Задача 17.

Из урны, в которой было 4 белых и 2 черных шара, переложен один шар в другую урну, в которой находилось 5 черных шара и два белых. После перемешивания из последней урны вынимают 4 шара. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа черных шаров, вынутых из второй урны. Найти вероятность того, что из нее будет извлечено:

а) по крайней мере, два шара;

б) не более двух шаров.

Урна №1: 4Б & 2Ч $\xrightarrow{1\text{ ШАР.}}$ Урна №2: 2Б & 5Ч

$\xrightarrow{+1Б}$ 3Б & 5Ч $\qquad$ $\xrightarrow{+1Ч}$ 2Б & 6Ч

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Вынимают 4 шара.}}$

Число, достанных черных шаров из последней урны из 4-х шаров X — случайная величина, принимающая значения 0, 1, 2, 3, 4. Найдем вероятности:

$p_0 = P\{X=0\} = 0$

$$p_1 = \frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} \cdot \frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_6^1 \cdot C_2^3}{C_8^4} \cdot \frac{C_2^1}{C_6^1} = 1/21 \qquad (2<3 \Rightarrow 0)$$

$$p_2 = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^4} \cdot \frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_6^2 \cdot C_2^2}{C_8^4} \cdot \frac{C_2^1}{C_6^1} = 5/14$$

$$p_3 = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} \cdot \frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_6^3 \cdot C_2^1}{C_8^4} \cdot \frac{C_2^1}{C_6^1} = 10/21$$

$$p_4 = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} \cdot \frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_6^4 \cdot C_2^0}{C_8^4} \cdot \frac{C_2^1}{C_6^1} = 5/42$$

(синий) — вероятность, с которой мы перекладываем 1 шар в новую урну.

(зелёный) — вероятность достать X черных и $(4-X)$ белых шаров.

X	0	1	2	3	4
P	0	1/21	5/14	10/21	5/42

— ряд распределения.

$$F(t) = \sum_{i:x_i<t} p_i$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ 1/21, & t \in (1;2] \\ 1/21 + 5/14 = 17/42, & t \in (2;3] \\ 17/42 + 10/21 = 37/42, & t \in (3;4] \\ 1, & t > 4 \end{cases}$$

— функция распределения.

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

$$EX = \underset{0}{0 \cdot 0} + \underset{1/21}{1 \cdot 1/21} + \underset{5/7}{2 \cdot 5/14} + \underset{10/7}{3 \cdot 10/21} + \underset{10/21}{4 \cdot 5/42} =$$

$= 8/3 = 2.67$ — мат. ожидание.

$DX = E(X^2) - (EX)^2$

$$E(X^2) = \underset{0}{0 \cdot 0} + \underset{1/21}{1^2 \cdot 1/21} + \underset{10/7}{2^2 \cdot 5/14} + \underset{30/7}{3^2 \cdot 10/21} + \underset{40/21}{4^2 \cdot 5/42} =$$

$= 23/3$

$DX = 23/3 - (8/3)^2 = 5/9$ — Дисперсия

$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \sqrt{5}/3 \approx 0.74$ — среднее квадратич. отклонение.

$mod(x) = 3 \quad (10/21 - MAX)$

$P(X \ge 3) = 10/21 + 5/42 = 25/42 > 1/2$

$P(X \le 3) = 1/21 + 5/14 + 10/21 = 37/42 > 1/2$ $\Rightarrow$ $med(x) = 3$

$P(2Ч \ge) = p_2 + p_3 + p_4 = 20/21 \approx 0.95$

$P(2Ч \le) = p_0 + p_1 + p_2 = 17/42 \approx 0.40$