

Лабораторная работа 3.11V (VirtualLab)

Вынужденные электромагнитные колебания в последовательном колебательном контуре

Цель работы

1. Изучение вынужденных колебаний и явления резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре.
2. Изучение закона Ома для цепи переменного тока.

Введение

Вынужденные электромагнитные колебания

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности, емкости и активного сопротивления в которую включен источник внешней электродвижущей силы (ЭДС), изменяющейся со временем по гармоническому закону:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (1)$$

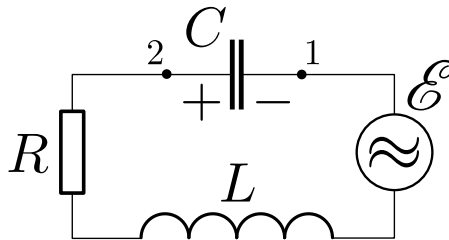


Рис. 1. Принципиальная электрическая схема лабораторной установки

Этот закон занимает особое положение благодаря свойствам самого колебательного контура сохранять гармонический вид колебаний при действии внешней гармонической ЭДС. Получим уравнение колебаний в контуре. По закону Ома для неоднородного участка цепи:

$$IR = \Delta\varphi + \mathcal{E}_{SI} + \mathcal{E}(t), \quad (2)$$

где \mathcal{E}_{SI} - ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности:

$$\mathcal{E}_{SI} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (3)$$

а $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ - разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}. \quad (4)$$

Подставим (1), (3) и (4) в (2):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \Omega t. \quad (5)$$

Используя новые обозначения: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - частота собственных свободных колебаний в LC -контуре без затухания (формула Томсона), $\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания, можем записать уравнение (5) в более компактном виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \Omega t. \quad (6)$$

Общее решение (6) может быть найдено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Но общее решение однородного уравнения достаточно быстро (экспоненциально) затухает и по прошествии некоторого времени оно практически исчезнет, поэтому нас будут интересовать только установившиеся колебания, когда главенствующим является частное решение неоднородного уравнения.

Покажем, что установившиеся колебания заряда конденсатора будут определяться функцией вида:

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t - \psi). \quad (7)$$

где q_0 - амплитуда колебаний заряда на конденсаторе, а ψ - разность фаз между колебаниями заряда на конденсаторе и внешней ЭДС.

Получим выражение для тока, взяв производную от заряда конденсатора (7) по времени $I(t) = \frac{dq}{dt}$:

$$I(t) = -\Omega q_0 \sin(\Omega t - \psi) = I_0 \cos\left(\Omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos(\Omega t - \varphi). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения: $\varphi = (\psi - \frac{\pi}{2})$ - сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС, $I_0 = \Omega \cdot q_0$ - амплитуда силы тока.

Для нахождения явной зависимости I_0 и φ от частоты изменения внешней ЭДС представим исходное уравнение (6) в виде

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (9)$$

В данном соотношении слева написана сумма напряжений на сопротивлении R , индуктивности L и ёмкости C . Сумма этих напряжений в любой момент времени равна внешней ЭДС. Из (8) и закона Ома для участка цепи $U_R = IR$ напряжение на резисторе может быть представлено в виде:

$$U_R(t) = I_0 R \cos(\Omega t - \varphi). \quad (10)$$

Оно изменяется синфазно силе тока в цепи.

Напряжение на конденсаторе пропорционально заряду на нем:

$$U(t) = \frac{q_0 \cos(\Omega t - \psi)}{C} = \frac{I_0}{\Omega C} \cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (11)$$

и отстает по фазе от силы тока на $\frac{\pi}{2}$.

Напряжение на катушке индуктивности

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -\Omega L I_0 \sin(\Omega t - \varphi) = \Omega L I_0 \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (12)$$

опережает по фазе силу тока на $\frac{\pi}{2}$.

В соответствии с (10), (11) и (12), можно представить полное сопротивление цепи (т.н. «импеданс») как сумму трёх сопротивлений: емкостного $X_C = (\Omega C)^{-1}$, индуктивного $X_L = \Omega L$ и активного сопротивления R . С учетом сдвига фаз между напряжениями на элементах цепи его можно записать в виде

$$X(\Omega) = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}. \quad (13)$$

Векторная диаграмма

Решение (6) удобно анализировать с помощью векторной диаграммы, изобразив амплитуды напряжений на активном сопротивлении, конденсаторе, индуктивности и их сумму, которая в соответствии с (5) равна амплитуде ЭДС источника \mathcal{E}_0 . Эта диаграмма показана на рис. 2.

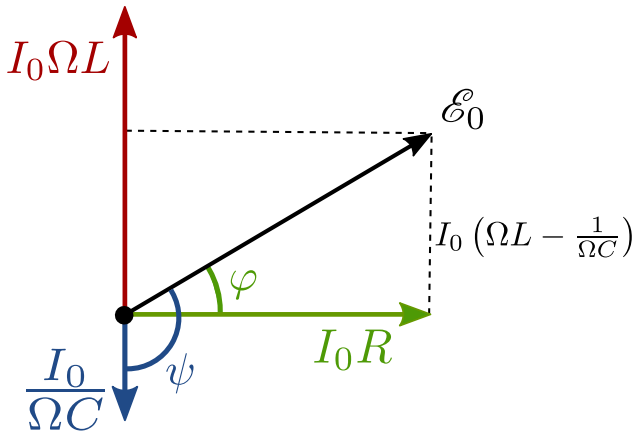


Рис. 2. Векторная диаграмма

Из соотношений для сторон прямоугольного треугольника этой диаграммы непосредственно следуют выражения для амплитуды силы тока в цепи I_0 и величины фазового сдвига между током и ЭДС источника φ :

$$I_0(\Omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}; \quad (14)$$

$$\varphi(\Omega) = \arctan \left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} \right). \quad (15)$$

Резонансные кривые для тока

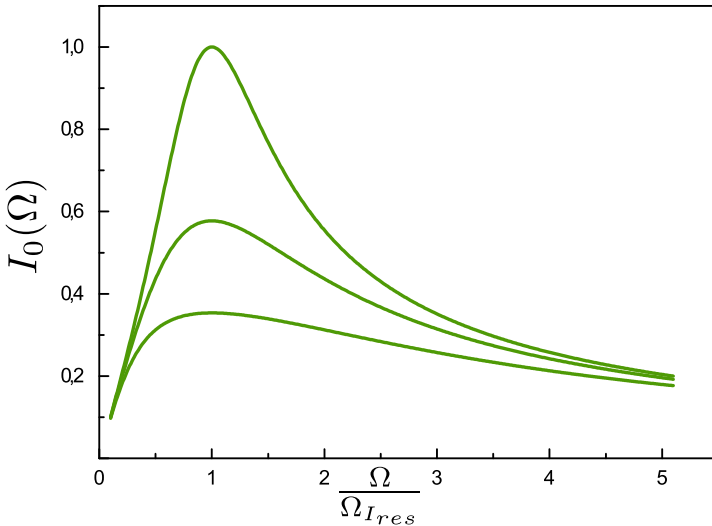


Рис. 3. Резонансные кривые для силы тока

Резонансными кривыми называют графики зависимости амплитуд силы тока I_0 , заряда на конденсаторе q_0 и напряжений на конденсаторе, индуктивности и активном сопротивлении от ча-

стоты внешней ЭДС Ω .

Резонансные кривые для силы тока при различных значениях коэффициента затухания (14) $I_0(\Omega)$ показаны на рис. 3.

Знаменатель (14) минимален при $\Omega L = \frac{1}{\Omega C}$, следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с частотой собственных колебаний LC контура в отсутствии затухания (активного сопротивления) $\Omega_{I_{res}} = \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Резонансная частота для тока не зависит от активного сопротивления контура R , но максимум при резонансе оказывается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$.

Резонансные кривые для заряда конденсатора

Резонансные кривые для заряда на конденсаторе $q_0 = q_0(\Omega)$ при различных коэффициентах затухания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ показаны на рис. 4.

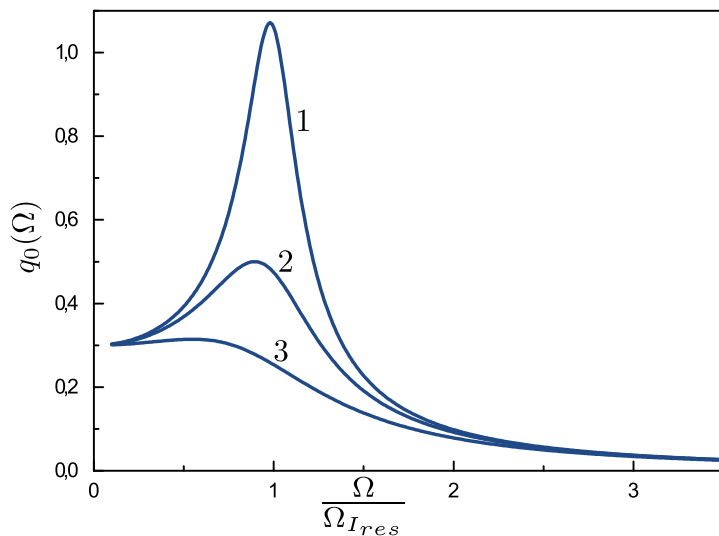


Рис. 4. Резонансные кривые для заряда конденсатора

Резонансные кривые для напряжения на конденсаторе, поскольку $U_C = \frac{q}{C}$, имеют аналогичный вид. Выполним преобра-

зования, чтобы получить в явном виде зависимость q_0 от Ω :

$$q_0(\Omega) = \frac{I_0(\Omega)}{\Omega} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\Omega R)^2 + \left(\Omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}}. \quad (16)$$

Приравняем производную подкоренного выражения знаменателя (16) к нулю и найдем резонансную частоту:

$$\frac{d\left((\Omega R)^2 + \left(\Omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2\right)}{d\Omega} = 2\Omega R^2 + 2\left(\Omega^2 L - \frac{1}{C}\right)(2\Omega L) = 0. \quad (17)$$

Из (17) непосредственно следует

$$\frac{R^2}{2} + \Omega_{q_{res}}^2 L^2 - \frac{L}{C} = 0;$$

$$\Omega_{q_{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Используя обозначения $\beta = \frac{R}{2L}$ для коэффициента затухания и $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ для собственной частоты незатухающих колебаний, запишем выражение для резонансной частоты:

$$\Omega_{q_{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (18)$$

Резонансная частота для заряда конденсатора меньше собственной частоты контура и зависит от коэффициента затухания. Чем меньше коэффициент затухания, тем острее резонанс и тем ближе резонансная частота к собственной частоте колебаний контура.

Аналогично можно вычислить и резонансную частоту для напряжения на катушке индуктивности. Окажется, что эта частота несколько превышает собственную частоту колебаний контура $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и приближается к ней по мере убывания коэффициента затухания.

На рис. 5. показаны зависимости амплитуд напряжений на активном сопротивлении U_R , конденсаторе U_C и индуктивности U_L от частоты внешней ЭДС. Соответствующие резонансные частоты имеют значения:

$$\begin{cases} \Omega_{R_{res}} = \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \\ \Omega_{C_{res}} = \Omega_0 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{\beta}{\Omega_0} \right)^2}; \\ \Omega_{L_{res}} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{\beta}{\Omega_0} \right)^2}}; \end{cases} \quad (19)$$

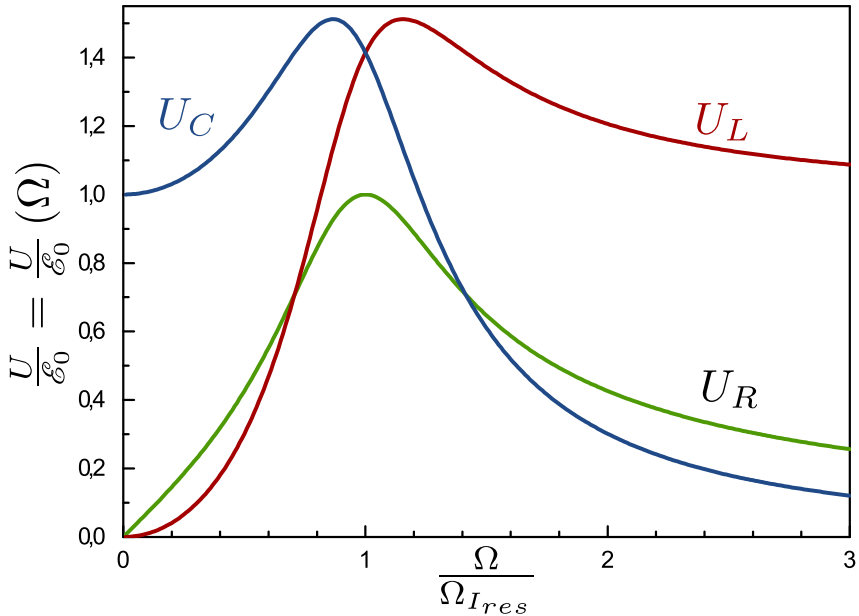


Рис. 5. Сравнение резонансных кривых

Чем меньше коэффициент затухания β , тем ближе резонансные частоты всех величин к собственной частоте контура Ω_0 .

Резонансные кривые и добротность

Форма резонансных кривых определённым образом связана с добротностью контура Q . Особенно простой эта связь оказывается при малом затухании, когда $\beta \ll \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда в (18) в подкоренном выражении можно пренебречь величиной β и $\Omega_{C_{res}} \cong \Omega_0$. В этом случае

$$U_{C_{res}} = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\Omega_0 C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\Omega_0 RC}. \quad (20)$$

$$\frac{U_{C_{res}}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (21)$$

Соотношение (21) совпадает с выражением для добротности контура при слабом затухании. То есть величина добротности контура показывает во сколько раз максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе (и на индуктивности) превышает амплитуду внешней ЭДС.

Добротность связана и с другой важной характеристикой резонансной кривой — её шириной. Как несложно показать, при $\beta \ll \Omega_0$

$$Q = \frac{\Omega_0}{\Delta\Omega}, \quad (22)$$

где Ω_0 — резонансная частота, $\Delta\Omega$ — ширина резонансной кривой на высоте равной $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7$ от максимальной (в резонансе). Это соответствует уменьшению мощности по сравнению с мощностью при резонансе в 2 раза.

Порядок выполнения работы

Виртуальный лабораторный стенд представляет из себя симулятор электрических цепей, который позволяет продемонстрировать работу различных электрических схем и проводить измерения их характеристик с использованием встроенных приборов.

1. В рабочем пространстве виртуальной модели соберите схему, изображенную на рис. 6

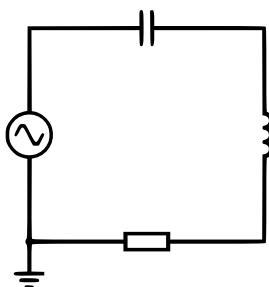


Рис. 6. Схема виртуальной установки

2. Выберите в меню **Рисовать** → **Входы и источники** → **Добавить ист. перем. напряжения (2вых)**. Зажмите кнопку мыши на черном поле и нарисуйте источник переменного напряжения. Рисование окончится после отпускания клавиши. В случае, если требуется удалить элемент, необходимо кликнуть по нему правой кнопкой мыши и выбрать **Удалить**.
3. Необходимые элементы (конденсатор C , катушка индуктивности L , резистор R) можно найти в разделе меню **Рисовать** → **Пассивные элементы**. Обратите внимание, что каждый следующий элемент необходимо начинать с узла, которым заканчивается предыдущий, иначе схема не будет замкнута.
4. Кликните правой кнопкой мыши на генераторе напряжения и выберите **Редактировать**. Установите амплитуду ЭДС источника равной $\mathcal{E} = 5\text{ В}$ вводом с клавиатуры в соответствующем поле. Установите форму сигнала **Синусоида**.

5. Кликните правой кнопкой мыши на генераторе напряжения и выберите **Добавление и настройка ползунков**. Установите галочку напротив **Частота**. Введите минимальное и максимальные значения 10000 ($\Gamma\text{ц}$) и максимальное 160000 ($\Gamma\text{ц}$). В графе **Label** можно ввести свое название ползунка. Нажмите **Применить**, **Ок**. В правой части экрана появится соответствующий ползунок, с помощью которого можно менять частоту генератора.

6. Установите значения емкости $C = 100\text{н} \div 300\text{н}$ (нФ), индуктивности $L = 10\text{м} \div 20\text{м}$ (мкГн) (указаны рекомендованные диапазоны этих величин) и сопротивления $R_1 = 1$ (Ом) нажатием правой кнопки мыши на соответствующем элементе → **Редактировать**. После внесения изменений нажмите **Ок**.

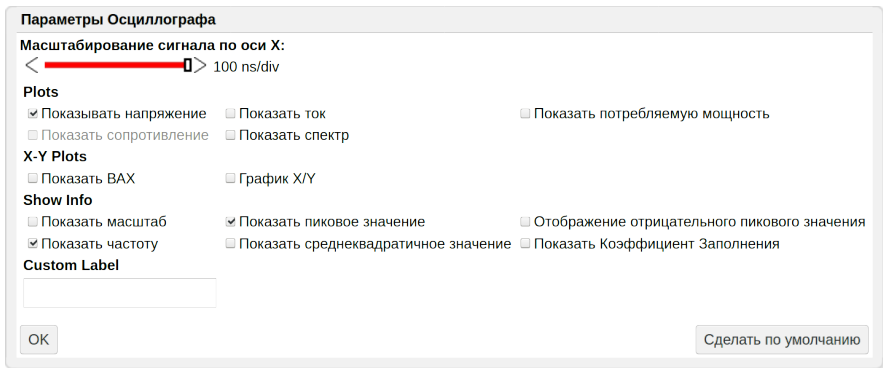


Рис. 7. Параметры осциллографа

7. Подключите осциллографы к элементам схемы C , L и R нажатием правой кнопкой мыши на соответствующем элементе → **Подключить осциллограф в док-панель**.

8. Кликните правой кнопкой мыши на каждом осциллографе, перейдя в меню «Параметры». Уберите галочки с пунктов **Показывать ток**. Установите галочки напротив **Показать пиковое значение** и **Показывать частоту**. В этом разделе настроек можно

менять скорость развертки сигнала по оси X , изменяя положение соответствующего ползунка (в рабочем диапазоне частот наиболее удобным является значение $2 \mu s/div = 2 \text{ мкс/дел}$. По оси Y каналы масштабируются автоматически при выборе опции «Макс.масштаб».

9. Для установленных значений емкости конденсатора C и индуктивности катушки L оцените резонансную частоту без учёта активного сопротивления $f_{\text{расч}}$. Запишите установленные значения параметров и расчетное значение резонансной частоты в отчет.

10. Включите схему кнопкой «Start/STOP» и выберите удобную скорость симуляции и масштабы по оси X на осциллографе, чтобы амплитудные значения устанавливались как можно быстрее. При правильной настройке амплитудные значения будут указываться над каждым осциллографом.

11. Меняя частоту генератора во всем доступном диапазоне нажатием стрелок у ползунка (устанавливаемая частота указывается рядом с осциллографами), определите частоту, при которой амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе достигает максимального значения. Внесите значения f и $U_{C, \text{res}}$ в отчет.

12. Выполните измерения по определению зависимости амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе U_C , индуктивности U_L и активном сопротивлении U_R , от частоты f . Изменяя частоту во всем доступном диапазоне напряжений с шагом не более $\Delta f = 10 \text{ кГц}$, вносите значения измеряемых напряжений в таблицу таблицы 1 (см. Приложение). В окрестности резонанса шаг по частоте следует уменьшить до $\Delta f = 2 \div 3 \text{ кГц}$.

13. Установите новое сопротивление резистора: $R_2 = 3,0 \div 5,0 \text{ Ом}$. Оцените резонансную частоту с учетом конечности активного сопротивления контура. Проведите аналогичные последним трем пунктам измерения АЧХ при новом значении активного сопротивления и заполните второй экземпляр таблицы 1.

14. Сохраните файл с установкой последовательным нажатием **Файл** → **Сохранить как** и нажмите на гиперссылку с текстовым файлом. Не переименовывая, файл с рабочей установкой прикрепите к отчету по лабораторной работе.

Обработка измерений

1. Для двух значений активного сопротивления $R_{1,2}$ вычислите добротность контура Q по формуле (21), используя значения его параметров $Q(L, C, R) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.
2. Сравните результат расчетного значения с экспериментальным, который рассчитывается как отношение напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{C, res}$ к амплитуде ЭДС источника. При наличии существенного расхождения объясните причины его появления в отчете по лабораторной работе.
3. По данным таблицы 1 постройте графики зависимостей $U_i = U_i(\Omega)$, где $i = C, L, R$, $\Omega = 2\pi f$ для $R = R_{1,2}$. Качественно сравните между собой полученные зависимости.
4. Определите по построенным графикам значения резонансных частот и сравните их с теоретическими, которые могут быть найдены по формулам (19).
5. Рассчитайте коэффициент затухания $\beta_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{2L}$ и сравните его с собственной частотой контура Ω_0 . Оцените применимость формулы (22). Найдите по ней добротность Q , определив ширину резонансной кривой $U_C = U_C(\Omega)$ по построенным графикам, сравните её со значением полученным по формуле (21).

Результаты лабораторной работы

1. Графики зависимостей $U_i = U_i(\Omega)$, где $i = C, L, R$, $\Omega = 2\pi f$.
2. Теоретические расчеты резонансных частот и сравнение их с экспериментальными.
3. Расчеты добротностей контуров Q . Сравнение полученных прямым вычислением и полученных экспериментально добротностей из графика $U_C = U_C(\Omega)$.
4. Расчеты коэффициента затухания β и оценка применимости формулы (21) для резонансной кривой $U_C = U_C(\Omega)$

Приложение

Таблица 1: Результаты прямых измерений и их обработка

№	$f, \text{Гц}$	$\Omega, \text{рад/с}$	$U_C, \text{В}$	$U_L, \text{В}$	$U_R, \text{В}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					