MATRIZES e MQO MATRICIAL

Luísa Gisele Böck

2023-06-20

MATRIZES

Uma **matriz** é representada como uma *tabela de elementos dispostos em linhas e colunas*, sendo definida como um arranjo retangular de números, parâmetros ou variáveis, denominados de elementos da matriz. Para denotar uma matriz, é usado sempre letras maiúsculas e, quando se quer especificar a ordem de uma matriz $\mathbf{A}$ (o número de linhas e colunas), é escrito $\mathbf{A}_{m\times n}$. Para localizar um elemento de uma matriz, se diz a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz:

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

o elemento que está na primeira linha e na terceira coluna é o -4, isto é, $a_{13} = -4$. Ainda neste exemplo, temos $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -3$ e $a_{23} = 2$.

Definição: duas matrizes $\mathbf{A}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{r\times s} = [b_{ij}]_{r\times s}$ são iguais, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se elas têm o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$), e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ji}$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen } 90^o & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Quadrada: é uma matriz onde o número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). No caso de matrizes quadradas $\mathbf{A}_{m\times x}$, costumamos dizer que $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem m.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula: é uma matriz onde todos os elementos são iguais a zero, isto é, $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplos:

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz-Coluna: é uma matriz que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix}$$

Matriz-Linha: é uma matriz que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal: é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade: é uma matriz em que $a_{ij} = 1$, para $i = j$; e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. É o exemplo mais importante de *Matriz Diagonal*.

Exemplos:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \text{a} & \text{b} \\ 0 & \text{c} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica: é uma matriz quadrada onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} \\ \text{b} & \text{e} & \text{f} & \text{g} \\ \text{c} & \text{f} & \text{h} & \text{i} \\ \text{d} & \text{g} & \text{i} & \text{k} \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Adição: a soma de duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A}_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{m\times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que é indicado como $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Isto é,

$$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+4 \\ 4-2 & 0+5 \\ 2+1 & 5+0 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

A adição de matrizes requer apenas a soma dos elementos correspondentes das duas matrizes, onde a ordem em que cada par de elementos é somado não tem importância. A operação de **subtração** $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ pode ser considerada como a operação de adição $(\mathbf{A} + (-\mathbf{B}))$.

Propriedades: dadas as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ de mesma ordem $m \times n$, temos:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade);
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade);
- $\mathbf{A} + 0 = \mathbf{A}$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

Multiplicação por Escalar: multiplica-se o número escalar por cada um dos elementos da matriz. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz

$$k \cdot \mathbf{A} = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo:

$$-2\begin{bmatrix}2 & 10\\ 1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\cdot 2 & -2\cdot 10\\ -2\cdot 1 & -2\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & -20\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

Propriedades: dadas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem $m \times n$ e números k, k_1 e k_2, temos:

- $k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$;
- $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$;
- $0 \cdot \mathbf{A} = 0$, isto é, ao multiplicar o número zero por qualquer matriz $\mathbf{A}$, resultará em uma matriz nula;
- $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.

Transposição: ocorre quando as linhas e colunas de uma matriz $\mathbf{A}$ são intercambiadas – de modo que a primeira linha da matriz $\mathbf{A}$ é igual a primeira coluna da matriz $\mathbf{A}'$ e vice-versa. Em outras palavras, dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, é possível obter uma outra matriz $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de $\mathbf{A}$, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. $\mathbf{A}'$ é denominada *transposta* de $\mathbf{A}$.

Exemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}_{2\times 1} \qquad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Por definição, se uma matriz $\mathbf{A}$ é $m \times n$, então sua transposta $\mathbf{A}'$ deve ser $n \times m$. E uma matriz quadrada $n \times n$ possui uma transposta com a mesma dimensão.

Propriedades:

- Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela for igual à sua transposta, isto é, se, e somente se, $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Observe a matriz $\mathbf{C}$ acima);
- $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma;
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$, ou seja, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas;
- $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, onde k é qualquer escalar.

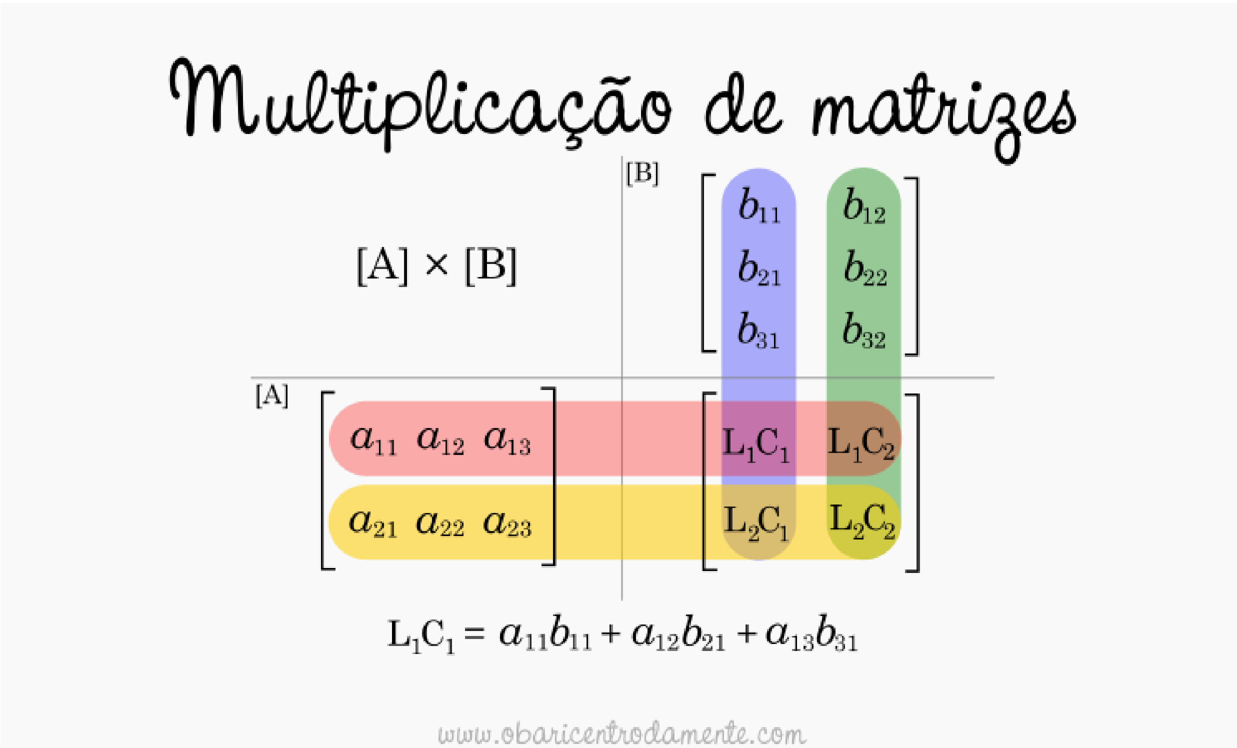
Multiplicação de Matrizes: sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{rs}]_{n\times p}$, obtemos $\mathbf{AB} = [c_{uv}]_{m\times p}$

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \cdots + a_{un}b_{nv}$$

Observações:

- Só é possível efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{l\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda ($n = l$). Além disso, a matriz-resultado $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ será de ordem $m \times p$.

- O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz produto) é obtido através da multiplicação dos elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz e pela soma destes produtos.



Exemplos:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}_{③\times 2} \bullet \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 4\end{bmatrix}_{2\times ②} = \begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot 4\\4\cdot 1+2\cdot 0 & 4\cdot(-1)+2\cdot 4\\5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-1)+3\cdot 4\end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 4\\5 & 7\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 3\\5 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}_{④\times 2} \bullet \begin{bmatrix}0 & 6 & 1\\3 & 8 & -2\end{bmatrix}_{2\times ③} = \begin{bmatrix}0 & 6 & 1\\9 & 12 & -8\\12 & 62 & -3\\3 & 8 & -2\end{bmatrix}_{4\times 3}$$

O exemplo a seguir representa uma multiplicação *impossível* de ser realizada, uma vez que o número de colunas da primeira matriz é diferente do número de linhas da segunda matriz.

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2} \bullet \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Propriedades:

- Em geral, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, isto é, não há comutatividade. Podendo, inclusive, um estar definido e o outro não. Por exemplo, sejam:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

  Então:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (justificando o nome da matriz identidade);
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma);
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma);
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associatividade);
- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (a ordem da transposta é invertida);
- $0 \cdot \mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{A} \cdot 0 = 0$

Determinante

O **determinante** de uma matriz é um *número escalar real unicamente associado à uma matriz quadrada*, isto é, uma matriz que apresenta o mesmo número de linhas e de colunas ($m = n$). Esse conceito é extremamente útil, por exemplo, para identificar se uma matriz é inversível (ou não), sendo representado por:

$$\det \mathbf{A} \qquad \text{ou} \qquad \left|\mathbf{A}\right| \qquad \text{ou} \qquad \det\,[a_{ij}]$$

Dessa forma:

$$det\ [a] = a$$

Para uma matriz 1×1, o determinante é igual ao próprio elemento único da matriz.

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para uma matriz 2×2, seu determinante é definido como a soma de dois termos que é obtida multiplicando-se os dois elementos da diagonal principal e depois subtraindo o produto dos dosi elementos da diagonal segundária. Em razão da dimensão da matriz, o seu determinante é denominado um *determinante de segunda ordem.*

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Propriedades:

- se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz $\mathbf{A}$ são nulos, o $\det \mathbf{A} = 0$;

- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$;
- ao multiplicar uma linha da matriz por uma constante, o determinante desta matriz fica multiplicado por esta constante;
- ao trocar a posição de duas linhas da matriz, o determinante troca de sinal;
- o determinante de uma matriz que possui duas linhas (ou colunas) iguais é igual a zero;
- $\det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B})$

Matriz Inversa

A **matriz inversa** (ou **matriz inversível**) da matriz $\mathbf{A}$ é denominada pelo símbolo $\mathbf{A}^{-1}$. O produto de uma matriz pela sua inversa resulta na matriz identidade – $\mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{A}^{-1}_{n\times n} = \mathbf{I}_n$ –, que nada mais é do que o elemento neutro da multiplicação de matrizes. Para que a matriz possua inversa, ela precisa ser quadrada e, ainda, o seu determinante tem que ser diferente de zero, caso contrário não haverá inversa.

Propriedades:

- Nem toda matriz quadrada possui inversa – ser quadrada é uma condição *necessária*, mas *não* é uma condição *suficiente* para a existência de uma inversa.
- Para cada matriz é possível encontrar uma única inversa, ou seja, se existir uma inversa, ela será única: se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada e existe uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, então $\mathbf{A}$ é inversível, ou seja, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e, além disso, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$;
- Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (isto é, existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1})$;
- Se $\mathbf{A}$ for de ordem $n \times n$, então $\mathbf{A}^{-1}$ também deve ser $n \times n$ e a matriz identidade produzida pela multiplicação também será de ordem $n \times n$;
- se existir a inversa $\mathbf{A}^{-1}$, então a matriz $\mathbf{A}$ pode ser considerada como a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$, exatamente como $\mathbf{A}_{-1}$ é a inversa de **A** - $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{-1}$ são inversas uma da outra.

Procedimento para a inversão de matrizes

Se uma matriz $\mathbf{A}$ pode ser reduzida à matriz identidade, por uma sequência de operações elementares com linhas, então $\mathbf{A}$ é inversível e a matriz inversa de $\mathbf{A}$ é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

Na prática, são realizadas operações simultaneamente com as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$, através de operações elementares, até chegar à matriz $\mathbf{I}$ na posição correspondente à matriz $\mathbf{A}$. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz $\mathbf{I}$ será a inversa de $\mathbf{A}$.

$$(\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}) \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{I} \vdots \mathbf{A^{-1}})$$

Exemplo 1: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

É colocado a matriz junto com a matriz identidade e aplicado as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a $\mathbf{A}$) à forma escalada linha reduzida, lembrando que cada operações deve ser efetuada simultaneamente na parte direita (que corresponde a $\mathbf{I}$).

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{1}{2}\right) \cdot L_1 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_2 - L_1 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_4 + L_1 \to L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (-2) \cdot L_2 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot L_2 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_2 - L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{1}{2}\right) \cdot L_2 - L_4 \to L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad L_3 + L_1 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad L_2 - (2) \cdot L_3 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad L_3 - L_4 \to L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad L_1 - (2)\cdot L_4 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad L_2 - (4)\cdot L_4 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad L_3 + (3)\cdot L_4 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_1 - L_2 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot L_2 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (2)\cdot L_2 - L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Como a forma escada não é a identidade, a matriz $\mathbf{A}$ (do Exemplo 2) não tem inversa.

MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS (MQO)

É possível apresentar o modelo clássico de regressão linear envolvendo k variáveis (Ye$X_2, X_3, \ldots, X_k$) em notação matricial. Uma grande vantagem da álgebra matricial é a utilização de um método compacto para tratar os modelos de regressão envolvendo qualquer número de variáveis.

A forma algébria de uma regressão linear é dada da seguinte forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

e pode ser definida em termos matriciais e vetores como $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

onde:

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}_{n\times(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}; \quad \beta_{(k+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \quad \epsilon_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

em que

- **Y** é um vetor coluna $n \times 1$ de observações da variável dependente Y;
- **X** é uma matriz $n \times (k+1)$ dando n observações das k variáveis de X_2aX_3, a primeira coluna toda de 1 representa o termo do intercepto (β_0) (essa matriz também é conhecida como **matriz dos dados**);
- β é um vetor coluna $(k+1) \times 1$ de parâmetros desconhecidos $\beta_0, \beta_1, beta_2 \ldots \beta_k$;
- ϵ é um vetor coluna $n \times 1$ de n termos de erro u_i.

Estimativa por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)

O método dos MQO consiste em estimar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ de forma que $\sum \hat{u}_i^2$ seja o menor possível.

Para encontrar os parâmetros, é preciso estimar o vetor dos betas (β), tal que $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$.

1. Primeiro, calcula-se a multiplicação entre $(X'X)$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}$$

2. Depois, encontra-se a matriz inversa de $(X'X)$:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

3. Calcula-se a multiplicação de $X'Y$:

$$\mathbf{X}'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix}$$

4. E, por fim, realiza-se a multiplicação de $(X'X)^{-1}X'Y$. Seu resultado será o(s) valor(es) de $\hat{\beta}$.

Exemplo:

Para ilustrar a representação matricial, será considerado um modelo de duas variáveis, renda e consumo, ($Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$), em que Y é a despesa com consumo e X é a renda.

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_7 \\ \epsilon_8 \\ \epsilon_9 \\ \epsilon_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

1. Calcular a multiplicação $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 80 & 100 & 120 & 140 & 160 & 180 & 200 & 220 & 240 & 260 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1700 \\ 1700 & 322000 \end{bmatrix}$$

2. Encontrar a inversa de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 1700 \\ 1700 & 322000 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,97576 & -0,005152 \\ -0,005152 & 0,0000303 \end{bmatrix}$$

3. Calcular a multiplicação $\mathbf{X}'Y$:

$$\mathbf{X}'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 80 & 100 & 120 & 140 & 160 & 180 & 200 & 220 & 240 & 260 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1110 \\ 205500 \end{bmatrix}$$

4. Realizar a multiplicação de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,97576 & -0,005152 \\ -0,005152 & 0,0000303 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1110 \\ 205500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,4545 \\ 0,5079 \end{bmatrix}$$

Portanto, os valores de β obtidos no método de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) Matricial foram $\beta_0 = 24,4545$ e $\beta_1 = 0,5079$.

5. Formar a equação de regressão com os parâmetros encontrados:

$$\hat{Y}_i = 24,455 + 0,508X_i$$

6. Estimar a despesa ($\hat{Y}_i$) a partir da equação de regressão encontrada:

Despesa (Y)	Renda (X)	Despesa estimada ($\hat{Y}_i$)	Resíduos (ϵ_i)
70	80	65.095	4.905
65	100	75.255	-10.255
90	120	85.415	4.585
95	140	95.575	-0.575
110	160	105.735	4.265
115	180	115.895	-0.895
120	200	126.055	-6.055
140	220	136.215	3.785
155	240	146.375	8.625
150	260	156.535	-6.535

MQO Matricial utilizando a Linguagem R

1. Criar vetores da variável dependente (Y) e da matriz $\mathbf{X}$ com as variáveis explicativas e a constante. Para criar uma matriz, é usado o comando `matrix()`.

```r
Y <- matrix(
  c(70, 65, 90, 95, 110, 115, 120, 140, 155, 150),
  ncol = 1
)

X <- matrix(
  c(rep(1, length(Y)),
     c(80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260)),
  ncol = 2,
  byrow = FALSE
)

# cria a matriz
matriz1 <- cbind(Y, X)

matriz1
```

```
##       [,1] [,2] [,3]
##  [1,]   70    1   80
##  [2,]   65    1  100
##  [3,]   90    1  120
##  [4,]   95    1  140
##  [5,]  110    1  160
##  [6,]  115    1  180
##  [7,]  120    1  200
##  [8,]  140    1  220
##  [9,]  155    1  240
## [10,]  150    1  260
```

2. Para encontrar os parâmetrós β, é preciso estimar o vetor de betas, tal que $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$. Para encontrar a **Matriz Transposta** é necessário digitar `t(nome_da_matriz)`. O comando `%*%` é o responsável por realizar a **multiplicação de Matrizes**.

```r
# é encontrado a matriz XtX realizando a
# multiplicação da matriz X por sua transposta

XtX <- t(X) %*% X

XtX
```

```
##      [,1]   [,2]
## [1,]   10   1700
## [2,] 1700 322000
```

```r
# é encontrado a matriz XtY realizando a multiplicação
# da matriz transposta de X pela matriz Y

XtY <- t(X) %*% Y

XtY
```

```
##        [,1]
## [1,]   1110
## [2,] 205500
```

3. Encontrar a **Matriz Inversa** de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, ou seja $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Para encontrar a **Matriz Inversa** de uma matriz é usado o comando `solve(nome_da_matriz)`.

```
XtX_inversa <- solve(XtX)

XtX_inversa
```

```
##               [,1]          [,2]
## [1,]  0.975757576 -5.151515e-03
## [2,] -0.005151515  3.030303e-05
```

4. Agora é possível encontrar a os parâmetros β da equação. Para isso, é calculado $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \vec{\beta}$

```
beta_vec <- XtX_inversa %*% t(X) %*% Y

beta_vec
```

```
##             [,1]
## [1,] 24.4545455
## [2,]  0.5090909
```

Comparando os resultados com a saída de regressão linear

1. Criar os vetores da variável dependente (Y_i) e das variáveis independentes $(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in})$ e juntalos em um data frame.

```
despesa <- c(70, 65, 90, 95, 110, 115, 120, 140, 155, 150)
renda <- c(80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260)

exemplo1 <- data.frame(despesa, renda)

exemplo1
```

```
##    despesa renda
## 1       70    80
## 2       65   100
## 3       90   120
## 4       95   140
## 5      110   160
## 6      115   180
## 7      120   200
## 8      140   220
## 9      155   240
## 10     150   260
```

2. Para rodar a regressão linear, basta acionar o comando `lm()`, seguido da função `summary(nome_do_modelo)`:

```
mod1 <- lm(despesa ~ renda, data = exemplo1)

summary(mod1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = despesa ~ renda, data = exemplo1)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -10.364  -4.977   1.409   4.364   8.364
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 24.45455    6.41382   3.813  0.00514 **
## renda        0.50909    0.03574  14.243 5.75e-07 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.493 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9621, Adjusted R-squared:  0.9573
## F-statistic: 202.9 on 1 and 8 DF,  p-value: 5.753e-07
```

O modelo indica que as variáveis Y (consumo) e X_i (renda) relacionam-se positivamente. O parâmetro `renda` possui um `p-valor` muito próximo à zero, indicando que é estatisticamente significante. O R^2 é igual a 0.9621, indicando que 96.21% da equação pode ser explicada pela variável explicativa (`renda`).

```
anova(mod1)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: despesa
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## renda      1 8552.7  8552.7  202.87 5.753e-07 ***
## Residuals  8  337.3    42.2
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

O **Teste F** possui `p-valor` muito próximo à zero, demonstrando que os parâmetros são conjuntamente significativos.

3. Para montar a tabela com os valores de Y ajustados ($\hat{Y}_i$):

```
# para encontrar os coeficientes
constante <- mod1$coefficients[1]
beta1_hat <- mod1$coefficients[2]

# para encontrar os valores ajustados
y_hat <- mod1$fitted.values

# para encontrar os valores dos resíduos (erros)
residuos <- mod1$residuals

# para montar a tabela
tabela_2 <- tibble::tibble(despesa, renda, y_hat, residuos)
```

```r
knitr::kable(
  tabela_2,
  "pipe",
  col.names = c(
    "Despesa (Y)", "Renda (X)", "Despesa estimada ($\\hat{Y}_{i}$)", "Resíduos ($\\epsilon_{i}$)"
  ),
  align = c("c", "c", "c", "c")
)
```

Despesa (Y)	Renda (X)	Despesa estimada ($\hat{Y}_{i}$)	Resíduos (ϵ_{i})
70	80	65.18182	4.8181818
65	100	75.36364	-10.3636364
90	120	85.54545	4.4545455
95	140	95.72727	-0.7272727
110	160	105.90909	4.0909091
115	180	116.09091	-1.0909091
120	200	126.27273	-6.2727273
140	220	136.45455	3.5454545
155	240	146.63636	8.3636364
150	260	156.81818	-6.8181818

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, José Luiz *et al.* **Álgebra Linear** 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kevin. **Matemática para Economistas.** Tradução de Arlete Simille Marques. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006. Título original: Fundamental Methods of Mathematical Economics.

GUJARATI, Damodar N.; PORTER, Dawn C. **Econometria Básica.** Tradução de Denise Durante, Mônica Rosemberg, Maria Lúcia G. L. Rosa. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011. Título original: Basic Econometrics.

WOOLDRIDGE, Jeffrey M. **Introdução à econometria: uma abordagem moderna.** Tradução de Priscilla Rodrigues da Silva Lopes e Livia Marina Koeppl. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2019. Título original: Introductory Econometrics: A Modern Approach.