Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika, Realsi Rekurens, Ajabar Boolean
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Fariska Zakhralativa, Nur Ulfa Maulidevi
Kamis, 8 Oktober 2020
Waktu: 60 menit

---

1. Tulis ulang pernyataan berikut (jika **tidak** menuliskannya, maka ujian tidak akan diperiksa, nilai langsung 0): "Saya menyatakan bahwa saya mengerjakan kuis ini dengan sejujur-jujurnya, tanpa bantuan orang lain dan tanpa menggunakan cara yang tidak dibenarkan. Apabila pada kemudian hari diketahui saya mengerjakan kuis ini dengan cara yang tidak jujur, saya bersedia mendapatkan konsekuensinya, yaitu mendapatkan nilai E pada mata kuliah IF22120 Semester 1 2020/2021. " (Nilai: 2)

2. Diberikan $f_0 = 1$ dan $f_n = 5f_{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat $n > 0$, serta diberikan pula $g_n = 5^n$ untuk setiap bilangan bulat $n$ ε 0. Dengan menggunakan induksi matematika, tunjukkan bahwa $f_n = g_n$ untuk setiap bilangan bulat $n$ ε 0. (Nilai: 20)

   Jawaban:

   Akan dibuktikan bahwa berlaku $f_n = g_n$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$, dengan $f_n = 5f_{n-1}$; $f_0 = 1$ serta $g_n = 5^n$

   Basis induksi
   Untuk kasus basis $n = 0$, kita dapat peroleh $f_0 = 1$ dan $g_0 = 5^0 = 1$
   Karena $f_0 = g_0$ , maka dapat dikatakan bahwa pernyataan berlaku untuk $n = 0$ ***(4)***

   Langkah induksi
   Asumsikan untuk suatu nilai $n = k$, pernyataan tersebut benar, maka dapat ditulis

   $$f_k = g_k$$

   atau, $f_k = 5^k$ ***(4)***

   Akan dibuktikan bahwa untuk nilai $n = k+1$, pernyataan tersebut juga benar sebagai berikut.

   $$\begin{aligned} f_{k+1} &= 5f_{(k+1)-1} \quad \textbf{(2)} \\ &= 5f_k \quad \textbf{(2)} \\ &= 5(5^k) \quad \textbf{(2)} \\ &= 5^{k+1} \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

   $$g_{k+1} = 5^{k+1}$$

   Dengan demikian, dapat dikatakan pernyataan $f_n = g_n$ benar untuk $n = k+1$ **(2)**
   Karena pada langkah basis dan langkah induksi, pernyataan terbukti benar, maka pernyataan $f_n = g_n$ berlaku untuk $n \geq 0$ adalah benar. **(2)**

$$a_n = -2a_{n-1} + 8a_{n-2};\ a_0 = 4; a_1 = 3$$

3. Tentukan solusi relasi rekursi . (Nilai: 20)
   Jawaban:
   Persamaan Karakteristik: $r^2 + 2r \quad - 8 = 0r^2 + 2r \quad - 8 = 0$
   Akar-akarnya: $(r+4)(r-2) = 0 \rightarrow r_1 = -4\ ;\ r_2 = 2$ **(3)**

   $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow \alpha_1(-4)^n + \alpha_2 2^n\ a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow \alpha_1(-4)^n + \alpha_2 2^n$ **(3)**
   $a_0 = 4 a_0 = 4$ □ $\alpha_1(-4)^0 + \alpha_2 2^0 = 4 \alpha_1(-4)^0 + \alpha_2 2^0 = 4$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \ldots (1)$ **(4)**

$a_1 = 3a_1 = 3$ □ $\alpha_1(-4)^1 + \alpha_2 2^1 = 3\alpha_1(-4)^1 + \alpha_2 2^1 = 3$

$-4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \ldots (2)$ **(4)**

Dengan eliminasi persamaan (1) dan (2), diperoleh solusinya adalah

$\alpha_1 \alpha_1$= 5/6 dan $\alpha_2 = \alpha_2 =$19/6. **(4)**

Jadi, solusi relasi rekurensnya adalah

$a_n = \frac{5}{6}(-4)^n + \frac{19}{6}2^n \; a_n = \frac{5}{6}(-4)^n + \frac{19}{6}2^n$ **(2)**

4. Laju penyebaran suatu virus terus meningkat sehingga banyaknya orang yang tertular bertambah sebesar 20% setiap minggunya. Jika banyaknya orang yang tertular di awal pengamatan adalah 1200 orang. Maka tentukanlah
    a. Relasi rekursif $P_n$ yang merepresentasikan banyak orang tertular penyakit pada minggu ke-*n*
    b. Solusi dari $P_n$
    c. Berapa banyak orang yang tertular pada minggu ke-4? (**Catatan**: gunakan pembulatan ke atas jika dibutuhkan) (Nilai: 20)

<u>Jawaban</u>:

a. $P_n = \begin{cases} 1200, & n = 0 \\ P_{n-1} + 0.2P_{n-1}, & n \geq 0 \end{cases}$ **(6)**

b.
$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0.2P_{n-1} = 1.2P_{n-1} \\ &= 1.2(1.2P_{n-2}) = (1.2)^2 P_{n-2} \\ &= 1.2^2(1.2P_{n-3}) = (1.2)^3 P_{n-3} \\ &= \cdots (dan\ seterusnya) \\ &= 1.2^n P_0 \end{aligned}$$
**(8)**

c.
$$\begin{aligned} P_4 &= 1.2^4 P_0 \\ &= 1.2^4\,(1200) \\ &= 2488.32 \\ &= 2489\ orang \end{aligned}$$
**(6)**

5. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x$ dalam bentuk kanonik SOP (sum-of-product), POS (product-of-sum). (Nilai: 20)

<u>Jawaban</u>:

- SOP
  - Lengkapi setiap literal
    $x = x(y + y')(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$ **(4)**
  - Jumlahkan setiap literal
    $f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$ **(4)**
  - Bentuk kanonik SOP
    $f(x, y, z) = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 = \Sigma(4, 5, 6, 7)$ **(2)**
- POS
  - Lengkapi setiap literal
    $x = x + yy' + zz' = (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)(x + y' + z')$ **(4)**
  - Kalikan setiap literal
    $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)(x + y' + z')$ **(4)**
  - Bentuk kanonik POS
    $f(x, y, z) = M_0M_1M_2M_3 = \Pi(0, 1, 2, 3)$ **(2)**

6. Buatlah sebuah rangkaian logika dengan memanfaatkan Peta Karnaugh untuk menentukan apakah suatu decimal dengan representasi 4 bit merupakan bilangan ganjil dan memiliki minimal dua bit 0. (Nilai: 20)

<u>Jawaban</u>:

Misalkan decimal 4 bit direpresentasikan sebagai wxyz dengan w, x, y, z bernilai 1 atau 0.

Berikut ini adalah tabel kebenaran yang menentukan apakah susunan decimal dalam 4 bit memenuhi prinsip bilangan ganjil pada desimal dan memiliki minimal dua bit 0.

| w | x | y | z | f(w, x, y, z) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Atas nilai maks 5, dapet 1 poin per 3 baris bener**

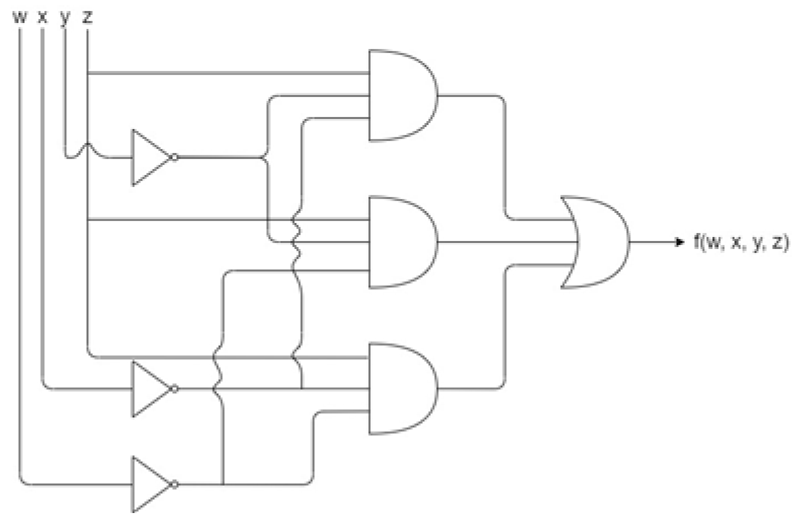
Berikut ini adalah Peta Karnaugh yang terbentuk dari tabel kebenaran di atas.

| | | yz | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| wx | 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 01 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Hasil penyederhanaan: f(w, x, y, z) = w’x’z + w’y’z + x’y’z

**Tabel nilai maks 4, penyederhanaan fungsi nilai maks 3**

Berikut ini adalah rangkaian logika




**Nilai maks 8**