

# Decomposição em Valores Singulares: Análise dos COREDEs Agropecuários do Rio Grande do Sul com Base no Censo Agrícola de 2017

Matemática Aplicada

Rafael P. Poerschke, João Lazzarin e Fernando Tura<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE)  
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

Novembro de 2023

# Roteiro

Referências

Introdução

Desenvolvimento

Resultados

Considerações Finais

# Referências

## ▶ Referências Principais

- ▶ JOLLIFFE, Ian T. (1990). Principal component analysis: a beginner's guide—I. Introduction and application. *Weather*, v. 45, n. 10, p. 375-382.
- ▶ JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. and others. (2002) *Applied multivariate statistical analysis*, Prentice hall Upper Saddle River, NJ.

## ▶ Referências Complementares

- ▶ SCHNEIDER, S., WAQUIL, F. (2001). Caracterização socioeconômica dos municípios gaúchos e desigualdades regionais *Revista de Economia e Sociologia Rural*, 3(39), 117–142.
- ▶ STRANG, G. (1989). *Linear algebra and learning from data*, 1ed. SIAM.
- ▶ Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. (2017) *Censo Agropecuário 2017*. Rio de Janeiro, RJ: IBGE, 2017. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhesid=73096>. Acesso em: 23 julho 2023.

# Roteiro

Referências

Introdução

Desenvolvimento

Resultados

Considerações Finais

# Questões centrais da pesquisa

- ▶ **COREDEs:** Conselhos Regionais de Desenvolvimento;
- ▶ **Decomposição em Valores Singulares:** Aplicação na Análise de Componentes Principais;
- ▶ **Componentes Principais:** Estimar para dados Sócio-Econômicos.

# Questões centrais da pesquisa

- ▶ **COREDEs:** Conselhos Regionais de Desenvolvimento;
- ▶ **Decomposição em Valores Singulares:** Aplicação na Análise de Componentes Principais;
- ▶ **Componentes Principais:** Estimar para dados Sócio-Econômicos.

# Questões centrais da pesquisa

- ▶ **COREDEs:** Conselhos Regionais de Desenvolvimento;
- ▶ **Decomposição em Valores Singulares:** Aplicação na Análise de Componentes Principais;
- ▶ **Componentes Principais:** Estimar para dados Sócio-Econômicos.

# Problema de Pesquisa

O foco do presente estudo está em selecionar os **componentes principais** a fim de investigar os COREDEs agropecuários gaúchos, considerando a existência de similaridade entre os municípios com base nos dados do Censo Agropecuário de 2017. Em um universo de 127 municípios, agregados em 8 COREDEs predominantemente **agropecuários**, questiona-se o quão homogêneo será esse grupo, isto é, **em que medida** a agregação por contiguidade, garantiria a homogeneidade dos COREDEs.



# Roteiro

Referências

Introdução

Desenvolvimento

Resultados

Considerações Finais

# COREDEs: Origem

## Definição: Conselhos Regionais de Desenvolvimento

Os Conselhos Regionais de Desenvolvimento – COREDEs, criados oficialmente pela Lei 10.283 de 17 de outubro de 1994, são um fórum de discussão para a promoção de políticas e ações que visam o desenvolvimento regional.

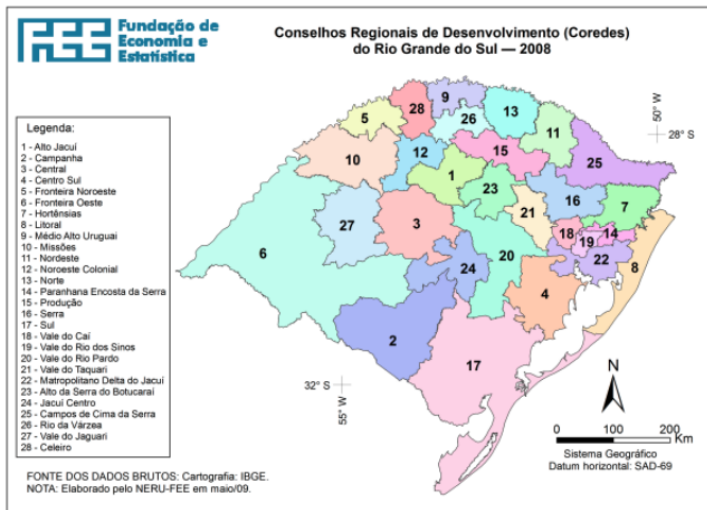
Temos **28** COREDEs e **497** municípios no estado - começou com 21.

# COREDEs: Origem

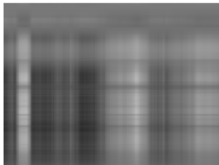
**Rumos 2015:** Estudo de Desenvolvimento Regional e Logística de Transportes no Rio Grande do Sul/SCP-DEPLAN. Porto Alegre, 2006. Neste estudo o agrupamento em regiões foi baseado em critérios de:

- ▶ homogeneidade econômica, ambiental e social;
- ▶ e em variáveis relacionadas à identificação das polarizações de emprego, dos deslocamentos por tipo de transporte, da hierarquia urbana, da organização da rede de serviços de saúde e educação superior, entre outros.

# COREDEs: Localização



# Componentes Principais: Ideia principal



(a) 1 principal component



(b) 5 principal component



(c) 9 principal component



(d) 13 principal component



(e) 17 principal component



(f) 21 principal component

# Dados: A Matriz de Entrada (**X**)

Algebricamente, podemos representar a matriz  $\mathbf{X}_{n \times p}$ , com entradas  $x_{ij}$  para  $i$ -ésimo item da linha e  $j$ -ésima variável da coluna, como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = [x_{ij}], \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.1)$$

# Matriz de Variância-Covariância Amostral (**S**)

Observe que a matriz **S** é uma matriz amostral simétrica, tal que  $i = j$  temos a variância e, caso contrário, teremos a covariância. Formalmente, pode-se escrever:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

# Correlação Amostral (**R**)

A matriz de correlação pode ser representada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{ip} \\ r_{12} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ip} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{p \times p} . \quad (3.3)$$

Tal que a correlação amostral é dada por

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$$



# Decomposição em Valores Singulares (reduzida)

## Teorema: Decomposição em Valores Singulares<sup>1</sup>

Se  $\mathbf{X}$  é uma matriz ( $n \times p$ ) de posto  $p$ , então  $\mathbf{X}$  pode ser escrita como

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{V}^t \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{U}_{n \times r}$  e  $\mathbf{V}_{p \times r}$  são matrizes com colunas ortonormais ( $\mathbf{U}^t\mathbf{U} = \mathbf{V}^t\mathbf{V} = \mathbf{I}$ ) e  $\mathbf{L}_{r \times r}$  é a matriz diagonal dos  $r$  primeiros autovalores (maiores) autovalores singulares positivos  $l_r$ , tal que  $l_r = \sqrt{\lambda_r}$  de  $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$ .

---

<sup>1</sup>A demonstração do teorema pode ser consultada em Strang (2019).

# Componentes Principais

## Teorema: Componentes Principais de Variáveis Aleatórias<sup>2</sup>

Assuma que  $\text{posto}(\mathbf{S}_X) \geq d$ . Então os primeiros  $d$  componentes principais de uma variável aleatória multivariada  $\mathbf{X}$ , denotado por  $w_i$  para  $i = 1, 2, \dots, d$ , são dados por

$$w_i = u_i^T \mathbf{X},$$

onde  $\{u_i\}_{i=1}^d$  são os  $d$  autovetores de  $\mathbf{S}_X = \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$  associada com os  $d$  maiores autovalores  $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ . Além disso,  $\lambda_i = \text{Var}(w_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, d$ .

---

<sup>2</sup>A demonstração do teorema pode ser consultada em Jolliffe (1990). 

# Roteiro

Referências

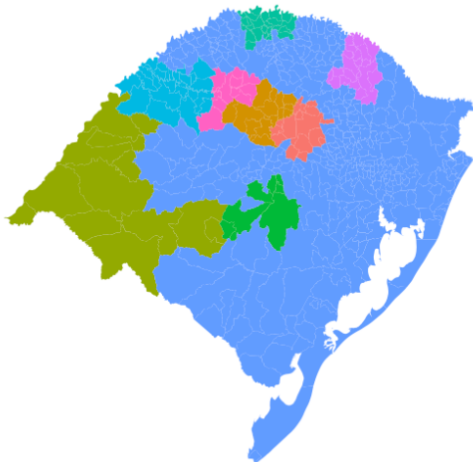
Introdução

Desenvolvimento

Resultados

Considerações Finais

# COREDEs Agropecuários



## COREDEs



# Componentes Principais: dados de entrada

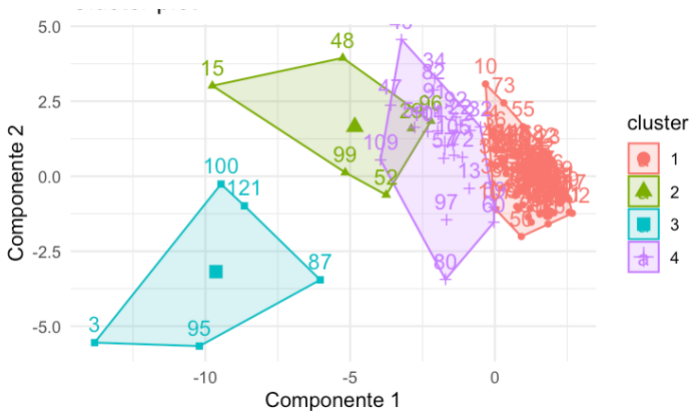
Inicialmente, a análise exploratória dos 8 COREDEs agropecuários utilizou 19 variáveis explicativas. Ao fim e ao cabo, restaram **12 variáveis** coletadas em IBGE (2017), que estão listadas na Tabela 1.

A tabela revela também que, dos 12 autovalores reais possíveis, apenas **3 foram maiores** que a unidade ( $\lambda_1 = 7,54$ ;  $\lambda_2 = 2,14$ ;  $\lambda_3 = 1,23$ ), que juntos responderam por cerca de 91% da variância do conjunto original de dados.

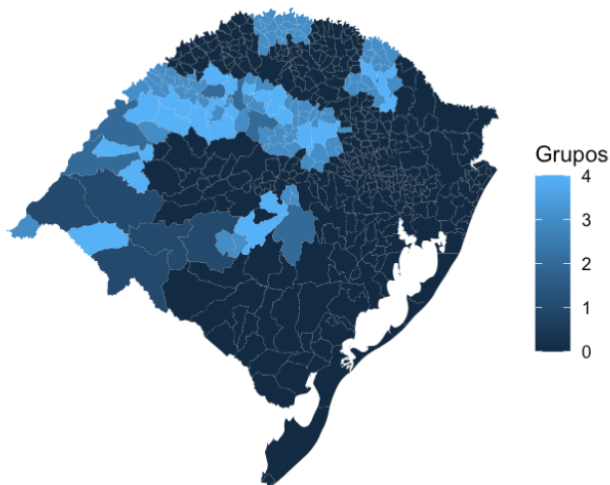
# Componentes Principais: Resultados

Tabela 1 - Correlação das Variáveis com os Componentes Principais			
	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Financiamento Vegetal (R\$)	-0,44	0,79	0,30
Financiamento Pecuária (R\$)	-0,71	-0,39	0,46
Assi. Técnica Prod. Vegetal	-0,43	0,71	0,47
Assi. Técnica Prod. Animal	-0,84	-0,43	0,25
Número de Colheitadeiras	-0,83	0,38	-0,28
Número de Tratores	-0,93	0,24	-0,09
Rebanho Bovino	-0,82	-0,51	0,03
Pop. Economicamente Ativa	-0,92	0,05	0,30
População	-0,84	0,00	-0,16
Valor da Prod. Vegetal	-0,85	0,13	-0,47
Receita com Lavouras	-0,85	0,10	-0,47
Valor da Prod. Pecuária	-0,86	-0,44	0,08

# Grupos: usando dois componentes

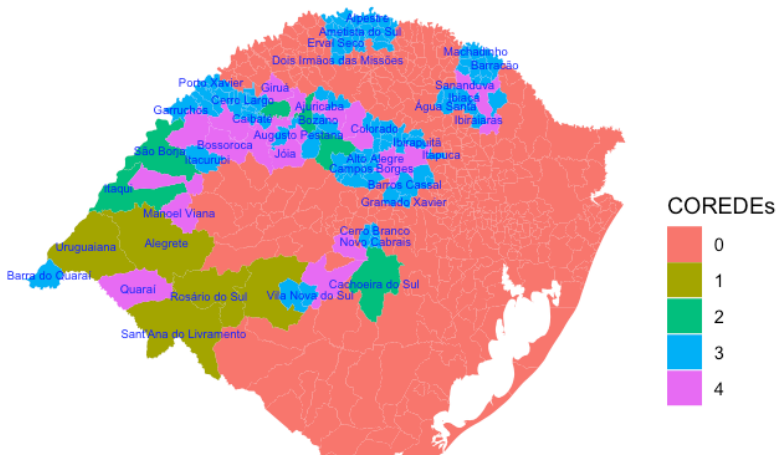


# Grupos - COREDEs Agropecuários





## Grupos - COREDEs Agropecuários



# Roteiro

Referências

Introdução

Desenvolvimento

Resultados

Considerações Finais

# Questões em aberto

- ▶ **Passo 1:** Relação dos grupos com componentes;
- ▶ **Passo 2:** Refinar a parte de Agrupamentos.
- ▶ **Sugestão:** Comparar com o passado.

# Questões em aberto

- ▶ **Passo 1:** Relação dos grupos com componentes;
- ▶ **Passo 2:** Refinar a parte de Agrupamentos.
- ▶ **Sugestão:** Comparar com o passado.

# Questões em aberto

- ▶ **Passo 1:** Relação dos grupos com componentes;
- ▶ **Passo 2:** Refinar a parte de Agrupamentos.
- ▶ **Sugestão:** Comparar com o passado.

# Decomposição em Valores Singulares: Análise dos COREDEs Agropecuários do Rio Grande do Sul com Base no Censo Agrícola de 2017

Matemática Aplicada

Rafael P. Poerschke, João Lazzarin e Fernando Tura<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE)  
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

Novembro de 2023