Задача 17.

Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(t) = \begin{cases} 2\exp(-2t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \exp(-2X)$ и $Z = 3X - 2$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y;

б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

$F_X(t)$: $t \geq 0$: $\int_0^t 2e^{-2t}dt = \Big/ u = -2t;\ du = -2dt;\ dt = \frac{du}{-2} \Big/ = \int_0^t \frac{2e^u \cdot du}{-2} = -\int_0^t e^u du = e^u \Big|_0^t = e^{-2t}\Big|_0^t = 1 - e^{-2t}$

$t < 0$: 0

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$F_Y(v)$: $D_v = \{x : f_X(t) < v\} = \{x : e^{-2X} < v\}$

- $v \leq 0$: $D_v = \varnothing$

  $F_Y(v) = P\{Y \in D_v\} = 0$

  $f_Y(v) = F_Y'(v) = 0$

- $v > 0$: $D_v = \{x : e^{-2X} < v\} = \{x : -2X < \ln(v)\} = \{x : x > -\frac{\ln(v)}{2}\}$

  $F_Y(v) = P\{Y \in D_v\} = P\{x > -\frac{\ln(v)}{2}\} = \int_{D_v}^{+\infty} f_X(t)\,dt = F_X(t)\Big|_{D_v}^{+\infty} = \underset{\lim\limits_{t\to\infty}(F_X(t))}{1} - F_X\left(\frac{-\ln(v)}{2}\right)$

  - $v \in (0;1]$: $-\frac{\ln(v)}{2} \geq 0 \Rightarrow F_Y(v) = 1 - \left(1 - e^{-2\cdot\left(\frac{-\ln(v)}{2}\right)}\right) = 1 - (1 - v) = v$

  - $v > 1$: $-\frac{\ln(v)}{2} < 0 \Rightarrow F_Y(v) = 1 - 0 = 1$

$$F_Y(v) = \begin{cases} 1, & v > 1 \\ v, & 0 < v \leq 1 \\ 0, & v \leq 0 \end{cases}$$

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt = 0 + \int_0^{\infty} 2t \cdot e^{-2t} \cdot dt = 2\int_0^{\infty} t \cdot e^{-2t}dt = 2\left(\frac{t \cdot e^{-2t}}{-2} - \int \frac{-e^{-2t}}{2}\right) = -t \cdot e^{-2t} + \int e^{-2t} = \left(-t \cdot e^{-2t} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)\Big|_0^{\infty} = 0 - (-1/2) = 1/2$

$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\,dt = 2\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}dt = 2\left(-\frac{t^2 \cdot e^{-2t}}{2} - \int -t \cdot e^{-2t}\,dt\right) = -t^2 \cdot e^{-2t}\Big|_0^{\infty} + EX = 0 - 0 + 1/2 = 1/2$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1/2 - 1/4 = 1/4$

$EZ = E(3X - 2) = 3EX - 2 = 3/2 - 2 = -1/2$

$DZ = D(3X - 2) = 3^2 DX = 9 \cdot (1/4) = 9/4$

$cov(X, Z) = cov(X, 3X - 2) = 3\,cov(X, X) = 3DX = 3/4$