Бинарные отношения

Опр Бинарное отношение R множеств A и B - подмножество декартова произведения AxB.

Если пара $(a, b) \in R$, то записывают aRb , т.е. a и b находятся в отношении R.

Если A = B, то R - подмножество AxA и тогда оно называется бинарным отношеним на A.

Пример: A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

18 пар

<больше>

$R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

<больше>

$R = \{\ldots (4,1), (4,2) \ldots\}$

R – <меньше простого числа>

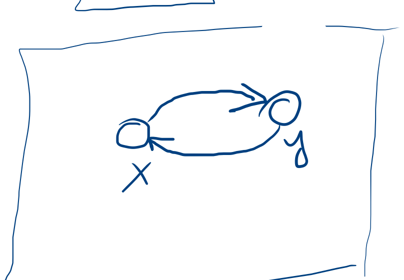
$R = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5)\}$

Пример: про родственные отношения.

R – является родственником

A – мн-во людей

$R = \{(x,y) \in A \times A : y \text{ – родств. } x\}$

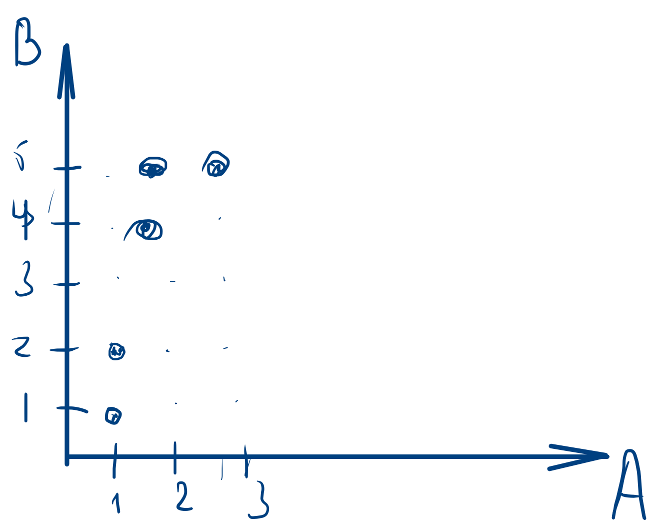


Способы задания бинарных отношений

1. Правило словесное описание $\{(x,y)\in A\times B : y>5\}$

2. Перечисление $\{(1,2),(3,1), \ldots\}$

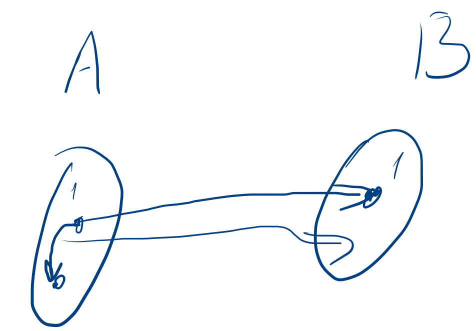
3. Табличный или на плоскости



$\{(1,1),(1,2),(2,4),(2,5),(3,5)\}$

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1

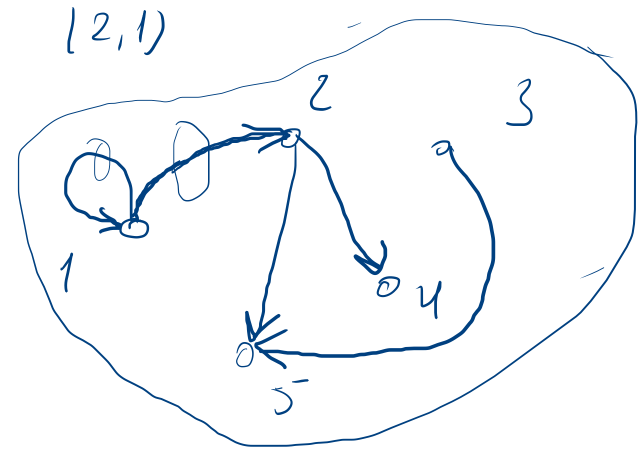
(x,y,z)

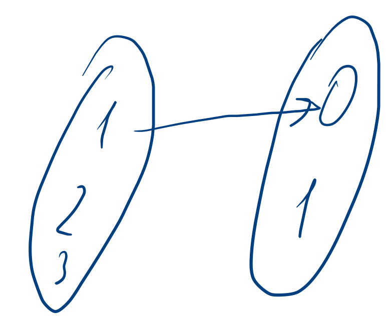


4. Граф

$E\subseteq V^2$

$(1,2)$
$(2,1)$

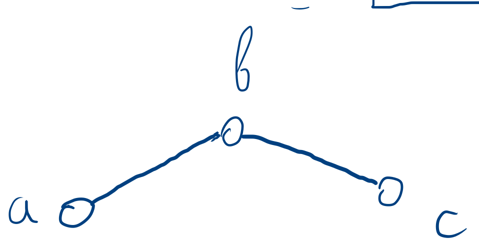




Опр Граф G(V, E) - множество вершин V и множество ребер E, т.ч.

(x,x)
(x,y)

Пример V = {a, b, c}, E = {{a, b}, {b, c}}.



R - связь по ребру

$R=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$

Обратное отношение

Опр Область определения отношения R на A и B - множество $x \in A$, т.ч. $\exists (x,y) \in R$

- множество всех ПЕРВЫХ координат упорядоченных пар из R

Опр Область значений отношения R на A и B - множество $y \in B$ т.ч. $\exists (x,y) \in R$

- множество всех ВТОРЫХ координат упорядоченных пар из R

Опр Обратное отношение

$\rceil R \subseteq A \times B$ - отношение на AxB, тогда

$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$ на $B \times A$.

$b R^{-1} a \Leftrightarrow aRb$

Пример R = {(1, r), (1, s), (3, s)}, тогда

$R^{-1} = \{(r,1), (s,1) (s,3)\}$

Пример R = {(x, y): y является мужем x}, тогда

$R^{-1} = \{(y,x)$, x явл женой y$\}$

Пример R = {(x, y): y является родственником x}, тогда

$R^{-1} = \{(y,x)$: x явл. родств. y$\}$

$R = R^{-1}$.

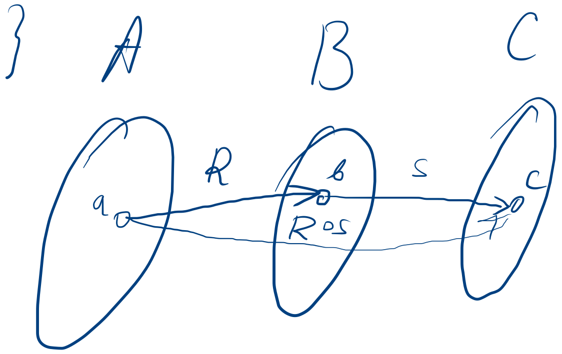
Композиция отношений

Опр Композиция отношений $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$

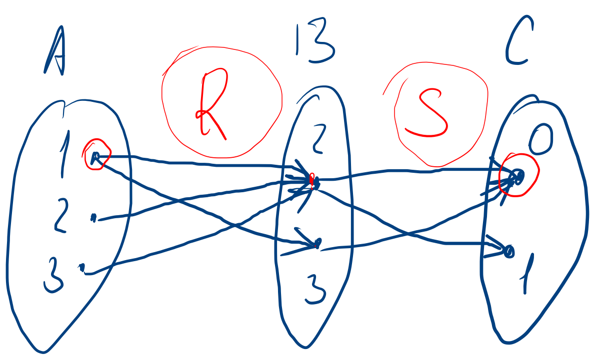
такое отношение на ~~B~~ A×C:

$$T = \{(a,c) : \exists\, b \in B,\ \text{т.ч. } (a,b) \in R,\ (b,c) \in S\}$$

$$T = R \circ S$$



Пример A = {1, 2, 3}, B = {2, 3}, C = {0, 1}



$R \subseteq A \times B$: $R = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,2)\}$

$S \subseteq B \times C$: $S = \{(2,0), (2,1), (3,0)\}$

$R \circ S \subseteq A \times C$:

$$\{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\}$$

Th Ассоциативность композиции отношений

A, B, C, D – мн-ва $\quad R \subseteq A \times B \quad S \subseteq B \times C \quad T \subseteq C \times D$

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

$$\{(\ \ ), (\ \ ), (\ \ )\}$$

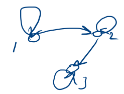
$$!\ (R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$$

$$!\ R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$$

Свойства бинарных отношений

1. Рефлексивность – $(\forall a \in A)\ aRa$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

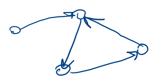


$\{(1,1), (2,2), (1,3), (4,4), (5,5), (6,6),$
$(2,1), (4,2), (6,3), (6,2) \ldots$

- отношение делимости
- каждая вершина графа имеет петлю
- главная диагональ матрицы состоит из единиц

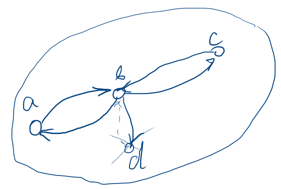
2. Антирефлексивность $(\forall a \in A)\ (a,a) \notin R$ $\quad a \neq a$

- отношение неравенства или перпендикулярности
- НИ ОДНА из вершин графа не имеет петель
- главная диагональ матрицы состоит из нулей



3. Симметричность $(\forall a, b \in A):\ aRb \Rightarrow bRa$

- отношение равенства, параллельности
- в графе есть ребро (y, x), если есть ребро (x, y)
- симметрия матрицы относительно главной диагонали



4. Асимметричность $(\forall a, b \in A)\ aRb \Rightarrow \nexists\, bRa$

- если в графе есть ребро (x, y), то точно НЕТ ребра (y, x)
- "находится в", "является ребенком"

5. Несимметричность $(\forall a, b \in A)\ aRb \Rightarrow bRa$ а может и не быть

- необязательность наличия путей в обе стороны, соединяющих точки

6. Антисимметричность $\forall a, b \in A\quad aRb$ и $bRa \Rightarrow a = b$

$a \le b \quad b \le a \quad a = b$

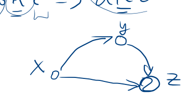
- отношение "<="

$R \quad S \qquad R \circ S$

7. Транзитивность не путать с композицией $(\forall a, b, c \in A):\ aRb$ и $bRc \Rightarrow aRc$

- отношение параллельности прямых
- если есть ребра (x, y) и (y, z), то есть и ребро (x, z)
- отношение "<"

$a < b < c \Rightarrow a < c$



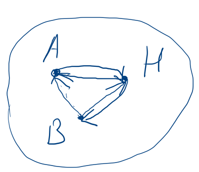
8. Интранзитивность $(\forall a, b, c \in A):\ aRb$ и $bRc \Rightarrow \nexists\, aRc$

- отношение "больше на 4"

$a = b + 4 \qquad b = c + 4 \not\Rightarrow a \neq c + 4$

9. Нетранзитивность

- отношение "знаком с"



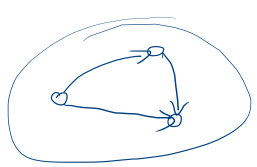
Пример A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\qquad \forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \overset{?}{=} b$

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), (4, 2)}

1. рефлексивн. +
2. симметрич. +

№	(a, b)	(b, a)
1	(1, 2)	(2, 1)
2	(1, 4)	(4, 1)
3	(3, 5)	(5, 3)

антисимметр.? ✗ $\quad (1,2)\quad (2,1)\quad 2 \mathrel{!=} 1$



3. транзитивность +

№	(a, b)	(b, c)	(a, c)
1	(1, 2)	(2, 1)	(1, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(1, 2)
3	(1, 2)	(2, 4)	(1, 4)

⋮