Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет

по расчетно-графической работе «Дифференциальные уравнения. Ряды»

по дисциплине «»Дополнительные главы высшей математики

Автор: Фадеев А. В.

Факультет: ФИТиП

Группа: М3202

Преподаватель: Бабушкин М. В.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2022

Групповой вариант: 7
Индивидуальный вариант: 17

Групповое задание #1:

1. Цепь длиною $l = 20$ м переброшена через блок. С одной стороны свисает $a = 12$ м цепи, а с другой $b = 8$м (Рисунок 7). Через какое время цепь сойдёт с блока? Принять $g \sim 10\ m/c^2$.
   Определите закон движения цепи, если на её более длинный конец действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = Acos(Bt)$, где A и B– параметры. Исследуйте движение цепи в зависимости от параметров A и B. Проиллюстрируйте исследование графически. Проведите анализ интегральных траекторий.

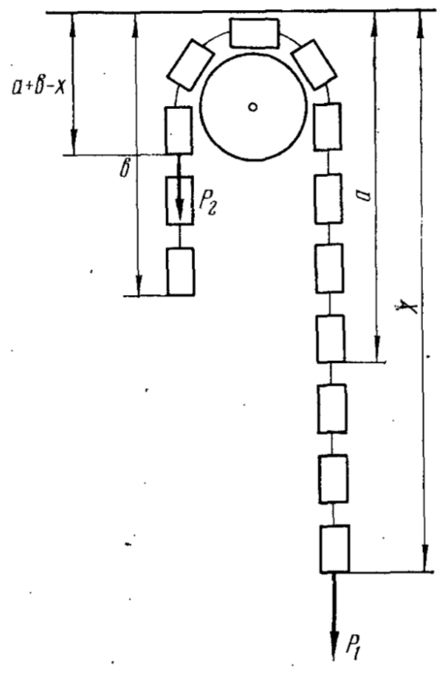
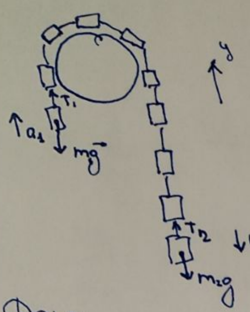


Рисунок 7.

Решение:

№1.



Дано:

l – 20 м

l_1 = 12 м

l_2 = 8 м

t – ?

Решение:

Считая, что цепь нерастяжима, воспользуемся тем, что тогда $a_1 = a_2 = a$, а также $T_1 = T_2 = T$

По 2-му закону Ньютона для обоих концов цепи, в проекции на ось y:

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

В роли масс концов цепи у нас будут выступать соответствующие им длины, т.е. можно считать, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{2}{3}, \text{ т.е. } m_1 = \frac{2}{3} m_2$$

Вычитая из 1-го ур-я 2-е получим:

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g \Leftrightarrow \cancel{\frac{5}{3} m_2 a = -\frac{1}{2} m_2 g} \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow 5a = -g}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} m_2 a = \frac{1}{3} m_2 g \Rightarrow a = \frac{g}{5} = 2 \frac{м}{с^2}$$

$$\text{откуда } t = \frac{l - l_2}{a} = \frac{8 м}{2 \frac{м}{с^2}} = 4 с$$

Ответ: 4с

Ответ: 4с

Если на 1-й груз действует сила $F = A\cos(Bt)$, то уравнение примет вид:

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g + F, \text{ т.е. } a = \frac{(m_2 - m_1)g + F}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m_2 g}{3} + F}{\frac{5}{3} m_2} =$$

$$= \frac{g}{5} + \frac{5F m_2}{3} = \frac{g}{5} + \frac{5A\cos(Bt)\, m_2}{3}$$

$$v(t) = \int\left(\frac{g}{5} + \frac{5A\cos(Bt)\, m_2}{3}\right)dt = \frac{gt}{5} + \frac{5Am_2}{3}\int \cos(Bt)\,dt =$$

$$= \frac{gt}{5} + \frac{5Am_2}{3} \cdot \frac{\sin Bt}{B}$$

График скорости:

https://www.desmos.com/calculator/yvva4sfkyz?lang=ru

Групповое задание #2:

Найдите решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений:
а) методом исключения;
б) матричным методом (метод Эйлера).

$$\begin{cases} x' = 2y + x \\ y' = 3x + 6y \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 4$$

План:

1.) Решите систему указанными методами.
2.) Проверьте, что ответы совпадают.
3.) Изобразите решение на графике при $t > 0$.
4.) Изобразите решение (траекторию) в фазовой плоскости при $t > 0$ и продемонстрируйте, как с изменением t точка движется по траектории.

Решение:

2

$$\begin{cases} x' = 2y + x \\ y' = 3x + 6y \end{cases} \qquad x(0) = -1, \quad y(0) = 4$$

$$x'' = 2y' + x' \Rightarrow \quad y' = \frac{x'' - x'}{2}$$

$$x'' - x' = 6x + 12y$$

$$x'' - x' = 6x + 6x' - 6x$$

$$x'' - 7x' = 0$$

$$\alpha^2 - 7\alpha = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 7 \end{array}\right.$$

$$x = C_1 e^0 + C_2 e^{7t} = C_2 e^{7t} + C_1$$

$$x' = 7C_2 e^{7t}$$

$$y = \frac{7C_2 e^{7t} - C_2 e^{7t} - C_1}{2} = 3C_2 e^{7t} - C_1/2$$

$$x(0) = C_2 + C_1 = -1$$

$$y(0) = 3C_2 - C_1/2 = 4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 6-k \end{vmatrix} = (1-k)(6-k) - 6 = 6 - k - 6k + k^2 = k(k-7)$$

$$\left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 7 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t} \\ y = C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t} \end{cases}$$

I $\begin{vmatrix} 1-0 & 2 \\ 3 & 6-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

$$\lambda_1 = -2\mu_1$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \mu_1 = -1/2 \end{cases}$$

II $\begin{vmatrix} 1-7 & 2 \\ 3 & 6-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$$3\lambda_2 = \mu_2$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \mu_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^0 + C_2 e^{7t} = C_1 + C_2 e^{7t} \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^0 + 3C_2 e^{7t} = -\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = -1 \\ y(0) = -\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> $\begin{cases} x = e^{7t} - 2 \\ y = 3e^{7t} + 1 \end{cases}$

Решение на графике:
<u>*https://www.desmos.com/calculator/h4gm4stcgy?lang=ru*</u>

Групповое задание #3:

Исследуйте ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f(x) = \left(2 - e^{x-2}\right)^2, \quad x_0 = 2$$

План**:**

1) Разложите функцию в ряд Тейлора в заданной точке аналитически.
2) Найдите область сходимости полученного ряда к функции.
3) В графическом редакторе постройте графики частичных сумм ряда Тейлора (полиномов Тейлора) и график функции.
4) По графикам исследуйте поведение полиномов Тейлора при увеличении n.

Решение:

3 Ряд Тейлора

$$f(x) = (2 - e^{x-2})^2, \quad x_0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (e^{x-2} - 2)^2.$$

$$\alpha = x - 2$$

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

$$f(x) = (2 - e^{\alpha})^2 = 4 - 4e^{\alpha} + e^{2\alpha} =$$

$$= 4 - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)^n}{n!} = 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n - 4)\alpha^n}{n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2^{n+1} - 4)\,\alpha^n \cdot \alpha \cdot n!}{(n+1)n! \cdot (2^n - 4)} = \frac{\left(2 - \frac{4}{2^n}\right)\alpha}{(n+1)\cdot\left(1 - \frac{4}{2^n}\right)} = 0 \Rightarrow \text{область сходимости} - \mathbb{R}$$

Решение на графике:
https://www.desmos.com/calculator/prsrkaz6bj?lang=ru

Индивидуальное задание #4:

Задание 1.

Вычислить приближенно значение функции с точностью 0,0001.

$$\ln\frac{9}{8}$$

Решение:

I $\ln 9/8$ – ?

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha^n}{n}$$

$$\ln(1+1/8) = 1/8 - \frac{(1/8)^2}{2} + \frac{(1/8)^3}{3} - \frac{(1/8)^4}{4} =$$

$$= 5789/49152 = 0.1177$$

Задание 2.

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001.

$$\int_0^{1/3}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

Решение:

$\underline{II}$ $\int_0^{1/3} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ $\quad] \; f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$

$$f'(x) = \frac{x' \cdot \sqrt{1+x^3} - \left(\sqrt{1+x^3}\right)' \cdot x}{1+x^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^3} - \frac{3x^3}{2\sqrt{1+x^3}}}{1+x^3} = \frac{2-x^3}{2(1+x^3)^{3/2}} =$$

$$= \frac{3-(1+x^3)}{2(1+x^3)^{3/2}} = \frac{3}{2(1+x^3)^{3/2}} - \frac{1}{2(1+x^3)^{1/2}}$$

$f'(0) = 1$

$$f''(x) = \frac{27x^5}{4(x^3+1)^{5/2}} - \frac{6x^2}{(x^3+1)^{3/2}}$$

$f''(0) = 0$

$$f'''(x) = \frac{-405\,x^7}{8(x^3+1)^{7/2}} + \frac{243\,x^4}{4(x^3+1)^{5/2}} - \frac{12\,x}{(x^3+1)^{3/2}}$$

$f'''(0) = 0$

Ряд Тейлора:

$f^{(4)}(0) = -12$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} = x - \frac{12\,x^4}{4!} + \frac{1890\,x^7}{7!} + \ldots$$

$f^{(5)}(0) = 0$, $f^{(6)}(0) = 0$

$f^{(7)}(0) = 1890$

$$\int_0^{1/2} f(x) = \int_0^{1/2} x - \int_0^{1/2} \frac{12x^4}{4!} + \int_0^{1/2} \frac{1890x^7}{7!} =$$

$$= \frac{3x^7}{8} - \frac{x^4}{2} + x \Big|_0^{1/2} = 0.1221$$

Ответ: 0.1221

Задание 3.

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y'' = y \ln y' \; ; \; y(1) = 2, \; y'(1) = 1$$

Решение:

$\underline{III}$ $y'' = y \cdot \ln(y')$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$

Разложение частного решения $y = y(x)$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$x_0 = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x - 1) + \dots$$

0.) $y(1) = 2$

1.) $y'(1) = 1$;

2.) $y''(1) = y(1) \cdot \ln(y'(1)) = 2 \cdot \ln(1) = 0$

3.) $y''' = (y \cdot \ln(y'))' = y' \cdot \ln(y') + y \cdot \frac{1}{y'} \cdot y''$

$y'''(1) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

4.) $y^{IV} = y'' \cdot \ln(y') + y' \cdot \frac{1}{y'} \cdot y'' + \left(\frac{y \cdot y''}{y'}\right)'$

$$/^{*} \frac{(y \cdot y'')' \cdot y' - y''(y \cdot y'')}{y'^2} = \frac{(y' \cdot y'' + y''' \cdot y) \cdot y' - y''(y \cdot y'')}{y'^2} =$$

$$= y'' + \frac{y''' \cdot y}{y'} - \frac{y \cdot y''^2}{y'^2} \; {}^{*}/$$

$$y^{IV} = y''(\ln(y') + 2) + \frac{y \cdot y'''}{y'} - \frac{y \cdot y''^2}{y'^2} = 0$$

$$y(x) = 2 + \frac{1}{1}(x - 1) + 0 + 0 + \dots = x + 1$$

Решение на графике:
https://www.desmos.com/calculator/dr1x729sbx?lang=ru

Групповое задание #5:

С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$ найдите сумму указанного числового ряда.

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n-2)^2}$$

План**:**

1) Представьте функцию ее рядом Фурье.
2) Изобразите функцию и ее ряд Фурье на графике.
3) Зафиксируйте *x* так, чтобы ряд Фурье содержал искомую сумму ряда.Выразите её из равенства функции и ряда.

Решение:

5) $f(x) = 1 - x^2 \; ; \; \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n-2)^2}$

$$g(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2)\,dx = 1/\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 1/\pi \left(\pi - \pi^3/3 + \pi - \pi^3/3 \right) =$$

$$= 2 - 2\pi^2/3$$

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx) - x^2 \cdot \cos(nx))\,dx =$$

$$= 1/\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos(nx)\,dx \right) =$$

$$= 1/\pi \left(\frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{(x^2 \cdot n^2 - 2) \cdot \sin(nx) + 2xn \cdot \cos(nx)}{n^3} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{4\pi n \cdot \cos(\pi n)}{\pi \cdot n^3} = -\frac{4\cos(\pi n)}{n^2} = \frac{-4 \cdot (-1)^n}{n^2}$$

$b_n = 0$ т.к $f(x)$ - четная

$$f(x) = (1 - \pi^2/3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx)$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)^2}$$

Эx=0: $(1 - \pi^2/3) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \pi^2/12$$

$$n = k-2 \Rightarrow \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-2)^2} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-2)^2} = 1 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-2)^2}$$

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-2)^2} = \pi^2/12 - 1$$

/* $u = x^2$; $du = 2x$

$\cos(nx)\,dx = dv$; $v = \frac{\sin(nx)}{n}$ */

$$\int u \cdot dv = \int x^2 \cdot \cos(nx)\,dx = x^2 \cdot \frac{\sin(nx)}{n} - \int 2x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\,dx =$$

$$= x^2 \cdot \frac{\sin(nx)}{n} - 2/n \int x \cdot \sin(nx)\,dx =$$

/* $u = x$; $du = dx$

$dv = \sin(nx)dx$; $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$ */

$$= x^2 \cdot \frac{\sin(nx)}{n} - 2/n \left(x \cdot \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx \right) =$$

$$= x^2/n \cdot \sin(nx) - 2/n \left(-x/n \cdot \cos(nx) + 1/n \cdot \frac{\sin(nx)}{n} \right) =$$

$$= x^2/n \cdot \sin(nx) + 2x/n^2 \cdot \cos(nx) - 2/n^3 \cdot \sin(nx) =$$

$$= \frac{(x^2 \cdot n^2 - 2) \cdot \sin(nx) + 2xn \cdot \cos(nx)}{n^3}$$

Решение на графике:
https://www.desmos.com/calculator/kaeso125yk?lang=ru

Выводы:

Получены и закреплены знания по темам «Ряды» и «Дифференциальные уравнения».