

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**з дисципліни  
«ДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»**

Харків 2008

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

для студентів спеціальностей

7.080402 – інформаційні технології проектування та

7.091401 – системи управління та автоматики

ЗАТВЕРДЖЕНО

кафедрою системотехніки.

Протокол № 1 від 30.08.2008 р.

Харків 2008

Конспект лекцій з дисципліни «Динамічне моделювання» для студентів спеціальностей 7.080402 – інформаційні технології проектування та 7.091401 – системи управління та автоматики / Упоряд. В.В. Безкоровайний. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – 84 стор.

Упорядник В.В. Безкоровайний.

Рецензент В.П. Авраменко, доктор техн. наук, професор, професор кафедри інформаційних управляючих систем.

## ЗМІСТ

Вступ .....	5
1 Моделювання як метод аналізу динаміки об'єктів .....	5
Контрольні запитання та завдання .....	8
2 Аналітичне моделювання динаміки об'єктів. ....	9
2.1 Диференціальні моделі керованих об'єктів .....	9
2.2 Приклади моделей динаміки керованих об'єктів .....	11
2.3 Перетворення моделей динаміки. ....	13
2.4 Класичні методи аналізу моделей динаміки .....	17
2.5 Спеціальні методи аналізу динаміки об'єктів .....	20
2.6 Моделювання динаміки об'єктів на аналогових обчислювальних машинах .....	24
2.7 Побудова моделей за методом ідентифікації .....	26
2.8 Ідентифікація лінійних динамічних об'єктів .....	29
2.9 Контрольні запитання та завдання .....	31
3 Імітаційне моделювання динаміки .....	32
3.1 Принципи побудови моделювальних алгоритмів .....	32
3.2 Форми зображення моделювальних алгоритмів .....	33
3.3 Принципи побудови та структура імітаційних моделей динаміки .	34
3.4 Системи рівнянь імітаційних моделей динаміки .....	37
3.5 Символи в діаграмах потоків .....	40
3.6 Показникові запізнювання динамічних моделей .....	44
3.7 Правила і розв'язки в динамічних керованих об'єктах .....	47
3.8 Оцінка придатності моделей .....	49
3.9 Програмне забезпечення моделювання динаміки об'єктів .....	50
3.10 Контрольні запитання та завдання .....	52
4 Динамічна модель виробничо-збутової системи .....	53
4.1 Структура виробничо-збутової системи .....	53
4.2 Мета моделювання і фактори, що включаються до моделі .....	56
4.3 Модель підсистеми роздрібної ланки .....	57
4.4 Модель підсистеми оптової ланки .....	62
4.5 Модель підсистеми виробництва .....	67
4.6 Рівняння початкових умов і параметри моделі .....	72
4.7 Аналіз динаміки виробничо-збутової системи .....	77
4.8 Контрольні запитання та завдання .....	80

5 Перспективи розвитку засобів моделювання .....	81
Контрольні запитання та завдання .....	83
Перелік рекомендованої літератури .....	83

## ВСТУП

Підчас проектування, удосконалення чи управління об'єктами будь-якої фізичної природи виникає необхідність встановлення їх властивостей. При цьому у багатьох випадках для об'єктів характерною є контрінтуїтивна поведінка, що не дозволяє досліднику адекватно спрогнозувати їх динаміку. Серед причин такого явища виділяють складність об'єктів дослідження, спотворення інформації, запізнення та підсилення, що мають місце в об'єктах моделювання. Проведення ж натурних експериментів на самому об'єкті, як правило, неможливе (об'єкта ще немає, об'єкт недоступний, небезпека ушкодження об'єкта) або недоцільно (ризик великих втрат). Ефективним засобом аналізу динаміки у таких випадках все частіше стає моделювання.

*Метою вивчення дисципліни "Динаміка управління систем"* є ознайомлення з методологією і технологією математичного комп'ютерного моделювання динаміки в процесі проектування, дослідження та експлуатації соціально-економічних та технічних об'єктів і систем управління ними; набуття практичних навичок використання математичного моделювання в задачах аналізу і синтезу систем управління та автоматики (СУА).

*Завдання дисципліни.* В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

*знати:* основні класи моделей, етапи та задачі комп'ютерного моделювання динаміки об'єктів, принципи побудови моделей та моделювальних алгоритмів системної динаміки, методи аналізу аналітичних і імітаційних моделей;

*вміти:* вибирати тип моделі для опису досліджуваного об'єкта, вирішувати основні задачі побудови моделі, вибирати методи її дослідження, програмувати або вибирати програмні засоби та проводити комп'ютерне дослідження моделей динаміки.

## 1 МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ОБ'ЄКТІВ

Моделювання в даний час є обов'язковою складовою всіх етапів проектування, створення й експлуатації технічних, організаційно-технічних і економічних об'єктів. У багатьох випадках статичних характеристик недостатньо для всебічної оцінки об'єкта дослідження. Прикладами задач, що вимагають моделювання динаміки є: управління запасами, навігаційні задачі швидкодії, пропуск паводку по мережі водосховищ, проектування систем

управління літальними апаратами, визначення впливу розподілу бюджетних коштів на динаміку життєвого рівня населення.

Використання моделювання на всіх етапах створення і експлуатації антропогенних об'єктів дозволяє істотно скоротити час прийняття рішень, підвищити їхню якість, спрогнозувати наслідки. Найбільше поширення при цьому знаходить математичне комп'ютерне моделювання динаміки.

*Моделюванням* називають процес побудови моделі об'єкта, який досліджується, та оперування з нею з метою отримання інформації щодо об'єкта дослідження.

*Моделлю* називають фізичне, математичне або інше логічне зображення *системи*, об'єкта, явища або процесу.

*Системою*  $S$  як формою подання об'єкта дослідження у рамках теоретико-множинного підходу називають сукупність взаємопов'язаних елементів, що розглядається як одне ціле. Система характеризується своєю *структурою* та властивостями. Під *структурою* розуміється відображення сукупності її елементів  $E$  та їх взаємозв'язків (відношень між ними)  $R$ . З точки зору структурної організації формально об'єкт як система може бути поданий у вигляді:  $S = \langle E, R \rangle$ . Значення характеристик, що описують властивості об'єкта (системи) в конкретний момент часу називають його *станом*, а характер (функцію) зміни його стану у часі називають *динамікою* або траєкторією руху.

Динаміка об'єкта у загальному випадку визначається його внутрішніми властивостями (структурою, значеннями параметрів), початковим станом та вхідними впливами. Вхідні впливи на об'єкт можуть бути таким, що відхиляють його від мети (збурення) та такими, що спрямовують його до мети (управління). Серед об'єктів дослідження виділяють такі, якими не управляють (некеровані), та такі, якими управляють (керовані). Процеси функціонування некерованих об'єктів протікають без управляючих впливів, а їх динаміка однозначно визначається їх внутрішніми властивостями, початковими станом і «нецільовими» впливами зовнішнього середовища. Динаміка керованих об'єктів в основному визначається управляючим впливом (сигналами), який здійснюється системою управління (регулятором), відповідно до їх мети, впливу збурення, стану та обраного закону управління.

В основі побудову систем управління покладено принципи, що визначають яким чином здійснюється ув'язка алгоритмів функціонування та управління з причинами, що визивають відхилення від нормального режиму функціонування об'єктів. На практиці використовують три основні принципи

управління *розімкнене, за збуренням, за відхиленням*.

Суть *принципу розімкненого управління* полягає у тому, що алгоритм управління виробляється тільки на основі заданого алгоритму функціонування без врахування інших факторів (збурень, стану об'єкта чи його вихідних сигналів).

При використанні *принципу управління за збуренням (компенсації)* вимірюється величина збурення та, за її значенням, вводяться корективи до алгоритму управління, які компенсують відхилення від нормального режиму функціонування об'єкта, що викликані збуренням.

*Принцип управління за відхиленням (зворотного зв'язку)* передбачає вироблення сигналів управління на основі врахування відхилення поточного стану об'єкта від цільового (рис. 1.1). У системах управління, що побудовані за цим принципом, можуть використовуватись різні закони управління (*пропорційний, інтегральний, пропорційно-інтегральний, пропорційно-інтегрально-диференціальний*).

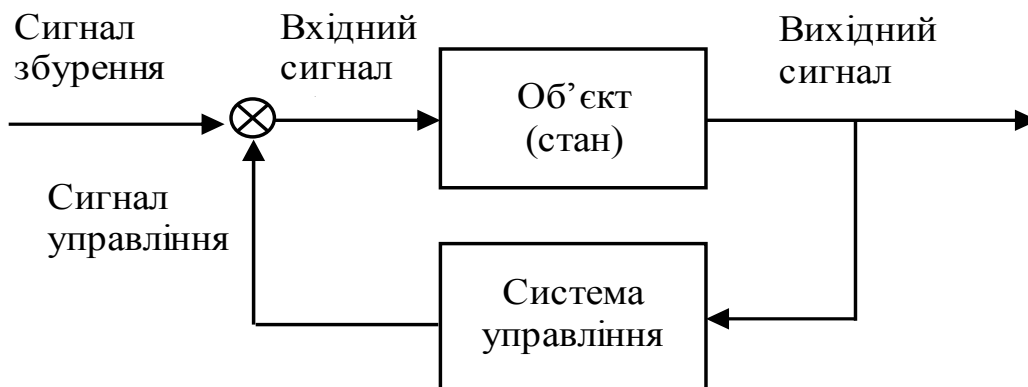


Рисунок 1.1 – Структурна схема керованого об'єкта

Для опису законів управління зручно використовувати безрозмірні відносні змінні:  $\varepsilon = \Delta x / x^0$ ,  $\mu = u / u^0$ , де  $\Delta x = x - x^0$ ;  $x^0$ ,  $u^0$  – базові значення керованої  $x$  та управляючої  $u$  змінних, що відповідають номінальному режиму функціонування об'єкта.

*Пропорційний закон (П):*  $\mu = k_p \cdot \varepsilon$ , де  $k_p$  – коефіцієнт передачі (підсилення) регулятора. Обернену їй величину називають статизмом регулятора.



*Інтегральний закон (І):*  $\mu = \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon dt$  або  $\frac{d\mu}{dt} = \frac{\varepsilon}{T}$ , де  $T$  – постійна часу

інтегрування.

*Пропорційно-інтегральний закон (ПІ):*  $\mu = k_p \left( \varepsilon + \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon dt \right)$ .

*Пропорційно-інтегрально-диференціальний закон (ПІД)* може бути поданий співвідношенням:  $\mu = k_p \left( \varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$ , де  $T_i$ ,  $T_d$  – відповідно постійні часу інтегрування та диференціювання.

Незалежно від принципів та законів регулювання, що використовуються у системах управління, для дослідження динаміки об'єктів найчастіше застосовуються методи математичного комп'ютерного моделювання.

*Математичні моделі* являють собою системи математичних співвідношень, що описують досліджуваний процес чи явище. Серед математичних моделей динаміки виділяють аналітичні та імітаційні моделі.

*Аналітичні моделі* подають процеси функціонування об'єктів у вигляді функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференціальних, кінцево-різницевих, інших рівнянь і т.п.) або логічних умов.

*Імітаційні моделі* подаються у вигляді моделювальних алгоритмів, які відтворюють процес функціонування об'єкта у часі, шляхом імітації елементарних явищ, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури і послідовності настання у часі.

У залежності від характеру процесів, що мають місце в об'єкті, розрізняють також *детерміноване і стохастичне, неперервне і дискретне моделювання*.

#### Контрольні запитання та завдання

1. З якою метою здійснюється моделювання об'єктів?
2. Назвіть приклади задач моделювання динаміки об'єктів.
3. Дайте визначення системи як форми подання об'єкта?
4. Дайте визначення динаміки об'єкта?
5. Чим визначається динаміка керованого об'єкта?
6. Дай те визначення основним принципам управління.
7. Перерахуйте закони управління, які використовують у сучасних

системах управління?

8. Запишіть модель для пропорційного закону управління.
9. Запишіть модель для інтегрального закону управління.
10. Запишіть модель для пропорційно-інтегрального закону управління.
11. Запишіть модель для пропорційно-інтегрально-диференціального закону управління.
12. Назвіть та дайте визначення методів моделювання динаміки.

## 2 АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ОБ'ЄКТІВ

### 2.1 Диференціальні моделі керованих об'єктів

Більшість моделей, що описують динаміку керованих об'єктів, є диференціальними, тобто являють собою диференціальні рівняння та їх системи. Серед диференціальних моделей розрізняють: моделі у змінних входи-виходи та моделі у змінних стану.

Опис об'єктів у *змінних входи-виходи* має вигляд:

$$y = Hu, \quad (2.1)$$

де  $y$  – вектор вихідних (керованих) змінних розмірністю  $m \times 1$ ;

$H$  – деякий оператор;

$u$  – вектор вхідних змінних (змінних збурення і управління) розмірністю  $l \times 1$ .

У залежності від виду рівняння до складу оператора  $H$  у (2.1) можуть входити операції алгебраїчних чи функціональних перетворень, диференціювання, інтегрування, визначення кінцевих різниць і т.п. В окремому випадку для лінійних стаціонарних об'єктів оператор  $H$  являє собою матрицю передаточних функцій (передаточну матрицю).

Нехай вихідна  $y_i$  і вхідна  $u_j$  змінні зв'язані диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$N_i\left(\frac{d}{dt}\right)y_i = \sum_{j=1}^l M_j\left(\frac{d}{dt}\right)u_j, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

де  $N_i$ ,  $M_j$  – поліноми степенів  $n_i$  та  $m_j$  відповідно, при чому  $n_i \geq m_j$ ;

$y_i(t)$  – вихідна змінна, яка визначається із рівняння (2.2) для заданих початкових умов  $y_i(0), y_i'(0), \dots, y_i^{(n_i-1)}(0)$ ;

$u_j(t)$  – функція, для якої права частина рівняння (2.2) має сенс.

Якщо замінити у (2.2) символ диференціювання  $\frac{d}{dt}$  на комплексну змінну  $p$  і ввести передаточну від  $u_j(t)$  до  $y_i(t)$  функцію виду:

$$W_{ij}(p) = \frac{M_j(p)}{N_i(p)}, \quad (2.3)$$

то рівняння (2.2) з урахуванням (2.3) можна записати у вигляді:

$$y_i = \sum_{j=1}^l W_{ij}(p) u_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.4)$$

або у матричній формі:

$$y = W(p)u, \quad (2.5)$$

де  $W(p)$  – матриця передаточних функцій розмірності  $m \times l$ , елементами якої є передаточні функції  $W_{ij}(p)$ .

При нульових початкових умовах і  $t=0$  передаточна функція лінійної системи з постійними коефіцієнтами дорівнює відношенню перетворень Лапласа  $\tilde{y}_i(s)$  та  $\tilde{u}_j(s)$  відповідно вихідної  $y_i(t)$  та вхідної  $u_j(t)$  змінних:

$$W_{ij}(s) = \frac{\tilde{y}_i(s)}{\tilde{u}_j(s)} = \frac{\int_0^{\infty} y_i(t) \cdot e^{-st} dt}{\int_0^{\infty} u_j(t) \cdot e^{-st} dt}.$$

Подання об'єктів у змінних входи-виходи (2.1) – (2.5) дає можливість досліднику мати справу з фізичними змінними не тільки у кінцевому результаті, але й на проміжних етапах. Однак при цьому описи різних навіть лінійних систем і блоків можуть суттєво відрізнятись.

*Опис об'єктів у змінних стану.* Введемо в (2.1) замість деяких (або усіх)

вихідних змінних  $y$  інші змінні  $x$ , які будемо називати змінними стану. Тоді опис об'єктів у змінних стану може бути поданий у формі Коші, тобто у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.6)$$

де  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  – вектор станів, компоненти  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – змінні стану.

Рівняння (2.6) і (2.1) повинні бути еквівалентними у тому сенсі, що знаючи розв'язок одного з них, можна однозначно отримати розв'язок другого. Для цього змінні  $x$  і  $y$  повинні, перед усім, бути зв'язані однозначною функціональною залежністю:

$$y = \varphi(x, u), \quad (2.7)$$

а також виконуватись умови існування розв'язку та (для багатьох практичних задач) його єдиності.

Рівняння (2.6) і (2.7) у матричній формі матимуть вигляд:

– для нестационарних об'єктів  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ;  $y = C(t)x + D(t)u$ ;

– для стаціонарних лінійних об'єктів  $\dot{x} = Ax + Bu$ ;  $y = Cx + Du$ ,

де  $x \in R^n$ ;  $y \in R^m$ ;  $u \in R^l$ , а матриці  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  мають відповідно розмірність  $n \times n$ ,  $n \times l$ ,  $m \times n$ ,  $m \times l$ .

Моделі у змінних стану більш одноманітні і зручні за формою.

## 2.2 Приклади моделей динаміки керованих об'єктів

*Приклад 1. Модель управління запасами.* Нехай мається деякий запас розміром  $x(t)$ , який витрачається зі швидкістю  $y(t)$  і поповнюється зі швидкістю  $u(t)$ . Швидкість зміни запасу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - y(t). \quad (2.8)$$

Темп витрат запасу  $y(t)$  не підлягає управлінню. Закон управління повинен забезпечувати заданий постійний рівень запасу  $x(t) = a > 0$  для будь-якого темпу витрат  $y(t)$ .

Таким умовам задовольняє такий закон управління:

$$u(t) = \begin{cases} y - k(x - a), & \text{якщо } y - k(x - a) \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } y - k(x - a) < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

де  $k$  – деяка додатна постійна.

Зважаючи на те, що управління ведеться тільки при  $x(t) < a$ , та з урахуванням того, що  $y(t) \geq 0$ , модель закону управління для системи (2.8) – (2.9) може бути подана таким рівнянням:

$$u(t) = -k(x - a).$$

*Приклад 2. Навігаційна задача швидкодії.* Судно у момент часу  $t = t_0$  знаходиться у точці  $A^{(0)}$  з координатами  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ . Знайти такий курс судна  $\varphi$ , на якому воно досягне заданої кінцевої точки  $A^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$  у момент  $t = t_1$  за найменший час:

$$T = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \rightarrow \min. \quad (2.10)$$

Якщо допустити, що судно має постійну швидкість  $v = \text{const}$ , а течія (збурення) – постійну швидкість  $s = \text{const}$ , вектор якої співпадає з напрямком  $x_1$ , то рівняння кінематики судна можна подати у такому вигляді:

$$\frac{dx_1}{dt} = s + v \cdot \cos \varphi; \quad \frac{dx_2}{dt} = v \cdot \sin \varphi,$$

або  $\frac{dx_1}{dt} = s + v \cdot u_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = v \cdot u_2$ , де  $u_1, u_2$  – управляючі параметри, значення яких повинні задовольняти умові:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \quad (2.11)$$

Таким чином, задача зводиться до вибору таких управляючих сигналів  $u_1^0$  і  $u_2^0$  із області (2.11), які мінімізують значення часу (2.10).

## 2.3 Перетворення моделей динаміки

На практиці використовують різні математичні форми моделей динаміки керованих об'єктів, як з точки зору порядків систем рівнянь, так і з точки зору форми їх подання. З урахуванням специфіки задач моделювання і того, що методи аналізу моделей орієнтовані на деякі канонічні форми, виникає необхідність їх перетворення.

*Перетворення моделей у змінних стану до форми Коші.* Нехай динаміка досліджуваного об'єкта описується системою звичайних диференціальних рівнянь такого виду:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a'_{xx}\dot{x} + a_{xx}x + a'_{xy}\dot{y} + a_{xy}y + a_{xz}\ddot{z} + a_{x\delta}\delta + f_x; \\ \ddot{y} &= a'_{yx}\dot{x} + a_{yx}x + a'_{yy}\dot{y} + a_{yy}y + a_{yz}\ddot{z} + a_{y\delta}\delta + f_y; \\ \ddot{z} - a'_{zz}\dot{z} + a_{zz}z &= a_{zx}\ddot{x} + a_{zy}\ddot{y},\end{aligned}\tag{2.12}$$

де  $x, y, z$  – змінні моделі, які характеризують стан об'єкта;

$a_{ij}$  – постійні коефіцієнти,  $i = x, y, z, j = x, y, z, \delta$ ;

$\delta$  – функція часу керуючого впливу;

$f_x, f_y$  – функції збурення.

Визначимо вхідні змінні об'єкта як адитивну комбінацію впливів збурення і керування:  $u_x = a_{x\delta}\delta + f_x$ ;  $u_y = a_{y\delta}\delta + f_y$ . Упорядкуємо запис змінних у рівняннях (2.12) і відокремимо вхідні змінні:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 0 - a_{xz}\ddot{z} - a'_{xx}\dot{x} - a'_{xy}\dot{y} + 0 - a_{xx}x - a_{xy}y + 0 &= u_x; \\ 0 + \ddot{y} - a_{yz}\ddot{z} - a'_{yx}\dot{x} - a'_{yy}\dot{y} + 0 - a_{yx}x - a_{xy}y + 0 &= u_y; \\ -a_{zx}\ddot{x} - a_{zy}\ddot{y} + \ddot{z} + 0 + 0 - a_{zz}\dot{z} + 0 + 0 + a_{zz}z &= 0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Введемо позначення:  $Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ,  $\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ ,  $\ddot{Y} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ . Тоді з (2.13) отримаємо:

$$N\ddot{Y} + G\dot{Y} + KY = P, \quad (2.14)$$

$$\text{де } N = \begin{bmatrix} I & 0 & -a_{xz} \\ 0 & I & -a_{yz} \\ -a_{zx} & -a_{zy} & I \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} -a'_{xx} & -a'_{xy} & 0 \\ -a'_{yx} & -a'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -a'_{zz} \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} -a_{xx} & -a_{xy} & 0 \\ -a_{yx} & -a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{zz} \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Помноживши (2.14) на матрицю  $N^{-1}$ , отримаємо:

$$\ddot{Y} + N^{-1}G\dot{Y} + N^{-1}KY = N^{-1}P. \quad (2.15)$$

Введемо нові змінні:  $\dot{Y} = V$  і  $\ddot{Y} = \dot{V}$ . З урахуванням цього система рівнянь (2.15) прийме вигляд:

$$\dot{V} + N^{-1}GV + N^{-1}KY = N^{-1}P. \quad (2.16)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2.16) відносно похідних і отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -N^{-1}GV - N^{-1}KY + N^{-1}P; \\ \dot{Y} &= V. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Після введення позначень  $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$  і  $X = \begin{bmatrix} V \\ Y \end{bmatrix}$  з (2.17) отримаємо модель

динаміки об'єкта у формі Коші:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (2.18)$$

де  $X$  – вектор координат об'єкта;

$$A = \begin{bmatrix} -N^{-1}G & -N^{-1}K \\ E & 0 \end{bmatrix};$$

$E$  – одинична матриця;

$$B = \begin{bmatrix} -N^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ – матриці постійних коефіцієнтів;}$$

$$U = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \text{ – вектор вхідних змінних.}$$

*Перехід від моделей у змінних стану до моделей у змінних входи-виходи.*

Опис динаміки керованого лінійного стаціонарного об'єкта у змінних входи-виходи має вигляд (2.5):

$$y = W(p)u, \quad (2.19)$$

де  $u, y$  – відповідно вектори вхідних і вихідних змінних;

$W(p)$  – матриця передаточних функцій.

Опис динаміки керованого лінійного стаціонарного об'єкта у змінних стану має вигляд (2.18) або:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u; \\ y &= C \cdot x + D \cdot u, \end{aligned} \quad (2.20)$$

де  $x, y, u$  – відповідно вектори стану, вхідних і вихідних змінних;

$A, B, C, D$  – матриці постійних коефіцієнтів.

Розглянемо перетворення моделі (2.20) до форми (2.19). Знайдемо із рівняння (2.20) вираз для матриці передаточних функцій. Перейдемо до зображень по Лапласу при нульових початкових умовах

$$\begin{aligned} s\tilde{x} &= A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{u}; \\ \tilde{y} &= C \cdot \tilde{x} + D \cdot \tilde{u}, \end{aligned} \quad (2.21)$$



де  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{y}$  – відповідно зображення за Лапласом змінних  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$ .

Розв'яжемо перше рівняння системи (2.21) відносно  $\tilde{x}$

$$\tilde{x} = (Es - A)^{-1} B \tilde{u}$$

і підставимо отриманий вираз у друге рівняння. Матимемо:

$$\tilde{y} = [C(Es - A)^{-1} B + D] \tilde{u}, \quad (2.22)$$

де  $E$  – одинична матриця.

Порівнюючи (2.22) з (2.20) знайдемо вираз для передаточної матриці:

$$W(s) = C(Es - A)^{-1} B + D. \quad (2.23)$$

Рівняння (2.23) має сенс, якщо існує обернена матриця  $(Es - A)^{-1}$ , тобто, якщо

$$\det(Es - A) \neq 0. \quad (2.24)$$

Умова (2.24) є першою умовою коректності перетворення. Друга умова передбачає що, порядок знаменника передаточної матриці повинен дорівнювати кількості змінних стану  $n$ . Відомо, що передаточні функції  $W_{ij}(s)$  є раціональними дробами. Якщо їх чисельники і знаменники мають спільні корені, то однакові множники скорочуються і порядок знаменника  $W_{ij}(s)$  стає меншим за  $n$ . Еквівалентність перетворення при цьому втрачається. Щоб цього не сталося для системи (2.20) повинні виконуватись умови керованості та спостережуваності.

Система (2.20) називається *керованою* у момент часу  $t = t_0$ , якщо для довільного заданого стану  $x^0 = x(t_0)$  та довільного іншого стану  $x^1 = x(t_1)$  можна вибрати таке управління  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , яке переводить систему зі стану  $x^0$  до стану  $x^1$  за скінченний час  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

Система (2.20) називається *спостережуваною* у момент часу  $t_0$ , якщо для

довільного стану  $x^0$  у момент  $t = t_0$  існує таке скінчене  $t_1 > t_0$ , що за відомими  $u(t)$  і  $y(t)$  на інтервалі  $[t_0, t_1]$  можна визначити стан  $x^0$ .

## 2.4 Класичні методи аналізу моделей динаміки

Для дослідження динаміки об'єктів, моделі яких подаються у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь використовують аналітичні, обчислювальні та якісні методи аналізу.

*Метод перетворення Лапласа.* Нехай модель динаміки лінійного стаціонарного об'єкта подана у формі Коші:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.25)$$

де  $x$  – вектор координат (стану) об'єкта;

$A, B$  – матриці постійних коефіцієнтів;

$u$  – вектор вхідних змінних.

Загальна схема методу перетворення Лапласа має такий вигляд:

*Модель (система звичайних диференціальних рівнянь) → Пряме перетворення Лапласа → Система лінійних алгебраїчних рівнянь → Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь → Зворотне перетворення Лапласа → Динаміка об'єкта (розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь).*

Після виконання прямого перетворення Лапласа системи (2.25) отримаємо:

$$s \tilde{x}(s) - x(0+) = A \tilde{x}(s) + B \tilde{u}(s), \quad (2.26)$$

де  $\tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{u}(s)$  – відповідно зображення за Лапласом змінних  $x(t)$  та  $u(t)$ .

Перетворимо рівняння (2.26) і отримаємо:

$$(Es - A) \tilde{x}(s) = x(0+) + B \tilde{u}(s). \quad (2.27)$$

Розв'язавши рівняння (2.27) відносно  $\tilde{x}(s)$ , матимемо:

$$\tilde{x}(s) = (Es - A)^{-1} x(0+) + (Es - A)^{-1} B\tilde{u}(s). \quad (2.28)$$

Після виконання зворотного перетворення Лапласа системи (2.28) отримаємо опис динаміки об'єкта у просторі станів:

$$x(t) = e^{At} x(0+) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (2.29)$$

Метод перетворення Лапласа дозволяє отримувати точні розв'язки задачі визначення траєкторії об'єкта (2.29), проте він може застосовуватись тільки для моделей з відносно невеликою кількістю рівнянь.

*Метод розкладання в ряд.* Нехай модель динаміки лінійного стаціонарного об'єкта подана у формі Коші:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.30)$$

де  $x$  – вектор координат (стану) об'єкта;

$A, B$  – матриці постійних коефіцієнтів;

$u$  – вектор вхідних змінних.

Відомо, що розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.30) має вигляд (2.29):

$$x(t) = e^{At} x(0+) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Якщо обрати крок інтегрування системи рівнянь  $t$  таким, на якому вхідний сигнал можна вважати постійним  $u(\tau) = \text{const}$ , то розв'язок системи рівнянь (2.29) можна подати у вигляді:

$$x(t) = e^{At} x(0+) + A^{-1}(e^{At} - E)Bu, \quad (2.31)$$

де  $E$  – одинична матриця

Розкладемо функцію  $e^{At}$  у ряд і отримаємо:

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots$$

З рахуванням того, що

$$A^{-1}(e^{At} - E) = Et + \frac{A t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!} + \dots,$$

отримаємо розв'язок (2.31) у вигляді:

$$x(t) = \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!}\right)x(0+) + \left(Et + \frac{A t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!}\right)Bu. \quad (2.32)$$

Якщо ввести позначення

$$F(t) = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!};$$

$$Q(t) = Et + \frac{A t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!},$$

то розв'язок (2.32) можна подати у вигляді:

$$x(t) = F(t)x(0+) + Q(t)Bu. \quad (2.33)$$

Для визначення різницевого аналога розв'язку (2.33) розіб'ємо інтервал дослідження об'єкта на часткові інтервали довжини  $t=T$ . Тоді для моментів часу  $t=T, 2T, 3T, \dots$  стан об'єкта визначатиметься співвідношеннями:

$$x(T) = F(T)x(0) + Q(T)Bu(0);$$

$$x(2T) = F(T)x(T) + Q(T)Bu(T);$$

$$\dots$$

$$x[(n+1)T] = F(T)x(nT) + Q(T)Bu(nT).$$

Цей метод визначення динаміки об'єкта відноситься до наближених обчислювальних і може застосовуватись для моделей з великою кількістю рівнянь, проте він має дві похибки:

– похибка, яка пов'язана зі ступінчатою апроксимацією функції  $u(\tau)$ . Її розмір може бути зменшений шляхом зменшення кроку моделювання  $T$ , проте при цьому буде зростати час розв'язання задачі моделювання;

– похибка, яка визначається врахуванням кінцевої кількості складових у розкладаннях (2.32).

*Метод Рунге-Кутта.* Серед сукупності методів Рунге-Кутта найбільш ефективним за показником "складність-точність" вважається метод 4-го порядку. Нехай модель динаміки об'єкта подана у вигляді:

$$\dot{x} = f(t, x),$$

де  $x$  – вектор координат (стану) об'єкта;

$f$  – вектор-функція;

$t$  – змінна часу.

Інтервал дослідження розіб'ємо на часткові відрізки  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$  із кроком  $h$ . Стан об'єкта у момент часу  $t_{k+1}$  визначається виходячи зі стану у момент часу  $t_k$  за співвідношенням:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

де  $x^{(k)}$  – стан об'єкта у момент часу  $t_k$ ;

$$\Delta x^{(k)} = (\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_4) / 6;$$

$$\theta_1 = h f(t_k, x^{(k)});$$

$$\theta_2 = h f(t_k + h/2, x^{(k)} + \theta_1/2);$$

$$\theta_3 = h f(t_k + h/2, x^{(k)} + \theta_2/2);$$

$$\theta_4 = h f(t_k + h, x^{(k)} + \theta_3).$$

Крок розв'язання  $h$  вибирається виходячи з заданого значення допустимої похибки  $\varepsilon$  з урахуванням співвідношення  $\varepsilon \sim h^5$ . Уточнення розміру кроку виконувати шляхом порівняння результатів розрахунку траєкторії зі звичайним і половинним його значенням.

## 2.5 Спеціальні методи аналізу динамки об'єктів

Точність аналітичних методів аналізу динамки об'єктів (чисельного інтегрування) оцінюється на основі аналізу повної похибки  $\varepsilon_m^n$  на кожному  $m$ -

му кроці інтегрування. Якщо аналітичний розв'язок не може бути знайдений, оцінюється основні складові повної похибки:

- похибка апроксимації (методична)  $\varepsilon_m^a$  – похибка власне методу інтегрування, що виникає через заміну похідних скінчено-різницевиими виразами у формулах інтегрування;

- похибка обчислень  $\varepsilon_m^o$  пов'язана з округленням чисел в ЕОМ і заміною неарифметичних операцій і функцій арифметичними;

- похибка накопичення  $\varepsilon_m^H$  дорівнює повній похибці на попередньому кроці  $\varepsilon_{m-1}^n$ . Через наявність похибки накопичення значення шуканих функцій на  $m+1$  кроці обчислюються на основі не точних, а наближених значень.

Якщо похибка накопичення у процесі інтегрування не зростає зі зростанням номера кроку, то метод інтегрування називають чисельно стійким, у іншому випадку – чисельно нестійким для даного значення кроку інтегрування.

Для розв'язання більшості практичних задач аналізу динаміки об'єктів використовують класичні методи інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь, що задовольняють вимогам точності розв'язків і часу моделювання. Проте існують задачі, для розв'язання яких виникає необхідність розробки і спеціальних методів аналізу, до яких, зокрема відносять якісні, комбіновані та діакоптичні методи.

*Якісні методи* орієнтовані на отримання не самого розв'язку, а на визначення його властивостей. Такі задачі виникають, зокрема, при проектуванні об'єктів і систем керування ними.

Модель динаміки лінійного стаціонарного об'єкта (2.30) визначає траєкторію його вимушеного руху. Рух об'єкта в умовах відсутності вхідного впливу ( $Bu = 0$ ) називають вільним. Його динаміку можна подати моделлю виду:

$$\dot{x} = Ax, \quad x^{(0)} = x(t_0), \quad (2.34)$$

де  $x$  – вектор координат (стану) об'єкта;

$A$  – матриця постійних коефіцієнтів розмірності  $n \times n$ , що характеризує властивості об'єкта.

Позначимо через  $X^{(i)}$  власний вектор матриці  $A$ , який відповідає власному значенню  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді розв'язок системи рівнянь (2.34) можна подати як суму окремих фундаментальних розв'язків:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} X^{(i)}, \quad (2.35)$$

де  $C_i$  – постійна, що визначається початковими умовами в обраному базисі.

Виходячи з (2.35) характер траєкторії руху об'єкта повністю визначається власними значеннями матриці  $A$ . Власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  є коренями характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

де  $E$  – одинична матриця.

Власні вектори  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$  матриці  $A$  є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що мають вигляд

$$(A - \lambda_i E) X^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

і визначаються з точністю до постійного множника.

Для дійсних власних значень  $\lambda_i$  функції фундаментальних розв'язків (2.35)  $C_i e^{\lambda_i t} X^{(i)}$  будуть монотонними (зростаючими для позитивних  $\lambda_i$  і спадними для негативних  $\lambda_i$ ). Для комплексних власних значень  $\lambda_i$  функції фундаментальних розв'язків (2.35)  $C_i e^{\lambda_i t} X^{(i)}$  будуть коливними  $C_i e^{\operatorname{Re}(\lambda_i) t} \sin[\operatorname{Im}(\lambda_i) t] X^{(i)}$  (зростаючими для позитивних  $\lambda_i$  і затухаючими для негативних  $\lambda_i$ ).

*Комбіновані методи* передбачають використання різних методів (алгоритмів) або адаптацію базових методів інтегрування з метою отримання максимально точних (задовільних) результатів з мінімальними (задовільними) витратами обчислювальних ресурсів. Розрізняють комбінування "у просторі" (розбиття системи рівнянь моделі на підсистеми з подальшим роздільним їх розв'язанням найбільш ефективними методами) та "у часі" (використання різних методів інтегрування на різних етапах розв'язання системи рівнянь).

*Діакоптичні методи* (розбиття, декомпозиції) передбачають розбиття складного досліджуваного об'єкта (системи рівнянь його моделі) на підсистеми

з урахуванням зв'язків між ними. Після цього здійснюється послідовне чи паралельне розв'язання задач меншої розмірності.

Нехай підчас аналізу динаміки об'єкта методом перетворення Лапласа необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$Ax = e, \quad (2.36)$$

де  $A$  – квадратна матриця розмірністю  $n \times n$ ;

$x$  – шукана змінна;

$e$  – вектор коефіцієнтів.

Подамо матрицю  $A$  як таку, що складається з чотирьох матриць:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

а вектори, як такі, що складаються з двох векторів кожний

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (2.36) можна переписати у вигляді:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Перше матричне рівняння з (2.37)  $A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1$  розв'яжемо відносно  $X_1$ , матимемо:

$$X_1 = A_{11}^{-1} (B_1 - A_{12}X_2). \quad (2.38)$$

Підставимо отриманий вираз (2.38) у друге рівняння:

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2.$$

Отримаємо:



$$A_{21} A_{11}^{-1} (B_1 - A_{12} X_2) + A_{22} X_2 = B_2,$$

або

$$X_2 = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1). \quad (2.39)$$

Замість визначення  $x$  в (2.36) за формулою  $x = A^{-1}v$ , що потребує виконання порядку  $n^3$  операцій для обернення матриці  $A$  розмірністю  $n \times n$  необхідно знайти обернені матриці у (2.38) і (2.39), що потребує порядку  $n^3/4$  операцій. З урахуванням необхідності перемноження матриць у (2.38) і (2.39) виграш за кількістю операцій для розв'язання системи (2.36) складає приблизно 2 рази.

## 2.6 Моделювання динаміки об'єктів на аналогових обчислювальних машинах

Аналогова обчислювальна машина (АОМ) представляє собою фізичну модель. Змінні та параметри математичних моделей динаміки подаються в АОМ у вигляді машинних змінних (миттєвих значень напруги). АОМ складається з: операційних (функціональних) блоків; вимірювальної апаратури; апаратури реєстрації; пристрою керування.

Основними етапами підготовки АОМ-моделювання є:

- постановка задачі дослідження (створення математичної моделі; визначення діапазонів значень параметрів і змінних);
- програмування задачі (перетворення моделі до вигляду, що є зручним для АОМ-реалізації; розробка структурної схеми АОМ);
- масштабування задачі (визначення співвідношення між значеннями параметрів і змінних математичної моделі та машинної моделі);
- комутація задачі (з'єднання операційних блоків та встановлення початкових значень змінних);
- контроль схеми і налагодження блоків (перевірка відповідності схеми математичній моделі та значень коефіцієнтів передачі блоків машинної моделі).

Схема методу програмування АОМ для розв'язання звичайного диференційного рівняння  $n$ -порядку може бути подана в такий спосіб.

1. Розв'язати рівняння відносно старшої похідної.
2. Включити до структурної схеми ланцюжок із  $n$  інтеграторів.
3. Вважаючи що похідна старшого порядку є відомою, подати відповідний сигнал на вхід першого інтегратора. На виходах інтеграторів отримаємо шукану змінну та її  $n-1$  похідні.

4. Із вихідних сигналів інтеграторів і функції збурення сформувати сигнал, рівний похідній вищого порядку.

5. Ланцюг замкнути шляхом подачі сформованого сигналу на вхід першого інтегратора.

6. Задати на інтеграторах значення змінних, що відповідають початковим умовам.

*Приклад.* Нехай модель динаміки подана системою звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами такого виду:

$$y''(t) + a_0 y'(t) + a_1 y(t) = u(t), \quad (2.40)$$

де  $y(t)$ ,  $u(t)$  – вихідний та вхідний сигнали;

$a_0$ ,  $a_1$  – коефіцієнти моделі.

Розв'язавши рівняння (2.40) відносно старшої похідної, матимемо:

$$y''(t) = -a_0 y'(t) - a_1 y(t) + u(t). \quad (2.41)$$

Виконавши кроки 2-6 схеми методу програмування АОМ, отримаємо схему для розв'язання рівняння (2.41), яка зображена на рис. 2.1.

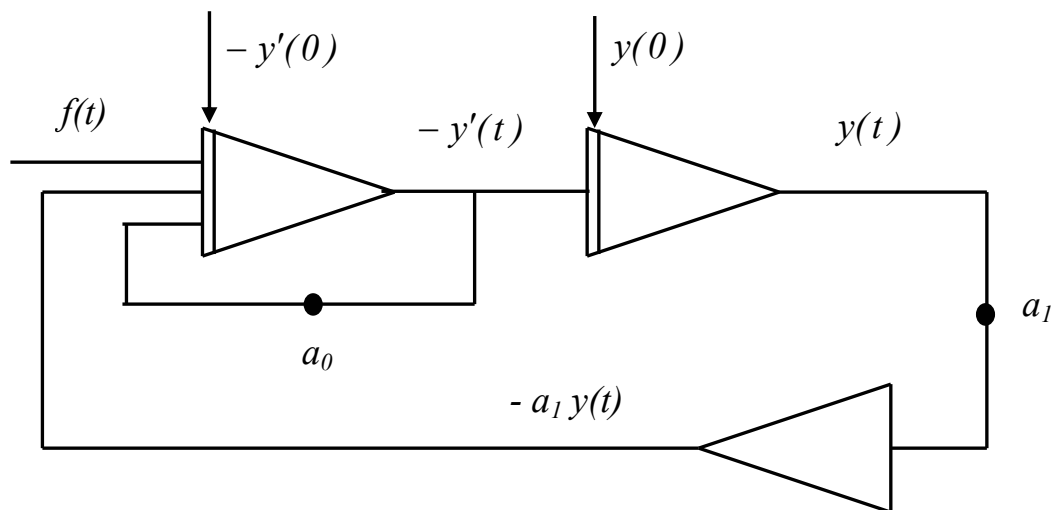


Рисунок 2.1 – Структурна схема АОМ-моделі

Аналогічно може бути побудована структурна схема для дослідження динаміки об'єктів, які описуються системи звичайних диференціальних рівнянь.

Достоїнством АОМ-моделювання є висока швидкість розв'язання задачі аналізу динаміки, а основним недоліком – відносно невисока точність результатів, що обумовлена, в основному, невисокою точністю вимірювання значень напруги на інтеграторах.

## 2.7 Побудова моделей за методом ідентифікації

Ефективність моделювання визначається на практиці шляхом співставлення ефекту від використання його результатів і витрат на його проведення. Це визначає основні вимоги, що висуваються до моделей.

Ефект від моделювання зростає з підвищенням точності моделі. Як показник *точності* використовують похибку моделі  $\varepsilon$  – ступінь збігу результатів, отриманих на об'єкті  $x_o$  та за допомогою моделі  $x_m$ ,  $\varepsilon = |x_o - x_m|$ .

Ще одним показником, що характеризує адекватність моделі є стійкість розв'язків, що можуть бути отримані з її допомогою. Для лінійних об'єктів для оцінки стійкості використовують, зокрема, числа обумовленості матриць систем рівнянь моделі. Витрати на моделювання зменшуються при зростанні економічності та універсальності моделей.

*Економічність* моделі характеризується розміром витрат різнорідних ресурсів на моделювання (часових, фінансових, обсягів комп'ютерного часу, пам'яті і т.п.).

*Універсальність* моделі характеризує її здатність відображати різні властивості об'єкта дослідження.

Для того, щоб теоретично отримана модель була конструктивною, дозволяла достовірно визначати кількісні характеристики процесу, який досліджується, необхідно уточнити її шляхом розв'язання задачі ідентифікації. Під ідентифікацією розуміється процес побудови найкращої у визначеному сенсі моделі за результатами спостереження за вхідними  $u(t)$  і вихідними  $y(t)$  сигналами об'єкта.

Синтез математичної моделі передбачає необхідність розв'язання двох взаємопов'язаних задач: структурної та параметричної ідентифікації. Перша з них присвячена визначенню значущих факторів, які суттєво впливають на вихідні дані об'єкта, та визначення структури моделі (виду оператора  $F_m$ , що встановлює зв'язок між вхідними  $u_m(t)$  та вихідними  $y_m(t)$  змінними моделі. Друга задача полягає у визначенні кількісних значень параметрів моделі  $q_m$ .

У загальному випадку процес ідентифікації об'єкта передбачає

розв'язання наступних задач:

- вибір класу та структури математичної моделі  $F_m$  об'єкта, що ідентифікується;
- вибір класу та типу вхідного сигналу  $u(t)$ ;
- обґрунтування критерію подібності системи та моделі;
- вибір методу ідентифікації та розробка алгоритмів оцінки параметрів об'єкта  $q$ ;
- перевірка адекватності отриманої моделі об'єкту.

Вичерпною характеристикою динамічних об'єктів є власні значення їх операторів (власні частоти об'єктів). У зв'язку з цим для забезпечення умов ідентифікуємості необхідно: щоб вхідний сигнал об'єкта  $u(t)$  збуджував усі коливання, що відповідають власним частотам об'єкта, а вихідний сигнал  $y(t)$  містив достатньо інформації щодо власних частот об'єкта. Перша умова є умовою керованості об'єкта, а друга – умовою спостерігаємості.

Процес параметричної ідентифікації здійснюється наступним чином (рис. 2.2). На вхід об'єкта подається відомий сигнал  $u(t)$ . Цей же сигнал подається на вхід моделі, але через завади  $\eta_m(t)$ , вхідний сигнал моделі  $u_m(t)$  є комбінацією  $u(t)$  і  $\eta_m(t)$ . Оператор системи  $F[u, q, \eta]$  характеризується своєю структурою та вектором параметрів  $q$ . Модельний оператор об'єкта  $F_m$  характеризується структурою,  $m$ -вимірним вектором  $q_m$  параметрів і вектором похибок  $\eta_m(t)$ . Приведена до виходу об'єкта похибка  $\eta(t)$  складається з двох частин  $\eta_1(t)$  – похибка вимірювання та  $\eta_2(t)$  – похибка неточності завдання моделі або неточності визначення оператора системи. Похибка  $\eta_2(t)$  частіше за все виникає через надмірне спрощення моделі.

Ефективність ідентифікації визначається критерієм подібності системи і моделі  $K$ , який досягає глобального екстремуму у випадку еквівалентності  $F(t)$  і  $F_m(t)$ . Критерій  $K$  прийнято формувати як функцію (функціонал) від значень виходів об'єкта  $y(t)$  і моделі  $y_m(t)$ :

$$K[y(t), y_m(t)] = K\{y(t), F_m[u_m(t), q_m, \eta_m(t)]\} \rightarrow \underset{F_m \in \Omega_m, q_m \in Q_m}{extr}, \quad (2.42)$$

де  $\Omega_m$ ,  $Q_m$  – відповідно множини допустимих операторів і значень параметрів моделі.

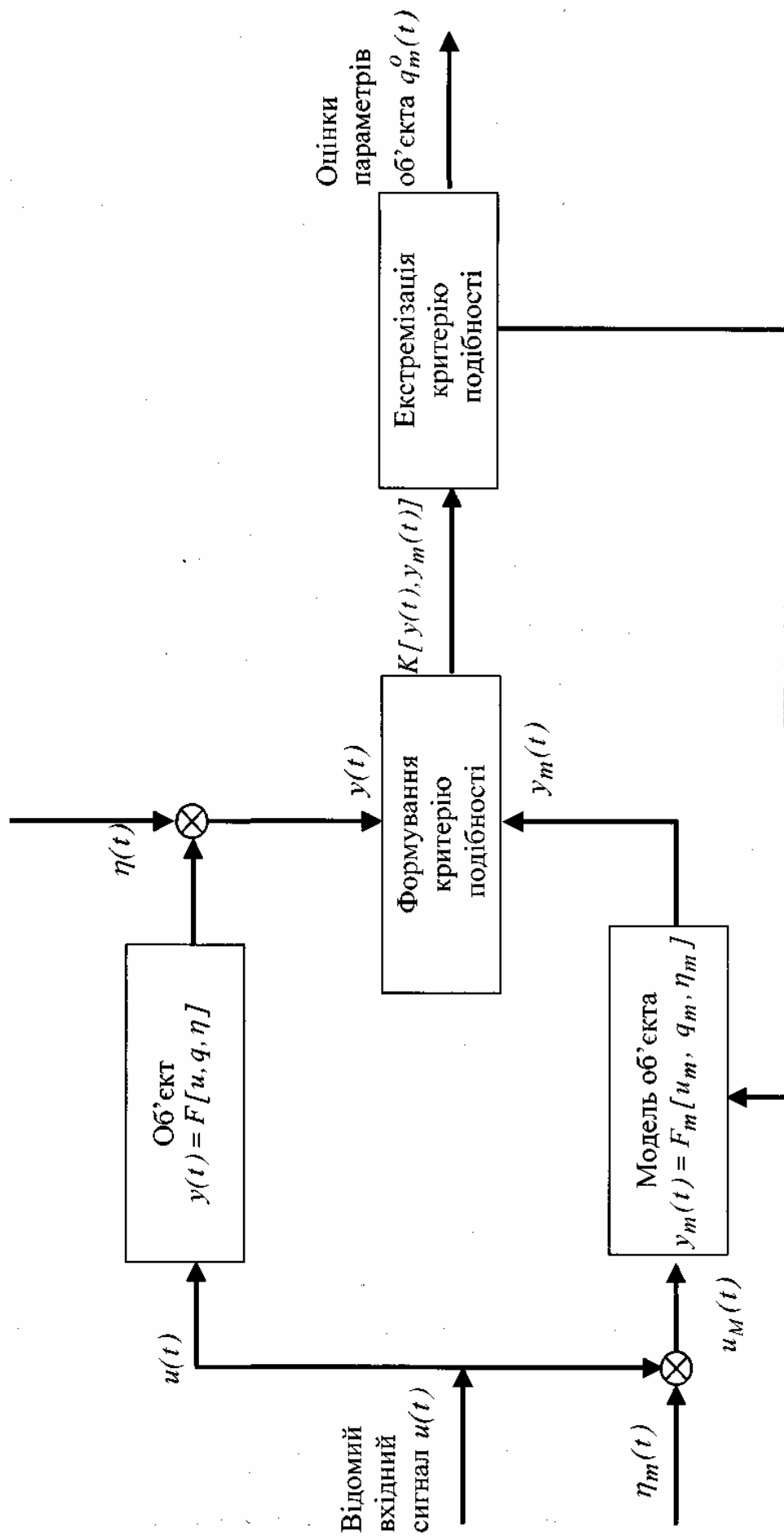


Рисунок 2.3 – Схема процесу ідентифікації

Вихід моделі  $y_m(t)$  формується на основі відомостей щодо класу функцій  $F_m(t)$ , серед яких необхідно визначати найкращу модель. Це потребує знання аналітичного опису моделі з точністю до скінченного числа параметрів, що робить можливим використання різних методів оцінки і прийняття рішень. Частіше за все при розв’язанні задач ідентифікації використовують методи (за назвою критеріїв (2.42)) найменших квадратів, найменших зважених квадратів, максимальної правдоподібності та мінімального ризику.

## 2.8 Ідентифікація лінійних динамічних об’єктів

Нехай структура моделі керованого об’єкта визначена у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь. Стан досліджуваного об’єкта визначається вектором  $x(t)$  з евклідового  $n$ -вимірному простору, тобто:

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)],$$

де  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  – координати вектора стану.

Для деякого значення аргументу  $t$  визначені вектори:

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \quad (2.43)$$

Необхідно підібрати таку матрицю  $A$ , яка задовольняла б умовам:

$$\frac{dx}{dt} = Ax; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = A \frac{dx}{dt}; \dots; \frac{d^n x}{dt^n} = A \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}. \quad (2.44)$$

Стан системи  $x$ , який встановлюється на основі векторів (2.43), називають таким, що ідентифікується, якщо для нього існує матриця  $A$ , для якої виконуються співвідношення (2.44).

Позначимо рядки матриці  $A$  як  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Тоді рівняння (2.44) можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j x; \dots; \frac{d^n x_j}{dt^n} = a_j \frac{d^{n-1} x_j}{dt^{n-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.45)$$

Розглядаючи співвідношення (2.45) як для кожного  $j = 1, 2, \dots, n$  як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно елементів рядку  $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$  можна записати:

$$\begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2x_j}{dt^2} \\ \dots \\ \frac{d^nx_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.46)$$

Умови існування розв'язку задачі ідентифікації (розв'язку системи рівнянь (2.46)), можна подати у вигляді:

$$\det \left( x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right) \neq 0. \quad (2.47)$$

Це означає, що параметри математичної моделі у цьому випадку можна визначити за формулами:

$$a_j = \begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2x_j}{dt^2} \\ \dots \\ \frac{d^nx_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.48)$$

Необхідні і достатні умови для розв'язання задачі ідентифікації у постановці, що розглядається, полягають у тому, щоб співпадали ранги основної і розширеної матриць у системі (2.46), тобто, щоб для кожного  $j = 1, 2, \dots, n$  виконувались умови:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} & \frac{dx_2(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_n(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) & \frac{dx_j(t)}{dt} \\ \frac{dx_1(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_n(t)}{dt} & \frac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}} & \frac{d^nx_j}{dt^n} \end{bmatrix}.$$

У загальному випадку методи ідентифікації базуються на оптимізаційних процедурах оцінки параметрів.

## 2.9 Контрольні запитання та завдання

1. У яких формах подаються диференціальні моделі динаміки об'єктів?
2. Наведіть приклад диференціальної моделі динаміки об'єкта.
3. З якою метою здійснюються перетворення диференціальних моделей динаміки?
4. У чому суть процедури перетворення моделей у змінних стану до форми Коші?
5. Запишіть співвідношення для переходу від моделей у змінних стану до моделей у змінних входи-виходи.
6. Опишіть процедуру аналізу динаміки об'єкта за методом перетворення Лапласа.
7. Запишіть співвідношення для визначення траєкторії руху об'єкта за методом розкладання в ряд.
8. Запишіть співвідношення для визначення траєкторії руху об'єкта за методом Рунге-Кутта.
9. З якою метою використовують спеціальні методи аналізу динаміки? Назвіть приклади таких методів.
10. У чому полягає суть якісних методів аналізу динаміки?
11. Що входить до складу аналогових обчислювальних машин?
12. Опишіть основні етап підготовки моделювання та програмування АОМ для розв'язання звичайного диференційного рівняння  $n$ -порядку.
13. Опишіть суть процедури ідентифікації об'єкта.
14. Яким чином забезпечуються умови ідентифікуємості та спостерігаємості об'єкта?
15. Запишіть співвідношення для ідентифікації лінійного динамічного об'єкта.



### 3 ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ

#### 3.1 Принципи побудови моделювальних алгоритмів

Процес функціонування досліджуваного об'єкта являє собою послідовну зміну його станів у  $n$ -вимірному просторі  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ . Задачею моделювання динаміки об'єкта є побудова функцій стану  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , а також визначення на основі цих функцій деяких характеристик процесу його функціонування. Для визначення траєкторії руху об'єкта повинні бути визначені співвідношення математичної моделі, які пов'язують функції  $x(t)$  зі змінними, параметрами об'єкта, часом, а також початкові умови  $x(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ .

Для детермінованого об'єкта стан процесу у будь-який момент часу  $t$  може бути однозначно визначений за співвідношеннями математичної моделі та початковим станом  $x(t_0)$ . Це дозволяє створювати імітаційні моделювальні алгоритми процесів, які будуються на основі одного з принципів: часового або подійного.

Розіб'ємо інтервал дослідження об'єкта  $[t_0, T]$  на часткові інтервали шириною  $\Delta t = \text{const}$ . На початку моделювання лічильник системного часу має значення  $t = t_0$ . Відомо, що у цей момент часу об'єкт знаходиться у стані  $x(t_0)$ . Через проміжок часу  $\Delta t$  лічильник системного часу матиме значення  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . За співвідношеннями математичної моделі визначимо стан об'єкта  $x_i(t_1) = x_i(t_0 + \Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Потім перейдемо до наступного моменту часу  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , визначимо стан об'єкта  $x_i(t_2) = x_i(t_1 + \Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  і так далі. Якщо крок  $\Delta t$  є достатньо малим, то можна з достатньою точністю визначити наближення функції стану об'єкта  $x(t)$ .

Подібна схема моделювального алгоритму може бути застосована і для стохастичних об'єктів. Відміна буде полягати у тому, що функція стану процесу  $x(t)$  буде визначатись не однозначно, а лише розподілом ймовірностей. При цьому і початковий стан об'єкта  $x(t_0)$  може бути випадковим і задаватись відповідним розподілом ймовірностей.

Розглянутий принцип побудови моделювальних алгоритмів називають *часовим* або "*принципом  $\Delta t$* ". Він є універсальним, проте неефективним з точки зору витрат машинного часу на моделювання та має методичну похибку, розмір якої визначається кроком моделювання  $\Delta t$ .

У процесах функціонування багатьох об'єктів можна виділити стани двох

типів: особливі, що притаманні процесу лише у деякі моменти часу (у них стан змінюється стрибком) та неособливі (у яких стан не змінюється). Таким чином, відслідковуючи у часі особливі стани об'єкта, можна отримати інформацію достатню для побудови функцій стану  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для таких об'єктів моделювальні алгоритми можуть будуватись на основі *подійного принципу* (*принципу особливих станів*). При цьому закон зміни значень лічильника часу буде мати вигляд:  $t_k = t_{k-1} + \tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , де  $\tau_k$  – інтервал часу між  $(k-1)$ -м і  $k$ -м особливими станами об'єкта. Моделювальні алгоритми, які побудовані за цим принципом є більш економічними з обчислювальної точки зору та не містять методичної похибки, пов'язаної з визначенням моменту настання особливого стану.

Частковим випадком подійного принципу є принцип послідовної проводки заявок, який використовується при статистичному моделюванні динаміки систем масового обслуговування. У алгоритмах, що побудовані за цим принципом, здійснюється циклічне послідовне відстеження подій під час проходження через систему обслуговування кожної заявки.

Під час дослідження динаміки складних об'єктів може використовуватись комбінований принцип побудови моделювальних алгоритмів, що об'єднує переваги часового і подійного принципів.

### 3.2 Форми зображення моделювальних алгоритмів

Найбільш поширеною формою подання моделювальних алгоритмів є графічні, операторні та граф-схеми.

Серед *графічних схем* виділяють: узагальнені (вони визначають лише загальний порядок дій під час моделювання без уточнюючих деталей); детальні (вони визначають не тільки, що потрібно виконати на поточному кроці моделювання, але й як це зробити); логічні (вони визначають упорядковану у часі послідовність логічних операцій, які пов'язані з розв'язанням задачі моделювання). Графічні схеми виконуються відповідно до вимог діючого стандарту<sup>1</sup>.

*Операторна схема* задає послідовність дій алгоритму у вигляді ланцюга операторів, зміст кожного з яких детально описується. Наприклад:

<sup>1</sup> Межгосударственный стандарт. ГОСТ 19.701-90 (ИСО 5807-85). Схемы алгоритмов, программ, данных и систем. Условные обозначения и правила выполнения. Введен 26.12.90.

$$P_1 \xrightarrow{3,4} O_2 \xrightarrow{P_3 \uparrow 2} P_4 \xrightarrow{\uparrow 2} \Phi_5 \rightarrow P_6 \rightarrow K_7,$$

де  $P_1$  – початок;

$O_2$  – обчислення;

$P_3, P_4$  – перевірка умов (при їх виконанні здійснюється перехід до наступного оператора, у противному випадку – перехід до виконання оператора  $O_2$ );

$\Phi_5$  – формування;

$P_6$  – видача результатів;

$K_7$  – кінець алгоритму.

*Граф-схема* подає моделювальний алгоритм у вигляді орієнтованого графа. Оператори алгоритму відповідають вершинам графа, а можливі переходи між ними відображаються у вигляді дуг.

### 3.3 Принципи побудови та структура імітаційних моделей динаміки

Побудові імітаційної моделі передують виявлення питань, на які вона повинна дати відповіді. Модель повинна відображати замкнений контур, характерний для структури керованого об'єкта. У моделі керованого об'єкта повинні бути коректно подані усі суттєві запізнювання, підсилення і спотворення інформації, які мають місце у процесі його функціонування.

*Запізнювання* характерні для всіх процесів, що мають місце у об'єктах дослідження (збір і передавання даних, обробка інформації, прийняття рішень, виконання керуючих дій), вони відображають їх тривалість. Вони проявляються у формі залишків, запасів, накопичень.

*Підсилення* виникають як результат застосування певних правил прийняття рішень, які визначають темпи потоків, і проявляються, зазвичай, як реакції більшої сили, ніж було б необхідно.

*Спотворення інформації* може виникати не тільки в результаті запізнень і підсилень, які мають місце в процесі функціонування об'єкта, але й при обробці даних (усереднення, помилки округлення і таке інше). Вони також можуть бути наслідком помилок, випадкових шумів, а також невиявлених збурень, джерела яких знаходяться поза об'єктом.

Спочатку потоки і взаємодії змінних доцільно вважати неперервними. Неперервність слід розуміти, в першу чергу, як неперервність реакцій

управління (рішення, що прийняті не передбачають корегування кожної одиниці часу: хвилини, години, дня). Дискретність може бути врахована на етапі аналізу керованого об'єкта.

Усі параметри і змінні моделі можуть і повинні бути відображеннями відповідних величин і категорій об'єкта моделювання. Розмірність величин у моделі повинна бути ретельно погодженою. Починати потрібно з побудови моделі з детермінованою структурою рішень, а потім включати в неї елементи випадковості й періодичні коливання. При побудові моделі не слід припускати, що система є лінійною й стійкою.

В інформаційній системі зі зворотним зв'язком ті або інші явища породжують інформацію, що є основою для рішень, що управляють діями, спрямованими на зміну цих явищ. Такий цикл є безперервним.

Імітаційна модель динаміки об'єкта повинна мати форму, що дозволяє вирішувати одночасно кілька завдань. У зв'язку із цим вона повинна мати такі характерні риси:

- мати можливість відображати будь-який причинно-наслідковий зв'язок, який дослідник хоче врахувати;
- мати просту математичну форму;
- використати термінологію, синонімічну мові предметної галузі об'єкта дослідження;
- охоплювати велику кількість змінних, не перевищуючи практичних можливостей ЕОМ;
- бути придатною для відбиття "безперервних" взаємодій, для того, щоб дискретні величини, що вводяться на інтервалі часу між рішеннями, не мали суттєвого впливу на результати, однак модель повинна дозволити проводити дискретні зміни в рішеннях.

Зазначеним вище вимогам задовольняє динамічна структура, що складається з рівнів (ємностей, резервуарів), зв'язаних між собою керованими потоками.

Така структура містить чотири елементи (рис. 3.1):

- множину рівнів;
- потоки, що переміщають уміст одного рівня до іншого;
- функції рішень (зображувані у вигляді вентилів), які регулюють темпи потоків між рівнями;
- канали інформації (зображувані у вигляді пунктирних стрілок), що з'єднують функції рішень із рівнями.

*Рівні* характеризують накопичення, які виникають усередині системи

(товари, наявні на складі, банківська готівка, виробничі площі, ресурси робочої сили). Рівні являють собою ті значення змінних у цей момент, які вони мають у результаті нагромадження через різницю між вхідними і вихідними потоками. Рівні мають місце у всіх потоках: інформації, матеріалів, замовлень, коштів, робочої сили, устаткування.

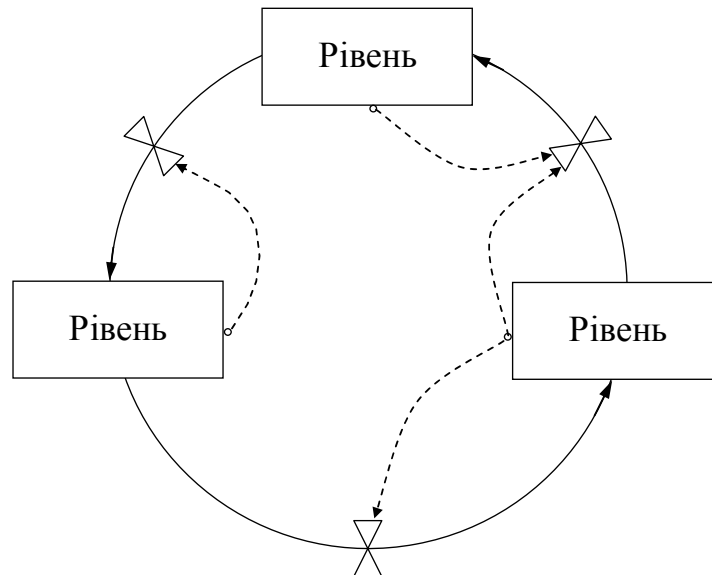


Рисунок 3.1 – Базова структура моделі

*Темпи* визначають існуючі миттєві потоки між рівнями в системі. Темп відображає активність, у той час як рівні вимірюють стан, що є результатом активності в системі. Темпи так само, як і рівні, існують у всіх мережах системи. Темпи потоку встановлюються на основі рівнів відповідно до законів, які визначають вид функції рішень. У свою чергу темпи визначають рівні.

*Функції рішень* (рівняння темпів) являють собою формулювання лінії поводження, що відображає розподіл ресурсів і визначає, яким чином наявна інформація про рівні приводить до вибору рішень, пов'язаних з величинами поточних темпів. Усі рішення стосуються майбутніх дій і виражаються у формі темпів потоку. Функція рішення може мати форму нескладного рівняння, що визначає найпростішу реакцію потоку на стан одного або двох рівнів.

*Інформація* є основою для прийняття рішень. Функції рішень для визначення темпів потоків пов'язані лише з інформацією щодо рівнів і вважаються незалежними у той же момент часу від інших темпів потоків.

У загальному випадку процес функціонування об'єкта подається сукупністю різномірних взаємодіючих між собою мереж потоків матеріалів,

замовлень, фінансів, робочої сили, обладнання, інформації. Мережа інформації є об'єднуючою для всіх інших мереж. Вона бере "початок" від рівнів і темпів інших мереж і "закінчується" біля функцій рішень, що визначають темпи потоків у інших мережах.

### 3.4 Системи рівнянь імітаційних моделей динаміки

Для опису базової структури імітаційних моделей динаміки необхідна система рівнянь, що задовольняла б перерахованим вище вимогам і дозволяла б визначати поточні значення для рівнів і темпів потоків. Така система рівнянь повинна відповідати взаємодії елементів об'єкта, а її розв'язки – станам об'єкта для визначених моментів часу.

Інтервал моделювання розбивається на відрізки рівної величини  $dt$ . При цьому виділяються три послідовних моменти часу:  $j$  – попередній,  $k$  – теперішній,  $l$  – майбутній. Відрізки часу  $dt$  повинні бути достатньо малими, щоб темпи потоків усередині них можна було вважати постійними, отримавши достатнє наближення до неперервних темпів потоків реального об'єкта (рис. 3.2). Таким чином, на рішення, прийняті на початку інтервалу, не будуть впливати зміни, що матимуть місце на цьому інтервалі.

Імітаційні моделі динаміки (за Дж.Форрестером) включають рівняння: рівнів; темпів потоків; допоміжні; додаткові; початкових умов. Для кожного з інтервалів спочатку розв'язуються рівняння рівнів, а потім отримані значення використовуються у рівняннях темпів. Значення рівнів у момент часу  $k$  обчислюються на кінець інтервалу  $jk$ , а по ним визначаються нові темпи потоків (рішення) для наступного інтервалу  $kl$  (рис. 3.3).

Рівняння рівнів визначають рівні у момент часу  $k$ , виходячи із значень рівнів у момент  $j$  і темпів потоків на інтервалі  $jk$ . Отримані значення рівнів будуть визначати темпи потоків протягом наступного інтервалу  $kl$ . Постійність темпів у межах  $dt$  забезпечує постійну швидкість зміни рівнів на відрізок  $jk$ .

Для позначення змінних у рівняннях моделі рекомендується використовувати символи, що відображають фізичну суть показників досліджуваного об'єкта. Відповідність значень змінних моментам і відрізкам часу встановлюється за допомогою розширень їх ідентифікаторів:  $j$ ;  $k$ ;  $l$ ;  $jk$ ;  $kl$ .

*Рівняння рівнів (U-рівняння).* Рівень являє собою змінний за величиною вміст ємності (резервуару, накопичувач). Значення рівнів визначається на початку і в кінці кожного із інтервалів. Вважається, що в середині

інтервалів значення рівня змінюється лінійно.

Прикладом типового рівняння рівня може бути:

$$zr.k = zr.j + dt * (in.jk - out.jk),$$

$zr.k, zr.j$  – значення рівня у моменти часу  $k$  і  $j$  відповідно;

$dt$  – інтервал розв'язання рівнянь (крок моделювання);

$in.jk, out.jk$  – відповідно темпи вхідного і вихідного потоків на інтервалі  $jk$ .

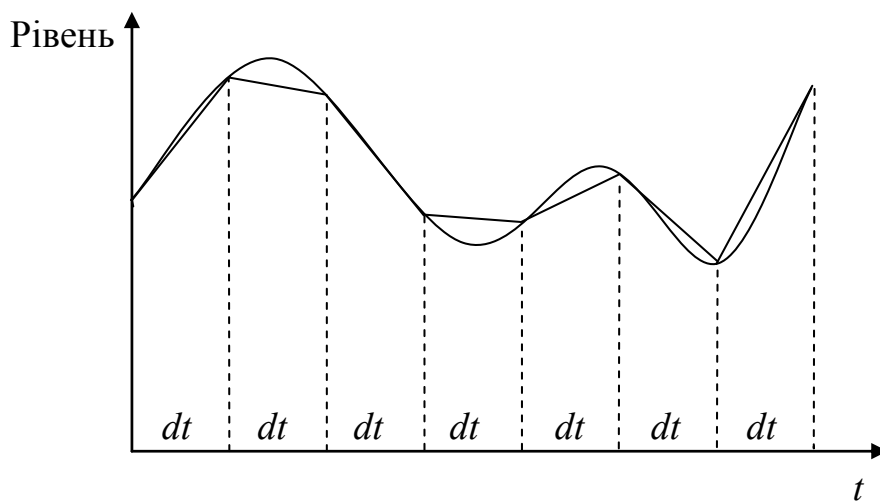


Рисунок 3.2 – Кусочно-лінійна апроксимація змін рівня

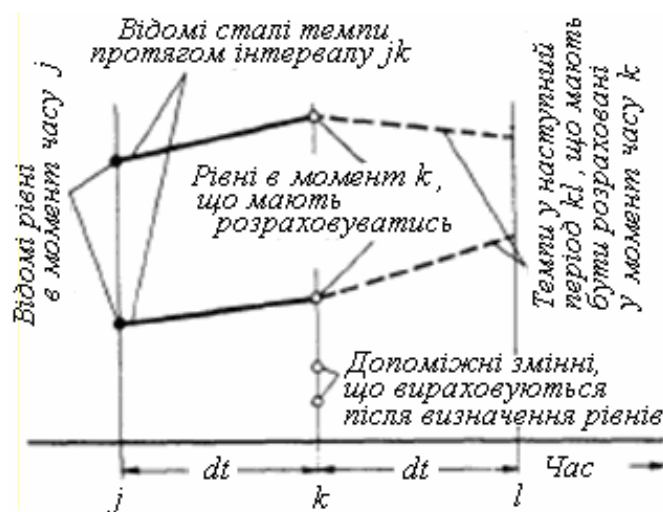


Рисунок 3.3 – Порядок обчислення змінних моделі для моменту часу  $k$

До початку розв'язання рівняння рівня значення всіх змінних і параметрів повинні бути визначеними. Рівняння рівнів є незалежними одне від одного і можуть розв'язуватись у будь-якому порядку.

*Рівняння темпів (T-рівняння)* визначають темпи потоків між рівнями у системі. Рівняння рівня розв'язуються на основі даних щодо існуючих на поточний час величинах рівнів (наприклад, від якого і до якого направлений потік). *T-рівняння* регулюють дії, які повинні відбутися на наступному інтервалі часу.

Прикладом рівняння темпу може бути рівняння запізнювання вихідного потоку *out* на відрізку *kl*, що має вигляд показникової функції першого порядку:

$$out.kl = zr.k / pz,$$

*zr.k* – значення рівня у момент часу *k*;

*pz* – постійна запізнювання.

Рівняння темпів розв'язуються після розв'язання рівнянь рівнів у довільній послідовності незалежно одне від одного.

*Допоміжні рівняння (V-рівняння)*. Якщо рівняння темпів виявляються складними, то їх можна розбивати на частини, які називають допоміжними рівняннями. *V-рівняння* є проміжними. Вони розв'язуються на момент часу *k* після розв'язання *U-рівнянь*, але до розв'язання *T-рівнянь* та у строго визначеній послідовності (щоб розв'язки попередніх могли використовуватись у наступних). Система *V-рівнянь* не повинна бути замкненою. Замкненість системи *V-рівнянь* є показником її некоректності.

*Додаткові рівняння (D-рівняння)* використовуються для отримання додаткової інформації щодо об'єкта дослідження, яка не передбачена постановкою задачі моделювання. Такі рівняння можуть бути корисними, наприклад, на етапі налагодження моделі чи програми моделювання. По своїй суті *D-рівняння* є рівняннями рівнів чи темпів.

*Рівняння початкових умов (N-рівняння)* використовуються для визначення початкових значень всіх рівнів і темпів, які повинні бути відомими до першого циклу розв'язання рівнянь. Вони також використовуються для обчислення значень одних постійних (параметрів) через значення інших. *N-рівняння* розв'язуються один раз перед глобальним циклом моделювального алгоритму.

Довжина інтервалу (кроку моделювання) *dt* вибирається на основі компромісу між необхідною точністю розв'язку і часом реалізації



моделювального алгоритму:

- так як рівні визначають темпи потоків, а темпи визначають рівні, то інтервал повинен бути достатньо коротким, щоб зміни в рівнях між моментами розв'язання рівнянь не приводили до неприпустимої дискретності темпів потоків;

- інтервал  $dt$  повинен бути достатньо коротким, щоб темпи потоків не викликали великих змін рівнів за один інтервал розв'язку;

- інтервал  $dt$  повинен бути меншим  $1/2$  будь-якого показникового запізнювання першого порядку,  $1/4$  запізнювання другого порядку,  $1/6$  запізнювання третього порядку і так далі;

- інтервал повинен бути суттєво меншим самого короткого періоду коливань компонентів досліджуваного об'єкта.

Правильність вибору кроку  $dt$  перевіряється шляхом його варіювання і оцінкою його впливу на результати обчислень.

### 3.5 Символи в діаграмах потоків

Діаграма потоків є проміжною формою подання об'єкта моделювання між словесним описом і системою рівнянь. Вона відображає взаємозв'язки всередині об'єкта і будується одночасно з системою рівнянь.

Основними елементами діаграм потоків є символи для відображення: рівнів; потоків; функцій рішень; джерел та кінцевих пунктів; точок відбору інформації; допоміжних змінних; параметрів; змінних на інших діаграмах; запізнень.

*Рівні* подаються як прямокутники, у лівому верхньому куті якого наводиться ідентифікатор змінної  $zr$ , що характеризує рівень, у правому нижньому куті – номер рівняння, що визначає значення змінної рівня. Вхідний і вихідний потоки рівня позначаються напрямленими лініями з позначенням ідентифікаторів відповідних змінних  $in$  та  $out$  (рис. 3.4).

*Потоки* подаються у вигляді ліній, що відображають вид потоку і мають напрямок від та до символу діаграми (рис. 3.5).

*Функції рішень* визначають темпи потоків, їх дія еквівалентна дії вентилів у потоках. Вони подаються в одній із еквівалентних форм (рис. 3.6). У лівому верхньому куті символу наводиться ідентифікатор змінної  $ssr$ , що визначає темп потоку, у правому нижньому куті – номер рівняння, що визначає значення змінної.

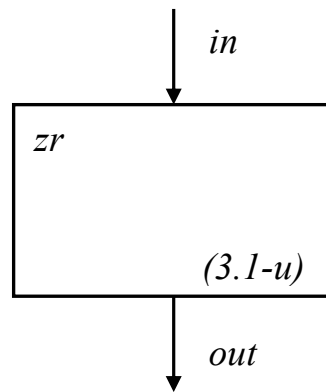


Рисунок 3.4 – Символ для позначення рівня

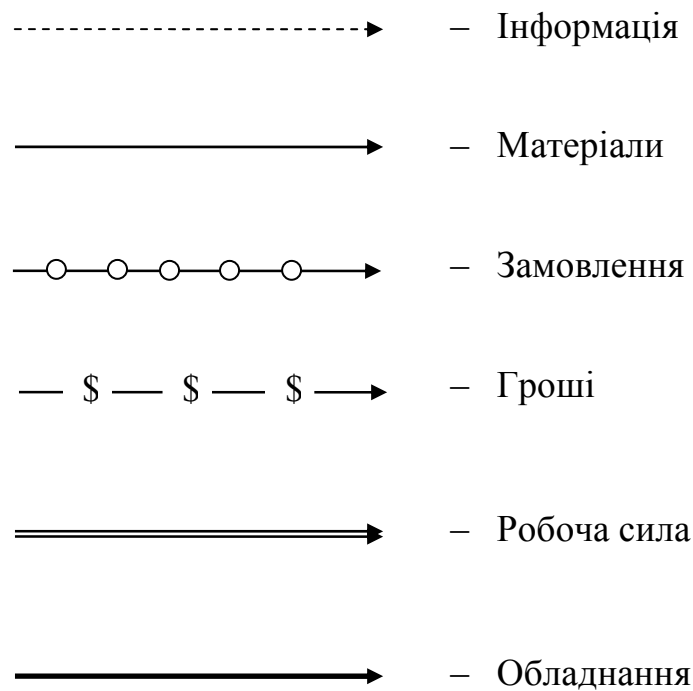


Рисунок 3.5 – Символи потоків

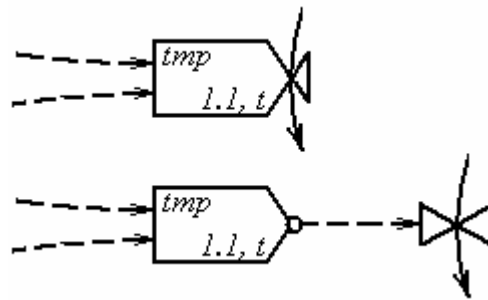


Рисунок 3.6 – Символи для позначення функцій рішень (рівняння температур)

*Джерела та кінцеві пункти* являють собою специфічні рівні, які мають тільки вхід або тільки вихід (рис. 3.7). Вони використовуються для регулювання потоків, джерела яких знаходяться поза об'єктом моделювання.

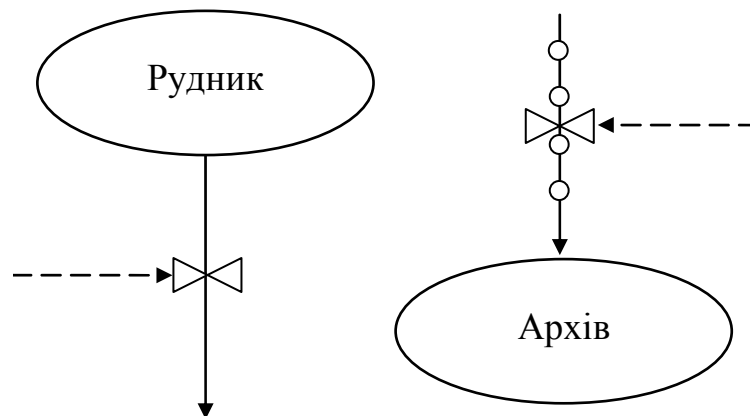


Рисунок 3.7 – Джерела та кінцеві пункти

*Точки відбору інформації* позначаються у вигляді кружка і пунктирної лінії інформаційного потоку (рис. 3.8). Вони позначають місця отримання інформації для встановлення зв'язку між змінними і параметрами моделі. Відбір інформації не виявляє ніякої дії на змінну, щодо якої відбирається інформація.

Символи *допоміжних змінних* розташовуються в каналах потоків інформації між рівнями і функціями рішень, які регулюють темпи потоків. Вони позначаються у вигляді кружків із зазначенням у середині ідентифікатора змінної та номера відповідного рівняння (рис. 3.9).

*Параметри (постійні)* позначаються як лінії потоків з точками відбору інформації (рис. 3.10).

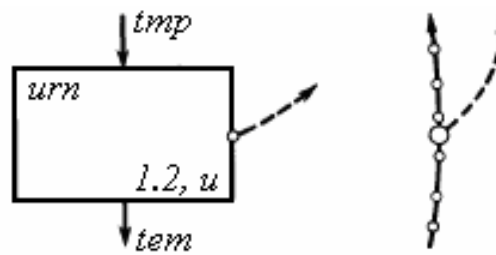


Рисунок 3.8 – Символи точок відбору інформації від рівня і потоку

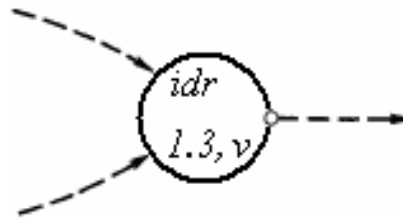


Рисунок 3.9 – Символ для позначення допоміжної змінної

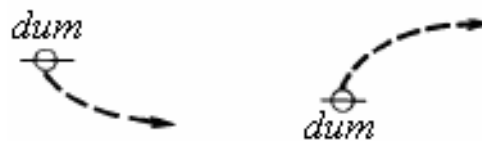


Рисунок 3.10 – Символ для позначення параметрів (постійних) моделі

*Змінні на інших діаграмах.* Діаграми потоків можуть розбиватися на окремі частини. Для відображення зв'язків початкових і кінцевих точок окремих діаграм використовують спеціальні символи (рис. 3.11). За необхідності тут можуть вказуватися номери сторінок, на подаються зображення відповідних частин діаграми.

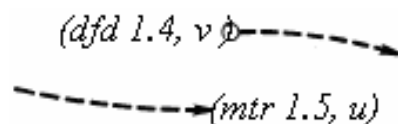


Рисунок 3.11 – Символ для позначення змінних на інших діаграмах

*Запізнювання,* що подаються показниковими функціями, можуть бути представлені комбінацією рівнів і темпів потоків. Через те, що вони досить часто зустрічаються на діаграмах потоків, для їх позначення введено

спеціальний символ (рис. 3.12).

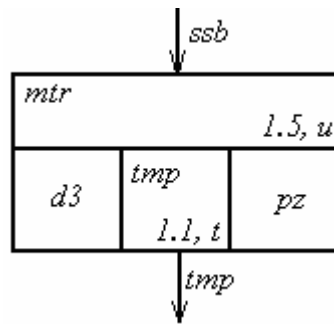


Рисунок 3.12 – Символ для позначення показникового запізнювання:

*ssd* – темп потоку на вході;

*mtr* – вміст рівня;

*l.5, u* – номер рівняння для визначення значення вмісту рівня *MTR*;

*d3* – порядок запізнювання (3-й);

*tmp* — темп потоку на виході;

*l.1, t* – номер рівняння для визначення темпу потоку на виході;

*pz* — постійна часу запізнювання.

### 3.6 Показникові запізнювання динамічних моделей

Запізнювання мають місце у всіх каналах об'єктів. З метою спрощення моделей:

- невеликі за значенням запізнювання можна не враховувати в моделі;
- лінійні ланцюжки запізнювань можна, як правило, можна подавати як одне загальне запізнювання;
- запізнювання у паралельних каналах, що об'єднуються в одному каналі, як правило, можна подати одним запізнювання у загальному каналі.

Запізнювання являють собою особливий вид рівня, в якому вихідний потік визначається тільки рівнем, що міститься у запізнюванні, а також деякою постійною (постійною запізнювання) *pz*. Воно характеризується двома показниками: середнім значенням запізнювання *pz* та "неусталеною" реакцією, яка відображає зв'язок між динамікою вихідного потоку і вхідного потоку при зміні останнього.

Середнє значення *pz* визначає запізнювання, при якому темпи потоків на вході і виході, а також рівень, що знаходиться у запізнюванні, будуть

постійними. В умовах, що встановилися, рівень, який є у запізнюванні, дорівнює значенню темпу вхідного потоку, помноженому на постійну запізнювання  $pz$ . Запізнювання "неусталеної" реакції можна подавати за допомогою функцій різних видів.

Показникове запізнювання 1-го порядку складається з рівня (що поглинає різницю темпів вхідного і вихідного потоків) і темпу вихідного потоку, що залежить від величини рівня і середнього запізнювання (сталого). Модель показникового запізнювання 1-го порядку зображується парою рівнянь, що мають вигляд:

$$(1-u): u.k = u.j + dt * (in.jk - out.jk); \quad (3.1)$$

$$(2-t): out.kl = u.k / pz, \quad (3.2)$$

де  $u$  – рівень, що знаходиться у запізнюванні;

$dt$  – крок моделювання (інтервал розв'язання рівнянь);

$in$  – темп вхідного потоку;

$out$  – темп вихідного потоку;

$pz$  – стала запізнювання.

Показникове запізнювання 2-го порядку складається з двох послідовно з'єднаних запізнювань 1-го порядку. Його модель може бути подана системою рівнянь вигляду:

$$(3-u): u1.k = u1.j + dt * (in.jk - f12.jk); \quad (3.3)$$

$$(4-t): f12.kl = u1.k / (pz / 2); \quad (3.4)$$

$$(5-u): u2.k = u2.j + dt * (f12.jk - f23.jk); \quad (3.5)$$

$$(6-t): out.kl = u2.k / (pz / 2), \quad (3.6)$$

де  $u1, u2$  – рівні, що знаходяться в запізнюванні;

$dt$  – крок моделювання;

$in, f12, out$  – темпи вхідних і вихідних потоків;

$pz$  – стала запізнювання.

Показникове запізнювання 3-го порядку складається з трьох послідовно з'єднаних запізнень 1-го порядку (рис.3.13).

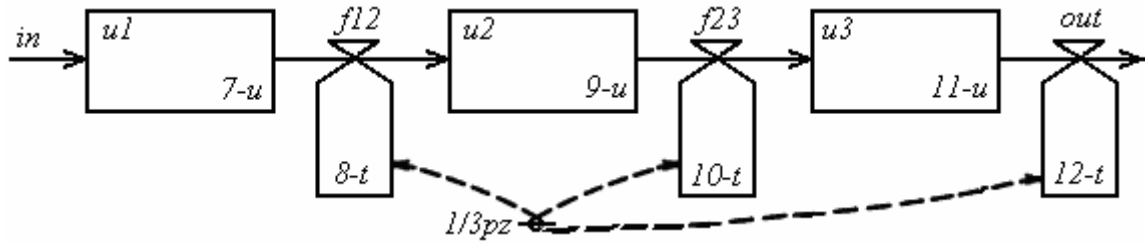


Рисунок 3.13 – Діаграма потоків показникового запізнювання третього порядку

Модель показникового запізнювання 3-го порядку може бути подана системою рівнянь вигляду:

$$(7-u): u1.k = z1.j + dt * (in.jk - f12.jk); \quad (3.7)$$

$$(8-t): f12.kl = z1.k / (pz / 3); \quad (3.8)$$

$$(9-u): z2.k = z2.j + dt * (f12.jk - f23.jk); \quad (3.9)$$

$$f(10-t): z3.kl = z2.k / (pz / 3); \quad (3.10)$$

$$(11-u): z3.k = z3.j + dt * (f23.jk - out.jk); \quad (3.11)$$

$$(12-t): out.kl = z3.k / (pz / 3), \quad (3.12)$$

де  $z1, z2, z3$  – рівні, що знаходяться в запізненні;

запізнення – крок моделювання;

$in, f12, f23, out$  – темпи вхідних і вихідних потоків ланок;

$pz$  – стала запізнювання.

Показникове запізнювання  $n$ -го порядку складається з  $n$  послідовно з'єднаних запізнень 1-го порядку. "Неусталені" реакції показникових запізнювань різних порядків суттєво відрізняються одна від одної (рис. 3.14, 3.15).

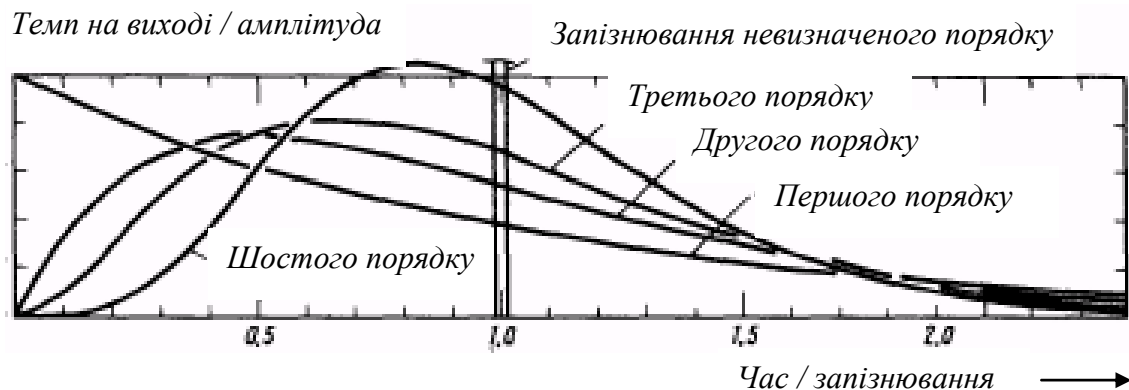


Рисунок 3.14 – Реакції показових запізнювань на одиничний імпульс

Показникові запізнювання мають "хвости": темпи потоків на виході лише наближаються до темпів потоків на вході, але ніколи не досягнуть їх.

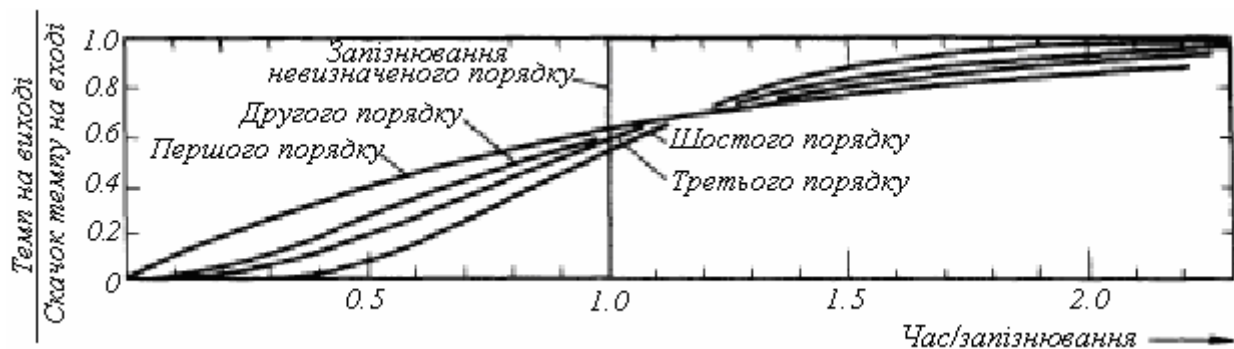


Рисунок 3.15 – Реакції показових запізнювань на стрибкоподібну зміну темпу на вході

### 3.7 Правила і розв'язки в динамічних керованих об'єктах

Управління, по своїй суті, являє собою процес перетворення інформації в дію. Основу цього процесу складає прийняття рішень. Прийняття рішень, у свою чергу, базується на явних чи неявних правилах поведінки. Успіх управління, перед усім, залежить від того, яка інформація відібрана і як виконано її перетворення.

Динамічний керований об'єкт може розглядатись як комплекс, що зв'язаний мережею каналів інформації. Канали беруть початок у пунктах, де здійснюється контроль реальних процесів. Кожному пункту діяльності в об'єкті відповідає локальний пункт прийняття рішень (рис. 3.16). Інформація вводиться в пункт, де приймаються рішення, які керують діями, що є джерелом нової інформації.

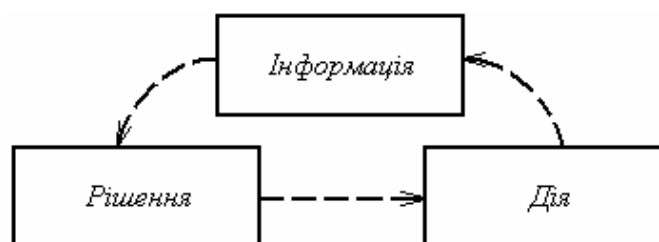


Рисунок 3.16 – Базова схема процесу прийняття рішень, як інформаційна система зі зворотнім зв'язком



Як правило, керовані об'єкти складаються з багатьох ланок і взаємопов'язаних підсистем. Рішення в них приймаються в багатьох пунктах, кожна дія у відповідь породжує інформацію, яка може бути використана у багатьох, але не у всіх пунктах прийняття рішень (рис. 3.17).

Кожне конкретне рішення у системі ґрунтується на її стані, який може бути поданий сукупністю різних рівнів двох видів: одні з них відображають стан у теперішній час, а інші – бажаний стан системи (рис. 3.18).

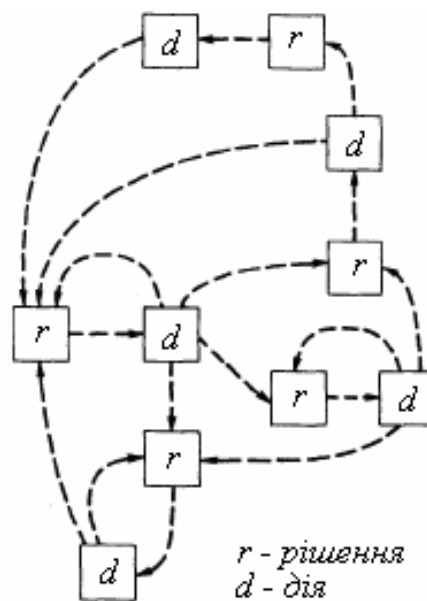


Рисунок 3.17 – Багатосупінчата система прийняття рішень

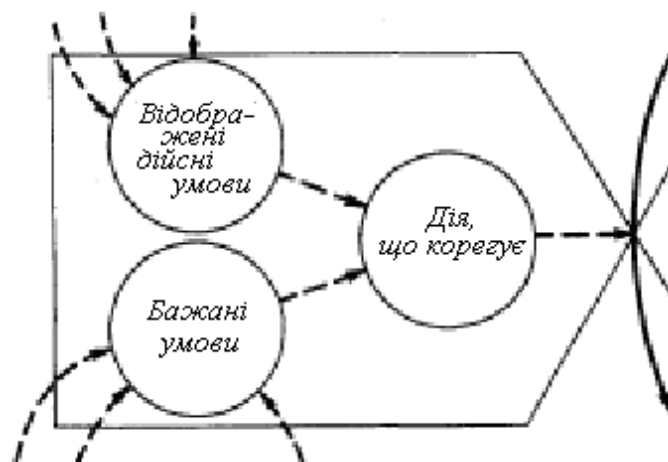


Рисунок 3.18 – Схема процесу прийняття рішень на основі аналізу рівнів стану

### 3.8 Оцінка придатності моделей

Придатність моделі визначається на основі оцінки її відповідності поставленій меті моделювання. Очевидно, що модель, яка є найкращою для розв'язання однієї задачі, може приводити до хибних висновків і, відповідно, бути шкідливою при розв'язанні інших.

Моделі динаміки можуть використовуватись не тільки для оцінки динамічних характеристик досліджуваного об'єкта, а й для розв'язання задач його проектування, удосконалення чи управління ним. У першому випадку придатність моделі може бути оцінена шляхом оцінки її адекватності. У другому випадку виникає необхідність проведення випробувань іншого виду, які покажуть також придатність моделі для створення чи удосконалення об'єкта.

Оцінка ефективності використання моделювання у процесах проектування й, особливо, управління носить з боку осіб, які приймають рішення, суб'єктивний характер. З урахуванням цього, на практиці частіше використовують оцінки ефекту від моделювання та якості моделі: точність, універсальність, економічність.

Одним із шляхів підвищення економічності моделей є *агрегативання змінних*. У багатьох моделях динаміки організаційних об'єктів, як правило, немає необхідності відображати кожне окреме рішення або кожний елементарний процес. Їх врахування робить модель не економічною, призводить до перевантаження її маловажливими деталями. З іншого боку, при надлишковому агрегативанні можуть бути втрачені елементи динамічної поведінки, які повинні бути досліджені. Загальні рекомендації з агрегативання змінних моделей динаміки полягають у такому:

- агреговані потоки повинні переміщуватись по тих же каналах, що й окремі елементи потоків;
- можна агрегатувати в одному каналі елементи (або їх групи), якщо: цими елементами (групами) керують одні й ті ж функції рішень; вихідні дані, які контролюються, використовуються для досягнення подібних цілей;
- при агрегативанні тільки на основі однорідності функцій рішень повинні згруповуватись тільки ті елементи, для яких характерними є одні й ті ж часові залежності у відношенні визначених факторів;
- об'єднання різних елементів у загальному потоці приводить до більших коливань часу, протягом якого окремі елементи транспортуються каналами об'єкта.

Для перевірки адекватності моделі й аналізу реакції об'єкта на визначеного виду зовнішні впливи використовують *екзогенні змінні*. Застосування екзогенних змінних повинно бути вкрай обмеженим. Воно виправдане тільки тоді, коли зовнішні впливи є абсолютно незалежними і на них не впливають ніякі змінні моделі.

### 3.9 Програмне забезпечення моделювання динаміки об'єктів

Розв'язання задач комп'ютерного моделювання здійснюється на одному з трьох рівнів: у середовищі обраної мови програмування; на основі існуючих бібліотек програм; за допомогою спеціальних пакетів програм моделювання (ППМ).

Важливим моментом у процесі моделювання є вдалий вибір мови чи пакету програм моделювання. Серед основних вимог, які висуваються до мов програмування, є: зручність опису процесу, що моделюється; зручність введення вхідних даних, внесення змін до структури і параметрів моделі; ефективність засобів аналізу і відображення результатів моделювання. Для розв'язання задач моделювання використовують мови загального призначення (МЗП) і мови імітаційного моделювання (МІМ).

Прикладами МЗП, які найбільш широко використовувались для програмування задач моделювання, є *Fortran, Pascal, Delphi, C++*. Основною перевагою МЗП вважається їх універсальність. У наш час МЗП використовуються здебільшого для створення пакетів програм моделювання.

Основною перевагою МІМ є зручність програмування моделей і методів їх дослідження. МІМ залежно від способу формування системного часу моделювання поділяють на неперервні, неперервно-дискретні і дискретні.

Неперервні мови призначені для моделювання неперервних у часі процесів, що описуються диференціальними, різницеvими або алгебраїчними рівняннями, які пов'язують вихідні змінні з вхідними. До мов цієї групи відносяться *MIMIC, Dynamo*.

Неперервно-дискретні мови призначені для опису об'єктів, у яких присутні як неперервні так і дискретні процеси. Прикладами мов цієї групи є *GASP, ForSim*.

Дискретні мови призначено для опису дискретних процесів. Їх характерною рисою є наявність засобів формування динамічних списків подій, які упорядковуються у часі. Сучасні дискретні мови орієнтовані на планування подій, перегляд видів діяльності та процесів. Прикладами мов цієї групи є

### *SIMSCRIPT, Simula, GPSS.*

У багатьох неперервних і дискретних мовах у наш час створюються додаткові можливості. Наприклад до складу мови *GPSS World* включено блок *Integrate*, що дозволяє проводити імітаційне моделювання неперервних процесів, а пакети неперервного моделювання *Stella* і *Think* мають убудовані елементи для дискретного моделювання.

Розширення кола спеціалістів, які займаються моделюванням у різних сферах діяльності і не є фахівцями у галузі математики і програмування, та необхідність скорочення витрат на моделювання привели до створення ППМ. ППМ автоматизують процеси: створення математичних моделей; розробки програм моделювання; планування машинних експериментів; управління процесом моделювання; обробки і аналізу результатів моделювання.

Серед ППМ виділяються пакети для аналітичного моделювання динаміки об'єктів (розв'язання обчислювальних задач) та пакети імітаційного моделювання (ППМ).

Прикладами пакетів першої групи є: *Mathematica*, *Maple*, *MathCAD*, *MatLab*. З їх допомогою можна визначати траєкторії руху об'єктів, що описуються аналітичними моделями (алгебраїчними, диференціальними, інтегро-диференціальними рівняннями).

Прикладами пакетів імітаційного моделювання динаміки є: *SIMPLE++*, *Simulink*, *Stella*, *Think*, *Powersim*, *VenSim*.

Пакет *SIMPLE++* (розробник *Tecnomatix Technologies*, [www.eM-Planet.de](http://www.eM-Planet.de)) написано мовою C++ і призначено для моделювання складних виробничих процесів.

ППМ *Stella* і *Think* (розробник *High Performance Systems, Inc.*, [www.hps-ltd.com](http://www.hps-ltd.com)) призначені для дослідження систем із складними взаємозалежними зв'язками між елементами шляхом перетворення моделей прийняття рішень у імітаційні моделі. Ці пакети звільняють користувача від необхідності програмування і вимагають лише побудови ідеограми процесу, який досліджується.

Пакет *Simulink* використовується для проектування систем керування, моделювання комунікаційних систем, цифрової обробки сигналів тощо. Імітаційні моделі створюються у ньому за допомогою блок-діаграм, які є зручним засобом для подання динамічних об'єктів і модифікації відповідних проектів. Пакет включає об'ємну бібліотеку блоків для створення моделей різноманітних об'єктів: лінійних, нелінійних неперервних, дискретних, гібридних. У ньому передбачена можливість інтеграції з пакетом *MatLab*, що

дає можливість використовувати усі засоби проектування і аналізу об'єктів останнього.

Пакет *Vensim* призначений для автоматизації процесів формалізації динамічних об'єктів у вигляді поточкових діаграм, створення моделей, проведення машинних експериментів і відображення результатів моделювання. Пакет має простий і зручний інтерфейс (рис. 3.19). Модель у пакеті *Vensim* являє собою візуальне відображення діаграми у нотації динамічного моделювання і сукупність описів кожного елемента діаграми. Вихідними даними моделі є графіки перехідних процесів, що відбуваються в системі.

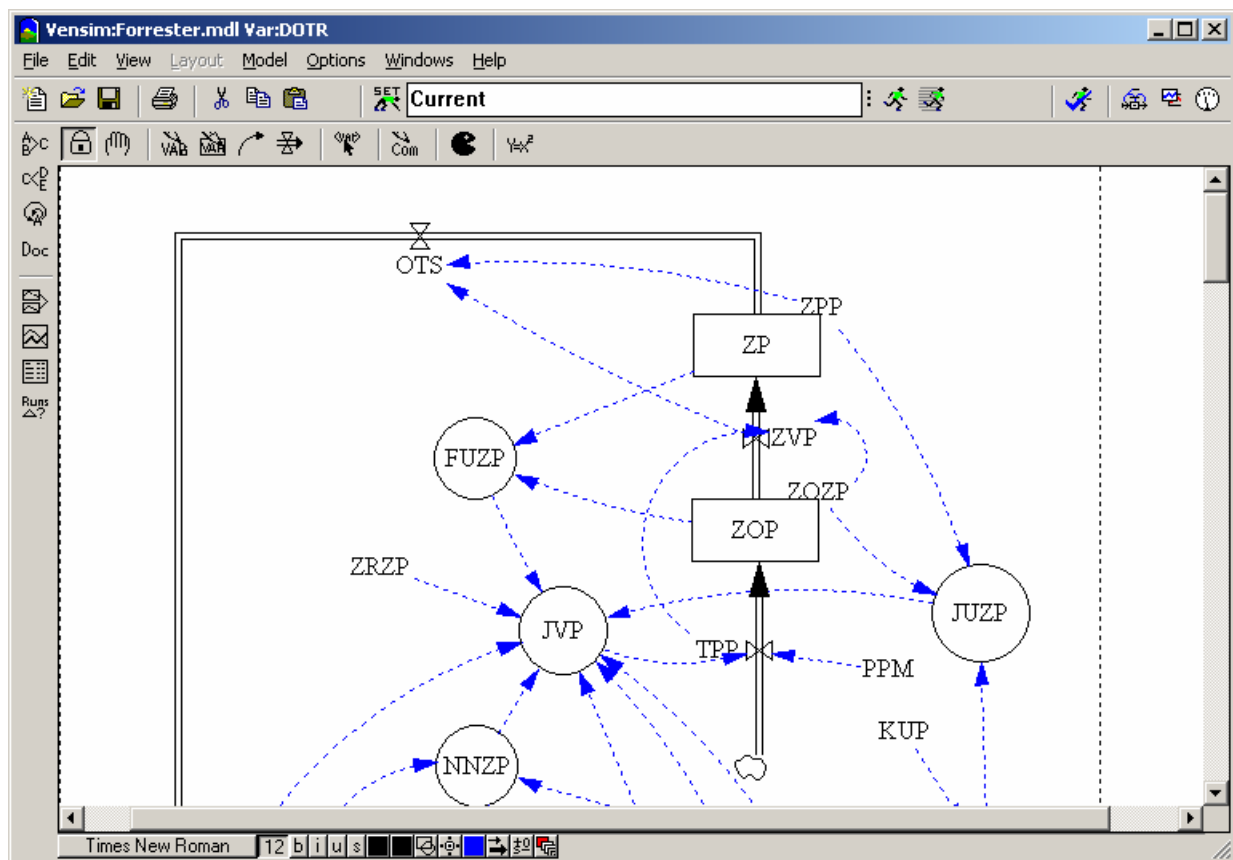


Рисунок 3.19 – Робоче вікно пакету *Vensim*

### 3.10 Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні принципи побудови моделювальних алгоритмів. Опишіть їх суть.
2. Опишіть основні форми подання моделювальних алгоритмів.
3. Які характерні риси повинна мати імітаційна модель динаміки об'єкта?

4. Опишіть базову структуру імітаційної моделі динаміки?
5. Назвіть види рівнянь імітаційних моделей динаміки.
6. У якому порядку розв'язуються рівняння імітаційних моделей динаміки?
7. Яким чином визначається інтервал розв'язання рівнянь (крок моделювання)  $dt$  ?
8. Наведіть символи, що використовуються для подання діаграм потоків моделей динаміки.
9. Наведіть діаграму потоків показникового запізнювання третього порядку.
10. Запишіть систему рівнянь для показникового запізнювання третього порядку.
11. Наведіть реакції показникових запізнювань на імпульсний та ступінчастий вхідні сигнали.
12. Що називають "хвостами" показникових запізнювань?
13. Наведіть схему та опишіть суть процесу прийняття рішень на основі аналізу рівнів стану.
14. Які рекомендації використовуються підчас агрегування змінних моделей динаміки?
15. Дайте загальну характеристику мов, які використовуються для моделювання динаміки об'єктів.
16. Які пакети програм використовуються для моделювання динаміки об'єктів?

## 4 ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ВИРОБНИЧО-ЗБУТОВОЇ СИСТЕМИ

### 4.1 Структура виробничо-збутової системи

Розглянемо на прикладі виробничо-збутового комплексу питання яким чином організаційна форма й правила прийняття рішень можуть стати джерелом типових небажаних явищ у поведженні об'єкта в цілому. Найважливіша проблема подібних систем є приведення темпу виробництва й темпів продажу продукції у відповідність до вимог кінцевого споживача. Як показує практика, темпи виробництва часто змінюються в більших межах, ніж фактичні темпи споживчих покупок. Було виявлено, що виробничо-збутові системи (ВЗС) з ланцюгами взаємозалежних товарних запасів і певним порядком видачі замовлень на їх поповнення мають властивості підсилювати

невеликі коливання, що виникають у роздрібній ланці.

Глобальною метою моделювання подібних об'єктів є пошук відповідей, зокрема, на такі питання:

- як невеликі зміни обсягу роздрібних продаж можуть викликати значні коливання виробництва продукції підприємства?
- чому прискорення виконання конторських робіт може не зробити істотного впливу на поліпшення управлінських рішень?
- чому керівництво підприємством може виявитися не в змозі виконати замовлення, хоча його виробничі можливості перевищують обсяги продаж?

Об'єктом дослідження є трирівнева територіально розподілена система з виробництва і збуту продукції, що включає завод (виробнича ланка), мережу оптових баз (оптова ланка) і мережу магазинів (роздрібна ланка – РЛ) (рис. 4.1).

При створенні моделі необхідно мати інформацію: щодо організаційної структури системи; щодо запізнювань рішень і дій; щодо правил регулювання закупівель і формування товарних запасів.

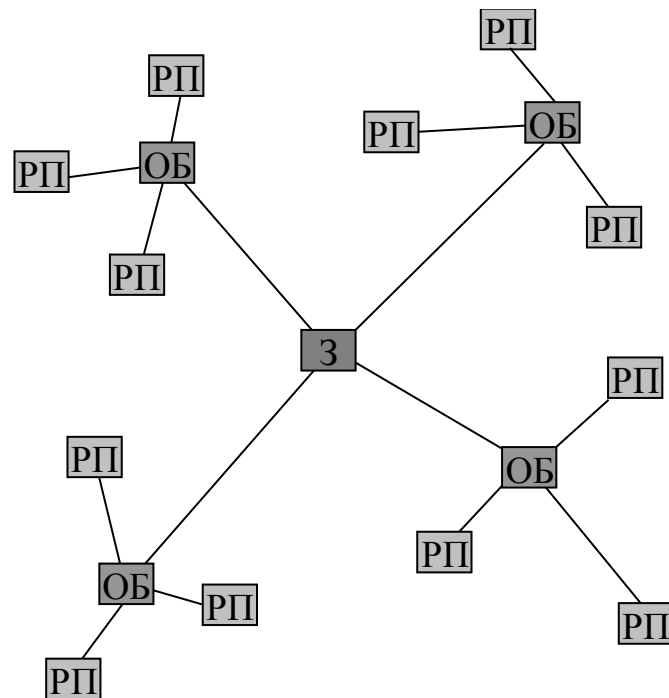


Рисунок 4.1 – Топологічна структура виробничо-збутової системи:

З – завод; ОБ – оптова база; РП – роздрібне підприємство

У системі існують запаси трьох рівнів: на заводі, в оптовій і у роздрібній ланках. Запізнювання, що мають місце у системі подано у неділях (рис. 4.2),

являють собою звичайні величини для підприємств, що виготовляють товари довготривалого користування. Передбачено три види замовлень: замовлення на відшкодування проданих товарів; замовлення для поповнення запасів у всіх ланках у зв'язку зі зміною рівня продаж; замовлення, необхідні для заповнення каналів забезпечення товарами по замовленнях, що знаходяться на стадії виконання. У системі прийнято такий порядок видачі замовлень. На основі аналізу продажів і, у відповідності з запізнюванням закупівлі, замовлення найближчій вищій ланці системи включають відшкодування фактичних продажів. Після проходження достатнього часу для визначення середньої величини короткострокових коливань продажів (вісім тижнів) приймаються міри для поступового зниження (або підвищення) запасів залежно від збільшення або зменшення попиту на товар). Обсяг замовлень, що перебувають у процесі виконання (відправлені поштою, невиконані замовлення у постачальника, товари на стадії доставки) прийнятий пропорційним середньому рівню ділової активності і тривалості виконання замовлення.

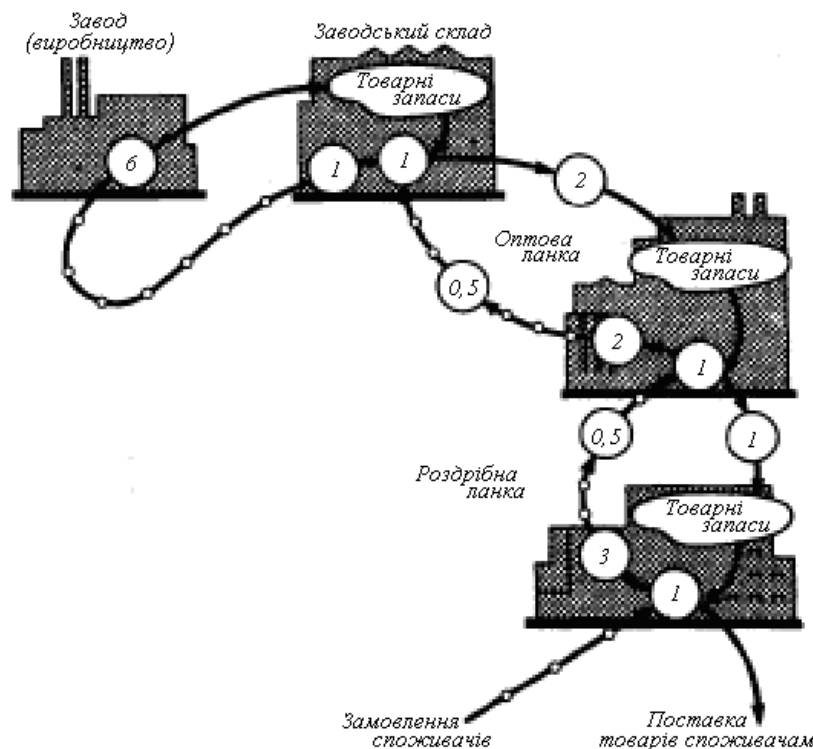


Рисунок 4.2 – Організаційна структура ВЗС

Для досягнення глобальної мети потрібна модель, яка зможе визначати



реакцію системи з заданою структурою, параметрами і технологією функціонування на зміни попиту на продукцію. У моделі повинна бути передбачена можливість визначення темпу виробництва продукції і таких динамічних характеристик (функцій часу) для кожної з ланок:

- запізнювання виконання замовлень;
- обсяг невиконаних замовлень;
- запас готової продукції;
- темп видачі замовлень.

#### 4.2 Мета моделювання і фактори, що включаються до моделі

Процеси, що протікають у ВЗС можна представити за допомогою трьох видів мереж: замовлень, товарів і інформації. Виходячи з умов стабільної ринкової економіки вважається, що фінансові ресурси, робоча сила і обладнання, що можуть бути задіяні у системі, є в достатній кількості і обмеження по ним можуть не враховуватись у моделі.

Основна увага повинна бути сконцентрована на потоках товарів від виробника до споживача та на потоках інформації (у вигляді замовлень) від споживача до виробника. На цьому етапі потрібно визначити найбільш суттєві рівні, темпи потоків і запізнювання, що мають місце у системі. С точки зору моделювання динаміки процеси виконання замовлень, що протікають у всіх ланках системи, є достатньо схожими.

До найбільш важливих рівнів, що впливають на динаміку процесів, відносяться:

- обсяги невиконаних замовлень;
- запаси товарів на складах;
- середні темпи продажу товарів, виходячи з яких визначаються бажані (раціональні) рівні запасів та заповнення каналів забезпечення.

Як найбільш важливі визначені такі темпи потоків у системі:

- темпи потоків замовлень від покупців;
- темпи відправки товарів покупцям;
- темпи видачі замовлень на товари;
- темпи отримання товарів.

Для встановлених вище потоків найбільш суттєвими є такі запізнєння:

- виконання замовлення;
- прийняття рішень і підготовки замовлень;
- пересилання замовлень;

– транспортування товарів.

#### 4.3 Модель підсистеми роздрібної ланки

При позначенні змінних і констант використовуються буквені ідентифікатори, останні символи яких відповідають першим літерам назви ланки:  $R$  – роздрібна;  $O$  – оптова;  $P$  – виробництва.

Складання моделі зручно почати із двох простих рівнянь що описують обсяги невиконаних замовлень  $n_{zr}$  і запасів товарів на складі  $f_{zr}$ :

$$(1-u): n_{zr.k} = n_{zr.j} + dt*(p_{zr.jk} - o_{tr.jk}); \quad (4.1)$$

$$(2-u): f_{zr.k} = f_{zr.j} + dt*(p_{tr.jk} - o_{tr.jk}), \quad (4.2)$$

де  $n_{zr}$  – рівень невиконаних замовлень у роздрібній торгівлі, (од.);

$dt$  – крок моделювання (тижд.);

$p_{zr}$  – поточний темп потоку замовлень до РЛ (од./тижд.);

$o_{tr}$  – темп потоку відвантаження товарів із РЛ (од./тижд.);

$f_{zr}$  – рівень фактичних запасів у РЛ (од.);

$p_{tr}$  – поточний темп, надходження товарів до РЛ (од./тижд.).

Рівняння темпів відображають механізм рішень, що властивий системі. Вони повинні залишатися справедливими й досить точними при будь-яких навіть самих великих варіаціях змінних, які можуть мати місце в системі.

Під темпом відвантаження товарів покупцям  $o_{tr}$  розуміється об'єктивно обумовлений темп. Темп відвантаження повинен залежати від величини заборгованості по невиконаних замовленнях  $n_{zr}$  і від рівня фактичних запасів  $f_{zr}$ :

$$(3-v): p_{otr.k} = n_{zr.k}/z_{zr.k}, \quad (4.3)$$

$$(4-v): d_{otr.k} = f_{zr.k}/dt. \quad (4.4)$$

$$(5-t): o_{tr.k} = \begin{cases} p_{otr.k}, & \text{if } p_{otr.k} \leq d_{otr.k}, \\ d_{otr.k}, & \text{if } p_{otr.k} > d_{otr.k}, \end{cases} \quad (4.5)$$

де  $p_{otr}$  – допоміжна змінна, передбачуваний темп відвантаження товарів, (од./тижд.);

$d_{otr}$  – граничний (допустимий) темп відвантаження, при якому за час між рішеннями  $dt$  буде повністю витрачений товарний запас  $f_{zr}$ ;

$otr$  – фактичний темп відвантаження товарів, (од./тижд.).

Якщо ми розглядаємо один вид товару на одному складі, то замовлення можуть виконуватися доти, поки не закінчатся товари із запасу. Можливість виконання замовлень падає до нуля, як тільки виснажуються запаси товарів. У більш загальному випадку матимемо: один вид товару – багато складів; багато видів товарів – один склад; багато товарів – багато складів. У кожному із цих випадків запаси одних товарів будуть вичерпані раніше інших і загальна можливість виконувати замовлення буде поступово знижуватися зі зниженням загального обсягу запасів.

Величина запізнювання  $z zr$ , що визначається за середньою кількістю виконаних замовлень, буде обернено пропорційною можливості виконання замовлень. У міру того, як усе менша кількість замовлень може бути виконаною за рахунок запасів  $f zr$ , усе більше невиконаних замовлень  $n zr$  будуть чекати виконання за рахунок надходження товарів. При досить великому обсязі запасів  $n zr$  середнє запізнювання  $z zr$  буде наближатися до мінімально можливого  $m zr$ , обумовленого часом на оформлення замовлення й відвантаження товару (рис. 4.3). З урахуванням бажаного (раціонального) рівня запасів запізнювання виконання замовлень можна визначати за співвідношенням:

$$(6-v): z zr.k = m zr + u zr * j zr.k / f zr.k, \quad (4.6)$$

де  $z zr$  – запізнювання виконання замовлень роздрібною ланкою, (тижд.);

$m zr$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень РЛ, (тижд.);

$u zr$  – середнє запізнювання виконання замовлень РЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

$j zr$  – бажаний запас у РЛ, (од.);

$f zr$  – фактичний запас у РЛ, (од.).

Бажаний рівень запасів може бути прийнятий прямо пропорційним середньому рівню продаж:

$$(7-v): j zr.k = k pr * u pr.k, \quad (4.7)$$

де  $j zr$  – бажаний рівень запасів у РЛ, (од.)

$u pr$  – середній темп надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$kpr$  – коефіцієнт запасу. Постійна  $kpr$  являє собою число тижнів, протягом яких середній темп продажів може бути забезпечений за рахунок бажаного запасу  $jzr$ .

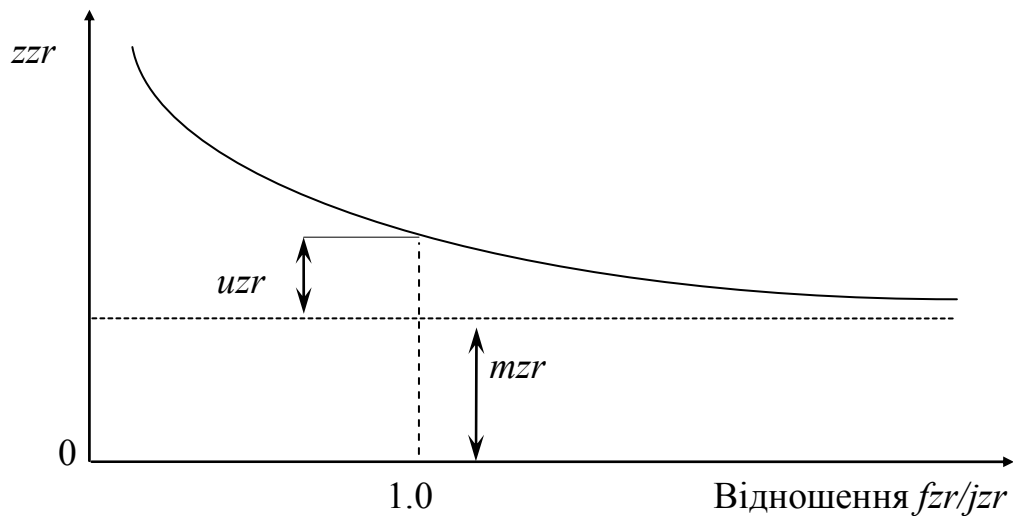


Рисунок 4.3 – Залежність запізнювання від співвідношення фактичного й бажаного запасів

Середній темп продажів можна визначити, використовуючи показникове усереднення 1-го порядку:

$$(8-u): upr.k = upr.j + dt*(1/kur)*(pzs.jk - upr.j), \quad (4.8)$$

де  $upr$  – середній темп надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$kur$  – постійна часу усереднення вимог до РЛ, (тижд.);

$pzs$  – поточний темп надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.).

Рішення щодо замовлень оптовій ланці, спрямованих на поповнення запасів, формулюються поступово. Вони включають збір даних, висунення припущень, рекомендацій, їх перевірки. Відповідні запізнювання й власне рішення, що мають місце на цьому етапі, доцільно подати, уводячи в нього запізнювання в потоці замовлень, що по величині буде еквівалентно загальному запізнюванню: обробки даних; прийняття рішень про закупівлю товарів; оформлення замовлення на поповнення запасу.

Якщо встановлено певний час передачі замовлень і товарів по каналах між роздрібною й оптовою торгівлею, то необхідно, щоб загальна кількість замовлень і товарів у каналах була пропорційною рівню ділової активності. Якщо не вводити замовлення із цією метою в канали системи, то виникне

недолік запасів. Перераховані фактори відображає рівняння виду:

$$(9-t): t_{zr}.kl = p_{zr}.jk + (1/zr_{zr}) * [(j_{zr}.k - f_{zr}.k) + (j_{uzr}.k - f_{uzr}.k) + (n_{zr}.k - nn_{zr}.k)], \quad (4.9)$$

де  $t_{zr}$  – темп закупівель, (од./тижд.);

$p_{zr}$  – поточний темп потоку замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$zr_{zr}$  – константа, запізнювання регулювання запасів і заповнення каналів у РЛ, (тижд.);

$j_{zr}$  – бажаний запас товарів у РЛ, (од.);

$f_{zr}$  – фактичний запас товарів у РЛ, (од.);

$j_{uzr}$  – бажаний рівень заповнення каналів забезпечення РЛ, (од.);

$f_{uzr}$  – фактичний рівень заповнення каналів забезпечення РЛ, (од.);

$n_{zr}$  – замовлення не виконані РЛ, (од.);

$nn_{zr}$  – нормальна кількість для РЛ невиконаних замовлень, (од.).

Бажаний рівень замовлень і товарів  $j_{uzr}$  у каналах залежить від їхньої довжини (загального запізнювання в них) і від середнього рівня продажів  $upr$ :

$$(10-v): j_{uzr}.k = upr.k * (z_{ozr} + z_{p_{zr}} + z_{zo}.k + z_{ttr}), \quad (4.10)$$

де  $j_{uzr}$  – бажаний для постачання РЛ рівень замовлень у каналах, (од.);

$upr$  – середній темп надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$z_{ozr}$  – запізнювання оформлення замовлень у РЛ, (тижд.);

$z_{p_{zr}}$  – запізнювання пересилання замовлень із РЛ (поштове), (тижд.);

$z_{zo}$  – змінне по величині запізнювання виконання замовлень оптовими базами (залежить від наявності запасів на оптових базах), (тижд.);

$z_{ttr}$  – запізнювання транспортування товарів до РЛ, (тижд.).

Фактичний уміст каналів забезпечення складається із суми товарів і замовлень на всіх ділянках:

$$(11-v): f_{uzr}.k = z_{or}.k + z_{pr}.k + n_{zo}.k + t_{opr}.k, \quad (4.11)$$

де  $f_{uzr}$  – фактичний рівень заповнення каналів забезпечення РЛ, (од.);

$z_{or}$  – кількість замовлень, які перебувають у РЛ на стадії оформлення, (од.);

$z_{pr}$  – кількість замовлень, які видані РЛ і перебувають на стадії пересилання у поштових каналах, (од.);

$n_{zo}$  – кількість замовлень, що не виконані оптовими базами і перебувають

на стадії виконання, (од.);

$topr$  – кількість товарів, що перебувають на шляху до РЛ, (од.).

Нормальний рівень, невиконаних РЛ замовлень дорівнює середньому темпу продажів, помноженому на нормальне запізнювання виконання замовлень:

$$(12-v): nnzr.k = upr.k * (mzr + uzr), \quad (4.12)$$

де  $nnzr$  – нормальна для РЛ кількість невиконаних замовлень, (од.);

$upr$  – середній темп надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$mzr$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень РЛ, (тижд.);

$uzr$  – середнє запізнювання виконання замовлень РЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

Рівняння (4.1)–(4.12) повністю визначають рівні, темпи й допоміжні змінні для опису РЛ. Для відображення тривалості процесів, що мають місце у системі можуть бути використані показникові запізнювання 3-го порядку. Рівняння, що визначають запізнювання при ухваленні рішення про закупівлю й розміщення замовлень РЛ в оптовій торгівлі мають вигляд:

$$(13-u): zor.k = zor.j + dt * (tzt.jk - zvt.jk); \quad (4.13)$$

$$(14-t): zvt.kl = fnzap3 (tzt.jk, zozr), \quad (4.14)$$

де  $zor$  – кількість замовлень в РЛ, що перебувають на стадії оформлення, (од.);

$tzt$  – темп закупівель товарів РЛ, визначається (4.9), (од./тижд.);

$zvt$  – темп видачі замовлень РЛ на закупівлю товарів, (од./тижд.);

$zozt$  – запізнювання оформлення замовлень у РЛ, (тижд.);

$fnzap3$  – функція, що визначає вихід із запізнювання 3-го порядку.

Вихід із запізнювання, пов'язаного з оформленням замовлень, служить входом для поштового запізнювання:

$$(15-u): zpr.k = zpr.j + dt * (zvt.jk - pzo.jk), \quad (4.15)$$

$$(16-t): pzo.kl = fnzap3 (zvt.jk, zpzt), \quad (4.16)$$

де  $zpr$  – видані роздрібною ланкою замовлення на закупівлі, що

перебувають у поштових каналах, (од.);

$zvr$  – темп видачі замовлень РЛ на закупівлю товарів, (од./тижд.);

$pzo$  – темп потоку замовлень в оптову мережу, (од./тижд.);

$zpZR$  – запізнювання пересилання замовлень із РЛ (поштове), (тижд.).

Рівняння, що відображають транспортне запізнювання товарів на шляху з оптової ланки в роздрібну, мають вигляд:

$$(17-u): \text{topr}.k = \text{topr}.j + dt * (\text{oto}.jk - \text{ptr}.jk), \quad (4.17)$$

$$(18-t): \text{ptr}.kl = \text{fnzap3}(\text{oto}.jk, \text{zttr}), \quad (4.18)$$

де  $\text{topr}$  – кількість товарів, що перебувають на шляху до РЛ, (од.);

$\text{oto}$  – темп відвантаження товарів із запасів оптових баз, (од./тижд.);

$\text{ptr}$  – темп потоку товарів до РЛ, (од./тижд.);

$\text{zttr}$  – запізнювання транспортування товарів до РЛ, (тижд.).

Отримана сукупність рівнянь для ланки роздрібною торгівлі знаходить своє відбиття в діаграмі потоків для роздрібною торгівлі (рис. 4.4).

#### 4.4 Модель підсистеми оптової ланки

За своєю суттю процеси, які мають місце в ланці оптової торгівлі, подібні процесам, що протікають у РЛ. Це дозволяє описати їх подібною до розглянутої вище системою рівнянь.

Обсяги невиконаних замовлень  $nzo$  і запасів товарів на складі оптової ланки (ОЛ)  $fzo$  по аналогії з (4.1) – (4.2) можуть бути подані у вигляді:

$$(19-u): nzo.k = nzo.j + dt * (pzo.jk - \text{oto}.jk); \quad (4.19)$$

$$(20-u): fzo.k = fzo.j + dt * (pto.jk - \text{oto}.jk), \quad (4.20)$$

де  $nzo$  – рівень невиконаних замовлень у роздрібній торгівлі, (од.);

$dt$  – крок моделювання (тижд.);

$pzo$  – поточний темп потоку замовлень в ОЛ (од./тижд.);

$\text{oto}$  – темп потоку відвантаження товарів із ОЛ (од./тижд.);

$fzo$  – рівень фактичних запасів в ОЛ роздрібній ланці (од.);

$pto$  – темп, надходження товарів в ОЛ (од./тижд.).

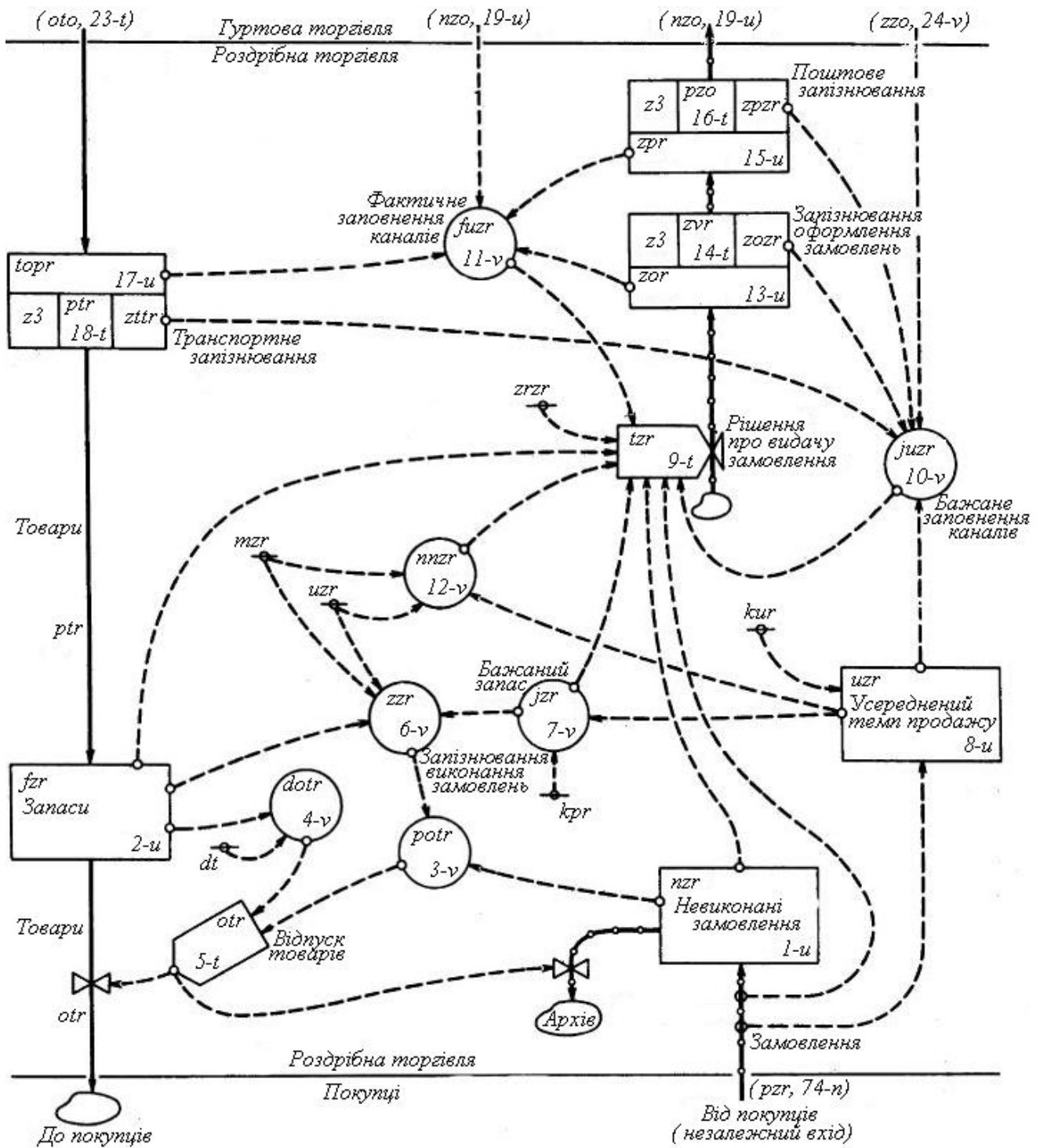


Рисунок 4.4 – Діаграма потоків для ланки роздрібної торгівлі



Темп відвантаження товарів визначається аналогічно (4.3) – (4.5):

$$(21-v): poto.k = nzo.k/zzo.k, \quad (4.21)$$

$$(22-v): doto.k = fzo.k/dt. \quad (4.22)$$

$$(23-t): oto.k = \begin{cases} poto.k, & \text{if } poto.k \leq doto.k, \\ doto.k, & \text{if } poto.k > doto.k, \end{cases} \quad (4.23)$$

де *poto* – допоміжна змінна, передбачуваний темп відвантаження товарів, (од./тижд.);

*doto* – граничний (допустимий) темп відвантаження, при якому за час між рішеннями *dt* буде повністю витрачений товарний запас *fzo*;

*oto* – фактичний темп відвантаження товарів, (од./тижд.).

Запізнювання виконання замовлень можна визначати за співвідношенням аналогічним (4.6):

$$(24-v): zzo.k = mzo + uzo*jzo.k/fzo.k, \quad (4.24)$$

де *zzo* – запізнювання виконання замовлень ОЛ, (тижд.);

*mzo* – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень ОЛ, (тижд.);

*uzo* – середнє запізнювання виконання замовлень ОЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

*jzo* – бажаний запас в ОЛ, (од.);

*fzo* – фактичний запас в ОЛ, (од.).

Бажаний рівень запасів може бути прийнятий прямо пропорційним середньому рівню продаж:

$$(25-v): jzo.k = kpo*upo.k, \quad (4.25)$$

де *jzo* – бажаний розмір запасу в ОЛ, (од.);

*kpo* – коефіцієнт запасу, (тижд.);

*upo* – середній темп надходження замовлень до ОЛ, (од./тижд.).

Середній темп продажів можна визначити, використовуючи показникове усереднення 1-го порядку:

$$(26-u): upo.k = upo.j + dt*(1/kuo)*(pzo.jk - upo.j), \quad (4.26)$$

де *upo* – середній темп надходження замовлень до ОЛ, (од./тижд.);

*kuo* – постійна часу усереднення вимог до ОЛ, (тижд.);

*pzo* – поточний темп надходження замовлень до ОЛ, (од./тижд.).

Темп закупівель ОЛ визначається аналогічно (4.9) рівнянням:

$$(27-t): tzo.kl = pzo.jk + (1/zrzo) * [(jzo.k - fzo.k) + (juzo.k - fuzo.k) + (nzo.k - nnzo.k)], \quad (4.27)$$

де *tzo* – темп закупівель, (од./тижд.);

*pzo* – темп потоку замовлень до ОЛ, (од./тижд.);

*zrzo* – константа, запізнювання регулювання запасів і заповнення каналів в ОЛ, (тижд.);

*jzo* – бажаний запас товарів в ОЛ, (од.);

*fzo* – фактичний запас товарів в ОЛ, (од.);

*juzo* – бажаний рівень заповнення каналів забезпечення ОЛ, (од.);

*fuzo* – фактичний рівень заповнення каналів забезпечення ОЛ, (од.);

*nzo* – замовлення не виконані ОЛ, (од.);

*nnzo* – нормальна кількість для ОЛ невиконаних замовлень, (од.).

Бажаний рівень замовлень і товарів *juzo* у каналах залежить від їхньої довжини (загального запізнювання в них) і від середнього рівня продажів *upo*:

$$(28-v): juzo.k = upo.k * (zozo + zpzo + zzp.k + ztto), \quad (4.28)$$

де *juzo* – бажаний для постачання ОЛ рівень замовлень у каналах, (од.);

*upo* – середній темп надходження замовлень до ОЛ, (од./тижд.);

*zozo* – запізнювання оформлення замовлень у ОЛ, (тижд.);

*zpzo* – запізнювання пересилання замовлень із ОЛ (поштове), (тижд.);

*zzp* – змінне по величині запізнювання виконання замовлень виробництвом (залежить від наявності запасів на виробництві), (тижд.);

*ztto* – запізнювання транспортування товарів до ОЛ, (тижд.).

Фактичний уміст каналів забезпечення складається із суми товарів і замовлень на всіх ділянках:

$$(29-v): fuzo.k = zoo.k + zpo.k + nzp.k + topo.k, \quad (4.29)$$

де *fuzo* – фактичний рівень заповнення каналів забезпечення ОЛ, (од.);

*zoo* – кількість замовлень, які перебувають в ОЛ на стадії оформлення, (од.);

$zpo$  – кількість замовлень, які видані ОЛ і перебувають на стадії пересилання у поштових каналах, (од.);

$nzpr$  – кількість замовлень, що не виконані виробництвом і перебувають на стадії виконання, (од.);

$toro$  – кількість товарів, що перебувають на шляху до ОЛ, (од.).

Нормальний рівень, невиконаних ОЛ замовлень дорівнює середньому темпу продажів, помноженому на нормальне запізнювання виконання замовлень:

$$(30-v): nnzo.k = upo.k * (mzo + uzo), \quad (4.30)$$

де  $nnzo$  – нормальна для ОЛ кількість невиконаних замовлень, (од.);

$upo$  – середній темп надходження замовлень до ОЛ, (од./тижд.);

$mzo$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень ОЛ, (тижд.);

$uzo$  – середнє запізнювання виконання замовлень ОЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

Рівняння, що визначають запізнювання при ухваленні рішення про закупівлю й розміщення замовлень ОЛ у виробничій ланці мають вигляд:

$$(31-u): zoo.k = zoo.j + dt * (tzo.jk - zvo.jk); \quad (4.31)$$

$$(32-t): zvo.kl = fnzap3(tzo.jk, zozo), \quad (4.32)$$

де  $zoo$  – кількість замовлень в ОЛ, що перебувають на стадії оформлення, (од.);

$tzo$  – темп закупівель товарів ОЛ, визначається (4.27), (од./тижд.);

$zvo$  – темп видачі замовлень ОЛ на закупівлю товарів, (од./тижд.);

$zozo$  – запізнювання оформлення замовлень в ОЛ, (тижд.);

$fnzap3$  – функція, що визначає вихід із запізнювання 3-го порядку.

Вихід із запізнювання, пов'язаного з оформленням замовлень, служить входом для поштового запізнювання:

$$(33-u): zpo.k = zpo.j + dt * (zvo.jk - pzp.jk), \quad (4.33)$$

$$(34-t): pzo.kl = fnzap3(zvo.jk, zpzo), \quad (4.34)$$

де  $zpo$  – видані роздрібною ланкою замовлення на закупівлі, що перебувають у поштових каналах, (од.);

$zvo$  – темп видачі замовлень ОЛ на закупівлю товарів, (од./тижд.);

$pzp$  – темп потоку замовлень на виробництво, (од./тижд.);

$zpzo$  – запізнювання пересилання замовлень із ОЛ (поштове), (тижд.).

Рівняння, що відображають транспортне запізнювання товарів на шляху з оптової ланки в роздрібну, мають вигляд:

$$(35-u): topo.k = topo.j + dt*(otp.jk - pto.jk), \quad (4.35)$$

$$(36-t): ptr.kl = fnzap3(otp.jk, ztto), \quad (4.36)$$

де  $topo$  – кількість товарів, що перебувають на шляху до ОЛ, (од.);

$otp$  – темп відвантаження товарів із запасів виробництва, (од./тижд.);

$pto$  – темп потоку товарів до ОЛ, (од./тижд.);

$ztto$  – запізнювання транспортування товарів до ОЛ, (тижд.).

Отримана сукупність рівнянь (4.19)-(4.36) знаходить своє відбиття в діаграмі потоків для оптової торгівлі (рис. 4.5).

#### 4.5. Модель підсистеми виробництва

Більшість процесів, що мають місце в ланці виробництва, подібні тим, що мають місце в РЛ і ОЛ. Разом з тим, виробничій ланці (ВЛ) притаманні деякі особливості. Зокрема, завод і заводський склад розташовані у відносній близькості одне від одного. Таким чином, можна не враховувати запізнення пересилання замовлень і транспортування товарів. Крім того, необхідно враховувати, що після прийняття рішення щодо зміни темпу випуску продукції повинен пройти певний час для досягнення його нового рівня.

Рівняння для обсягу невиконаних замовлень і фактичних запасів подібні рівнянням (4.1) –(4.2):

$$(37-u): nzp.k = nzp.j + dt*(pzp.jk - otp.jk); \quad (4.37)$$

$$(38-u): fzp.k = fzp.j + dt*(ptp.jk - otp.jk), \quad (4.38)$$

де  $nzp$  – рівень невиконаних замовлень у роздрібній торгівлі, (од.);

$dt$  – крок моделювання (тижд.);

$pzp$  – темп потоку замовлень у ВЛ (од./тижд.);

$otp$  – темп потоку відвантаження товарів із ВЛ (од./тижд.);

$fzp$  –рівень фактичних запасів у роздрібній ланці (од.);

$ptp$  – поточний темп, надходження товарів у ВЛ (од./тижд.).

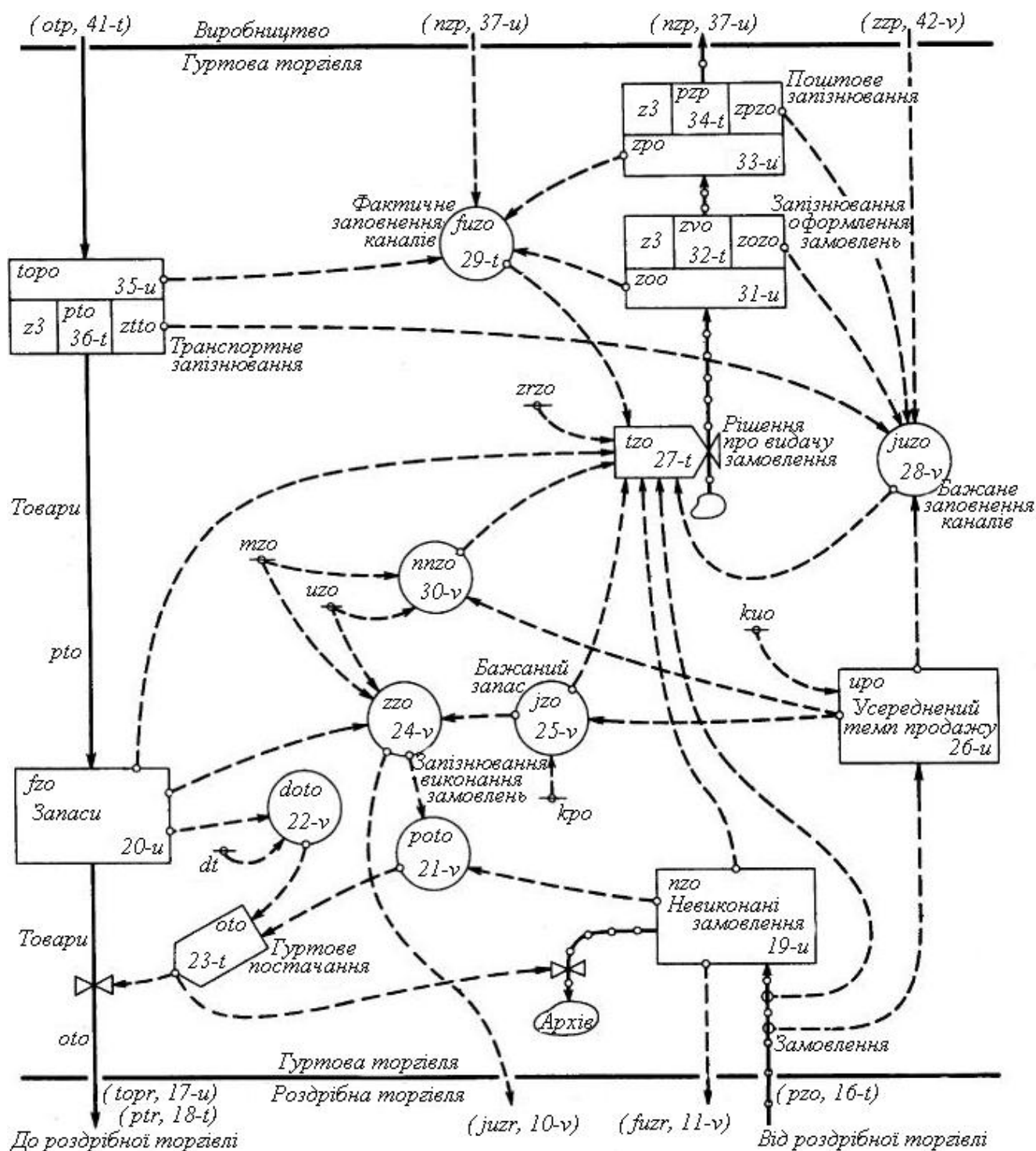


Рисунок 4.5 – Діаграма потоків для ланки оптової торгівлі

Темп відвантаження товарів у ВЛ визначається аналогічно (4.3)-(4.5):

$$(39-v): potp.k = nzp.k / zzp.k, \quad (4.39)$$

$$(40-v): dotp.k = fzp.k / dt. \quad (4.40)$$

$$(41-t): otr.p = \begin{cases} potp.k, & \text{if } potp.k \leq otp.k, \\ dotp.k, & \text{if } potp.k > dotp.k, \end{cases} \quad (4.41)$$

де  $potp$  – допоміжна змінна, передбачуваний темп відвантаження товарів, (од./тижд.);

$dotp$  – граничний (допустимий) темп відвантаження, при якому за час між рішеннями  $dt$  буде повністю витрачений товарний запас  $fpz$ ;

$otp$  – фактичний темп відвантаження товарів, (од./тижд.).

З урахуванням бажаного (раціонального) рівня запасів запізнювання виконання замовлень можна визначати за співвідношенням:

$$(42-v): zzp.k = mzp + uzp * jzp.k / fzp.k, \quad (4.42)$$

де  $zzp$  – запізнювання виконання замовлень роздрібною ланкою, (тижд.);

$mzp$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень ВЛ, (тижд.);

$uzp$  – середнє запізнювання виконання замовлень ВЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

$jpz$  – бажаний запас у ВЛ, (од.);

$fpz$  – фактичний запас у ВЛ, (од.).

Бажаний рівень запасів може бути прийнятий прямо пропорційним середньому рівню продаж:

$$(43-v): jpz.k = kpp * upp.k, \quad (4.43)$$

де  $upp$  – середній темп продажів, (од./тижд.).

Постійна  $kpp$  являє собою число тижнів, протягом яких середній темп продажів може бути забезпечений за рахунок бажаного запасу  $jpz$ .

Середній темп продажів можна визначити, використовуючи показникове усереднення 1-го порядку:

$$(44-u): \text{upp.k} = \text{upp.j} + dt * (1/\text{kup}) * (\text{pzp.jk} - \text{upp.j}), \quad (4.44)$$

де  $\text{upp}$  – середній темп продажів, (од./тижд.);

$\text{kup}$  – постійна часу усереднення вимог до ВЛ, (тижд.);

$\text{pzp}$  – поточний темп надходження замовлень до ВЛ, (од./тижд.).

Темп виробництва може змінюватись неперервно від нуля до деякої величини. Рівняння для бажаного темпу виробництва має ту ж форму, що й рівняння для темпу закупок РЛ (4.9):

$$(45-v): \text{jvp.k} = \text{pzp.jk} + (1/\text{zrzp}) * [(\text{jzp.k} - \text{fzp.k}) + (\text{juzp.k} - \text{fuzp.k}) + (\text{nzp.k} - \text{nnzp.k})], \quad (4.45)$$

де  $\text{jvp}$  – бажаний темп випуску продукції, (од./тижд.);

$\text{pzp}$  – темп потоку замовлень до ВЛ, (од./тижд.);

$\text{zrzp}$  – константа, запізнювання регулювання запасів і заповнення каналів у ВЛ, (тижд.);

$\text{jzp}$  – бажаний запас товарів у ВЛ, (од.);

$\text{fzp}$  – фактичний запас товарів у ВЛ, (од.);

$\text{juzp}$  – бажаний рівень заповнення каналів забезпечення ВЛ, (од.);

$\text{fuzp}$  – фактичний рівень заповнення каналів забезпечення ВЛ, (од.);

$\text{nzp}$  – замовлення не виконані ВЛ, (од.);

$\text{nnzp}$  – нормальна кількість для ВЛ невиконаних замовлень, (од.).

Це рівняння по суті є допоміжним тому, що отриманий у ньому результат необхідно порівняти з максимально допустимою виробничою потужністю:

$$(46-t): \text{tvp.kl} = \begin{cases} \text{jvp.k}, & \text{if } \text{jvp.k} \leq \text{ptp}, \\ \text{ptp}, & \text{if } \text{jvp.k} > \text{ptp}, \end{cases} \quad (4.46)$$

$\text{tvp}$  – темп випуску продукції, (од./тижд.);

$\text{jvp}$  – бажаний темп випуску продукції, (од./тижд.);

$\text{ptp}$  – максимально допустима (гранична) виробнича потужність, (од./тижд.).

З урахуванням відсутності у ВЛ поштового і транспортного запізнювань рівняння для визначення бажаного і фактичного рівнів заповнення каналів забезпечення дещо спростяться і матимуть вигляд:

$$(47-v): \text{juzp.k} = \text{upp.k} * (\text{zozp} + \text{zppp}), \quad (4.47)$$

$$(48-v): fuzp.k = zop.k + zpp.k, \quad (4.48)$$

де  $juzp$  – бажаний для постачання ВЛ рівень заповнення каналів, (од.);

$upr$  – середній темп надходження замовлень до ВЛ, (од./тижд.);

$zozp$  – запізнювання оформлення замовлень у ВЛ, (тижд.);

$zppr$  – запізнювання виробництва продукції, (тижд.);

$fuzp$  – фактичний рівень заповнення каналів забезпечення ВЛ, (од.);

$zop$  – кількість замовлень, які перебувають у ВЛ на стадії оформлення, (од.);

$zpp$  – кількість замовлень, які знаходяться на стадії виробництва, (од.).

Нормальний рівень невиконаних замовлень у ВЛ становить:

$$(49-v): nnzp.k = upr.k * (mzp + uzp), \quad (4.49)$$

де  $nnzp$  – нормальна для ВЛ кількість невиконаних замовлень, (од.);

$upr$  – середній темп надходження замовлень до ВЛ, (од./тижд.);

$mzp$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень ВЛ, (тижд.);

$uzp$  – середнє запізнювання виконання замовлень ВЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.).

Для перетворення інформації в рішення щодо вибору певного темпу виробництва потрібен певний час. Він подається показниковим запізнюванням:

$$(50-u): zop.k = zop.j + dt * (tvp.jk - pzzp.jk); \quad (4.50)$$

$$(51-t): pzzp.kl = fnzap3(tvp.jk, zozp), \quad (4.51)$$

$zop$  – кількість замовлень, що перебувають на стадії оформлення, (од.);

$tvp$  – темп випуску продукції, (од./тижд.);

$pzzp$  – темп надходження виробничих замовлень підприємству, (од./тижд.);

$fnzap3$  – ідентифікатор функції показникового запізнювання 3-го порядку;

$zozp$  – постійна, запізнювання оформлення замовлень у ВЛ, (тижд.).

Випуск готової продукції буде залежати від отриманих підприємством замовлень  $pzzp$  і змінюватиметься з деяким запізнюванням слідом за зміною темпу надходження замовлень. Рівняння, які описують виробництво, можна подати у такій формі:



$$(52-u): zpp.k = zpp.j + dt * (pzzp.jk - vgp.jk); \quad (4.52)$$

$$(53-t): vgp.kl = fnzap3(pzzp.jk, zppp), \quad (4.53)$$

$zpp$  – обсяг замовлень, що знаходяться на стадії виробництва, (од.);

$pzzp$  – темп надходження виробничих замовлень підприємству, (од./тижд.);

$vgp$  – темп випуску готової продукції, (од./тижд.);

$zppp$  – запізнювання попередньої підготовки виробництва, (тижд.).

Отримана сукупність рівнянь (4.37)-(4.53) знаходить своє відбиття в діаграмі потоків для ланки виробництва (рис. 4.5).

Система рівнянь (4.1)-(4.53) являє собою математичну модель виробничо-збутової системи, єдиною екзогенною змінною якої є темп потоку замовлень до РЛ  $pzr$ .

#### 4.6 Рівняння початкових умов і параметри моделі

Рівняння (4.1)-(4.53) повинні розв'язуватися періодично в моменти часу, розділені між собою інтервалом  $dt$ . Для того щоб розв'язати ці рівняння перший раз, необхідно знати вихідні значення змінних. Доцільно почати вивчення системи, що перебуває в стабільних умовах, вважаючи, що у минулому попит на товар був стабільним.

Початкові умови доцільно встановлювати на основі зовнішніх введів і параметрів системи. Це дозволить змінювати лише значення параметрів, не вимагаючи змін для визначення початкових умов у системі рівнянь.

Початкові і попередні значення темпу потоку замовлень до РЛ  $pzr$  повинні бути задані чисельно:

$$(54-n): pzr = pzri. \quad (4.54)$$

$pzri$  – початкове значення темпу потоку замовлень до РЛ.

Початкові значення для змінних, що характеризують значення рівнів і темпів потоків, для умов стабільного функціонування дорівнюють їх нормальним або бажаним значенням.

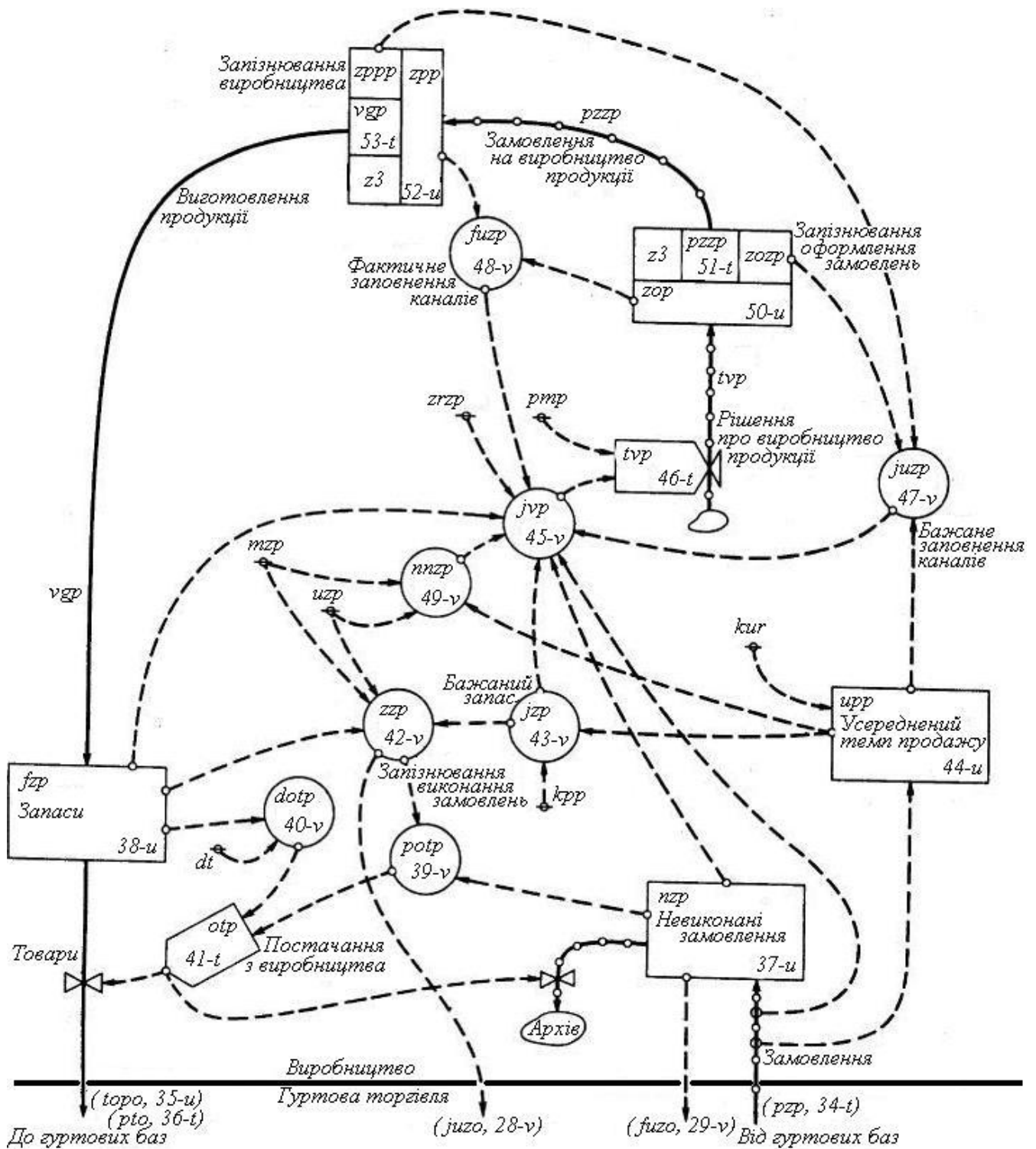


Рисунок 4.6 – Діаграма потоків для ланки виробництва

Початкові значення кількості невиконаних замовлень у РЛ  $n_{zr}$  встановлюється на основі рівняння (4.12):

$$(55- n): n_{zr} = u_{pr} * (m_{zr} + u_{zr}), \quad (4.55)$$

де  $u_{pr}$  – початкове значення середнього темпу надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$m_{zr}$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень РЛ, (тижд.);

$u_{zr}$  – середнє запізнювання виконання замовлень РЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.).

Початкові значення рівня фактичних запасів у РЛ  $f_{zr}$  встановлюється на основі рівняння (4.7):

$$(56- n): f_{zr} = k_{pr} * u_{pr} \quad (4.56)$$

де  $k_{pr}$  – коефіцієнт запасу для РЛ.

Початкове значення середнього темпу надходження замовлень до РЛ  $u_{pr}$  в усталеному режимі дорівнює поточному темпу:

$$(57- n): u_{pr} = p_{zr}. \quad (4.57)$$

Використовуючи початкові значення змінних (4.54)-(4.57) можна розв'язати рівняння (4.3)-(4.7) і визначити початкове значення темпу відвантаження товарів із РЛ  $otr$ , яке, як і інші темпи потоків, в усталеному режимі буде дорівнювати темпу надходження замовлень  $otr = p_{zr}$ .

Початкові кількості замовлень і товарів, що рухаються каналами системи в усталеному режимі дорівнюють добутку темпу потоку замовлень до РЛ на тривалість відповідного запізнювання:

$$(58- n): z_{or} = z_{ozr} * p_{zr}; \quad (4.58)$$

$$(59- n): z_{pr} = z_{p_{zr}} * p_{zr}; \quad (4.59)$$

$$(60- n): t_{opr} = z_{ttr} * p_{zr}, \quad (4.60)$$

де  $z_{or}$  – початкове значення кількості замовлень в РЛ, що перебувають на стадії оформлення, (од.);

$zozr$  – запізнювання оформлення замовлень у РЛ, (тижд.);

$zpr$  – початкове значення кількості виданих РЛ замовлень на закупівлі, що перебувають у поштових каналах, (од.);

$zpzr$  – запізнювання пересилання замовлень із РЛ (поштове), (тижд.);

$topr$  – початкове значення кількості товарів, що перебувають на шляху до РЛ, (од.);

$zttr$  – запізнювання транспортування товарів до РЛ, (тижд.).

Відповідні рівняння для оптової ланки по аналогії з (4.54)-(4.60) будуть мати вигляд:

$$(61-n): pzo = pzo; \quad (4.61)$$

$$(62-n): nzo = upo * (mzo + uzo); \quad (4.62)$$

$$(63-n): fzo = kpo * upo; \quad (4.63)$$

$$(64-n): upo = pzo; \quad (4.64)$$

$$(65-n): zoo = zozo * pzo; \quad (4.65)$$

$$(66-n): zpo = zpzo * pzo; \quad (4.66)$$

$$(67-n): topo = ztto * pzo, \quad (4.67)$$

де  $pzo$  – початкове значення темпу потоку замовлень до ОЛ, (од./тижд.);

$nzo$  – початкове значення кількості невиконаних замовлень в ОЛ;

$mzo$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень в ОЛ, (тижд.);

$upo$  – початкове значення середнього темпу надходження замовлень до РЛ, (од./тижд.);

$uzo$  – середнє запізнювання виконання замовлень в ОЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

$fzo$  – початкове значення рівня фактичних запасів в ОЛ, (од.);

$kpo$  – коефіцієнт запасу для ОЛ;

$zoo$  – початкове значення кількості замовлень в ОЛ, що перебувають на стадії оформлення, (од.);

$zozo$  – запізнювання оформлення замовлень в ОЛ, (тижд.);

$zpo$  – початкове значення кількості виданих ОЛ замовлень на закупівлі, що перебувають у поштових каналах, (од.);

$zpzo$  – запізнювання пересилання замовлень із ОЛ (поштове), (тижд.);

$topo$  – початкове значення кількості товарів, що перебувають на шляху до ОЛ, (од.);

$ztto$  – запізнювання транспортування товарів до ОЛ, (тижд.).

По аналогії відповідні рівняння для виробничої ланки будуть мати вигляд:

$$(68-n): pzp = pzp; \quad (4.61)$$

$$(69-n): nzp = upp * (mzp + uzp); \quad (4.62)$$

$$(70-n): fzp = kpp * upp; \quad (4.63)$$

$$(71-n): upp = pzp; \quad (4.64)$$

$$(72-n): zop = zozp * pzp; \quad (4.65)$$

$$(73-n): zpp = zpzp * pzp, \quad (4.66)$$

де  $pzp$  – початкове значення темпу потоку замовлень до ВЛ, (од./тижд.);

$nzp$  – початкове значення кількості невиконаних замовлень у ВЛ;

$upp$  – початкове значення середнього темпу надходження замовлень до ВЛ, (од./тижд.);

$mzp$  – мінімально можливе запізнювання виконання замовлень у ВЛ, (тижд.);

$uzp$  – середнє запізнювання виконання замовлень у ВЛ, пов'язане з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальному "нормальному" обсязі запасів, (тижд.);

$fzp$  – початкове значення рівня фактичних запасів у ВЛ, (од.);

$kpp$  – коефіцієнт запасу для ВЛ;

$zop$  – початкове значення кількості замовлень у ВЛ, що перебувають на стадії оформлення, (од.);

$zozp$  – запізнювання оформлення замовлень у ВЛ, (тижд.);

$zpp$  – початкове значення кількості замовлень, що знаходяться на стадії виробництва, (од.);

$zppp$  – запізнювання попередньої підготовки виробництва, (тижд.).

Рівняння задають початкові значення змінних для розв'язання системи рівнянь (4.1)-(4.53).

Значення параметрів моделі динаміки встановлюються у результаті розв'язання задачі параметричної ідентифікації кожного об'єкта окремо. Виберемо такі значення параметрів:

– мінімальні запізнювання виконання замовлень:  $mzp = mzo = mzp = 1, 0$ ;

– середні запізнювання виконання замовлень, пов'язані з відсутністю на складі деяких видів товарів при загальних "нормальних" обсягах запасів:  $uzp = 0, 4$ ;  $uzo = 0, 6$ ;  $uzp = 1, 0$ ;

- коефіцієнти запасу:  $kpr=8$ ;  $kpo=6$ ;  $kpp=4$ ;
- постійні часу усереднення вимог:  $kur=kuo=kup=8$ ;
- запізнювання регулювання запасів і заповнення каналів:  $zrzr= zrho= zrzp=8$ ;
- запізнювання оформлення замовлень на закупки товарів:  $zozr=3$ ;  $zozo=2$ ;  $zozp=1$ ;
- запізнювання пересилання замовлень:  $zpzr= zpzo=0,5$ ;
- запізнювання транспортування товарів:  $zttr=1,0$ ;  $ztto=2,0$ ;
- запізнювання попередньої підготовки виробництва:  $zppp=6,0$ ;
- максимально допустима виробнича потужність:  $pmpr=1000* pzri$ ;
- початкове значення темпу потоку замовлень до РЛ:  $pzri=1000$ ;
- крок моделювання:  $dt=0,05$ .

#### 4.7 Аналіз динаміки виробничо-збутової системи

Розроблена модель динаміки ВЗС дозволяє проаналізувати її поведінку при зміні попиту на товар  $pzr$ . Розглянемо реакцію системи на +10% ступінчасту зміну темпу надходження замовлень  $pzr$ , що має місце у січні місяці (рис. 4.7). Реакція системи має коливальний повільно затухаючий характер. Виниклі коливання представлені темпами видачі замовлень, випуску продукції, розмірами запасів на складах й обсягом невиконаних замовлень. Через запізнювання бухгалтерських розрахунків, закупівель і поштового зв'язку збільшення замовлень для оптової ланки  $pzo$  на 10% відстає від росту вимог до роздрібною ланки  $pzr$  приблизно на місяць. Зростання темпу видачі замовлень  $pzo$  не припиняється при досягненні +10%: на 11-му тижні він досягає +18% завдяки новим замовленням, що надійшли від роздрібною ланки. Причинами цього є: необхідність відновлення товарних запасів  $fzr$ ; необхідне збільшення товарних запасів  $fzr$  відповідно до нового попиту  $pzr$ ; необхідне для підняття на новий +10%-й рівень замовлень і товарів, що перебувають у каналах забезпечення  $fuzr$ . Збільшення замовлень для відновлення складських запасів і товарів у каналах забезпечення є одноразовим додаванням до обсягу початкових замовлень. Коли вони будуть виконані, то замовлення РЛ оптовим базам  $pzo$  знову скоротяться до рівня десятипроцентного зростання продажів.

Замовлення, що надходять з ОЛ на заводський склад  $pzp$ , зростають ще більше. Це пояснюється тим, що обсяг замовлень, які поступають до ОЛ  $pzo$ , покриває більш ніж чотиримісячні обороти роздрібного продажу  $pzr$  й складається помилкове враження про стійкий ріст обсягу ділової активності.

Тому за мовлення ОЛ, що надходять на заводський склад, включають не тільки +18% приросту отриманих ними замовлень, але й відповідне збільшення їхніх складських запасів  $fzo$ , а також збільшення замовлень і товарів у каналах забезпечення між ними  $fuzo$ . У результаті цього замовлення, що надійшли на заводський склад  $pzp$ , досягають на 14-му тижні максимального збільшення в +34% відносно рівня грудня минулого року.

Виробничі замовлення цехам  $pzzp$  видаються виходячи зі зростаючого обсягу замовлень, що надходять на заводський склад  $pzp$ , з урахуванням зменшення запасів готової продукції  $fzp$ , які знизилися на 15%. Виробничі замовлення  $pzzp$  до 15-й тижня зросли на 51%. У результаті на 21-му тижні випуск готової продукції  $vgr$  перевищив рівень, що був у грудні, на 45%.

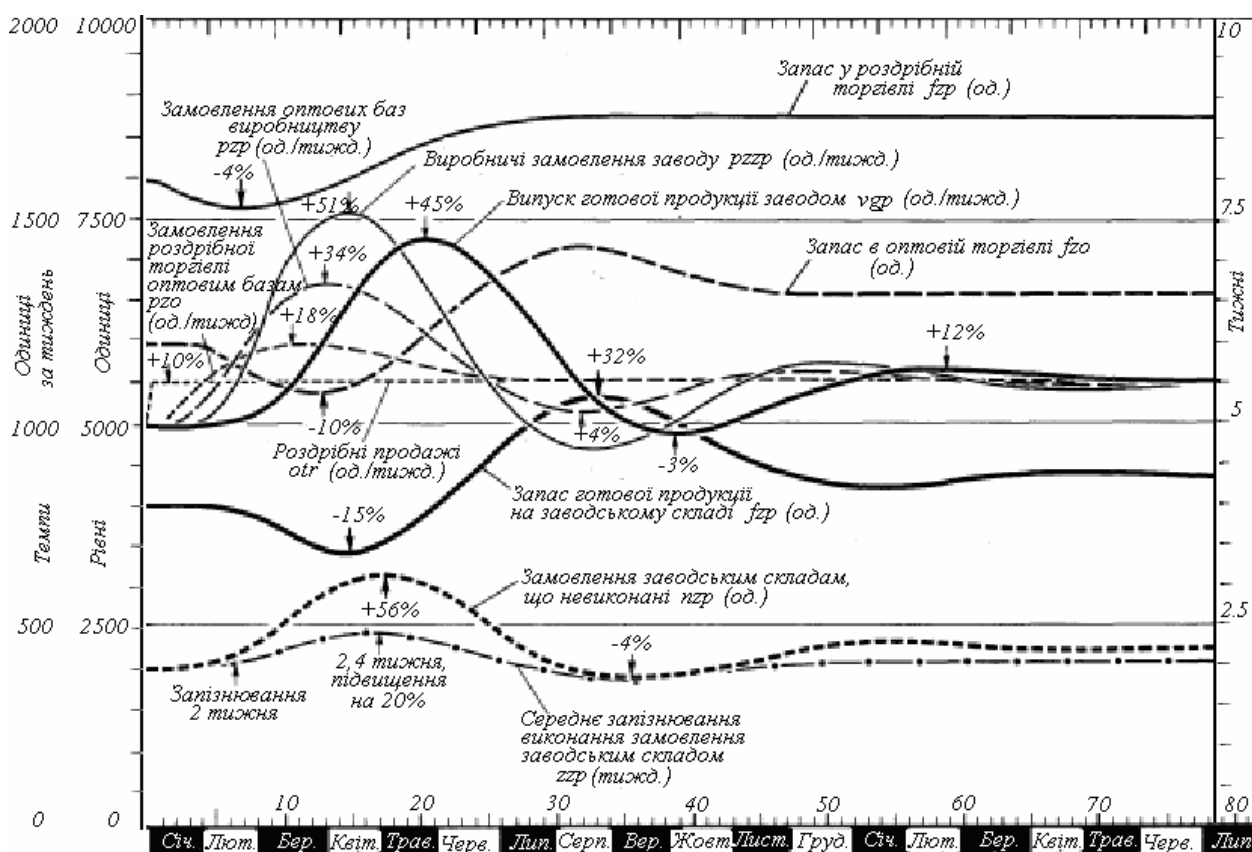


Рисунок 4.7– Реакція системи на 10-процентне ступінчасте збільшення потоку замовлень

Відмічені зміни мають зворотній характер. Як тільки замовлення РЛ на поповнення запасів будуть виконані, його замовлення  $pzo$  відповідно скоротяться. В ОЛ виявлять, що обсяг виданих ними замовлень  $pzp$ , а також рівень їх товарних запасів  $fzo$  і заповнення каналів забезпечення  $fuzo$

перевищують дійсні потреби. Цей надлишок буде віднятий з поточних замовлень виробництву  $pzr$ , так що їхній рівень на 32-му тижні буде на 6% нижче рівня роздрібного продажу  $pzr$  й тільки на 4% вище рівня, досягнутого в грудні. У вересні й жовтні (на 39-му тижні) випуск продукції на заводі  $vgr$  виявиться на 3% нижче, ніж у грудні, і на 13% нижче рівня поточного роздрібного продажу.

Організаційна структура ВЗС та прийняті у ній порядок видачі замовлень і регулювання запасів приводять до того, що потрібно більше року для стабілізації замовлень і виробництва на новому рівні.

*Періодичні коливання роздрібних продажів.* Припустимо, що в минулому система функціонувала в умовах постійного попиту на продукцію  $pzr=1000$ . Потім у січні продажі починають збільшуватися й наприкінці березня зростають на +10%, а до кінця вересня спостерігається 10-процентний спад і, нарешті, наприкінці грудня повернення до попереднього рівня  $pzr=1000$ .

Поведінка системи у таких умовах є ще більш нестабільною (рис. 4.8).

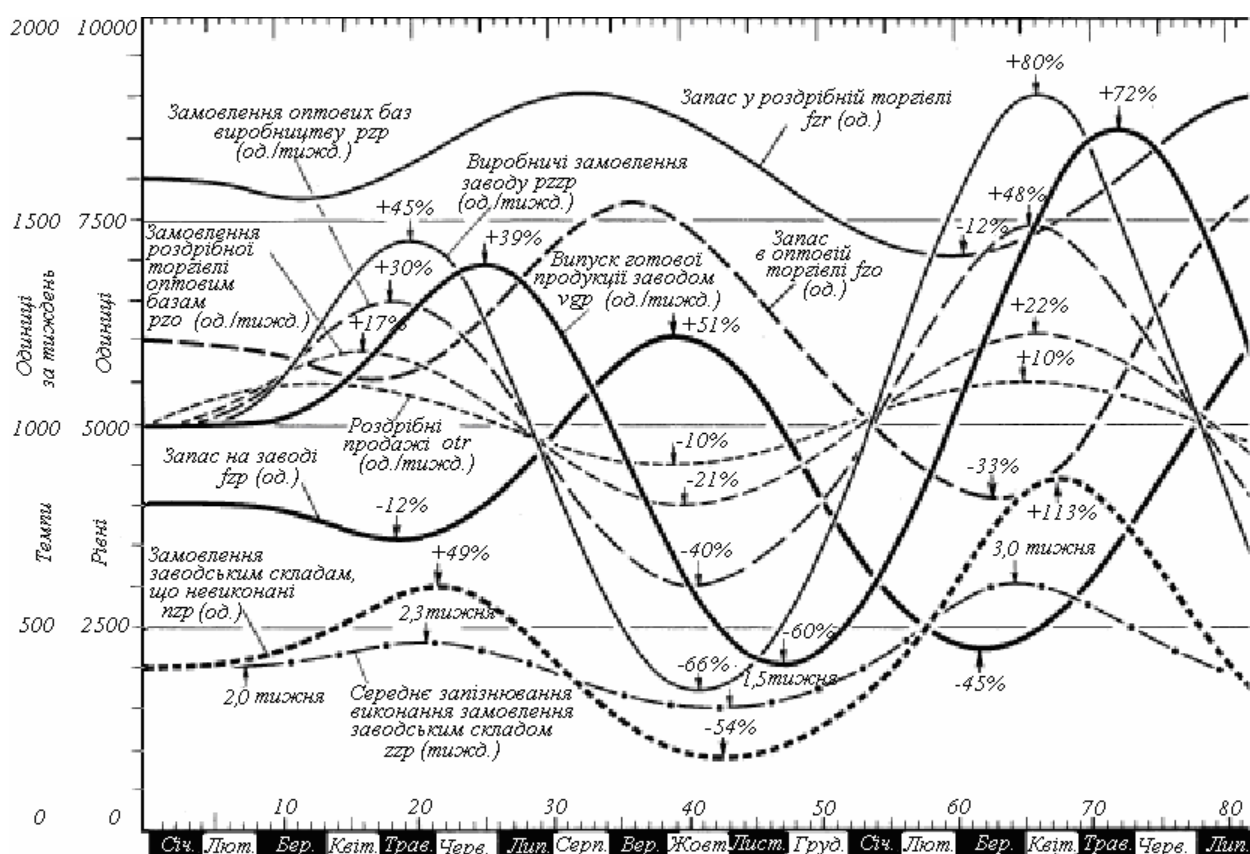


Рисунок 4.8 – Реакція системи на 10-процентне збільшення і падіння потоку замовлень

Початкове зростання темпів видачі замовлень і випуску продукції багато



в чому схоже з розглянутим раніше. Відмінністю є те, що перші максимуми функцій дещо менші й відстають за часом. Однак у той час, коли система вже повинна була вийти зі стану пері виробництва, вона одержує додатковий понижуючий поштовх, викликаний спадом роздрібних продажів  $p_{zr}$ . Як наслідок, кількість замовлень, що надходять з ОЛ у ВЛ  $p_{zp}$ , знизилась у жовтні в порівнянні зі звичайним рівнем на 40%, а обсяг випуску продукції  $v_{gp}$  впав у листопаді на 60% у порівнянні з нормальним рівнем.

У наступному році випуск продукції  $v_{gp}$  продовжує коливатися між точками +72% і –60% відносного нормального рівня. Товарні запаси коливаються в таких межах: у роздрібній мережі – від +12% до –12%; в оптовій мережі – від +32% до –33%; на заводському складі – від +62 до –45%.

#### 4.8 Контрольні запитання та завдання

1. Опишіть виробничо-збутову систему як об'єкт моделювання.
2. З якою метою здійснюється моделювання виробничо-збутової системи?
3. Які фактори повинні бути включені до моделі виробничо-збутової системи?
4. Опишіть діаграму потоків для ланки роздрібної торгівлі.
5. Дивлячись на діаграму потоків, запишіть систему рівнянь для підсистеми роздрібної ланки.
6. Опишіть діаграму потоків для ланки оптової торгівлі.
7. Дивлячись на діаграму потоків, запишіть систему рівнянь для підсистеми оптової ланки.
8. Опишіть діаграму потоків для ланки виробництва.
9. Дивлячись на діаграму потоків, запишіть систему рівнянь для підсистеми виробництва.
10. Яким чином доцільно встановлювати початкові значення змінних моделі.
11. Опишіть реакцію виробничо-збутової системи на ступінчасту зміну попиту на товар.
12. Опишіть реакцію виробничо-збутової системи на періодичну зміну потоку замовлень.

## 5 ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Ускладнення об'єктів, що досліджуються, створюються й експлуатуються в різних сферах людської діяльності приводить до збільшення витрат ресурсів на всіх етапах їх життєвих циклів. Необхідність раціонального використання ресурсів, що використовуються при цьому, потребує ще більшого обґрунтування проектних і управлінських рішень, а це, в свою чергу, підвищує вимоги до швидкості і точності засобів їх моделювання. Розвиток і удосконалення засобів моделювання динаміки об'єктів базується на успіхах у розвитку математики, обчислювальної техніки, інформаційних технологій, засобів телекомунікацій.

Основними напрямками розвитку й вдосконалення методів та засобів моделювання динаміки керованих об'єктів є удосконалення існуючих і розробка нових:

- математичних моделей, що більш адекватно описують досліджувані процеси;
- більш точних і економічних методів;
- більш зручних програмних засобів;
- більш потужних технічних засобів.

Розвиток математичних моделей здійснюється у напрямку більш повного врахування таких властивостей об'єктів як невизначеність даних, врахування випадкових факторів, динамічного характеру параметрів. Ефективним інструментарієм для цього є апарат інтервальної і нечіткої математики, теорії ймовірності і математичної статистики, штучного інтелекту.

Підвищення ефективності методів здійснюється у напрямку підвищення їх точності, зниження часової і ємкісної складності. Для зниження часової складності розробляються, зокрема, діакоптичні методи. Вони передбачають розбиття математичних моделей на підсистеми з можливістю їх умовно-незалежного дослідження.

Серед найважливіших напрямків розвитку програмних засобів виділяються: створення об'єктно-орієнтованих візуальних середовищ і інтелектуалізація пакетів програм. Першим кроком інтелектуалізації пакетів програм служить створення інтелектуальних оболонок для існуючих пакетів. Такі оболонки виконують роль посередника між користувачем і пакетом, вона генерує необхідні інструкції щодо користування пакетом, дає консультації, інтерпретує і пояснює результати моделювання.

Вдосконалення технічних засобів моделювання інтенсивно розвивається

у напрямку розпаралелювання процесів, зокрема шляхом використання паралельних і мультипроцесорних систем.

Прикладом сучасної розробки, яка об'єднує досягнення у розробці математичних моделей, методів, програмного забезпечення і апаратури, є вітчизняне сімейство інтелектуальних паралельних комп'ютерів *Інпарком* (*Інпарком*: інтелектуальний персональний комп'ютер, інтелектуальна робоча станція, інтелектуальний *MIMD*-комп'ютер). Комп'ютери *Інпарком* призначенні для дослідження і розв'язання науково-технічних задач з наближено заданими вхідними даними і оцінкою достовірності комп'ютерного розв'язку.

*Інпарком* дозволяє автоматично:

- досліджувати властивості комп'ютерних моделей з наближено заданими вхідними даними;
- визначати необхідну для розв'язання задачі кількість процесорів і формувати топологію із процесорів *MIMD*-комп'ютера для розв'язання задачі у відповідності з властивостями задачі та характеристиками комп'ютера з метою мінімізації часу розв'язання;
- синтезувати під обрану топологію програму паралельних обчислень;
- оцінювати достовірність отриманого комп'ютерного розв'язку (визначати близькість машинного розв'язку до точного (математичного) та давати оцінку похибки;
- виконувати візуалізацію результатів розв'язку мовою предметної області.

Модельний ряд сімейства "ІНПАРКОМ" включає:

- інтелектуальний персональний паралельний комп'ютер (пікова швидкодія від 16 до 64 *GFlops*);
- інтелектуальна робоча станція (пікова швидкодія від 64 до 256 *GFlops*);
- інтелектуальний *MIMD*-комп'ютер (пікова швидкодія від 256 *GFlops* і вище).

Інтелектуальні комп'ютери вже використовуються при моделюванні об'єктів різної фізичної природи, при створенні тренажерів для навчання персоналу управлінню об'єктами сучасної техніки.

Переваги *Інпаркому*:

- звільнення користувача від робіт по дослідженню задачі, створенню алгоритмів, написанню і налагодженню програм, що скорочує час на постановку і розв'язання задач не менше, ніж у 100 разів,
- постановка задачі користувачем на комп'ютері мовою предметної області,

- отримання машинного розв'язку з оцінкою достовірності, а також всіх властивостей машинної моделі задачі з наближено заданими вхідними даними,
- суттєве скорочення часу дослідження і розв'язання задач у порівнянні з традиційною технологією розв'язання задач на *MIMD*-комп'ютері з тією ж кількістю процесорів, на тій же елементній базі з традиційною паралельною архітектурою.

Програмне забезпечення *Інпаркому* включає три рівня:

- операційне середовище, яке підтримує інтелектуальне програмне забезпечення;
- інтелектуальне програмне забезпечення для дослідження і розв'язання задач обчислювальної математики з наближено заданими вхідними даними;
- інтелектуальне прикладне програмне забезпечення для розв'язання конкретних задач: систем лінійних алгебраїчних рівнянь, алгебраїчної проблеми власних значень, систем не лінійних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами.

#### Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає необхідність подальшого розвитку засобів моделювання динаміки?
2. У яких напрямках здійснюється розвиток й вдосконалення методів та засобів моделювання динаміки керованих об'єктів?
3. У чому полягає суть діакоптичних методів аналізу динаміки?
4. Опишіть властивості інтелектуальних паралельних комп'ютерів *Інпарком*.

#### ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Томашевский В.М. Моделирование систем. – К.: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
2. Анфилов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.
3. Современные системы управления /Р. Дорф, Р. Бишоп. Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832с.: ил.
4. Экономико-математическое обеспечение управленческих решений в менеджменте /Под ред. В.М.Вартаняна. – Харьков: ХГЭУ, 2001. – 288 с.
5. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. – М.:

Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 336 с.

6. Сольнищев Р.И. Автоматизация проектирования систем автоматического управления. – М.: Высш. шк., 1991. – 335 с.

7. Теория автоматического управления: В 2-х ч. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А.Бабаков, А.А.Воронов, А.А.Воронова и др.; Под ред. А.А.Воронова. М.: Высш. шк. – 1986. – 367 с.

8. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – Киев: Выща шк., 1988. – 359 с.

9. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352 с.

10. Основы моделирования сложных систем / Под общ. ред. И.В. Кузьмина. – Киев: Выща шк., 1981. – 360 с.

11. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.

12. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

13. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1990. – 288 с.

14. Основы системного анализа и проектирования АСУ /А.А.Павлов, С.Н. Гриша, В.Н. Томашевский и др.; Под общ. ред. А.А.Павлова. – Киев: Выща шк., 1991. – 367 с.

15. Глушков С.В., Жакин И.А., Хачиров Т.С. Математическое моделирование: Учебный курс. – Харьков: Фолио, М.: АСТ, 2001. – 524 с.

16. Кузьменко В.М. Спеціальні мови програмування. Програмні та інструментальні засоби моделювання складних систем.: Навч. посібник. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 324 с.

17. Кудрявцев Е.М. *GPSS World*. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 320 с.

Навчальне видання

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

для студентів спеціальностей

7.080402 – інформаційні технології проектування та

7.091401 – системи управління та автоматики

Упорядник: БЕЗКОРОВАЙНИЙ Володимир Валентинович

Відповідальний випусковий Е.Г. Петров

Редактор

Комп'ютерна верстка

План 2008, поз. \_\_\_\_

Підп. до друку \_\_\_\_\_.08. Формат 60х84 1/16. Спосіб друку – ризографія

Умов. друк. арк. \_\_\_\_ Облік.-вид. арк. \_\_\_\_ Тираж 50 прим.

Зам. № \_\_\_\_ Ціна договірна.

---

ХНУРЕ, 61166, Харків, просп. Леніна, 14.

---

Віддруковано в навчально-науковому  
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ  
61166, Харків, просп. Леніна, 14.