Отношение эквивалентности

Опр **Отношение эквивалентности** R — отношение, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно

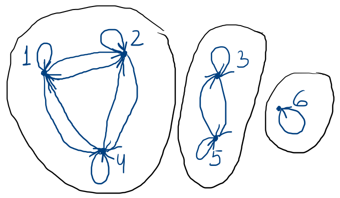
Пример:

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), (4, 2)}

на A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

является отношением эквивалентности.

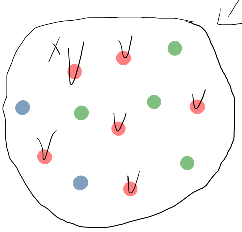
(1,2) (2,4) (1,4)

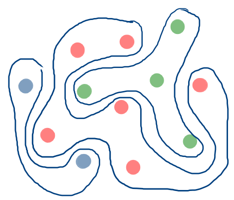


Опр **Классы эквивалентности** — подмножества, образованные в результате разбиения множества отношением эквивалентности.

Пример:

$xR?$





Опр **Порождающий элемент** класса эквивалентности — некоторый элемент, находящийся в отношении R со всеми элементами соответсвующего класса.

Обозначения:

$[a]$ — класс эквивалентности, порожденный элементом a.

$[A]_R$ — множество всех классов эквивалентности по отношению R.

R

Пример:

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), (4, 2)}

на A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Рассмотрим все классы эквивалентности, порожденные каждым из элементов множества A

$[1] = \{x : (x,1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1,2,4\}$

$[2] = \{x : xR2\} = \{1,2,4\}$

$[3] = \{x : xR3\} = \{3,5\}$

$[4] = \{1,2,4\}$

$[5] = \{3,5\}$

$[6] = \{x : xR6\} = \{6\}$

3 класса

$\Rightarrow [1] = [2] = [4] = \{1,2,4\}$

$[3] = [5] = \{3,5\}$

$[6] = \{6\}$

каждый элемент класса эквивалентности порождает его: $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

то есть любой элемент класса является его **представителем**

Пример:

xRa

Разбиение и классы эквивалентности

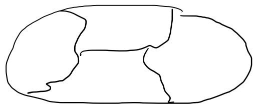
не пустое

$\langle A\rangle = \{A_i : i\in I\}$

Опр $\langle A\rangle$ – разбиение A, если:

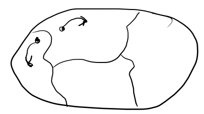
1) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad i\neq j$

2) $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ т.е. $a\in A \Leftrightarrow a\in A_i$ для $i\in I$



Th Разбиение множества и классы эквивалентности.

$\langle A\rangle$ – разбиение $A \Leftrightarrow [A]_R$ R-отн эквив.



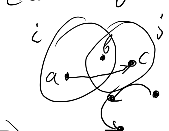
Proof

$\Rightarrow$] $\langle A\rangle = \{A_i : i\in I\}$ – разбиение A

] $R\subseteq A\times A$ т.ч. $aRb \Leftrightarrow a\in A_i$ и $b\in A_i$ для $i\in I$

1) $a\in A$ $aRa \Rightarrow$ R-рефлексивно

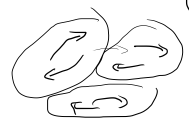
2) $\underset{aRb}{a\in A_i,\ b\in A_i} \Rightarrow \underset{bRa}{b\in A_i \text{ и } a\in A_i}$ – симметричн.



3) $(a\in A_i,\ b\in A_i)$ и $(b\in A_j,\ c\in A_j) \Rightarrow$ $i=j$

$\Rightarrow a\in A_i,\ c\in A_i$

aRb и $bRc \Rightarrow aRc$ – транзитивность



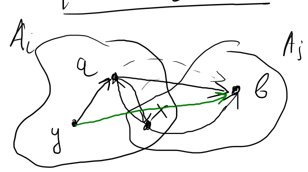
$R = \{(\ , \ ). \}$

$\Leftarrow$ R-отн. эквив $[A]_R$ $\Rightarrow$ надо доказать $[A]_R = \{[a] : a\in A\}$ – разбиение A.

$[a]$ – непустой для $\forall a$: $a\in[a]$

$A = \bigcup[a] \Rightarrow a\in A$.

$\boxed{A_i\cap A_j = \varnothing}$



] $[a]\cap[b]\neq\varnothing$

$\exists x\in[a]\cap[b]$

xRa, xRb

$\downarrow$ симметричность

aRx

aRx и $xRb \Rightarrow aRb$ – по транзитивность

$a\in[b]$

Если $y\in[a]$, yRa т.к. $aRb \Rightarrow$ по транзитивн. yRb

$[a]\subseteq[b]$

Аналогично $[b]\subseteq[a] \Rightarrow$

$\Rightarrow [a]=[b]$

$\Rightarrow \rightarrow\leftarrow$ противоречие

$[A]_R$ – разбиение A

ч.т.д. !

Отношение порядка

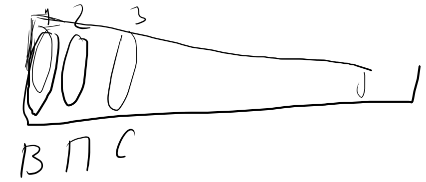
Рассмотрим "следовать за"

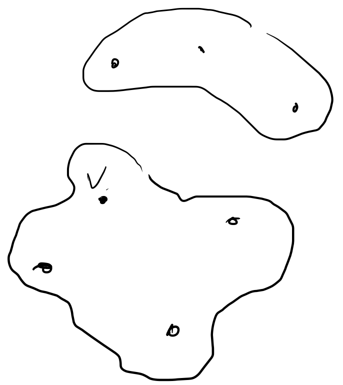
Свойства:

если a следует за b, a b следует за c, то логично, что a следует за c — **транзитивность**

если a следует за b, то b не может следовать за a — **асимметричность**

элемент a не может следовать сам за собой — **антирефлексивность**





Опр Отношение строгого прядка — отношение на множестве, обладающее свойствами транзитивности, асимметричности и антирефлексивности

Пример

"a > b"

A = {1, 2, 3, 4}

отношение R = {(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)}.

асимметричность

$i = j$

Опр Отношение нестрогого прядка — отношение на множестве, обладающее свойствами транзитивности, антисимметричности и рефлексивности.

aRb и $bRa \Rightarrow a = b$

Пример

$a < b$ & $a = b$ $\Rightarrow a <= b$

"a <= b"

A = {1, 2, 3, 4}

отношение R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}.

Заметим, что данное отношение является как бы объединением отношения строгого порядка "a < b" и отношения "a = b".

Упорядоченные множества

Любое отношение можно рассматривать с точки зрения того как оно упорядочивает множество

Понятие **связность** в множестве, то есть наличие связи для двух различающихся элементов **a** и **b**, такой что либо **aRb**, либо **bRa**.

a b

R: A [b e c d a ...]

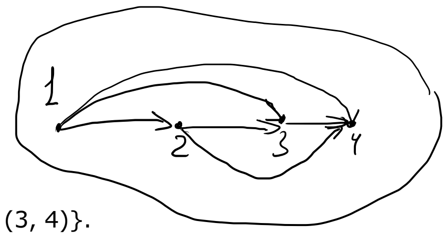
Опр Линейно упорядоченное множество — множество, в котором **для любых двух** элементов **a** и **b** существует либо **aRb**, либо **bRa**.

Пример

"a < b"

A = {1, 2, 3, 4}

отношение R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}.



$1 < 2 < 3 < 4$

данное множество линейно упорядочено отношением R

Опр Частично упорядоченное множество — множество, в котором **не для всех пар** элементов **a** и **b** существует либо **aRb**, либо **bRa**.

Пример

$x \subset z$ $\quad z \not\subset x$ $\quad x \not\subset y$ $\quad y \not\subset x$

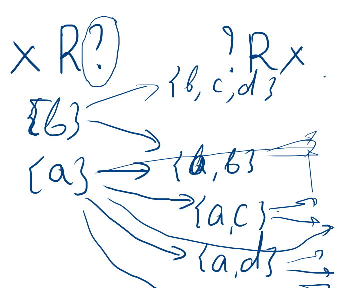
"является подмножеством"

A = {a, b, c, d}

x y z

! булеан P(A) = { ∅, {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, {a, b, c, d}}

Здесь отношение не на множестве A, а на множестве P(A). Само отношение "является подмножеством" будет бинарным, так как рассматривает каждый раз пару множеств.



$R \subseteq A \times A$

Отношение "является подмножеством" упорядочивает булеан множества частично.

Отношения соответсвия

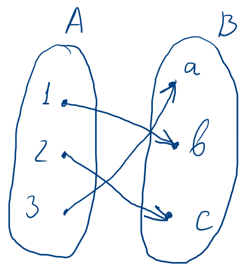
Одно-однозначное = взаимно-однозначно биективное

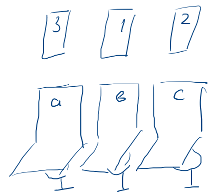
Пример

A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}

R = {(1, b), (2, c), (3, a)}

$R \subseteq A \times B$





Одно-многозначное

Пример

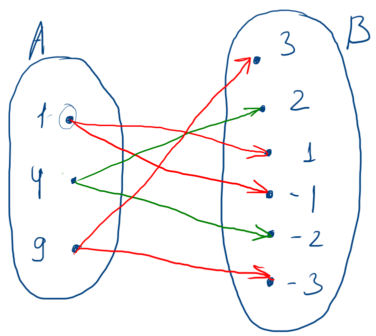
"a есть квадрат b".

Пусть A = {1, 4, 9}, B = {-1, -2, -3, 1, 2, 3}

R = {(1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2), (9, -3), (9, 3)}

1R-1

1R1



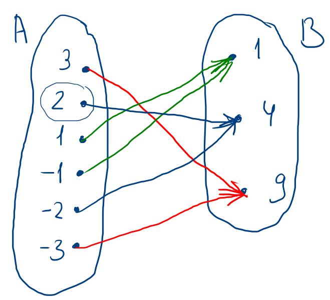
Много-однозначное

Пример

"a есть квадратный корень b".

Пусть A = {-1, -2, -3, 1, 2, 3}, B = {1, 4, 9}

R = {(-1, 1), (1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9)}



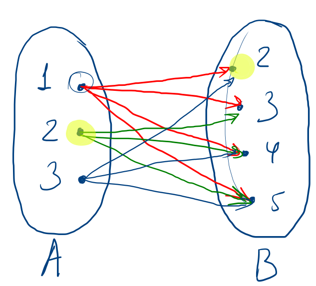
Много-многозначное

Пример

"a не равно b".

Пусть A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4, 5}

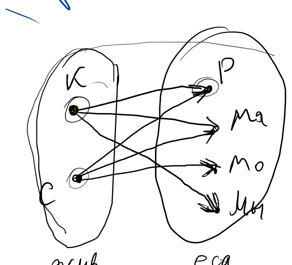
R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5)}



$(-2)^2 = ?$

$2^2 = ?$

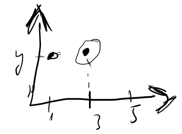
$\sqrt{4} = ?$



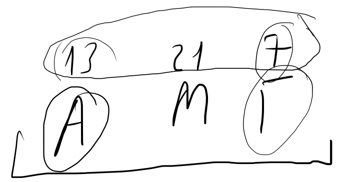
Функциональные отношения

$F(x) = y$

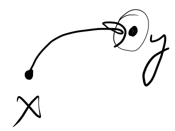
Опр Функциональные отношение — бинарное отношение xRy, в котором каждому элементу x из X соответсвует **не более одного** элемента y из Y.

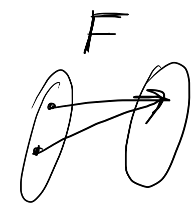


Одно-многозначные и много-многозначные отношения не могут быть функциональными



Обозначение: y = F(x) где





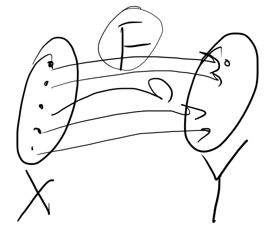
Нотация:

$x \in X$ — прообраз $y \in Y$

$y \in Y$ — образ $x \in X$

X — область определения функции F

Y — область значений функции



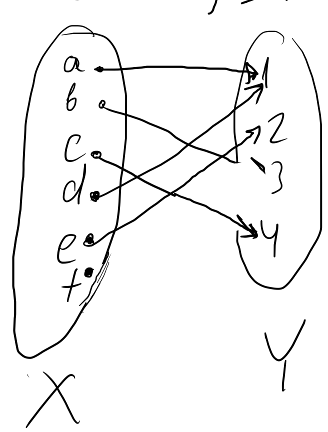
Опр Инъекция или отображение множества X в множество Y — функция, которая всюду определена, то есть **каждому** элементу x из X соответствует один элемент y из Y.

Если функция определена не на всем множестве X, то такая функция будет недоопределенной.

Пример

X = {a, b, c, d, e, f} и Y = {1, 2, 3, 4}

Определим бинарное отношение F = {(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 2)} ~~(f, 3)~~}



Пример

$y = \sqrt{x}$

F

$\boxed{\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}}$

$\sqrt{9} = 3$

$\cancel{\sqrt{9} = -3}$

Y доопределен при положит числа

X