Tratamento Algébrico Para funções com restrição condicionada

Unidade 3 - Fundamentos da Análise Microeconômica

3.1 Demanda

Rafael P. Poerschke[1]

[1]Centro de Ciências Sociais e Humanas (CCSH)
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

outubro de 2022

Roteiro

Referências

Roteiro

Problema do Consumidor

Exemplos

Exercícios Propostos

Referências

- Referências Principais
  - PINDYCK, R; RUBINFELD, D. **Microeconomia**. 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2013. 742 p.
  - VASCONCELLOS, Marco Antonio Sandoval de. **Economia**: Micro e Macro. 4ed, Atlas, 2006.
- Referências Complementares
  - VARIAN, Hall R. **Microeconomia**: Princípios Básicos. 1ed. 9. Reimp. Rio de Janeiro: Campus. 2006.

Roteiro

Questões centrais da escolha do consumidor

- **Função Utilidade**: determina as preferências do consumidor;
- **Cobb-Douglas**: do tipo homogênea;
- **Solução do Problemas**: Método de Maximização da Utilidade;
- **Exercícios**: Solução e Propostos.

Roteiro

Função de Utilidade

Definição: Função Utilidade

Descreve o mapa das quantidades de bens da cesta de mercadorias dos consumidores.

Definição: Função Cobb-Douglas

Modelo Econométrico que mostra a relação entre a Utilidade do consumidor dado a cesta de consumo escolhida.

A função pode ser definida como

$$U(X, Y) = X^{\alpha} Y^{\beta}$$

tal que U Utilidade total, α e β são os parâmetros/elasticidades da função e X e Y as quantidade de unidades consumidas.

Função de Utilidade: Interpretação

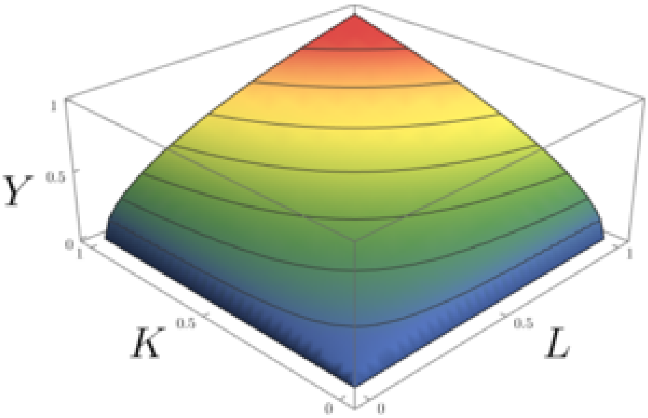
A função definida como

$$U(X, Y) = X^{\frac{1}{3}} Y^{\frac{2}{3}}$$

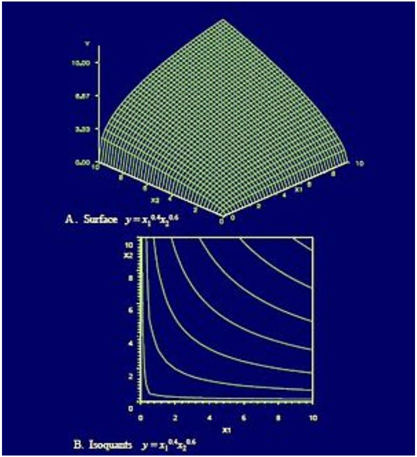
pode ser interpretada como

- se o consumo de bem X aumentar em 1%, a Utilidade Total irá crescer 1/3;
- o mesmo vale para o bem Y, i.e., se aumentar o consumo de Y em 1%, a Utilidade irá crescer 2/3.
- **Resumo**: esse consumidor atribui uma utilidade maior para Y.

Função de Utilidade: Cobb-Douglas



Função de Utilidade: Cobb-Douglas



Gráfico

O Problema da Escolha do Consumidor

Proposição:

Os consumidores maximizam sua utilidade dada uma restrição orçamentária.

O consumidor irá tentar maximizar sua **função de utilidade**,

$$\text{Máx} \quad U(X, Y) \tag{1}$$

sujeito a **restrição orçamentária**

$$R = p_x q_x + p_y q_y \tag{2}$$

tal que R é a renda consumidor, gasta em sua totalidade nos bens Y e X. Dado o nível de preço (p), queremos saber as quantidades (q) que maximizam a utilidade do consumidor.

O Problema da Escolha do Consumidor

Queremos encontrar a cesta que maximização a utilidade do consumidor:

- Suponha que o consumidor possua preferências **racionais** e não saciadas;
- e que possua uma renda $R > 0$ e que ele consuma toda sua renda em bens com preços $p >> 0$;
- Problema da maximização da utilidade:

$$\boxed{\underset{x \geq 0}{max U_X} \quad \text{sujeito a } p'x \leq R}$$

O Problema da Escolha do Consumidor

Temos então o seguinte problema

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U(X,Y) = X^a Y^b \\ R = p_x X + p_y Y \end{cases} \quad (3)$$

Para maximizar uma função sujeita a uma restrição utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange.
A equação a seguir representa o lagrangiano do problema

$$L(X,Y,\lambda) = U(X,Y) + \lambda(R - p_x X - p_y Y) \quad (4)$$

Diferenciando L em função de X, Y e λ e igualando a zero teremos:

O Problema da Escolha do Consumidor

$$\text{CPO}\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = aX^{a-1}Y^{b} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Y} = X^{a}bY^{b-1} - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_x X - p_y Y = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Condição de Maximização da Utilidade do Consumidor

$\frac{Umg_x}{Umg_y} = \frac{p_x}{p_y}$, tal que $Umg_x = \frac{\partial U_x}{\partial X}$ e $Umg_y = \frac{\partial U_y}{\partial Y}$.

O Problema da Escolha do Consumidor

$$\text{CPO} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = aX^{a-1}Y^b - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Y} = X^a bY^{b-1} - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_x X - p_y Y = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Dividindo a primeira pela segunda, temos

$$\frac{aX^{a-1}Y^b}{X^a bY^{b-1}} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} \implies \frac{bY^b\, Y^{-b+1}}{aX^{-a+1}\, X^a} = \frac{p_x}{p_y} \implies \boxed{\frac{bY}{aX} = \frac{p_x}{p_y}} \tag{7}$$

Agora podemos isolar em X ou Y para então substituir na terceira igualdade.

O Problema da Escolha do Consumidor

Isolando em Y, ficamos com

$$Y = \frac{p_x}{p_y}\frac{a}{b}X \tag{8}$$

Logo, tomando (7) e substituindo na terceira igualdade de (5)

$$R = p_x X + p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\frac{a}{b}X\right) = p_x X + \left(p_x \frac{a}{b}X\right)$$

$$\implies R - p_x X = p_x \tfrac{a}{b} X \implies R\tfrac{a}{b} - p_x X \tfrac{a}{b} = p_x X$$

$$\implies R\tfrac{a}{b} = p_x X + p_x X \tfrac{a}{b} \implies R\tfrac{a}{b} = \tfrac{bp_x X + ap_x X}{b}$$

$$\implies Ra = bp_x X + ap_x X \implies Ra = (a+b)p_x X (9)$$

e, portanto,

$$\boxed{X = \frac{a}{(a+b)}\frac{R}{p_x}} \text{ ou, } \boxed{Y = \frac{b}{(a+b)}\frac{R}{p_y}} \tag{10}$$

Roteiro

Exemplo 1 - Cobb-Douglas Homogênea

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U(X, Y) = X^\alpha Y^{1-\alpha} \\ R = p_x X + p_y Y \end{cases} \tag{11}$$

Sabemos de (9) que

$$X(p_x, p_y, R) = \frac{a}{a+b}\frac{R}{p_x} \quad \text{e} \quad Y(p_x, p_y, R) = \frac{b}{(a+b)}\frac{R}{p_y}$$

Portanto,

$$X = \frac{\alpha}{\alpha + (1-\alpha)}\frac{R}{p_x} \implies X = \alpha\frac{R}{p_x}$$

$$Y = \frac{1-\alpha}{\alpha + (1-\alpha)}\frac{R}{p_x} \implies Y = (1-\alpha)\frac{R}{p_y}$$

Exemplo 2 - Cobb-Douglas Homogênea

Considere um consumidor com renda de 150 Reais, tal que a preferência pelos bens 1 e 2 são descritas pela função $U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$. Suponha que o preço do bem 1 seja R$2 e o bem 2 custe R$5. Determine as quantidades que maximizam a utilidade desse consumidor.

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U(X_1, X_2) = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} \\ R = 2X_1 + 5X_2 \end{cases} \tag{12}$$

Utilizando (9) temos

$$X_1 = \frac{2}{3}\frac{150}{2} = 50 \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{1}{3}\frac{150}{5} = 10$$

Exemplo 2 - Cobb-Douglas Homogênea

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U\left(X_1, X_2\right) = 50^{\frac{2}{3}} 10^{\frac{1}{3}} = 29,24017 \\ 150 = 2(50) + 5(10) \end{cases} \tag{13}$$

A expressão (13) fornece a Utilidade total desse consumidor.

$$X_1 = \frac{2}{3}\frac{150}{2} = 50 \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{1}{3}\frac{150}{5} = 10$$

Disso, temos que as quantidades que maximizam a utilidade do consumidor são 50 un. do bem 1 e 10 do bem 2. Gráfico

Exemplo 2 - Cobb-Douglas Homogênea

Seguindo, podemos calcular o multiplicador da renda:

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U(X_1, X_2) = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} \\ R = 2X_1 + 5X_2 \end{cases} \tag{14}$$

que pode ser calculado por

$$\lambda = \frac{Umg_x}{P_{X_1}} = \frac{\frac{2}{3} 50^{\frac{-1}{3}} 10^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{0,38986}{2} \quad = \quad 0,19493 \approx \lambda = 0,2$$

Disso, temos que caso a renda aumente em uma unidade monetária, a utilidade aumenta em 0,2. Essa é a proporção, que também pode ser vista ainda na forma de aumento de 10% da renda, \$15, impacta em $15 \times 0,2 = 3$ unidades na Utilidade.

Gráfico

Roteiro

Tarefa individual: atividade de fixação

- Exercício 1 - Suponha que o bem x é vendido por \$1 e y por \$ 4. Ainda, assumimos que um consumidor, que possui uma renda de \$ 8, gasta toda essa renda no consumo desses dois bens. Suponha também que esse consumidor gaste essa renda em parcelas iguais entre os dois itens, isto é, $\alpha = \beta = 0,5$.
- Determine as **quantidades** que equilibram esse mercado. Qual seria o **multiplicador da Renda** (λ)?

Tarefa individual: atividade de fixação

- Exercício 1 - Solução
  Utilizamos (3) para reescrever o problema, temos

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U(X,Y) = X^{0,5}Y^{0,5} \\ 8 = 1X + 4Y \end{cases}$$

Portanto, de (4)

$$L(X,Y,\lambda) = X^{0,5}Y^{0,5} + \lambda(8 - X - 4Y)$$

$$\text{CPO} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = 0,5X^{-0,5}Y^{0,5} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Y} = X^{0,5}0,5Y^{-0,5} - 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 8 - 1X - 4Y = 0 \end{cases}$$

Tarefa individual: atividade de fixação

- Exercício 1 - Solução Tal que, pela CPO podemos escrever

$$\frac{0,5X^{-0,5}Y^{0,5}}{X^{0,5}0,5Y^{-0,5}} = \frac{1}{4} \implies \frac{Y^{0,5}0,5Y^{0,5}}{0,5X^{0,5}X^{0,5}} = \frac{1}{4}$$

$$\implies \frac{0,5Y}{0,5X} = \frac{1}{4} \implies 4Y = X$$

Portanto,

$$8 = 1(4Y) + 4Y \implies \boxed{Y = 1} \iff \boxed{X = 4}.$$

Logo, a **Utilidade Total** será

$$U(4,1) = \left(4^{0,5}\right)\left(1^{0,5}\right) \implies \boxed{2 = U(4,1)}$$

Tarefa individual: atividade de fixação

- Exercício 1 - Solução Do multiplicador da renda, temos:

$$\frac{Umg_X}{\partial p_X} = \lambda \implies 0,5X^{-0,5}Y^{0,5} = \lambda$$

$$\frac{\left[0,5\left(4^{-0,5}\right)\left(1^{0,5}\right)\right]}{1} = \lambda \implies \boxed{\lambda = 0,25}$$

O multiplicador (interpretação:dado um aumento de renda, existe uma proporção que é repassada para a Utilidade Total. Isso significa que 1% de aumento na renda do consumidor ($8,08) implica em um aumento na Utilidade Total para 2,02 utils. De outra forma, esse aumento de $0,08 (centavos) multiplicado pelo $\lambda = 0,25$ implica que a Utilidade total cresce 0,02.

Tarefa: atividade de fixação

- Exercício 2 - A função utilidade de um dado consumidor é $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, em que x_1 e x_2 representam os bens 1 e 2, respectivamente. Sabe-se que a renda é de 180 unidades monetárias e que o preço do bem 1 e do bem 2 correspondem a \$1 e \$3 unidades monetárias, respectivamente. Considerando essas informações, avalie as assertivas:
- a) A cesta ótima é obtida quando $U(x_1, x_2) = (90, 30)$;
- b) A Utilidade Marginal do bem 2 é igual a x_1^2.

Tarefa: atividade de fixação

- Exercício 2 - Solução

  Utilizamos (3) para reescrever o problema, temos

$$\text{Maximização da Utilidade} \begin{cases} U(X,Y) = X_1^2 X_2^1 \\ 180 = 1X_1 + 2X_2 \end{cases}$$

Portanto, de (4)

$$L(X_1, X_2, \lambda) = X_1^2 X_2^1 + \lambda(180 - X_1 - 2X_2)$$

Tal que, pela CPO podemos escrever

$$\text{CPO} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = 2X_1^1 X_2^1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Y} = X_1^2 - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - 1X_1 - 2X_2 = 0 \end{cases}$$

Tarefa: atividade de fixação

- Exercício 2 - Solução
- a) A cesta ótima é obtida quando $U(x_1, x_2) = (90, 30)$;
  FALSO

$$\text{CPO}\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = 2X_1^1 X_2^1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Y} = X_1^2 - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - 1X_1 - 2X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2X_1^1 X_2^1}{X_1^2} = \frac{1}{2} \implies X_2 = X_1$$

Portanto,

$$180 = 1X_1 + 2X_1 \implies X_1 = \frac{180}{3} \iff \boxed{X_1 = X_2 = 60}.$$

Tarefa: atividade de fixação

- Exercício 2 - Solução
- b) A Utilidade Marginal do bem 2 é igual a X_1^2.

VERDADEIRO

$$Umg_{X_2} = \frac{\partial U}{\partial X_2} = \boxed{X_1^2}$$

Considerando essas informações, avalie as assertivas:

Tratamento Algébrico Para funções com restrição condicionada

Unidade 3 - Fundamentos da Análise Microeconômica

3.1 Demanda

Rafael P. Poerschke[1]

[1]Centro de Ciências Sociais e Humanas (CCSH)
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

outubro de 2022