# Булевы функции

**Опр** Функция — правило, согласно которому каждому элементу x из области определения (X) ставится в соответсвие определенный элемент из области значений (F).

Для булевых функций X = F = {0, 1}

**Пример** $f = A\cdot\bar{B} + C$

$f(0,1,0) = 0$

| A | B | C | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$X \to F$

$(0,1,0) \to 0$

$(1,0,1) \to 1$

**Опр** аргументы — независимые переменные,
функция — зависимая переменная

У одной функции может быть множество формул.

$f = A \to B$

**Th** Число булевых функций n аргументов $2^{2^n}$

| $A_1$ | $A_2$ | … | $A_n$ | f | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | … | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | … | 1 | 1 | 0 | 1 |

$2^n$

$2^{2^n}$

00

01

1

## Способы задания булевых функций

1) Аналитический

$$\underline{\underline{f}} = \bar{A}B + C\bar{D}$$

2) Табличный

| № | A | B | C | f |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |

3) Карта Вейча (Карно)

| | *A* | *A* | | |
|---|---|---|---|---|
| *B* | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | | | |
| | | *C* | *C* | |

## Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Нормальные формы, использующие в своей записи только операции, определенные булевым базисом $(\cdot, +, \neg)$  $\rightarrow, \oplus$

**Опр** ДНФ — дизъюнктивная нормальная форма — дизъюнкция ($+$) выражений, которые либо: $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A\cdot B}$

1) отдельный аргумент (возможно с инверсией) $\overline{A}+B$

2) простая конъюнкция некоторых аргументов $A+B\overline{C}$

**Пример** является ДНФ: $f=\overline{A}+BC+\overline{C}A$

не является ДНФ: $f=A+B(C+D)$

**Опр** КНФ — конъюнктивная нормальная форма — конъюнкция выражений, которые либо:

1) отдельный аргумент (возможно с инверсией) $A, \overline{A}$

2) простая дизъюнкция некоторых аргументов $A+B+\overline{D}$

**Пример** является КНФ: $(A+B)(C+E+\overline{A})$

не является КНФ: $(AB+C)(B+\overline{C})$

Отдельный аргумент, как выражение, может быть причислен и к КНФ и к ДНФ записи

$$f=\overline{A}$$

## Минтермы. СДНФ

**Опр** Минтерм (минимальный терм) — булева функция, которая принимает единичное значение только на одном наборе значений переменных

| i | A | B | C | f | $f_2$ | g |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Пример** $(0,1,0) \to 1$. $f = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$, $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. $f = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$, $1 \cdot 1 \cdot 1$

**Обозначение** $m_i$ $m_2 = \bar{A} B \bar{C}$ $f = m_5 = A \bar{B} C = (5)$

**Утв** Конъюнкция двух различающихся минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, равна нулю.

**Пример**

$$g = m_0 + m_3 + m_5 + m_6 = (0,3,5,6) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

**Утв** Если в f только одна единица, то она представима в виде минтерма, если же их несколько, то f представима в виде **дизъюнкции** соответвующих минтермов.

**Опр** СДНФ — совершенная дизъюнктивная нормальная форма — представление функции в виде дизъюнкции минтермов n аргументов.

**Пример**

Всякая булева функия от заданного числа аргументов представима в виде СДНФ единственным образом. По этой причине СДНФ также называют канонической или стандартной формой.

## Построение СДНФ

**Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности:**

1) В таблице выделить те наборы переменных, на которых функция равна 1

2) Для каждого такого набора записать конъюнкцию переменных:

если 1, то переменная неизменна

если 0, то переменная инвертируется

3) Все полученные конъюнкции связываются дизъюнкциями

**Пример**

| № | x | y | z | f |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

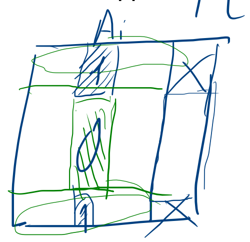
$\bar{x} \cdot y \cdot z + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = f$

## Теоремы для ДНФ и СДНФ

**Th** Разложения для ДНФ

Всякую булеву функцию можно представить в виде $f(A_1, A_2 \ldots A_n) = A_i \cdot f(A_1, A_2, \ldots 1, \ldots A_n) +$

$$+ \bar{A}_i \cdot f(A_1, A_2, \ldots 0, \ldots A_n)$$




$$BC = \bar{A}BC + ABC$$

**proof**

$] A_i = 0$

$$f(A_1, A_2 \ldots 0, \ldots A_n) = 0 \cdot f(A_1, A_2 \ldots 1, \ldots A_n) + 1 \cdot f(A_1, A_2, \ldots 0, \ldots A_n)$$

$] A_i = 1$ аналогично.

**Th** Существование и единственность представления булевой функции в СДНФ

Для любой булевой функции от n аргументов не равной 0 существует единственное представление её в виде СДНФ от n аргументов

**proof**

$$f(A_1, A_2 \ldots A_n) = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n \cdot f(0, \ldots 0) +$$

$$+ \cancel{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots A_n \cdot f(0, \ldots 1)} +$$

$$+ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots A_{n-1} \cdot \bar{A}_n \cdot f(0, \ldots 1, 0) +$$

$$+ \ldots$$

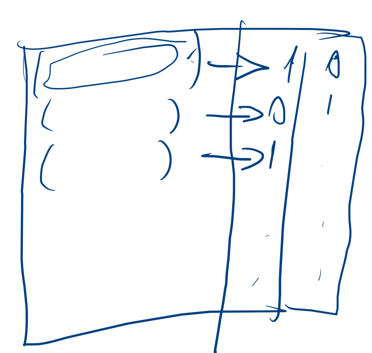
$$+ A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n \cdot f(1, \ldots 1)$$

СДНФ существует.

$$f(A_1, A_2 \ldots A_n) = (\ldots)_1$$

$$\parallel$$

$$(\ldots)_2$$



# Импликанты

**Опр** Импликанта $\varphi$ функции f — функция, все минтермы которой, входят в множество минтермов функции f

**Пример** $f(A,B,C) = AB + BC = (3,6,7)$

$\varphi_0 = 0$

$\varphi_1 = m_3$

$\varphi_2 = m_6$

$\varphi_3 = m_3 + m_6$

$\varphi_4 = m_7$

$\varphi_5 = m_3 + m_7$

$\varphi_6 = m_6 + m_7$

$\varphi_7 = m_3 + m_6 + m_7$

**Утв** Число импликант функции равно $2^m$ → число минтермов

## Карты Вейча(Карно)

Форма записи булевой функции в виде таблицы.

| | $A$ | $A$ | $\bar A$ | $\bar A$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $AB\bar C$ | $ABC$ | $\bar ABC$ | $\bar AB\bar C$ |
| $\bar B$ | $A\bar B\bar C$ | $A\bar BC$ | $\bar A\bar BC$ | $\bar A\bar B\bar C$ |
| | $\bar C$ | $C$ | $C$ | $\bar C$ |

| | $A$ | $A$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 6 | 7 | 3 | 2 |
| | 4 | 5 | 1 | 0 |
| | | $C$ | $C$ | |

| | $A$ | $A$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 12 | 14 | 6 | 4 | |
| $B$ | 13 | 15 | 7 | 5 | $D$ |
| | 9 | 11 | 3 | 1 | $D$ |
| | 8 | 10 | 2 | 0 | |
| | | $C$ | $C$ | | |

| | $E$ | $E$ | $E$ | $E$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $A$ | | | $A$ | $A$ | | | |
| $B$ | 25 | 29 | 13 | 9 | 24 | 28 | 12 | 8 | |
| $B$ | 27 | 31 | 15 | 11 | 26 | 30 | 14 | 10 | $D$ |
| | 19 | 23 | 7 | 3 | 18 | 22 | 6 | 2 | $D$ |
| | 17 | 21 | 5 | 1 | 16 | 20 | 4 | 0 | |
| | | $C$ | $C$ | | | $C$ | $C$ | | |

**Пример**

| | $A$ | $A$ | $\bar A$ | $\bar A$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $AB\bar C$ | $ABC$ | $\bar ABC$ | $\bar AB\bar C$ |
| $\bar B$ | $A\bar B\bar C$ | $A\bar BC$ | $\bar A\bar BC$ | $\bar A\bar B\bar C$ |
| | $\bar C$ | $C$ | $C$ | $\bar C$ |

| | $A$ | $A$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 6 | 7 | 3 | 2 |
| | 4 | 5 | 1 | 0 |
| | | $C$ | $C$ | |

1) функция задана в СДНФ

$f = (2, 3, 4, 7)$

| | $A$ | $A$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | | | |
| | | $C$ | $C$ | |

$f_1 \cdot f_2 = ABC$

2) функция задана в ДНФ

$f = A + BC$

$f_1 = A$

$f_2 = BC$

| | $A$ | $A$ | $BC$ | |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 1 | 1 | 1 | |
| | 1 | 1 | | |
| | $A$ | $C$ | $C$ | |

**Утв** СДНФ конъюнкции двух функций на карте Вейча будет отмечена двумя единицами в ячейке

## Методы построения сокращенных и минимальных форм

**Опр** Минимизация булевой формулы — нахождение наименьшего числа простых импликант (состоящие из одной конъюнкции), которые в дизъюнкции описывают исходную функцию

**Опр** Сокращенная ДНФ — запись функции, в которой
1) любые два слагаемых отличаются минимум в двух местах,
2) ни один их конъюнктов не содержится в другом.

$f = (\ \ldots\ )$

$f = BC + E\bar{D}F + \bar{A} + \cancel{\bar{A}C}$

**Методы:** Алгебраический - использует теоремы одного аргумента, склеивания и поглощения.
Метод Квайна - использует только теорему склеивания, находя в записи функции конъюнкции, отличающиеся только в знаке одного из аргументов.

$m_3 + m_6$

$f = \underline{\ C\ } + \underline{\quad} + \underline{\ \bar{C}\ } + \underline{\quad}$

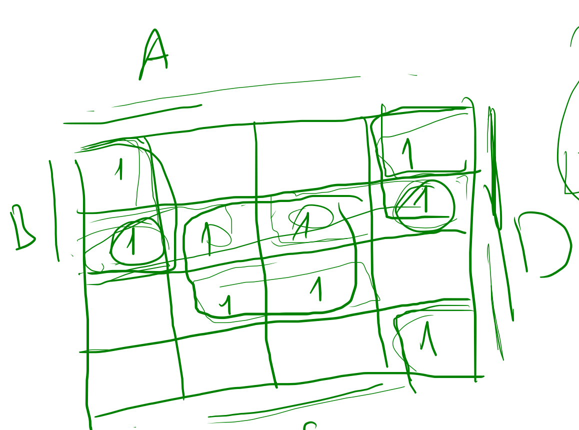
**Опр** Тупиковая ДНФ — сокращенная ДНФ, которая не содержит лишних (не влияющих на таблицу истинности) импликант

**Методы:** Петрика - проверяет каждую простую импликанту на предмет её нужности (измениится ли итоговая функция, если её удалить) в формуле

**Опр** Минимальная ДНФ — тупиковая ДНФ, которая содержит минимальное число вхождений переменных

**Методы:** Петрика - среди тупиковых форм есть минимальные
Карт Вейча - по теореме склеивания объединяются соседние ячейки

**Пример**




$f = CD + \cancel{BD} + \bar{C}B$ ДНФ

$f = CD + \bar{C}B$

## Макстерм. СКНФ

**Опр** Макстерм — булева функция, принимающая единичные значения на всех наборах аргументов, кроме одного

**Утв** Макстерм является инверсией минтерма

$(0\ 1\ 0)$

**Пример**

| minterm id | x | y | z | f | $\bar{f}$ | maxterm id |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 7 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$$\bar{f} = A\bar{B}C$$

$$f = \overline{A\bar{B}C} = \underbrace{\bar{A} + B + \bar{C}}_{1\ \ 0\ \ 1} = M_2$$

Связь индексов макстермов и минтермов:

$$m_i = \overline{M_{2^n-i-1}} \qquad M_i = \overline{m_{2^n-i-1}}$$

**Утв** Дизъюнкция двух различающихся макстермов, зависящих от одних и тех же аргументов, равна единице

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Опр** СКНФ — КНФ, которая не имеет одинаковых дизъюнкций и все они полные

Исходя из ранее указанного определения макстерма, можно сказать, что СКНФ представляет собой конъюнкцию макстермов функции

**Th** Разложения для КНФ

Всякую булеву функцию можно представить в виде

$$f(A_1, \dots A_n) = (A_i + f(A_1 \dots, 0 \dots A_n)) \cdot (\bar{A}_i + f(A_1, \dots 1, \dots A_n))$$

**proof**

] $A_i = 0$

] $A_i = 1$

## Построение СКНФ

**Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности:**

1) В таблице выделить те наборы переменных, на которых функция равна 0

2) Для каждого такого набора записать дизъюнкцию переменных функции:

если 0, то переменная неизменна

если 1, то переменная инвертируется

3) Все полученные дизъюнкции связываются конъюнкциями

**Пример**

| № | x | y | z | f |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z) = f$$

## Нахождение СКНФ через СДНФ

**Аналитически:**

1) Для функции f найти СДНФ инверсии данной функции (все минтермы, которые не вошли в функцию)
2) В аналитической записи инверсии f по теореме де Моргана проинвертировать результат (чтобы снова получить выражение для f).

**Пример**

$$f(A,B,C) = \underbrace{(0,1,2,4,5)}$$

$$\bar f(A,B,C) = (3,6,7) = \underbrace{\bar A BC + AB\bar C + ABC}_{\text{СДНФ инверсии}}$$

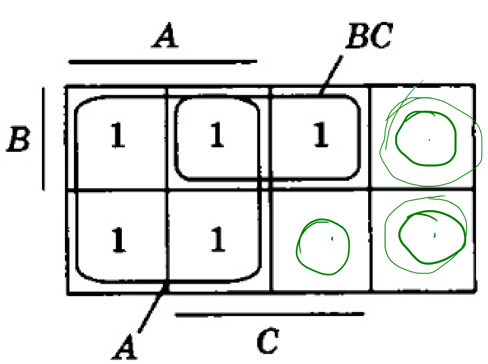
$$\bar{\bar f} = f = \overline{\bar A BC + AB\bar C + ABC} =$$

$$\underbrace{(A+\bar B+\bar C)(\bar A+\bar B+C)(\bar A+\bar B+\bar C)}$$

**С помощью карт Вейча:**

1) Перенести ДНФ функции на карту Вейча
2) Для ячеек с нулями сформировать дизъюнкции по правилу, что если ячейка находится в области, где некоторая переменная находится в прямом виде, то в дизъюнкции для этой ячейки она должна быть в инвертированном виде
3) Объединить все дизъюнкции с помощью конъюнкции.

**Пример**




$$\underbrace{\bar A B \bar C}$$

$$\underbrace{(A+\bar B+C)(A+B+C)(A+B+\bar C)}$$

$$f = A + BC$$

# Нахождение сокращенных и минимальных КНФ. Перевод из КНФ в ДНФ

**Поиск сокращенной формы:**

1) представить заданную функцию в СДНФ
2) найти СДНФ инверсии исходной функции
3) поиск сокращенной ДНФ для инверсии (например методом Квайна)
4) проинвертировать результат по де Моргану

**Поиск тупиковых и минимальных форм:**

1) представить заданную функцию в СДНФ
2) найти СДНФ инверсии исходной функции
3) поиск сокращенной ДНФ для инверсии (любым методом, например Квайна)
4) поиск тупиковых форм ДНФ инверсии (методом Петрика или по карте Вейча)
5) проинвертировать полученные формулы по де Моргану — получен список тупиковых КНФ исходной функции
6) формулы с минимальным числом вхождений аргументов будут минимальными КНФ для исходной функции

**Перевод из КНФ в ДНФ**

1) раскрытие скобок КНФ
2) метод инвертирования:
    а) проинвертировать функцию в КНФ используя закон де Моргана — получена ДНФ инверсии
    б) ДНФ инверсии отметить на карте Вейча нулями, остальные клетки занять единицами
    в) по СДНФ функции на карте Вейча найти ДНФ.