# <u>БЛОК “ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА”</u>

1. **Рациональные и иррациональные числа. Бесконечные десятичные дроби.**
   **<u>def</u>**
   Рациональные: $q \in Q \Leftrightarrow \exists z \in Z, \exists n \in N : q = z/n$ (несократимая дробь)

   **<u>def</u>**
   Иррациональные: $i \in I \Leftrightarrow \forall z \in Z, \forall n \in N : i \neq z/n$
   (i - непериодическая десятичная дробь!)

   **<u>def</u>**
   Бесконечная десятичная дробь есть число, представляемое в виде $\pm \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$
   записать это можно как $\pm a_0, a_1 a_2 \ldots$, причем $a$ - десятичная цифра

2. **Стабилизация последовательности.**
   **<u>def</u>**
   $\{x_n\}$ - стабилизируется к C $\Leftrightarrow \exists n_0\ \forall n > n_0 : x_n = C$
   (обозначается двумя стрелочками к C)

   **<u>def</u>**
   для целых чисел: последовательность целых чисел $a_n$ стабилизируется к числу a, если начиная с некоторого номера все члены последовательности равны этому числу.

   **<u>def</u>**
   для вещественных чисел: пусть дана неотрицательная последовательность $a_n = a_{0n}, a_{1n}a_{2n}\ldots$ Она стабилизируется $a=a_0,a_1a_2\ldots$ если $a_{0n}$ стабилизируется к $a_0$, $a_{1n}$ стабилизируется к $a_1$ и т.д. То есть каждый разряд члена последовательности стабилизируется к соответствующему разряду числа, к
   которому стабилизируется вся последовательность.
   N.B.: если последовательность монотонна и ограничена сверху, то она стабилизируется.

3. **Основные свойства действительных чисел(1-5)**
   <u>Свойства порядка</u> ($\forall a, b, c \in R$):
   - $(a < b)$ xor $(a > b)$ xor $(a = b)$
   - $a < b, \exists c \in R : a < c < b$
   - $(a < b)$ and $(b < c) \Rightarrow (a < c)$ (транзитивность)

   <u>Свойства операции сложения и вычитания</u> ($\forall a, b, c \in R$):
   - $a + b = b + a$ (коммутативность)
   - $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
   - $a + 0 = a$ (существует единственный 0 - нейтральный элемент для сложения)
   - $a + (-a) = 0$
   - $a - b = a + (-b)$

- $a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)$

Свойства умножения и деления ($\forall a, b, c \in R$):

- $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность)
- $\exists 1! : a \cdot 1 = a$ (1 - нейтральный элемент для умножения)
- $a \cdot 0=0$
- $-a = (-1) \cdot a$
- $a \cdot (1/a) = 1$ $(a \neq 0)$
- $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)
- $a < b \Rightarrow \forall c > 0 : (a \cdot c) < (b \cdot c)$

Свойство Архимеда:

$\forall a \in R\ \exists n \in N: a < n$

Свойство непрерывности:

Пусть заданы два непустых множества

$A \subset R$ и $B \subset R$, причем для любых двух чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$. Тогда существует число $\xi \in R$, такое, что для всех чисел $a \in A$ и $b \in B$ справедливо соотношение $a \leq \xi \leq b$

(доказывается леммой о вложенных сегментах)

4. **Лемма о вложенных сегментах.**

**Th**

У последовательности вложенных сегментов, длина которых стремится к нулю, существует единственное число С, которое принадлежит всем сегментам.

$\delta_n = [a_n : b_n], \quad \delta_{n+1} \subset \delta_n, \quad |b_n - a_n| \to 0 \iff |b_n - a_n| < \varepsilon, \quad \exists!\, c \in \delta_n\ \forall n.$

**Доказательство:**

- По-условию: $[a_n; b_n] \subset [a; b]$, $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n] \Rightarrow a_{n+1} \in [a_n; b_n]$
- $a_{n+1} \geqslant a_n, \forall n \Rightarrow \{a_n\}$ монотонно возрастает
  $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n, \forall n \Rightarrow \{a_n\}$ ограничена сверху
  Значит, $\{a_n\}$ стабилизируется к С. Аналогично можно сказать и про $\{b_n\}$.
- Имеем: $\forall n$: $a_n \leqslant C \leqslant b_n$ . Существование С доказано!
- Предположим, что $\exists C' < C$, то есть $\varepsilon = C - C' > 0$. По определению $|b_n - a_n| < \varepsilon$ , тогда $[C'; C] \subset [a_n; b_n] \Rightarrow$

  $a_n \leqslant C' \Rightarrow -a_n \geqslant -C' \Rightarrow C - C' \leqslant C - a_n$

  $C \leqslant b_n \Rightarrow C - a_n \leqslant b_n - a_n$

  Поэтому, $\varepsilon = C - C' < C - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$ - неверно

5. **Ограниченные множества. Точная верхняя и точная нижняя грани множества. Теорема о существовании точной верхней грани.**

**def**

Числовое множество X называется ограниченным сверху, если существует число M такое, что $x \leq M$ для всякого элемента x из множества X . $\exists M\ \forall x \in X : x \leq M$

**def**

Числовое множество X называется ограниченным снизу, если существует число m такое, что $x \geq m$ для всякого элемента x из множества X . $\exists m\ \forall x \in X : x \geq m$

**def**

Числовое множество X называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.$\exists M, m\ \forall x \in X : m \leq x \leq M$

NB: Пустое множество будем считать ограниченным по определению

**Th**

Числовое множество X ограничено тогда и только тогда, когда существует число C такое, что для всех элементов x из этого множества выполняется неравенство $|x| \leq C$

**def**

Точная верхняя грань ($\sup\{x_n\}$) - наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество сверху.

sup - “supremum”

**def**

Точная нижняя грань ($\inf\{x_n\}$) - наибольшее  из всех чисел, ограничивающих множество снизу.

inf - “infimum”

**Th**

Непустое мн-во X - ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup X$

**Доказательство:**

- Пусть Y - множество всех чисел, ограничивающих X, тогда
  $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leqslant y$
- В силу непрерывности действительных чисел:
  $\forall x \in X, \forall y \in Y, \exists \alpha \in R: x \leqslant \alpha \leqslant y$
  $\forall x \in X : x \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha$ ограничивает множество X сверху
  $\forall y \in Y : \alpha \leqslant y \Rightarrow \alpha$ - наименьшее из всех чисел, ограничивающих X
- Значит, по определению, $\alpha = \sup X$. Теорема доказана.

**<u>БЛОК "ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ СВОЙСТВА.</u>**
**<u>ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ"</u>**

6. **Числовая последовательность. Предел. Необходимое условие сходимости. Утверждение об ограниченности сходящейся последовательности.**

**<u>def</u>**

Числовая последовательность - $\{x_n\}$ числовая последовательность, если каждому $n \in N$ ставится во взаимно однозначное соответствие, согласно определенному правилу, число $x_n$.

**<u>def</u>**

Предел - $x_n \to a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

Словами: Число a - предел последовательности, если ее значения отличаются от a сколь угодно мало, начиная с некоторого индекса

**<u>def</u>**

$\{x_n\}$ - сходящаяся $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ имеет конечный предел.

<u>Необходимое условие сходимости</u>:

$\{x_n\}$ должна быть ограниченной!

<u>Необходимое и достаточное условие сходимости</u>:

$\{x_n\}$ должна быть монотонной и ограниченной (см. п.10) + критерий Коши

**<u>Th:</u>**

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена

**<u>Доказательство:</u>**

Так как $\{x_n\} \to a$, то $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $|x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| - |a| < |x_n - a| < 1 \Rightarrow$

$|x_n| < |a| + 1 \Rightarrow \exists M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a| + 1) \Rightarrow x_n$ - ограничена

7. **Теорема о сохранении знака сходящейся последовательности. Предельный переход в неравенствах. Теорема о трех последовательностях.**

**<u>Th</u>**

Сохранение знака: $\{a_n\} \to a, a > 0\ (a < 0) \Rightarrow \exists n_0\ \forall n > n_0 : a_n > 0\ (a_n < 0)$

**<u>Доказательство:</u>**

Возьмем $\varepsilon = a/2 > 0$, тогда по определению предела:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < a/2$

$0 < a - a/2 < a_n < a + a/2 \Rightarrow a_n > 0$.

**<u>Th</u>**

Предельный переход: $\{a_n\} \to a, \{b_n\} \to b, \exists N\ \forall n > N : a_n < b_n \Rightarrow a \leqslant b$

**<u>Доказательство:</u>**

- Предположим обратное: $a > b$
- По определению предела:
  $\forall\varepsilon > 0$
  $\exists N_1(\varepsilon)\ \forall n_1 > N_1 : |a_{n1} - a| < \varepsilon$
  $\exists N_2(\varepsilon)\ \forall n_2 > N_2 : |b_{n2} - b| < \varepsilon$

$n = \max(n_1, n_2)$.
Возьмём $\varepsilon = (a - b)/2$.

- $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - (a - b)/2 < a_n < a + (a - b)/2 \Rightarrow$ $(a + b)/2 < a_n < (3a - b)/2$
- $-\varepsilon < b_n - b < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \Rightarrow b - (a - b)/2 < b_n < b + (a - b)/2 \Rightarrow$ $(3b - a)/2 < b_n < (a + b)/2$
- $a_n > (a + b)/2 > b_n \Rightarrow a_n > b_n$ , что противоречит условию ($a_n < b_n$) $\Rightarrow$ Наше предположение неверно $\Rightarrow a \leqslant b$.

<u>**Th**</u>
О трех последовательностях: $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, $\{x_n\} \to a \neq \infty$, $\{z_n\} \to a \Rightarrow \{y_n\} \to a$
<u>**Доказательство:**</u>

- По определению предела: $\forall\varepsilon > 0$
  $\exists N_x(\varepsilon)\ \forall n > N_x : |x_n - a| < \varepsilon$
  $\exists N_z(\varepsilon)\ \forall n > N_z : |z_n - a| < \varepsilon$
  Из условия: $\exists n_0\ \forall n > n_0 : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$
- Возьмем $N = \max(N_x, N_z, n_0)$, тогда для $\forall n > N$ имеем:
  $|x_n - a| < \varepsilon$ (1)
  $|z_n - a| < \varepsilon$ (2)
  $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ (3)
- Поиграем с неравенствами:
  (1) $\Rightarrow a - \varepsilon < x_n$
  (2) $\Rightarrow z_n < a + \varepsilon$
  Учитывая (3): $a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$
  То есть $\{y_n\} \to a$.

8. **Арифметические действия с пределами последовательностей.**
<u>**Доказательства по Фихтенгольцу:**</u>
Данные доказательства опираются на второе определение предела последовательности по Фихтенгольцу: постоянное число $a$ есть предел $x_n$, если разность между ними есть бесконечно малая величина.

Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, тогда $x_n$ и $y_n$ можно представить как $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n$ и $\beta_n$ - бесконечно малые.

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

- $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$
- $\alpha_n$ и $\beta_n$ - б.м. $\Rightarrow (\alpha_n \pm \beta_n)$ - б.м. $\Rightarrow \lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

$$\lim (x_n \cdot y_n) = ab$$

- $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n\beta_n)$
- $(a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n\beta_n)$ - б.м. $\Rightarrow \lim (x_n \cdot y_n) = ab$.

$$\lim (x_n / y_n) = a / b$$

- $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b + \beta_n)}$

- $\alpha_n$ и $\beta_n$ - б.м. $\Rightarrow \dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}$ - б.м. $\Rightarrow lim\ (x_n / y_n) = a / b$

9. **Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Теорема о сумме бесконечно малых. Теорема о произведении ограниченной и бесконечно малой величины.**

**def**

$\alpha$ - б.м $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \alpha < \varepsilon$

**def**

$\beta$ - б.б $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \beta > \varepsilon$

**def**

Если x - б.м., то 1/x - б.б

**Th**

Алгебраическая сумма беск. мал. величин есть беск. мал. величина

**Доказательство:**

Пусть $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, n - конечное число

$\forall\varepsilon > 0\ \ |x_1| < \varepsilon/n,\ \ |x_2| < \varepsilon/n,\ \ \ldots, |x_n| < \varepsilon/n$

$T = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| < n * \varepsilon/n = \varepsilon$

$S \leqslant T < \varepsilon \Rightarrow S \rightarrow 0$

**N.B:** Когда речь идет о беск. мал. величине, то ее знак нам не важен

**Th**

Произведение беск. мал. величины и ограниченной величины есть беск. мал. величина

**Доказательство:**

x - б.м.

y - огранич. $\Rightarrow \exists M > 0\ |y| < M$

$\forall\varepsilon > 0\ \ |x| < \varepsilon/M$

$|x * y| = |x| * |y| < \varepsilon/M * M = \varepsilon$

$x * y \leqslant |x * y| < \varepsilon \Rightarrow x * y \rightarrow 0$

**Следствия:**

- Если беск. мал. величину умножить на число, то получится беск. мал. величина
- Произведение двух беск. мал. величин есть беск. мал. величина
- Произведение конечного числа беск. мал. величин есть беск. мал. величина(обобщение предыдущего следствия)
- Любая целая положительная степень беск. мал. величины есть беск. мал. величина

**Сравнение бесконечно малых величин:**

Пусть $\alpha \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$. Обозначим за A следующее: $\frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow A$. Если:

- A = 1, то $\alpha \sim \beta$ (являются эквивалентными бесконечно малыми)
- $A \neq 0$, то $\alpha$ и $\beta$ одного порядка малости
- $\alpha/(\beta^k) \rightarrow A \neq 0$, то $\alpha$ порядка малости k относительно $\beta$

- $A = 0$, то $\alpha$ является бесконечно малой более высокого порядка чем $\beta$
- $A = \infty$, то $\alpha$ является бесконечно малой более низкого порядка чем $\beta$

**10. Теорема о существовании предела у монотонно возрастающей последовательности.**

**Th**

$\{a_n\}$ монотонно возрастает и $\{a_n\}$ - ограничена сверху $\Rightarrow \exists\lim_{n\to\infty}(a_n) = \sup\{a_n\}$

**Доказательство**:

- Имеем: $a_{n+1} > a_n$, так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists\sup\{a_n\} = a$, что значит: $\forall n$: $a_n \leqslant a$, также $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : a_n > a - \varepsilon$
- $a - \varepsilon < a_n < a$
  $a - \varepsilon < a_n < a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \to a$

---

**11. Число e**

См. Конспект, который нам скидывали или другой адекватный источник.

**12. Приближенное вычисление числа e**

См. Конспект, который нам скидывали или другой адекватный источник.

---

**13. Критерий сходимости Коши.**

**Th**

$\{a_n\}$ - сходящаяся $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N, \forall m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon$

**Доказательство**:

1. Необходимость (стрелка вправо)

- Пусть $a_n \to a$ , тогда $\forall\varepsilon > 0$:
  $\exists N_1(\varepsilon/2)\ \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2$
  $\exists N_2(\varepsilon/2)\ \forall m > N_2 : |a_m - a| < \varepsilon/2$
- $|a_n - a| < \varepsilon/2$, $|a_m - a| < \varepsilon/2$, $|(a_n - a) + (a - a_m)| = |a_n - a_m|$
  $|(a_n - a) + (a - a_m)| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

2. Достаточность (стрелка влево) - через подпоследовательности

- Пусть $\varepsilon = 1, \exists N(\varepsilon), n > N, m > N : |a_n - a_m| < 1$
- Зафиксируем $a_m$, пусть $a_m = a_0$
  $|a_n - a_0|<1$
  $|a_n| - |a_0| \leqslant |a_n - a_0| < 1 \Rightarrow |a_n| - |a_0| < 1$
  $|a_n| < 1+|a_0| \Rightarrow n > N$: $\{a_n\}$ - ограничена
  Значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса, можно выделить подпоследовательность $\{a_{nk}\}$, сходящуюся к конечному числу a.

- Докажем, что к a будет сходится вся последовательность.
  Пока что имеем: $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N, \forall m > N$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$
  Вместо $a_m$ возьмем член сходящейся подпоследовательности $a_{nk}$ и заменим $\varepsilon$ на $\varepsilon/2$.

$|a_n - a_{nk}| < \varepsilon/2$ ($n > N(\varepsilon/2)$, $n_k > N(\varepsilon/2)$).

Зафиксируем n, тогда $|a_n - a_{nk}| < \varepsilon/2$ - неравенство содержащее посл-ть $\{a_{nk}\}$, у которой хоть и исключено конечное число членов с $n_k \leqslant N(\varepsilon/2)$, но предел остался прежним.

При $k \to \infty$ $|a_n - a_{nk}| < \varepsilon/2 \sim |a_n - a| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow a_n \to a$.

14. **Подпоследовательность. Частичные пределы. Лемма Б.-В.**

**def**

Подпоследовательность пос-ти $\{x_n\}$ - это последовательность $\{x_{nk}\}$, полученная удалением из $\{x_n\}$ ряда ее членов без изменения порядка следования членов.

**def**

Если $\{x_{nk}\}$ - подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и существует $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{nk}) = A$ (конечный или бесконечный), то A будем называть частичным пределом последовательности $\{x_n\}$

**Th**

Для любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность ($\forall\{x_n\}\ \exists\{x_{nk}\} : x_{nk} \to a$)

**Доказательство:**

- $\{x_n\}$ - ограниченная числовая последовательность. Из ограниченности последовательности следует, что все её члены лежат на некотором отрезке числовой прямой, который обозначим $[a_0, b_0]$.
- Разделим данный отрезок пополам на два равных отрезка. Т.к. изначальный отрезок имел бесконечное кол-во элементов, то по крайней мере один из получившихся отрезков также содержит бесконечное число членов последовательности. Обозначим его как $[a_1, b_1]$.
- Повторим данную процедуру с отрезком: разделим его на два равных отрезка и выберем из них тот, на котором лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим его как отрезок $[a_2, b_2]$.
- Продолжая данный процесс получим последовательность вложенных отрезков,в которой каждый последующий является половиной предыдущего и содержит бесконечное число членов последовательности$\{x_n\}$.При этом длины отрезков стремятся к 0.
- В силу леммы о вложенных отрезках, существует единственная точка $\xi$, принадлежащая всем отрезкам: $a_m \le \xi \le b_m, m = 0,1,2\ldots$.
- По построению на каждом отрезке $[a_m, b_m]$лежит бесконечное число членов последовательности. Выберем последовательность $x_{k_m} \in [a_m, b_m]$, тогда данная последовательность так же будет сходиться к точке $\xi$.Это следует из того, что расстояние от $x_{k_m}$до $\xi$ не превосходит длины содержащего их отрезка $[a_m, b_m]$.

15. **Верхний и нижний предел. Критерий существования предела**

**def**

Частичный предел последовательности - предел ее подпоследовательности.

**def**
Верхний предел (lim sup*) последовательности - наибольший частичный.
Свойство:
$\limsup (x_n + y_n) \leqslant \limsup (x_n) + \limsup (y_n)$

**def**
Нижний предел (lim inf*) последовательности - наименьший частичный.
Свойство:
$\liminf (x_n + y_n) \geqslant \liminf (x_n) + \liminf (y_n)$

**Th**
Критерий сходимости: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a \Leftrightarrow \exists \liminf (a_n) = a, \exists \limsup (a_n) = a$
**Доказательство:**
- Докажем от обратного.
- Пусть нам известно, что $\liminf(a_n) = \limsup(a_n) = a$, тогда докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$.
- Пусть дано $\xi > 0$, тогда $\exists N_1(\xi)$, $n > N_1$: $\inf a_k > a - \xi$, при $k \geq n$.
- $\exists N_2(\xi)$, $n > N_2$: $\sup a_k < a + \xi$, при $k \geq n$.
- Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$, $N_2$ и $N_1$ - натуральные числа.
  Тогда: $a - \xi < a_n < a + \xi \Rightarrow |a_n - a| < \xi$ - определение предела.

*это обозначения из иностранной литературы, в отечественной верхний и нижний пределы обозначаются как пределы с чертой вверху или внизу соответственно, на коллоквиуме лучше использовать последний вариант.

N.B.: не путать верхний и нижний пределы с супремумом и инфинумом!

16. **Предельная точка множества. Теорема Б.-В.**
**Утверждение о предельной точке ограниченного множества**
**def**
$x_0$ - предельная точка множества E (озф), если в любой её окрестности существует бесконечное число точек множества E.

**Th**
Множество E - ограниченное, бесконечное, тогда $\exists\, x_0 \in E$, $x_0$ - предельная точка

**Утверждение о предельной точке ограниченного множества:**
$x_0$ - предельная точка множества E, E - бесконечное ограниченное множество, тогда $\exists\{x_n\}$ ; $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$
**Доказательство:**
- $\exists\, x_1 \neq x_0, x_2 \neq x_0, x_3 \neq x_0, \dots, \exists\{x_n\}$
- Множество E - ограниченное $\Leftrightarrow \exists M, m \in E$, $m \leqslant x \leqslant M \Rightarrow$
  $\Rightarrow \forall x_n$: $m \leqslant x_n \leqslant M$ $\forall n \in N$, $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ (по т. Больцано-Вейерштрассе) $\exists x_{nk} \to a$
- Докажем, что a - предельная точка:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N \Rightarrow |x_{nk} - a| < \varepsilon$ ; $a - \varepsilon < x_{nk} < a + \varepsilon \Rightarrow$ по определению a - предельная

БЛОК “ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ”

**17. Функция. Предел функции (3 определения). Эквивалентность определений. Критерий существования предела**

**def**

Функция - соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

**def 1**

$\lim_{x \to x_0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon): \forall x \in E: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (Определение по Коши)

**def 2**

$\lim_{x \to x_0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$ (Тоже определение по Коши)

НЕ забываем проставлять в нужных местах (где от $x_0$) на U выколотую точку!

**def 3**

$\lim_{x \to x_0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E, x_n \neq x_0$, сходящейся к $x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A (Определение по Гейне)

**Доказательство эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне:**

Соотношение $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in E \setminus a$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

То, что $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ , сразу следует из определений.

“Стрелка вправо”: Действительно, если $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$, то для любой окрестности V(A) точки A найдется проколотая окрестность $U_E(a)$ точки a в E такая, что для $x \in U_E(a)$имеем $f(x) \in V(A)$. Если последовательность $\{x_n\}$ точек множества E\a сходится к a, то найдется номер N такой, что при n > N будет $x_n \in U_E(a)$ и, значит, $f(x_n) \in V(A)$. На основании определения предела последовательности получаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

“Стрелка влево”: Пойдем от противного. Если A не является пределом f(x) при $E \ni x \to a$, то найдется окрестность V(A) такая, что при любом $n \in N$ в $\frac{1}{n}$ — окрестноститочки a найдется точка $x_n \in E \setminus a$ такая, что $f(x_n) \notin V(A)$ . Но это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к A, хотя последовательность $\{x_n\}$ стремится к a. Получили противоречие, тем самым доказали обратное.

Там, где в доказательстве фигурирует $U$ НЕ забываем писать выколотую точку над $U$!

**def** (предел слева)

$\lim_{x \to x_0 - 0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall x \in E\ x \in (x_0 - \delta, x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon$

**def** (предел справа)

$\lim_{x \to x_0 + 0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall x \in E\ x \in (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$

__Th__ (критерий существования предела функции)
$\lim_{x\to x0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \exists\lim_{x\to x0-0}(f(x)) = A$ and $\exists\lim_{x\to x0+0}(f(x)) = A$
__Доказательство:__

1. Необходимость (просто берем разные половинки окрестности из определения предела в точке $x_0$
2. Достаточность. $\lim_{x\to x0-0}(f(x)) = \lim_{x\to x0+0}(f(x)) = A \Rightarrow \exists\lim_{x\to x0}(f(x)) = A$
   - $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1(\varepsilon), \forall x \in E, x\in(x_0-\delta_1, x_0)$
     $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2(\varepsilon), \forall x \in E, x\in(x_0, x_0+\delta_2)$
   - Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда
     $\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon): \forall x \in E: 0<|x - x_0|<\delta \Rightarrow |f(x) - A|<\varepsilon$
     То есть $\lim_{x\to x0}(f(x)) = A$

18. **Арифметические действия с пределами.**

Пусть функции f(x) и g(x) имеют в точке a пределы B и C соответственно, тогда справедливы следующие выражения:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = B \pm C$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = B \cdot C$
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{C}$(Оговаривается, что $C \neq 0$)

__Доказательство:__
Пусть $\{x_n\}$ - произвольная сходящаяся к $a$ последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от $a$. В силу определения предела по Гейне последовательности значений функций $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к значениям B и C соответственно. Справедливы следующие суждения:
$\{ f(x_n) \pm g(x_n) \} \to B \pm C$(сумма и разность сходящихся последовательностей)
$\{ f(x_n) \cdot g(x_n) \} \to B \cdot C$(произведение сходящихся последовательностей)
$\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\} \to \frac{B}{C}$(отношение сходящихся последовательностей, $C \neq 0$)
Причем полученные последовательности также являются сходящимися. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Вышесказанное означает, что функции $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеют в точке $a$ пределы, равные $B \pm C$; $B \cdot C$; $\frac{B}{C}$ соответственно.

19. **Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о сохранении знака.**

__Th__
Предельный переход: если функции f(x) и g(x) определены в проколотой окрестности точки $x_0$, причем для любого x из этой окрестности $f(x) \leq g(x)$, $\lim\limits_{x\to x0}f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x0}g(x) = b$, то $a \leq b$.
__Доказательство:__

**Противное:** $A > B.\ \forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < 0{,}5|A - B|\ \exists\delta = \delta_\varepsilon : \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow$

$g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x), \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow g(x) < f(x)$ **противоречие** с 1)

Th
О сохранении знака: пусть f(x) непрерывна в точке $x_0$ и $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), тогда существует такая окрестность точки $x_0$, на которой функция имеет положительное (отрицательное) значение.
Доказательство:

Воспользуемся определением непрерывности функции в точке по Коши. Согласно этому определению имеется такая функция $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого $\varepsilon > 0$,
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Положим $\varepsilon = |f(x_0)|/2$. Тогда при $|x - x_0| < \delta(|f(x_0)|/2)$ имеем:
**(1)** $|f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|/2$.

Пусть $f(x_0) > 0$. Раскроем в (1) знак модуля и преобразуем неравенства:
$-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2;$
$f(x_0) - f(x_0)/2 < f(x) < f(x_0) + f(x_0)/2;$
$f(x_0)/2 < f(x) < 3f(x_0)/2.$

Итак, мы нашли окрестность $|x - x_0| < \delta(f(x_0)/2)$, на которой функция ограничена снизу положительным числом:
$f(x) > f(x_0)/2 > 0.$
Поэтому на этой окрестности функция имеет положительное значение:
$f(x) > 0.$
Для случая $f(x_0) > 0$ теорема доказана.

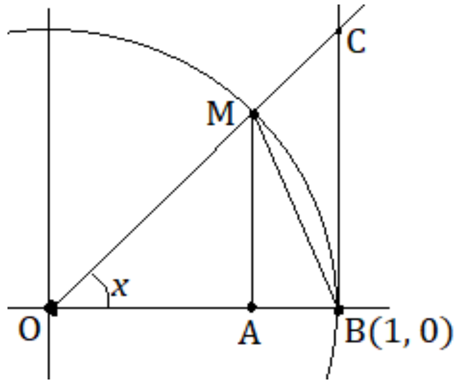
Теперь рассмотрим случай $f(x_0) < 0$. Также раскрываем в (1) знак модуля и преобразуем неравенства:
$-|f(x_0)|/2 < f(x) - f(x_0) < |f(x_0)|/2;$
$-|f(x_0)|/2 < f(x) + |f(x_0)| < |f(x_0)|/2;$
$-|f(x_0)|/2 - |f(x_0)| < f(x) < |f(x_0)|/2 - |f(x_0)|;$
$-3|f(x_0)|/2 < f(x) < -|f(x_0)|/2.$

Тем самым мы нашли окрестность $|x - x_0| < \delta(-f(x_0)/2)$, на которой функция ограничена сверху отрицательным числом:
$f(x) < -|f(x_0)|/2 < 0.$
Поэтому на этой окрестности $f(x) < 0$.

Теорема доказана.

## 20. Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, sin x ~ x.




- Пусть ∠MOA = x (радиан).
- MA = sin(x). Длина OB = 1. Длина CB = tg(x).$S_{\Delta MOB} < S_{сектора\ MOB} < S_{\Delta COB}$.
- Найдем площади по определению.
  $S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot MA = \frac{\sin x}{2}$
  $$S_{сектора\ MOB} = \pi\cdot\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$
  $$S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot CB = \frac{tg\ x}{2}$$
- Далее преобразуем тройное неравенство.
  $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\ x}{2}$ умножим все на 2/sin(x)> 0
  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \sim \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1$. Тогда по теореме о пределе промежуточной функции $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1$. Функция $\frac{\sin x}{x}$четная ⇒ $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = 1$.

21. **Предел монотонной функции**

Определим предельные точки множества E: s = sup(E), i = inf(E) (допустимо $i$ или $s = \pm\infty$), E - область определения f(x)

**<u>Th</u>**

Критерий существования предела монотонной функции: для того чтобы неубывающая на множестве E функция $f: E \to R$ имела
предел при $x \to s, x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограни-ограничена сверху, а для того чтобы она имела предел при $x \to i, x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.

22. **Критерий Б-К для предела функции.**

**<u>Th</u>**

Для того, чтобы функция  y =  f(x) имела в точке a конечный предел необходимо и достаточно, чтобы она  удовлетворяет в точке a <u>условию Коши</u>:
Если  для любого $\varepsilon > 0$ найдется отвечающее ему $\delta > 0$ такое, что $\forall x', x'' :\ 0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$, то справедливо $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

**<u>Доказательство:</u>**

1. <u>Необходимость:</u>
   Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу определения предела функции по Коши имеем: $\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists\delta > 0: \forall x', x'' :\ 0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ для соответствующих значений функции справедливы неравенства $|\ f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\ f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Воспользуемся свойствами модуля и поработаем с неравенствами: $|\ f(x') - f(x'')| = |(\ f(x') - b) + (b\ -\ f(x'')| \le |(\ f(x') -$

$b)| + |(b\ -\ f(x''))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, а это означает, что функция y = f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши.

2. Достаточность:

   Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к a и состоящая из чисел отличных от a ($x_n \neq a$). В силу определения предела по Гейне достаточно показать, что $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому b и что это число b одно и то же для всех сходящихся к a последовательностей $\{x_n\}$ при условии, что $x_n \neq a$.

   1) Сперва докажем, что для каждой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, отличных от a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ к некоторому пределу. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему, согласно условию Коши отвечающее ему число $\delta > 0$. В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к $a$ и в силу $x_n \neq a$ для $\delta > 0\ \exists N : 0 < |x_n\ - a| < \delta$ при $n \geq N$. Можно утверждать, что $\forall p \in \{1, 2, \ldots\}$ выполнено $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$. Получаем, что по условию Коши и из $0 < |x_n\ - a| < \delta$ и $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ вытекает, что при $n \geq N, \forall p \in \{1, 2, \ldots\} | f(x_{n+p}) - f(x_x)| < \varepsilon$, что означает фундаментальность последовательности $\{f(x_n)\}$. В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b.
   2) Теперь покажем, что для любых двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, все элементы которых отличны от a, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Предположим, что $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ сходятся к $b$ и $b'$ соответственно. Рассмотрим новую последовательность значений аргумента $x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$, сходящуюся к a и состоящую из чисел, отличных от a. В силу доказанного выше, последовательность значений функции $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots$ обязана сходится к некоторому пределу $b''$. Но любая подпоследовательность этой последовательности обязана сходится к тому же самому $b''$. Тогда подпоследовательность из элементов на четных местах и элементов на нечетных местах $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots$ сходятся к $b''$. Значит $b\ = b'\ = b''$.

## БЛОК “НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ”

**23. Непрерывность функции. Арифметические операции. Примеры.**

**def**

Функция непрерывна в предельной точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ и если существует предел $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = f(x_0)$.

**def**

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall\{x_n\}, x \in X, n \in N \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 : \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

**Th**

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены на одном и том же промежутке X и обе функции непрерывны в точке $x_0$, то в ней же непрерывны:

$f(x) \pm g(x)$

$f(x) \cdot g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Примеры:

1) Целая и дробная рациональные функции
2) Показательная функция
3) Логарифмическая функция
4) Гиперболические фенкции
5) Тригонометрические функции
6) Обратные тригонометрические функции

**24. Критерий непрерывности монотонной функции. Точки разрыва.**

**def**

Монотонная функция $f : E \to R$, заданная на отрезке $E = [a, b]$, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда множество ее значений само является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

При этом: $f(a) \le f(b)$, если $f$ - неубывающая функция

$f(a) \ge f(b)$, если $f$ - невозрастающая функция.

**def**

Если функция $f : E \to R$ не является непрерывной в некоторой точке a множества E, то эта точка называется точкой разрыва функции. Это можно написать в кванторах так:$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in E : |x - a| < \delta$ и $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$ ($a \in E$ - точка разрыва)

**25. Свойства непрерывных функций на сегменте [a;b].**

**Th**

Если функция непрерывна на отрезке [a; b], то она ограничена на этом отрезке.

**Доказательство:**

**Th**

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и $f(a)\cdot f(b) < 0$(эти значения разных знаков), то внутри отрезка [a; b] найдется такая точка d, что $f(d) = 0$

**Доказательство:**

https://1cov-edu.ru/mat-analiz/nepreryvnost-funktsii/na-otrezke/teorema-boltsano-koshi/#proof1

26. **Теорема Б-В о достижении sup и inf.**

**Th**

Непрерывная на отрезке [a,b] функция f достигает на нем своих нижней и верхней граней. Или, что тоже самое, достигает на отрезке своего минимума и максимума.

То есть существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, так что для любого $x \in [a,b]$, выполняются неравенства: $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.

NB: Различие между максимумом (минимумом) и верхней (нижней) гранью заключается в следующем: максимум (минимум) принадлежит множеству значений функции, а верхняя (нижняя) грань может не принадлежать этому множеству.

**Доказательство для максимума (верхней грани):**

- Пусть $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ - верхняя грань.
  Нам нужно показать, что $M = f(c)$, $c \in [a,b]$
- По определению верхней грани:
  $\forall x \in [a,b] : f(x) \le M$. $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a,b] : f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$
- Пусть $\varepsilon = 1/n$, тогда $\exists x_n \in [a,b] : M - \varepsilon < f(x_n) \le M$.
  Вычтем из всех частей M и умножим на -1 : $0 \le M - f(x_n) < 1/n$
  Таким образом, мы выделили последовательность аргументов $\{x_n\}$ и последовательность значений $\{f(x_n)\}$ такие, что:
  $a \le x_n \le b$ и $0 \le M - f(x_n) < 1/n$
- Преобразуем данной выражение : $|M - f(x_n)| < 1/n < 1/N < \varepsilon$
  Заметим, что $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1/\varepsilon : |M - f(x_n)| < \varepsilon$
  Значит, по определению предела последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$
- По теореме Вейерштрасса, $\exists \{x_{nk}\} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = c$
  Так как $a \le x_{nk} \le b$, то $a \le c \le b$
- $\{f(x_n)\} \longrightarrow M \Rightarrow \{f(x_{nk})\} \longrightarrow M$
- Если $k \longrightarrow \infty$, то $x_{nk} \longrightarrow c \in [a,b] \Rightarrow f(x_{nk}) \longrightarrow f(c)$ (в силу определения непрерывности по Гейне)
- Сходящаяся последовательность имеет единственный предел, поэтому $M = f(c)$. Теорема для максимума (верхней грани) доказана.
  (для нижней грани доказательство аналогичное)

27. **Теорема о непрерывности обратной функции.**

**def**

Пусть дана функция $f: X \to Y$, при этом $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) \ne f(x_2)$, тогда каждому элементу из У можно поставить в соответствие единственный элемент из X. Это “обратное” соответствие определяет функцию $f^{-1}: Y \to X$, которая называется обратной к функции f.

**Th**

Пусть функция f строго возрастает (убывает) и непрерывна на области определения D(f), являющейся промежутком. Тогда обратное соответствие $f^{-1}$ является функцией возрастающей (убывающей) и непрерывной в своей области определения $D(f^{-1}) = E(f)$, которая также является промежутком

## 28. 🙂Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

**def**

Функция $f : E \to R$ называется равномерно непрерывной на множестве $E \subset R$, если

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$

Полезно понимать следующие факты:

1) Если функция равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна в любой его точке (Просто подставляем в определение $x_1 = x, x_2 = a$ и видим, что определение непрерывности функции $f : E \to R$ в точке $a \in E$ удовлетворено)
2) Непрерывность функции НЕ влечет ее равномерную непрерывность в общем случае (пример - $f(x) = x^2$ непрерывная на $R$, но не является равномерно непрерывной на $R$, R - множество действительных чисел)

**Th**

Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке

**Доказательство:**

Предположим противное, что f(x) непрерывна на отрезке [a, b], но НЕ является равномерно непрерывной на нем. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся две точки $x_1$ и $x_2$ из [a, b] такие, что $|x_1 - x_2| < \delta$, но $| f(x_1) - f(x_2) | \geq \varepsilon$.

Выберем бесконечно малую последовательность положительных чисел $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in N$. Можно утверждать, что для указанного $\varepsilon > 0$ и для любого номера n найдутся две точки $x_n'$ и $x_n''$ отрезка [a, b] такие, что $|x_n' - x_2| < \frac{1}{n}$, но $| f(x_n') - f(x_n'') | \geq \varepsilon (*)$.

Так как последовательность $\{x_n'\}$ состоит из точек отрезка [a, b], то она ограничена и по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}'\}$. Предел $\xi$ указанной подпоследовательности будет также принадлежать отрезку [a, b] по следствию из теоремы(NB). В силу неравенства (*) последовательность $\{x_{k_n}''\}$ будет сходится к той же самой $\xi$.

Поскольку f(x) непрерывна в каждой точке отрезка [a, b], она непрерывна и точке $\xi$. (Если $\xi$ совпадает с a или b, то будем понимать под непрерывностью одностороннюю непрерывность.) Но тогда в силу определения непрерывности по Гейне, обе подпоследовательности соответствующих значений функции $\{f(x_{k_n}')\}$ и $\{f(x_{k_n}'')\}$ обязаны сходится к $f(\xi)$, т. е. разность указанных подпоследовательностей $\{f(x_{k_n}') - f(x_{k_n}'')\}$ обязана быть бесконечно малой. Это противоречит неравенству (*) для всех номеров $k_n$. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно!

NB:

Теорема: Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел A этой последовательности удовлетворяет неравенству $A \geq b$ ($A \leq b$).

Следствие из теоремы: Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ находятся на [a, b], то и предел A этой последовательности лежит на отрезке [a, b].

<u>**Заметки.**</u>

**1.** Доказательство:

В одну сторону:

Пусть множество X - ограничено. Пусть C = max(|m|, |M|). По свойствам модуля имеем следующие неравенства: x ≤ M ≤ |M| ≤C и x ≥ m ≥ -|m| ≥ -C => -C ≤ x ≤ C => |x| ≤ C.

В обратную сторону:

Имеем выполнение неравенства |x| ≤ C => -C ≤ x ≤ C. Если взять M = C и m = -C, то множество X ограничено по определению.

**2.** Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов.

def f(x) непрерывна слева в точке x0 ⇔ ∃f(x0-0) = $\lim\limits_{x\to x_{0\blacksquare}-0}$ f(x) = f(x0)

def f(x) непрерывна справа в точке x0 ⇔ ∃f(x0+0) = $\lim\limits_{x\to x_{0\blacksquare}+0}$ f(x) = f(x0)

def x0 - точка устранимого разрыва ⇔ ∃ $\lim\limits_{x\to x_{0\blacksquare}-0}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to x_{0\blacksquare}+0}$ f(x) ≠ f(x0)

Разрыв можно “устранить” если определить значение функции в x0

def x0 - точка разрыва первого рода, если ∃ $\lim\limits_{x\to x_{0\blacksquare}-0}$ f(x) ≠ $\lim\limits_{x\to x_{0\blacksquare}+0}$ f(x)

Применим термин “скачок”, значения f(x0+ 0) - f(x0+ 0) - конечное число.

def x0 - точка разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов при x ⟶ x0 не существует или бесконечен

**3.** Суперпозиция непрерывной функции.

Th Пусть функция $\varphi(y)$ определена в промежутке $Y$, а функция $f(x)$ - в промежутке $X$, причем значения $f(x)$ не выходят за пределы $Y$, когда x изменяется в $X$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x0 из $X$, а $\varphi(y)$ непрерывна соответствующей точке y0 = f(x0), то функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке x0

Доказательство:

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(y)$ непрерывна при y = y0, то по $\varepsilon$ найдется такое $\sigma > 0$, что из $|\, y - y_0| < \sigma \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$

С другой стороны, ввиду непрерывности f(x) при x = x0 по $\sigma$ найдется такое $\delta > 0$, что из $|\, x - x_0| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(x_0)| = |\, f(x) - y_0| < \sigma$.

По самому выбора числа $\sigma$ отсюда следует, что$|\,\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\,\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon$

Это на языке кванторов и доказывает непрерывность $\varphi(f(x))$ в точке x0.

**4.** Альтернативное доказательство арифметических свойств пределов

Помним: ($\forall\varepsilon_1 > 0, \exists N_x(\varepsilon_1)\ \forall n > N_x : |x_n - a| < \varepsilon_1$), ($\forall\varepsilon_2 > 0, \exists N_y(\varepsilon_2)\ \forall n > N_y : |y_n - b| < \varepsilon_2$)

(1) $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$

- Найдем $N(\varepsilon)$: $\forall\varepsilon > 0, \forall n > N : |x_n \pm y_n - (a \pm b)| < \varepsilon$
  $|x_n \pm y_n - (a \pm b)| = |x_n - a \pm (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
- Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$
- $N(\varepsilon) = \max(N_x(\varepsilon/2), N_y(\varepsilon/2) \Rightarrow \forall n > N(\varepsilon) : |x_n \pm y_n - (a \pm b)| < \varepsilon$
  Значит, по определению $\{x_n \pm y_n\} \to a \pm b$. Доказано.

(2) $\lim (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

- Найдем $N(\varepsilon)$: $\forall\varepsilon > 0, \forall n > N : |x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \varepsilon$
  $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - ay_n + ay_n - a \cdot b| = |(x_n - a) \cdot y_n + (y_n - b) \cdot a| \leqslant$
  $|(x_n - a)| \cdot |y_n| + |(y_n - b)| \cdot |a|$
- $\{y_n\} \to b \Rightarrow \exists M_y \forall n : y_n \leqslant M_y$ ($y_n$ ограничена, т.к. имеет предел)
  Получаем: $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leqslant |(x_n - a)| \cdot |y_n| + |(y_n - b)| \cdot |a| < \varepsilon_1 M_y + \varepsilon_1|a|$
- Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2M_y)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2|a|)$, $N(\varepsilon) = \max(N_x(\varepsilon/(2M_y)), N_x(\varepsilon/(2|a|))$
  тогда $\forall n > N : |x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \varepsilon$, то есть $\{x_n \cdot y_n\} \to a \cdot b$. Доказано.

(3) $\lim (x_n / y_n) = a / b$

// доказательство этого интересного факта мы оставляем читателю

(4) $\lim(C \cdot x_n) = C \cdot a$

- Пусть $\forall n\ y_n = C \Rightarrow \lim y_n = C$ (из определения предела)
- $\lim (y_n \cdot x_n) = \lim y_n \cdot \lim x_n = C \cdot \lim x_n = C \cdot a$. Доказано.

(5) $\lim |x_n| = |a|$

- $||A| - |B|| \leqslant |A - B|$ + определение предела = Доказано.\