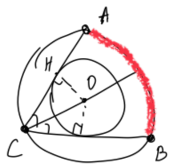
Фадеев М3202

Задача 17.
Даны две концентрические окружности радиусов R и $\sqrt{3}R$. На окружности большего радиуса наудачу ставятся две точки. Какова вероятность того, что хорда, проведённая через эти точки, пересечёт окружность меньшего радиуса?

17



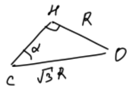
Выбор 2-х точек на окружности – независимые события.

Допустим мы выбрали первую точку, тогда выбор всех вторых точек симметричен для всех возможных выборов первой точки.

Будем считать, что первая точка уже выбрана ($p=1$).

Чтобы хорда пересекала окр. $R \Longleftrightarrow$ 2 точка $\in \breve{AB}$.

$\breve{AB} = 2\cdot\angle ACB = 4\alpha$. Найдем длину $\breve{AB}$:



$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{3}R} = 1/\sqrt{3}$

$\cos\alpha = \sqrt{2}/\sqrt{3}$

$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha =$
$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$
$= \underbrace{(2/3 - 1/3)^2}_{1/9} - \underbrace{4\cdot 1/3\cdot 2/3}_{8/9} = -7/9$

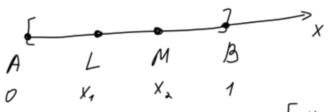
$p = \frac{\arccos(-7/9)}{2\cdot 180^\circ}\cdot\frac{180}{\pi} = \frac{\arccos(-7/9)}{2\pi}$.

Вероятность того, что точка лежит на $\breve{AB}$.

$p \approx 0.3918$

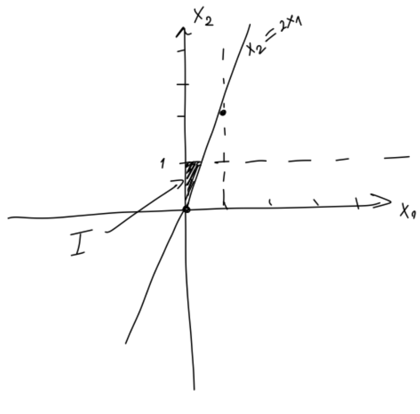
Задача 7.
На отрезке AB наудачу ставятся две точки M и L. Найти вероятность того, что L будет ближе к точке A, чем к точке M.

7



$0 \le x_1, x_2 \le 1$

$x_1 < |x_1 - x_2| \longrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < x_1 - x_2 \\ x_1 < x_2 - x_1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x_2 < 0 \\ x_2 > 2x_1 \end{array}\right.$



$S_I = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P = \frac{S_I}{S} = \frac{1}{4}$

Вероятность – отношение площадей полученного треугольника к площади квадрата с длиной стороны 1.