Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

«Дифференциальные уравнения. Ряды»

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 2-3 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите в форме доклада. Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 10 так, чтобы у каждой команды он был уникальный. Защита работ проходит в конце семестра.

К расчетно-графической работе предъявляются следующие требования:

1) **к выполнению заданий**–в работе должны быть:
   a. представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
   b. указаны используемые теоретические положения и методы;
   c. получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения;
2) **к оформлению отчета**–отчет должен быть выполнен в электронном виде в одном из следующих форматов: doc, docx и ppt, pptx(для ppt, pptx используется шаблон Университета ИТМО (ИСУ –> Полезные ссылки –> Корпоративная стилистика –> Презентации (в самом низу)),
   а затем, если нет анимаций, переведён в **pdf**, и содержать:
   a. титульный лист/слайд (название дисциплины, номер модуля, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номера групп, дата, место (Университет ИТМО));
   b. условия всех заданий;
   c. основные этапы решения(исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
   d. графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/ или Geogebra: https://www.geogebra.org/). В случае интерактивных графиков и рисунков допускается вставить в отчёт вместо них ссылки на рабочие листы математического редактора и при защите демонстрировать их дополнительно;
   e. выводы;
   f. оценочный лист (для работы, выполненной командой; при этом вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 5 баллов).
3) **к докладу** – для доклада отводится от 7 до 10 минут. Доклад подкрепляется демонстрацией отчёта, который выводится на экран ноутбука или проецируется на экран в мультимедийной аудитории. Во время доклада оценивается качество устного изложения материала и ответы на вопросы по теме работы. Доклад должен содержать:
   a. постановку задачи;
   b. изложение основных этапов исследования или решения;
   c. ссылки на теоретический материал, используемый при исследовании и решении;
   d. результаты исследования или решения и их оценку;
   e. выводы.

Задание 1. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

№ команды и задача:

1. Определите закон движения материальной частицы с единичной массой под влиянием силы, направленной к центру O и равной удалению x частицы от центра притяжения (Рисунок 1), если в начальный момент времени $t=0$ частица покоилась на расстоянии 1 м от центра O.
   Решите эту же задачу при наличии внешней побуждающей силы, действующей на частицу по закону: а) $f(t)=\sin 2t$; б) $f(t)=\sin t$. Как качественно будут отличаться между собой решения во всех трёх случаях? Какой в этом физический смысл? Изобразите решения на графиках. Проведите анализ интегральных траекторий.

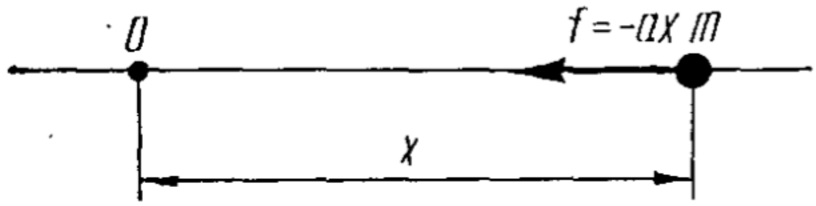

Рисунок 1– Иллюстрация к задаче 1 при $m=1$ кг и $a=1$ м

2. Материальная точка M массы $m=2$ кг притягивается двумя равномощными центрами притяжения A и B, расположенными один от другого на расстоянии $2a$ ($a>1$ м). Сила притяжения к каждому из них численно равна расстоянию от соответствующего центра до точки M. В начальный момент времени $t=0$ точка покоится на линии центров на расстоянии 1 м от её середины (Рисунок 2). Найдите закон движения точки.
   Решите эту же задачу при наличии внешней побуждающей силы, действующей на частицу по закону: а) $f(t)=\cos 2t$; б) $f(t)=\cos t$. Как качественно будут отличаться между собой решения во всех трёх случаях? Какой в этом физический смысл? Изобразите решения на графиках. Проведите анализ интегральных траекторий.

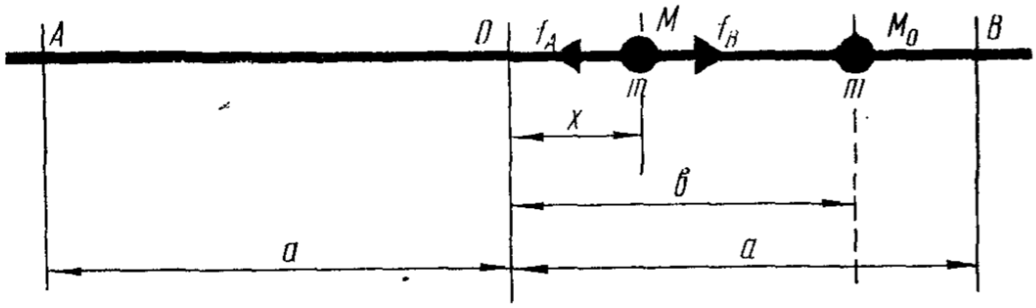

Рисунок 2 – Иллюстрация к задаче 2 при $m=2$ кги $b=1$ м

3. Допустим, что через земной шар радиуса $R = 6377 \cdot 10^3$ м проложен узкий прямой трубопровод, проходящий через центр Земли (Рисунок 3). Покоящийся на поверхности Земли камень массы $m = 1$ кг падает в него и притягивается центром Земли с силой, прямо пропорциональной расстоянию между центром Земли и камнем (коэффициент пропорциональности k^2, $k > 0$). Найдите закон движения камня. Через какое время камень пролетит через всю Землю, если в начальный момент времени $t = 0$ на камень действует сила $F = mg$?

   Найдите закон движения камня, если на него действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = qR\sin pt$, где q и p– параметры($p > 0$). Исследуйте закон движения при различных значениях параметров. Как изменится закон движения, если $p = k$? Подберите этому физическое толкование. Изобразите решения на графиках. Проведите анализ интегральных траекторий.

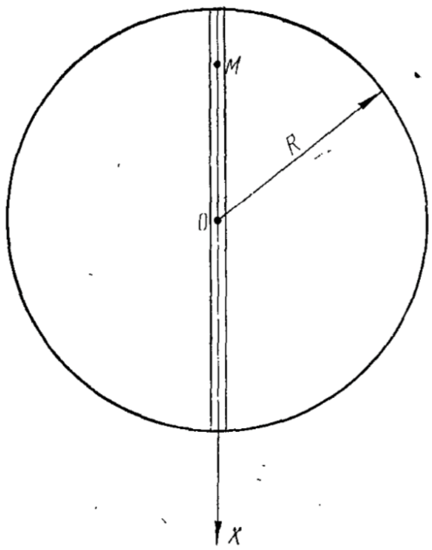

Рисунок 3

4. Найдите закон движения и определите период T математического маятника длиной lпри малых отклонениях.

   Найдите закон движения математического маятника, если на него действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = \sin t$. Как изменится закон движения, если длина маятника l такова, что без вынуждающей силы период колебаний равен 2π? Объясните это с физической точки зрения. Изобразите решения на графиках. Проведите анализ интегральных траекторий.

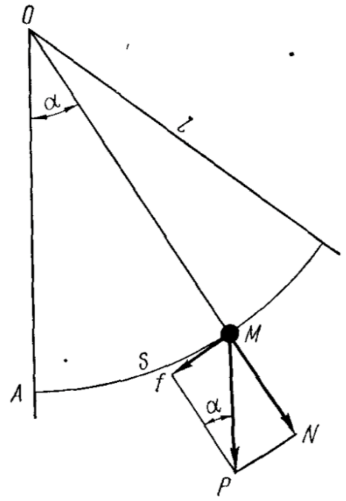

Рисунок 4

5. К вертикальной пружине, силой тяжести которой пренебрегаем, подвешен груз P, удлиняющий её на величину l (Рисунок 5). Оттянув груз на длину a вниз, его отпускают и оставляют свободно колебаться. Найдите закон этого движения, пренебрегая побочными сопротивлениями.

   Найдите закон движения математического маятника, если на него действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = \cos t$. Как изменится закон движения, если изначально подвешенный груз P удлинил пружину на такую величину l, чтобез вынуждающей силы период колебаний был равен 2π? Объясните это с физической точки зрения. Изобразите решения на графиках. Проведите анализ интегральных траекторий.

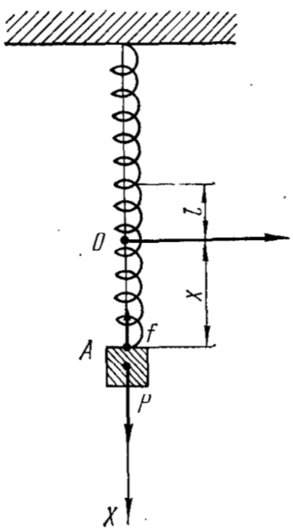

Рисунок 5

6. Цепь длиной $l = 10$ м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент движения со стола свисал конец цепи длиной $a = 1$ м (Рисунок 6). Пренебрегая трением и принимая $g \approx 10 \; / \; ^{2}$, найдите время соскальзывания всей цепи.
Определите закон соскальзывания цепи, если на её свисающий конец действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = A\cos Bt$, где A и $B-$ параметры. Исследуйте движение цепи в зависимости от параметров A и B. Проиллюстрируйте исследование графически. Проведите анализ интегральных траекторий.

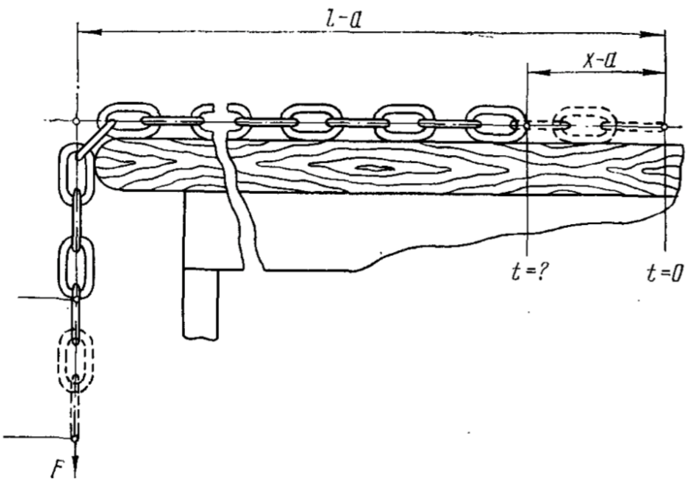

Рисунок 6

7. Цепь длиною $l = 20$ м переброшена через блок. С одной стороны свисает $a = 12$ м цепи, а с другой $b = 8$ м (Рисунок 7). Через какое время цепь сойдёт с блока? Принять $g \approx 10 \; / \; ^{2}$.
Определите закон движения цепи, если на её более длинный конец действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = A\cos Bt$, где A и $B-$ параметры. Исследуйте движение цепи в зависимости от параметров Aи B. Проиллюстрируйте исследование графически. Проведите анализ интегральных траекторий.

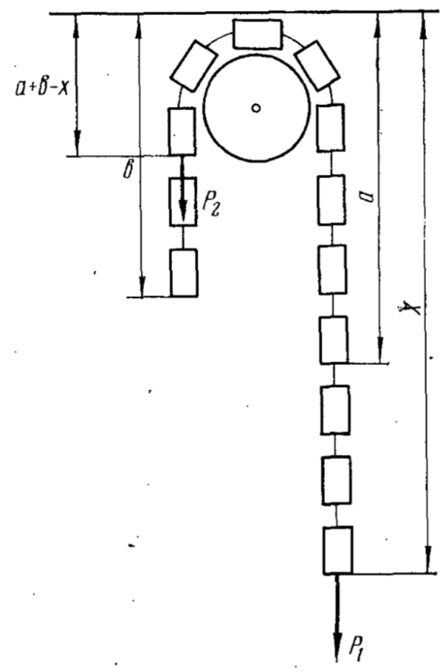

Рисунок 7

8. Трубка наклонена к вертикальной оси под углом α и вращается вокруг неё с постоянной угловой скоростью ω. В трубке катится без трения шарик (Рисунок 8). Найдите закон движения шарика вдоль оси трубки, если в начальный момент он находился на оси вращения и имел скорость v_0, направленную в положительном направлении оси трубки.
Зафиксируйте угол α и угловую скорость ω, поместите шарик на некоторое расстояние от оси вращения трубки и исследуйте его движение в зависимости от скорости v_0. Проведите анализ интегральных траекторий.

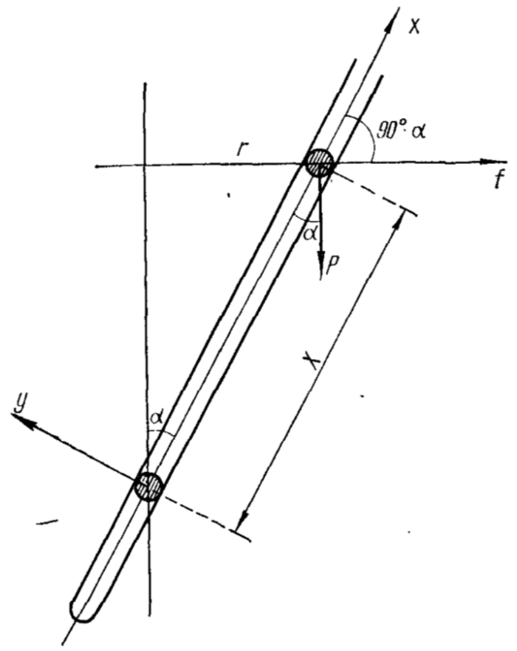

Рисунок 8

9. Для остановки речных судов у пристани с них сбрасывают канат, который наматывают на столб стоящий у пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делае 3 витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен ⅓ и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой 10 кгс? Проведите анализ интегральных траекторий.

10. На первоначально покоящийся математический маятник длины 1 м и весом 1 кгс в течение 1 с действовала горизонтальная сила 100 г. Найти амплитуду колебаний, которые установятся после прекращения действия силы (в см). Проведите анализ интегральных траекторий.

Задание 2. Системы линейных дифференциальных уравнений

Найдите решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений:
а) методом исключения;
б) матричным методом (метод Эйлера).

№ команды и условие:

1. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = y + 2x \end{cases}$ $x(0) = 4$, $y(0) = 3$	2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 8y + 2x \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 0$
3. $\begin{cases} x' = y + 3x \\ y' = x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 0$	4. $\begin{cases} x' = 4y + x \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 3$
5. $\begin{cases} x' = 3y + 2x \\ y' = 4y + 5x \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 6$	6. $\begin{cases} x' = 3y + 7x \\ y' = 5y + x \end{cases}$ $x(0) = -4$, $y(0) = 3$
7. $\begin{cases} x' = 2y + x \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = 4$	8. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 4y - x \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 2$

9. Нарисовать образ квадрата |x_i|<1 при преобразовании фазового потока системы diff(x_1)=2x_2, diff(x_2)=x_1+x_2 за время t=1.
10. Нарисовать фазовую кривую системы diff(x)=x-y-z, diff(y)=x+z, diff(z)=3x+z

План:

1) Решите систему указанными методами.
2) Проверьте, что ответы совпадают.
3) Изобразите решение на графике при $t > 0$.
4) Изобразите решение (траекторию) в фазовой плоскости при $t > 0$ и продемонстрируйте, как с изменением t точка движется по траектории.

Задание 3. Ряд Тейлора

Исследуйте ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

№ команды и условие:

1. $f(x)=(x-1)e^{x-1}+e^{1-x}$, $x_0=1$
2. $f(x)=\ln(-x^2+4x-3)$, $x_0=2$
3. $f(x)=(x^2-6x+10)\sin(x-3)$, $x_0=3$
4. $f(x)=\dfrac{9}{-x^2+10x-16}$, $x_0=5$
5. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x-5)}{x-5}$, $x_0=5$
6. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{7-2x}\right)$, $x_0=3$
7. $f(x)=\left(2-e^{x-2}\right)^2$, $x_0=2$
8. $2(x^2-2x+2)\cos^2\left((x-1)/2\right)$, $x_0=1$

План:

1) Разложите функцию в ряд Тейлора в заданной точке аналитически.
2) Найдите область сходимости полученного ряда к функции.
3) В графическом редакторе постройте графики частичных сумм ряда Тейлора (полиномов Тейлора) и график функции.
4) По графикам исследуйте поведение полиномов Тейлора при увеличении n.

Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:
https://www.desmos.com/calculator/uximpjelgn

Задание 4. Приложение рядов (индивидуальные задания)

1) Вычислить приближенно значение функции с заданной точностью
2) Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с заданной точностью
3) Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда. Изобразите на графике.

Задание 5. Ряд Фурье

С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале $(-\pi;\pi)$ найдите сумму указанного числового ряда.

№ команды и условие:

1. $f(x)=\pi^2-x^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

2. $f(x) = 1 + |x|$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$

3. $f(x) = x^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

4. $f(x) = |x|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

5. $f(x) = 1 + x^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

6. $f(x) = 1 - |x|$, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2}$

7. $f(x) = 1 - x^2$, $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n-2)^2}$

8. $f(x) = |x|$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

9. f((x)= xsin(x) , Sum [(-1)^n]/(n^2-1)

10. f(x)=xcos(x), Sum[n(-1)^n]/(n^2-1)

План:

1) Представьте функцию её рядом Фурье.
2) Изобразите функцию и её ряд Фурье на графике.
3) Зафиксируйте *x* так, чтобы ряд Фурье содержал искомую сумму ряда.Выразите её из равенства функции и ряда.