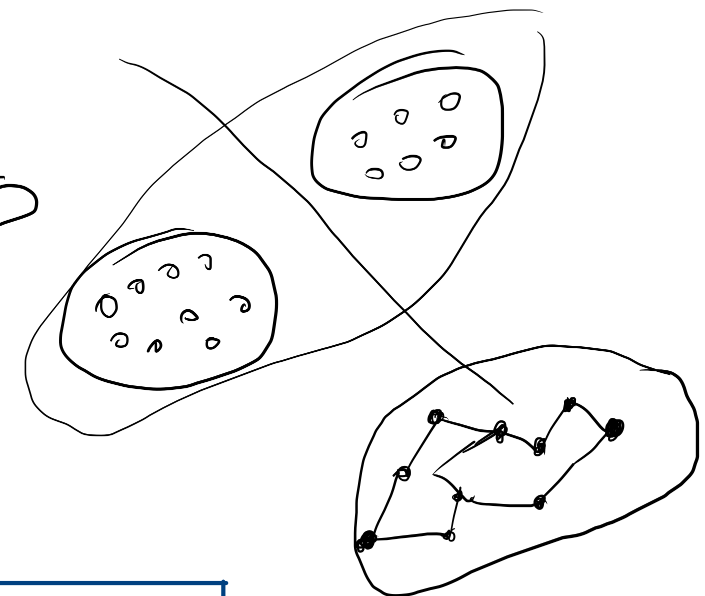
Дискретная математика

Дискретный — противоположен непрерывному

Дискретный объект состоит из строго органиченных, отдельных друг от друга частей

Дискретная математика (анализ):

- теория множеств
- комбинаторика
- математическая логика
- теория графов
- теория алгоритмов
- теория кодирования
- теория автоматов
- теория игр, чисел и тд



Обозначения (кванторы): $\forall (a, b)$ $\forall б$

$\forall$ "для любого", "для всех" — квантор общности $\forall x\ \exists y$

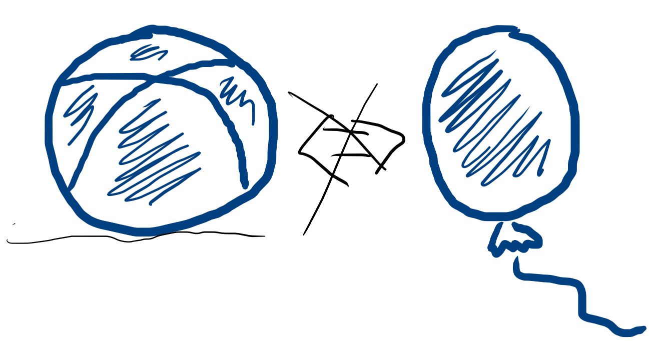
$\exists$ "найдется", "существует", "хотя бы для одного" — квантор существования

$\Rightarrow$ "если, то", "следует" — квантор следования (импликация) $x=5 \Rightarrow y=3$

$\Leftrightarrow$ "тогда и только тогда" — квантор эквивалентности, равносильности

равносильность по определению $A \overset{def}{\Leftrightarrow} B$

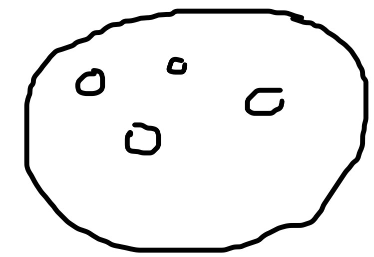
принадлежность $x \in A$



$\exists$ Пусть

Теория множеств

Опр Множество — совокупность объектов, произвольной природы, которая рассматривается как единое целое. Объекты = элементы.



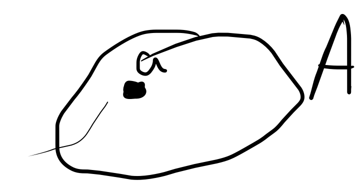
Обозначения для числовых множеств:

$\mathbb{N}$ натуральные $\{1, 2, 3, \ldots +\infty\}$

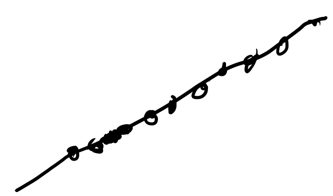
$\mathbb{Z}$ целые $\{-\infty \ldots [0, \ldots +\infty\}$

$\mathbb{N}_0$ неотрицательные целые $\mathbb{Z}_+$

Опр $a \in A$ — объект a принадлежит множеству A = является элементом этого множества.



Множества могут быть конечными и бесконечными



Способы задания множеств

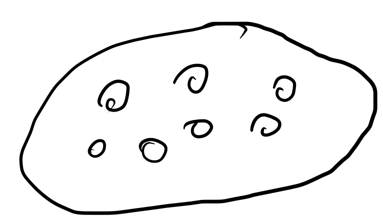
1) перечисление $\{куб, шар, конус\}$

$\{1, 2, 3, 4\}$

NB: множество — неупорядоченная структура, если вдруг порядок будет иметь значение, то об этом дополнительно сообщается (пример: "линейно упорядоченное множество")

2) характеристическое свойство

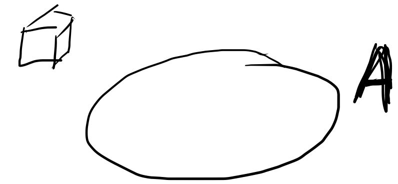
$\{1, 8, 27, \ldots k^3 \ldots\}$ $k \in \mathbb{N}$, $k < 1011$



$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2\}$

$\{1, 2\}$

Ключевые определения

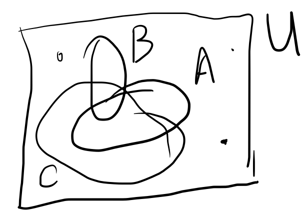


Опр Пустое множество — не содержит ни одного элемента.

Обозначение: $\varnothing$

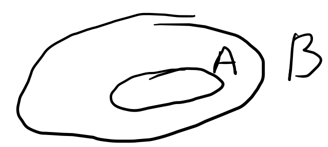
Опр Мощность множества — число элементов конечного множества.

Обозначение: $|A| = n$



Опр Универсум — все элементы совокупности множеств, принадежащие некоторому одному множеству.

Обозначение: U



Опр A — подмножество B, если каждый элемент A принадлежит B.

Обозначение: $A \subseteq B$

Опр Несобственные подмножества A и $\varnothing$

Опр Собственные подмножества $C \subset A$ все остальные

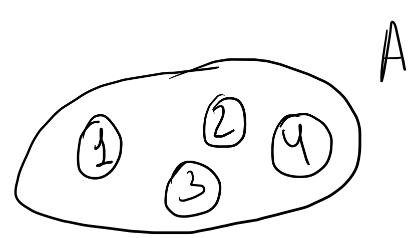
Опр A = B, A равно B, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Утв (способ доказательства равенства множеств) A, B $\quad A \overset{?}{=} B \Leftrightarrow \underbrace{A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A}$

Опр Булеан множества A — множество всех подмножеств A.

Обозначение: $P(A)$, 2^A.



Пример: $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
$\{1,2\}, \{2,3\} \ldots\ldots \{4,1\}$
$\{1,2,3\}, \{3,4,1\}, \ldots$
$\{1,2,3,4\}\}$

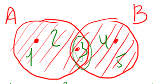
$(1, 2)$

$(2, 1)$

Операции над множествами

1. Объединение (сумма) $A \cup B$

Опр Объединение $A + B$, $A \vee B$ — множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств.

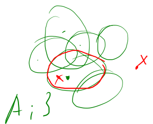


Опр $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$

$\{1,2,3\}$ $\{3,4,5\}$

$A \cup B$ $\{1,2,3,4,5\}$

$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

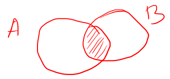


Общ. случай $\exists I = \{1,2,3 \ldots k\}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_k = \{x \mid \exists i \in I$ т.ч. $x \in A_i\}$

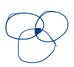
2. Пересечение (произведение)

Опр Пересечение $A \cap B$, $A \cdot B$ — множество, состоящее из элементов, принадлежащих и A и B.



Опр $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

Общий случай: $\exists I = \{1,2, \ldots k\}$, тогда $\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k =$



$= \{x \mid x \in A_i$ для всех $i \in I\}$

3. Разность. Симметрическая разность.

Опр Разность $A \setminus B$ — множество, состоящее из элементов, принадлежащих A и НЕпринадежащих B.

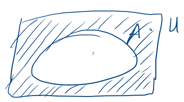
Опр $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$

Опр Симметрическая разность $A \Delta B$, $A \oplus B$ — множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо только A, либо только B.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

4. Дополнение.

Опр A', $\overline{A}$ — дополнение до универсума.



Опр $\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U$ и $x \notin A\}$

Пример: $U = \{a,b,c,d,e,f\}$ $A = \{a,b\}$

$\overline{A} = \{c,d,e,f\}$

Th Выражение для разности. $\underbrace{A - B}_{a \in} = A \cap \overline{B}$ $A - B = C$ $A \cap \overline{B} = D$

Proof:

Произв. элем из $A - B$

$C \subseteq D$

$D \subseteq C$

$a \in A - B \Leftrightarrow (a \in A)$ и $(a \notin B)$ по опр разности

$\Leftrightarrow (a \in A)$ и $(a \in \overline{B})$ по опр дополнения

$\Leftrightarrow a \in A \cap \overline{B}$.

5. Прямое произведение множеств. $A \times B$

$\{1, \ldots 10\}$

Опр (a,b) — упорядоченная пара.

$(a,b) = (c,d)$ $a = c$, $b = d$

Опр Кортеж(вектор) — упорядоченный набор произвольных объектов

$(a,b,c,d \ldots z)$

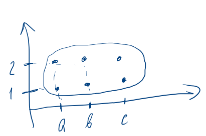
$(x_1, \ldots x_n)$, $(y_1, \ldots y_m)$

равны. 1) $n = m$ 2) $x_i = y_i$ $(\forall i \in \{1, \ldots n\})$

Опр Декартово произведение множеств A и B — все пары (a,b) такие что

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Пример: $A = \{a,b,c\}$ $B = \{1,2\}$



$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), \ldots$

$(c,1), (c,2)\}$

$(1,b) \in B \times A$.

$A \cup \overline{B \cap C}$

Свойства операций над множествами

∃ A, B, C – подмн U, тогда справедлив

1. Закон идемпотентности

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

2. Двойное дополнение

$\overline{\overline{A}} = A$

3. Свойства коммутативности.

$A \cap B = B \cap A$

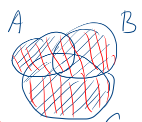
$A \cup B = B \cup A$

4. Свойства ассоциативности.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

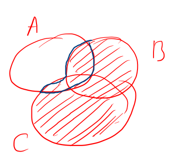
ac ∈ a

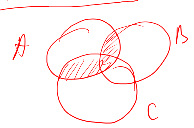


5. Свойства дистрибутивности.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





6. Свойства тождества.

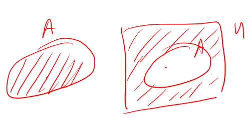
$A \cup \varnothing = A$ $\quad A \cup B \quad B = \varnothing$

$A \cap U = A$

7. Свойства дополнения.

$A \cup \overline{A} = U$

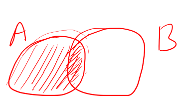
$A \cap \overline{A} = \varnothing$

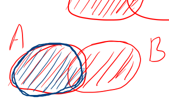


8. Свойства поглощения.

$(A \cap B) \cup A = A$

$(A \cup B) \cap A = A$





9. Законы де Моргана.

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$