Нечеткие множества

Уже на ранних стадиях развития исследований в области искусственного интеллекта перед разработчиками систем встала проблема формализации и оперирования простейшими высказываниями повседневной жизни, типа "Если в машине перед тобой сидит неопытный водитель - держись от нее подальше". Для создания действительно интеллектуальных систем, способных адекватно взаимодействовать с человеком, был необходим новый математический аппарат, который переводит неоднозначные жизненные утверждения в язык четких и формальных математических формул. Серьезным шагом в этом направлении стала теория нечетких множеств (fuzzy sets theory), разработанная Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) из университета Беркли. Его работа "Fuzzy Sets", опубликованная в 1965 году в журнале "Information and Control", заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и стала начальным толчком к развитию новой математической теории. Он же дал и название для новой области науки - "fuzzy logic". Прилагательное "fuzzy", которое можно перевести на русский как нечеткий, размытый, ворсистый, пушистый, введено в название новой теории с целью дистанцирования от традиционной четкой математики и аристотелевой логики, оперирующих с четкими понятиями: “принадлежит - не принадлежит”, “истина - ложь”.

В обычной теории множеств существует несколько способов задания множества. Одним из них является задание с помощью характеристической функции, определяемой следующим образом. Пусть **U** — так называемое **<u>универсальное множество</u>**, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т.д. **<u>Характеристическая функция множества</u>** $\mathbf{A \subseteq U}$ — это функция $\mathbf{I_A(x)}$, значения которой указывают, является ли $\mathbf{x \in U}$ элементом множества **A**:

$$\mathbf{I_A(x)} = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathbf{x \in A} \\ 0, \text{ если } \mathbf{x \notin A} \end{cases} \qquad (1)$$

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений. Множество **A** определяется как совокупность объектов, имеющих некоторое общее свойство, наличие или отсутствие которого у любого элемента **x** задается характеристической функцией (1). Причем относительно природы объекта не делается никаких предположений.

Задание некоторого множества в этом случае эквивалентно заданию его характеристической функции, поэтому все операции над множествами можно выразить через действия над их характеристическими функциями.

Основные операции объединения, пересечения и разности двух подмножеств **A** и **B** из **U** с характеристическими функционалами $I_A(x)$ и $I_B(x)$ соответственно определяются следующим образом для каждого $\mathbf{x \in U}$:

$$I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x)\cdot I_B(x); \qquad (2)$$

$$I_{A\cap B}(x) = I_A(x)\cdot I_B(x);$$

$$I_{A\setminus B}(x) = I_A(x) - I_{A\cap B}(x) = I_A(x)(1 - I_B(x)).$$

Операции объединения и пересечения могут быть записаны также в несколько ином виде:

$$I_{A\cup B}(x) = \max(I_A(x), I_B(x));$$

$$I_{A\cap B}(x) = \min(I_A(x), I_B(x)). \qquad (3)$$

Например, даны два множества A= {1, 2, 3, 4} и B = {3, 4, 5, 6}, тогда

$$I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x)\cdot I_B(x);$$

$I_{AUB}(1) = 1(1) + 0(1) – 1(1)*0(1) = 1 + 0 – 0 = 1;$
$I_{AUB}(3) = 1(3) + 1(3) – 1(3)*1(3) = 1 + 1 – 1 = 1;$
$I_{AUB}(5) = 0(5) + 1(5) – 0(5)*1(5) = 0 + 1 – 0 = 1;$

$$I_{A\cap B}(x) = I_A(x)\cdot I_B(x);$$

$I_{A\cap B}(1) = 1(1) * 0(1) = 1*0 = 0;$

$I_{A \cap B}(3) = 1(3) * 1(3) = 1*1 = 1;$
$I_{A \cap B}(5) = 0(5) * 1(5) = 0*1 = 0;$

$$I_{A \cup B}(x) = \max(I_A(x), I_B(x));$$

$I_{AUB}(1) = \max(1(1), 0(1)) = \max(1,0) = 1;$
$I_{AUB}(3) = \max(1(3), 1(3)) = \max(1,1) = 1;$
$I_{AUB}(5) = \max(0(5), 1(5)) = \max(0,1) = 1;$

$$I_{A \cap B}(x) = \min(I_A(x), I_B(x)).$$

$I_{A \cap B}(1) = \min(1(1), 0(1)) = \min(1,0) = 0;$
$I_{A \cap B}(3) = \min(1(3), 1(3)) = \min(1,1) =1;$
$I_{A \cap B}(5) = \min(0(5), 1(5)) = \min(0,1) = 0.$

Однако такие понятия, как множество “больших" или "малых величин”, уже не являются множествами в классическом смысле, так как не определены границы их степеней *малости*, которые позволили бы провести классификационную процедуру (1) и ***четко*** отнести каждый объект к определенному классу. Большинство классов реальных объектов и процессов относятся именно к такому нечетко определенному типу. Поэтому возникает необходимость введения понятия о нечетком подмножестве как о классе с непрерывной градацией степеней принадлежности.

Понятие нечеткого множества - эта попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать к данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывания типа “такой-то элемент принадлежит данному множеству” теряют смысл, поскольку необходимо указать “насколько сильно” или с какой степенью конкретный элемент удовлетворяет свойствам данного множества.

С точки зрения характеристической функции, ***нечеткие множества*** есть естественное обобщение обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке [0,1]. Причем 0 и 1 представляют собой соответственно низшую и высшую степень принадлежности элемента к определенному множеству. В теории *нечетких множеств* характеристическая функция называется ***<u>функцией принадлежности</u>*** *(membership function)*, задающая для всех элементов степень наличия у них некоторого свойства, по которому они относятся к множеству **A**, а ее значение $\mu_A(x)$ — **степенью принадлежности** элемента **x** нечеткому множеству **A**, т.е. численное значение функции принадлежности характеризует степень принадлежности элемента некоторому нечеткому множеству, являющемуся в выражении естественного языка некоторой, как правило, элементарной характеристикой явления (степени эффективности режима, уровня квалификации специалиста и т.д.).

Более строго, ***<u>нечетким множеством</u>*** *(fuzzy set)* **A** называется совокупность пар

$A=\{<x, \mu_A(x)> \mid x \in U\},$

где μ_A — функция принадлежности, т.е. $\mu_A : U \to [0, 1].$

Функция принадлежности — это не вероятность, т.к. нам неизвестно статистическое распределение, нет повторяемости экспериментов. Значения функции принадлежности могут быть взяты только из априорных знаний, интуиции (опыта), опроса экспертов.

Если в классической теории множеств понятие характеристической функции играет второстепенную роль, то для нечетких множеств функция принадлежности становится единственно возможным средством их описания.

Если универсальное множество состоит из конечного количества элементов $U = \{u_1, u_2, \dots \mu_k\}$, тогда нечеткое множество **A** записывается в виде $A = \sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i) / u_i$. В случае непрерывного множества **U** используют такое обозначение $A = \int_U \mu_A(u) / u$

Примечание: знаки $\sum$ и $\int$ в этих формулах означают совокупность пар $\mu_A(u)$ и **u**.

Пример. Представить в виде нечеткого множества понятие “мужчина среднего роста”.

Решение: **A** = 0/155+0.1/160 + 0.3/165 + 0.8/170 +1/175 +0.8/180 + 0.3/185 +0/190.

<u>Носителем</u> нечеткого множества **A** называется четкое множество **Ã** таких точек в **U**, для которых величина $\mu_A(x)$ положительна, т.е.

$\tilde{A} = \{ x | \mu_A(x) > 0 \}.$

Для практических приложений носители нечетких множеств всегда ограничены. Так, носителем нечеткого множества допустимых режимов для системы может служить четкое подмножество (интервал), для которого степень допустимости не равна нулю (рис.1).

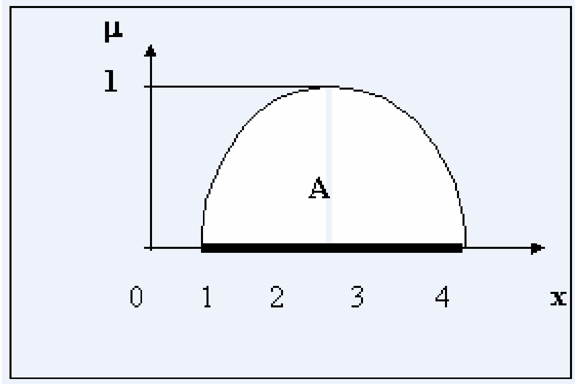

Рис.1. Понятие носителя нечеткого множества (выделен жирной чертой)

> Действительное число М есть верхняя граница множества S_y действительных чисел **y**, если для всех $y \in S_y$ и $y \le M$. Каждое (непустое) множество S_y действительных чисел y, имеющее верхнюю границу, имеет точную верхнюю границу (наименьшую верхнюю границу) **sup S_y**. Если множество S_y конечно, то его точная верхняя граница **sup S_y** необходимо равна наибольшему числу, принадлежащему S_y
> Inf S_y – точная нижняя граница S_y

<u>Высотой</u> нечеткого множества **A** называется величина $\sup\limits_U \mu_A(x)$, т.е. максимальное значение функции принадлежности этого множества $d = \max\limits_{x \in U} \mu_A(x)$.

Нечеткое множество **A** называется **нормальным**, если $\sup\limits_U \mu_A(x) = 1$, т.е. **d = 1**. В противном случае оно называется **субнормальным**.

Нечеткое множество называется **пустым**, если $\forall x \in U \quad (\mu_A(x) = 0)$. Очевидно, что в данном универсуме **U** существует единственное пустое нечеткое множество. Непустое субнормальное нечеткое множество можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле $\mu'_A(x) = \dfrac{\mu_A(x)}{\sup\limits_U \mu_A(x)}$

Точкой перехода **A** называется элемент **x** множества **U**, для которого.μ_A **(x) = 0.5.**

Над нечеткими множествами можно производить различные операции, при этом необходимо определить их так, чтобы в частном случае, когда множество является четким, операции переходили в обычные операции теории множеств, то есть операции над нечеткими множествами должны обобщать соответствующие операции над обычными множествами. При этом обобщение может быть реализовано различными способами, из-за чего какой-либо операции над обычными множествами может соответствовать несколько операций в теории нечетких множеств.

Для определения пересечения и объединения нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

1. Максиминные:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

2. Алгебраические:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x),$$

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x)\,\mu_B(x).$$

3. Ограниченные:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.$$

Дополнение нечеткого множества во всех трех случаях определяется одинаково: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Пример. Пусть **A** — нечеткое множество "от 5 до 8" (рис.2а) и **B** — нечеткое множество "около 4" (рис.2б), заданные своими функциями принадлежности:

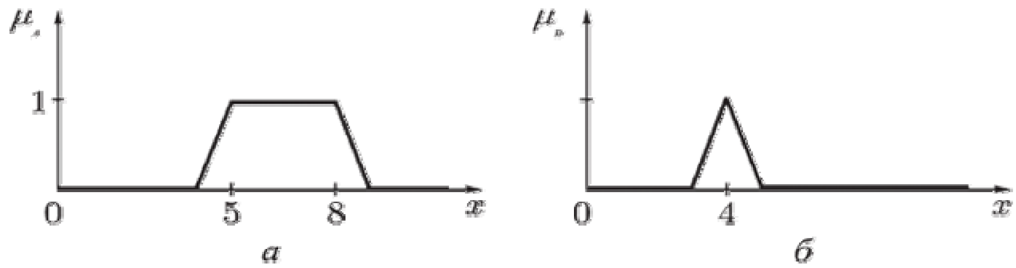

Рис. 2

Тогда, используя максиминные операции, мы получим множества, изображенные на рис.3.

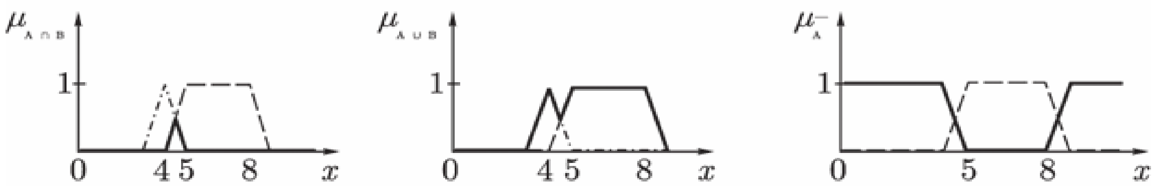

Рис. 3

Нечетким отношением $\widetilde{R}$ на множествах $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется нечеткое подмножество декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Степень принадлежности $\mu_{\widetilde{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ показывает степень выполнения отношения $\widetilde{R}$ между элементами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, n}$.

В дальнейшем будем рассматривать только бинарные нечеткие отношения, которые задаются на декартовом произведении двух множеств. Обозначим эти множества через **X** и **Y**. Тогда задание бинарного нечеткого отношения $\widetilde{R}$ на $X \times Y$ состоит в указании всех троек $(x, y, \mu_{\widetilde{R}}(x, y))$, где $x \in X$, $y \in Y$, или, что тоже самое, $(x, y) \in X \times Y$.

<u>Пример</u>. Пусть **x,y**$\in$ {0, 1, 2, 3}. Необходимо задать нечеткое отношение $x \approx y$ ("**x** приблизительно равно **y**"). Это нечеткое отношение удобно задавать матрицей вида:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \leftarrow y \quad x\downarrow \\ \widetilde{R} = & \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Для непрерывных множеств **X** = [0, 3] и **Y** = [0, 3] нечеткое отношение можно задать следующей функцией принадлежности: $\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = e^{-0.2(x-y)^2}$. Нечеткие отношения $x \approx y$ на дискретных и непрерывных множествах изображены на рис. 4.

<u>Пример</u>. Задать нечеткое отношение "**x** намного меньше, чем **y**".
Пусть **x,y**$\in$ {0, 1, 2, 3}. Тогда нечеткое отношение можно задать матрицей вида:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \leftarrow y \quad x\downarrow \\ \widetilde{R} = & \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Для непрерывных множеств **X** = [0, 3] и **Y** = [0, 3] нечеткое отношение "**x** намного меньше, чем **y**" можно определить такой функцией принадлежности:

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq y \\ \dfrac{1}{1 + 5/(x-y)^4}, & \text{если } x < y \end{cases}$$

Нечеткие отношения "**x** намного меньше, чем **y**" на дискретных и непрерывных множествах изображены на рис. 5.

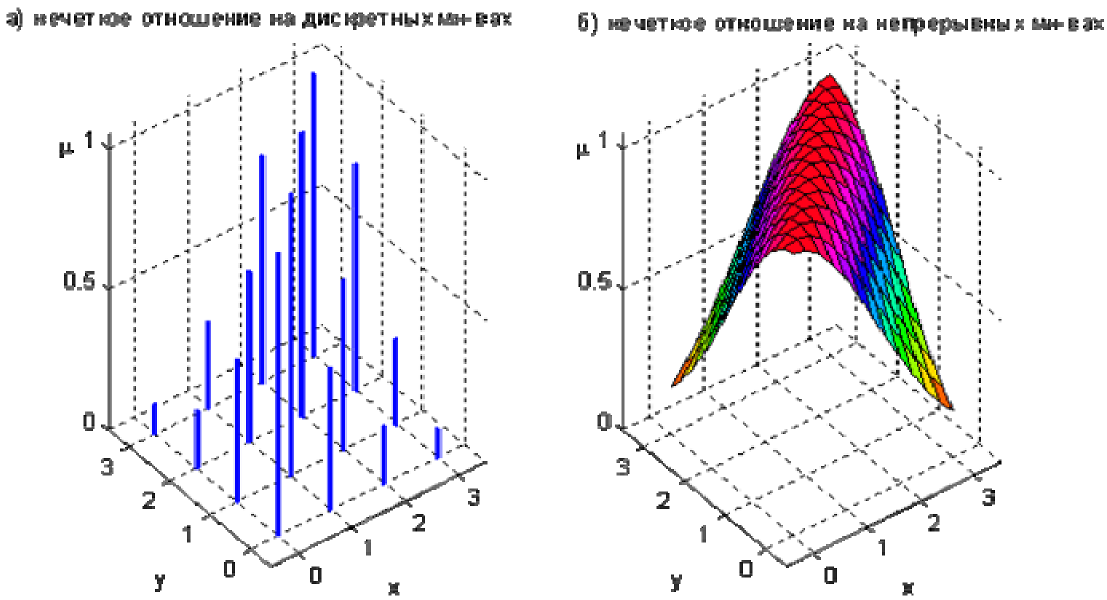

Рис. 4. Нечеткое отношение "**x** приблизительно равно **y**"

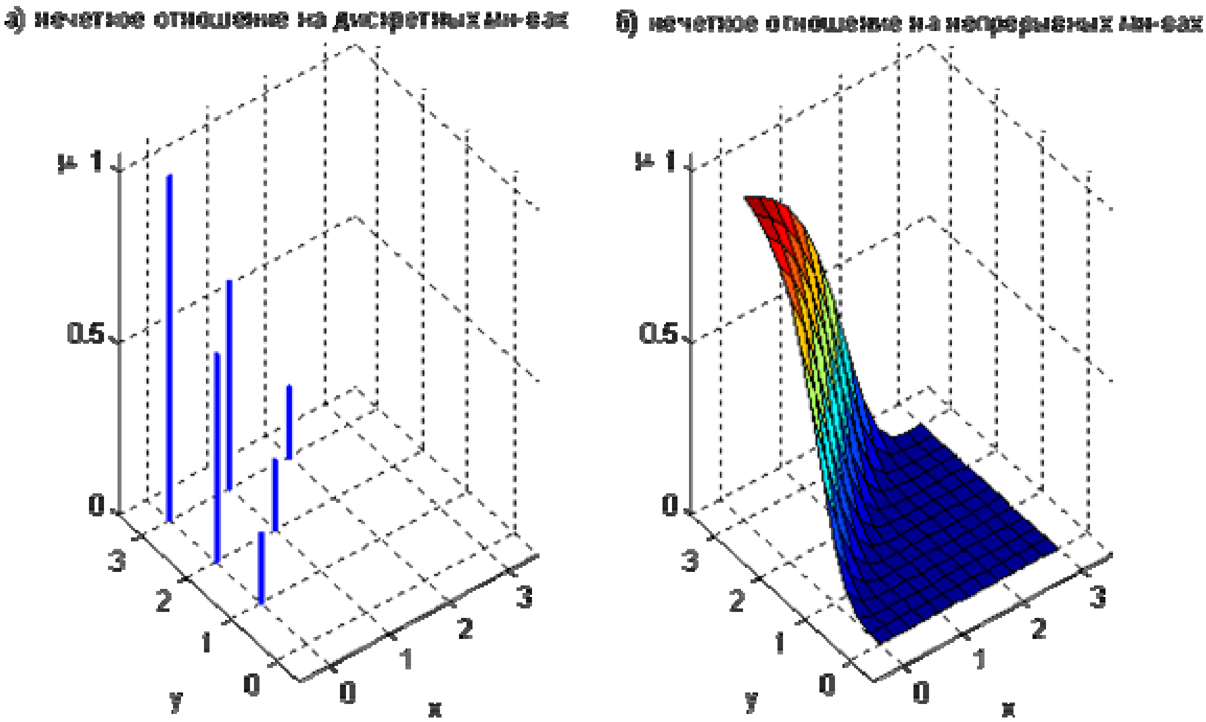

Рис. 5. Нечеткое отношение "**x** намного меньше, чем **y**"

Как видно из примеров, нечеткие отношения являются более гибкими по сравнению с традиционными отношениями. Они позволяют задать не только сам факт выполнения отношения, но и указывать степень его выполнения, что является очень важным для многих практических задач.

<u>Пример</u>. Задать отношение "схожий менталитет" для следующих национальностей {Украинцы(У), Чехи (Ч), Австрийцы (А), Немцы (Н)}.

Использование обычного, четкого отношения позволяет выделить только одну пару наций со схожими менталитетами − немцев и австрийцев. Этим отношением не отражаться тот факт, что по менталитету чехи более близки к немцам, чем украинцы. Нечеткое отношение позволяет легко представить такую информацию:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{У} & \text{Ч} & \text{А} & \text{Н} \end{array} \\ \tilde{R} = & \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{У} \\ \text{Ч} \\ \text{А} \\ \text{Н} \end{array} \end{array}$$

Ежедневно мы принимаем решения на основе лингвистической информации типа: "очень высокая температура"; "длительная поездка"; "быстрый ответ"; "красивый букет"; "гармоничный вкус" и т.п. Психологи установили, что в человеческом мозге почти вся числовая информация вербально перекодируется и хранится в виде лингвистических термов.

Лингвистической переменной (linguistic variable) называется переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного (формального) языка.

Например, лингвистическая переменная "возраст" может принимать следующие значения: "очень молодой", "молодой", "среднего возраста", "старый", "очень старый" и др. Ясно, что переменная "возраст" будет обычной переменной, если ее значения — точные числа; лингвистической она становится, будучи использованной в нечетких рассуждениях человека. *Каждому значению лингвистической переменной соответствует определенное нечеткое множество со своей функцией принадлежности.*

Рассмотрим пример, связанный с возрастом человека (рис. 6).

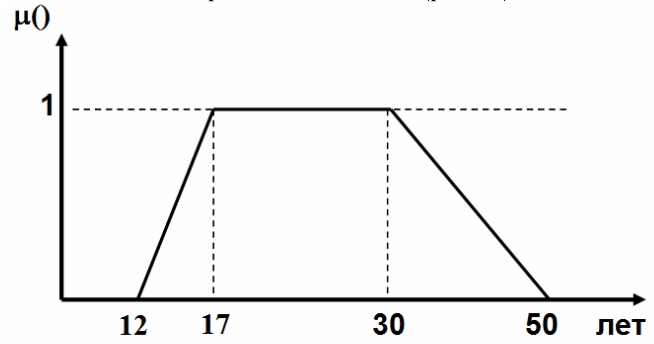

Рис. 6. *Нечеткое множество для термина «молодой»*

До 17 лет нельзя однозначно утверждать, что человек молодой (например, 15-летние могут относиться к категории «молодой» с рангом около 0,8). Зато диапазону от 17 до 30 пет можно присвоить ранг 1, т.е. человек

После 30 лет человек считается уже не молодым, но еще и не старым, здесь принадлежность (ранг) термина «молодой» возрасту будет принимать значения в интервале от 0 до 1. И чем больше возраст человека, тем меньше становится его принадлежность к соответствующему терму (см. ниже), т.е. ранг будет стремиться к 0.

Таким образом, было получено нечеткое множество, описывающее понятие «молодой» для всего диапазона возрастов человека. Если ввести остальные термины (например, «очень молодой», «старый» и т.д.), то можно охарактеризовать такую переменную, как возраст, состоящую из нескольких нечетких множеств и полностью перекрывающую весь жизненный период человека.

Терм–множеством *(term set)* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной.

Термом *(term)* называется любой элемент терм–множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.

Пример. Рассмотрим переменную "*скорость автомобиля*", которая оценивается по шкале "*низкая*", "*средняя*", "*высокая*" и "*очень высокая*". Здесь лингвистической переменной является "*скорость автомобиля*", термами - лингвистические оценки "*низкая*", "*средняя*", "*высокая*" и "*очень высокая*", которые и составляют терм–множество.

Нечеткая логика

В обычной (традиционной Аристотелевой) логике существуют только две оценки. Если элемент принадлежит множеству, то 1, если не принадлежит, то 0. Например: есть множество шоколадных конфет. В обычной логике они могут быть либо вкусными, либо нет, т.е. высказывание «Шоколадная конфета вкусная» является либо истинным, либо ложным. А предположим, что конфета - так себе, но невкусной ее все же не назовешь. Как быть? Человек говорит себе так: эта конфета скорее вкусная, чем нет. В этом случае высказывание «Шоколадная конфета вкусная» не может быть абсолютно истинным со значением равным 1, а истинность этого высказывания может быть, например, 0.7.

Нечеткая логика - это разновидность непрерывной логики, в которой логическое формулы могут принимать истинностные значения между 0 и 1. В отличие от вероятностей, которые определяются в статистическом смысле, истинностное значение это некоторое произвольное субъективное значение, не имеющее никакого статистического смысла. Нечеткая логика позволяет приблизить работу компьютеров к мышлению человека.

Обозначим нечеткие логические переменные через $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, а функции принадлежности, задающие истинностные значения этих переменных через $\mu_{\widetilde{A}}(u)$ и $\mu_{\widetilde{B}}(u), u \in [0,1]$. Нечеткие логические операции **И** $(\wedge)$, **ИЛИ** $(\vee)$, **НЕ** $(\neg)$ и импликация $(\Rightarrow)$ выполняются по таким правилам:

$$\mu_{\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}}(u) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(u), \mu_{\widetilde{B}}(u)\},$$

$$\mu_{\widetilde{A} \vee \widetilde{B}}(u) = \max\{\mu_{\widetilde{A}}(u), \mu_{\widetilde{B}}(u)\},$$

$$\mu_{\neg \widetilde{A}}(u) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(u),$$

$$\mu_{\widetilde{A} \Rightarrow \widetilde{B}}(u) = \max\{1 - \mu_{\widetilde{A}}(u), \mu_{\widetilde{B}}(u)\}.$$

В многозначной логике логические операции могут быть заданы таблицами истинности. В нечеткой логике количество возможных значений истинности может быть бесконечным, следовательно, в общем виде табличное представление логических операций невозможно.

Например, IT-компании «ABC» нужен сотрудник, который является хорошим специалистом и способен быстро обучаться. Понятия «хороший специалист» и «способен быстро обучаться» - нечеткие. Поэтому высказывания «Сидоров хороший специалист» и «Сидоров способен быстро обучаться» также нечеткие. Пусть истинность высказывания «Сидоров хороший специалист» равна 0.7, а высказывания «Сидоров способен быстро обучаться» - 0.6. Тогда истинность высказывания «Сидоров хороший специалист и Сидоров способен быстро обучаться» равна 0.6. Если другой фирме нужен хороший специалист или сотрудник, способный быстро обучиться и стать полезным для компании, то определяется истинность следующего высказывания «Сидоров хороший специалист или Сидоров способен быстро обучаться», которая равна 0.7.

Понятие «высокая цена» - нечеткое. Пусть истинность выражения «цена пальто высокая» равна 0.8. Тогда истинность выражения «цена пальто не высокая» равна 0.2.

Построение функций принадлежности

Задача построения функций принадлежности ставится следующим образом: даны два множества: множество термов $\mathbf{L=\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}}$ и универсальное множество $\mathbf{U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}}$. Нечеткое множество $\tilde{A}_j$, которым описывается лингвистический терм $l_j, j=\overline{1,m},$ на универсальном множестве **U** представляется в виде: $\widetilde{A}_j = \{\frac{\mu_j(u_1)}{u_1}, \frac{\mu_j(u_2)}{u_2}, \ldots, \frac{\mu_j(u_n)}{u_n}\}$. Необходимо определить степени принадлежностей элементов множества **U** к элементам из множества **L**, т.е. найти $\mu_j(u_i)$ для всех $i=\overline{1,n}$ и $j=\overline{1,m}$.

Метод статистической обработки экспертной информации

Каждый эксперт заполняет опросник, в котором указывает свое мнение о наличии у элементов $u_i\ (i=\overline{1,n})$ свойств нечеткого множества $\widetilde{A}_j\ (j=\overline{1,m})$. Опросник имеет следующий вид:

	$\mathbf{u_1}$	$\mathbf{u_2}$	**…**	$\mathbf{u_n}$
$\mathbf{l_1}$				
$\mathbf{l_2}$				
…				
$\mathbf{l_m}$				

Введем следующие обозначения: **K** - количество экспертов; $b_{j,i}^k$ - мнение **k**-го эксперта о наличии у элемента $\mathbf{u_i}$ свойств нечеткого множества $\widetilde{A}_j$, $k=\overline{1,K}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$. Будем считать, что экспертные оценки бинарные, т.е.: $b_{j,i}^k \in \{0,1\}$, где 1 (0) указывает на наличие (отсутствие) у элемента $\mathbf{u_i}$

свойств нечеткого множества $\tilde{A}_j$. По результатам опроса экспертов, степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{A}_j$ $(j=\overline{1,m})$ рассчитываются следующим образом:

$$\mu_j(u_i)=\frac{1}{K}\sum_{k=\overline{1,K}} b_{j,i}^k,\ i=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

Пример. Построить функции принадлежности термов "низкий", "средний", "высокий", используемых для лингвистической оценки переменной "рост мужчины". Результаты опроса пяти экспертов приведены в табл.1.

Таблица 1 - Результаты опроса экспертов

k	термы	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
Эксперт 1	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	1	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 2	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	1	1	1	1
Эксперт 3	низкий	1	0	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 4	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	0	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	0	1	1
Эксперт 5	низкий	1	1	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	1	1	1	1	1

Результаты обработки экспертных мнений представлены в таблице 2.

Таблица .2 - Результаты обработки мнений экспертов

термы	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)	
низкий	5	4	3	0	0	0	0	0	
	1	0.8	0.6	0	0	0	0	0	$\mu_1(u)$
средний	0	2	4	5	3	2	0	0	
	0	0.4	0.8	1	0.6	0.4	0	0	$\mu_2(u)$
высокий	0	0	0	1	2	4	5	5	
	0	0	0	0.2	0.4	0.8	1	1	$\mu_3(u)$

Числа в верхней строке каждого терма - это количество голосов, отданных экспертами за принадлежность нечеткому множеству соответствующего элемента универсального множества. Числа в нижней строке - степени принадлежности, рассчитанные по формуле (4). Графики функций принадлежностей показаны на рис.7.

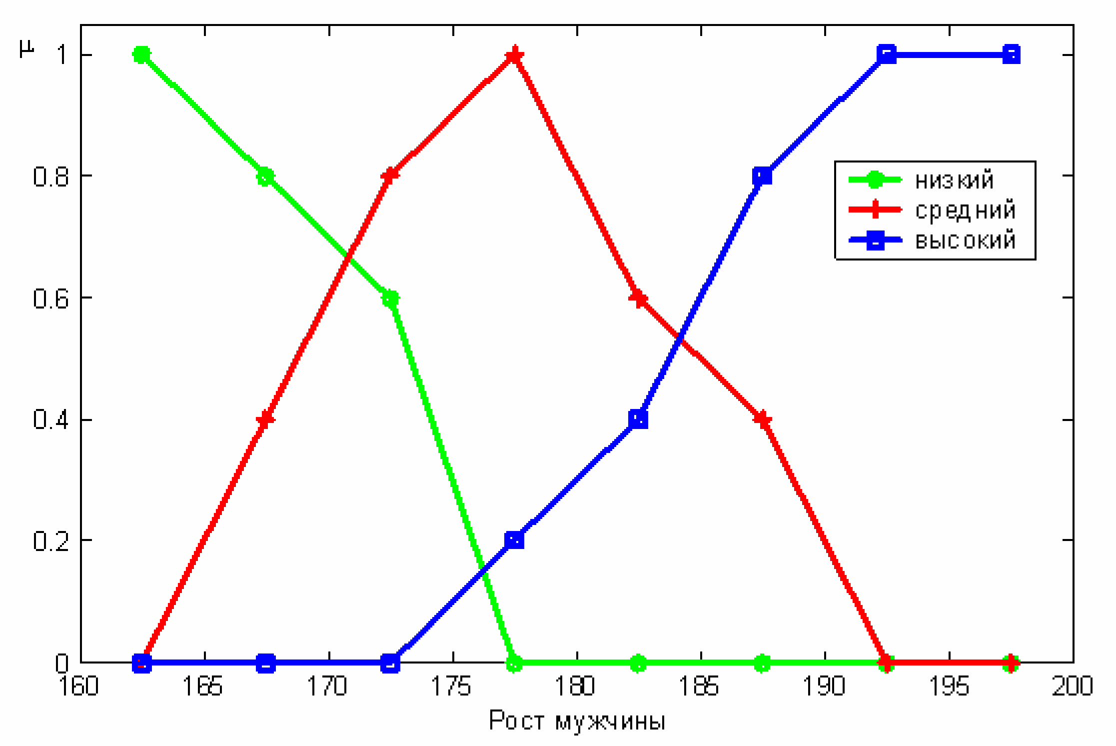

Рис. 7 - Функции принадлежности нечетких множеств из примера

Построение функций принадлежности на основе парных сравнений

Исходной информацией для построения функций принадлежности являются экспертные парные сравнения. Для каждой пары элементов универсального множества эксперт оценивает преимущество одного элемента над другим по отношению к свойству нечеткого множества. Парные сравнения удобно представлять следующей матрицей:

$$A = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

где a_{ij} - уровень преимущества элемента u_i над u_j $(i, j = \overline{1,n})$, определяемый по девятибальной шкале Саати:

1 - если *отсутствует преимущество* элемента u_i над элементом u_j;

3 - если имеется *слабое преимущество* u_i над u_j;

5 - если имеется *существенное преимущество* u_i над u_j;

7 - если имеется *явное преимущество* u_i над u_j;

9 - если имеется *абсолютное преимущество* u_i над u_j;

2,4,6,8 - *промежуточные* сравнительные оценки.

Матрица парных сравнений является диагональной $(a_{ii} = 1, i = \overline{1,n})$ и обратно симметричной $(a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}},\ i, j = \overline{1,n})$.

Степени принадлежности принимаются равными соответствующим координатам собственного вектора **W = (w₁, w₂, … , wₙ)** матрицы парных сравнений:

$$\mu(u_i) = w_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (5)$$

Собственный вектор находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} A \times W = \lambda_{max} * W \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы **A**.

Пример. Построить функцию принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина" на универсальном множестве {170, 175, 180, 185, 190, 195}.
Парные сравнения зададим следующей матрицей:

$$A = \begin{array}{c} \\ 170 \\ 175 \\ 180 \\ 185 \\ 190 \\ 195 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Собственные значения этой матрицы парных сравнений равны:
6.2494;
0.0318 + 1.2230i;
0.0318 - 1.2230i;
- 0.1567 + 0.2392i;
- 0.1567 - 0.2392i;
0.0004.

Следовательно, $\lambda_{\max} = 6.2494$. Степени принадлежности, найденные по формулам (6) и (5), приведены в табл.3. Нечеткое множество получилось субнормальным. Для нормализации разделим все степени принадлежности на максимальное значение, т.е. на 0.3494. Графики функций принадлежности субнормального и нормального нечеткого множества "высокий мужчина" приведены на рис.8.

Таблица 3 - Функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

u =	170	175	180	185	190	195
μ**высокий мужчина** (субнормальное нечеткое множество)	0.0284	0.0399	0.0816	0.1754	0.3254	0.3494
μ**высокий мужчина** (нормальное нечеткое множество)	0.0813	0.1141	0.2335	0.5021	0.9314	1.0000

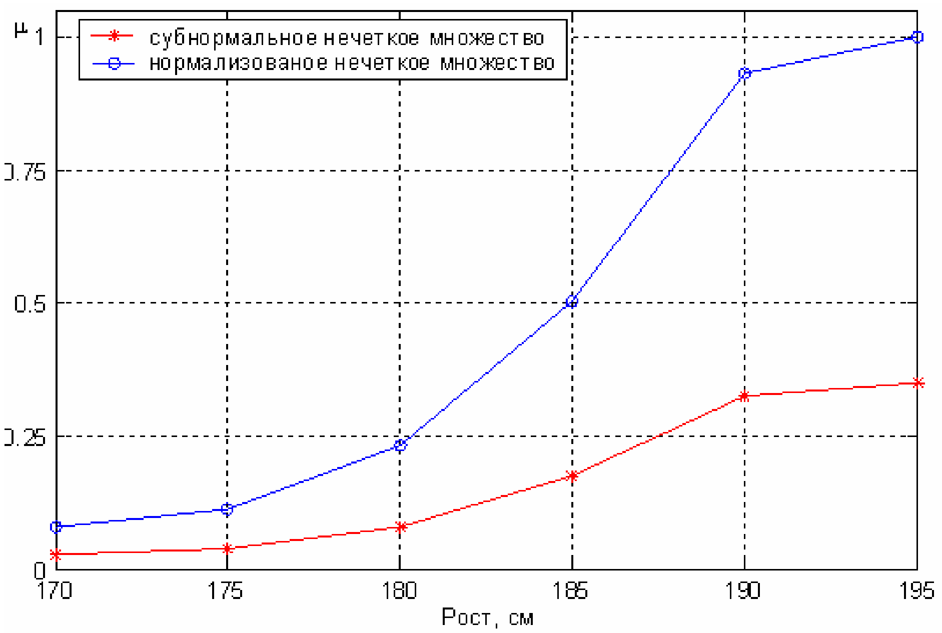

Рис. 8. Функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

Отклонение $\lambda_{\max}$ от **n** может служить мерой несогласованности парных сравнений эксперта. В примере $\lambda_{\max}$ = 6.2494, а **n** = 6. Следовательно, мера несогласованности равна 0.2494. При согласованных парных сравнениях процедура построения функций принадлежности значительно упрощается.

При согласованных мнениях эксперта матрица парных сравнений обладает следующими свойствами:

- она диагональная, т. е. $a_{ii} = 1,\ i = \overline{1,n}$;
- она обратно симметрична, т. е. элементы, симметричные относительно главной диагонали, связаны зависимостью $a_{ij} = \frac{1}{a_{ij}},\ i, j = \overline{1,n}$;
- она транзитивна, т. е. $a_{ik} * a_{kj} = a_{ij}\ , i, j, k = \overline{1,n}.$

Наличие этих свойств позволяет определить все элементы матрицы парных сравнений, если известны (n-1) недиагональных элементов. Например, если известна **k**-тая строка, т. е. элементы $a_{kj}\ , j = \overline{1,n},$ то произвольный элемент $\mathbf{a_{ij}}$ определяется так:

$$a_{ij} = \frac{a_{kj}}{a_{ki}}, i, j, k = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

После определения всех элементов матрицы парных сравнений степени принадлежности, нечеткого множества вычисляются по формуле:

$$\mu(u_i) = \frac{1}{a_{1i} + a_{2i} + ... + a_{ni}}. \qquad (8)$$

Формула (8), в отличие от формул (5) - (6) не требует выполнения трудоемких вычислительных процедур, связанных с нахождением собственного вектора матрицы **A**.