Задача 17.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ A/\cos^2 x, & x \in (0,\ \pi/4); \\ 0, & x \ge \pi/4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и медиану $\operatorname{med}(X)$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{\pi/8 \le X < \pi/4\}$.

а) Используем свойство нормировки плотности распределения вероятностей:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi/4} \frac{A}{\cos^2 x}\,dx + \int_{\pi/4}^{+\infty} 0\,dx =$$

$$= A \cdot tg(x)\Big|_0^{\pi/4} = A \longrightarrow A = 1$$

б) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$

- $x \le 0: \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$
- $x \in (0; \pi/4): \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg(x)$
- $x \ge \pi/4: \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} + \int_{\pi/4}^{x} 0 \cdot dx = tg(x)\Big|_0^{\pi/4} = 1$

$$\Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ tg(x), & x \in (0; \pi/4) \\ 1, & x \ge \pi/4 \end{cases}$$

в) $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x \cdot A}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \cancel{dx} =$ /* $\int f g' = fg - \int f' g$ */

$$= x \cdot tg(x)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} tg(x) = \left(x \cdot tg(x) + \ln(\cos(x))\right)\Big|_0^{\pi/4} = \pi/4 + \ln(\sqrt{2}/2) - 0 - \ln(1) =$$

$$= \pi/4 - \frac{\ln(2)}{2} \approx 0.439$$

$med(x): tg(x) = 1/2 \rightarrow med(x) = arctg(1/2) \approx 0.464$

г) $P(\pi/8 \le x \le \pi/4):$ $\int_{\pi/8}^{\pi/4} f(x)\,dx = tg(x)\Big|_{\pi/8}^{\pi/4} = tg(\pi/4) - tg(\pi/8) \approx$

≈ 0.586