Логика высказываний

Опр Высказывание — утверждение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.

Пример:

"Сейчас пасмурная погода"

Сложные высказывания соединены словами-связками: "и", "или", "только если", "если ..., то", "тогда и только тогда"

Пример:

"Сейчас пасмурная погода И я вышел гулять в парк"

2

бинарность связок высказываний!

"Маше можно сладкое ИЛИ у Маши есть синий мяч"

$f(x, y) = x^2 + y^2$

Опр Арность операций (или функций) — число аргументов данной операции (функции)

Опр Операнд — аргумент операции

$\vee$

$a \circ b$

Основные логические операции.

Опр Конъюнкция — операция логического "и", обозначается $\wedge$

Опр Дизъюнкция — операция логического "или", обозначается $\vee$

Пример:

$f = a \wedge b$

"Сейчас пасмурная погода И я вышел гулять в парк"

$a \vee b$

"Маше можно сладкое ИЛИ у Маши есть синий мяч"

Запись через операции математической логики:

Унарные операции:

Опр Отрицание — операция логического "не", отрицание некоторого высказывания, инверсия, обозначается $\neg b$

$\bar{b}$

Также к унарным операциям относятся: $1, \; 0, \; b$

Таблицы истинности

Используются для демонстрирации при каких условиях достигается истина или ложь

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	$\neg(a)$
0	1
1	0

T, F

if (&)

else

true

if (||)

Как строить таблицу:

2^n

c	a	b
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Пример:

a = "Мальчик любит футбол" 0 1
b = "Мальчик любит гольф" 0 1
c = "Мальчик любит теннис" 0 1

Высказывание: "Мальчик любит футбол и не верно, что он любит гольф или теннис"

$f = a \wedge \neg(b \vee c)$

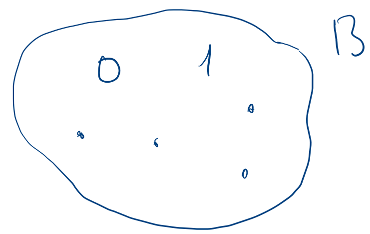
a	b	c	$b \vee c$	$\neg(b \vee c)$	$a \wedge \neg(b \vee c))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Булева алгебра. Аксиомы.

Теория множеств + логика высказываний

Опр Булева алгебра — множество B, в которое входят элементы 0 и 1, на котором заданы бинарные операции конъюнкции и дизъюнкции, и унарная операция отрицания и выполняются следующие аксиомы (законы) для всех a, b, c из B:

if (&)



Закон коммутативности

$a \wedge b = b \wedge a$

$a \vee b = b \vee a$

Закон ассоциативности

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Закон дистрибутивности

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Закон тождества

$a \wedge 1 = a$

$a \vee 0 = a$

Закон дополнения

$a \vee \overline{a} = 1$

$a \wedge \overline{a} = 0$

Опр Булево множество — множество B, состоящее только из элементов 0 и 1

В данном курсе будет рассмотрена булева алгебра на булевом множестве элементов, потому заявленные ранее операции "преобразуются" и обладают следующими свойствами:

$$
\begin{array}{lll}
0 + 0 = 0 & \quad 0 \cdot 0 = 0 & \\
0 + 1 = 1 & \quad 0 \cdot 1 = 0 & \quad \overline{0} = 1 \\
1 + 0 = 1 & \quad 1 \cdot 0 = 0 & \quad \overline{1} = 0 \\
1 + 1 = 1 & \quad 1 \cdot 1 = 1 &
\end{array}
$$

$(+, \cdot, \overline{\ })$ $\Leftarrow$

Свойства операций булевой алгебры

Th Закон единственности дополнения

Дополнение произвольного элемента x единственным образом определяется его свойствами:

$x+\overline{x}=1$, $x\cdot\overline{x}=0$, $x\cdot x^*=0$, $x+x^*=1$ $\qquad \overline{x}\overset{?}{=}x^*$

Proof:

$\overline{x}=\overline{x}\cdot 1$ – з. тождества

$=\overline{x}(x+x^*)$ – из утв. th

$=\overline{x}\cdot x+\overline{x}\cdot x^*$ – по дистриб.

$=0+\overline{x}\cdot x^*$ – по з. дополн.

$=\overline{x}\cdot x^*$

$x^*=x^*\cdot 1$ – з. тождества

$=x^*(x+\overline{x})$ – з. дополн

$=x^*x+x^*\cdot\overline{x}$ – по дистриб

$=0+x^*\cdot\overline{x}$ – по усл. th.

$=x^*\cdot\overline{x}$

$\overline{x}=x^*$ ч.т.д.

Теоремы одной переменной

Th Закон идемпотентности

$a + a = a$

$a \cdot a = a$

Proof:

$a + a = a$

$a + a = (a + a) \cdot 1$ — по з. тождества

$= (a + a) \cdot (a + \bar{a})$ — з. дополн

$= a + (a \cdot \bar{a})$ — по дистриб.

$= a + 0$ — з. дополн

$= a$ — з. тождества

Th Свойство констант

$a + 1 = 1$

$a \cdot 0 = 0$

Proof:

$a + 1 = (a + 1) \cdot 1$ — тожд.

$= (a + 1)(a + \bar{a})$ — дополн

$= a + (1 \cdot \bar{a})$ — дистриб

$= a + \bar{a}$ — тождеств.

$= 1$ — дополн.

Th Закон инволюции

$\bar{\bar{a}} = a$

Proof: $a^* = \bar{a}$

$(\bar{a})$

$(\bar{a}) + (\bar{\bar{a}}) = 1$

$\bar{a} \cdot \bar{\bar{a}} = 0$

$a + \bar{a} = 1$

$a \cdot \bar{a} = 0$

з. дополн

$a^* + \overline{a^*} = 1$

$a^* \cdot \overline{a^*} = 0$

з. дополн.

$a + \bar{a} = 1$

$a \cdot \bar{a} = 0$

$\bar{\bar{a}} + \bar{a} = 1$

$\bar{\bar{a}} \cdot \bar{a} = 0$

по з. единств. дополн.

$a = \bar{\bar{a}}$.

Теоремы поглощения и склеивания

Th Теорема поглощения

$$x+(x\cdot y)=x$$

$$x\cdot(x+y)=x$$

Proof:

$$x+(x\cdot y)=(x\cdot 1)+(x\cdot y) \text{ - з. тождества}$$

$$=x\cdot(1+y) \text{ - дистриб.}$$

$$=x\cdot 1 \text{ - св-во констант}$$

$$=x \text{ - з. тождества.}$$

СКНФ

СДНФ.

Th Теорема склеивания

$$x\cdot y+x\cdot\bar{y}=x$$

$$(x+y)\cdot(x+\bar{y})=x$$

Proof:

$$x\cdot y+x\cdot\bar{y}=x(y+\bar{y}) \text{ - дистриб}$$

$$=x\cdot 1 \text{ - дополн}$$

$$=x$$

Законы де Моргана

Th Законы де Моргана

$$\overline{(x+y)} = \bar{x}\cdot\bar{y} \qquad \overline{x\cdot y} = \bar{x}+\bar{y}.$$

Proof: $\overline{(x+y)} = \bar{x}\cdot\bar{y}$.

Нужно док-ва:

1) $(x+y)+(\bar{x}\cdot\bar{y}) = 1$
2) $(x+y)\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y}) = 0$
3) по з-единств дополнения

$x+y=a \qquad \bar{x}\cdot\bar{y}=b$

$a+b=1 \Rightarrow b=\bar{a} \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y}=\overline{(x+y)}$

$a\cdot b=0$

Док-во: 1) $(x+y)+\bar{x}\cdot\bar{y} = (x+y+\bar{x})(x+y+\bar{y})$ – дистриб.

$=(x+\bar{x}+y)(x+y+\bar{y})$ – коммут.

$=(1+y)\cdot(x+1)$ – з. дополн

$=1\cdot 1 = 1$

$a + b\cdot c = (a+b)(a+c)$, $a = x+y$, $b = \bar{x}$, $c = \bar{y}$

2) $(x+y)\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y}) = (\bar{x}\cdot\bar{y})\cdot(x+y)$ – по коммут

$=(\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot x)+(\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot y)$ – дистриб

$=(\bar{x}\cdot x\cdot\bar{y})+(\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot y)$ – коммут.

$=(0\cdot\bar{y})+(0\cdot\bar{x})$ – по дополн.

$=0$

3) з. единств дополнения: $(x+y)+\bar{x}\cdot\bar{y}=1$, $(x+y)\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y})=0$

$(x+y)+(\overline{x+y})=1$, $(x+y)(\overline{x+y})=0$

$\Downarrow$ з. единств дополн

$\bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{x+y}$. ч.т.д.