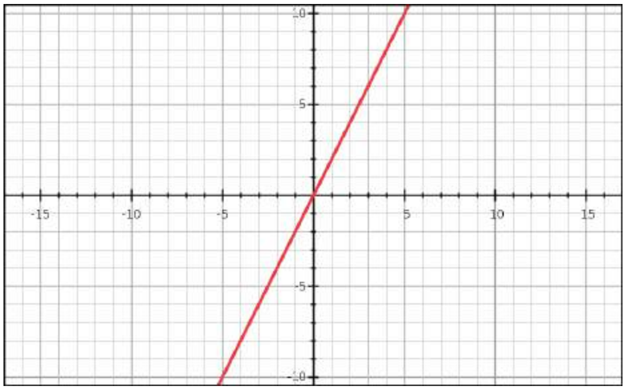
Funciones en el Plano

Son para describir la posición o ubicación de un punto en el plano, la cual está representada por el sistema de coordenadas. El compuesto por dos ejes perpendiculares: uno horizontal y otro vertical que se cruzan en el origen de coordenadas. El eje horizontal se denomina abscisa (x) y la vertical ordenada (y). Los ejes se enumeran comprendiendo el conjunto de los números reales.

Notación:

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Ejemplo: esta es una función en el plano y su tipo es lineal.



Para resolver una función, tenemos que tener el dominio, el rango y la expresión analítica, ya sea, por ejemplo $f(x) = 4x$.

Nuestro dominio será {-3, -2, -1, 0, 1, 2} y vamos a hallar el rango de $f(x) = 2x$.

Sustituimos los la **x** por los valores del dominio:

$f(-3) = 2(-3)$ $f(-2) = 2(-2)$ $f(-1) = 2(-1)$

$f(-3) = -6$ $f(-2) = -4$ $f(-1) = -2$

$f(0) = 2.0$ $f(1) = 2.1$ $f(2) = 2.2$

$f(0) = 0$ $f(1) = 2$ $f(2) = 4$

Entonces el rango es {-6, -4, -2, 0, 2, 4}

Tipos de Funciones

Función Lineal.

Una función lineal es una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde **a** y **b** son constantes y **x** es una variable, la **a** es la pendiente de la recta, es decir la inclinación y la **b** es el punto por donde pasa el eje. El eje de coordenadas resultantes de la ecuación debe dar como resultado una línea recta ya sea oblicua o horizontal en el plano cartesiano.

Ejemplo1: Hallar la función de $f(x) = 3x - 2$, en la que el dominio es: {0, 1, 2, 4}

$f(0) = 3(0) - 2$ $\quad$ $f(1) = 3(1) - 2$ $\quad$ $f(2) = 3.2 - 2$

$f(0) = -2$ $\quad$ $f(1) = 1$ $\quad$ $f(2) = 4$

$f(4) = 3.4 - 2$

$f(4) = 10$

El rango de la función es: {-2, 1, 4, 10} y su grafica es:

Ejemplo 2: Hallar la función de $-4x + 2y = 6$, y el dominio de la función va ser {0, 1, 2}.

Para ello, vamos a despejar la función lo cual quedaría de la siguiente manera $y = \frac{6+4x}{2}$, y se sobre entiende que $f(x) = y$.

$f(0) = \frac{6+4.0}{2}$ $\quad$ $f(1) = \frac{6+4.1}{2}$ $\quad$ $f(2) = \frac{6+4.2}{2}$

$f(0) = \frac{6}{2}$ $\quad$ $f(1) = \frac{10}{2}$ $\quad$ $f(2) = \frac{14}{2}$

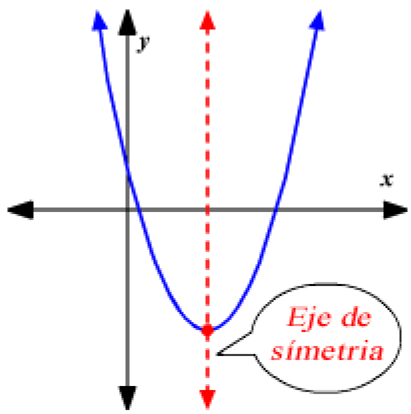
$f(0) = 3$ $\quad$ $f(1) = 5$ $\quad$ $f(2) = 7$

El rango es {3, 5, 7} y su grafica es:

Función cuadrática.

Es una función polinómica con una o más variables en la que el término de grado más alto es de segundo grado. Una función cuadrática puede expresarse de la siguiente forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Para resolver una función cuadrática primero se debe hallar el vértice de la parábola utilizando la formula $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.



Ejemplo: resolver y graficar la función $y = 2x^2 - 8x + 6$, donde a=2, b= -8 y c=6.

Hallamos el punto **x** del vértice utilizando $x = \frac{-b}{2a}$.

$x = \frac{-(-8)}{2.2} \rightarrow x = \frac{8}{4} \rightarrow x = 2$ el punto x es 2.

Hallamos el punto **y**.

$y = 2.2^2 - 8.2 + 6$

$y = 8 - 16 + 6$

$y = -2.$

Entonces el vértice es (2.-2), ya obtenido el vértice se puede sacar en base a el los demás puntos de coordenadas los cuales {0, 1, 2, 3, 4}, siendo el 2 el punto **x** del vértice.

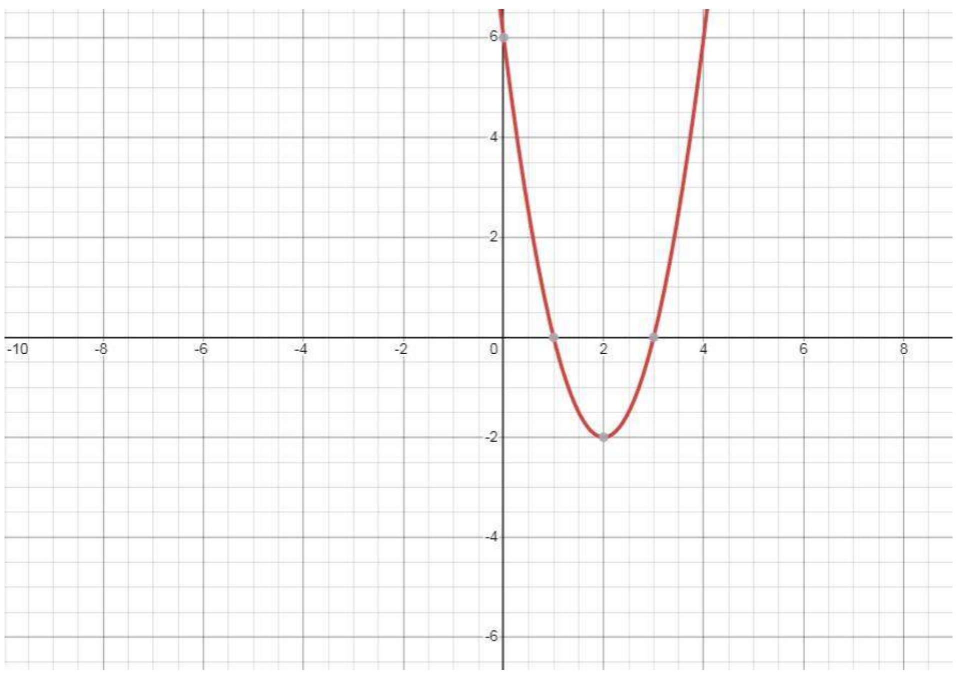
$f(o) = 2.0^2 - 8.0 + 6$ $\quad f(1) = 2.1^2 - 8.1 + 6$ $\quad f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 6$

$f(0) = 6$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f(2) = -2$

$f(3) = 2.3^2 - 8.3 + 6$ $\quad f(4) = 2.4^2 - 8.4 + 6$

$f(3) = 0$ $\quad f(4) = 6$

El rango de la función cuadrática es {6, 0, -2, 0, 6} y su grafica es:



Ejemplo 2: hallar la función cuadrática de $y = -2x^2 - 4.x + 2$.

Hallamos el vértice.

$$x = \frac{-(-4)}{2.(-2)} \;\rightarrow\; x = -\frac{4}{4} \;\rightarrow\; x = -1$$

$y = -2.(-1)^2 - 4.(-1) + 2$

$y = -2 + 4 + 2$

$y = 4$ El vértice es $v(-1,4)$.

Ya obtenido el vértice se puede sacar en base a él los demás puntos de coordenadas los cuales {-3, -2, -1, 0, 1}, siendo el -1 el punto **x** del vértice.

$f(-3) = -2.(-3)^2 - 4.(-3) + 2$

$f(-3) = -4$

$f(-2) = -2.(-2)^2 - 4.(-2) + 2$

$f(-2) = 2$

$f(-1) = -2.(-1)^2 - 4.(-1) + 2$

$f(-1) = 4$

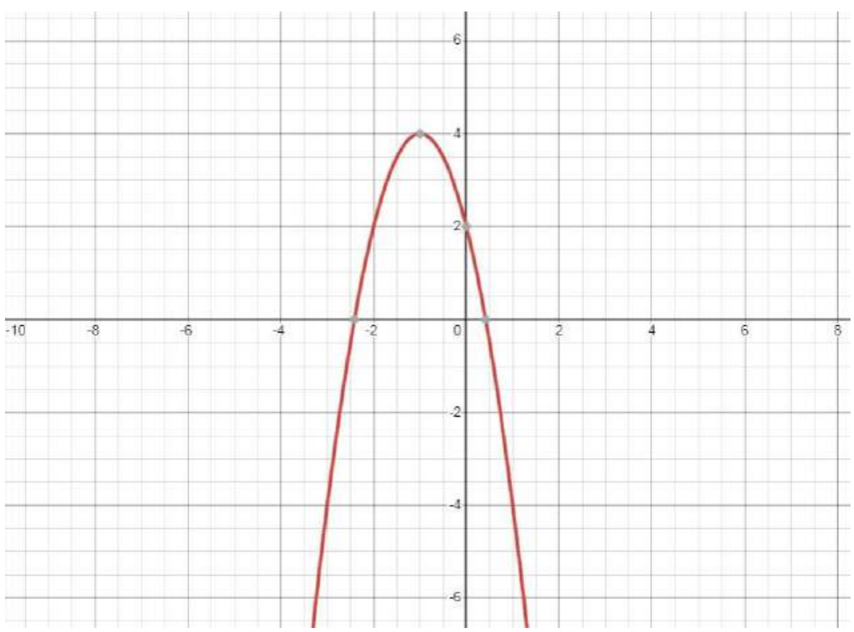
$f(0) = -2.(0)^2 - 4.(0) + 2$

$f(0) = 2$

$f(1) = -2.(1)^2 - 4.(1) + 2$

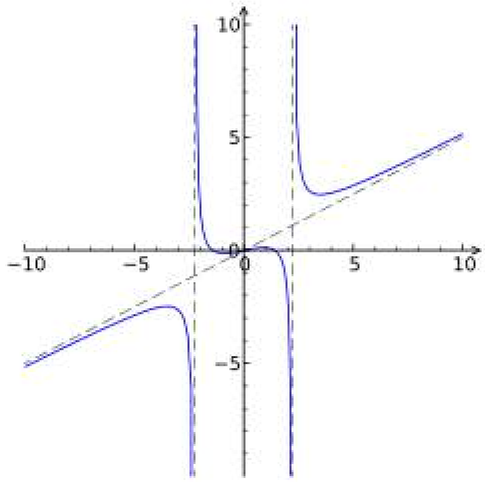
$f(1) = -4$

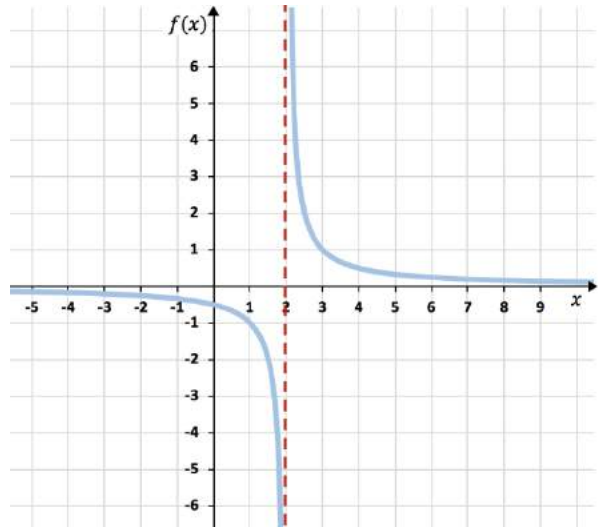
El rango de la función cuadrática es {-4, 2, 4, 2, -4} y su grafica es:



Funciones Racionales

Una función racional está definida como el cociente de polinomios en los cuales el denominador tiene un grado de por lo menos 1. En otras palabras, debe haber una variable en el denominador. Ejemplo: $f(x) = \frac{7}{2x-1}$.





Ejercicio: resolver la función $y = \frac{2x-5}{x-3}$.

Hallamos el dominio y el rango

Para el dominio despejamos el denominador $x - 3 \neq 0$.

$x = 3$

El rango es 2, ya que 2 al lado de la x y el 1 que está en el denominador al lado de la x, por tanto, sería $\frac{2}{1}$ que es igual a 2.

Entonces las asíntotas el dominio son todos los reales menos el 3, y el rango son todos los reales menos el 2.

Luego buscamos los puntos de cortes en el eje **x** y **y**.

Punto de corte del eje **x**.

$0 = \frac{2x-5}{x-3}$ despejamos y queda $\frac{5}{2} = x$.

Punto de corte del eje **y**.

Sustituimos las **x** por ceros y resolvemos.

$y = \frac{2.0-5}{o-3}$ = $y = \frac{5}{3}$.

Ahora hallamos los demás valores del rango tomado en cuenta los puntos que están al lado del punto de corte del dominio que es el 3, en este caso los puntos al lado son {1, 2, 4, 5}.

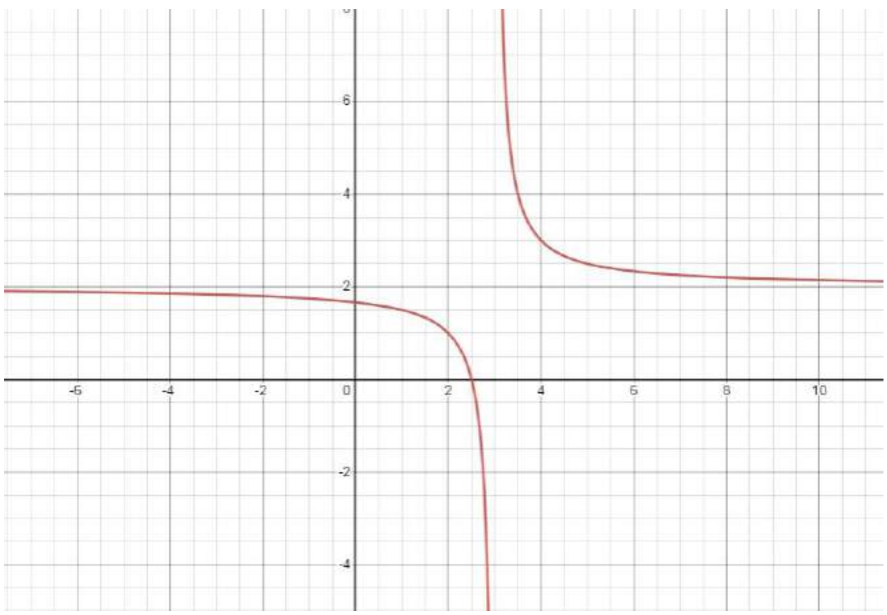
$f(1) = \frac{2.1-5}{1-3}$ $f(2) = \frac{2.2-5}{2-3}$ $f(4) = \frac{2.4-5}{4-3}$

$f(1) = \frac{3}{2}$ $f(2) = 1$ $f(4) = 3$

$f(5) = \frac{2.5-5}{5-3}$

$f(5) = \frac{5}{2}$

Los valores del rango son $\{\frac{3}{2}, 1, 3, \frac{5}{2}\}$ y la gráfica es:



Función exponencial.

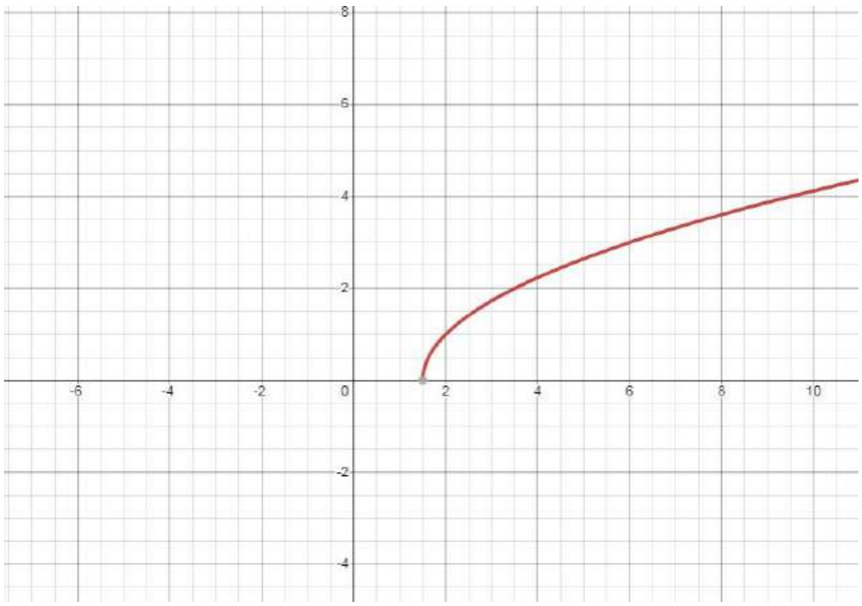
Es la función donde un número multiplicado por sí mismo te da el valor dado. El número del radical nunca puede ser negativo porque no sería una función de raíz cuadrada. Esto es debido a que un número negativo da por resultado un número imaginario.

Por ejemplo: resolver la función $y = \sqrt{2x} + 3$.

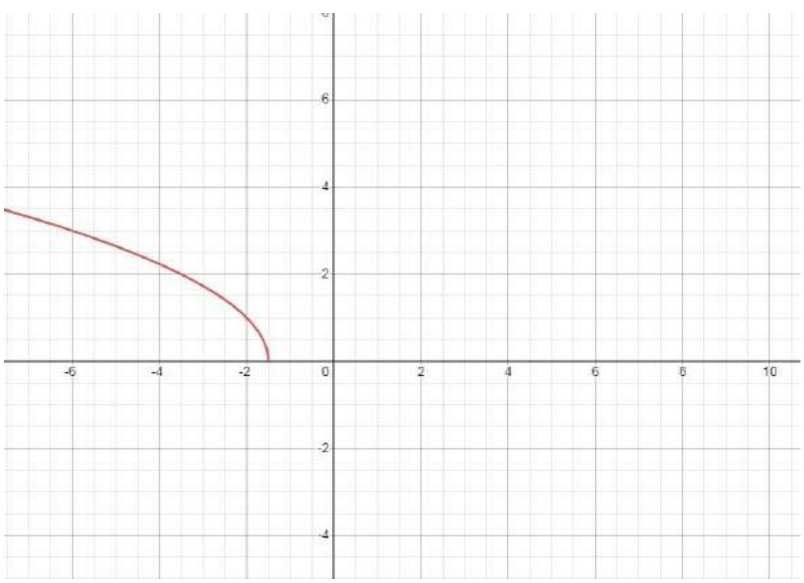
Para hallar el domino este debe ser ≥ 0, entonces:

$2x + 3 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; x \geq -\frac{3}{2}$ el dominio es $\{\frac{3}{2}, +\infty\}$

Y el rango es $\{0, +\infty\}$, entonces la gráfica es:

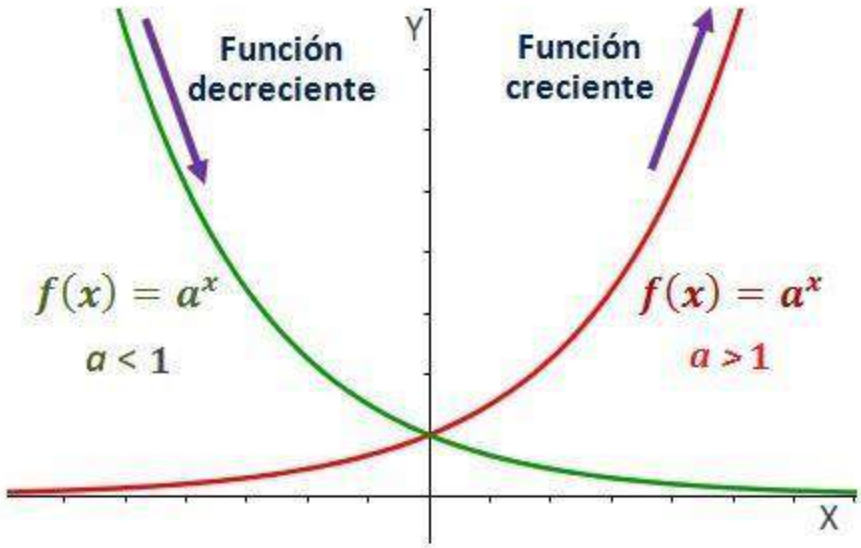


Cunado una raíz sea negativa la gráfica va ser:



Función Exponencial.

Las funciones exponenciales tienen la forma f(x) =b^x, donde b > 0 y b ≠ 1. Al igual que cualquier expresión exponencial, b se llama base y x se llama exponente. Siempre la función exponencial va a cortar en el 1 del eje **y.**



El dominio de la función exponencial es $\{-\infty, +\infty\}$ y el rango es $\{0, \infty\}$.

Ejercicio: resolver la función exponencial de $f(x) = 2^x$, utilizando como dominio {-2, -1, 0, 1, 2}.

$f(-2) = 2^{-2}$

$f(-2) = \frac{1}{4}$

$f(-1) = 2^{-1}$

$f(-1) = \frac{1}{2}$

$f(0) = 2^0$

$f(0) = 1$

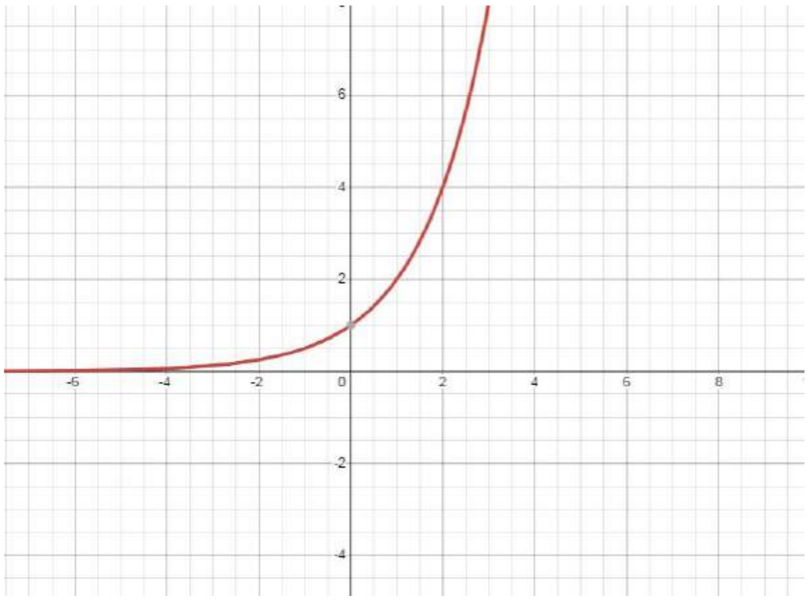
$f(1) = 2^1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 2^2$

$f(2) = 4$

El rango de la función es $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2. 4\}$ y su grafica es:



Las transformaciones en el exponente son parte de la función exponencial, y esto ocurre cuando se le agrega una opresión a un exponente.

Ejemplo: resolver la función 2^{x+2}, utilizando el dominio {0,1, 2, 3}.

$f(0) = 2^{0+2}$

$f(0) = 2^2$

$f(0) = 4$

$f(1) = 2^{1+2}$

$f(1) = 2^3$

$f(1) = 8$

$f(2) = 2^{2+2}$

$f(2) = 2^4$

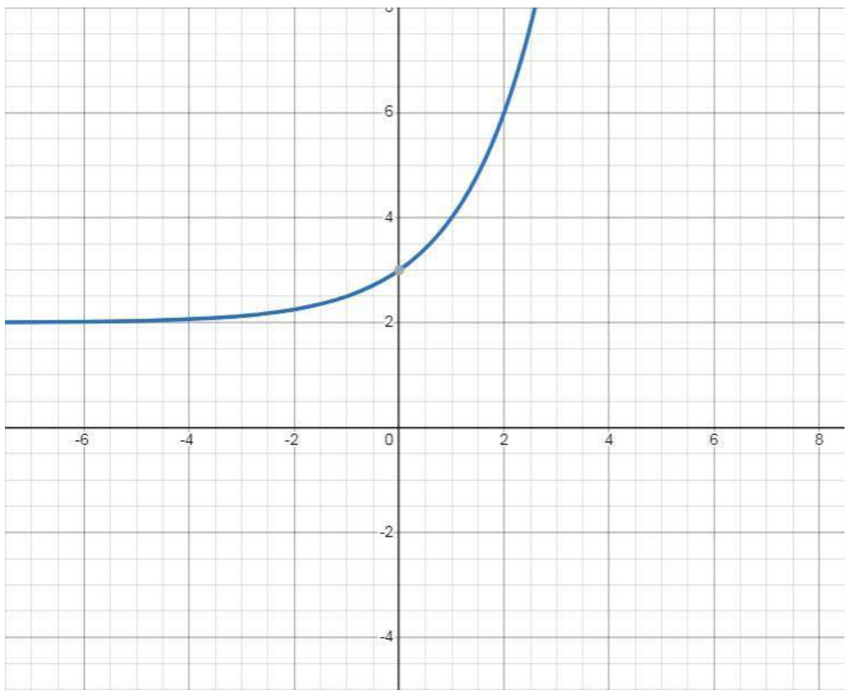
$f(2) = 16$

$f(3) = 2^{3+2}$

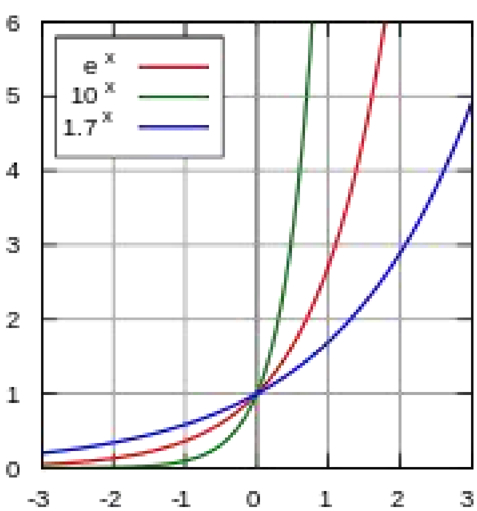
$f(3) = 2^5$

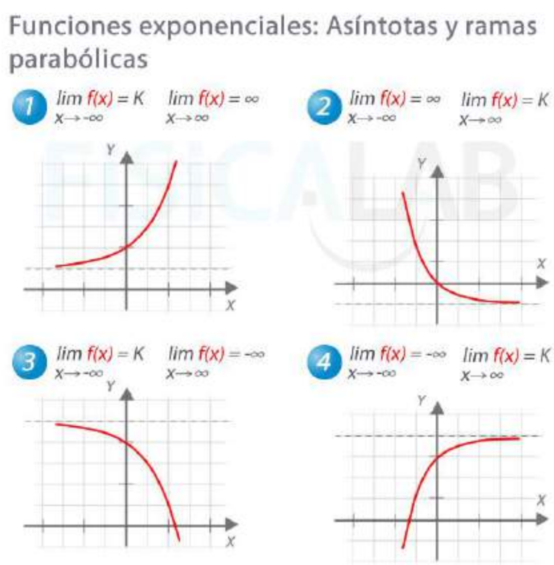
$f(3) = 32$

Donde el rango va des $\{2, +\infty\}$ y su grafica es:



Otro ejemplo de cambio en la transformación son las siguientes





Funciones logarítmicas.

La función f(x) = log x, es la inversa de f(x) = 10^x, cuando no se escribe la base se asume que es base 10. La función f(x) = log x, es la inversa de f(x)=e^x, la inversa de la función exponencial con base e se conoce como logaritmo natural.

Ejemplo: hallar la función $y = \log_3(2x - 4)$.

Hallamos el dominio:

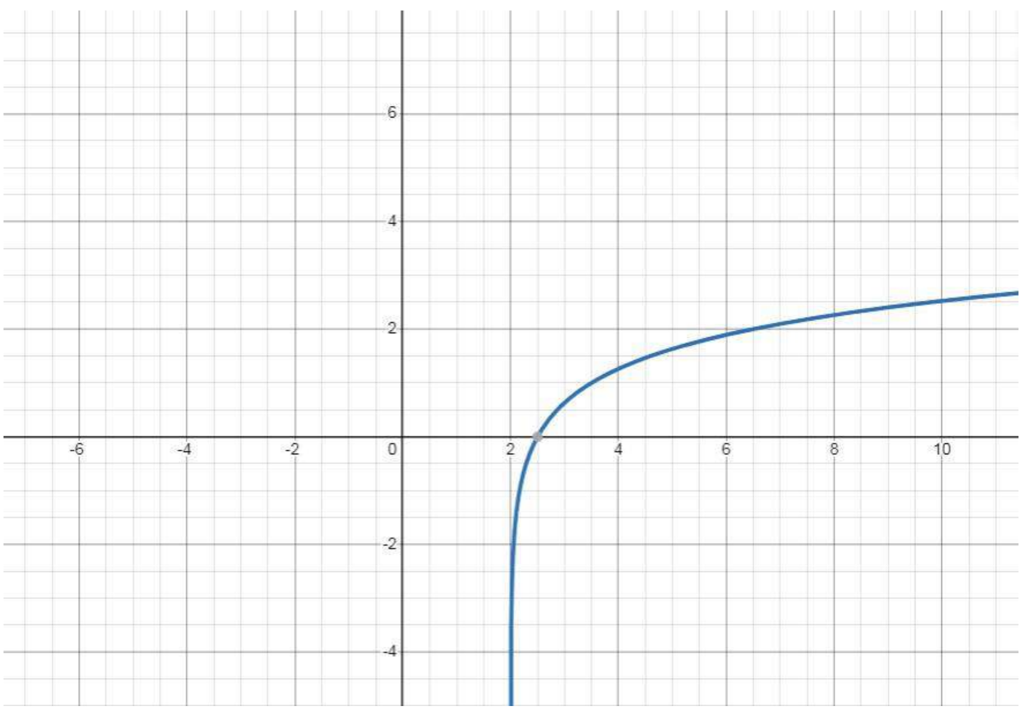
$2x - 4 > 0$ despejamos

$x > 2$ Entonces el dominio es $\{2, \infty\}$

Ahora tomando en cuenta que el dominio inicial es 2 el rango a tomr en cuenta es {3, 4, 5}

$\text{f}(3) = \log_3(2.3 - 4)$	$\text{f}(4) = \log_3(2.4 - 4)$	$\text{f}(5) = \log_3(2.5 - 4)$
$\text{f}(3) = \log_3(2)$	$\text{f}(4) = \log_3(4)$	$\text{f}(5) = \log_3(6)$
$f(3) = 0{,}63$	$F(4) = 1{,}26$	$F(5) = 1{,}63$

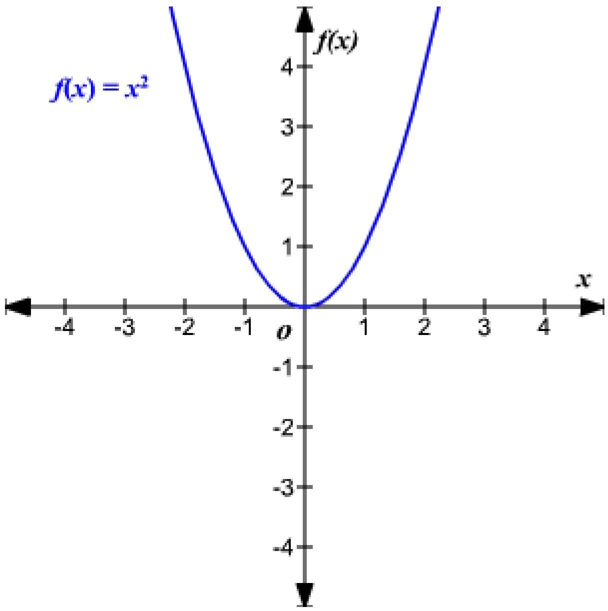
La grafica es:



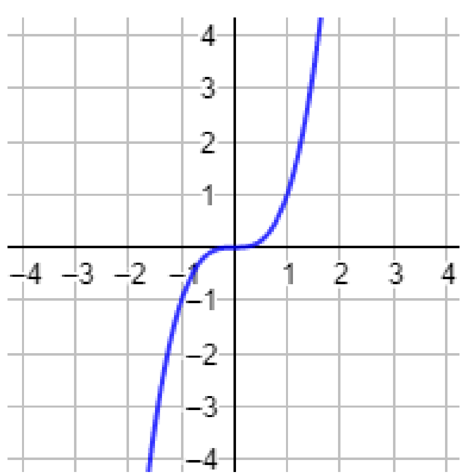
Funciones pares e impares.

Una función es par si f(-x) = f(x) para toda x en el dominio de f. La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y. Una función es impar si f(-x) = -f(x) para toda x en el dominio de f.

La función par es simétrica al eje **y**, siendo esta $f(-x) = f(x)$.



La función impar es simétrica con respecto al "origen" $f(-x) = -f(x)$.



Para saber si una función es par se aplica $f(-x) = f(x)$, y se comprueba de la siguiente manera.

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 - 3$, sustituimos la **x** por **-x** y resolvemos.

$f(-x) = 2(-x)^2 - 3$

$f(-x) = 2x^2 - 3$ como la función quedo igual entonces si es par. Si el resultado no es igual entonces no es par.

Para saber si una función es impar se aplica $f(-x) = -f(x)$, y se comprueba de la siguiente manera.

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 2x$ aplicamos la formula $f(-x) = -f(x)$, sustituyendo el valor de **x** por **-x**, si el resultado al resolver la ecuación es igual, entonces es impar, si no, no es par.

$-f(x) = -x^3 + 2x$

$f(-x) = (-x^3) - 2(-x)$

$f(-x) = -x^3 + 2x$

Como el resultado es igual entonces la función es impar.