berbeda. Tetapi hal ini mengimplikasikan bahwa $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$; atau jika tidak, sesuai dengan (1) diperoleh bahwa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ adalah suatu polinomial *tak nol* dengan tak terhingga banyaknya akar.

Istilah “tidak bebas linear” berarti bahwa vektor-vektor “bergantung” satu sama lain dengan suatu cara. Teorema berikut menunjukkan bahwa ini adalah fakta sebenarnya.

Teorema 3

Suatu himpunan S dengan dua atau lebih vektor adalah:

- (a) Tidak bebas linear jika dan hanya jika paling tidak salah satu dari vektor pada S dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S .*
- (b) Bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor pada S yang dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S .*

Akan dibuktikan bagian (a) dan meninggalkan bukti bagian (b) sebagai latihan.

Bukti (a). Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah suatu himpunan dengan dua atau lebih vektor. Jika diasumsikan bahwa S tidak bebas linear, maka terdapat skalar k_1, k_2, \dots, k_r yang tidak semuanya nol, sedemikian rupa sehingga

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Untuk lebih spesifik, misalkan $k_1 \neq 0$. Maka (2) dapat ditulis kembali sebagai

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \dots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

Yang menyatakan \mathbf{v}_1 sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S . Demikian juga, jika $k_1 \neq 0$ pada (2) untuk beberapa nilai $j = 2, 3, \dots, r$, maka \mathbf{v}_j dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S .

Sebaliknya, marilah asumsikan bahwa paling tidak satu vektor pada S dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Untuk lebih spesifik, misalkan

$$\mathbf{v}_1 = c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + c_r \mathbf{v}_r$$

sehingga

$$\mathbf{v}_1 - c_2 \mathbf{v}_2 - c_3 \mathbf{v}_3 - \cdots - c_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Maka S tidak bebas linear karena persamaan

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Dipenuhi oleh

$$k_1 = 1, k_2 = -c_2, \dots, k_r = -c_r$$

Yang tidak semuanya nol. Bukti untuk kasus di mana beberapa vektor selain \mathbf{v}_1 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S adalah serupa.

Teorema berikut ini memberikan dua fakta sederhana mengenai kebebasan linear yang penting untuk diketahui.

Teorema 4

- (a) *Suatu himpunan terhingga vektor-vektor yang mengandung vektor nol adalah tidak bebas linear.*
- (b) *Suatu himpunan dengan tepat dua vektor adalah bebas linear jika dan hanya jika tidak satu pun dari vektornya merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya.*

Akan dibuktikan bagian (a) dan meninggalkan bukti bagian (b) sebagai latihan.

Bukti (a). Untuk vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sebarang, himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{0}\}$ tidak bebas linear karena persamaan

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r + 1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Menyatakan $\mathbf{0}$ sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S dengan koefisien-koefisien yang tidak semuanya nol.

Teorema 5

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada R^n . Jika $r > n$, maka S tidak bebas linear.

Bukti. Misalkan

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1n})$$

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{2n})$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_{r1}, \mathbf{v}_{r2}, \dots, \mathbf{v}_{rn})$$

Perhatikan persamaan

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Jika dinyatakan kedua ruas dari persamaan ini dalam bentuk komponen-komponennya, dan kemudian menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian, maka diperoleh sistem

$$v_{11}k_1 + v_{12}k_2 + \dots + v_{r1}k_r = 0$$

$$v_{21}k_1 + v_{22}k_2 + \dots + v_{r2}k_r = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \dots + v_{rn}k_r = 0$$

Ini merupakan sistem homogen yang terdiri dari n persamaan dengan r faktor yang tidak diketahui k_1, \dots, k_r . Karena $r > n$, suatu sistem persamaan linear homogen dengan jumlah faktor yang tidak diketahui lebih banyak dari jumlah persamaan, memiliki tak terhingga banyaknya solusi, sistem tersebut memiliki solusi-solusi nontrivial. Oleh karena itu, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ merupakan suatu himpunan tidak bebas linear.

BASIS DAN DIMENSI

Basis adalah suatu ukuran tertentu yang menyatakan komponen dari sebuah vektor.

Definisi

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V . Maka S disebut **basis** untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

- (a) S bebas linear.
- (b) S merentang V .

1. Sebagai contoh, di R^2 memiliki himpunan $S = \{(1,0), (0,1)\}$ yang bersifat

a. Bebas linear

Perhatikan bahwa S bebas linear apabila $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi ketika $k_1 = k_2 = 0$. Tinjau bahwa:

$$\begin{aligned}k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} &= \mathbf{0} \\k_1(1,0) + k_2(0,1) &= (0,0) \\(k_1, k_2) &= (0,0)\end{aligned}$$

Jadi $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} = \mathbf{0}$ mengharuskan $k_1 = k_2 = 0$. Akibatnya **S bebas linear.**

b. Merentang R^2

Misalkan vektor sebarang $\mathbf{v} = (a, b)$, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \\(a, b) &= a(1,0) + b(0,1)\end{aligned}$$

Akibatnya S merentang R^2 .

Dengan demikian himpunan $S = \{(1,0), (0,1)\}$ merupakan basis untuk R^2 .

2. Diberikan dua vektor: $\mathbf{v}_1 = (4,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-7, -8)$. Apakah himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ merupakan basis untuk R^2 ?

a. Bebas Linear

Pandang kombinasi linear

$$\begin{aligned}\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \text{ dengan } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ \alpha_1(4,1) + \alpha_2(-7, -8) &= (0,0) \\ (4\alpha_1 - 7\alpha_2, \alpha_1 - 8\alpha_2) &= (0,0)\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh SPL

$$\begin{aligned}4\alpha_1 - 7\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Matriks diperbesarnya adalah :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -7 & 0 \\ 1 & -8 & 0 \end{array} \right] \text{ Dengan OBE diperoleh matriks } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Karena kombinasi linear $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \vec{0}$ hanya dipenuhi untuk $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, maka himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bebas linear.

b. Merentang R^2

Cara 1:

Karena untuk setiap $\mathbf{v} = (a, b)$

$$\mathbf{v} = (a, b) = a(4, 1) + b(-7, -8) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

Vektor \mathbf{v} dinyatakan sebagai kombinasi linear dari \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2

Cara 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} \\ &= (ad - bc) \\ &= (-32) - (-7) \\ &= -25 \end{aligned}$$

Karena $\det(A) \neq 0$, maka merentang R^2 .

Dengan demikian himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ merupakan basis untuk R^2 .

Teorema 6. Keunikan Representasi Basis

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor V . Maka setiap \mathbf{v} vektor pada V dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ dengan tepat satu cara.

Bukti. Karena S merentang V , maka sesuai definisi dari suatu himpunan rentangan bahwa setiap vektor pada V dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S . Untuk melihat bahwa hanya terdapat *satu* cara untuk menyatakan suatu vektor sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S , dimisalkan beberapa vektor \mathbf{v} dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

dan juga sebagai

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$

Dengan mengurangkan persamaan pertama dengan persamaan kedua menghasilkan

$$0 = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

Karena ruas kanan dari persamaan ini adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S . Kebebasan linear dari S mengimplikasikan bahwa

$$c_1 - k_1 = 0, c_2 - k_2 = 0, \dots, c_n - k_n = 0$$

yaitu,

$$c_1 = k_1, c_2 = k_2, \dots, c_n = k_n$$

Jadi, kedua pernyataan untuk \mathbf{v} adalah sama.

Contoh:

Cukup jelas bahwa $B = \{(1,0), (1,1)\}$ merupakan basis bagi R^2 . Vektor $(5,3)$ dapat dinyatakan sebagai

$$(5,3) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$$

Satu-satunya nilai α dan β sehingga $(5,3) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$ adalah $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$.

Koordinat-koordinat Relatif terhadap suatu Basis

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V , dan

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

adalah pernyataan untuk suatu vektor \mathbf{v} dalam bentuk basis S , maka skalar c_1, c_2, \dots, c_n disebut sebagai **koordinat** \mathbf{v} relatif terhadap basis S . Vektor (c_1, c_2, \dots, c_n) pada R^n yang disusun dari koordinat-koordinat ini disebut **vektor koordinat \mathbf{v} relatif terhadap S** (*coordinate vector of \mathbf{v} relative to S*); ini dinotasikan sebagai

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

CATATAN. Harus dicatat bahwa vektor koordinat tidak hanya tergantung pada basis S tetapi juga pada urutan penulisan vektor basis. Perubahan urutan vektor basis akan berakibat pada perubahan yang berkaitan dengan urutan entri-entri pada vektor koordinat.

1. Karena $B = \{(1,0), (1,1)\}$ adalah basis untuk R^2 . Koordinat relatif dari $(5,3)$ terhadap basis B adalah $(2,3)$

$$(5,3) = 2(1,0) + 3(1,1)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \\ (5,3) &= c_1(1,0) + c_2(1,1) \\ (5,3) &= (c_1 + c_2, c_2)\end{aligned}$$

Diperoleh SPL

$$c_1 + c_2 = 5$$

$$c_2 = 3$$

Akibatnya diperoleh $c_2 = 3$, dan $c_1 = 2$. Sehingga terbukti bahwa koordinat relatif dari $(5,3)$ terhadap basis B adalah $(2,3)$.

2. Diketahui bahwa $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ adalah basis untuk R^3 , Tentukan:

- Koordinat dari $\mathbf{u} = (5, 1, -9)$ relatif terhadap basis S , yaitu $(\mathbf{u})_S$
- Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ yang koordinat relatifnya terhadap basis S adalah $(-1, 3, 2)$.

Solusi soal a:

Akan dicari koordinat relatif dari $\mathbf{u} = (5, -1, 9)$ relatif terhadap basis S . Dalam hal ini harus dicari $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 \\ (5, -1, 9) &= c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4) \\ (5, -1, 9) &= (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3)\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh SPL

$$\begin{aligned}c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 + 4c_3 &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan OBE terhadap $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{array} \right]$ diperoleh $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$. Sehingga $c_1 = 1, c_2 = -1$, dan $c_3 = 2$.

Jadi diperoleh,

$$(\mathbf{u})_S = (1, -1, 2).$$

Solusi soal 2:

- Selanjutnya vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ yang koordinat relatifnya adalah $(-1, 3, 2)$ dapat dicari menggunakan definisi koordinat relatif $(\mathbf{w})_S$.
- Perhatikan bahwa $(\mathbf{w})_S = (c_1, c_2, c_3)$, dengan c_1, c_2, c_3 adalah skalar yang mengakibatkan persamaan berikut berlaku

$$\mathbf{w} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$$

- Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= -1\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= -1(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) \\ &= (11, 31, 7).\end{aligned}$$

- Tentukan vektor koordinat \mathbf{w} relatif terhadap basis $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ untuk \mathbb{R}^2 .
 $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1); \mathbf{w} = (3, -7)$

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \\ (3, -7) &= c_1(1, 0) + c_2(0, 1) \\ (3, -7) &= (c_1, c_2)\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh $c_1 = 3$, dan $c_2 = -7$. Sehingga

$$(\mathbf{w})_s = (3, -7)$$

Contoh 1 **Basis Standar untuk R^3**

Jika

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \text{ dan } \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

maka $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ adalah suatu himpunan bebas linear pada R^3 . Himpunan ini juga merentang R^3 karena vektor sebarang $\mathbf{v} = (a, b, c)$ pada R^3 dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \quad (1)$$

Jadi, S adalah basis untuk R^3 dan disebut sebagai **basis standar** (*standard basis*) untuk R^3 . Dengan melihat koefisien-koefisien \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} pada (1), karena koordinat-koordinat \mathbf{v} relatif terhadap basis standar adalah a , b , dan c , sehingga

$$(\mathbf{v})_s = (a, b, \dots, c)$$

Dengan membandingkan hasil ini dengan (1) maka

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_s$$

persamaan ini menyatakan bahwa komponen-komponen dari suatu vektor \mathbf{v} relatif terhadap suatu sistem koordinat siku-siku xyz dan koordinat-koordinat \mathbf{v} relatif terhadap basis standar adalah sama.

1. Diberikan tiga vektor: $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$. Apakah himpunan $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan basis untuk R^3 ?

- a. Bebas Linear

Pandang kombinasi linear

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 &= \mathbf{0}, \text{ dengan } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \\ \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(2, 2, 0) + \alpha_3(3, 3, 3) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh SPL

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matriks diperbesarnya adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \text{ Dengan OBE diperoleh matriks } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh diperoleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Karena kombinasi linear

$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = 0$ hanya dipenuhi untuk $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, maka himpunan $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bebas linear.

b. Merentang R^3

Cara 1:

Karena untuk setiap $\mathbf{v} = (a, b, c)$

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(2, 2, 0) + c(3, 3, 3) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$$

Vektor \mathbf{v} dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ dan \mathbf{v}_3

Cara 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= (6 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Karena $\det(A) \neq 0$, maka merentang R^3

Dengan demikian himpunan $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan basis untuk R^3 .

Contoh 2 Basis Standar untuk R^n

Jika

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

maka

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

adalah suatu himpunan bebas linear pada R^n . Lebih lanjut, himpunan ini juga merentang R^n karena vektor sebarang $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pada R^n dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n \quad (2)$$

Jadi, S adalah suatu basis untuk R^n dan disebut sebagai **basis standar untuk R^n** (*standard basis for R^n*). Sesuai dengan (2) bahwa koordinat-koordinat $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ relatif terhadap basis standar adalah v_1, v_2, \dots, v_n , sehingga

$$(\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Sebagaimana pada Contoh 1, diperoleh $\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$, sehingga suatu vektor \mathbf{v} dan vektor koordinatnya relatif terhadap basis standar untuk R^n adalah sama.

CATATAN, Pada R^2 dan R^3 , vektor-vektor basis standar biasanya dinotasikan dengan \mathbf{i}, \mathbf{j} , dan \mathbf{k} , dan bukannya dengan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ dan \mathbf{e}_3 . Akan digunakan kedua notasi, tergantung pada situasi tertentu.

1. Diberikan dua vektor: $\mathbf{v}_1 = (1, -4, 2, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 8, -4, 6)$. Apakah himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ merupakan basis untuk R^4 ?

a. Bebas Linear

Pandang kombinasi linear

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \text{ dengan } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ \alpha_1(1, -4, 2, -3) + \alpha_2(-3, 8, -4, 6) &= (0, 0, 0, 0) \\ (\alpha_1 - 3\alpha_2, -4\alpha_1 + 8\alpha_2, 2\alpha_1 - 4\alpha_2, -3\alpha_1 + 6\alpha_2) &= (0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh SPL

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 3\alpha_2 &= 0 \\ -4\alpha_1 + 8\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Matriks diperbesarnya adalah :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{array} \right] \text{ Dengan OBE diperoleh matriks } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Karena kombinasi linear

$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi untuk $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, maka himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bebas linear.

b. Merentang R^4

Karena untuk setiap $\mathbf{b} = (a, b)$

$$\mathbf{b} = (a, b) = a(1, -4, 2, -3) + b(-3, 8, -4, 6) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

Vektor \mathbf{v} dinyatakan sebagai kombinasi linear dari \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2

Dengan demikian himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ merupakan basis untuk R^4

Contoh 3 Memperlihatkan bahwa Himpunan Vektor adalah suatu Basis

Misalkan $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah suatu basis untuk R^3 .

Penyelesaian.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan S merentang R^3 , harus ditunjukkan bahwa suatu vektor sebarang $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear

$$\mathbf{b} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$$

dari vektor-vektor pada S . Dengan menyatakan persamaan ini dalam bentuk komponen-komponennya diperoleh

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

atau

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3$$

atau, dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian.

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Jadi, untuk menunjukkan bahwa S merentang R^3 , harus ditunjukkan bahwa sistem (3) memiliki satu solusi untuk setiap pilihan dari $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Untuk membuktikan bahwa S bebas linear, harus ditunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (4)$$

adalah $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Sebagaimana di atas, jika (4) dinyatakan dalam bentuk komponen-komponennya, pembuktian kebebasan akan berkurang hanya dengan menunjukkan bahwa sistem homogen

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

hanya memiliki solusi trivial. Amati bahwa sistem (3) dan (5) memiliki matriks koefisien yang sama. Jadi, sesuai dengan teorema yang menyatakan jika A adalah suatu matriks $n \times n$, dan jika $T_A: R^n \rightarrow R^n$ adalah perkalian dengan A , maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen. bagian:

- (a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks \mathbf{b} , $n \times l$.
- (c) $\det(A) \neq 0$

dapat dibuktikan secara simultan bahwa S adalah bebas linear dan merentang R^3 dengan menunjukkan bahwa pada sistem (3) dan (5) matriks koefisiennya memiliki determinan tak nol. Dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ diperoleh } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

dan dengan demikian S adalah basis untuk R^3 .

Contoh 4. Merepresentasikan suatu Vektor dengan Menggunakan Dua Basis

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah basis untuk R^3 pada contoh sebelumnya.

- (a) Tentukan vektor koordinat dari $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ dalam S .
 (b) Tentukan vektor \mathbf{v} pada R^3 yang vektor koordinatnya dalam basis S adalah $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$

Penyelesaian (a).

Harus menentukan skalar-skalar c_1, c_2, c_3 sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$$

atau, dalam bentuk komponen-komponennya.

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Dengan menyelaraskan komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini, diperoleh $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$ (buktikan). Oleh karena itu

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Penyelesaian (b).

Dengan menggunakan definisi dari vektor koordinat $(\mathbf{v})_S$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) \\ &= (11, 31, 7) \end{aligned}$$

Contoh 5 **Basis Standar untuk P_n**

- (a) Tunjukkan bahwa $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ adalah suatu basis untuk ruang vektor P_n yang terdiri dari polinomial-polinomial berbentuk $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.
 (b) Tentukan vektor koordinat dari polinomial $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ relatif terhadap basis $S = \{1, x, x^2\}$ untuk P_2 .

Penyelesaian (a). Telah ditunjukkan bahwa S merentang P_n pada contoh 3 subbab 1 dan telah ditunjukkan bahwa S adalah himpunan bebas linear pada contoh 3 subbab 2. jadi, S adalah basis untuk P_n , dan disebut sebagai **basis standar untuk P_n** (*standard basis for P_n*)

Penyelesaian (b). Koordinat-koordinat $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ adalah koefisien-koefisien skalar dari vektor basis $1, x$, dan x^2 , sehingga $(\mathbf{p})_S = (a_0, a_1, a_2)$.

1. Tentukan basis untuk P_2

$$1 + x + x^2, x + x^2, x^2$$

a. Bebas Linear

Misalkan $\mathbf{p}_0 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_1 = x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x^2$

Pandang kombinasi linear

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 = 0$$

$$a_0(1 + x + x^2) + a_1(x + x^2) + a_2(x^2) = 0$$

$$(a_0, a_0x + a_1x, a_0x^2 + a_1x^2 + a_2x^2) = (0, 0, 0)$$

Sehingga diperoleh SPL

$$a_0 = 0$$

$$a_0x + a_1x = 0$$

$$a_0x^2 + a_1x^2 + a_2x^2 = 0$$

Akan ditunjukkan bahwa

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0.$$

Matriks diperbesarnya adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ Dengan OBE diperoleh matriks } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh diperoleh $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Karena kombinasi linear $a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 = 0$ hanya dipenuhi untuk $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, maka bebas linear.

b. Merentang P_2

Cara 1:

Jika \mathbf{u} , \mathbf{v} dan \mathbf{w} adalah vektor-vektor pada W , maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_3$$

Oleh karena itu,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$$

Dan, untuk skalar sebarang k ,

$$k\mathbf{u} = (k)\mathbf{v}_1 + (k)\mathbf{v}_2 + (k)\mathbf{v}_3$$

Jadi, $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ dan $k\mathbf{u}$ adalah kombinasi-kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ dan sebagai konsekuensinya terletak pada W .

Cara 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) \\ = 1$$

Karena $\det(A) \neq 0$, maka merentang P_2

Dengan demikian himpunan tersebut merupakan basis untuk P_2 .

Contoh 6 **Basis Standar untuk M_{mn}**

Misalkan

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Himpunan $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ adalah basis untuk ruang vektor M_{22} yang terdiri dari matriks 2×2 . Untuk melihat bahwa S merentang M_{22} , perhatikan bahwa suatu vektor (matriks) sebarang

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

Untuk melihat bahwa S bebas linear, asumsikan bahwa

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

Yaitu,

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, $a = b = c = d = 0$, sehingga S bebas linear. Basis S pada contoh ini disebut basis *standar* untuk M_{22} . Secara umum, **basis standar untuk M_{mn}** (*standard basis for M_{mn}*) terdiri dari mn matriks yang berbeda dengan satu bilangan 1 dan nol untuk entri-entri lainnya.

1. Tunjukkan bahwa himpunan vektor berikut adalah basis untuk M_{22}

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk melihat bahwa S merentang M_{22} , perhatikan bahwa suatu vektor (matriks) sebarang

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Untuk melihat bahwa S bebas linear, asumsikan bahwa

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

Yaitu,

$$a \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a + d & 6a - b - 8c \\ 3a - b - 12c - d & -6a - 4c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh SPL

$$3a + d = 0$$

$$6a - b - 8c = 0$$

$$3a - b - 12c - d = 0$$

$$-6a - 4c + 2d = 0$$

Matriks diperbesarnya adalah :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right] \text{ Dengan OBE diperoleh matriks } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Maka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $a = b = c = d = 0$, sehingga S bebas linear. Basis S ini disebut basis *standar* untuk M_{22} .

Contoh 7 Basis untuk Subruang rentang (S)

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu himpunan bebas linear pada ruang vektor V , maka S adalah suatu basis untuk subruang rentang (S) karena himpunan S merentang rentang (S) berdasarkan definisi dari rentang (S).

Definisi

Suatu ruang vektor tak nol V disebut **berdimensi terhingga** (*finite-dimensional*) jika terdiri dari himpunan terhingga vektor-vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak terdapat himpunan semacam ini, V disebut sebagai **berdimensi takterhingga** (*infinite-dimensional*). Selain itu, akan dianggap ruang vektor nol sebagai berdimensi terhingga.

Contoh 8 Beberapa Ruang Berdimensi Terhingga dan Takterhingga

Dari contoh 2, 5, dan 6, ruang-ruang vektor R^n, P_n , dan M_{mn} adalah berdimensi terhingga. Ruang-ruang vektor $F(-\infty, \infty)$, $C(-\infty, \infty)$, $C^m(-\infty, \infty)$, dan $C^\infty(-\infty, \infty)$ adalah berdimensi takterhingga.

Teorema berikut akan memberikan kunci dari konsep dimensi.

Teorema 7

Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis sebarang.

- (a) Jika suatu himpunan memiliki vektor lebih dari n , maka himpunan tersebut bersifat tidak bebas linear.
- (b) Jika suatu himpunan memiliki vektor kurang dari n , maka himpunan tersebut bersifat tidak merentang V .

Bukti (a). Misalkan $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ adalah himpunan sebarang yang terdiri dari m vektor pada V , di mana $m > n$. Ingin ditunjukkan bahwa S' tidak bebas linear. Karena $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu basis, setiap w_i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor pada S , misalkan

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$w_m = a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \dots + a_{nm}v_n \quad (6)$$

Untuk menunjukkan bahwa S' tidak bebas linear, Harus ditentukan skalar-skalar k_1, k_2, \dots, k_m , yang tidak sesuai dengan nol, sedemikian rupa sehingga

$$k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2 + \dots + k_m \mathbf{w}_n = \mathbf{0} \quad (7)$$

Dengan menggunakan persamaan persamaan pada (6), dapat ditulis kembali (7) sebagai

$$\begin{aligned} & (k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + \dots + k_m a_{1m}) \mathbf{v}_1 \\ & + (k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + \dots + k_m a_{2m}) \mathbf{v}_2 \\ & \vdots \\ & + (k_1 a_{n1} + k_2 a_{n2} + \dots + k_m a_{nm}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jadi, dari kebebasan linear dari S , masalah pembuktian bahwa S' adalah himpunan tidak bebas linear hanya menjadi pembuktian bahwa terdapat skalar-skalar k_1, k_2, \dots, k_m , yang tidak semuanya nol, yang memenuhi

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1m}k_m &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2m}k_m &= 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \dots + a_{nm}k_m &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Tetapi (8) memiliki lebih banyak faktor yang tidak diketahui dibanding jumlah persamaannya, sehingga bukti menjadi lengkap karena Teorema suatu sistem persamaan linear homogen dengan jumlah faktor yang tidak diketahui lebih banyak dari jumlah persamaan, memiliki takterhingga banyaknya solusi. menjamin keberadaan solusi-solusi nontrivial.

Bukti (b) . Misalkan $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ adalah himpunan sebarang yang terdiri dari m vektor pada V , dimana $m > n$. Akan ditunjukkan bahwa S' tidak merentang V . Pembuktiannya akan dilakukan dengan menggunakan kontradiksi: akan ditunjukkan bahwa dengan mengasumsikan S' merentang V akan mengarah pada suatu kontradiksi kebebasan linear dari $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Jika S' merentang V , maka setiap vektor pada V adalah kombinasi linear dari vektor-vektor pada S' . Khususnya, setiap vektor basis \mathbf{v}_i adalah kombinasi linear dari vektor-vektor pada S' , misalnya

$$\mathbf{v}_1 = a_{11} \mathbf{w}_1 + a_{21} \mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1} \mathbf{w}_m$$

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{v}_2 & = & a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{v}_n & = & a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m
\end{array} \tag{9}$$

Untuk memperoleh kontradiksi ini, Akan ditunjukkan bahwa terdapat skalar k_1, k_2, \dots, k_n , yang tidak semuanya nol, sedemikian rupa sehingga

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{10}$$

Tetapi amati bahwa (9) dan (10) memiliki bentuk yang sama dengan bentuk (6) dan (7) kecuali bahwa m dan n dipertukarkan dan demikian pula untuk \mathbf{w} dan \mathbf{v} nya. Jadi, perhitungan yang mengarah ke (8) kini menghasilkan

$$\begin{array}{cccc}
a_{11}\mathbf{k}_1 + a_{12}\mathbf{k}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{k}_n & = & 0 \\
a_{21}\mathbf{k}_1 + a_{22}\mathbf{k}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{k}_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}\mathbf{k}_1 + a_{m2}\mathbf{k}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{k}_n & = & 0
\end{array}$$

Sistem linear ini memiliki lebih banyak faktor yang tidak diketahui dibanding jumlah persamaannya, dan karena suatu sistem persamaan linear homogen dengan jumlah faktor yang tidak diketahui lebih banyak dari jumlah persamaan, memiliki takterhingga banyaknya solusi. memiliki solusi-solusi nontrivial.

Sesuai dengan teorema sebelumnya bahwa jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis sebarang untuk ruang vektor V , maka semua himpunan pada V yang secara stimulant merentang V harus memiliki jumlah vektor yang sama dengan basis sebarang S . penjelasan ini menghasilkan teorema berikut, yang merupakan salah satu teorema yang paling penting dalam aljabar linear.

Teorema 8

Semua basis untuk ruang vektor berdimensi terhingga memiliki jumlah vektor yang sama.

Untuk melihat bagaimana teorema ini berkaitan dengan konsep “dimensi”, ingatlah bahwa basis standar untuk R^n memiliki n vektor (contoh 2). Jadi, Teorema 8 secara tidak langsung menyatakan bahwa semua basis untuk R^n memiliki n vektor. Khususnya, setiap basis untuk R^3 memiliki tiga vektor, setiap basis untuk R^2 memiliki dua vektor, dan setiap basis pada $R^1(=R)$ memiliki satu vektor. Secara intuitif, R^3 adalah berdimensi tiga, R^2 (suatu bidang)

adalah berdimensi dua, dan R (suatu garis) adalah berdimensi satu. Jadi, untuk ruang vektor-vektor yang telah dikenal, jumlah vektor pada suatu basis adalah sama dengan dimensinya. Ini mendasari definisi berikut

Definisi

Dimensi dari ruang vektor V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan $\dim(V)$, didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk V . Selain itu, didefinisikan ruang vektor nol sebagai berdimensi nol.

Contoh 9 Dimensi dari Ruang Solusi

$$\dim(R^n) = n \quad [\text{Basis standar memiliki } n \text{ vektor (contoh 2).}]$$

$$\dim(P_n) = n + 1 \quad [\text{Basis standar memiliki } n + 1 \text{ vektor (contoh 5).}]$$

$$\dim(M_{mn}) = mn \quad [\text{Basis standar memiliki } mn \text{ vektor (contoh 6).}]$$

Contoh 10 Dimensi dari Ruang Solusi

Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi sistem homogen

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & & + x_5 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 & & + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & & - x_5 & = & 0 \\ & x_3 & + x_4 & + x_5 & = 0 \end{array}$$

Penyelesaian.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks diperbesarnya adalah:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Dengan OBE diperoleh matriks $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

Solusi umum dari sistem yang diberikan adalah

$$x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0, x_5 = t$$

Oleh karena itu, vektor-vektor solusi dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yang menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Merentang ruang solusi. Karena keduanya juga bebas linear, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ adalah suatu basis, dan ruang solusinya adalah berdimensi dua.

Beberapa Teorema Dasar

Teorema *Plus/Minus* menyusun dua prinsip dasar yang akan menjadi patokan sebagian besar teorema selanjutnya.

Teorema 9 Teorema Plus Minus

Misalkan S adalah himpunan tak kosong vektor-vektor pada ruang vektor V .

- (a) Jika S adalah himpunan bebas linear dan jika \mathbf{v} adalah suatu vektor adalah suatu vektor pada V yang terletak di luar rentang (S), maka himpunan $S \cup \{\mathbf{v}\}$ yang diperoleh dengan menyiapkan \mathbf{v} ke dalam S masih bersifat bebas linear.
- (b) Jika \mathbf{v} adalah suatu vektor pada S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya pada S , dan jika $S - \{\mathbf{v}\}$ menotasikan himpunan yang diperoleh dengan mengeluarkan \mathbf{v} dari S , maka S dan $S - \{\mathbf{v}\}$ merentang ruang yang sama: yaitu

$$\text{rentang}(S) = \text{rentang}(S - \{\mathbf{v}\})$$

Teorema tersebut dapat divisualisasikan pada R^3 sebagaimana berikut:

- (a) Suatu himpunan S yang terdiri dari dua vektor bebas linear pada R^3 merentang suatu bidang melewati titik asal. Jika memperbesar S dengan menyisipkan suatu vektor \mathbf{v} sebarang di luar bidang ini, maka himpunan yang diperoleh yang terdiri dari ketiga vektor masih bersifat bebas linear karena tidak satu pun dari ketiga vektor terletak pada bidang yang sama dengan dua vektor lainnya.
- (b) Jika S adalah suatu himpunan yang terdiri dari tiga vektor nonkolinear pada R^3 yang terletak pada suatu bidang yang sama melewati titik asal. Maka ketiga vektor merentang bidang. Tetapi, jika dikeluarkan dari S vektor sebarang \mathbf{v} yang merupakan kombinasi linear dari dua vektor lainnya, himpunan sisa yang terdiri dari dua vektor akan tetap merentang bidang.

Secara umum, untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan vektor-vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis untuk suatu ruang vektor V , harus menunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut bebas linear dan merentang V . tetapi, jika kebetulan diketahui bahwa V memiliki dimensi n (sehingga $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ mengandung jumlah vektor yang tepat untuk suatu basis), maka hanya perlu periksa *salah satu*, yaitu apakah bebas linear atau merentang, sedangkan syarat lainnya akan berlaku secara otomatis. Penjelasan ini merupakan isi dari teorema berikut.

Teorema 10

Jika V adalah suatu ruang vektor berdimensi n , dan jika S adalah suatu himpunan pada V dengan tepat n vektor, maka S adalah basis untuk V jika salah satu dari hal berikut berlaku, S merentang V atau S bebas linear.

Bukti. Asumsikan S memiliki tepat n vektor dan merentang V . Untuk membuktikan bahwa S adalah himpunan bebas linear. Tetapi jika hal ini tidak berlaku, maka beberapa vektor \mathbf{v} pada S adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Jika menghilangkan vektor ini dari S , maka sesuai dengan Teorema Plus/Minus 9(b) diperoleh bahwa himpunan sisa yang terdiri dari $n - 1$ vektor masih merentang V . Tetapi hal ini tidak mungkin, karena sesuai Teorema 7 (b), tidak ada himpunan dengan vektor kurang dari n yang dapat merentang ruang vektor berdimensi n . Dengan demikian, S bebas linear.

Asumsikan bahwa S memiliki tepat n vektor dan merupakan suatu himpunan bebas linear. Untuk membuktikan bahwa S adalah suatu basis, harus menunjukkan bahwa S merentang V . Tetapi jika hal ini tidak berlaku, maka terdapat beberapa vektor \mathbf{v} di dalam V yang tidak berada pada rentang(S). Jika disisipkan vektor ini ke dalam S , maka sesuai dengan Teorema Plus/Minus 9(a) bahwa himpunan yang terdiri dari $n + 1$ vektor ini akan masih bebas linear. Tetapi hal ini tidak mungkin, karena menurut Teorema 7 (a) tidak ada himpunan dengan vektor lebih dari n pada suatu ruang vektor berdimensi n yang bebas linear. Dengan demikian, S merentang V .

Contoh 11 Memeriksa Basis

- (a) Tunjukkan bahwa $\mathbf{v}_1 = (-3, 7)$ dan $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$ membentuk suatu basis untuk R^2 .
- (b) Tunjukkan bahwa $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 7)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 4)$ membentuk suatu basis untuk R^3 .

Penyelesaian (a). Karena tidak satu pun vektor yang merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya, kedua vektor membentuk suatu himpunan bebas linear pada ruang berdimensi dua R^2 , dan oleh karena itu membentuk suatu basis sesuai Teorema 10.

Penyelesaian (b). Vektor-vektor \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 membentuk suatu himpunan bebas linear pada bidang xz (mengapa). Vektor \mathbf{v}_3 terletak di luar bidang xz , sehingga himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ juga bebas linear. Karena R^3 berdimensi tiga, Teorema 10 mengimplikasikan bahwa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah basis untuk R^3 .

Teorema berikut menunjukkan bahwa untuk suatu ruang vektor V yang berdimensi terhingga. Setiap himpunan yang merentang V didalamnya mengandung suatu basis untuk V , dan setiap himpunan bebas linear pada V adalah bagian dari beberapa basis untuk V .

Teorema 11

Misalkan S adalah suatu himpunan terhingga dari vektor-vektor pada suatu ruang vektor V berdimensi terhingga.

- (a) Jika S merentang V , tetapi bukan suatu basis untuk V , maka S dapat direduksi menjadi suatu basis untuk V dengan mengeluarkan vektor-vektor yang sesuai dari S .*
- (b) Jika S adalah suatu himpunan bebas linear yang belum merupakan basis untuk V , maka S dapat diperbesar menjadi suatu basis untuk V dengan menyisipkan vektor-vektor yang sesuai ke dalam S .*

Bukti (a). Jika S adalah suatu himpunan vektor-vektor yang merentang V tetapi bukan merupakan basis untuk V , maka S adalah suatu himpunan tidak bebas linear. Jadi beberapa vektor \mathbf{v} pada S dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S . Dengan menggunakan Teorema Plus/Minus (b), dapat mengeluarkan \mathbf{v} dari S yang diperoleh masih akan tetap merentang V . Jika S' adalah basis untuk V , dan pembuktian selesai. Jika S' tidak bebas linear, maka dapat dikeluarkan beberapa vektor yang sesuai dari S' sehingga menghasilkan himpunan S'' yang masih merentang V . Dapat terus mengeluarkan vektor-vektor dengan cara ini hingga tiba pada suatu himpunan vektor-vektor pada S yang bebas linear dengan merentang V . Subhimpunan dari S ini adalah basis untuk V .

Bukti (b). Misalkan bahwa $\dim(V) = n$. Jika S adalah himpunan bebas linear yang belum menjadi basis untuk V , maka S tidak merentang V , dan terdapat beberapa vektor \mathbf{v} pada V yang tidak termasuk dalam rentang (S). Menurut Teorema Plus/minus, dapat menyisipkan \mathbf{v} ke dalam S , dan himpunan S' yang diperoleh masih akan tetap bebas linear. Jika S' merentang V , maka S' adalah basis untuk V , dan pembuktian selesai. Jika S' tidak merentang V , maka dapat disisipkan suatu vektor yang sesuai ke dalam S' sehingga menghasilkan suatu himpunan S' yang masih bebas linear. Dapat terus menyisipkan vektor-vektor dengan cara ini hingga diperoleh suatu himpunan dengan n vektor bebas linear pada V . Himpunan ini akan menjadi basis untuk V sesuai dengan Teorema 10.

Teorema 12

Jika W adalah suatu subruang dari suatu ruang vektor V yang berdimensi terhingga, maka $\dim(W) \leq \dim(V)$. Lebih lanjut, jika $\dim(W) = \dim(V)$, maka $W = V$.

Bukti. Karena V berdimensi terhingga, maka demikian juga W . Misalkan $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ adalah basis untuk W . terdapat dua kemungkinan, S juga merupakan basis untuk V atau tidak. Jika ya, maka $\dim(W) = \dim(V) = m$. Jika tidak, maka vektor-vektor dapat ditambahkan ke

himpunan bebas linear S untuk membuatnya menjadi basis untuk V , sehingga $\dim(W)$ adalah suatu himpunan dari m vektor bebas linear pada ruang vektor V yang berdimensi m , oleh karena itu, S adalah suatu basis untuk V .

Latihan

1. Manakah dari himpunan vektor berikut yang merupakan basis untuk R^2
 - a. $(2,1), (3,0)$
 - b. $(0,0), (1,3)$
2. Manakah dari himpunan vektor berikut yang merupakan basis untuk R^3
 - a. $(3,1,-4), (2,5,6), (1,4,8)$
 - b. $(2,-3,1), (4,1,1), (0,-7,1)$
3. Manakah dari himpunan vektor berikut yang merupakan basis untuk P_2
 - a. $-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$
 - b. $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$
4. Tentukan vektor koordinat \mathbf{w} relatif terhadap basis $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ untuk R^2 .
 $\mathbf{u}_1 = (2, -4), \mathbf{u}_2 = (3, 8); \mathbf{w} = (1, 1)$
5. Tentukan dimensi dan basis untuk ruang solusi dari sistem berikut.
 - a. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
 $-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
 $-x_1 + x_3 = 0$
 - b. $x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$
 $2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0$